Mathématique et Pédagogie

Périodique bimestriel publié par la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*

Sommaire

Éditorial

J. Wilmet,

Vous avez pu lire, dans le S.B.P.M.infor paru récemment, le texte définitif approuvé par l'assemblée générale extraordinaire de décembre dernier et remis à la Commission scientifique d'étude de l'enseignement des mathématiques et des sciences. Le 24 janvier 1990, nous avons été reçus par les membres de cette commission et nous avons pu commenter plus en détail certains aspects du document élaboré par le S.B.P.M. Il est permis de penser que nos réflexions pourront influencer le rapport que Monsieur DANBLON remettra à Monsieur le Ministre YLIEFF.

L'amélioration de l'enseignement mathématique est d'ailleurs un souci constant de notre association. La réflexion doit continuer ; un prochain éditorial fera le point sur nos projets en ce domaine.

Au delà de ces réunions, de ces rapports, il me semble cependant qu'il est essentiel de rappeler parfois que la réussite d'une leçon commence au moment précis où une vingtaine d'élèves et un professeur entrent dans la classe. Que pour faire "un beau cours", nous avons encore la liberté de laisser travailler notre initiative et notre imagination et que c'est là une des joies de notre profession.

La seule activité où nous pouvons nous rencontrer tous est notre congrès annuel. Comme vous avez pu le constater, le hasard du calendrier nous a permis de le placer à des dates plus proches de la rentrée. Je vous demande de bloquer dès maintenant dans votre agenda les lundi 27, mardi 28 et mercredi 29 août prochains et espère vous voir très nombreux à Tournai.

Jean WILMET

D'où viennent les mots que nous utilisons en mathématiques ?

H. Vigis, *Institut de la Sainte Famille d'Helmet*

Dans cette courte étude, nous ne voulons nullement refaire une histoire des mathématiques, mais plutôt nous poser une question quelque peu oubliée : d'où proviennent les vocables utilisés actuellement en mathématiques ? Nous les employons aujourd'hui avec une telle habitude qu'on oublierait presque qu'ils ont une histoire.

Si très souvent l'étymologie nous sera d'un grand secours, nous verrons aussi que certains termes n'existaient pas pour autant dans l'Antiquité.

Nous allons aborder les deux sujets suivants :

1) L'artihmétique et l'algèbre
2) La géométrie et la trigonométrie.

L'arithmétique et l'algèbre

Le mot **"calcul"** provient du latin *"calculi"* (cailloux) et nous rappelle qu'auparavant le comptage s'effectuait au moyen de petits cailloux placés sur l'abaque à *calculi*. Ce dernier avait la forme d'une table à colonnes sur laquelle chaque caillou correspondait à une unité.

Le terme **"chiffre"** vient d'une latinisation du mot arabe *"sifr"* qui signifiait "vide" et de là "zéro". *"Sifr"* provenait lui-même du sanscrit *"sunya"*. Bien que ce mot donnât notre "chiffre" actuel, il n'eut pas tout de suite l'acception actuelle. En effet "chiffre" correspondait initialement à "zéro". Au début du XVème siècle, on pouvait encore lire : *La dixiesme figure de Soy ne vault ou signifie rien ; ... ; et pour ce est appelée chifre ou nulle, ...* Ce n'est qu'en 1491 environ que le mot "chiffre" prendra son sens actuel.

Arithmétique vient du grec *"arithmos"* qui, pour Diophante (150 ap. JC) représentait une inconnue dont nous trouvons tout le sens quand nous parlons de moyenne arithmétique.

Mais c'est à Nicomaque de Gérase (IIème s.) que l'on doit le sens actuel du mot car son *"Arithmétique"* fut la seule source d'enseignement mathématique pendant près de mille ans grâce à la traduction de Boèce qui vécut au début du VIème siècle.

Algèbre provient de l'Arabe *"al-gabr"* qui représentait une opération de réduction. Il voulait exprimer : "quand, dans une équation, on a un terme négatif dans l'un des membres, on peut le passer dans l'autre pour n'avoir que des positifs".

Son sens actuel, beaucoup plus général, vient sans doute de François Viète (1540-1603) dans son livre *"L'introduction en l'Art Analytique ou Algèbre nouvelle"* (1591).

Le premier à avoir utilisé la notion arabe d' *"al-gabr"* est le mathématicien Alkhovarizmi (IXème s.) dont le nom est passé à la postérité, non seulement pour avoir fait connaître aux Arabes et ensuite aux Occidentaux la numération indienne, mais aussi par le vocable **algorithme** qui dérive de son nom. La traduction de ses oeuvres *"Algoritmi de numero indorum"* et *"Liber algorismi de practica arithmetice"* en donne la provenance. Ces deux traductions sont dues à Johanus Hispalensis (Juan de Séville) (XIIème s.). Le mot algorithme était à prendre au sens large de calcul qui ne diffère guère de notre sens actuel.

Terminons notre revue de la terminologie algébrique par quelques mots en vrac : **Intégrale** est dû à Jean Bernouilli (1667-1748) ; le mot **Complexe** à Gauss (1777-1855) et enfin les mots **Commensurable, divisible, équivalent, facteur, probabilité, proportionnalité, irrationnel, ...** sont de la plume de Nicolas Oresme (1323-1382) dans ses livres *"Traicté de la première invention des monnaies"* et *"Traicté de la Sphère"*.

La géométrie et la trigonométrie

Le mot **géométrie** vient de *"gê"*, la terre, et *"metron"*, la mesure en grec. Passons en revue le vocabulaire propre à cette partie du cours de mathématiques.

Le **point** provient de *"punctus"* latin qui veut dire piqûre. Déjà Pline (23-79 ap. JC) l'utilisait pour sa valeur mathématique. Mais il apparaît surtout chez Apulée (IIème s.) et Boèce (VIème s.) dans le sens actuel.

Les droites et notions apparentées

La **ligne** vient du même mot latin que linge. Tous les deux sont issus de *"linum"*, le lin. La ligne (*"linea"*) est aussi bien un fil de lin ou de pêcheur qu'un cordeau de charpentier. C'est à Ciceron (110-43 av. JC) que l'on doit son emploi dans le sens mathématique.

Droite vient de *"directus"*, lui-même de *"dirigere"*. Il est employé dans notre sens par Apulée, Boèce et Cassiodore (VIème s.).

Courbe de *"curvus"* et **sécante** de *"secare"*, couper, ont été utilisés dans notre sens directement bien que rarement.

Perpendiculaire vient, quant à lui, de *"perpendicularis"*, et apparaît dans les *"Gromatici veteres"* (ed. F. Blume, K. Larchmann, Th. Mommsen et A. Rudorff : Berlin 1848)..

Hyperbole et **parabole** (du Grec *"uper"* et *"para"* voulant dire tous les deux "au delà" et *"ballô"*, jeter) se trouvent dans Apollonius de Perge (IIIème s.)

Enfin, **médiatrice** contre toute attente n'existe que depuis 1925 par une décision de l'assemblée générale des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public (18 avril).

Les surfaces

L'**Aire** vient du latin *"aera"* qui était un espace libre sans obstacle ou une construction. C'était aussi une place à battre le grain. C'est sans doute aux premiers arpenteurs que l'on doit le sens actuel. En effet, pour ces derniers, *"aera"* avait le sens d'un nombre donné, d'après lequel un calcul doit être fait.

Le **carré** est de la famille de *"quatuor", "quadrata figura"* chez Pline, *"quadratum"* chez Ciceron, Columelle, Pline et Cassiodore. De *"quadrare"*, on a aussi tiré **équerre** qui, en latin, s'appelle *"norma"*, lequel a lui-même donné normal, conforme à la règle.

Le mot **diamètre** a longtemps été utilisé en lieu et place de **diagonale**. Il n'apparaît qu'une seule fois dans les *"Eléments"* d'Euclide (Livre XI, prop 28), mais ce passage a pu être changé par Théon d'Alexandrie (IVème s.) qui lui n'utilisait que diagonale (du Grec *"dia"*, à travers, et *"gônia"*, angle) dans ses *"définitions algébriques"*. Diagonale est aussi utilisé dans les *"définitions géométriques"* attribuées à Héron (IIème s.).

Le **rectangle** est utilisé dans ce sens par Boèce prenant le mot latin *"rectangulis"*, qui a des angles droits, notre définition actuelle.

Le mot **triangle** apparaît chez Ciceron, Pline et Celsus (Ier s.). On le trouve aussi dans le *"Gromatici veteres"* cité plus haut.

Terminons par trois mots en rapport avec le triangle.

Hypoténuse du Grec *"upo"*, sous, et *"teinô"*, je tends) se lit dans Apolodore d'Athènes (IIème s. av. JC). Tandis que **isocèle** de *"isos"*, égal, et *"skelos"*, jambe) se voit dans Platon. Enfin, **orthogonal** pour angle droit se découvre chez Euclide.

Le cercle

J'ai laissé le cercle en dernier lieu car il a toujours joué un grand rôle dans toutes les questions géométriques.

Cercle vient du latin *"circulus"* (diminutif de petit cirque) et était utilisé pour tout ce qui était de forme circulaire.

Rayon a été utilisé dans le sens "rayon de cercle" par Ciceron dans *"Universate de Mundo" : "Ergo globulus est fabricatus, ..., cujus omnis extremitas paribus a medio radiis attingitur"* (trad. : donc le cercle est construit, ..., dont chaque extrémité est atteinte par des rayons égaux en partant du milieu).

Il fallut attendre Pierre de la Romée (Romus) dans *"Scholae Mathematicae"* (1568) pour en reprendre l'utilisation sous la forme de *"radius"*.

Pour dessiner un **cercle**, on a besoin d'un **compas**. Il vient de *"passus"*, le pas, une mesure ordinaire chez les Romains. Il représente l'intervalle des jambes écartées.

Par contre, la notion et le mot **radian** dans le sens d'angle au centre correspondant à un arc de rayon n'existent que depuis le XXème s.

Comment aborder le cercle sans parler de π. Si sa valeur a été recherchée durant des siècles (=3 sous les Babyloniens, 3,1623 sous les Egyptiens, 3,14161 par Archimède, 3,1416 au VIème s. par les Indiens, ...), on n'appela cette valeur que bien plus tard. Dans son petit traité *"Dimensio Circuli"*, Archimède emploie pour **circonférence** le mot grec *"périmétros"*, périphérie, qui en latin donna le mot circonférence. Il avait le sens du mot arc ou circonférence totale pour les géomètres grecs.

Les Arabes utilisaient un mot semblable à arc. Campano (XIIème s.), dont l'*"Euclide"* est traduit de l'arabe, écrivait : *"Portio circumferentiae arcus nuncupatur"* (trad. : une partie de la circonférence qu'on appelle arc).

Il faut attendre Isaac Barrow (1630-1677), le maître de Newton, pour voir enfin apparaître la lettre π, première lettre du *"périmétros"* d'Archimède.

A la page 343 des *"Lectiones habitae"* dans *"Scholis Publicis Academiae Cantabrigiensis"*, on peut lire : *"Theo II.- ... circumferentiam vocari π et radium R (vel r) et diametrum (vel D)"* (trad. : ... la circonférence est appelée π, et le rayon R ou r et le diamètre d ou D). C'est la première apparition de cette lettre π. Elle correspond néanmoins à toute la circonférence.

Il faut attendre 1706 pour que W. Jones (1675-1749) prenne enfin la lettre π pour désigner la valeur 3,1416 ... Chr. Golbach (1690-1764) le suivit et Euler en imposa l'utilisation dans son *"Introduction à l'Analyse Infinitésimale"* (1707-1783).

Parlons de la Trigonométrie

Le mathématicien qui inventa ce mot paraît être l'astronome allemand Pitiscus en 1599 dans sa *"Trigonometria Libri quinque"*. Le mot a été construit à partir du Grec *"Trigônôn"*, triangle, et *"metron"*, mesure.

Les vocables **Sin** pour **sinus** et **Cos** pour **cosinus** sont utilisés par Regiomontanus au XVème s. dans sa *"Compositio Tabularum Sinuum"*. Mais les travaux originaux d'al Battâni (877-929) sont les premiers à remplacer la notion de corde parallèle par Sinus, en latin courbure.

Ce même Regiomontanus utilisait les **tangentes** grâce à l'étude des livres d'Abû i-Wafa, dit Albyjani (940-998) qui connaissait les **sécantes, cosécantes, tangentes** et **cotangentes.** Il fallut pourtant attendre Thomas Fink (1561-1656) dans sa *"Geometria Rotundis"* pour voir écrit : **tg** et **sec**.

Cette petite étude aura essayé de démontrer que les mathématiques ont toujours été une lente recherche dont la clarification par l'emploi de mots précis et de signes simples fut l'une des étapes.

Ceci aidera peut-être nos élèves à comprendre que ce qu'ils étudient actuellement provient d'un long cheminement dont ils possèdent au travers de leur livre un premier aboutissement. A eux peut-être de continuer ce chemin.

Bibliographie sommaire

BECKER O. ET HOFMANN J.E., *Histoire des mathématiques,* trad. par R. Jouan Lamarre, Paris, 1969

BOLL Marcel, *Histoire des Mathématiques,* coll. Que sais-je ?, n° 42, 12ème éd., P.U.F., Paris, 1974.

COLLETTE Jean-Paul, *Histoire des Mathématiques,* 2 vol., éd. du renouveau pédagogique, INC, Ottawa, 1979.

DEDRON Pierre et ITARD Jean, *Mathématiques et Mathématiciens,* Magnard, Paris, 1959.

EVES Howard, *An Introduction to the History of Mathematics,* 3rd ed., New York, Holt, Rinehart and Winston, 1969.

IFRAH Georges, *Histoire universelle des chiffres,* Seghers, Paris, 1969.

LLOYD Geoffrey e.r., *Les débuts de la science grecque,* trad. par J. Brunswig, Maspero, Paris, 1974.

REVES Georges E., *Outline of the History of Arithmetic,* School of Science and Mathematics, 51, 1951, p. 615.

REVES Georges E., *Outline of the History of Algebra,* School of Science and Mathematics, 52, 1952, p. 65.

TURNBULL H.W., *The Great Mathematicians,* 4th ed., Methuen, London, 1962.

