Mathématique et Pédagogie

Périodique bimestriel publié par la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*

Sommaire

N° 75 **Janvier – Février 1990**

Éditorial

J. Wilmet,

Beaucoup de fonctions importantes dans la société ont changé de main cette année. Guy NOEL est devenu directeur de MATH-JEUNES. Rita LESPLINGART est la nouvelle trésorière et Gérard TROESSAERT s'occupe à partir de maintenant de la préparation et de la sélection aux Olympiades mathématiques internationales.

La fonction de directeur de la revue est l'une des plus importantes au sein de notre association. Il y a peu, ne disait-on pas, à tort : "être abonné à M & P" au lieu de "être membre de la S.B.P.M.ef". Claudine FESTRAETS a demandé d'être déchargée de ce travail pour se consacrer aux relations publiques de l'Olympiade mathématique belge. Jacques BAIR, membre de notre comité depuis 1987, professeur à l'Université de LIEGE et conférencier habituel de nos congrès, devient le nouveau rédacteur en chef de MATHEMATIQUE & PEDAGOGIE et le numéro que vous lisez aujourd'hui est le premier publié sous sa responsabilité. Merci Claudine ; bonne chance Jacques.

L'assemblée générale extraordinaire du 13 décembre dernier a été très animée et a approuvé, dans ses grandes lignes, le texte de la réponse à adresser à Monsieur DANBLON. Vous pourrez lire, dans le prochain S.B.P.M.-info la copie définitive. Il est évident que nous continuerons à nous intéresser aux travaux de la Commission et à vous en tenir informés.

Jean WILMET

Suites de Farey et quelques applications

M. Ballieu, *Athénée de Binche*

1. Introduction

La notion de "*suite de Farey*" date du début du dix-neuvième siècle ; il semble que les premiers résultats ne soient pas dus à Farey mais ont été démontrés par Haros en 1802. Cependant, depuis Cauchy, on continue à les appeler "*suites de Farey*".

1.1. Définition

On appelle *suite de Farey de rang n*, la suite des fractions irréductibles a/b, rangées par ordre croissant et telles que $1 \leqslant b \leqslant n$.

Remarque

On peut ne considérer que la partie $\mathcal{F}_n$ de la suite dont les éléments appartiennent à [0,1[. On obtient tous les termes compris entre les entiers m et $(m+1)$, en ajoutant m aux éléments de $\mathcal{F}_n$.

Exemple : $\mathcal{F}_5$ comprend les termes suivants :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}.$$

1.2. Nombre de fractions de Farey de $\mathcal{F}_n$

Il vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \emptyset(k),$$

où $\emptyset(k)$ est l'*indicateur d'Euler* de k, c'est-à-dire le nombre de naturels non nuls inférieurs ou égaux à k et premiers avec k.

En effet, les différents dénominateurs possibles sont les entiers compris entre 1 et n, ce qui explique la somme sur k allant de 1 à n. Pour chacun des dénominateurs, puisque la fraction est irréductible, le numérateur doit être premier avec ce dénominateur ; pour un dénominateur k donné, il y a donc $\emptyset(k)$ numérateurs possibles.

Dans l'exemple qui précède, le nombre de fractions de Farey de rang 5 appartenant à $[0,1[$ vaut :

$$\emptyset(1)+\emptyset(2)+\emptyset(3)+\emptyset(4)+\emptyset(5)=1+1+2+2+4=10.$$

1.3. Propriétés

1.3.1. Si a/b et a'/b' sont deux termes consécutifs de $\mathcal{F}_n$, alors

$$ba'-ab'=1. \tag{i}$$

Cette propriété est équivalente à :

1.3.2. Si a/b, a''/b'' et a'/b' sont trois termes successifs de $\mathcal{F}_n$, alors

$$a''/b''=\tfrac{a+a'}{b+b'}. \tag{ii}$$

Terminologie : a''/b'' s'appelle la *médiane* de a/b et a'/b'.

1.3.3. Si $n>1$, il n'existe pas deux termes successifs de $\mathcal{F}_n$ qui possèdent le même dénominateur.

Démonstration : Dans $\mathcal{F}_n$, il n'y a qu'un seul terme dont le dénominateur vaut 1, le premier : 0/1. Supposons donc $b>1$ et soient a/b et a'/b deux termes consécutifs. On a, évidemment :

$$a+1\leqslant a'<b\ \ ;$$

donc,

$$\begin{aligned}0 &< b-a-1\\ ab &< ab+b-a-1=(a+1)(b-1)\\ \frac{a}{b-1} &< \frac{a+1}{b}.\end{aligned}$$

Il vient :

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b} \leqslant \frac{a'}{b} \quad ;$$

ainsi, $a/(b-1)$ se situe entre a/b et a'/b, ce qui contredit l'hypothèse : “a/b et a'/b sont des termes consécutifs de $\mathcal{F}_n$”.

1.3.4. Démonstration de l'équivalence des propriétés (i) et (ii)

a. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Si la propriété 1.3.1. est vraie, nous avons :

$$\begin{cases} ba'' - ab'' &= 1 \\ b''a' - a''b' &= 1; \end{cases}$$

en soustrayant membre à membre, il vient :

$$\begin{aligned} ba'' - ab'' - b''a' + a''b' &= 0 \\ a''(b+b') - b''(a+a') &= 0 \\ a''(b+b') &= b''(a+a') \\ \frac{a''}{b''} &= \frac{a+a'}{b+b'} \end{aligned}$$

c-à-d. (ii).

b. (ii) $\Rightarrow$ (i) (par récurrence).

(b1) dans $\mathcal{F}_2$: 0/1, 1/2, la propriété (i) est vraie puisque 1.1 - 2.0 = 1.

(b2) les termes de $\mathcal{F}_n$ comprennent tous ceux de $\mathcal{F}_{n-1}$ plus les fractions irréductibles inférieures à 1, dont le dénominateur vaut n.

(b3) supposons (ii) vraie partout et (i) vraie dans $\mathcal{F}_{n-1}$ et montrons, qu'alors, (i) est vraie dans $\mathcal{F}_n$.

Soient a/b et c/d deux termes consécutifs de $\mathcal{F}_n$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il suffit d'envisager deux cas : $b = n$ ou $d = n$.

Considérons tout d'abord le cas $b = n$. Par 1.3.3., $d < n$; il existe alors dans $\mathcal{F}_n$ un prédécesseur e/f de a/b, avec encore $f < b$. Par (ii), on sait que $e + c = \lambda a$ et $f + d = \lambda b$. Comme f et d sont inférieurs à $b = n$, λ ne peut qu'être égal à 1 et donc, $e + c = a$; $f + d = b$. Mais c/d est consécutif à e/f dans $\mathcal{F}_{n-1}$; par hypothèse de récurrence, il vient $fc - ed = 1$, d'où $(b-d)c - (a-c)d = bc - ad = 1$.

Supposons désormais $d = n$. Ou bien $c = n - 1$, auquel cas $a = n - 2$ et $b = n - 1$: on a trivialement $bc - ad = 1$. Ou bien c/d possède un successeur e/f dans $\mathcal{F}_n$; par 1.3.3., $b < n$ et $f < n$; pour les mêmes raisons que ci-dessus, $c = a+e$ et $d = b+f$; comme e/f est consécutif à a/b dans $\mathcal{F}_{n-1}$, l'hypothèse de récurrence livre $be - af = 1$, d'où $(c - a)b - (d - b)a = bc - ad = 1$. La propriété (i) est donc toujours vraie.

1.3.5. Démonstration des propriétés 1.3.1. et 1.3.2.

Nous démontrons la propriété 1.3.1. par récurrence.

— La propriété est triviale dans $\mathcal{F}_1$ et vraie dans $\mathcal{F}_2$.
— Supposons-la vraie dans $\mathcal{F}_{n-1}$ et montrons qu'elle l'est dans $\mathcal{F}_n$. La remarque (b2) du paragraphe précédent permet de se limiter au cas où a/b et a'/b' sont successifs dans $\mathcal{F}_{n-1}$, mais séparés par a''/b'' dans $\mathcal{F}_n$.
Soient $ba'' - ab'' = r > 0$ et $b''a' - a''b' = s > 0$.

$$\begin{cases} a'ba'' - a'ab'' = a'r \\ ab''a' - aa''b' = as \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b'ba'' - b'ab'' = b'r \\ bb''a' - ba''b' = bs \end{cases}.$$

En ajoutant membre à membre, il vient :

$$a'ba'' - aa''b' = a'r + as \quad \text{et} \quad bb''a' - b'ab'' = b'r + bs$$

$$(ba' - ab')a'' = a'r + as \quad \text{et} \quad (ba' - ab')b'' = b'r + bs$$

et comme $ba' - ab' = 1$ (hypothèse de récurrence),on a :

$$a'' = a'r + as \quad \text{et} \quad b'' = b'r + bs.$$

Puisque $pgcd(a'', b'') = 1$, r et s sont premiers entre eux.

Soit S l'ensemble de toutes les fractions :

$$\frac{A}{B} = \frac{\mu a + \lambda a'}{\mu b + \lambda b'}$$

où λ et μ sont des entiers positifs tels que $pgcd(\lambda, \mu) = 1$.

Ainsi, a''/b'' appartient à S. Toute fraction de S est comprise entre a/b et a'/b' (facile à vérifier) et est irréductible, car tout diviseur commun à A

et B diviserait

$$b(\mu a + \lambda a') - a(\mu b + \lambda b') = \lambda$$
$$a'(\mu b + \lambda b') - b'(\mu a + \lambda a') = \mu$$

Les fractions de S apparaissent donc tôt ou tard dans un certain $\mathcal{F}_q$. La première à apparaître est celle pour laquelle B est le plus petit, c'est-à-dire lorsque $\lambda = \mu = 1$. Cette fraction ne peut être que a''/b'', ce qui implique $a'' = a + a'$ et $b'' = b + b'$.

Dès lors,

$$ba'' - ab'' = b(a + a') - a(b + b') = ba' - ab' = 1$$

et

$$b''a' - a''b' = (b + b')a' - (a + a')b' = ba' - ab' = 1,$$

ce qui démontre la propriété 1.3.1. dans $\mathcal{F}_n$.

1.3.6. Si a/b et a'/b' sont consécutifs dans $\mathcal{F}_n$, alors $b + b' \geqslant n + 1$.

En effet, la médiane $(a + a')/(b + b')$ (qui se situe entre a/b et a'/b') ne peut appartenir à $\mathcal{F}_n$, puisque a/b et a'/b' ont été supposés consécutifs. Par conséquent, cette médiane possède un dénominateur strictement supérieur à n.

1.3.7. Dissection de Farey

Dans cette théorie, il est commode de représenter les réels sur un cercle dont la circonférence mesure 1, ce qui permet de faire abstraction de la partie entière du nombre et, de ce fait, ne considérer que les éléments de $\mathcal{F}_n$ (qui appartiennent, rappelons-le à [0,1[ ).

Soit un cercle de circonférence unité, et marquons 0 un point de ce cercle. Tout réel x est représenté par un point $P(x)$ du cercle, dont la distance à 0, mesurée sur la circonférence, dans le sens des aiguilles d'une montre, vaut x. Dans cette représentation, tous les entiers ont évidemment pour image 0.

Dans la suite de Farey $\mathcal{F}_n$, calculons toutes les médianes $(a+a')/(b+b')$ des différentes paires de fractions consécutives a/b et a'/b'.

La première médiane est $(0+1)/(1+n) = 1/(1+n)$, et la dernière $(n-1+1)/(n+1) = n/(n+1)$ (elles n'appartiennent pas à $\mathcal{F}_n$).

Si nous marquons chaque médiane μ sur le cercle, par son point représentatif $P(\mu)$, le cercle est divisé en arcs appelés *arcs de Farey*; chacun d'eux est délimité par deux points $P(\mu)$ et comprend un élément de $\mathcal{F}_n$, appelé *point de Farey.* Par exemple, $]n/(n+1), 1/(n+1)[$ est un arc de Farey comprenant le point de Farey 0. L'ensemble des arcs de Farey porte le nom de *dissection du cercle.*

Si nous supposons $n > 1$ et si $P(a/b)$ est un point de Farey précédé et suivi respectivement par les points de Farey $P(a_1/b_1)$ et $P(a_2/b_2)$, l'arc de Farey comprenant $P(a/b)$ est composé de deux demi-arcs dont les longueurs valent :

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} - \frac{a+a_1}{b+b_1} &= \frac{ab+ab_1-ab-a_1b}{b(b+b_1)}\\ &= \frac{ab_1-a_1b}{b(b+b_1)}\\ &= \frac{1}{b(b+b_1)}\end{aligned}$$

et

$$\frac{a+a_2}{b+b_2} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+b_2)}.$$

Puisque

— d'une part, b et b_1 ne peuvent être égaux (propriété 1.3.3.), $b+b_1 < 2n$ ou $b+b_1 \leqslant 2n-1$,

— d'autre part, $b+b_1 \geqslant n+1$ (propriété 1.3.6),

nous pouvons affirmer la proposition suivante :

1.3.8. Proposition

Dans la dissection de Farey d'ordre n ($n > 1$), toute partie de l'arc comprenant le représentant de a/b possède une longueur comprise entre $\frac{1}{b(2n-1)}$ et $\frac{1}{b(n+1)}$.

1.3.9. Théorème

Quels que soient le réel x et le naturel n, il existe toujours une fraction de Farey de rang n, a/b, telle que

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| \leqslant \frac{1}{b(n+1)}.$$

En effet, en considérant le représentant de x dans la dissection de Farey, x se situe entre deux fractions de $\mathcal{F}_n$ vérifiant la proposition 1.3.8., ce qui démontre le théorème 1.3.9.

2. Applications

Nous en citerons trois, dont une est relativement récente.

2.1. Approximation d'irrationnels par des rationnels

Cette application résulte évidemment du théorème 1.3.9. Considérons par exemple, le cas de π. La théorie des fractions continues fournit d'excellentes approximations de π : au premier degré, nous avons la fraction continue

$$[3;7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \qquad (\frac{1}{\pi} = \frac{7}{22}).$$

Au deuxième degré,

$$[3;7,16] = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{16}} = \frac{355}{113} \qquad (\frac{1}{\pi} = \frac{113}{355}).$$

Les fractions de Farey sont plus performantes : dans une table, publiée par la London Royal Society, de la suite de Farey d'ordre 1025 (E.H. Neville : The Farey Series of Order 1025, Cambridge University Press, Cambridge 1950), on trouve, tout près de $\frac{113}{355}$, les fractions

$$\frac{99}{311}, \frac{92}{289}, \frac{85}{267}, \frac{78}{245}, \frac{71}{223} \text{ et } \frac{64}{201}$$

qui, toutes, sont de meilleures approximations de $\frac{1}{\pi}$ que $\frac{7}{22}$.

La table en question est très volumineuse : elle comporte 319765 fractions et un guide permettant de repérer rapidement la fraction la plus proche de tout réel donné appartenant à l'intervalle [0,1[.

2.2. Résolution d'équations diophantiennes

Soit, par exemple, à résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$2y - 3x = 1.$$

En prenant, dans un certain $\mathcal{F}_n$, la fraction de Farey qui précède 2/3, notamment 3/5 dans$\mathcal{F}_5$, nous avons

$$x = 3 \quad \text{et} \quad y = 5.$$

Cela découle directement de la propriété 1.3.1.

Bien sûr, dans une autre $\mathcal{F}_{n'}$ $(n' > n)$, nous trouvons une autre solution :

$$x = 5 \quad \text{et} \quad y = 8$$

(5/8 est la médiane entre 3/5 et 2/3 ; elle appartient à une certaine suite de Farey).

Ainsi, les équations diophantiennes du type

$$\alpha y - \beta x = 1$$

où $\alpha < \beta$ sont premiers entre eux, possèdent une infinité de solutions fournies par les suites de Farey.

2.3. Récupération de phénomènes ondulatoires périodiques (ou quasi-périodiques) "endommagés"

(c.f. C.M. Rader, Recovery of undersampled periodic waveforms. IEEE Trans. ASSP-25, pp. 242-249, 1977).

Considérons, comme "phénomène ondulatoire quasi-périodique", le balayage par ligne d'une image de télévision. Dans la plupart des cas, il y a des ressemblances entre les éléments adjacents de l'image (ces éléments adjacents sont appelés "*pixels*"), entre les lignes adjacentes et entre les images successives. L'information contenue dans les images et leur succession dans le temps est redondante, si ce n'est dans le cas de la fameuse "neige".

Cette redondance permet, en général, de récupérer l'image, même si celle-ci a été fortement endommagée, c'est-à-dire si tous les n-èmes $(n >> 1)$ pixels sont intacts, et les autres, détruits.

Le principal problème qui se pose pour reconstruire l'image, est de trouver un rationnel de dénominateur maximal donné, qui soit la meilleure approximation du rapport de la période d'échantillonnage à l'une des quasi-périodes de l'information reçue. Ceci peut effectivement être réalisé grâce aux fractions de Farey de rang donné.