P.S. Pour faciliter la lecture, les mots grecs ont été écrits en caractères latins. Les traductions sont de l'auteur.

Adresse de l'Auteur

Harold VIGIS
61, chemin des deux Maisons (bte 1)
1200 Bruxelles

Quelques courbes en coordonnées polaires

C. Festraets, E. Robaye,

Le programme de géométrie de 6e (7h/sem.) ne prévoit pas explicitement l'étude de courbes données par leurs équations paramétriques (exception faite pour l'ellipse et l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie et pour la parabole rapportée à son axe de symétrie et la tangente au sommet). Le programme précise aussi que, si le professeur dispose du temps nécessaire, il peut étudier quelques courbes en coordonnées polaires.

Il me semblerait regrettable que les élèves des sections fortes en mathématiques terminent leurs études secondaires sans avoir rencontré les spirale, cycloïde, lemniscate, cardioïde, brachistochrone, ... pour leur intérêt intrinsèque sans doute, mais aussi parce que ces courbes sont jolies et qu'il est bon de rendre les élèves sensibles à l'aspect esthétique des mathématiques.

C'est le but du programme qui suit ; il dessine en effet de fort belles courbes. Leurs équations sont simples :

$$\begin{cases} x = f_1(\frac{a}{b}t + \frac{c}{d}).f_2(t) \\ y = f_3(\frac{a}{b}t + \frac{c}{d}).f_4(t) \end{cases}$$

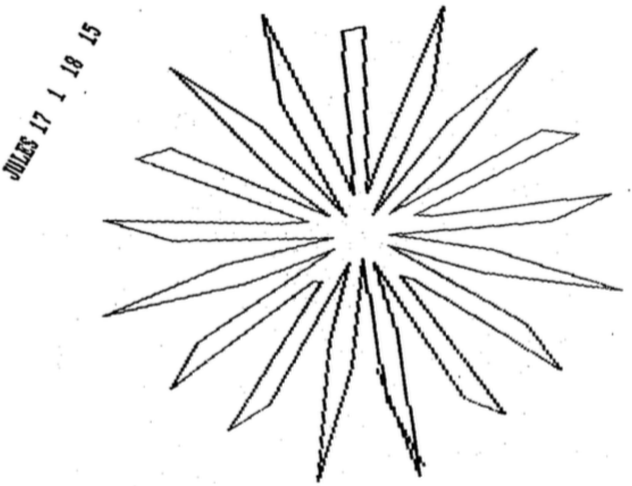
où $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \{sin, cos\}$ et $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

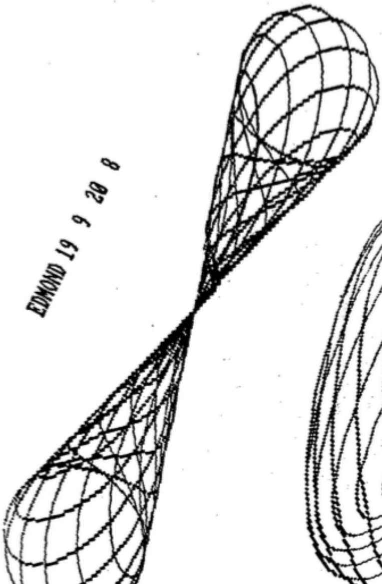
Comme le programme choisit $a, b, c, d, f_1, f_2, f_3, f_4$ de manière aléatoire, trace la courbe correspondante, fait une pause de 5 secondes, puis recommence, on peut, sans se lasser, regarder les courbes se succéder à l'écran pendant plusieurs minutes. Les élèves sont fascinés, posent de multiples questions et sont ensuite mieux disposés à aborder l'étude de quelques courbes données par leurs équations paramétriques ou polaires.

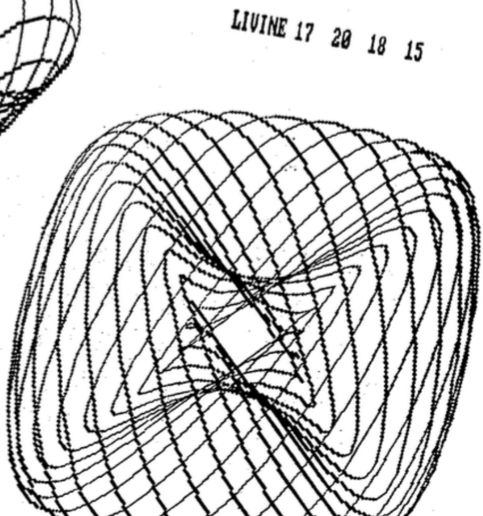
```
10  '
20  CLS
30  KEY OFF
40  SCREEN 2
50  PRINT "Ce programme propose une succession aléatoire
    de courbes ornementales :
60  PRINT "construites de la manière suivante :
70  PRINT "Soient les équations paramétriques :
80  PRINT " X=(F1(A*T/B)+C/D)*F2(T)
90  PRINT " Y=(F3(A*T+B)+C/D)*F4(T)
100 PRINT "où Fi représente, soit la fonction sin,
    soit la fonction cos.
110 PRINT " Il y a 6 paires différentes non triviales.
120 PRINT "Nous les appellerons, respectivement :
130 PRINT " LUCILE pour F1= cos ;F2= cos ;
    F3= cos ;F4= sin
140 PRINT " DIDIER pour F1= cos ;F2= cos ;
    F3= sin ;F4= cos
150 PRINT " LIVINE pour F1= cos ;F2= cos ;
    F3= sin ;F4= sin
160 PRINT " CHLOE pour F1= cos ;F2= sin ;
    F3= sin ;F4= cos
170 PRINT " EDMOND pour F1= cos ;F2= sin ;
    F3= sin ;F4= sin
180 PRINT " JULES pour F1= sin ;F2= cos ;
    F3= sin ;F4= sin
190 PRINT "Le processus est le suivant :
200 PRINT "1) Le programme choisit aléatoirement
    4 nombres entiers A,B,C,D, avec
210 PRINT "1 <= A <= N; 1 <= B <= N; 0 <= C <= N;
    1 <= D <= N
    (N est contrôlé par l'instruction n°320)
220 PRINT "2) Il choisit l'une des 6 paires d'équations ci-dessus.
230 PRINT "3) Il trace la courbe et revient en 1).
240 PRINT "N.B. : Certaines de ces courbes pouvant
    être décrites par une équation
250 PRINT "en coordonnées POLAIRES, il est
    conseillé de se munir d'une petite laine
260 PRINT "Pour mettre en route, appuyez sur ENTER
270 INPUT B$
280 IF B$=" " THEN 280 ELSE GOTO 300
```

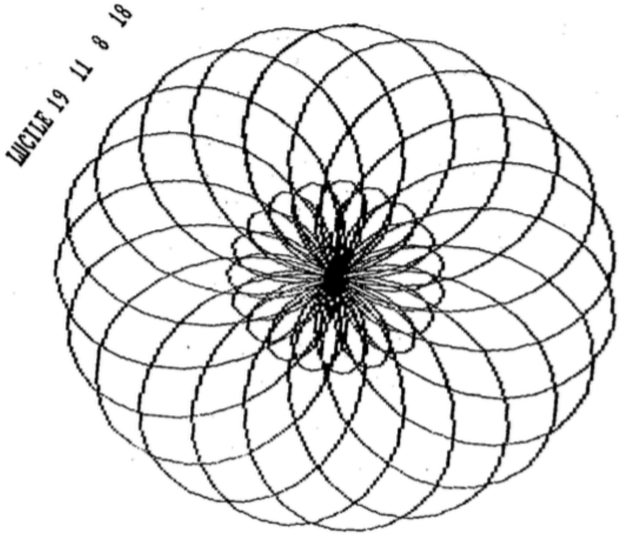
```
290  FOR G=0 TO 10000 :NEXT G'****************
     pause de 5 secondes
300  CLS
310  RANDOMIZE TIMER
320  N=20
3340 B=INT((RND*N)+1)'************************
     choix de A,B,C,D
340  B=INT((RND*N)+1)
350  C=INT(RND*N+1)
360  D=INT((RND*N)+1)
370  Z=INT((RND*N)+1)'*************************
     choix de la paire d'équations
380  AA=A :BB=B'****************************
     simplification de la fraction A/B
390  R=AA-BB*INT (AA/BB)
400  If R=0 THEN 430
410  AA=BB :BB=R
420  GOTO 390
430  A=A/BB :B=B/BB
440  ON Z GOTO 450,540,630,720,810,900
450  PRINT "LUCILE"A ;B ;C ;D'*******************
     paire "LUCILE"
460  WINDOW ((-C/D-1)*1.5,-C/D-1)-((C/D+1)*1.5,C/D+1)
470  PSET (C/D+1,0)
480  FOR T=0 TO 6.4*B STEP .1
490  X=(COS(A*T/B)+C/D)*COS(T)
500  Y=(COS(A*T/B)+C/D)*SIN(T)
510  LINE-(X,Y)
520  NEXT
530  GOTO 290
540  PRINT "DIDIER"A ;B ;C ;D'*********************
     paire"DIDIER"
550  WINDOW ((-C/D-1)*1.5,-C/D-1)-((C/D+1)*1.5,C/D+1)
560  PSET (C/D+1,C/D)
570  FOR T=0 TO 6.4*B STEP .1
580  X=(COS(A*T/B)+C/D)*COS(T)
590  Y=(SIN(A*T/B)+C/D)*COS(T)
600  LINE-(X,Y)
610  NEXT
620  GOTO 290
```

```
630 PRINT "LIVINE"A ;B ;C ;D'************************
    paire"LIVINE"
640 WINDOW ((-C/D-1)*1.5,-C/D-1)-((C/D+1)*1.5,C/D+1)
650 PSET (C/D+1,0)
660 FOR T=0 TO 6.4*B STEP .1
670 X=(COS(A*T/B)+C/D)*COS(T)
680 Y=(SIN(A*T/B)+C/D)*SIN(T)
690 LINE-(X,Y)
700 NEXT
710 GOTO 290
720 PRINT "CHLOE"A ;B ;C ;D'**************************
    paire"CHLOE"
730 WINDOW ((-C/D-1)*1.5,-C/D-1)-((C/D+1)*1.5,C/D+1)
740 PSET (0,C/D)
750 FOR T=0 TO 6.4*B STEP .1
760 X=(COS(A*T/B)+C/D)*SIN(T)
770 Y=(SIN(A*T/B)+C/D)*COS(T)
780 LINE-(X,Y)
790 NEXT
800 GOTO 290
810 PRINT "EDMOND"A ;B ;C ;D'***************************
    paire"EDMOND"
820 WINDOW ((-C/D-1)*1.5,-C/D-1)-((C/D+1)*1.5,C/D+1)
830 PSET (0,0)
840 FOR T=0 TO 6.4*B STEP .1
850 X=(COS(A*T/B)+C/D)*SIN(T)
860 Y=(SIN(A*T/B)+C/D)*SIN(T)
870 LINE-(X,Y)
880 NEXT
890 GOTO 290
900 PRINT "JULES"A ;B ;C ;D'****************************
    paire"JULES"
910 WINDOW ((-C/D-1)*1.5,-C/D-1)-((C/D+1)*1.5,C/D+1)
920 PSET (C/D,0)
930 FOR T=0 TO 6.4*B STEP .1
940 X=(SIN(A*T/B)+C/D)*COS(T)
950 Y=(SIN(A*T/B)+C/D)*SIN(T)
960 LINE-(X,Y)
970 NEXT
980 GOTO 290
```

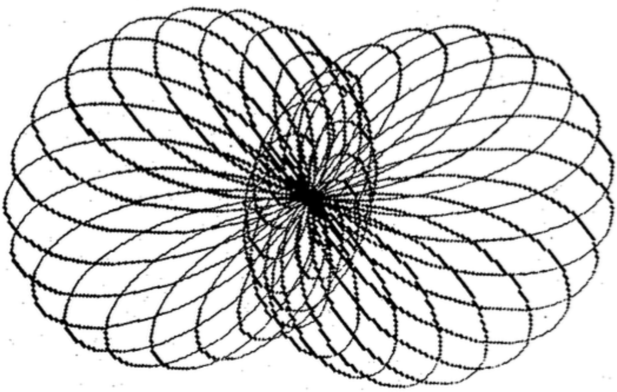

JULES 17 1 18 15


EDMOND 19 9 20 8


LIVINE 17 20 18 15



DIDIER 13 20 6 13



La simulation de systèmes dynamiques

J. Lefevere, S. Huberty et D. Roucou,

1. Nos étudiants comprennent-ils les dérivées et intégrales ?

Beaucoup d'étudiants moyennement doués sortent du secondaire en sachant calculer l'expression algébrique de la dérivée d'une fonction compliquée. De même, ils réalisent correctement des études de fonctions assez simples (points limites, maxima, zéros, asymptotes ...) ainsi que leur intégration indéfinie (primitive).

Ces étudiants ont étudié les éléments de mécanique : vitesse, accélération, mouvements rectilignes, loi de Newton, frottements, oscillations. En électricité, ils ont vu les circuits simples (RC, LC) ; en chimie, on leur a présenté des éléments de cinétique et la loi d'action des concentrations ou des masses. Enfin, en biologie, ils ont entendu parler des vitesses de réaction liées aux réactions enzymatiques, aux croissances de bactéries et aux réacteurs biotechnologiques.

Cependant, ces concepts sont souvent restés fort éloignés l'un de l'autre dans leur univers mental. Penser que la mathématique puisse être reliée aux autres sciences leur paraît fort incongru. A titre de preuve, posez leur les questions suivantes :

A) Prenez la formule de définition de la dérivée :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} [\frac{\Delta y}{\Delta x}]$$

Montrez numériquement sur les exemples $y = a \cdot x$ et $y = a \cdot x^2$ que si Δx tend vers zéro, Δy tend également vers zéro mais que la limite de $\Delta y/\Delta x$ tend, pour x fixé, vers une constante.

B) Etant donné le graphe d'une fonction $f(x)$, dessinez "en gros" l'allure de sa dérivée vue également comme une fonction de x.

C) Etant donné $f(x)$, esquissez graphiquement la fonction

$$I(x) = \int_0^x f(u)du$$

(intégrale définie courant de 0 à x pour tout x)

D) Repartez de la fonction $I(x)$, esquissez en la courbe dérivée ; comment la fonction $dI(x)/dx$ est-elle reliée à $f(x)$?

E) D'après les graphes faits pour répondre aux questions B et C, quelles sont les relations existantes entre une fonction $f(x)$ et les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ définies ci-après :

$$\alpha(x) = \int_0^x f'(u)du \text{ et } \beta(x) = [\int_0^x f(u)du]'$$

F) Soit les graphes donnant en fonction du temps les positions, vitesses et accélérations de divers mouvements. Y a-t-il des relations entre ces graphes et les concepts illustrés dans les questions précédentes ?

G) Quel lien y a-t-il entre ces questions précédentes et l'allure des fonctions du temps donnant intensité de courant, charge et tension dans un condensateur chargé par une source de tension constante à travers une résistance ?

H) Nous venons de parler de "vitesse d'un mouvement", de "courant de charge d'un condensateur". Y a-t-il une similitude entre ces divers concepts et la notion de "vitesse" d'une réaction chimique simple, d'un processus enzymatique, de la production de substances dans les réacteurs biotechnologiques ?

Ces questions sont générales et concises. Leur but est double :

D'une part, concentrer l'attention sur les interprétations intuitives de la dérivée (taux de variation) et de l'intégrale définie (aire).

D'autre part, discuter des applications les plus évidentes des notions de dérivées et d'intégrales : vitesse et position d'un mobile, formules élémentaires de l'électricité $[i = dq/dt, i = c * (dv/dt)]$, vitesse de variation de la concentration $[A]$ d'un produit chimique ou biotechnologique.

Si l'adage "une tête bien faite ..." est pris en compte dans notre enseignement, chaque étudiant sortant du secondaire doit pouvoir répondre en grande partie à ces questions et ainsi prouver qu'il maîtrise réellement les divers concepts théoriques que nous lui avons transmis et leurs applications au monde réel.

Au cours des 5 dernières années, nous avons soumis plus de 1500 étudiants de candidatures universitaires (Médecine, Pharmacie, Biologie) à des tests de ce genre (plus détaillés et explicites).

Une majorité déclare avoir entendu parler de ces notions mais ne peut utiliser ses connaissances pour amorcer une réponse valable. D'autres reconnaissent que les concepts de dérivée, d'intégrale, de limite, de taux de variation leur sont restés assez nébuleux. La notion même de fonction est souvent peu maîtrisée. Comment s'étonner que les applications scientifiques de tous ces concepts restent ésotériques et "magiques".

La mathématique a, pour beaucoup d'étudiants, été perçue comme une activité gratuite, sans aucun lien avec le monde réel. La signification concrète des concepts mathématiques leur est restée absolument cachée. Ne parlons pas de l'aspect esthétique : en se focalisant sur l'abstraction, l'enseignement a souvent entraîné un désintérêt transformé plus tard en blocage total.

De même, Physique, Chimie et Biologie, malgré des rapports mieux perçus avec le quotidien, restent des disciplines distantes de la vie journalière et peu reliées entre elles. Elles apparaissent, de toute façon, extrêmement déconnectées des mathématiques.

Nous avons tous rencontré de multiples lacunes de ce type. Les exemples donnés ci-dessus sont toutefois très importants : dérivée et intégrale sont des notions centrales en science. Les concepts de vitesse d'un phénomène et de taux de variation sont à la base de l'étude du réel. Les similitudes entre les systèmes physiques, chimiques et biologiques cités y trouvent leurs racines. Comment espérer que nos étudiants apprécient un tant soit peu la science et la technique lorsqu'ils en ignorent les clefs de décryptage les plus élémentaires.

Il suffit d'ouvrir un quotidien pour apprendre que nous vivons à l'époque du changement et de l'accélération. A tout niveau, nos étudiants auront un avenir interdisciplinaire, nécessitant des qualités d'adaptabilité et une vision systémique. Or, à l'âge où ils forment leurs attitudes culturelles, ils perçoivent très souvent la science comme parcellisée, statique, décourageante et lointaine.

Il y a beaucoup de causes à ces difficultés : surcharge évidente des programmes, blocages précoces dus à la crainte de l'erreur, inégalités, attitudes sociologiques... De plus, la compréhension des dérivées et intégrales n'est pas la panacée.

Beaucoup d'autres notions sont aussi fondamentales. Enfin, il existe probablement beaucoup de remèdes potentiels aux refus de la science que nous avons illustrés.

Dans cet article, nous voudrions toutefois nous restreindre à l'analyse des lacunes citées en introduction. Nos propositions sont les suivantes :

* Beaucoup d'étudiants, plus réceptifs au concret qu'à l'abstrait, admettront de passer leur temps à l'étude des mathématiques si nous

leur en montrons l'utilité dans l'étude des systèmes physiques, chimiques et biologiques qui ont un impact évident dans leurs vies.

* Prouvons-leur, de plus, que la mathématique nécessaire est simple et même intuitive.
* Enfin, comme l'on n'apprend bien que ce que l'on fait soi-même, donnons-leur un moyen d'expérimenter sur les représentations mathématiques de phénomènes réels.

Si nous atteignons ces objectifs, la vision que nos étudiants ont de leurs cours scientifiques s'unifiera et tant les professeurs de mathématique que les autres auront de tout nouveaux moyens de susciter et de maintenir l'intérêt de leurs classes.

Au cours des cinq dernières années, nous avons mis au point une méthode pédagogique pour créer chez nos étudiants les intuitions de base leur servant à répondre au type de questions énumérées ci-dessus. Notre outil principal étant l'ordinateur, nous avons également développé une suite de programmes leur fournissant les moyens d'expérimentation nécessaires à un apprentissage actif (simulation de systèmes, graphiques, aide pédagogique).

Dans les paragraphes qui suivent, nous résumons cette approche et discutons de sa place éventuelle dans l'enseignement.

2. La formulation de modèles mathématiques différentiels.

2.1. Introduction de la notion d'équation différentielle par un exemple ecologique simple.

Supposons pour l'instant que nos étudiants ont bien compris les notions mathématiques citées dans l'introduction (bien que cela puisse paraître étonnant, ce point sera discuté en conclusion). Ils connaissent donc la notion de fonction et savent tous relier dérivées, pentes des graphes, taux de variation et vitesses de fonctions diverses. Ils ont accepté la définition de l'intégrale définie en tant qu'aire limitée par une courbe. Ils savent enfin que la dérivée seconde exprime une courbure et que dérivation et intégration sont des opérations inverses l'une de l'autre.

Nous partons alors de l'introduction intuitive de l'équation différentielle du premier ordre. Cette notion n'est pas reprise actuellement au programme. Vu son caractère tout à fait essentiel dans l'application de la mathématique au réel, cette omission est regrettable. Toutefois, il n'est pas question de faire, au niveau secondaire, une étude rigoureuse des équations différentielles. Utilisant trop de notions d'analyse, cette étude est de plus peu utile dans beaucoup de cas pratiques.

Tout ce dont nous avons besoin c'est que l'étudiant sache qu'une telle équation relie une fonction inconnue $y(x)$ et sa dérivée $dy(x)/dx$ ou y'. Cette introduction peut se faire rapidement et, par l'emploi de méthodes numériques très simples et de logiciels appropriés, lui ouvre un nouvel univers de compréhension. Il est, à notre avis, impardonnable d'arrêter notre enseignement de la mathématique à quelques heures de l'une de ses clefs de voûte.

D'un point de vue formel, une bonne façon de procéder est de partir d'une équation classique (algébrique) comme par exemple :

$$y = 2 * y + 3 * u$$

On fait alors remarquer que, à toute valeur de u, cette équation associe une et une seule valeur de y. Passant alors à un cas un peu plus compliqué, on associe l'équation précédente et une paramétrisation de u en fonction du temps t.

Dans la plupart des applications, la variable indépendante x, si chère aux mathématiciens, est en fait le temps t. Formellement cela ne pose aucun problème. Du point de vue pédagogique, il faut à l'étudiant un temps d'adaptation non négligeable.

Quoiqu'il en soit, on peut choisir par exemple :

$$u = 2 * t^2 \qquad t \in R.$$

Puisque t est maintenant une variable indépendante, u devient $u(t)$ et conséquemment, pour tout t, on a une et une seule valeur de y. En construisant alors les graphes $(t, u(t))$ et $(t, y(t))$, l'étudiant voit que le système d'équations étudié admet non plus un nombre y mais bien une fonction $y(t)$ comme solution. Il s'agit d'une équation fonctionnelle.

Il est alors temps d'illustrer ces concepts. On considère donc des systèmes mécaniques ou électriques simples où les relations entre les grandeurs caractéristiques sont algébriques et varient avec t,

* une résistance soumise à une tension variant sinusoïdalement

$$I(t) = U(t)/R \text{ avec } U(t) = A * sin(2\pi f * t)$$

* un ressort soumis à une force variable

$$x(t) = F(t)/F \text{ avec } F(t) = a * t.$$

On aborde ensuite des exemples de systèmes plus réalistes où, le caractère algébrique ayant disparu, les équations différentielles s'introduisent "naturellement et inévitablement".

Le premier exemple, choisi pour sa simplicité, est le système de Volterra (évolution des populations de lièvres et de renards dans la toundra). Les lièvres mangent de l'herbe qui est en abondance et les renards mangent les lièvres. Si, à l'instant $t = 0$, il y a beaucoup de lièvres et peu de renards, ceux-ci trouvent aisément leurs proies. Ils peuvent donc survivre et se reproduire. Leur nombre augmente. Pour se nourrir, ils tuent plus de lièvres dont le nombre diminue. Les renards, ne trouvant dès lors plus assez de nourriture, meurent. Leur nombre diminue et donc, les lièvres redeviennent florissants. La situation originale étant rétablie, un nouveau cycle redémarre.

On commence par tracer des graphes approximatifs de $R(t)$ et $L(t)$ basés sur la description qualitative du comportement du système donnée plus haut et en insistant sur le caractère périodique de ces courbes. (Fig. 1).

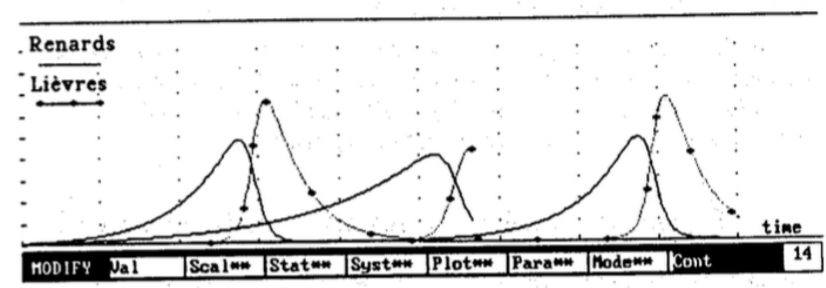


Fig.1 : cette illustration anticipe sur la suite de l'article en reproduisant un écran résultant de la simulation du modèle de Volterra par le programme décrit plus loin. A ce stade, tout ce qu'il faut y voir, c'est la périodicité de L et R.

Dans un deuxième temps, on établit les équations en expliquant de façon détaillée que dL/dt et dR/dt sont les taux de variations des quantités de lièvres et de renards (variations par unité de temps). Ces nombres dépendent bien entendu des taux de naissance et de décès de chaque population. Les taux de variations sont donc chacun composés d'un terme positif (naissance) et d'un terme négatif (décès).

Les hypothèses menant à la formulation sont assez simplistes mais acceptables : par unité de temps (ex : la semaine), les nombres de naissances et de décès naturels des lièvres sont proportionnels au nombre de lièvres ($a * L, b * L$). De même, le nombre de décès des renards est proportionnel au nombre de renards ($e * R$). Le nombre de rencontres entre lièvres et renards est, lui, proportionnel au produit $L * R$ et une fraction de ces rencontres donnent des "décès" de lièvres ($c*L*R$) et donc des "naissances" de renards ($d*L*R$). Les délais entre nutrition et reproduction et les classes d'âges sont négligés. Cependant, en insistant sur leur caractère de "première approche", les étudiants admettent ces raisonnements qui mettent en jeu uniquement des connaissances intuitives.

En établissant les bilans des taux de variations des nombres de lièvres et de renards, on obtient :

$$\frac{DL}{dt} = (A * L) - (C * L * R) \text{ et } \frac{dR}{dt} = (D * L * R) - (E * R)$$

où L et R sont des fonctions de t (nombres de lièvres et de renards) et où A, B, C, D, E sont des coefficients constants.

On fait alors remarquer que ces équations sont d'un type nouveau : leurs solutions sont des fonctions du temps. Cependant, elles contiennent dL/dt et dR/dt et donnent non pas $L(t)$ et $R(t)$ mais bien les variations de L et R lorsque L et R sont connus (membres de droite).

2.2. Equations différentielles en physique et en chimie.

On voit ensuite des exemples physiques et chimiques élémentaires. L'expérience prouve que ceux de la Fig.2 sont très bien acceptés.

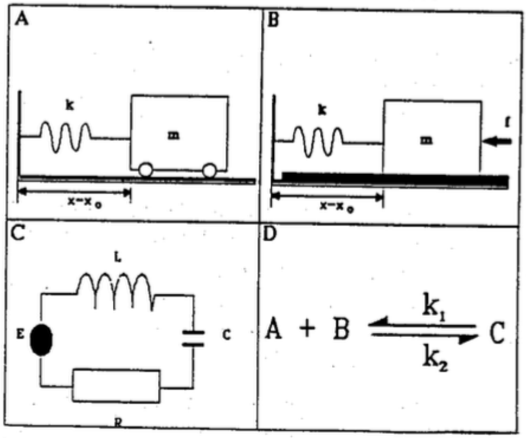


Fig.2 : Systèmes différentiels en physique et en chimie.