Bibliographie

— PISOT C., Suites de Farey, *Séminaire de Théorie des Nombres Delange-Pisot*, 2ème année, 1960/61, 7 pages, Université de Paris VI (Secrétariat Mathématique, 11, rue P. et M. Curie, 75231 Parix Cedex 05).

— HARDY G.H. - WRIGHT E.M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, fifth edition, 1979, 426 pages.

— SCHROEDER M.R., *Number Theory in Science and Communication*, Springer Verlag, second edition, 1985, 374 pages.

Adresse de l'auteur :

Michel BALLIEU
29, place Matteotti, Bp 5,
7100 La Louvière

Bibliographie

J. Bair, C. Festraets,

L'aide multicritère à la décision
par Philippe VINCKE.
Editions de l'Université de Bruxelles et Ellipses.
Collection "Statistique et Mathématiques Appliquées" (SMA), 1989,
Bruxelles, 180 pages, 750 FB.

Chaque fois qu'un homme d'action – qu'il soit dirigeant politique, cadre d'une entreprise, ..., ou simple citoyen placé devant un choix à réaliser – doit prendre une décision, il s'efforce le plus souvent de trouver la "meilleure" solution possible ; en termes mathématiques, il doit donc résoudre un problème d'optimisation. Mais, l'expérience nous apprend qu'il ne s'agit généralement pas de trouver le maximum (ou le minimum) d'une fonction parfaitement déterminée, éventuellement soumise à des contraintes. Souvent, le problème est plus complexe, car il comprend plusieurs objectifs ; il convient dès lors d'aider le preneur de décision à trouver un "compromis" satisfaisant.

Ces dernières années, de très nombreuses études ont été menées sur l'aide multicritère à la décision. Dans ce vaste courant scientifique, la Belgique occupe une position de pointe, grâce à quelques équipes de recherche très actives, notamment celle dirigée par P. VINCKE, professeur à l'Université Libre de Bruxelles. Ce dernier vient d'écrire, dans le style clair et attractif qu'on lui connaît, un petit livre remarquable qui, en moins de 200 pages, décrit les fondements et les principales méthodes de cette nouvelle discipline.

Dans un premier chapitre, l'auteur définit la notion fondamentale d'*action*. Ensuite, il présente des concepts de base relatifs à la modélisation des préférences ; il caractérise en fait différentes *structures de préférence* sur l'ensemble A des actions possibles. Puis, il introduit la notion de *critère* qui est une fonction définie sur A et qui représente les préférences du décideur selon un point de vue ; il présente également le *problème de décision multicritère* d'une manière générale : "pour un ensemble A d'actions et une famille F cohérente de critères sur A, on désire déterminer un sous-ensemble d'actions considérées comme les meilleures vis-à-vis de F (problème de choix), ou partitionner A en sous-ensembles suivant des normes préétablies (problème de tri), ou encore ranger les actions de A de la meilleure à la moins bonne (problème de rangement)". (p. 54) Après quelques définitions générales supplémentaires, l'auteur passe en revue les trois grandes méthodes existant à l'heure actuelle. Les théories de l'*utilité multiattribut* consistent à maximiser une fonction qui agrège d'une certaine manière tous les points de vue à prendre en considération. Les méthodes de *surclassement* sont soumises à des hypothèses moins restrictives : on définit une relation binaire S (de surclassement) dans A telle que aSb lorsqu'il y a suffisamment d'arguments pour admettre que l'action a est au moins aussi bonne que b, sans qu'il y ait de raison importante de refuser cette affirmation. Enfin, les méthodes *interactives,* qui se sont considérablement développées ces dernières années, grâce à l'outil informatique, consistent à présenter une première solution au décideur, puis de tenir compte de la réaction de ce dernier pour affiner si nécessaire la solution, ce processus étant recommencé jusqu'à ce que le preneur de décision soit satisfait. Enfin, le dernier chapitre, qui n'est certes pas le moins intéressant, évoque des questions variées, des problèmes et résultats importants (comme le théorème de K.J. ARROW).

Nul doute que le lecteur de cet ouvrage sera passionné par le sujet ... et aura l'envie d'approfondir son étude en consultant certaines des nombreuses références mentionnées dans la bibliographie.

Jacques BAIR

<u>Calcul différentiel et intégral, manuel programmé</u>
par D. KLEPPNER et N. RAMSEY
traduit de l'anglais par J. LEROY et M. PARKER
DE BOECK Université, Bruxelles 1989, 252 pages, 720 FB

Il n'est peut-être pas très utile de présenter le livre "Quick Calculus, a self-teaching guide" écrit par D. KLEPPNER et N. RAMSEY. Il s'agit en effet d'un ouvrage classique et bien connu d'auto-apprentissage sur les techniques de base du calcul différentiel et intégral ; il est facile à utiliser et s'avère très efficace dans l'optique de l'école "anglo-saxonne" : le but n'est pas de démontrer des théorèmes de l'analyse (bien que certaines preuves figurent en appendice à la fin de l'ouvrage), mais l'ambition est d'apprendre le "Calculus" de façon pratique et utilitaire.

Ce dernier objectif est parfaitement atteint par les auteurs grâce à une excellente "programmation" du cours. Les matières y sont présentées de façon motivante, claire, bien structurée, sous forme de problèmes à résoudre. Lorsque le lecteur résout correctement l'exercice proposé – la solution finale d'un problème étant toujours donnée – il est invité à étudier une nouvelle matière ; par contre, s'il répond de manière incorrecte, il reçoit des explications complémentaires et, quelquefois, un nouveau problème.

Cette présentation offre un double avantage : le lecteur peut apprendre des mathématiques seul et peut avancer à son propre rythme.

Un tel cours, destiné en premier lieu aux autodidactes, convient parfaitement à tous les étudiants du secondaire qui désirent se préparer à des études supérieures, aux étudiants d'une candidature universitaire dans une section où les mathématiques constituent un outil important (par exemple, la médecine, la biologie, l'économie, la gestion, la psychologie, ...) et aussi aux professeurs de mathématiques qui y trouveront de riches idées pédagogiques.

L'ouvrage de KLEPPNER et RAMSEY vient d'être traduit fidèlement en français par J. LEROY et M. PARKER. Cette traduction, intitulée "Calcul différentiel et intégral, manuel programmé", est présentée avec soin ; elle possède bien sûr toutes les qualités du texte original.

A notre connaissance, cet ouvrage est unique en son genre en langue française.

Pour toutes ces bonnes raisons, ce cours d'auto-apprentissage des notions et techniques du calcul différentiel et intégral mérite d'être recommandé : il pourra en effet rendre de nombreux services à beaucoup de personnes différentes.

Jacques BAIR

Une évaluation du rendement des mathématiques dans l'enseignement secondaire belge francophone
par N. DETOUR et G. HENRY
dans "Recherche en éducation", publié par le Ministère de l'Education Nationale, Direction Générale de l'Organisation des Etudes,
1988, broché, 310 pages, 1100 F.

Il s'agit essentiellement du compte-rendu d'une enquête achevée 1981 et réalisée par I.E.A., Association Internationale pour l'Evaluation du Rendement Scolaire. Cette association, qui regroupe une cinquantaine de pays dont la Belgique, a pour but principal d'étudier, par des moyens objectifs, les différences qui existent entre les systèmes éducationnels de plusieurs pays et de voir dans quelle mesure le rendement dépend de facteurs pédagogiques, sociaux, économiques et culturels.

Pour l'enseignement des mathématiques, une première enquête a été réalisée en 1962. Elle concernait douze pays ; ses modalités et ses résultats sont assez succinctement exposés au chapitre 2. On en retiendra que les résultats des élèves belges sont toujours très favorables comparés aux résultats d'autres pays industrialisés.

Les chapitres 3 à 8 sont consacrés à l'enquête réalisée en 1980. Cette fois, vingt pays sont concernés et les résultats sont donnés séparément pour la Belgique francophone et la Belgique néerlandophone. Deux populations d'élèves ont été testées ; la population A comprend tous les élèves d'une classe où la majorité d'entre eux ont un âge compris entre 13 ans et 13 ans 11 mois au milieu de l'année scolaire, la population B est constituée d'élèves appartenant aux classes terminales de l'enseignement secondaire (et ce, indépendamment de leur âge) et qui ont au moins 5 h de mathématique par semaine.

Ces élèves ont eu à répondre d'une part à des tests cognitifs (à choix multiples) et à des "échelles d'attitudes" portant sur les thèmes suivants :

les mathématiques à l'école,
les mathématiques en tant que processus,
les mathématiques et l'élève
les mathématiques et les parents,
les mathématiques et les stéréotypes sexuels,
les mathématiques et la société,
les mathématiques et les calculateurs électroniques.

D'autre part, des questionnaires portant sur des facteurs extra-scolaires ou scolaires susceptibles d'influencer le rendement en mathématique ont été élaborés à destination des élèves, des professeurs, des chefs d'école et de l'administration nationale de l'éducation.

Toute la méthodologie de l'enquête est soigneusement exposée et les résultats, avec leur analyse statistique, sont donnés de manière très détaillée tant pour les tests que pour les questionnaires.

Il est intéressant de noter que si la Belgique se classe toujours au-dessus de la moyenne, il semble y avoir une légère régression du rendement en 1980 par rapport à celui mesuré en 1962 et que les résultats de la Belgique francophone sont dans tous les domaines légèrement inférieurs aux résultats de la Belgique néerlandophone.

On notera aussi, dans les deux régions, un taux trop faible d'élèves brillants, à haut rendement mathématique, par rapport à celui trouvé dans d'autres pays industrialisés.

Je laisse au lecteur le soin de découvrir lui-même toutes les conclusions de cette enquête extrêmement intéressante. A lire et à méditer.

Claudine FESTRAETS

La géométrie au début du secondaire

J. Carlot, B. Honclaire, *Athénée Royal Jean d'Avesnes—Mons*

1. Introduction

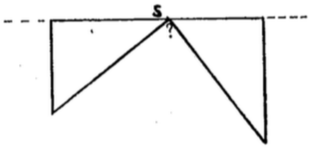
Nous recevons des élèves qui, dans l'enseignement primaire, ont observé des figures géométriques. En vrac, ils ont emmagasiné des propriétés non stucturées. Ils ont pris de bonnes et de mauvaises habitudes. Nier ce passé conduit immanquablement à des impasses, à des difficultés que certains élèves ne surmonteront pas seuls...donc à des échecs. C'est une des raisons pour lesquelles nous avons choisi de rechercher une évolution continue entre le vécu géométrique actuel dans l'enseignement primaire et l'enseignement de la géométrie au début du secondaire. Les activités géométriques de l'école primaire se limitent le plus souvent à l'énoncé de propriétés vérifiées par des mesurages. Le but essentiel du cours de géométrie en début du secondaire est de rendre les élèves conscients de leur capacité à raisonner. Il faut pour cela créer des situations qui permettent d'exploiter des acquis constatés chez la majorité de nos élèves de 12 ans et aller à contre-courant d'un mauvais usage de la latte et de l'équerre. Ainsi, des démonstrations simples peuvent être abordées d'emblée, à condition de bien clarifier les données et les prérequis acceptés comme points de départ. Par exemple, lorsque des triangles rectangles isométriques sont mis à la disposition des élèves, tous les angles droits sont marqués symboliquement et une convention explicite les égalités de longueurs liées au matériel (côtés isométriques de même couleur). Il n'est jamais question de contrôler ces données avec la latte ou l'équerre.

1.1. Créer une attitude active face à la démonstration

Des triangles rectangles magnétiques isométriques sont disponibles au tableau (ils sont directement isométriques mais ceci n'est pas dit aux élèves). Une feuille de modèles ([1]) a été distribuée et les élèves ont découpé un nombre imposé de triangles superposables au triangle-modèle.

Le professeur place deux triangles au tableau quadrillé et insiste sur sa façon de les disposer : deux bords suivent fidèlement un trait horizontal du tableau.

1. voir annexe



Les élèves sont invités à procéder de même et à continuer la construction avec un troisième triangle, avec un quatrième triangle.

Nous voyons ici une nouvelle ébauche d'un dessin utilisé dans une première approche du théorème de Pythagore (série "Rénover" —document 1 [2]). Ce n'est pas en plaçant l'équerre en s que la perpendicularité est admise. Cette suggestion est refusée par le professeur.

Aucune rédaction n'est recherchée. Le raisonnement se déroule essentiellement sur un support graphique utilisant signes identiques ou couleurs identiques pour signifier des égalités. Les élèves sont encouragés à utiliser ce qu'ils connaissent, leurs expressions orales sont acceptées, même si le professeur répète un peu différemment la proposition de l'élève. C'est à ce prix que nous espérons susciter une attitude active des élèves face à la démonstration. A partir des données (liées au matériel utilisé) et de la question posée (l'évaluation de l'amplitude en s), des élèves arrivent à rappeler la propriété connue (somme des amplitudes dans les triangles). Il y a alors apprentissage de la démonstration dans la mesure où

— tout le monde prend conscience de la propriété acceptée.
— le calcul de l'angle droit en s est effectué par somme et différence d'amplitudes (toujours sur le support graphique).

1.2. Penser et s'exprimer correctement

Nous voulons aussi amener peu à peu les élèves à utiliser un vocabulaire précis, à énoncer et à écrire correctement des propriétés géométriques, à considérer qu'un segment, une droite "existent"... même s'ils ne sont pas dessinés. La différence entre droite et segment peut par exemple frapper les élèves à l'occasion d'un dénombrement. Ce genre de situation a été décrit dans le document 2 de la série "Rénover" en utilisant les sommets d'un cube en fil de fer. Quelques situations simples liées à l'emploi des triangles magnétiques nous ont permis de développer ce point. Nous décrirons cette exploitation dans un prochain article.

2. Evolution des exigences en géométrie

2.1. En première année

Les élèves doivent apprendre à démontrer. Ils le font dès le début en utilisant les outils disponibles : des figures données et reconnues, quelques propriétés admises et clairement explicitées, des calculs d'amplitude, d'aire... Les outils augmentent (théorème de Pythagore, transformations...) Les élèves énoncent et écrivent avec de plus en plus de précision et de correction les propriétés exploitées. Les figures ne sont plus données mais construites. Les propriétés connues par construction sont clairement distinguées des propriétés "obtenues en prime". Les synthèses rédigées dans le document 12 de la série Rénover indiquent la précision exigée en fin d'année et la place donnée à la reconnaissance des isométries les plus élémentaires. Leur rôle aussi dans l'apprentissage de la démonstration : dès qu'une figure et sa transformée sont reconnues, une série de propriétés sont déduites.

2.2. En deuxième année

Des calculs et des comparaisons de longueurs et d'aires se font à partir de figures homothétiques, à partir de projections parallèles, sur des figures isométriques... mais l'étude des isométries est étendue (documents 7 à 11 et 13). Ici encore, une attitude active des élèves est encouragée en proposant des problèmes ouverts : les élèves doivent dresser une liste de propriétés données et proposer des propriétés supplémentaires à justifier (document 13). Des méthodes de démonstration sont peu à peu regroupées (Par exemple : quels sont les moyens disponibles pour justifier une perpendicularité ?), une disposition simple est suggérée pour réduire les difficultés de rédaction (une colonne de données "Je sais que", et une colonne de déductions "Je déduis que"). Chaque déduction est acceptée lorsque référence a pu être faite à une méthode répertoriée. Ce mode de travail a été décrit dans le document 13 qui clôture le travail en deuxième année.

2.3. En troisième année

Les moyens de calculer et de comparer des longueurs et des aires sont encore étendus (composées d'isométries, similitudes, trigonométrie ...). Le théorème de Pythagore est revu et généralisé : nous analysons d'autres constructions que celles de carrés sur les côtés d'un triangle rectangle et nous revoyons en cas particulier le théorème de Pythagore dans sa présentation traditionnelle. Nous continuons à aider les élèves dans la recherche de justifications en complétant les tableaux "Comment démontrer" commencés plus tôt. Ces textes, ainsi que des exemples d'énoncés peuvent être trouvés dans le document 14. Ils permettent de mesurer l'évolution dans la présentation des exercices : de la formulation "ouverte" ("proposer et justifier"), nous passons à la formulation "fermée" plus traditionnelle ("démontrer que ...").

3. Le programme de géométrie en première année

Dans un prochain article, nous décrirons en détail quelques premières leçons de géométrie. Nous allons au contraire donner ci-dessous de brèves indications sur des situations -en nombre restreint- qui nous permettent de travailler dans l'esprit décrit ci-dessus et de rencontrer les exigences du programme.

3.1. Matériel utilisé

Le professeur utilise des figures géométriques magnétiques : elles peuvent être facilement appliquées sur le tableau et n'adhèrent que par une seule face. Trois séries sont prévues : des triangles rectangles directement et inversement isométriques, des triangles obtusangles directement et inversement isométriques, des quadrilatères "quelconques" directement et inversement isométriques. Une feuille de "modèles" (voir annexe) est distribuée à chaque élève qui devra découper ses propres figures à la demande du professeur. Les triangles et quadrilatères quelconques magnétiques sont semblables à ceux des élèves.