Les équations de ces systèmes doivent évidemment être établies en grand détail. Contentons-nous ici de les rappeler :

* Le système masse-ressort horizontal sans gravité ni frottements ou forces extérieures (Fig.2.A). En notations standards, on a :

$$\frac{dx}{dt} = V \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{(k * x)}{m}$$

x : écart du ressort par rapport à sa position de repos
V : vitesse du ressort et de la masse
m : masse
k : coefficient de raideur du ressort

* Adjonction au système précédent d'une force de frottement qui est proportionnelle à la vitesse $(\eta * V)$ et d'une force extérieure donnée par une fonction connue $f(t)$ (Fig. 2.B) :

$$\frac{dx}{dt} = V \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{[k * x + \eta * V + f(t)]}{m}$$

* Circuit électrique RLC série soumis à une tension $E(t)$ variant sinusoïdalement (fig. 2.C) :

$$\frac{d\,VC}{dt} = \frac{IL}{C} \quad \text{et} \quad \frac{d\,IL}{dt} = \frac{[-VC - R * IL + E(t)]}{L}$$

VC : tension aux bornes du condensateur

IL : courant dans la self
R : résistance
L : self
C : capacité
$E(t)$: tension d'entrée sinusoïdale

* Réaction chimique (bilan cinétique basé sur la loi d'action des concentrations ou des masses) (Fig. 2.D) :

$$\frac{dC}{dt} = k_1 * A * B - k_2 * C, \frac{dA}{dt} = \frac{dB}{dt} = k_2 * C - k_1 * A * B$$

A : concentration en produit A (notée $[A]$ en chimie)
B : concentration en B
C : concentration en C
k_1 : vitesse de réaction dans le sens gauche $\rightarrow$ droite
k_2 : vitesse de réaction dans le sens droite $\rightarrow$ gauche

2.3. Remarques pédagogiques.

* Une fois admise la définition d'une dérivée comme "vitesse ou taux de variation par unité de temps", la formulation de ces équations ne demande, dans chaque cas, que des manipulations algébriques élémentaires.
* En mécanique, les seules connaissances pré-requises sont les notions de mouvement, la loi de Newton et les lois des ressorts et frottements. Ces deux dernières s'expliquent très facilement par comparaison avec des systèmes réels et familiers (extenseur de gymnastique, frottement des pneus).
* En électricité, les lois de Kirchoff ($E(t) + VR + VL + VC = 0$, $IR = IL = IC$), les lois des trois éléments ($QC = C * VC, VR = R * IR$ et $VL = L * d(IL)/dt$) et la définition du courant $IC = d(QC)/dt$ sont les seuls présupposés.
* En chimie, la loi d'action des concentrations pose en général quelques problèmes et doit être revue en détail. Nous utilisons pour ce faire l'analogie suivante : dans une ville (solution), pour que des hommes (A) et femmes (B) se marient (forment un couple C), il faut qu'ils se rencontrent et qu'après rencontre, ils éprouvent une attirance l'un pour l'autre. La fréquence des rencontres heureuses est proportionnelle non pas directement à la concentration des hommes et femmes (supposés uniformément distribués dans la ville) mais bien au produit

de ces deux concentrations. Il ne suffit en effet pas qu'il y ait beaucoup d'hommes ou de femmes (A élevé ou B élevé). Si l'un des deux termes est nul, il n'y a pas de rencontres. C'est donc bien le produit $A * B$ qui doit intervenir. Enfin, l'attirance mutuelle moyenne d'un couple est mesurée par $k1$. Ceci explique donc le terme ($k1 * A * B$) de l'équation. Les autres termes sont expliqués de même ($C \rightarrow A + B =$ divorce, $k2 =$ répulsion, $C =$ nombre de couples).

Nous ne faisons que poser ces équations sans les résoudre, elles sont donc en général admises sans problèmes. Afin d'augmenter la motivation des étudiants, on leur décrit alors, sans formulation, quelques exemples moins académiques mais généralisant les notions précédentes.

En effet, les suspensions de voitures (y compris les suspensions actives des Formules 1 actuelles) sont des systèmes de masses, ressorts et frottements. Les circuits filtres sont des exemples utiles de systèmes RLC. Enfin, il est facile d'introduire alors les notions d'enzymes utilisés par les réactions biologiques et de montrer que les réacteurs biotechnologiques ne sont que des extensions du système chimique vu ci-dessus. On peut aussi voir les applications des équations de Volterra à l'écologie ou à la propagation des épidémies. Enfin, l'examen détaillé des analogies entre ces derniers cas et les réactions chimiques ou entre les systèmes électriques et mécaniques est une source inépuisable d'applications ouvrant l'étudiant à l'unité de la science.

2.4. Notions générales induites à partir des exemples.

En généralisant un peu les exemples décrits, il est alors facile d'expliquer que beaucoup de systèmes naturels sont décrits par des systèmes de N équations à N inconnues (ici $N = 2$ ou 3). Ce ne sont pas des équations du type algébrique auquel les étudiants sont habitués et qui ne relient entre elles que les inconnues.

Il s'agit en effet de systèmes d'équations différentielles c'est-à-dire reliant algébriquement certaines "variables du système", fonctions inconnues du temps et les "dérivées du premier ordre" de ces variables.

Décrire un système du monde réel par ces équations, c'est en donner un modèle mathématique différentiel ou dynamique.

C'est alors le moment de les sensibiliser à la notion de modèle et au fait que, pour un système réel, il existe en fait beaucoup de modèles de complexité variable et non pas une représentation absolue et unique.

Vient alors l'introduction de la principale utilité des modèles : si l'on connaît les valeurs des variables à un instant t donné et quelconque, le modèle permet d'exprimer les taux de variations ou vitesses de changement de ces variables en fonction des valeurs. Il donne donc une information sur le futur de ces variables mais on ne peut trouver les valeurs futures en résolvant les équations puisqu'elles sont d'un type inconnu jusqu'ici.

Sur le plan mathématique, il est possible, si on le désire, de présenter alors la notion générale de modèle mathématique d'un système réel, défini par n équations différentielles du premier ordre en n fonctions du temps t inconnues et appelées variables $(x_i(t), 1 \leqslant i \leqslant n)$ et l fonctions connues du temps appelées entrées du système $(u_k(t), 1 \leqslant k \leqslant l)$.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_l, t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_l, t) \end{array}\right.$$

Nous insistons donc sur le fait que les systèmes d'équations algébriques à n inconnues (mais sans dérivée) et les équations différentielles à une inconnue sont trop limités pour décrire le monde réel. Celui-ci est en effet caractérisé par l'interaction de nombreuses variables de dérivées permettant de calculer la façon dont les variables changent.

3. Résolution numérique des systèmes d'équations différentielles.

Il n'est pas question de résoudre ces systèmes analytiquement, ni de voir la théorie des fonctions à n variables. Nous étudions donc la résolution numérique de nos équations différentielles. Partant d'une suite finie de valeurs de t,

$$\{t_0, t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_0 + 2 * \Delta t, \ldots t_n = t_0 + n * \Delta t, \ldots, t_N = t_0 + N * \Delta t\}$$

on se fixe comme but de calculer non pas la solution exacte pour tout t mais une valeur approchée de cette solution et uniquement pour les valeurs de t donnée par $t_n = t + n * \Delta t$. Pour obtenir cette solution, repartant par exemple du système mécanique précédent, on en approxime les dérivées par les quotients différentiels dont elles sont les limites :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx V \quad \text{et} \quad \frac{\Delta V}{\Delta t} \approx \frac{[k * x + \eta * V + f(t)]}{m}$$

Remplaçant les quotients respectivement par :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\Big|_{t=t_n} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta V}{\Delta t}\Big|_{t=t_n} = \frac{V(t_{n+1}) - V(t_n)}{\Delta t}$$

et exprimant ensuite les deux seconds membres en $t = t_n$, on isole $x(t_{n+1})$ et $V(t_{n+1})$. Finalement, on arrive à :

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &\approx x(t_n) + \Delta t * [V(t_n)] \\ V(t_{n+1}) &\approx V(t_n) + \Delta t * [k * x(t_n) + \eta * V(t_n) + f(t_n)] \end{aligned}$$

A tout instant, on peut calculer $f(t)$; la suite $f(t_n)$ est donc connue. Dès lors, si l'on connaît $x(t_n)$ et $V(t_n)$, les équations ci-dessus donnent

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_0) + \Delta t * [V(t_0)] \\ V(t_1) &= V(t_0) + \Delta t * [k * x(t_0) + \eta * V(t_0) + f(t_0)] \end{aligned}$$

En réappliquant ces mêmes formules à $x(t_2)$ et $V(t_2)$, on trouve :

$$\begin{aligned} x(t_2) &= x(t_1) + \Delta t * [V(t_1)] \\ V(t_2) &= V(t_1) + \Delta t * [k * x(t_1) + \eta * V(t_1) + f(t_1)] \end{aligned}$$

Ainsi, de proche en proche, on génère les suites $x(t_n)$ et $V(t_n)$ qui sont les approximations cherchées des grandeurs $x(t)$ et $V(t)$.

Dans le cas général, les récurrences s'écrivent :

$$\begin{aligned} x_1(t_{k+1}) &= x_1(t) + \Delta t * f_1(x_1(t_k), \ldots, x_n(t_k), u_1(t_k), \ldots, u_l(t_k), t_k) \\ &\vdots \\ x_n(t_{k+1}) &= x_n(t) + \Delta t * f_n(x_1(t_k), \ldots, x_n(t_k), u, (t_k), \ldots, u_l(t_k), t_k) \end{aligned}$$

Le texte ci-dessus ne fait qu'esquisser l'exposé qui doit être fait aux étudiants. On leur introduit en effet simultanément de nombreuses notions : solutions approchées, méthodes numériques, récurrences, conditions initiales, discrétisation. Il est donc important de concrétiser toutes ces notions par divers exemples et graphiques. On peut ainsi utiliser des équations telles que :

$$dx/dt = a \quad \text{ou} \quad dx/dt = x$$

dont ils peuvent par dérivation, vérifier les solutions exactes :

$$x = at \quad \text{et} \quad x = exp(t).$$

Il est également important de discuter de la précision de cette méthode de résolution ou d'intégration. A ce stade, les étudiants ont acquis deux notions essentielles.

$*$ Les modèles dynamiques sont un outil de description du réel. $*$ Les questions de précision numérique mises à part, tous les systèmes d'équations différentielles du premier ordre sont résolubles de façon approchée par cette méthode dite d'Euler.

Il est alors important de compliquer un peu les exemples donnés en introduisant plus de réalisme dans les modèles (par exemple des non-linéarités ou des coefficients dépendant du temps). Dans le système de Volterra on peut par exemple introduire une valeur de coefficient périodique $a(t) = a_0 * \sin(2 * \pi * f * t)$ exprimant que la capacité de nutrition de l'herbe a une variation saisonnière. En mécanique, les équations des forces élastiques et de frottement peuvent devenir non-linéaires. Les résistances électriques sont remplacées par des diodes et les bobinages, plus réalistes, ont un phénomène de saturation. Dans chaque cas, les équations se trouvent aisément. On ne peut écrire les solutions exactes mais la méthode d'Euler en donne des approximations.

En terminant cette partie, nos objectifs sont que les étudiants aient senti la puissance des modèles dynamiques couplés à la méthode d'intégration numérique.

Il leur reste alors à calculer les solutions et à analyser leurs propriétés pour divers choix de paramètres (constantes dans les équations), de signaux d'entrée $(u_1, \ldots, u_l)$ et de conditions initiales $(x_1(0), \ldots, x_n(0))$. Vu la quantité de calcul nécessitée par la méthode d'Euler, cela ne peut se faire que par ordinateur.

4. Le schéma de principe de la simulation des systèmes dynamiques.

La méthode d'Euler se traduit facilement en un programme rédigé en pseudocode. A titre d'exemple, reprenons le circuit RLC soumis à une tension sinusoïdale $E = sin(2 * \pi * f * T)$. Pour T allant de $T0$ à $TMAX$ par pas de DT (ex. $DT = TMAX/1000$), calculons les variables VC et IL dépendant du temps T et déterminées par les deux équations différentielles vues précédemment. Il faut bien sûr donner les valeurs initiales de ces variables, nécessaires pour initialiser les récurrences. Appelons $VC0$ et $IL0$ ces deux valeurs initiales. Le pseudocode encadré ci-dessous donne la suite des opérations à effectuer pour engendrer récursivement les solutions cherchées.

```
* constantes *
Choisir :T0,TMAX,DT
A,F,R,L,C
*Conditions en T0*
Choisir VC0 et IL0
* Initialisation *
START : T <= T0
        VC <= VC0
        IL <= IL0
* Calcul des dérivées *
E <= sin(2 * π * F * T)
DVCDT <= IL/C
DILDT <= -VC-R*IL+E
* Intégration d'Euler *
VC <= VC + DT* DVCDT
IL <= IL+DT+DILDT
* Incrémentation de T *
T <= T+DT
* Test de fin *
IF(T ⩾ TMAX) THEN
   END
  ELSE
GO TO START
ENDIF
END
```

On commence par fixer les diverses constantes. On donne alors à T, VC et IL leurs valeurs initiales. Il faut remarquer que le symbole <= ne représente pas une égalité au sens mathématique. Il désigne une affectation informatique : calculer le membre de droite, donner cette valeur à la variable du membre de gauche.
On calcule alors la tension connue $E(t)$ ainsi que les expressions des dérivées DVCDT et DILDT selon les formules précédentes. Ces dérivées sont en fait les termes appelés f_1 et f_n dans la formulation générale de la méthode d'Euler. On applique donc cette méthode pour calculer les valeurs de VC et IL un instant DT après la valeur courante de T=0 .
On incrémente alors la valeur de T du pas DT . La nouvelle valeur de T est donc T0 + DT . On compare cette valeur à TMAX (fin de simulation).
Si le test montre que la simulation est terminée, on arrête les calculs. Sinon, le rebouclage en "START" donne une situation identique à celle décrite ci-dessus pour T=0 (premier passage à cette ligne). On connaît en effet T, VC et IL, non plus en T=T0, mais bien en T = T0 + DT. On reprend donc les calculs qui mènent maintenant aux valeurs de VC et IL en T=T0+2*DT.

Procédant de même jusqu'en $T = MAX$, on obtient récursivement la solution cherchée. Il suffit de réécrire ce pseudocode en BASIC et de lui ajouter quelques instructions d'entrée et de sortie de paramètres et de résultats numériques pour obtenir un programme élémentaire de simulation.