3.2. Le programme : situations proposées et exploitations possibles

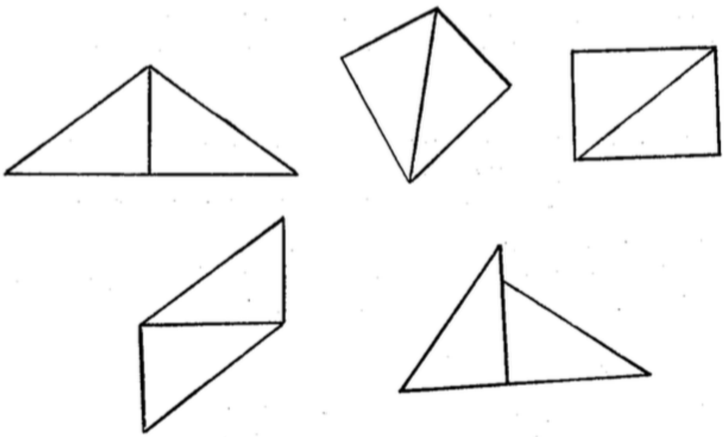
3.2.1. Utiliser et reconnaître des figures

Assemblages de triangles rectangles

Des triangles rectangles sont disposés en vrac sur le tableau (directement ou inversement isométriques, mais ceci n'est pas dit aux élèves) ; les élèves disposent des triangles qu'ils ont découpés.

> Construire quelques figures (quadrilatères, triangles,...) en utilisant deux triangles rectangles.

Voici quelques propositions d'élèves :



Une différence de manipulation apparaît entre les triangles magnétiques (unifaces) et les triangles en papier (bifaces) dans la simple réalisation de la figure 1. Par des comparaisons entre les figures obtenues, des propriétés sont rappelées sans aucune hiérarchisation. Voici quelques possibilités :

— *quadrilatère dont les côtés opposés ont même longueur : parallélogramme.*
— *parallélogramme ayant des angles droits : rectangle.*
— *triangle ayant deux côtés de même longueur : triangle isocèle.*
— *somme des amplitudes d'un rectangle.*
— *somme des amplitudes d'un triangle rectangle.*
— *somme des amplitudes d'un parallélogramme.*
— *droites perpendiculaires et droites parallèles.*
— *figures superposables par déplacement, par retournement.*

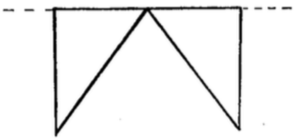
Triangles rectangles et carrés.

Des triangles rectangles directement isométriques sont disponibles et le professeur place deux triangles sur le tableau quadrillé. Il insiste sur l'alignement de deux côtés (voir 1.1 ci-dessus)

> Placer deux triangles rectangles de la même manière... Continuer la construction avec un troisième, puis un quatrième triangle.

De manière intuitive, sans recherche de centres, les élèves reconnaissent que le premier triangle tourne de 90 degrés pour venir s'appliquer sur le deuxième, que le deuxième s'applique de la même manière sur le troisième,...

Les élèves sont invités à développer un processus analogue à partir de deux triangles inversement isométriques. Les "règles" précédentes d'alignement de deux côtés conduisent au dessin suivant :



De nouveau, le procédé continue avec trois, puis quatre triangles.

Tout ceci conduit à une première rencontre avec

- *rotation de 90 degrés et droites perpendiculaires.*
- *rotation de 180 degrés et droites parallèles.*
- *quadrilatère ayant ses côtés de même longueur et ses angles droits : carré.*
- *quadrilatère ayant ses côtés de même longueur : losange*

Pavages avec des quadrilatères quelconques.

Une série de quadrilatères non particuliers directement isométriques sont disponibles au tableau. Les élèves disposent de quadrilatères analogues qu'ils ont découpés. Les activités précédentes ont attiré l'attention sur l'importance de distinguer les deux faces des quadrilatères de papier. Pour le travail individuel comme pour le travail au tableau, tous les quadrilatères sont explicitement directement isométriques.

> Couvrir le plan avec des quadrilatères superposables par déplacement.

Les assemblages de triangles réalisés plus tôt, les concrétisations physiques de mouvements appliquant une figure sur une autre portent ici leurs *fruits. Une technique se dégage dans la classe : les élèves pensent à "accoller" deux côtés de même longueur et y arrivent en superposant deux quadrilatères, puis en faisant tourner le deuxième de 180 degrés autour du milieu du côté. Cette méthode efficace suggérée par quelques-uns est bien comprise par la classe. Une analyse du pavage obtenu met en lumière :*

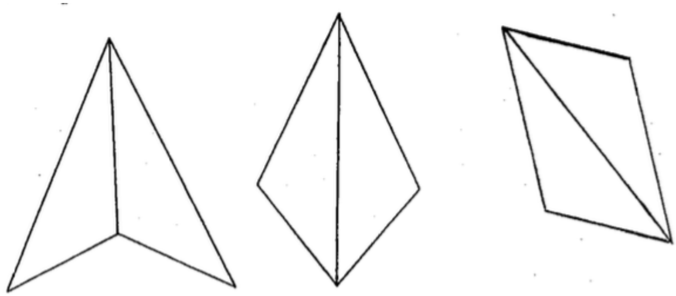
- *somme des amplitudes d'un quadrilatère.*
- *rotation de 180 degrés et droites parallèles.*
- *figure et son image par une rotation de 180 degrés, par translation.*

PAVAGES AVEC DES TRIANGLES QUELCONQUES.

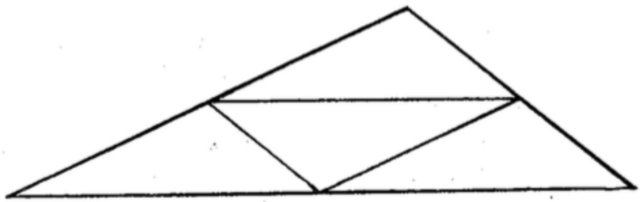
Des triangles obtusangles isométriques magnétiques sont disponibles pour la classe et des triangles de papier pour la recherche individuelle.

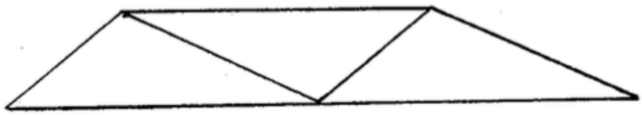
> Avec deux triangles, construire des quadrilatères. Comparer, classer ces quadrilatères.
>
> Avec des triangles superposables par déplacement, couvrir le plan.

a. *Parmi les neuf possibilités offertes avec deux triangles, nous nous intéressons particulièrement à :*



b. *Parmi des ébauches de pavages, nous extrayons :*





Ces choix nous permettent de rencontrer :

— *somme des amplitudes d'un triangle quelconque.*
— *quadrilatère superposable sur lui-même par retournement (ayant un axe de symétrie).*
— *figures de même aire et non superposables.*
— *figures de même périmètre.*

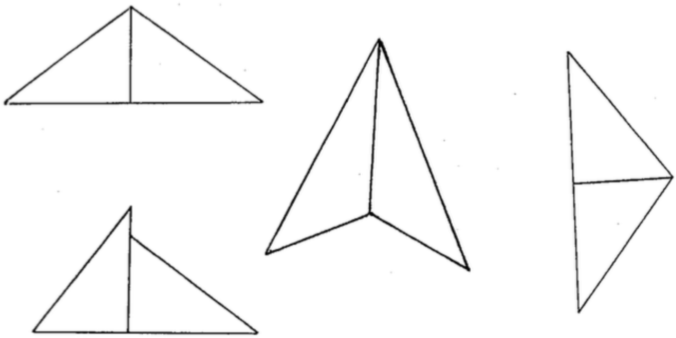
Organisation de propriétés.

Dans les activités précédentes, beaucoup de souvenirs ont été "rafraîchis", de très courts enchaînements logiques ont été élaborés, du vocabulaire a été précisé. Une étape plus importante vers la démonstration peut être tentée : elle fait prendre conscience d'une organisation possible entre des propriétés. Parmi les synthèses possibles, en voici trois :

— *Connaître la somme des amplitudes d'un triangle permet de calculer la somme des amplitudes d'un quadrilatère, la somme des amplitudes d'un polygone (convexe).*
— *une rotation de 90 ° suivie d'une rotation de 90 ° donne une rotation de 180 °.*
— *Si A est perpendiculaire à B et B perpendiculaire à C, on peut en déduire que A est parallèle à C.*

Droites et segments de droite.

La comparaison entre des figures obtenues dans différentes activités permet de reprendre et renforcer des points déjà rencontrés, de continuer la mise au point du vocabulaire. Voici quelques-unes de ces figures :



et quelques propriétés :

— *distinction entre segments et droites.*
— *droites parallèles et droites sécantes.*
— *triangles de même aire.*
— *parallélogrammes, trapèzes de même aire.*
— *comparaison des périmètres des figures de même aire.*

Dans les situations suivantes, les figures ne seront plus obtenues par assemblages mais seront généralement dessinées.

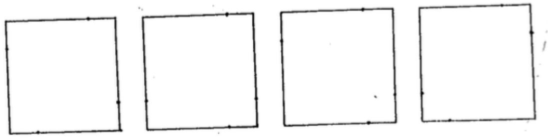
Vers le théorème de Pythagore.

Sur chacun des côtés d'un carré de 7 cm de côté, placer un point de partage (3cm/4cm).

Comparer les différentes possibilités.

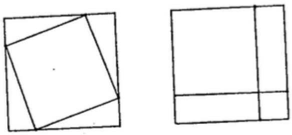
Pour chaque quadrilatère ainsi déterminé, le reconnaître et calculer son aire.

Parmi les figures obtenues, nous en choisissons quelques-unes particulièrement commodes pour atteindre nos buts :



Deux figures sont encore plus particulièrement exploitées dans l'énoncé suivant :

Comparer les deux figures suivantes.



Les élèves travaillent d'abord avec des longueurs données (côté initial de 7cm découpé en deux segments de 3cm et 4cm). Ces données particulières 3 et 4 deviennent ensuite des données littérales a et b.

Propriétés rencontrées :
— *quadrilatère ayant deux côtés parallèles : trapèze.*
— *triangle rectangle et isocèle.*
— *carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle.*

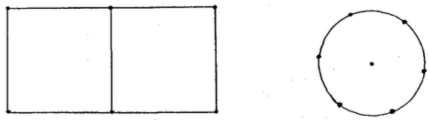
RECONNAÎTRE DES FIGURES, DÉNOMBRER ET CLASSER.

A partir des huit sommets d'un cube,
– dénombrer, classer des segments.
– dénombrer les droites, situer une droite par rapport à d'autres.
– déterminer des figures : triangles équilatéraux, rectangles,...

Cette exploitation est décrite dans le document 2. Voici la liste des propriétés rencontrées :

— *droites sécantes, gauches, perpendiculaires, parallèles.*
— *quatre points appartenant ou non à un plan.*
— *droites contenues ou non dans un plan.*
— *condition pour que A perpendiculaire à B et B perpendiculaire à C entraîne A parallèle à C.*

Toutes les notions rencontrées dans les différentes activités du point 1 ci-dessus sont revues et renforcées à partir de figures données comme par exemple les suivantes :



3.2.2. Replacer une pièce dans un pavage.

Ce type d'activité est décrit dans le document 6. Voici, pratiquement sans commentaire, les énoncés proposés aux élèves et la liste des propriétés rencontrées :

Dans un pavage, replacer un quadrilatère quelconque
un parallélogramme
un rectangle
un losange
un carré
un triangle quelconque
un triangle isocèle
un triangle équilatéral
...
Décrire toutes les possibilités.

Chacune des figures est caractérisée par une façon de la replacer dans le pavage :

— *un parallélogramme est superposable sur lui-même (invariant) par rotation de 180 $^\circ$.*
— *un rectangle est invariant par retournement autour de ses médianes.*
— *un losange est invariant par retournement autour de ses diagonales.*
— *un carré est invariant par rotation de 90 degrés.*
— *un triangle isocèle est invariant par retournement autour d'une médiane.*
— *un triangle équilatéral est invariant par retournement autour de ses trois médianes et par rotation de 120 degrés ($\frac{1}{3}$ tour).*

Ces manipulations physiques permettent de faire prendre conscience de déductions possibles. Par exemple : de l'invariance du carré par rotation de 90 degrés se déduisent la perpendicularité des diagonales, le fait qu'elles ont même longueur, . . .

3.2.3. Figure ayant un axe, un centre de symétrie.

Par manipulations (pliage, papier calque, miroir, . . .), rencontrer des figures superposables sur elles-mêmes par retournement. En dégager les propriétés. Nous parlerons ici de :

— axe de symétrie.
— médiatrice d'un segment.
— bissectrice d'un secteur angulaire.

Par pavage, jeu de face à face, . . . , les élèves rencontrent des figures superposables sur elles-mêmes par rotation de 180 degrés. Les propriétés liées à ces manipulations sont dégagées et nous utilisons ici l'expression :

— centre de symétrie.

En fin d'activité, chaque figure est caractérisée en termes de transformation. Exemples : un triangle qui admet un axe de symétrie est isocèle. Un quadrilatère invariant par rotation de 90 ° est un carré.

3.2.4. Constructions.

Dans toute cette quatrième partie, chaque activité démarre par une construction. Certaines sont totalement libres, d'autres sont conditionnées par des contraintes. Différentes méthodes apparaissent dans les recherches individuelles. Comme dans ce qui précède, des comparaisons amènent des propriétés.

> Construire des carrés dont les sommets sont des points du quadrillage de la feuille.
>
> Calculer les aires des carrés obtenus.
>
> Calculer les longueurs des côtés.
>
> Construire un parallélogramme
> un rectangle
> un losange
> un carré

Noter les propriétés utilisées pour la construction.

Déduire les propriétés supplémentaires.

Construire un parallélogramme, un rectangle, un losange, un carré admettant un segment donné comme diagonale.

Les sommets d'un triangle et les milieux de ses côtés donnent six points.

Si on connaît trois de ces six points, peut-on construire les trois autres ? Si oui, dans quel ordre ?

Deux activités sur les quatre proposées ci-dessus sont décrites dans le document 6 [2]. Par analyse des travaux, des conditions suffisantes sont dégagées et structurées en le tableau suivant :

1.	on a construit un QUADRILATERE	on a obtenu
	ayant ses côtés parallèles deux à deux	UN PARALLELOGRAMME
	ayant deux côtés parallèles et de même longueur	
	ayant ses côtés opposés de même longueur	
	avec des diagonales ayant même milieu	
2.	on a construit un PARALLELOGRAMME	on a obtenu
	ayant un angle droit	UN RECTANGLE
	ayant ses diagonales de même longueur	
	ayant deux côtés consécutifs de même longueur	UN LOSANGE
	ayant ses diagonales perpendiculaires	
3.	on a construit un RECTANGLE	on a obtenu
	ayant deux côtés consécutifs de même longueur	
	ayant ses diagonales perpendiculaires	
4.	on a construit un LOSANGE	UN CARRE
	ayant un angle droit	
	ayant ses diagonales de même longueur	
5.	on a construit à la fois un rectangle et un losange	

Construire la bissectrice d'un secteur, la médiatrice d'un segment.

Ces constructions reposent sur celle d'un triangle isocèle, d'un losange, d'une figure ayant une diagonale comme axe de symétrie.

3.2.5. Transformations du plan.

1. Amener la notion par des situations variées, de manière à favoriser une visualisation globale.

Rotation de 90°, de 180°, de 60°, ...	: manipulations de figures, LOGO, ...
Symétrie centrale	: pavages, rotations de 180°, ...
Translation	: pavages, frises, papier peint, ...
Symétrie orthogonale	: manipulations de figures par retournement, pliages, miroirs, ...

On dégage :

— *la notion de trace.*
— *des droites et leurs images.*

Des figures liées aux transformations sont reconnues :

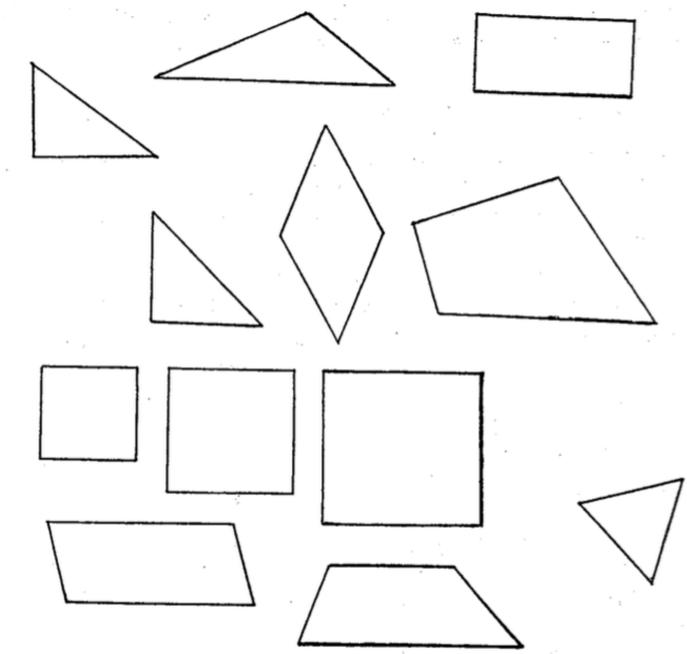
Translation	: parallélogrammes
Symétrie centrale	: parallélogrammes
Rotation	: triangles isocèles et cercles concentriques
Symétrie orthogonale	: trapèzes isocèles et triangles isocèles.