Ce programme permet de nombreuses démonstrations (modification de divers paramètres et du signal d'entrée E, étude de la précision numérique). Aux instructions précédentes, on peut aussi ajouter, après l'évaluation des dérivées, le calcul des variables annexes suivantes :

tension dans L : VL <= IL/L	courant dans C : IC <= IL
charge dans C : QC <= VC∗C	tension dans R : VR <= IR∗R
courant dans R : IR<= IL	

On peut donc connaître, à chaque instant, toutes les variables caractérisant le système étudié. Les étudiants peuvent percevoir qu'il est possible de faire de même avec les autres exemples de modèles dynamiques, même très compliqués. Tout ce qui leur est nécessaire, c'est un micro-ordinateur. Ils sont donc en mesure de simuler numériquement les systèmes décrits par ces modèles. Si on veut motiver l'étudiant, c'est dans la confrontation avec le réel et non pas avec des exemples simples et trop académiques que réside maintenant la clef du succès.

Il est souhaitable que l'étudiant écrive ou voie réaliser un ou deux exemples du type décrit ci-dessus. Il faut cependant aller bien plus loin. Pour profiter pleinement des gains d'intuition et de compréhension donnés par l'étude des modèles dynamiques, il faut en poursuivre l'application dans les matières scientifiques (physique, chimie, biologie, mathématique, cours techniques). Il est indispensable de réaliser des simulations utilisant divers modèles, divers paramètres et/ou signaux d'entrée (les fonctions connues). Il faut enfin expliquer ou découvrir avec l'étudiant le pourquoi et le comment des résultats observés.

L'étudiant et le professeur doivent donc disposer
d'un logiciel se comportant comme un banc d'expérimentation
où tout essai peut être réalisé sur n'importe quel modèle.

L'objectif est ambitieux : le modèle réagit, aux approximations près, comme un système réel, il s'agit donc d'enseigner de façon active la démarche expérimentale et l'explication scientifique causale. Nous savons tous à quel point cela est difficile. Nous devons éviter que l'étudiant se perde rapidement dans un océan d'incertitudes et de complications. Il faut donc que le programme lui assure, en plus des facilités expérimentales, une guidance pédagogique en suggérant le chemin à suivre dans les expériences, en testant la compréhension et en corrigeant les erreurs.

Pour réaliser cet objectif pédagogique, il faut un logiciel de simulation souple et puissant. Il y a, comme nous allons le voir, un monde de différence entre les programmes élémentaires décrits ci-dessus et ce type de logiciel.

La rédaction de programmes spécialisés, simulant un seul système, n'est pas envisageable. Des démarches de ce type ont été suivies pour d'autres applications de l'EAO (enseignement assisté par ordinateur). Qu'elles se soient développées sous la coordination de maisons d'édition et de ministères ou de façon anarchique, les échecs ont été retentissants : la quantité de travail à fournir est trop grande, les programmes construits manquent de souplesse et ne peuvent être modifiés et/ou individualisés. L'uniformité pédagogique et le contrôle de qualité sont souvent insuffisants.

Il faut donc dégager les principes pédagogiques et informatiques auxquels doit satisfaire le "banc d'essai didactique de systèmes dynamiques" idéal. La prochaine section traite de ce problème.

(à suivre...)

(1) NDLR : L'éditeur responsable de la revue "Education et Technique" nous a aimablement accordé l'autorisation de reproduire ce texte (paru dans le $n°$29, 1989, pp. 3-35). Pour connaître des renseignements sur cette revue, voir la publicité en page 18.

Des carrés, des sinus et des cosinus, des multiples rationnels de π

J. Finoulst, *Prof. d'Athénée honoraire*

Introduction

Si n et p sont des entiers non nuls, $\frac{p\pi}{n}$ est un multiple rationnel de π. Pour abréger, on pose

$$(n,p) = 2\sin\frac{p\pi}{n},\ [n,p] = 2\cos\frac{p\pi}{n}.$$

Nous ferons un usage constant des relations

$$(n, p+\alpha n) = 2\sin(p+\alpha n)\frac{\pi}{n} = 2(-1)^\alpha \sin\frac{p\pi}{n} = (-1)^\alpha (n,p), \quad \alpha \in \mathbb{Z}$$

Cette propriété permet de réduire p à l'intervalle $]0, n-1[$.

$$\begin{aligned}(n, n-p) &= 2\sin\frac{(n-p)\pi}{n} = 2\sin\frac{p\pi}{n} = (n,p)\\ (fn, fp) &= 2\sin\frac{fp\pi}{fn} = 2\sin\frac{p\pi}{n} = (n,p) \quad f \in \mathbb{Z}_0.\end{aligned}$$

Ces résultats subsistent pour les nombres $[n,p]$ à l'exception de

$$[n, n-p] = -[n,p].$$

Remarque. $(2,1) = 2$ et $[2,1] = 0$.

Dans ce qui suit, nous supposerons $n > 2$.

En résumé : si, n étant fixe, p parcourt la suite $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, les nombres (n,p) sont deux à deux égaux et les nombres $[n,p]$ sont deux à deux opposés. On peut par conséquent se limiter aux indices p strictement positifs, inférieurs à $\frac{n}{2}$ et premiers avec n. Nous disons que (n,p) est d'ordre n ; le nombre de nombres (n,p) d'ordre n est égal à $\frac{1}{2}\Phi(n)$ où $\Phi(n)$ est l'indicateur (de Gauss ou d'Euler !) de n.

$\Phi(n)$ est le nombre de nombres strictement positifs, inférieurs à n et premiers avec n.

On peut démontrer :

— si $n = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$ est la décomposition de n, on a

$$\Phi(n) = n.\prod_{i=1}^{t}(1 - \frac{1}{p_i});$$

— si $n = a.b$ et que a et b sont premiers entre eux, on a $\Phi(a.b) = \Phi(a).\Phi(b)$;

— si $n = a.b$ et que les facteurs premiers de a sont facteurs de b, on a $\Phi(a.b) = a.\Phi(b)$.

Exemples.

$$\begin{aligned} \Phi(105) &= 105(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{7}) = 48 \\ \Phi(45) &= 45(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 24 \\ \Phi(7) &= 7(1 - \frac{1}{7}) = 6 \end{aligned}$$

Pour les nombres $(105, p)$ et $[105, p]$, p peut avoir les 24 valeurs : 1,2,4,8,11, 13,16,17,19,22,23,26,29,31,32,34,37,38,41,43,44,46,47 et 52.

Chaque p peut être remplacé par $105 - p$. (Souvenez-vous que $[105, 105 - p] = -[105, p]$!)

Pour les nombres $(45, p)$ et $[45, p]$, p peut prendre les 12 valeurs 1,2,4,7,8, 11,13,14,16,17,19 et 21. p peut être remplacé par $45 - p$.

Les nombres $(7, p)$ sont (7,1), (7,2), (7,3) ou (7,6), (7,2), (7,4) et les nombres $[7, p]$ sont [7,1], [7,2], [7,3] ou [7,6], [7,5], [7,3].

Nous nous proposons de calculer la somme des carrés des $\frac{1}{2}\Phi(n)$ nombres (n, p), $[n, p]$ d'ordre n.

Notations

$$\sum_p (n, p^2) \ \ , \ \ \sum_p [n, p]^2$$

Exemple :

$$\sum_p (15, p)^2 = (15, 1)^2 + (15, 2)^2 + (15, 4)^2 + (15, 7)^2.$$

Nous distinguerons trois cas selon que l'ordre

a) est un nombre premier impair ;
b) contient au moins un facteur de multiplicité $\geqslant 2$;
c) est le produit de facteurs premiers différents.

Démonstration

a) l'ordre n est un nombre premier impair

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\sum_p (n,p)^2 &= \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} (2\sin\frac{p\pi}{n})^2 = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n-1}(2\sin\frac{p\pi}{n})^2 \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{i})^2\sum_{p=1}^{n-1}(e^{ip\pi/n} - e^{-ip\pi/n})^2 \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n-1}(e^{2ip\pi/n} + e^{-2ip\pi/n} - 2) \\
&= -\frac{1}{2}(\sum_{p=1}^{n-1} e^{2ip\pi/n} + \sum_{p=1}^{n-1} e^{-2ip\pi/n}) + n - 1.
\end{aligned}$$

Les nombres $e^{\pm 2ip\pi/n}$ sont des racines n-ièmes de l'unité ; par conséquent :

$$\sum_{p=0}^{n-1} e^{\pm 2ip\pi/n} = 0,$$

d'où

$$\sum_{p=1}^{n-1} e^{\pm 2ip\pi/n} = -1.$$

On obtient ainsi

$$\sum_p (n,p)^2 = n \tag{1}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
\sum_p [n,p]^2 &= \sum_p (4\cos^2\frac{p\pi}{n}) = \sum_p (4 - 4\sin^2\frac{p\pi}{n}) \\
&= 4.\frac{1}{2}(n-1) - n = n - 2.
\end{aligned}$$

Comme l'indicateur $\Phi(n) = n - 1$, on a aussi

$$\sum_p (n,p)^2 = \Phi(n) + 1, \quad \sum_p [n,p]^2 = \Phi(n) - 1 \tag{2}$$

<u>Exemples</u>

$$\sum_p (7,p)^2 = 7 \quad , \quad \sum_p [7,p]^2 = 5.$$

b. l'ordre contient au moins un facteur premier de multiplicité $\geqslant 2$

Cet ordre peut s'écrire comme produit $k.n$ de telle manière que les facteurs premiers de k soient aussi facteurs premiers de n. Nous obtenons (p est premier avec n)

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=0}^{k-1} (kn, \mu n + p)^2 &= \sum_\mu [2 \sin \frac{(\mu n + p)\pi}{(kn)}]^2 \\
&= (\frac{1}{i})^2 \sum_\mu [e^{i(\mu n+p)\pi/(kn)} - e^{-i(\mu n+p)\pi/(kn)}]^2 \\
&= - \left[\sum_{\mu=0}^{k-1} e^{2i(\mu n+p)\pi/(kn)} + \sum_{\mu=0}^{k-1} e^{-2i(\mu n+p)\pi/(kn)} - 2k \right] \\
&= -e^{2ip\pi/(kn)}. \sum_{\mu=0}^{k-1} e^{2i\mu\pi/k} - e^{-2ip\pi/(kn)}. \sum_{\mu=0}^{k-1} e^{-2i\mu\pi/k} + 2k.
\end{aligned}$$

Les deux dernières sommes sont nulles. Pourquoi ?

Par conséquent, pour chaque p premier avec n,

$$\sum_{\mu=0}^{k-1} (kn, \mu n + p)^2 = 2k \tag{3}$$

et aussi

$$\sum_{\mu=0}^{k-1} [kn, \mu n + p]^2 = \sum_{\mu=0}^{k-1} [4 - (kn, \mu n + p)^2] = 4k - 2k = 2k.$$

Si n et p sont premiers entre eux et tenant compte de la relation entre k et n, on démontre facilement que $D(kn, \mu n + p) = 1$; les k nombres $(kn, \mu n + p)$ sont donc d'ordre kn.

Note : $D(a,b) = p.g.c.d.(a,b)$.

Supposons $kn = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$ où au moins un exposant $\alpha_i \geqslant 2$; n contient au moins une fois les facteurs premiers p_i et k est un diviseur $\neq 1$ de $\prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i - 1}$. Le nombre de ces diviseurs est égal à

$$\prod_{i=1}^{t}(\alpha_i - 1 + 1) - 1 = \prod_{i=1}^{t} \alpha_i - 1;$$

c'est aussi le nombre de décompositions de l'ordre donné en produits kn.

Si (n,p) parcourt les $\frac{1}{2}\Phi(n)$ nombres d'ordre n, on déduit de (3)

$$\sum_{p}\sum_{\mu=0}^{k-1}(kn, \mu n + p)^2 = k.\Phi(n) = \Phi(kn).$$

Cette double somme est formée des $\frac{1}{2}\Phi(n).k = \frac{1}{2}\Phi(kn)$ nombres d'ordre kn ; nous notons brièvement

$$\sum_{p}(kn,p)^2 = \Phi(kn).$$

On a aussi

$$\sum_{p}[kn,p]^2 = \Phi(kn).$$

<u>Cas particulier</u>

$$\sum_{p}(2\alpha,p)^2 = \sum_{p}[2^\alpha,p]^2 = \Phi(2^\alpha) = 2^{\alpha-1}.$$

Exemples

1. $k.n = 72$.
   (a) $k = 2$ et $n = 36$ où $p = 1, 5, 7, 11, 13$ et 17.
   $p = 1$ donne $(72, 1)^2 + (72, 37)^2 = 4$ ou $(72, 1)^2 + [72, 1]^2 = 4$.
   Ceci résulte aussi de $\sin^2 \pi/72 + \cos^2 \pi/72 = 1$.
   $k = 4$,$n = 18$ ou $k = 6$, $n = 12$ fournissent également des relations connues !
   (b) $k = 3$, $n = 24$; où p =1,5,7 ou 11.

$$\begin{aligned} p = 1 &: (72, 1)^2 + (72, 25)^2 + (72, 23)^2 = 6 \\ p = 5 &: (72, 5)^2 + 72, 29)^2 + (72, 19)^2 = 6 \\ p = 7 &: (72, 7)^2 + (72, 31)^2 + (72, 17)^2 = 6 \\ p = 11 &: (72, 11)^2 + (72, 35)^2 + (72, 13)^2 = 6. \end{aligned}$$

   Il y a donc une partition de l'ensemble des 12 éléments $(72, p)$ en 4 sous-ensembles à 3 éléments et la somme des carrés de ces 3 éléments est égale à 6.
   On déduit des résultats analogues pour les nombres $[72, p]$.
2. $k.n = 125$
   (a) $k = 5$, $n = 25$ où $p = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11$ et 12.
   $p = 1$ donne

$$(125, 1)^2 + (125, 26)^2 + (125, 51)^2 + (125, 49)^2 + (125, 24)^2 = 10.$$

   L'ensemble des 50 nombres $(125, p)$ (ou $[125, p]$) se répartissent en 10 sous-ensembles à 5 éléments et la somme des carrés de ces 5 éléments est égale à 10.
   (b) $k = 25$,$n = 5$; $p = 1$ ou 2.
   Maintenant, on a 2 sous-ensembles à 25 éléments ; chaque sous-ensemble se compose de 5 fois 5 éléments (cf. (a)).

c. l'ordre n est de la forme suivante $n = n_1 \dots n_i \dots n_r$; les n_i sont des facteurs premiers différents.