2. Construire l'image d'une figure par une transformation.

Les constructions se déroulent généralement en trois étapes :

— *Situer globalement l'image.*
— *Préciser les propriétés utilisées pour construire les images.*
— *Déduire des propriétés supplémentaires.*

Annexe



Bibliographie

[1] Enseignement secondaire- Programme de Mathématique-Première année.

[2] Série Rénover- documents 1 à 14- Ed. SBPMef-voir page de couverture arrière du présent numéro de M.P.

Adresse des auteurs :

Jean CARLOT	Bernard HONCLAIRE
Chemin à Baraques 41	Rue de la Tannerie 3
7000 Mons	7281 Quévy-le-Grand

Méthode graphique pour trouver le maximum du revenu total dans un régime monopolistique

J. Bair, *Université de Liège*

1. Notion économique de monopole pur

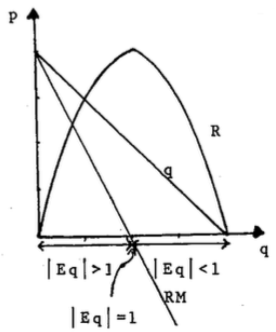
Un régime de monopole pur est une forme de marché dans laquelle un seul offreur est confronté à une multitude de demandeurs ([3], p. 149). L'entreprise en monopole représente tout le secteur industriel et n'a pas de concurrents ; sa demande est la même que celle du marché correspondant ([4], pp. 196-197) : elle est une fonction décroissante du prix unitaire. Le monopoleur peut faire varier soit sa production (ou quantité produite q) soit son prix unitaire (p) ; bien entendu, il ne peut pas fixer p et q indépendamment l'un de l'autre, puisque le prix (resp. le niveau de production) est parfaitement déterminé par la courbe de demande, une fois le niveau de production (resp. le prix) choisi ([4] ; p. 198).

Nous allons étudier le revenu total R d'un monopoleur ; il est donné par l'égalité $R = pq$. A cet effet, nous exploiterons le revenu marginal RM qui représente intuitivement la variation de R lorsque la quantité vendue varie d'une unité ([5] ; p. 151), ainsi que l'élasticité de la demande Eq qui mesure la variation en pourcentage de la quantité demandée d'une marchandise, par unité de temps, résultant d'une variation donnée, en pourcentage, du prix de la marchandise ([5] ; p. 36). De façon plus précise, lorsque la fonction de demande a été suffisamment lissée pour être dérivable, le revenu marginal est défini par la dérivée du revenu total R par rapport à la variable "quantité" q, tandis que l'élasticité de la demande par rapport au prix est, par définition, égale à $Eq = \frac{p}{q} \; \frac{dq}{dp} = \frac{d(ln\ q)}{d(ln\ p)}$ ([2] ; p. 22).

2. Analyse d'un exemple de demande linéaire

p	q	R	RM	EQ
4	0	0		-
			3	
3	1	3		-3
			1	
2	2	4		-1
			-1	
1	3	3		$-\frac{1}{3}$
			-3	
0	4	0		0

Les deux premières colonnes du tableau ci-contre livrent la loi de demande à laquelle un monopoleur est confronté ; les revenus totaux, égaux au produit du prix p par la quantité correspondante q, sont indiqués dans la troisième colonne ; les revenus marginaux s'obtiennent par soustraction des valeurs successives de R et sont notés à mi-distance des différents niveaux des prix et des quantités ; enfin, la dernière colonne contient les élasticités qui, en valeur absolue, valent ici le quotient du prix par la quantité vendue.



Ces données et résultats peuvent être visualisés sur un graphique où les quantités sont en abscisses et les prix en ordonnées ; cela donne une droite pour q (d'équation $p = 4 - q$), une droite également pour RM (d'équation $RM = 4 - 2q$), et une parabole pour R (d'équation $R = 4q - q^2$).

Remarquons que le revenu marginal RM est toujours inférieur au prix ; il est positif (resp. négatif ; nul) lorsque l'élasticité est, en valeur absolue, supérieure (resp. inférieure ; égale) à 1. De plus, le revenu total R présente un maximum lorsque le revenu marginal RM est nul, c'est-à-dire lorsque la valeur absolue de la demande est égale à l'unité.

Les résultats observés sur cet exemple très simple peuvent être démontrés d'une manière générale, ainsi que nous allons le voir.

3. Maximisation du revenu total

Supposons connue la loi de la demande $p = f(q)$; elle sera supposée strictement décroissante et dérivable pour les quantités q considérées.

L'égalité $R = pq$ conduit à la formule

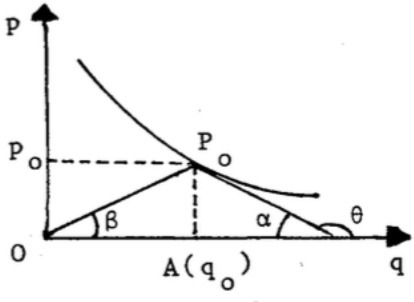
$$RM = p + q\frac{dp}{dq} = p(1 + \frac{q}{p}\ \frac{dp}{dq}) = p(1 + \frac{1}{Eq}).$$

Comme $p > 0$, le revenu marginal s'annule pour un point d'élasticité unitaire, c'est-à-dire une quantité q_0 pour laquelle l'élasticité de la demande vaut -1 ; si, de plus, RM est positif (resp. négatif) avant (resp. après) q_0, q_0 est un maximant local de R ; ce maximant est à coup sûr global lorsqu'il n'existe qu'un seul point d'élasticité unitaire.

Nous allons montrer comment l'on peut construire géométriquement les points d'élasticité unitaire, et calculer la valeur du revenu marginal.

4. Détermination graphique des points d'élasticité unitaire

Supposons la fonction de demande $p = f(q)$ dérivable dans un voisinage d'une valeur q_0 et posons $p_0 = f(q_0)$. La tangente au graphique de la fonction $f(q)$ en $P_0 = (q_0, p_0)$ fait un angle θ avec l'axe horizontal ; dès lors, $f'(q_0) = \text{tg}\ \theta$, d'où $|f'(q_0)| = \text{tg}\ \alpha$ pour $\alpha = \pi - \theta$.



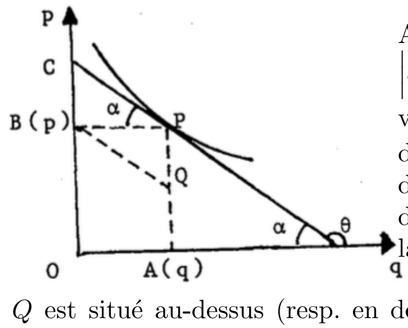
En travaillant dans le triangle rectangle de sommets P_0, $A = (q_0, 0)$ et 0, on trouve $p_0 = q_0\text{tg}\ \beta$. En conséquence, la définition de l'élasticité de la demande au point P_0 et le théorème de dérivation des fonctions réciproques livrent

$$|Eq(p_0)| = \frac{p_0}{q_0} \left| \frac{dq}{dp} (p_0) \right| = \frac{\text{tg}\ \beta}{\left| \frac{dp}{dq} (q_0) \right|} = \frac{\text{tg}\ \beta}{\text{tg}\ \alpha}.$$

En raison du caractère croissant de la fonction tangente dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, un point d'élasticité unitaire se caractérise par l'égalité $\alpha = \beta$, ce qui est le cas sur la figure ci-dessus.

Une valeur d'élasticité unitaire q_0 est un point stationnaire du revenu total R ; pour avoir un maximum (local) R en q_0, il reste donc à vérifier que le revenu marginal RM est positif (resp. négatif) pour des quantités q légèrement inférieures (resp. supérieures) à q_0.

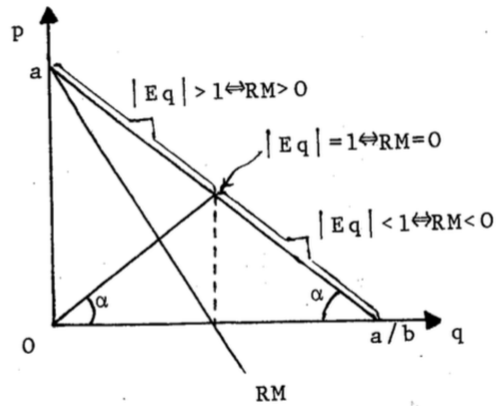
Or, il est aisé d'obtenir graphiquement la valeur du revenu marginal RM pour une quantité q quelconque.



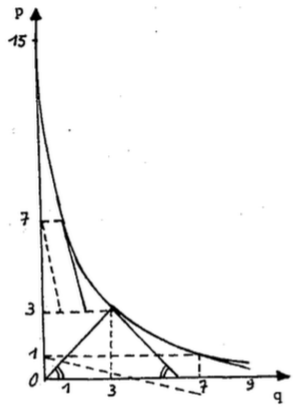
Avec les notations de la figure ci-contre, $\left|q\frac{dp}{dq}\right| = q\,|\text{tg}\ \theta| = q\ \text{tg}\ \alpha = |CB|$. En vertu de la formule $RM = p + q\frac{dp}{dq}$ et de ce qui précède, RM en (q) est l'ordonnée du point Q situé à l'intersection de la parallèle à CP menée par B et de la verticale passant par A :

si Q est situé au-dessus (resp. en dessous) de l'axe horizontal d'équation $p = 0$, le revenu marginal RM en q est positif (resp. négatif).

Cette procédure graphique se révèle particulièrement facile à utiliser lorsque la demande est linéaire, c'est-à-dire donnée par la relation $p = a - bq$ (avec $a > 0,\ b > 0$) ([1] ; [4] ; [5]), ainsi qu'en atteste la figure ci-dessous.



Avec un peu d'habitude, la méthode peut être efficacement exploitée lorsque la demande n'est pas linéaire. En guise d'illustration simple, considérons la loi $p = \frac{16}{q+1} - 1$ pour $0 \leqslant q \leqslant 9$ ([1] ; p. 114) : elle détermine une hyperbole. Visiblement, la tangente à cette hyperbole au point (3,3) fait un angle de 45° avec l'axe horizontal, de sorte que le revenu marginal est nul pour $q = 3$; par ailleurs, le revenu marginal est positif (resp. négatif) pour $0 < q < 3$ (resp. $3 < q < 9$), ainsi qu'on peut l'observer sur la figure ci-dessous où est tracé le revenu marginal pour $q = 1$ et $q = 7$; en conséquence, le maximum cherché de RT est atteint pour $q = 3$ et vaut 9.



Bibliographie

[1] Allen R.G.D., *Mathematical Analysis for Economists*, Macmillan, London, 1947.

[2] Bair J., La notion d'élasticité explique l'influence des variations de prix sur le revenu brut de la vente d'un bien, *Mathématique et Pédagogie,* 1987, 64, 21-24.

[3] Denis M., *Lexique de l'économie et de la gestion,* Editions Labor, F. Nathan, Bruxelles.

[4] Henderson J.M. - Quandt R.M., *Microéconomie - formulation mathématique élémentaire,* Dunod, Paris, 1982.

[5] Salvatore D., *Microéconomique : cours et problèmes,* Série Schaum, McGraw-Hill, New York-Paris, 1985.

Adresse de l'auteur :

Jacques BAIR
Université de Liège
Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales
7, boulevard du Rectorat
4000 Liège (Belgique).

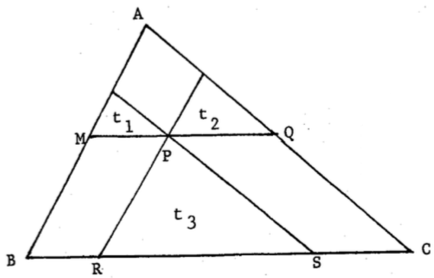
Le coin de MATH-JEUNES

C. Festraet,

Voici les énoncés et solutions des cinq problèmes proposés dans le numéro 46 de Math-Jeunes.

1. ***On choisit un point P à l'intérieur du triangle ABC de telle façon que si on trace par P des parallèles aux côtés du triangle ABC, les petits triangles t_1, t_2, t_3 (voir figure) ont comme aire respectivement 4, 9 et 49. Trouver l'aire du triangle ABC.***

   Solution



Les triangles t_1, t_2, t_3 et ABC sont semblables, donc leurs aires sont dans le rapport des carrés de leurs côtés homologues.

$$\frac{\text{aire } t_1}{\text{aire } t_2} = \frac{4}{9} = \frac{|MP|^2}{|PQ|^2} \quad , \quad \frac{\text{aire } t_1}{\text{aire } t_3} = \frac{4}{49} = \frac{|MP|^2}{|RS|^2},$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned} |MP| &= 2k \\ |PQ| &= 3k \\ |RS| &= 7k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |BC| &= |BR| + |RS| + |SC| \\ &= |MP| + |RS| + |PQ| \\ &= 2k + 3k + 7k = 12k. \end{aligned}$$

D'où

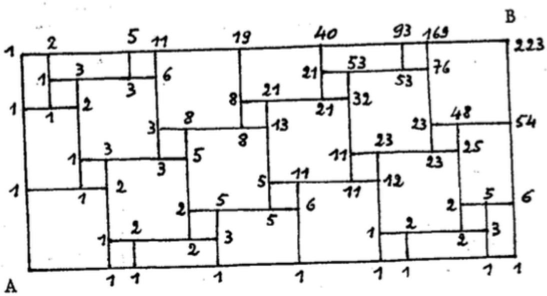
$$\frac{\text{aire } t_1}{\text{aire } ABC} = \frac{|MP|^2}{|BC|^2} = \frac{4k^2}{144k^2} = \frac{4}{144},$$

ce qui donne

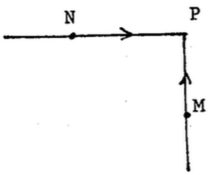
$$\text{aire } ABC = 144.$$

2. ***Quel est le nombre de chemins qui permettent d'aller de A en B en se déplaçant soit vers le haut, soit vers la droite (on ne peut jamais revenir sur ses pas) ?***

   Solution

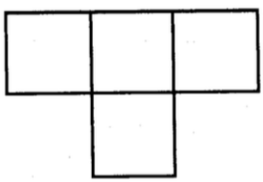


En progressant de A vers B, on indique à chaque carrefour le nombre de manières d'y arriver : ce nombre est la somme des nombres indiqués aux carrefours adjacents qui précèdent.



Pour arriver en P, il faut soit venir de M, soit venir de N. S'il y a m manières d'arriver en M et n manières d'arriver en N, il y a donc $m + n$ manières d'arriver en P.

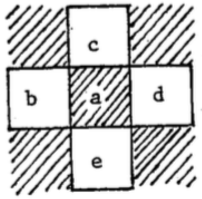
3. ***Est-il possible de placer les nombres naturels de 1 à 64 dans les 64 cases d'un échiquier 8×8 de telle sorte que la somme des nombres figurant dans toute partie de l'échiquier ayant la forme que voici***



(et n'importe quelle orientation) soit une multiple de 5 ?

Solution

Supposons que les 64 nombres soient placés dans les 64 cases de l'échiquier et examinons les nombres a, b, c, d, e placés en "croix" dans la situation ci-dessous.



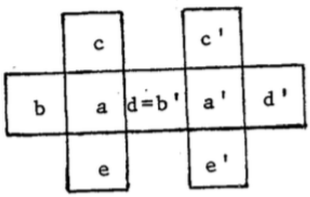
Par hypothèse, on doit avoir

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 5k_1 \\ a+c+d+e &= 5k_2 \\ a+d+e+b &= 5k_3 \\ a+e+b+c &= 5k_4 \end{aligned}$$

En soustrayant deux à deux ces égalités, on obtient

$$\begin{aligned} b-e &= 5(k_1-k_2) \\ c-e &= 5(k_1-k_3) \\ d-e &= 5(k_1-k_4) \end{aligned}$$

$b-e$, $c-e$, $d-e$ sont multiples de 5, donc b, c, d et e divisés par 5 ont le même reste.
Examinons maintenant une "croix" voisine



On obtient de même que b', c', d', e' divisés par 5 ont le même reste.
Or $b' = d$, donc b, c, d, e, c', d', e' divisés par 5 ont le même reste.
En procédant ainsi, de proche en proche, on peut conclure que toutes les cases blanches de l'échiquier, sauf celles des coins, contiennent des nombres qui donnent le même reste lorsqu'on les divise par 5.

De 1 à 64, les nombres

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60$$

(soit douze nombres en tout) donnent comme reste 0 ;
les nombres

$$1, 6, 11, \ldots, 61$$

(il y en a treize) donnent comme reste 1 ;
les nombres

$$2, 7, 12, \ldots, 62$$

(il y en a treize) donnent comme reste 2 ;
les nombres

$$3, 8, 13, \ldots, 63$$

(il y en a treize) donnent comme reste 3 ;
et les nombres

$$4, 9, 14, \ldots, 64$$

(il y en a treize) donnent comme reste 4, quand on les divise par 5.

Or, si on enlève les coins, l'échiquier contient 30 cases blanches. Il est donc impossible de remplir ces 30 cases avec des nombres allant de 1 à 64 et qui donnent le même reste dans la division par 5.

4. ***Déterminer tous les triangles de côtés de longueurs*** a, b, c ***et d'aire*** S ***tels que*** a, b, c, S ***soient entiers et en progression arithmétique.***

Solution

Posons

$$\begin{aligned} a &= b - x \\ c &= b + x \\ S &= b + 2x \end{aligned}$$

x étant la raison de la progression.

Le périmètre du triangle est

$$2p = a + b + c = 3b$$

et l'aire est donnée en fonction des côtés par

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
S^2 &= p(p-a)(p-b)(p-c) \\
(b+2x)^2 &= \frac{3b}{2}\,(\frac{3b}{2}-b+x)(\frac{3b}{2}-b)(\frac{3b}{2}-b-x) \\
&= \frac{3b^2}{4}\,(\frac{b^2}{4}-x^2).
\end{aligned}$$

Le premier membre est un entier, donc le second membre doit l'être aussi, ce qui entraîne que b est un nombre pair et que l'on peut poser $b = 2B$. L'égalité ci-dessus s'écrit alors

$$\begin{aligned}
(2B+2x)^2 &= 3B^2(B^2-x^2) \\
4(B+x)^2 &= 3B^2(B+x)(B-x) \\
4(B+x) &= 3B^2(B-x)
\end{aligned}$$

Isolons x

$$\begin{aligned}
x(4+3B^2) &= 3B^3-4B \\
x &= \frac{3B^3-4B}{3B^2+4} = \frac{3B^3+4B-8B}{3B^2+4} \\
&= B - \frac{8B}{3B^2+4}
\end{aligned}$$

x est un entier ssi $3B^2+4$ divise $8B$

si $B = 1$, alors $3B^2+4 = 7$ ne divise pas $8B = 8$
si $B = 2$, alors $3B^2+4 = 16$ divise $8B = 16$
si $B > 2$, alors $3B^2+4$ ne divise pas $8B$

car $3B^2+4 > 8B$.

La seule solution est obtenue pour $B = 2$. On a, dans ce cas,

$$a = 3, \;\; b = 4, \;\; c = 5 \;\text{ et }\; S = 6.$$

5. ***Une collection de n^2 jetons est composée de n jetons marqués "1", de n jetons marqués "2", ... et de n jetons marqués "n". Est-il possible de disposer ces jetons en ligne droite de manière qu'entre un jeton marqué "x" et le jeton le plus proche marqué "x", il y ait exactement x jetons***

(dont les marques sont forcément distinctes de "x") et ce, pour tout $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$?

Solution

Plaçons d'abord les n jetons marqués "n" entre deux "n" consécutifs, il doit y avoir n jetons.

$$n \underbrace{\ldots}_{n \text{ jetons}} n \underbrace{\ldots}_{n \text{ jetons}} n \ldots \quad n \underbrace{\ldots}_{n \text{ jetons}} n$$

On a bien $n + (n-1).n = n^2$ jetons au total.

Il faut maintenant placer les n jetons marqués "$n-1$". Il y a $(n-1)$ intervalles entre les jetons marqués "n" et n jetons à placer dans ces intervalles, donc il y aura forcément (au moins) deux jetons dans un même intervalle et ces deux jetons seront séparés par au plus $(n-2)$ autres jetons. Donc, c'est impossible.

Voyage en Probabilités, Récurrence et Combinatoire

P. Dupont, *Faculté des Sciences Agronomiques de Gembloux*

1. Introduction

Le texte qui suit explique une résolution possible d'un petit problème de probabilités, sans aucune prétention d'originalité scientifique.

Généralement, entre la résolution d'un problème et la rédaction d'un article, l'auteur procède à deux mises au point : la première, mathématique, cherche à éliminer du futur texte tous les tâtonnements, erreurs, fausses pistes que l'auteur a rencontrés, afin de ne laisser subsister qu'un raisonnement déductif parfaitement "léché" ; la seconde, linguistique, a pour but de traduire en une langue compréhensible par les lecteurs les notes éparses, signes cabalistiques, abréviations que le chercheur aura mis sur papier durant sa réflexion.

Ici, volontairement, la première phase a été omise. C'est dire que, dans les pages qui suivent, le problème initial n'est qu'un prétexte à exposer le processus de réflexion que l'on a mené pour le résoudre.

Le lecteur sera-t-il pour autant invité, anticipant sa lecture, à reconstruire le raisonnement de l'auteur ? Non, il ne saurait en être question. L'auteur a raisonné d'une certaine manière, explorant certaines pistes et en ignorant d'autres. Une autre personne –voire l'auteur lui-même, à un moment différent– aurait probablement fait d'autres choix ; la démarche de recherche est personnelle.

Pourquoi alors exposer les vues d'un seul individu ? Simplement, dans l'espoir d'éveiller des échos, de susciter des résonnances chez ceux qui ont rencontré ce genre de raisonnement — c'est-à-dire, en principe, tout mathématicien.

En outre, me semble-t-il, le problème résolu pourrait être proposé aux rhétoriciens les plus doués, dans le cadre des deux heures de renforcement, par exemple, comme illustration à leur niveau de ce que peut être la recherche en mathématique, avec sa succession de phases inductives et de phases déductives, l'intuition confirmée (ou parfois invalidée) par la démonstration ; à certains tournants du schéma de travail, les mathématiques apparaissent comme une science expérimentale, le chercheur observant les nombres qui peu à peu remplissent un tableau, obéissant à une loi dont une seule facette est encore connue.

Bien sûr, pour une utilisation pédagogique de ce problème, il reste à préparer tout un réseau de "tuyaux" à glisser aux élèves qui resteraient en panne, sans pour autant leur souffler plus que le minimum. Mais cela est une autre histoire... Un mot cependant : il doit y avoir moyen d'amener les élèves à résoudre (presque) par eux-mêmes les quelques équations aux différences finies qui se présenteront, en commençant par de plus simples, sans devoir passer par l'analogie avec les équations différentielles, dont les élèves, sauf exception, ignorent à ce niveau l'existence.

2. Le problème

Au départ des calculs qui vont suivre, il y a un problème de calcul des probabilités :

Problème. $X^{(n)}$ est une variable aléatoire discrète, uniformément répartie entre les valeurs entières 1, 2, ... n. Si on effectue plusieurs "tirages" (indépendants) de $X^{(n)}$, les valeurs obtenues risquent fort de ne pas être toutes différentes (c'est même certain si on effectue strictement plus de n tirages).

Précisons.

On effectue m tirages. Combien de résultats différents peut-on escompter ?

Introduisons la variable aléatoire discrète $Y_m^{(n)}$ qui représente le nombre de résultats distincts obtenus en m tirages de $X^{(n)}$. Il s'agit d'étudier la distribution de $Y_m^{(n)}$.

Notons $P_{m,k}^n$ la probabilité qu'en m tirages on ait k résultats différents :

$$P_{m,k}^n = \mathbf{P}(Y_m^{(n)} = k).$$

Notre but final est d'exprimer $P_{m,k}^n$ en fonction de n, m et k.

3. Quelques remarques immédiates et une relation de récurrence

Il est clair que, pour chaque n,

$$P^n_{0,0} = 1 \text{ et}$$
$$P^n_{0,k} = P^n_{m,0} = 0 \text{ si } m, k > 0.$$

Donc, l'étude que nous allons mener sera pertinente lorsque m, n et k parcourent $\mathbf{N}^*$.

Si on effectue un seul tirage, on aura, bien sûr, un seul résultat ; donc,

$$P^n_{1,1} = 1 \text{ et}$$
$$P^n_{1,k} = 0 \text{ si } k \neq 1.$$

Il est encore évident qu'on n'obtiendra jamais plus de n résultats distincts, ni plus de résultats distincts que de tirages ; donc,

$$P^n_{m,k} = 0 \text{ si } k > \min(n, m).$$

Posons-nous à présent la question : comment obtenir k résultats distincts en m tirages ? De deux choses l'une :

— soit les $m-1$ premiers tirages avaient déjà fourni k résultats distincts et le m^e a refourni une valeur déjà obtenue ;

— soit les $m-1$ premiers tirages avaient fourni $k-1$ résultats distincts et le m^e a donné un résultat nouveau.

Ce qui s'écrit, en clair :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y^{(n)}_m = k) \;&=\; \mathbf{P}(Y^{(n)}_{m-1} = k).\mathbf{P}(Y^{(n)}_m = k \mid Y^{(n)}_{m-1} = k) + \\ &+\; \mathbf{P}(Y^{(n)}_{m-1} = k-1).\mathbf{P}(Y^{(n)}_m = k \mid Y^{(n)}_{m-1} = k-1). \qquad (1)\end{aligned}$$

Que valent les probabilités conditionnelles qui interviennent dans cette expression ? La première est la probabilité que le m^e tirage, parmi les n valeurs possibles, fournisse une valeur parmi les k déjà obtenues : elle vaut k/n ; de même, le seconde vaut $(n-(k-1))/n$. La relation (1) se récrit donc :

$$P^n_{m,k} = \frac{k.P^n_{m-1,k} + (n-k+1).P^n_{m-1,k-1}}{n}. \qquad (2)$$

Pour le praticien, cette formule est déjà d'une très grande utilité, car elle permet de calculer les $P^n_{m,k}$ de proche en proche.

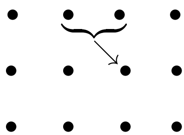
4. Le trapèze d'ordre n

En fait, dans (2), la récurrence se fait sur m et sur k, mais non sur n. Il est donc raisonnable de travailler "à n constant", c'est-à-dire, pour chaque valeur fixée de n, de construire un tableau à double entrée, que nous pourrons présenter comme ceci :

$$n = \dots$$

$$\begin{array}{r|cccc}
k = & 1 & 2 & 3 & \cdots \\
\hline
m = 1 & P^n_{1,1} & P^n_{1,2} & P^n_{1,3} & \cdots \\
2 & P^n_{2,1} & P^n_{2,2} & P^n_{2,3} & \cdots \\
3 & P^n_{3,1} & P^n_{3,2} & P^n_{3,3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Il est éclairant de symboliser dans ce tableau comment les divers éléments découlent l'un de l'autre dans la récurrence (2) : $P^n_{m,k}$ dépend de $P^n_{m-1,k}$, qui est l'élément au-dessus de lui, et de $P^n_{m-1,k-1}$, situé à gauche de ce dernier. Schématiquement :



Les liens de parenté sont donc les mêmes que dans le triangle de Pascal, mais bien sûr les valeurs sont différentes, du fait de la présence des coefficients k/n et $(n-k+1)/n$.

Comme le seul élément non nul de la première ligne est le premier, nous voyons que tous les éléments situés au-dessus de la diagonale du tableau seront nuls, ce qui rejoint la remarque que $P^n_{m,k}$ est nul pour $k > m$.

En outre, regardons le comportement de la $(n+1)^e$ colonne. Le premier élément qui puisse éventuellement y être non nul est le $(n+1)^e$, $P^n_{n+1,n+1}$, construit à partir de $P^n_{n,n+1}$, nul et de $P^n_{n,n}$; ce dernier, comme nous le verrons, est différent de zéro, mais son coefficient dans (2) est nul ; ainsi, $P^n_{n+1,n+1}$ est nul, et de même pour tous les éléments de la $(n+1)^e$ colonne et des suivantes, comme nous nous y attendions, puisque $P^n_{m,k} = 0$ pour $k > n$.

Finalement, les seuls éléments peut-être non nuls seront ceux repérés par les $\otimes$ qui constituent un "trapèze infini" dans la figure ci-dessous :

$$
\begin{array}{r|ccccccc}
k = & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 \\
\hline
m = 1 & \bigotimes & & & & & & \\
2 & \bigotimes & \bigotimes & & & & & \\
3 & \bigotimes & \bigotimes & \bigotimes & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \text{\Huge 0} & \\
n & \bigotimes & \bigotimes & \bigotimes & \cdots & \bigotimes & & \\
n+1 & \bigotimes & \bigotimes & \bigotimes & \cdots & \bigotimes & & \\
n+2 & \bigotimes & \bigotimes & \bigotimes & \cdots & \bigotimes & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

que nous appellerons le *trapèze d'ordre n*.

5. Quelques valeurs numériques

La récurrence (2) fonctionne très bien ; elle permet d'obtenir facilement (... il suffit d'un ordinateur ou alors de beaucoup de patience) les trapèzes des divers ordres.

Voici les premières lignes du trapèze d'ordre 6. Dans ce tableau, l'élément d'intersection de la m^e ligne et de la k^e colonne est donc la probabilité d'obtenir k résultats différents en jetant m fois un dé mathématique.

$k =$	1	2	3	4	5	6
$m = 1$	$1,0000$					
2	$0,1667$	$0,8333$				
3	$0,0278$	$0,4167$	$0,5556$			
4	$0,0046$	$0,1620$	$0,5556$	$0,2778$		
5	$0,0008$	$0,0579$	$0,3858$	$0,4630$	$0,0926$	
6	$0,0001$	$0,0199$	$0,2315$	$0,5015$	$0,2315$	$0,0154$
7	$0,0000$	$0,0068$	$0,1290$	$0,4501$	$0,3601$	$0,0540$
8	$0,0000$	$0,0023$	$0,0690$	$0,3646$	$0,4501$	$0,1140$
9	$0,0000$	$0,0008$	$0,0360$	$0,2776$	$0,4966$	$0,1890$
10	$0,0000$	$0,0003$	$0,0185$	$0,2031$	$0,5064$	$0,2718$
11	$0,0000$	$0,0001$	$0,0094$	$0,1446$	$0,4897$	$0,3562$
12	$0,0000$	$0,0000$	$0,0048$	$0,1011$	$0,4563$	$0,4378$
13	$0,0000$	$0,0000$	$0,0024$	$0,0698$	$0,4139$	$0,5139$
14	$0,0000$	$0,0000$	$0,0012$	$0,0477$	$0,3682$	$0,5828$
15	$0,0000$	$0,0000$	$0,0006$	$0,0324$	$0,3227$	$0,6442$

Nous y lisons, par exemple, que si on jette cinq fois un dé, le plus probable est d'avoir quatre résultats différents ou que si on veut plus d'une chance sur deux de voir sortir au moins une fois chaque résultat, il faut effectuer au moins treize jets de dé.

Une remarque encore : les nombres figurant dans ce tableau sont arrondis à la quatrième décimale ; ceci signifie entre autres que les 0,0000 ne sont pas vraiment nuls...

6. L'insuffisance de la loi de récurrence

L'examen du trapèze d'ordre 6 nous permet de poser un certain nombre de conjectures, guidés aussi, il faut le dire, par ce que nous savons de la signification de ces colonnes de chiffres ; par exemple :

1. $P^n_{m,n} \to 1$ lorsque $m \to \infty$, n étant fixé ;
2. $P^n_{m,k} \to 0$ lorsque $m \to \infty$, n et $k < n$ étant fixés.

Nous ne pouvons guère espérer prouver –ou réfuter– ces thèses sans formule explicite pour les $P^n_{m,k}$.

D'autres problèmes exigeraient aussi une formule explicite : par exemple, pour m et n fixés, quelle est la valeur de k rendant maximal $P^n_{m,k}$?

7. Vers une formule explicite

Dégager une formule explicite à partir d'une loi de récurrence est un travail qui m'a toujours excité. On calcule de proche en proche les premières valeurs, jusqu'à ce qu'apparaisse un début de régularité dans les résultats ; on flaire une formule, on la met clairement en place sur la feuille, et on essaie enfin de la démontrer. Induction puis déduction, c'est en petit tout le travail des mathématiciens.