On se basera sur la relation

$$\begin{aligned} n_1.\Phi(n_2 \dots n_r) - n_2.\Phi(n_3 \dots n_r) + \cdots + (-1)^{i+1} n_i.\Phi(n_{i+1} \dots n_r) \\ + \cdots + (-1)^r n_{r-1}.\Phi(n_r) + (-1)^{r+1} n_r = \Phi(n_1 \dots n_r) - (-1)^r \end{aligned} \quad (4)$$

Démonstration

(4) peut s'écrire

$$\Phi(n_1 \dots n_r) + \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^i n_i \Phi(n_{i+1} \dots n_r) + (-1)^r n_r + (-1)^r = 0.$$

Il suffit de remplacer les indicateurs $\Phi(n_{i+1} \dots n_r)$ par leur valeur $(n_{i+1} - 1) \dots (n_r - 1)$ et d'effectuer les opérations indiquées.

On se basera aussi sur la formule (3) $\sum_{\mu=0}^{k-1} (kn, \mu n + p)^2 = 2k$ et on examinera l'ordre des nombres $(kn, \mu n + p)$ lorsque k est un nombre premier ne divisant pas n.

On a évidemment

$$D(n, \mu n + p) = D(n, p) = 1 \ \text{ et } \ D(k, \mu n + p) = 1 \text{ ou } k.$$

Démontrons qu'un des nombres $\mu n + p$ $(\mu = 0, 1, \dots, k-1)$ est divisible par k.

En effet, on peut écrire

$$\mu n + p = k.q_\mu + r_\mu, \quad 0 \leqslant r_\mu < k.$$

Les k restes r_μ sont tous différents : si l'on avait $\mu' n + p = kq_{\mu'} + r_\mu$, on arriverait à la relation $(\mu - \mu')n = k(q_\mu - q_{\mu'})$ et k ne divisant pas n, k diviserait $\mu - \mu'$. Comme $0 \leqslant |\mu - \mu'| < k$, il faut $\mu = \mu'$. Un des restes est donc nul. Par suite, un des nombres $(kn, \mu n + p)$ est d'ordre n et les $k-1$ autres sont d'ordre kn.

Si $D(n, p) = 1$, on trouve en faisant appel à (3)

$$\sum_p \sum_{\mu=0}^{k-1} (kn, \mu n + p)^2 = 2k.\frac{1}{2}\ \Phi(n) = k.\Phi(n).$$

Le premier membre comprend $k.\frac{1}{2}\Phi(n)$ termes, notamment les

$$\frac{1}{2}(k-1).\Phi(n) = \frac{1}{2}\Phi(kn)$$

nombres d'ordre kn et les $\frac{1}{2}\Phi(n)$ nombres d'ordre n. La relation précédente peut être remplacée par

$$\sum_p (kn,p)^2 = k.\Phi(n) - \sum_p (n,p)^2.$$

Dans la première somme, p parcourt les $\frac{1}{2}\Phi(kn)$ nombres d'ordre kn ! Une application répétée de cette relation donne

$$\begin{aligned}
k = n_1,\ n = n_2 \dots n_r \ &: \ \sum_p (n_1 n_2 \dots n_r, p)^2 = n_1.\Phi(n_2 \dots n_r) \\
&\qquad - \sum_p (n_2 \dots n_r, p)^2 \\
k = n_2,\ n = n_3 \dots n_r \ &: \ \sum_p (n_2 n_3 \dots n_r, p)^2 = n_2.\Phi(n_3 \dots n_r) \\
&\qquad - \sum_p (n_3 \dots n_r, p)^2 \\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
k = n_{r-1}, n = n_r \ &: \ \sum_p (n_{r-1} n_r, p)^2 = n_r.\Phi(n_r) - \sum_p (n_r, p)^2.
\end{aligned}$$

Selon (1)

$$\sum_p (n_r, p)^2 = n_r.$$

Tenant compte de (4)

$$\sum_p (n_1 n_2 \dots n_r, p)^2 = \Phi(n_1 n_2 \dots n_r) - (-1)^r$$

et

$$\sum_p [n_1 n_2 \dots n_r, p]^2 = \sum_p [4 - (n_1 n_2 \dots n_r, p)^2] = \Phi(n_1 n_2 \dots n_r) + (-1)^r.$$

Si $r = 1$, on retrouve les formules (2).

Exemples

$$\begin{aligned}\sum_p (15,p)^2 &= (15,1)^2+(15,2)^2+(15,4)^2+(15,7)^2 \\ &= \Phi(15)-(-1)^2 = 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_p [30,p]^2 &= [30,1]^2+[30,7]^2+[30,11]^2+[30,13]^2 \\ &= \Phi(30)+(-1)^3 = 7\end{aligned}$$

Même résultat. Pourquoi ?

En résumé

a) $n = \prod_{i=1}^{r} n_i$

Les facteurs sont tous différents.

$$\sum_p (n,p)^2 = \Phi(n) - (-1)^r$$
$$\sum_p [n,p]^2 = \Phi(n) + (-1)^r$$

b) autres cas

$$\sum_p (n,p)^2 = \sum_p [n,p]^2 = \Phi(n).$$

Remarque. On peut déduire des formules analogues pour les autres nombres goniométriques.

Plus généralement, on peut établir des formules pour les sommes des puissances paires.

Pour les sommes des puissances impaires, il faut faire appel aux “sommes de Gauss” et à la notion de résidu ou non-résidu d’un nombre premier ou d’un produit de nombres premiers tous différents.

Bibliographie

[1] WINOGRADOW, I.M., *Elemente der Zahlentheorie,* Verlag R. Oldenbourg, München, 1956.

[2] FINOULST, J., Bijdrage tot de Theorie der Regelmatige Veelhoeken, *Verhandelingen Kon. Vlaamse Academie,* Afd. Wetenschappen, nr. 53, 1956.

[3] FINOULST, J., Goniometrie, getallentheorie en regelmatige veelhoeken, *Monografieën van de Vlaamse Vereniging van Wiskunde Leraars,* nr. 8, 1987.

Adresse de l'auteur

FINOULST Jules
Piannesbergstraat 16
3610 Diepenbeek

Cherchez l'auteur

L'EPREUVE

Un jour, l'idée me vint d'un moyen simple et immédiat pour reconnaître si une personne donnée est douée de quelque "esprit mathématique".

Le résultat s'obtient en sept ou huit secondes, dont six pour la question, que voici :

"*Si Pierre ressemble à Paul, et si Paul ressemble à Jacques, Pierre ressemble-t-il à Jacques ?*"

Que si le sujet fait mine de réfléchir, l'épreuve est défavorable. Mais s'il dit : "Oui", dans l'instant même, et comme sans y penser, cette promptitude et cet absolu dans la réponse le "qualifient" pour la science des formes pures.

Le malheur a voulu que j'aie songé à éprouver mon épreuve, et qu'ayant rencontré l'un des plus éminents géomètres de ce temps, je lui aie posé la question. Il s'est mis à réfléchir longuement...

voir solution page

Extraction mentale d'une racine cubique

P. Dassy, *Athénée de Hannut*

Si vous aimez les exercices du genre : extraire mentalement la racine cubique d'un nombre, cube parfait évidemment, mais jusque 1 milliard cependant, et en 20 secondes, alors je vous dévoile et vous démontre un procédé.

La première chose est de mémoriser les cubes des entiers de 1 à 9 $(1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729)$, ce qui avec un peu d'entraînement est à la portée de tout un chacun.

La deuxième chose est de savoir que les cubes des nombres terminés par $1, 4, 5, 6$ et 9 ont respectivement le même chiffre terminal ; le cube d'un nombre terminé par 2 se termine par 8 et réciproquement ; celui d'un nombre terminé par 3 se termine par 7 et réciproquement. Ceci permet déjà de donner quasi instantanément les racines cubiques des cubes parfaits jusque 1 million.

Ainsi la racine cubique de 658503 est 87 puisque 658503 se termine par 3 et que 658 est compris entre 512 et 729.

Les cubes parfaits compris entre 10^6 et 10^9 ont une racine cubique comprenant 3 chiffres.

D'après ce qui précède, la recherche du premier et du troisième chiffres prend 3 secondes. C'est la recherche du deuxième chiffre qui prend les 17 secondes restantes.

Cette recherche est basée sur la division par 11.

Désignons par $\mathcal{M}11$ un multiple quelconque (entier) de 11. On a

$$\begin{aligned}
n = \mathcal{M}11 &\Rightarrow n^3 = \mathcal{M}11 \\
n = \mathcal{M}11 + 1 &\Rightarrow n^3 = \mathcal{M}11 + 1 \\
n = \mathcal{M}11 + 2 &\Rightarrow n^3 = \mathcal{M}11 + 8 \\
n = \mathcal{M}11 + 3 &\Rightarrow n^3 = \mathcal{M}11 + 27 = \mathcal{M}11 + 5 \\
n = \mathcal{M}11 + 4 &\Rightarrow n^3 = \mathcal{M}11 + 64 = \mathcal{M}11 + 9 \\
n = \mathcal{M}11 + 5 &\Rightarrow n^3 = \mathcal{M}11 + 125 = \mathcal{M}11 + 4 \\
n = \mathcal{M}11 + 6 &\Rightarrow n^3 = \mathcal{M}11 + 216 = \mathcal{M}11 + 7 \\
n = \mathcal{M}11 + 7 &\Rightarrow n^3 = \mathcal{M}11 + 343 = \mathcal{M}11 + 2 \\
n = \mathcal{M}11 + 8 &\Rightarrow n^3 = \mathcal{M}11 + 512 = \mathcal{M}11 + 6 \\
n = \mathcal{M}11 + 9 &\Rightarrow n^3 = \mathcal{M}11 + 729 = \mathcal{M}11 + 3 \\
n = \mathcal{M}11 + 10 &\Rightarrow n^3 = \mathcal{M}11 + 1000 = \mathcal{M}11 + 10
\end{aligned}$$

Il existe donc une bijection de l'ensemble des restes des divisions des nombres naturels par 11 sur l'ensemble des restes des divisions par 11 de leurs cubes. De sorte que les implications précédentes peuvent être remplacées par des équivalences.

En écrivant les restes des divisions par 11 des cubes dans l'ordre numérique $(0, 1, 2, \ldots, 10)$, on obtient comme suite des restes des divisions par 11 des nombres correspondants : $(0, 1, 7, 9, 5, 3, 8, 6, 2, 4, 10)$. Ceci est en fait le code qui permettra de trouver le deuxième chiffre du nombre cherché (En pratique, on retient $179, 538, 624$).

Notons pour la suite que chaque fois que l'on rencontrera le signe $(*)$, il faudra lire : (que l'on ramène entre 0 et 10 par addition d'un multiple de 11).

Considérons dès lors le nombre

$$\begin{aligned}
n &= \overline{\ldots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} \\
&= a_1 + 10a_2 + 100a_3 + 1000a_4 + 10000a_5 + \ldots \\
&= a_1 + 11a_2 - a_2 + 9.11a_3 + a_3 + 91.11a_4 - a_4 + 909.11a_5 + a_5 + \ldots
\end{aligned}$$

Le reste de la division par 11 de n est

$$r = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots \qquad (*)$$

Ainsi, par exemple, si le reste de la division par 11 d'un cube parfait compris entre 10^6 et 10^9 se termine par 2, alors le reste de la division par 11 de la racine cubique $\overline{abc}$ se termine par 7 (code).

Donc $a + c - b = 17 \quad (*)$,

$b = a + c - 7 \quad (*)$ et le nombre $\overline{abc}$ est découvert.

Exemple

Extraire la racine cubique de 825293672.

Le premier chiffre est $\boxed{9}$ et le troisième $\boxed{8}$

$$\begin{aligned} 2 + 6 + 9 + 5 + 8 &= 30 \\ 7 + 3 + 2 + 2 &= 14 \\ 30 - 14 = 16, \;\; 16 - 11 &= 5 \end{aligned}$$

A 5 correspond 3 (code)

$$\begin{aligned} 9 + 8 &= 17 \\ 17 - 3 &= 14, \;\; 14 - 11 = \boxed{3} \end{aligned}$$

Le deuxième chiffre de la racine cubique cherchée est 3.

Celle-ci est donc $\boxed{938}$.

Adresse de l'Auteur
Pierre DASSY
49B, Quai Saint-Léonard (bte 32)
4000 Liège

Réponse à l'énigme de la page ?

Paul VALERY, dans "Mélange".

(Rappelons que l'écrivain était extrêmement intéressé par les sciences exactes ; lorsqu'à l'âge de 23 ans, il s'installe à Paris, il apporte, dans sa chambre d'hôtel, le tableau noir qu'il utilise pour les problèmes d'algèbre ou de physique ; Paul Valéry ne manquait pas non plus d'humour...)

Construire et argumenter en géométrie élémentaire

F. Van Dieren, *Institut Saint Dominique, 1030 Bruxelles*

Nous avons rassemblé dans le présent exposé quelques activités géométriques à l'intention des élèves de douze à treize ans. Un des problèmes qui se posent à cet âge est celui d'une initiation progressive et sensée à la pensée raisonnante. Examinons cette question en nous intéressant tout d'abord à quelques figures élémentaires qui apparaissent d'office dans toute initiation à la géométrie.

Le losange, par exemple, qui est reconnu au premier coup d'oeil, possède des côtés égaux (qu'on nous permette d'utiliser ici "égal" au sens de la langue commune), des côtés opposés parallèles, des angles opposés égaux, des diagonales perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu. Ces propriétés vont toujours ensemble dans le losange. Et comme l'écrivait D. Van Hiele [1] en 1957, "à ce niveau, un motif géométrique est encore interprété comme la totalité de ses propriétés. Les élèves ne sont pas encore capables de les différencier en définitions et propositions. "Un autre exemple donné par Van Hiele est la figure qu'elle appelle une échelle (ou une demi-échelle) (cf. Fig.1).