Hop, au boulot !

$$P^n_{1,1} = 1;$$

ça, c'est connu.

$$P^n_{2,2} = \frac{1}{n}(2.P^n_{1,2} + (n-1).P^n_{1,1}) = \frac{1}{n}(2.0 + (n-1).1) = \frac{n-1}{n};$$
$$P^n_{2,1} = \frac{1}{n}(1.P^n_{1,1} + n.P^n_{1,0}) = \frac{1}{n}(1.1 + n.0) = \frac{1}{n};$$

jusque là, les calculs ne sont pas chinois !

$$P^n_{3,3} = \frac{1}{n}(3.P^n_{2,3} + (n-2).P^n_{2,2}) = \frac{1}{n}(3.0 + (n-2).\frac{n-1}{n}) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2};$$
$$P^n_{3,2} = \frac{1}{n}(2.P^n_{2,2} + (n-1).P^n_{2,1}) = \frac{1}{n}(2.\frac{n-1}{n} + (n-1).\frac{1}{n}) = 3\frac{n-1}{n^2};$$
$$P^n_{3,1} = \frac{1}{n}(1.P^n_{2,1} + n.P^n_{2,0}) = \frac{1}{n}(1.\frac{1}{n} + n.0) = \frac{1}{n^2}.$$

Je commence à avoir une idée, pas vous ? Allons, encore une série, pour être sûrs !

$$P^n_{3,4} = \cdots = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3};$$
$$P^n_{3,3} = \cdots = 6\frac{(n-1)(n-2)}{n^3};$$
$$P^n_{3,2} = \cdots = 7\frac{n-1}{n^3};$$
$$P^n_{3,1} = \cdots = \frac{1}{n^3}.$$

Cette fois-ci, ça y est : nous avons

$$P^n_{m,m} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{n^{m-1}},$$

$$P^n_{m,1} = \frac{1}{n^{m-1}},$$

et entre les deux,

$$P^n_{m,k} = \text{quelque chose} \times \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^{m-1}}.$$

Le problème, c'est ce "quelque chose". Évidemment, il ne dépend pas de n. Nous pouvons dresser le tableau suivant :

$k =$	1	2	3	4
$m = 1$	1			
2	1	1		
3	1	3	1	
4	1	7	6	1

Ce n'est pas très clair. Provisoirement, laissons ce "quelque chose" de côté en le notant $\alpha_{m,k}$. Nous avons donc une conjecture :

$$P^n_{m,k} = \alpha_{m,k}.\frac{\prod_{1\leqslant i<k}(n-i)}{n^{m-1}}. \tag{3}$$

8. Vérification de la première conjecture

Il s'agit à présent de démontrer la relation (3), c'est-à-dire de s'assurer que les expressions proposées pour les $P^n_{m,k}$ satisfont (2). Nous savons déjà, en effet, qu'elles conviennent pour les petites valeurs de m et de k.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}(k.P^n_{m-1,k} + (n-k+1).P^n_{m-1,k-1}) \quad = \\
&= \frac{1}{n}(k.\alpha_{m-1,k}.\frac{\prod_{1\leqslant i<k}(n-i)}{n^{m-2}} \\
&\qquad +(n-k+1).\alpha_{m-1,k-1}.\frac{\prod_{1\leqslant i<k-1}(n-i)}{n^{m-2}}) \\
&= \frac{1}{n}.\frac{\prod_{1\leqslant i<k}(n-i)}{n^{m-2}}\,[k\alpha_{m-1,k} + \frac{n-k+1}{n-(k-1)}\alpha_{m-1,k-1}] \\
&= \frac{\prod_{1\leqslant i<k}(n-i)}{n^{m-1}}\,[k\alpha_{m-1,k} + \alpha_{m-1,k-1}].
\end{aligned}$$

Donc, notre conjecture est correcte, pour autant que les coefficients $\alpha_{m,k}$ satisfassent la relation de récurrence :

$$\alpha_{m,k} = k\alpha_{m-1,k} + \alpha_{m-1,k-1}. \tag{4}$$

Faisons le point. À la fin du paragraphe précédent, notre conjecture nous semblait presque vide de sens, tant nous savions peu de choses sur ces $\alpha_{m,k}$. À présent, la situation nous apparaît sous un jour beaucoup plus optimiste :

1. La conjecture (3) est vraie.
2. Comme pressenti, les coefficients $\alpha_{m,k}$ ne dépendent pas de n, ce qui veut dire que nous avons réduit un problème à trois variables n, m, k à un problème à deux variables m et k.
3. Nous avons à présent une piste pour étudier les $\alpha_{m,k}$: la relation (4).

9. Une nouvelle phase inductive

La meilleure chose que nous ayons à faire, pour l'instant, est d'étendre le tableau de la page 51 à l'aide de la relation (4). Nous obtenons :

$k =$	1	2	3	4	5	6	7
$m = 1$	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

Hum ! Ce n'est pas très suggestif... Bien sûr, pour chaque m :

$$\alpha_{m,1} = \alpha_{m,m} = 1.$$

Tiens, on dirait aussi que

$$\alpha_{m,m-1} = \frac{m(m-1)}{2};$$

vérifions cela tout de suite :

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1,m} &= m\alpha_{m,m} + \alpha_{m,m-1} \\ &= m \times 1 + \frac{m(m-1)}{2} \\ &= \frac{(m+1)m}{2}; \end{aligned}$$

tout est en ordre. Examinons maintenant la deuxième colonne : il semble que

$$\alpha_{m,2} = 2^{m-1} - 1.$$

Démontrons cette nouvelle thèse :

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1,2} &= 2\alpha_{m,2} + \alpha_{m,1} \\ &= 2(2^{m-1} - 1) + 1 \\ &= 2^m - 1. \end{aligned}$$

Ici encore, notre supposition était correcte. Mais à partir de là, en appliquant (4) à la troisième colonne, il vient :

$$\alpha_{m,3} = 3\alpha_{m-1,3} + 2^{m-1} - 1,$$

qui devient, si nous posons $\beta_m = \alpha_{m,3}$:

$$\beta_m = 3\beta_{m-1} + 2^{m-1} - 1. \tag{5}$$

Cette relation est une équation aux différences finies à une seule variable, m. Nous savons que la résolution de ces équations est cousine germaine de celle des équation différentielles linéaires à coefficients constants. L'équation différentielle correspondante serait ici :

$$y' = 3y + e^{2x} - 1. \tag{6}$$

Cette équation n'est pas homogène. Sa solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène associée,

$$y' = 3y,$$

et d'une solution particulière de l'équation complète. La solution générale de l'équation homogène est

$$y_H = C.e^{3x};$$

par ailleurs, nous savons pouvoir rechercher une solution particulière de l'équation complète (6) sous la forme

$$y_* = ae^{2x} + b;$$

il s'agit de déterminer a et b pour satisfaire (6) ; nous introduisons donc y_* dans cette équation et il vient :

$$2ae^{2x} = 3(ae^{2x} + b) + e^{2x} - 1,$$

d'où

$$\begin{cases} 2a &= 3a - 1 \\ 0 &= 3b - 1 \end{cases}$$

et enfin

$$\begin{cases} a &= -1/3 \\ b &= 1/3. \end{cases}$$

Donc la solution générale de (6) est :

$$y = C.e^{3x} - \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{3}.$$

De même, la solution générale de (5) sera de la forme $\beta_m = \beta_m^H + \beta_m^*$, où β_m^H est la solution générale de l'équation homogène

$$\beta_m = 3\beta_{m-1},$$

et β_m^* une solution particulière de (5). Clairement, $\beta_m^H = C.3^m$. En outre, nous pouvons rechercher β_m^* sous la forme

$$\beta_m^* = a.2^m + b;$$

déterminons a et b :

$$a.2^m + b = 3(a.2^{m-1} + b) + 2^{m-2} - 1;$$
$$\begin{cases} a = \frac{3}{2}a + 1/4 \\ b = 3b - 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = -1/2 \\ b = 1/2. \end{cases}$$

Ainsi, $\beta_m = C.3^m - \frac{1}{2}.2^m + \frac{1}{2}$; il reste à déterminer C de manière que soit vérifiée la condition initiale $\beta_3 = 1$. La relation

$$1 = C.3^3 - \frac{1}{2}.2^3 + \frac{1}{2}$$

nous donne $C = 1/6$ et finalement,

$$\alpha_{m,3} = \beta_m = \frac{1}{6}.3^m - \frac{1}{2}.2^m + \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Ouf !

10. La solution globale n'est toujours pas en vue. Poursuivons l'exploration

Où en sommes-nous ?

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\alpha_{m,1} &= 1 \\
\alpha_{m,2} &= 2^{m-1} - 1 \\
\alpha_{m,3} &= \frac{1}{2}(3^{m-1} - 2^m + 1).
\end{aligned}$$

Peut-être voyons-nous se dessiner une certaine régularité ? Pas vraiment... Calculons encore $\gamma_m = \alpha_{m,4}$. L'équation en γ est :

$$\gamma_m = 4.\gamma_{m-1} + \frac{1}{2}(3^{m-2} - 2^{m-1} + 1); \tag{8}$$

sa solution générale sera de la forme :

$$\gamma_m = C.4^m + a.3^m + b.2^m + c,$$

où a, b et c sont à déterminer par substitution dans (8) et C par utilisation de la condition initiale $\gamma_4 = 1$. Après calculs, nous arrivons à :

$$\begin{aligned}
a &= -1/6 \\
b &= 1/4 \\
c &= -1/6 \\
C &= 1/24,
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\alpha_{m,4} = \gamma_m = \frac{1}{24}.4^m - \frac{1}{6}.3^m + \frac{1}{4}.2^m - \frac{1}{6}.$$

Récapitulons ; dans cette expression de $\alpha_{m,4}$, des simplifications sont possibles, ainsi que des mises en évidence. Si nous voulons voir clair, il s'agit de trouver *la* bonne façon d'écrire les choses.

$$\begin{aligned}
\alpha_{m,1} &= 1 \\
\alpha_{m,2} &= 2^{m-1} - 1 \\
\alpha_{m,3} &= \frac{1}{2}(3^{m-1} - 2^m + 1) \\
\alpha_{m,4} &= \frac{1}{6}(4^{m-1} - 3^m + 3 \times 2^{m-1} - 1) \\
&= \frac{1}{6}(4^{m-1} - 3 \times 3^{m-1} + 3 \times 2^{m-1} - 1)
\end{aligned}$$

eh !

$$\alpha_{m,3} = \frac{1}{2}(3^{m-1} - 2 \times 2^{m-1} + 1).$$

Eurêka :

$$\alpha_{m,k} = \frac{1}{(k-1)!}(k^{m-1} - \mathbf{C}_{k-1}^{1}.(k-1)^{m-1} + \mathbf{C}_{k-2}^{2} \ldots$$

un peu d'ordre dans tout cela. Du calme.

$$\alpha_{m,k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{0 \leqslant i < k} (-1)^i \mathbf{C}_{k-1}^{i} (k-i)^{m-1}. \tag{9}$$

11. Preuve de la nouvelle conjecture

Montrons que les $\alpha_{m,k}$ définis par (9) satisfont la relation (4)

$$\begin{aligned}
k.\alpha_{m-1,k} &+ \alpha_{m-1,k-1} = \\
&= k.\frac{1}{(k-1)!}\sum_{0\leqslant i<k}(-1)^i\mathbf{C}_{k-1}^i(k-i)^{m-2} + \\
&\quad +\frac{1}{(k-2)!}\sum_{0\leqslant i<k-1}(-1)^i\mathbf{C}_{k-2}^i(k-i-1)^{m-2} \\
&= \frac{1}{(k-1)!}[k.\sum_{0\leqslant i<k}(-1)^i\mathbf{C}_{k-1}^i(k-i)^{m-2} + \\
&\quad +(k-1).\sum_{1\leqslant i<k}(-1)^{i-1}\mathbf{C}_{k-2}^{i-1}(k-i)^{m-2}] \\
&= \frac{1}{(k-1)!}[k.((-1)^0\mathbf{C}_{k-1}^0(k-0)^{m-2} + \\
&\quad + \sum_{1\leqslant i<k}[k.(-1)^i\mathbf{C}_{k-1}^i + (k-1).(-1)^{i-1}\mathbf{C}_{k-2}^{i-1}](k-i)^{m-2}]
\end{aligned}$$

Comme

$$\alpha_{m,k} = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{0\leqslant i<k}(-1)^i\mathbf{C}_{k-1}^i(k-i)^{m-1},$$

il reste à s'assurer que

$$k.(-1)^i\mathbf{C}_{k-1}^i + (k-1).(-1)^{i-1}\mathbf{C}_{k-2}^{i-1} = (-1)^i\mathbf{C}_{k-1}^i(k-i),$$

qui équivaut à la relation vraie

$$i.\mathbf{C}_{k-1}^i = (k-1)\mathbf{C}_{k-2}^{i-1}.$$

Très bien.

12. De nouveaux problèmes

Ainsi, nous avons atteint l'objectif défini en début du §7 : nous savons à présent que

$$P_{m,k}^n = \frac{1}{(k-1)!}(\sum_{0\leqslant i<k}(-1)^i\mathbf{C}_{k-1}^i(k-i)^{m-1}).\frac{\prod_{1\leqslant i<k}(n-i)}{n^{m-1}}.$$

Cette formule est parfaitement explicite mais assez horrible. Les questions soulevées au §6 resteront peut-être sans réponse.

Chemin faisant, nous avons rencontré d'autres questions :

1. Nous avons vu que
$$\alpha_{m,3} = \frac{1}{2}(3^{m-1} - 2 \times 2^{m-1} + 1);$$
il en découle que
$$\alpha_{1,3} = \alpha_{2,3} = 0;$$
ceci nous arrange bien ! Mais c'est un peu un hasard, car nous n'avons défini les $\alpha_{m,k}$ que pour $k \leqslant m$, et la formule (7) n'a été établie que dans ce cas. D'où la question :
Est-il vrai que $\alpha_{m,k} = 0$ pour $k > m$, si les $\alpha_{m,k}$ sont définis par (9) ?
2. Au §9, nous avons établi que $\alpha_{m,m-1} = \frac{m(m-1)}{2}$, puis nous ne nous sommes plus servi de cette remarque. Était-il possible de poursuivre dans cette voie ?

À vous, lecteurs, de résoudre ces problèmes et de vous en poser d'autres si la question vous a intéressés.

13. Conclusion

Voilà. J'ai essayé de transcrire le plus fidèlement possible la démarche que j'avais effectuée deux ou trois jours auparavant. Je me rends compte aussi d'un certain nombre de difficultés que je n'ai pu vaincre. Par exemple, comment rendre compte des pauses que je me suis octroyées en cours de travail ? Impossible de laisser des pages blanches au milieu du texte, pensez à la réaction de l'éditeur ! En outre, ce blanc ne serait même pas fidèle, car certainement, durant ces interruptions, je continuais à mûrir inconsciemment le problème. Sont absentes également les étapes préliminaires qui m'ont conduit à "adopter" ce problème, à le considérer comme un défi personnel.

Ces lacunes, ce sera à l'imagination de chacun des lecteurs de les combler.

P.S : Une remarque que je ne sais trop où placer : bien longtemps après la fin de ce travail, j'ai eu l'occasion d'apprendre que mes coefficients $\alpha_{m,k}$ sont connus sous le nom de *nombres de Stirling de seconde espèce* et parfois notés σ_m^k ; ils interviennent dans différents problèmes de dénombrement : notamment, σ_m^k est le nombre de partitions en k classes d'un ensemble à m éléments et donc, $k!\sigma_m^k$ est le nombre de surjections d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments. On les retrouve encore, par exemple, lorsqu'on calcule les itérés de l'opérateur xD : dériver, puis multiplier par x.

Adresse de l'auteur :

Pascal DUPONT
Faculté des Sciences Agronomiques de Gembloux,
Passage des Déportés 2, B – 5800 Gembloux

Revue des revues

J. Bair, N. Joelants, C. Festraets,

THETA

Theta est un journal de mathématique générale destiné à tout qui apprend, enseigne, pratique et aime la mathématique. En particulier, son but est de promouvoir et de stimuler l'intérêt parmi tous les professeurs de mathématique. Il est édité par le département de mathématique du Crewe+Alsager College of Higher Education (Crewe, Cheshire CW1 1DU, Angleterre) ; il paraît deux fois l'an, en février et en septembre.

Sommaire du volume 3, numéro 2 de septembre 1989

(*) COLWELL D., GILLET J., JONES B., The expected Number of Holes

(**) SMITH R., A simple Population Model with Migration

SHIFFLETT R., SHULTZ H., What Percentage of Triangles are Obtuse ?

OKUMURA H., A Theorem of Tangent Cycles

(***) FLAHERTY T., Putting Mathematics First

(****) BRIC-A-BRAC

(*) Il s'agit d'une étude théorique sur le nombre minimum de trous à jouer au golf avant qu'un participant ne gagne la partie (jouée sur 18 trous). La pertinence du modèle élaboré est montrée en comparant les résultats obtenus à ceux enregistrés réellement à la Ryder Cup de 1961 à 1977.

(**) L'auteur donne deux modèles mathématiques (construits à l'aide d'équations récurrentes simples d'ordre 1, une homogène et l'autre non homogène) décrivant l'évolution du nombre d'habitants d'une région au cours du temps. Ils appliquent leurs résultats théoriques au cas de la population de Grande-Bretagne.

(***) On illustre souvent les concepts mathématiques à l'aide d'un ordinateur. Pourquoi ne pas porter plus d'attention sur le traitement mathématique des différents concepts sur lesquels repose l'informatique ?

(****) Ensemble de petites rubriques comprenant, notamment, des mots croisés pour mathématiciens, des problèmes, ainsi qu'une brève revue de journaux et de livres.

Jacques BAIR

THE MATHEMATICAL SPECTRUM

The Mathematical Spectrum est une revue anglaise, émulation de l'Université de Sheffield, qui présente à chaque numéro une page réservée à un petit problème de programmation et des problèmes destinés aux étudiants (les solutions étant proposées dans le numéro suivant).

De plus, au *sommaire du volume 22, numéro 1 de 1989/90 :*

(*) SMITHIES F., Augustin-Louis Cauchy

(**) SHI-LUI L., The convergence of the sequence $((1+\frac{1}{n})^n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

(***) NASH C., Musings on an interesting sequence

(*) L'année 1989 représentant le bicentenaire de la naissance du grand Augustin (et pour un mathématicien, n'est-ce pas aussi important que le bicentenaire de la prise de la Bastille ?), l'auteur de cet article consacre quelques pages à la vie et à l'oeuvre de cet illustre mathématicien français.

(**) Le Professeur LIANG SHI-LUI de l'Université de Guizhou (Sud-Ouest de la Chine) nous donne deux manières inhabituelles de démontrer que la suite $(1 + \frac{1}{n})^n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) possède une limite. A cet effet, il utilise astucieusement l'inégalité de Bernoulli ou encore le fait que la moyenne géométrique de nombres positifs est inférieure à leur moyenne arithmétique.

(***) Chris Nash, étudiant faisant partie de l'équipe de l'Angleterre pour les Olympiades Internationales de 1988 en Australie, s'est posé le problème suivant. On considère une suite croissante (peut-être infinie) d'entiers positifs $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ telle que le produit de deux x_i soit égal à un carré parfait moins un. On obtient assez facilement un début encourageant : 1,3,8 et 120 satisfont à la question mais peut-on y ajouter un cinquième nombre ?

Nadine JOELANTS

CIEL ET TERRE

Sommaire du Vol. 105, N°4 (juillet-août 1989)

A propos des débris spatiaux en orbite.

(*) M. GABRIEL, La théorie des épicycles, II : l'oeuvre de Ptolémée.

Le Baron R. de Terwangne : une longue carrière d'observateur hors pair,

(**) J. BOURGEOIS, L'entraînement horaire d'un télescope par un moteur pas à pas.

Souvenirs ... Souvenirs - 23 octobre 1988 ... Journée "Portes Ouvertes".

Les pages de l'observateur.

Assemblée générale du 18 mars 1989.

M. VANDIEPENBEECK, Résumés climatologiques mensuels.

Bibliographie.

(*) C'est la suite de l'article paru dans le N°1 de janvier-février et qui s'intitulait I : des origines à Hipparque. L'auteur montre que si Ptolémée adopte la théorie d'Hipparque sans aucune modification en ce qui concerne le soleil, il n'en est pas de même pour les planètes. S'apercevant que les théories de ses prédécesseurs ne pouvaient rendre compte de toutes les observations, Ptolémée abandonne l'idée que la Terre est le centre du déférent et que celui-ci est parcouru à vitesse constante. Pour les anciens, la théorie de Ptolémée devient aussi une méthode mathématique sans rapport avec la réalité, déférents et épicycles permettent de calculer la position des astres, mais leur mouvement réel reste inconnu.

(**) Pour les amateurs, l'article expose comment réaliser pour un coût très léger un dispositif d'entraînement horaire comprenant un micro-moteur et un boîtier de commande.

CIEL ET TERRRE

Vol. 105 - N°5 (sept.-octobre 1989)

Numéro entièrement consacré aux éphémérides astronomiques et au calendrier des événements célestes pour 1990.

Claudine FESTRAETS

Dans nos classes

R. Lesplingart-Midavaine,

Une idée pour introduire le calcul du volume du cylindre au niveau 3 ([1]) dans une classe à majorité de garçons ? (Je n'ai pas essayé avec des filles.) Il faut un peu de documentation sur ... les motos ! On les regarde, on discute de leur propre machine et on amène la conversation sur la CYLINDREE.

Quelques mots de vocabulaire sont à introduire :

Cylindrée : Nombre de cylindres × le **volume** de chacun d'eux
Course : distance parcourue par le piston
Alésage : **diamètre** intérieur du cylindre
Moteur "carré" : moteur dont la course est égale à l'alésage.

"On n'est pas au cours de mécanique..." Mais la mécanique a besoin de la mathématique !

Vérifions la cylindrée de la Kawasaki KDX 200 (voir tableau)

Caractéristiques : 4 cylindres
66 mm × 58 mm
(alésage - course)

	100 GTR	1500 SE	KDX 200	MTX 50	NISSAN PATROL	NISSAN MICRA
Moteurs						
Nombres de cylindres	4	2	1	1	6	4
Alésage, en mm	74	102	66	39	83	68
Course, en mm	58	90	58	41,4	100	68
Cylindrée, en cm^3	997	1470	198	49	3246	988

Et c'est parti.

Pour vous, la solution :

$$\begin{aligned} \text{Cylindrée : } 1mm^3.4.33.33.3,14.58.1 &= 198328,68mm^3 \\ &= 198cm^3 \end{aligned}$$

1. Programme $n°$ 73/113-7/5150

Notions rappelées, abordées et synthétisées : π , rayon, diamètre, aire d'un cercle, volume d'un cylindre, transformations des unités de volume, arrondir un nombre.

R. LESPLINGART-MIDAVAINE

A propos des problèmes

Les problèmes, de tout type, intéressent toujours le mathématicien : faire des maths, n'est-ce pas essentiellement résoudre des problèmes ?

C'est pourquoi, la S.B.P.M. propose très souvent des jeux et des problèmes à ses lecteurs (jeunes ou enseignants) ; M.P. va continuer bien sûr à offrir aux collègues de nombreux problèmes : C. FESTRAETS, la responsable attitrée de cette rubrique, possède encore de multiples énoncés en réserve !

Dans les prochains numéros de la revue, j'aimerais élargir le débat et souhaiterais réféchir avec vous sur la place des problèmes dans notre enseignement, présenter aux lecteurs des énoncés susceptibles d'intéresser les élèves (de tous les niveaux et des différentes orientations), relater des expériences pédagogiques relatives à l'enseignement des problèmes, dégager les objectifs à rechercher grâce aux problèmes, ...

Pour lancer la discussion, je voudrais soumettre à votre réflexion cette expérience que j'ai menée cette année. Lors de mon premier cours en 1e candi Science Economique à l'Université de Liège, j'ai demandé aux étudiants d'évaluer leurs connaissances sur un certain nombre de matières. Voici les résultats enregistrés concernant le contenu "Problèmes concrets (par exemple, sur les extrema)" : 9 % des étudiants estimaient bien maîtriser ce sujet, 37 % avaient généralement des difficultés avec des problèmes, 24 % n'avaient jamais fait de problèmes concrets et 31 % souhaitaient une révision de cette matière.

A méditer me semble-t-il !

Vos observations, suggestions et réflexions sur le sujet sont les bienvenues.

Jacques BAIR

Tables rondes

S. Trompler,

Compte-rendu de la table ronde sur le passage de l'enseignement secondaire aux études supérieures d'ingénieurs industriels.

Les professeurs de l'enseignement supérieur présents estiment que le niveau de leurs étudiants, à l'entrée, baisse. (Ce n'est pas l'avis du représentant de l'école Gramme à Liège). Il y a énormément d'échecs en mathématique.

Causes :

1) Se côtoient des étudiants qui ont eu 2h de mathématique et d'autres qui en ont eu jusqu'à 7 par semaine.

Il semble qu'un bon cours de 5h soit souhaitable, mais on constate que ces cours sont de qualité très variable. Les élèves qui viennent de l'enseignement technique (7h/semaine) sont assez bien préparés mais trop peu habitués, parfois, à faire des démonstrations.

2) Les étudiants qui choisissent cette voie ont un recul devant le cours de mathématique car ils recherchent une formation technique.

3) La connaissance du français est souvent déficiente et le manque de vocabulaire précis entrave la compréhension et l'expression.

Ce n'est pas uniquement chez les étrangers que le cas se présente.

4) La différence d'ambiance entre une école de petite taille, voire presque familiale, et une grande école trouble beaucoup d'étudiants, les empêche de s'épanouir la première année.

5) Les changements de programme qui ont supprimé, ou presque, l'étude de la géométrie descriptive et celle de la géométrie dans l'espace sans approche algébrique, aboutissent à un manque de représentation et de visualisation à 3 dimensions. Il en est de même en ce qui concerne la disparition du cours de dessin.

Remèdes possibles

1) Un examen d'entrée : il est très contesté car il empêche d'accueillir ceux qui ont été peu formés mais veulent faire l'effort nécessaire et en sont capables. On constate en effet qu'une motivation importante est un atout majeur.

2) Un examen d'entrée "sur mesure" pour ceux qui ont eu moins de 5 heures : c'est mieux car, pour les bons élèves de ce groupe, il est préférable de combler leurs lacunes dans un programme restreint, bien choisi, avant le début d'année.

3) Etablissement de 2 cours de mathématique en première : 7 heures pour ceux qui ont eu 3 heures et moins, 4 heures pour les autres.

4) Une année préparatoire conçue spécialement pour ceux qui ont fait trop peu de mathématique.

5) L'enseignement secondaire devrait développer davantage la mémoire visuelle et la mémoire auditive.

6) Le dessin industriel devrait être repris dans le cadre d'informatique pratique. En effet, pour comprendre un programme de dessin assisté par ordinateur, il faut connaître un minimum de dessin industriel.

7) On pourrait diminuer l'importance du cours de mathématique en première, mais les professeurs des autres branches, en particulier de physique manqueraient d'outils.

Voici, résumée le plus fidèlement possible, la discussion entre les participants à la table ronde. Y participaient des professeurs de l'enseignement technique supérieur, de l'enseignement moyen général et technique, des inspecteurs.

Si ce compte-rendu vous inspire des critiques ou des suggestions, envoyez-les au rapporteur de cette séance, Simone Tromper. Ce sera le point de départ d'un prolongement à cette séance.

Compte-rendu de la table ronde sur le passage de l'enseignement secondaire aux graduats.

Tout le monde constate un grand taux d'échec en mathématique en première année.

Causes

1) La population des étudiants qui entrent en 1ère année de graduat est de formations très diverses : certains ont eu 2h d'activités mathématiques, d'autre 3,5 ou 7 heures, d'autres encore ont été un an à l'université, ou ont fait un an de régendat, ou un essai à l'école d'ingénieurs industriels. Certains professeurs de ces graduats sont scandalisés par le manque d'information des professeurs du secondaire qui affirment à leurs élèves que n'importe quelle

formation suffit. C'est tout à fait faux et les étudiants se trouvent souvent confrontés à des difficultés insurmontables.

2) Les programmes donnent des directives très vagues et se limitent parfois à des conseils. Les professeurs doivent constituer leur cours eux-mêmes, ce qui provoque des différences de niveau importantes d'une école à l'autre.

3) Les élèves qui choisissent cette voie ne sont pas disposés à fournir un gros effort en mathématique et la considèrent comme un mal inévitable.

4) Il faut du travail personnel, une organisation bien structurée car les tests de connaissance viennent souvent tard et les étudiants vivent sur leurs illusions.

5) On constate une grande corrélation entre la faiblesse en mathématique et le manque de maîtrise du langage.

Remèdes possibles

1) Une vaste information au cours des études secondaires sur ce que sont des graduats, sur leur diversité, leurs besoins spécifiques en mathématique.

Les jeunes gens doivent savoir que ce sont des études intéressantes, variées, souvent difficiles.

Dans les documents qui existent actuellement, les grilles horaires ne figurent pas : impossible de voir s'il y a un cours de mathématique et de combien d'heures il dispose. ([1])

2) Les étudiants doivent choisir ces études positivement et non comme un moindre mal après échec ailleurs. La volonté de réussir est très importante.

3) L'enseignement secondaire devrait rendre les élèvres plus autonomes, leur apprendre à gérer leur travail, à découper leur matière, à faire davantage de synthèses.

4) Des révisions importantes au début de l'année permettent aux étudiants motivés de se mettre au courant et le temps ainsi perdu se rattrapera facilement quand les étudiants seront au même niveau.

5) Des travaux pratiques, des questionnaires individuels avec réponse fournissent l'occasion au professeur de se consacrer aux plus faibles.

1. Le salon de l'Etudiant peut déjà répondre à beaucoup de demandes. Des rencontres entre groupes d'écoles se font avec succès à Liège.

Voici l'analyse faite par les participants (professeurs de graduats, professeurs et inspecteurs de l'école secondaire).

Si vous avez une ajoute, une critique ou une suggestion à faire à ce compte-rendu, adressez-vous au rapporteur Simone Tromper, qui se fera un plaisir d'y donner suite.

<u>A méditer</u>

— On regrettera que beaucoup de copies soient très mal rédigées : aligner des calculs n'est pas exposer une solution avec de nombreuses fautes d'orthographe ou de français (Extrait du rapport des examinateurs, E.S.C.P., 1984).

— On s'aperçoit qu'un formalisme, rassurant (pour les candidats !), tend à remplacer une réflexion nécessaire et que le raisonnement mathématique disparaît au profit d'une recherche combinatoire (et aléatoire) de recettes d'affirmations incontrôlées à la limite du discours incantatoire (Extrait du rapport des examinateurs, H.E.C., 1984).

Des Problèmes et des Jeux

C. Festraets,

86. Tourisme M. et P. n° 72

Un américain désire visiter en Europe 12 villes touristiques desservies par 12 aéroports dont les distances mutuelles sont toutes différentes. Sur une carte, il joint chaque aéroport à celui des 11 autres qui est le plus proche. Montrer qu'aucun des 12 aéroports n'est ainsi relié à plus de 5 autres.

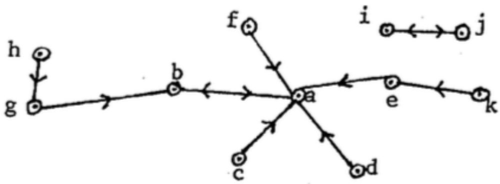
Voici la solution de Mme J. VANHAMME de Bruxelles.

Montrons que la ville a ne peut être l'image de plus de 5 villes dans la relation "a pour ville la plus proche".

Soient $x_1, \ldots, x_n$ les villes ayant pour image a. Il est évident que les demi-droites $[ax_1, \ldots, [ax_n$ sont toutes distinctes. Supposons que les points $x_1, \ldots, x_n$ numérotés de manière que dans un mouvement de rotation autour de a les demi-droites $[ax_1, [ax_2, \ldots, [ax_n$ soient rencontrées successivement. On aura pour tout i, $< \ x_i a x_{i+1} > 60°\quad (x_{n+1} = x_1)$.

On sait en effet que dans le triangle $x_i a x_{i+1}$, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle. Or $[x_i x_{i+1}]$ est le plus long des trois côtés puisque x_i et x_{i+1} ont pour image a. Il y a donc au maximum 5 points qui peuvent avoir a pour image.

Montrons par un schéma que l'on peut rencontrer la situation où 5 villes ont a pour image.



La solution de Mme J. RONDOU de Leuven est similaire à la précédente.

87. Solutions entières - Suite M. et P. n° 73

a, b, c étant premiers entre eux, démontrer que l'équation $a^2 + b^2 + c^2 = abc$ n'a aucune solution pour $a, b, c \in \mathbb{N}_0$.

J'ai reçu plusieurs solutions qui toutes sont basées sur le même raisonnement. Voici celles de J. FINOULST de Diepenbeek.

Nous nous basons principalement sur le fait que pour un nombre entier n, on a par rapport à 3

$$n^2 \equiv 0 \ \text{ ou } \ n^2 \equiv 1 \ \ (mod\, 3).$$

a, b, c étant premiers entre eux, on a les cas suivants :

1) $a^2 \equiv 1,\ b^2 \equiv 1$ et $c^2 \equiv 0 \quad (mod\, 3)$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 2 \ \text{ et } \ abc \equiv 0 \ \ (mod\, 3)$$

2) $a^2 \equiv 1,\ b^2 \equiv 0$ et $c^2 \equiv 0 \ \ (mod\, 3)$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 \ \text{ et } \ abc \equiv 0 \ \ (mod\, 3)$$

3) $a^2 \equiv 1,\ b^2 \equiv 1$ et $c^2 \equiv 1 \quad (mod\, 3)$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \ \text{ et } \ abc \equiv \pm 1 \ \ (mod\, 3).$$

Comme les deux membres de l'équation donnée ont chaque fois des restes différents par rapport à 3, celle-ci n'a pas de solution entière.