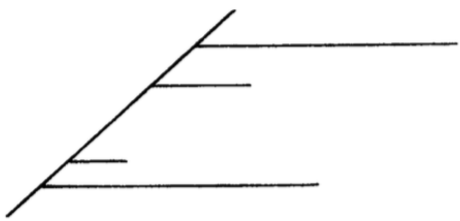


Fig. 1

Cette figure est *reconnue* soit au parallélisme des segments, soit à l'égalité de certains angles : il y a là une nécessaire concomitance de propriétés, et au départ aucune vélléité chez les élèves de les détailler en conditions nécessaire et suffisante.

Notre opinion est qu'il ne faut pas construire des théorèmes pour prouver ces concomitances évidentes, à un âge surtout où "prouver" ne peut guère vouloir dire autre chose qu'"amener à l'évidence". Il peut être perturbant de vouloir amener à l'évidence une chose évidente : on ne sait plus ce qu'on fait.

Par contre, et c'est ce que nous avons tenté de faire en classe, il est intéressant de raisonner sur des propriétés non évidentes et d'en prouver certaines (le lecteur déterminera lui-même en lisant nos exemples le sens que nous attribuons ici à "prouver") en utilisant et approfondissant cette connaissance des figures familières et des concomitances de propriétés. Car le losange, pour ne parler que de lui, est un cousin du triangle isocèle et de la médiatrice, et on le voit poindre comme structure source de clartés inattendues dans toute une famille de problèmes et de figures dont nous proposons l'étude ci-après.

Nous sommes convaincus qu'il est essentiel de faire réfléchir les élèves à une multitude de situations où sont aussi engagées de façon significative ces figures simples à propriétés concomitantes (Van Hiele les appelait *structures géométriques visuelles*), et de secouer ces propriétés, de les éprouver chacune. Une façon de briser la concomitance perçue globalement, indifférenciée en quelque sorte, et d'en provoquer l'analyse, c'est de proposer certaines constructions à l'aide d'instruments imposés (qui obligent, vu leur constitution même, à passer par des propriétés déterminées). Jouer ainsi avec une multitude de propriétés au départ évidentes nourrit l'imagination géométrique et prépare les élèves à ne pas être trop souvent à court d'arguments dans leur formation ultérieure.

Nous avons aussi accordé beaucoup d'attention au fait que les élèves ont tendance à considérer une figure à la fois et qu'il importe de les rendre conscients qu'une figure a vocation le plus souvent d'en représenter une infinité d'autres. D'où l'utilité de questions telles que : est-ce vrai toujours, dans tous les cas ? Et l'intérêt de démontrer une propriété sur une figure qui l'exhibe mal, de sorte que le raisonnement prenne naturellement le pas sur les mesures et la vérification empirique. Pour des commentaires plus détaillés sur l'intérêt, dans l'apprentissage de la preuve, de s'intéresser à la "portée ensembliste" des énoncés, c'est-à-dire à l'ensemble des objets auxquels l'énoncé renvoie, cf. N. Rouche [2].

La présente étude est un morceau d'un recueil de problèmes plus ample sur le thème des lieux géométriques, visant les élèves de 12 à 15 ans. Ce recueil sera publié ultérieurement.

1. Premiers problèmes de distances

1.1. Problème : Une chèvre broute dans un pré de 80 m sur 55 m. Elle est attachée par une corde de 18 m au piquet marqué "a" sur le dessin à l'échelle ci-dessous ([1]).

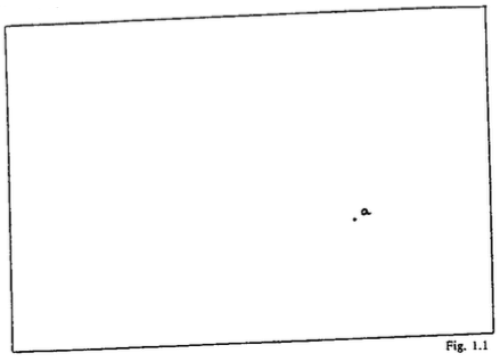


Fig. 1.1

1. Quelle est la zone qu'elle peut brouter ?
2. Comment changer le piquet de place pour que, le lendemain, la chèvre dispose de la même quantité d'herbe haute ? Note "b" la nouvelle position du piquet sur le dessin.
3. Déterminer toute la partie du pré où on peut placer ce point b.

Solution du Problème 1.1

Calcul de l'échelle

La longueur du pré sur l'image est 16 cm, la longueur réelle du pré est 80 m, ce qui fait 8000 cm. L'échelle vaut $\frac{16}{8000} = \frac{1}{500}$.

Calcul de la longueur de la corde sur l'image

$$18\ m.\frac{1}{500} = \frac{18000\ cm}{500} = 3,6\ cm.$$

Schéma

La chèvre a accès au disque hachuré. Les positions possibles du point b sont entourées d'un trait plein : les points situés à 18 m des bords du pré

1. Dans le dessin fourni aux élèves, le rectangle mesure 16 cm sur 11 cm.

sont faciles à trouver. Pour déterminer ceux qui sont à plus de 18 m de la partie broutée, il faut dessiner un disque de même centre, et de rayon mesurant $2 \times 18\ m = 36\ m$ dans la réalité, ou $7,2$ cm sur le dessin.

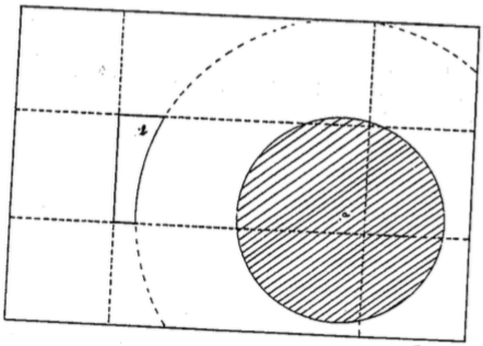


Fig. 1.2

1.2. Première synthèse

Calculer une échelle

1. Choisir un segment sur l'image (ou la carte) et le mesurer en cm.
2. La longueur correspondante sur le terrain est donnée en mètres ou en kilomètres. Il faut la convertir en cm.
3. Etablir le rapport entre le premier nombre et le second. Ce rapport est l'échelle. On peut parfois le simplifier.

L'échelle indique par quelle fraction il faut multiplier les longueurs sur le terrain pour obtenir les longueurs sur l'image.

Remarques :

1. Multiplier par $\frac{1}{10}$ revient à diviser par 10. Multiplier par $\frac{1}{1000}$ revient à diviser par 1000.
2. Si l'échelle est une fraction inférieure à 1, alors le plan est plus petit que la réalité.

   Tandis que si l'échelle est une fraction (ou un nombre entier) plus grande que 1, alors le plan est plus grand que la réalité.

Définitions du disque et du cercle

On appelle disque de centre a et de rayon r, l'ensemble des points du plan situés à une distance de a, inférieure ou égale à r.

On appelle cercle de centre a et de rayon r, l'ensemble des points du plan situés à une distance du centre égale au rayon.

1.3.Problème Une chèvre est attachée par une corde de 8 m à la paroi d'une cabane carrée de 4 m de côté. La chaîne est fixée à un mètre d'un coin de la cabane. Calculer l'aire que la chèvre peut brouter.

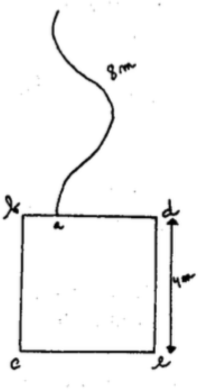


Fig. 1.3

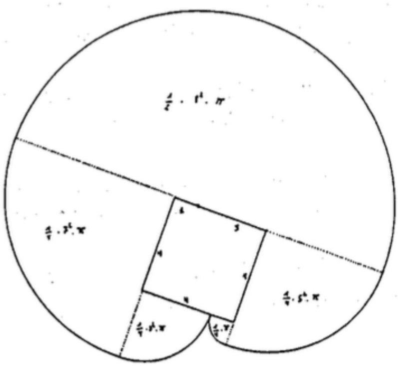


Fig 1.4

Solution du Problème 1.3

La chèvre ne peut plus brouter que des "morceaux de disques", sa corde étant bloquée par les coins de la cabane. La surface est formée d'un demi-disque de centre a et 8 m de rayon, d'un quart de disque de centre b et de 7 m de rayon et ainsi de suite, comme indiqué sur la Fig. 1.4. L'aire qu'elle peut brouter vaut donc en m^2 :

$$\pi.(\frac{1}{2}.8^2 + \frac{1}{4}.7^2 + \frac{1}{4}.5^2 + \frac{1}{4}.3^2 + \frac{1}{4}) \simeq 166,42\ m^2\ (avec\ \pi \simeq 3,14)$$

1.4. Deuxième synthèse

Aire du disque

L'aire d'un disque de rayon r est donnée par la formule πr^2. Les calculs avec le nombre π posent problème car son écriture décimale comporte une infinité de chiffres après la virgule et parce qu'on ne peut pas non plus le remplacer par une fraction qui aurait exactement la même valeur. Suivant la précision que l'on désire avoir, on emploie une approximation de π qui comporte $2, 3, 4$ chiffres ou plus après la virgules.

La plupart des calculettes affichent π avec 7 chiffres après la virgule. Comme le résultat n'est pas exact, on rempla le signe $=$ par le signe $\simeq$.

2. Lieux géométriques et propriétés de quelques figures planes

2.1. Problème : On se donne un segment $[ab]$. Où peuvent se trouver les sommets c des triangles isocèles qui ont $[ab]$ comme base ?

2.2. Problème : On se donne un segment $[ab]$. Où peuvent se trouver les sommets c des triangles équilatéraux qui ont $[ab]$ comme base ?

2.3. Problème : On se donne un segment $[ab]$. Où peuvent se trouver les sommets des losanges qui ont $[ab]$ comme diagonale ?

2.4. Problème : On se donne un segment $[ab]$. Où peuvent se trouver les sommets des carrés qui ont $[ab]$ comme diagonale ?

2.5. Problème : On se donne un segment $[ac]$ qui est la diagonale d'un parallélogramme. On se donne aussi la mesure de l'autre diagonale. Où peuvent se trouver les sommets b et d de ce parallélogramme ?

2.6. Problème : On se donne un segment $[ac]$ qui est la diagonale d'un losange. On se donne aussi la mesure de l'autre diagonale. Où peuvent se trouver les sommets b et d de ce losange ?

2.7. Problème : On se donne un segment $[ac]$ qui est la diagonale d'un rectangle. Où peuvent se trouver les sommets b et d de ce rectangle ?

Solution du Problème 2.1

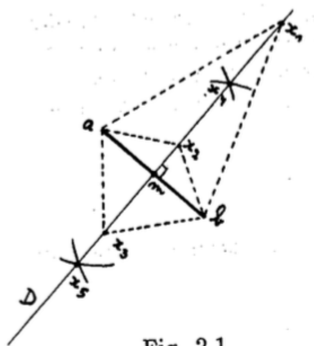


Fig. 2.1

Soit $[ab]$ le segment donné.
On sait que dans un triangle isocèle, la hauteur est perpendiculaire à la base en son milieu. On trace donc différentes hauteurs $[mx_1]$, $[mx_2]$ et $[mx_3]$. Comme il n'y a qu'une droite perpendiculaire à $[ab]$ en m, on est sûr que tous les sommets des triangles isocèles qui ont $[ab]$ comme base appartiennent à la droite D.
Un autre façon de procéder est de chercher au compas un point à égale distance de a et b.

Solution du problème 2.2

Seuls les points x_4 et x_5 de la Fig. 2.1 conviennent. On trouve chacun d'eux en traçant un arc de cercle de centre a et de rayon $\overline{ab}$ puis un arc de cercle de centre b et de même rayon.

Solution du problème 2.3

Même solution que pour le problème 2.1, mais les sommets vont par paires.

Solution du problème 2.4

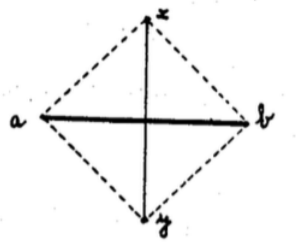


Fig. 2.2

Soit $[a, b]$ le segment donné.
Les diagonales d'un carré x se coupent en leur milieu, elles sont perpendiculaires et de même longueur. Il suffit donc de mener la perpendiculaire à ab au milieu de $[ab]$ et de reporter sur celle-ci, de part et d'autre de m, la longueur $\frac{\overline{ab}}{2}$ (Fig. 2.2). Seuls les points x et y conviennent.

Solution du problème 2.5

Soit $[ac]$ la diagonale donnée et soit 5 cm la longueur de l'autre diagonale. Nous savons que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Les sommets b et d se trouvent donc à 2,5 cm du point m, milieu de $[ab]$. Ils appartiennent au cercle de centre m et de 2,5 cm de rayon.

Il faut exclure les points x et y.

Solution du problème 2.6

Les diagonales d'un losange étant perpendiculaires, seuls les points b_2 et d_2 de la Fig. 2.3 conviennent.

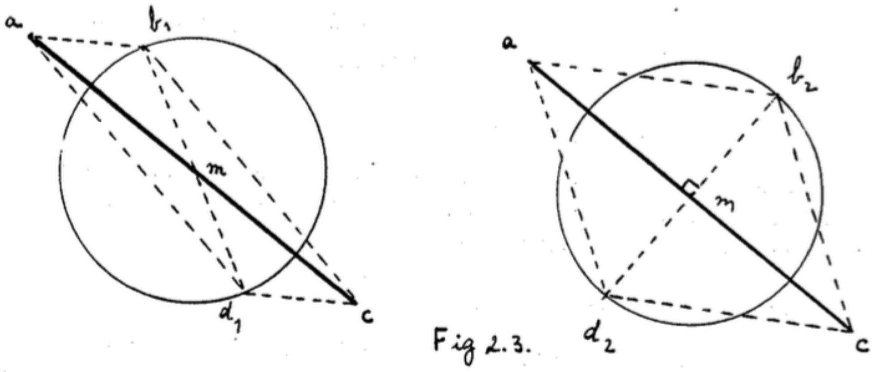


Fig 2.3.