Mme J. RONDOU me transmet ce petit programme qui recherche (en vain) les solutions A, B, C (modulo 3).

```
1∅ FOR A = ∅ TO 2
2∅ FOR B = ∅ TO 2
3∅ FOR C = ∅ TO 2
4∅ IF A = ∅ AND B = ∅ AND C = ∅ THEN GOTO 8∅
5∅ V = A⋆A + B⋆B + C⋆C : V3 = V - 3⋆INT(V/3)
6∅ W = A⋆B⋆C : W3 = W - 3⋆INT(W/3)
7∅ IF V3 = W3 THEN PRINT A ; “ ” ; B ; “ ” ; C ; “ ”
8∅ NEXT C : NEXT B : NEXT A
9∅ STOP
```

88. Une course pas banale

A n points distincts d'un circuit circulaire se trouvent n voitures de course prêtes au départ. Chacune d'elles parcourt le circuit exactement en une heure. Au signal de départ, chaque pilote choisit un sens et part immédiatement. Si deux voitures se croisent, elles changent de sens et repartent sans perte de temps. Démontrer qu'il y aura un certain moment où toutes les voitures se retrouveront à leur point de départ.

Solution de M. PAULY de Steinsel (Grand Duché de Luxembourg).

Supposons que les voitures soient numérotées $1, 2, \ldots, n$ et se trouvent au départ aux points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ respectivement.

Imaginons qu'au moment où deux voitures se croisent, non seulement elles changent instantanément de sens, mais en plus, elles échangent instantanément leurs numéros.

Remarquons qu'alors le numéro i est porté (après d'éventueles échanges successifs) par des voitures roulant toujours dans le même sens et que, comme chaque voiture fait le tour du circuit en une heure exactement, la voiture portant le numéro i se trouvera en P_i une heure après le départ (et les voitures portant les numéros $1, 2, \ldots, n$ se trouveront en $P_1, P_2, \ldots, P_n$ respectivement).

Il suffit, à ce moment, de rendre à chaque voiture son numéro initial pour obtenir la situation réelle ; la suite des numéros des voitures se trouvant au bout d'une heure en $P_1, P_2, \ldots, P_n$ est donc une permutation de $(1, 2, \ldots, n)$.

Le nombre de permutations de $(1, 2, \ldots, n)$ est fini, donc on peut toujours supposer qu'après k_2 heures, on retrouvera la même permutation qu'après k_1 heures ($k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ et $k_2 > k_1$) et dès lors, après $(k_2 - k_1)$ heures, on aura la même permutation qu'après $(k_1 - k_1) = 0$ heure, c'est-à-dire la situation de départ (il suffit de faire marche arrière pendant k_1 heures).

Voici, comme d'habitude, trois nouveaux problèmes. Je signale aux lecteurs qu'aucun problème n'est définitivement clos : on peut toujours m'écrire à propos de tout problème, même lorsqu'une solution a déjà été publiée.

92. Partage

Les longueurs des côtés d'un triangle sont 6,8 et 10 unités. Démontrer qu'il y a exactement une droite qui partage simultanément l'aire et le périmètre en deux parties égales.

93. Quadruples

Déterminer tous les quadruples (a, b, c, d) *d'entiers non nuls satisfaisant*

1. $abcd(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d})^2 = (a + b + c + d)^2$;
2. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ *est un nombre premier.*

94. En ligne droite ?

A et B sont deux ensembles finis non vides de points du plan sans éléments communs. Chaque segment dont les extrémités appartiennent à l'un des ensembles contient un point de l'autre ensemble. Démontrer que tous les points de A et de B sont en ligne droite.

QUATRIEME CHAMPIONNAT INTERNATIONAL DE FRANCE DES JEUX MATHEMATIQUES ET LOGIQUES

Les catégories :

scolaires	C1 : 1ère
	C2 : 2e - 3e
	LY : 4e - 5e - 6e
non scolaires	GP : Grand public
	HC : Haute compétition

Eliminatoires :

— Collectives pour les catégories scolaires :
on utilise une photocopie du bulletin de participation collective. Mais attention ! Un bulletin doit grouper au moins 5 participants. Si on ne les trouve pas dans la même classe, il est admis de regrouper deux classes.
Les élèves doivent élire un ou deux représentants (voir sur le bulletin) pour les représenter lors des demi-finales.

— Individuelles pour les autres.
Il suffit de renvoyer le bulletin réponse correspondant.

Les professeurs sont invités à faire participer leurs élèves, mais aussi à participer individuellement.

Demi-finales = Finales régionales :

Sur le bulletin réponse, vous indiquez vos préférences pour le centre de demi-finale parmi la liste provisoire donnée pour information.

LISTE DES CENTRES DE DEMI-FINALES

03A Moulins	41A Blois	74A Evian
04A Digne	42A St Etienne	75A Paris 12
04B Manosque	44A St Sébastien	75B Paris 16
06A Juan les Pins	47A Agen	76A Neufchâtel
08A Charleville	49A Seiches/Loir	76B Montvilliers
10A Troyes	49B Cholet	77A Meaux
12A Decazeville	50A Coutances	77B Montereau
13A Peynier	53A Laval	78A Versailles
14A Caen	54A Nancy	79A Parthenay
16A Soyaux	56A Vannes	80A Amiens
18A Bourges	56B Lorient	85A La Roche/Yon
21A Dijon	57A Algrange	87A Limoges
22A Broons	61A L'Aigle	88A Dompaire
25A Morteau	61A Domfront	92A Nanterre
26A St.J.en Royans	62A Longuenesse	93A Noisy le Grand
31A Toulouse	62B Berck	94A Arcueil
33A Bordeaux	63A Clermont F.	95A, 67A, 68B
34A Montpellier	68A Ste Marie aux M	B01 Mouscron
35A Maure	69A Decines	CH1 Yverdon
38A Seyssinet	70A Villersexel	Nl1 Niamey
39A Salins les bains	72A Le Mans	TU1 Tunis

La demi-finale belge se déroulera à Mouscron le samedi 28 avril 1990 de 14h à 17h.

Le premier de chaque catégorie, sacré champion régional, sera automatiquement qualifié pour la finale.

Son dauphin le sera s'il y a plus de 20 compétiteurs présents à la demi-finale dans la catégorie.

Le troisième sera qualifié au-delà de 35.

A cette liste des "finalistes à la place", s'ajoutera une liste des "finalistes au score" (les 50 meilleurs de chaque catégorie sur l'ensemble des centres).

Les finalistes figurant sur une des deux listes seront logés pour une nuit lors de la finale. Ceux qui figurent sur les deux listes seront, de plus, défrayés de leur déplacement.

Finale internationale à Paris :

Près de 500 concurrents seront conviés le 7 juillet 1990 à la Cité des Sciences et de l'Industrie. Ils gagneront tous un prix.

Pour obtenir des renseignements complémentaires ainsi qu'un dossier de participation, envoyez une enveloppe préadressée et affranchie (dimensions 11,5cm sur 23cm) à l'adresse suivante :

F.F.J.M.
Parent André
BP 157
7700 Mouscron

Tél : 056/33 12 56 (de préférence le mercredi matin avant 10h)
privé : 056/33 14 53 (après 19h)

ELIMINATOIRES INDIVIDUELLES DES CATEGORIES HC ET GP

1. UN BON CHRETIEN

Le numéro de l'année de naissance d'un de mes aïeux a la particularité suivante :

- Il est divisible par 2, par 3 si on lui ôte 1, par 5 si on lui ôte 2, par 7 si on lui ôte 3, et par 11 si on lui ôte 4.

• Mais de quelle année s'agit-il donc, sachant que mon ancêtre a toujours été un bon chrétien ?

2. LES DERNIERS SERONT LES PREMIERS

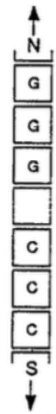
Etant donné un nombre X de plus de 2 chiffres, par exemple 21643, on transfère le groupe formé par les 2 derniers chiffres, ici 43, au début de l'écriture du nombre. On obtient dans l'exemple $Y = 43216$.

- On veut que le nombre Y soit le double du nombre de départ X.

• Quelle est la somme des chiffres de la plus petite solution X ?

3. LE BAL DES BATRACIENS

Il y avait deux groupes d'égale importance, des grenouilles et des crapauds, chacun formant une procession. Les deux groupes sont l'un en face de l'autre, séparés seulement par un petit espace (figure).



Minuit sonne, un étrange ballet commence : les grenouilles vont toujours vers le nord, soit en sautant par dessus un autre batracien, soit en avançant sur une place libre. Les crapauds font exactement de même, mais en se dirigeant toujours vers le sud.
- Chacun de ces déplacements prend juste une seconde. Il ne peut y avoir deux déplacements simultanés.
- A la fin les grenouilles ont pris la place des crapauds et inversement.
- Lorsque 3h sonnent, le ballet est déjà terminé.

• **Combien y a-t-il de batraciens, au plus ?**

4. LE CADEAU CAMBODGIEN

Un jeune mathématicien cambodgien reçoit un paquet en forme de parallélépipède rectangle. Il mesure les arêtes, qui sont des nombres entiers de centimètres, remarque (routine !) que l'aire et le volume du paquet sont égaux, et s'exclame : c'est le plus grand paquet qui a cette propriété.

• **Quel est le volume du paquet ?**

5. LES ROUGES ET LES NOIRS

Sur un damier rectangulaire 100×50 sont disposés 5000 pions noirs. Le jeu consiste à retourner des pions dont l'autre face est rouge et faire ainsi apparaître un nombre de pions rouges prédéterminé.

- Unique règle : on ne peut retourner un pion qu'en retournant la totalité de la rangée (horizontale ou verticale) où se trouve ce pion. On peut retourner toutes les rangées que l'on veut, autant de fois que l'on veut.

• **Quel est le nombre minimum de retournement de rangées (H et V) pour qu'apparaissent 1990 pions rouges ?**

6. IL PLEUT DES CARRES

Quelle est la somme des carrés des 720 nombres qui s'écrivent dans le système décimal avec les chiffres 1,2,3,4,5,6, chacun étant utilisé une seule fois dans chaque nombre ?

ELIMINATOIRES COLLECTIVES DE LA CATEGORIE LY

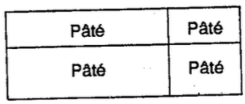
1. MON QUARTIER

Mon quartier a la forme d'un rectangle. Il est découpé en 4 pâtés de maison, de forme également rectangulaires, par deux rues transversales, perpendiculaires, de telle sorte que :

- lorsque je fais le tour de chacun des 4 rectangles obtenus en réunissant deux pâtés de maison contigus, je parcours respectivement 600 m, 700 m, 800 m et 900 m.

• **Quel est le périmètre de mon quartier ?**

Précision : on ne tient pas compte de la largeur des rues.



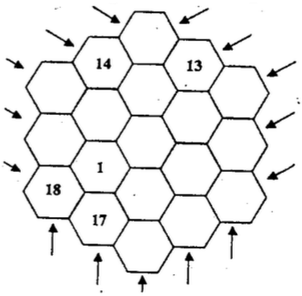
2. L'HEXAGONE MAGIQUE

L'hexagone présenté sur la figure est magique.

- Si on fait la somme de chacune des rangées appartenant aux 15 directions indiquées par les flèches, on trouve le même nombre.

- De plus, les entiers de 1 à 19 figurent dans l'hexagone. Par mégarde, des cases ont été effacées.

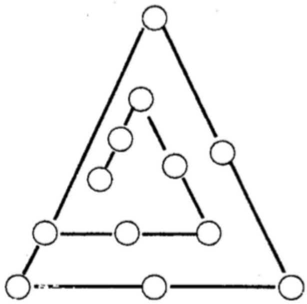
• **Reconstituez l'hexagone.**



3. LA PLANETE KRYPTON

Sur la planète Krypton, les habitants qui veulent devenir de Grands Initiés doivent accéder au centre du Grand Temple, dont le plan est donné ci-contre. Pour ce faire, ils doivent, à chaque étape, donner un nombre entier strictement positif, de telle sorte que
- ces nombres soient tous différents
- la somme des carrés des nombres situés sur un même segment soit égale à 1990.

• **Montrez, en complétant la figure ci-contre, que vous seriez digne de devenir un Grand Initié.**



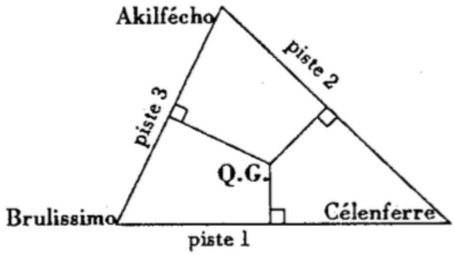
4. LE NUMERO MANQUANT

Dans la longue avenue de cette ville, les maisons sont numérotées : 1,2,3,... sans trou, de la première à la dernière, jusqu'au jour où un promoteur fait abattre l'une d'entre elles. La moyenne des numéros restants devient alors 995,8.

• **Quel est le numéro de la maison abattue ?**

5. LE RAVITAILLEMENT

Dans le désert des Tartares, trois pistes forment un triangle équilatéral. Sur chaque piste, le poste de ravitaillement est le point le plus proche du QG, situé à l'intérieur de ce triangle. Ainsi, le poste de ravitaillement de la piste 1 est située à 4 km de Brulissimo, celui de la piste 2 à 7 km de Célenferre, et celui de la piste 3 à 1 km de Akilfécho.



• **Quelle est la somme des distance du QG aux 3 postes de ravitaillement ? (arrondir au mètre le plus proche)**

6. CARRE DE SIX

L'écriture décimale d'un nombre est composé de 1990 fois le chiffre 6.

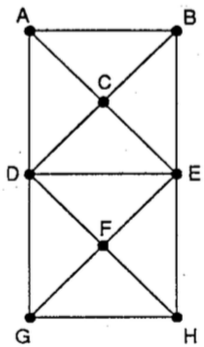
• **Quelle est la somme des chiffres du carré de ce nombre ?**

ELIMINATOIRES COLLECTIVES DES CATEGORIES COLLEGES

1. CHEMIN DE FER A DEFAIRE

La figure représente le réseau ferré de la ville de Stadt-City.
Par souci d'économie, le maire décide d'abandonner l'entretien d'un certain nombre de voies. Deux impératifs doivent être respectés
- Deux gares quelconques parmi les huit de la ville doivent toujours être reliées, quitte pour le voyageur à emprunter une correspondance.
- Le coût d'entretien proportionnel à la longueur totale des voies, doit être minimisé.

• **Repassez au feutre épais les voies restantes après exécution de la décision du maire.**



2. LE CHIFFRE DE NAISSANCE

On appelle chiffre de naissance d'une personne, le chiffre obtenu en additionnant son jour et son mois de naissance puis en additionnant les 2 chiffres éventuels du nombre obtenu, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir un seul chiffre, le chiffre de naissance.

- Exemple : le 27 décembre : 27 +12 = 39 puis 3 + 9 = 12 et enfin 1 + 2 = 3

• **Au cours d'une année non bissextile quelconque, quels sont les 2 chiffres de naissance les plus fréquents ?**

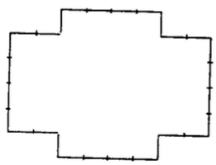
3. LE CARRE INCOMPLET

Remplissez ce tableau de sorte qu'il ne comporte que des entiers strictement positifs, et que pour chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale, le nombre du milieu soit la moyenne des deux nombres qui l'encadrent.
On indiquera le nombre de solutions possibles.

	12	
		8

4. L'ARCHITECTE

L'architecte Alain Térieur doit partager le lotissement ci-contre en huit parcelles, superposables à un retournement près. Ces parcelles, d'un seul tenant, doivent être constituées de carreaux entiers.



• **Donnez une solution sur la figure.**

5. LE MATRICULE

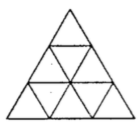
Dans ce pays totalitaire, tous les habitants ont un matricule composé de 5 chiffres.

Les policiers se reconnaissent au fait que le premier chiffre de leur matricule est strictement supérieur à la somme des 4 autres.

• **Combien y a-t-il (au plus) de policiers ?**

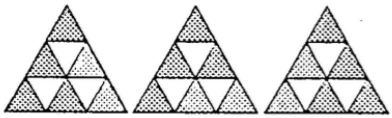
6. TRIANGLE PATRIOTIQUE

On veut colorier les petites zones triangulaires de cette figure, en bleu, blanc ou rouge, en respectant les règles suivantes :
- une couleur par zone,
- deux zones ayant un côté commun ne peuvent avoir la même couleur.
- Il doit y avoir 3 zones de chaque couleur.



• **Combien de figures différentes peut-on obtenir ?**

ATTENTION : des figures obtenues en tournant ou en retournant la figure initiale ne sont pas considérées comme différentes. Ainsi,



comptent pour une seule figure.