Solution du problème 2.7

Soit $[ac]$ la diagonale donnée.

Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu et ont même longueur. On trace donc le cercle de centre m et de rayon $\frac{\overline{ac}}{2}$ (Fig. 2.4). Tous les sommets cherchés s'y trouvent. Il faut exclure les points a et c de ce cercle.

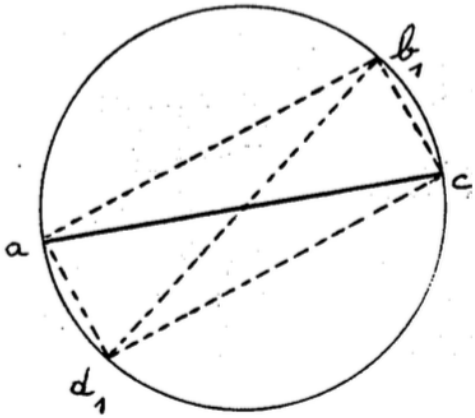


Fig. 2.4

3. Distances d'un point à quelques autres

3.1. Problème : Trouver tous les points du plan plus proches d'un point donné que d'un autre point donné.

3.2. Problème : Si on se donne trois points dans un plan, trouver tous les points du plan plus proches d'un des trois que des deux autres.

3.3. Problème : Trouver, dans un plan, tous les cercles passant par deux points donnés.

3.4. Problème : Même question mais pour trois points.

Solution du Problème 3.1

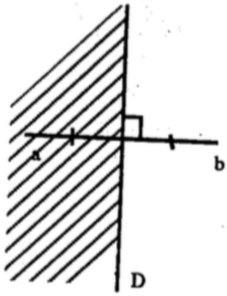


Fig. 3.1

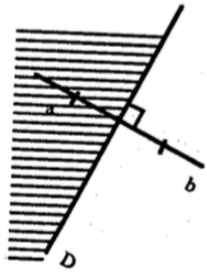


Fig. 3.2

On voit que les points les plus proches de a que de b sont tous d'un même côté d'une droite D. Celle-ci passe par le milieu de $[ab]$ et est perpendiculaire à ab. Les points plus proches de b que de a appartiennent à l'autre demi-plan déterminé par D. Quant aux points de D, ils sont à égale distance de a et de b.

Solution du Problème 3.2

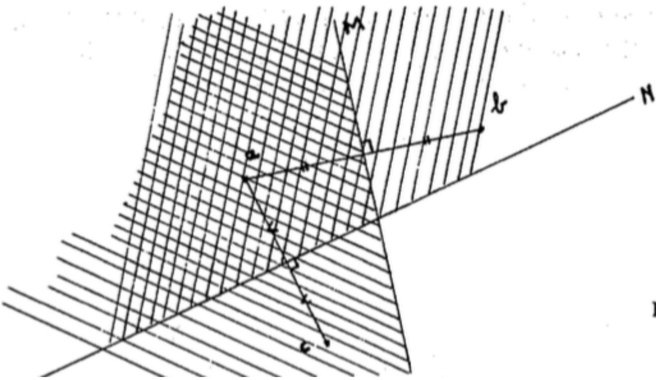


Fig. 3.3

Les points plus proches de a que de b sont d'un côté de la droite M, de même les points plus proches de a que de c sont d'un côté de la droite N. Les points plus proches de a que de b *et* de c sont dans l'intersection de ces deux demi-plans.

Solution du Problème 3.3

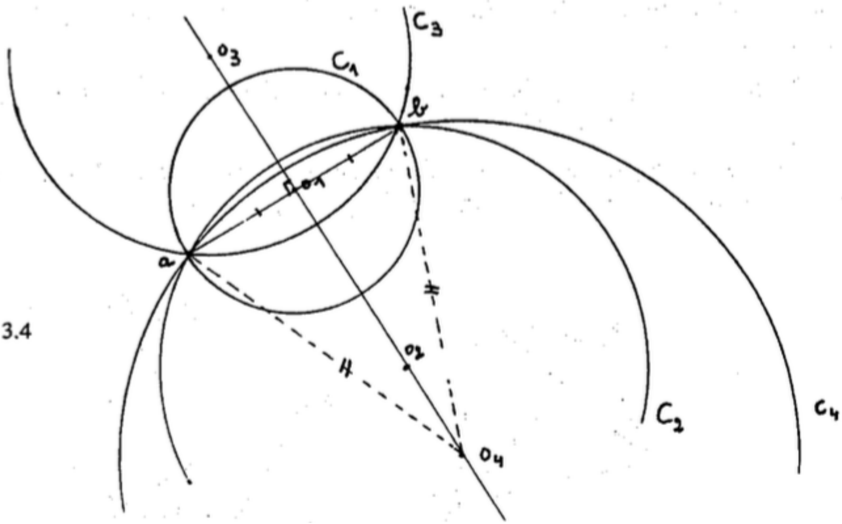


Fig. 3.4

On remarque sur la fig. 3.4 que les centres des quelques cercles passant par a et b que l'on trouve d'abord, sont alignés et que la droite à laquelle ils appartiennent passe par le milieu de $[ab]$ et est perpendiculaire à ab. Chaque point de cette droite est à égale distance de a et de b et est le centre d'un nouveau cercle passant par a et b.

Solution du Problème 3.4 (voir Fig. 3.5)

Les centres des cercles passant par a et b sont les points de la droite M. Les centres des cercles passant par b et c sont les points de N. Le point 0, intersection de M et N, est le centre du cercle cherché.

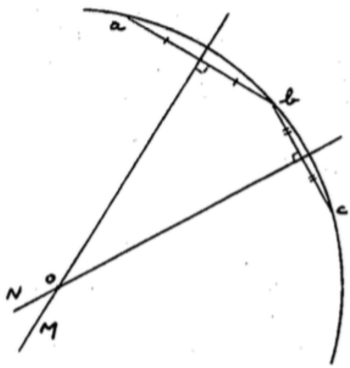


Fig. 3.5

3.5. Synthèse : La médiatrice

On appelle *médiatrice* d'un segment $[ab]$ la perpendiculaire à ab en son milieu. C'est aussi la droite formée de tous les points situés à égale distance de a et b. Donc,

1) si on sait qu'un point est sur la médiatrice de $[ab]$, on sait qu'il est à égale distance de a et b (Fig. 3.6) ;

2) et réciproquement, si on sait qu'un point est à égale distance de a et b, on sait qu'il est sur la médiatrice (Fig. 3.7).

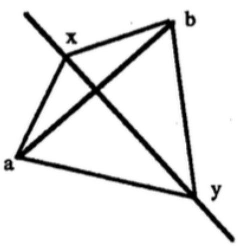


Fig. 3.6

$x \in M \Rightarrow \overline{xa} = \overline{xb}$

$y \in M \Rightarrow \overline{ya} = \overline{yb}$

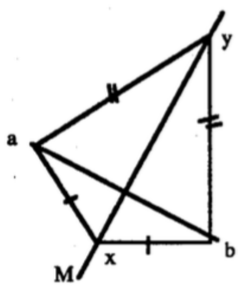


Fig. 3.7

$\overline{xa} = \overline{xb} \Rightarrow x \in M$

$\overline{ya} = \overline{yb} \Rightarrow y \in M$

3.6. Problème : Y a-t-il des polygones dans lesquels une diagonale est médiatrice d'une autre ?

Solution Par exemple :

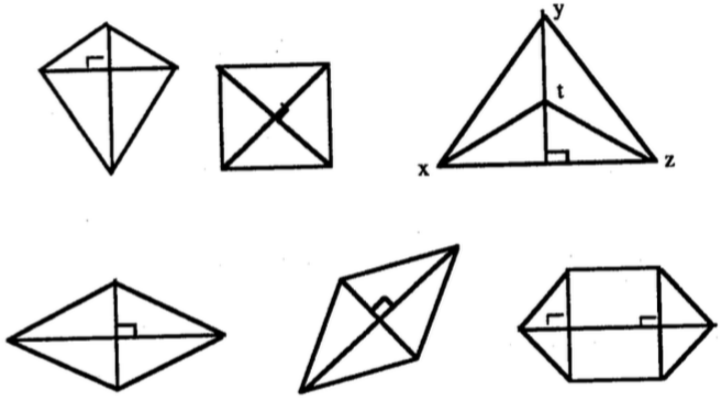


Fig. 3.8

Synthèse : Diagonales médiatrices l'une de l'autre

Le losange est tel que chacune de ses deux diagonales est médiatrice de l'autre. Par contre, dans les "cerfs-volants" et les "pointes de flèches", une seule diagonale est médiatrice de l'autre.

3.7. Problème : D est la médiatrice d'un segment dont une des extrémités est a. Dessiner ce segment.

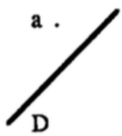


Fig. 3.9

3.8. Problème : Même question mais en utilisant uniquement un compas et une règle non graduée.

3.9. Problème : Achever le cercle dont un arc est donné sur la figure 3.10.

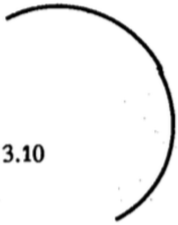


Fig. 3.10

3.10. Problème : Construire la médiatrice d'un segment au compas et à la règle non graduée.

Solution du Problème 3.7

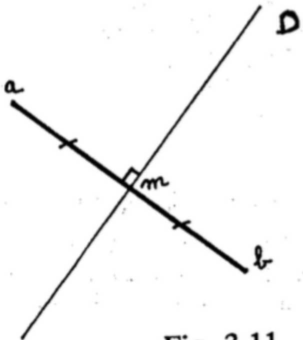


Fig. 3.11

Comme D est par définition perpendiculaire à ab, on mène par a la perpendiculaire à D. Comme D passe par le milieu de $[ab]$, on place b sur cette perpendiculaire de façon que $\overline{am} = \overline{mb}$.

Solution du Problème 3.8

Le segment $[ab]$ cherché est la diagonale d'une foule de losanges tels que ceux présentés à la Fig. 3.12. D'où la construction suivante (Fig. 3.13) : on cherche au compas deux points de D équidistants de a. Avec la même ouverture de compas, on détermine b.

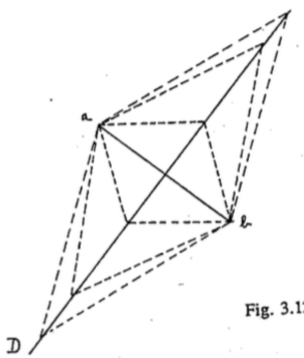


Fig. 3.12

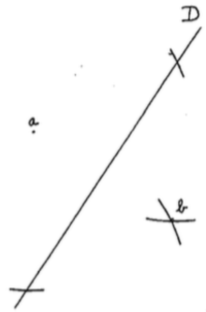


Fig. 3.13

Voici une autre construction, utilisant la propriété 1) de la médiatrice p.62

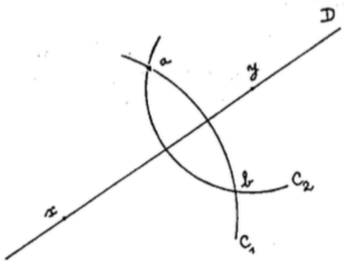


Fig. 3.14

On choisit un point x de D. Comme x est à égale distance de a et de b, il est le centre d'un cercle C_1 passant par a et par le point cherché b. On fait de même pour un autre point y de D. Le point b est l'intersection des deux cercles.

Solution du Problème 3.9

Tous les points de l'arc de cercle donné sont à égale distance du centre cherché. Cette construction utilisera donc la propriété 2). On choisit deux points a et b appartenant au cercle, le centre 0 du cercle appartient à la médiatrice M de $[ab]$.

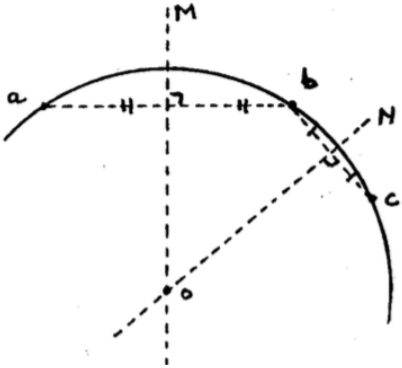


Fig. 3.15

On fait de même pour deux autres points du cercle. Ici, on a choisi b et c. On trace N, médiatrice de $[bc]$. Le centre du cercle est le point 0, intersection des deux médiatrices.

Solution du Problème 3.10

Le segment $[ab]$ donné (Fig. 3.16) est la diagonale d'une foule de losanges. Les deux sommets inconnus x et y d'un de ces losanges se trouvent en quatre coups de compas. La droite xy est la médiatrice de $[ab]$.

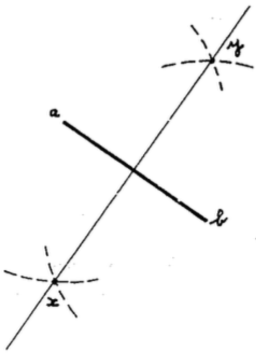


Fig. 3.16

3.11. Problème : La médiatrice de la corde $[ab]$ du cercle C passe par le centre 0 de ce cercle. Est-ce vrai pour n'importe quelle corde ? Dans n'importe quel cercle ?

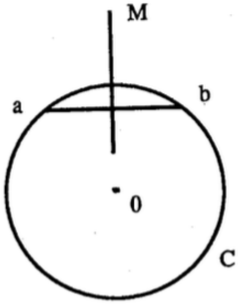


Fig.3.17

3.12. Problème : Les trois médiatrices de ce triangle sont concourantes. Est-ce vrai pour n'importe quel triangle ?

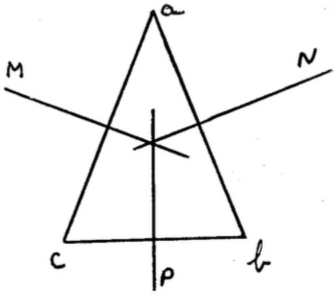


Fig. 3.18

3.13. Problème : Les quatres médiatrices de ce quadrilatère sont concourantes. Est-ce vrai pour n'importe quel quadrilatère ?

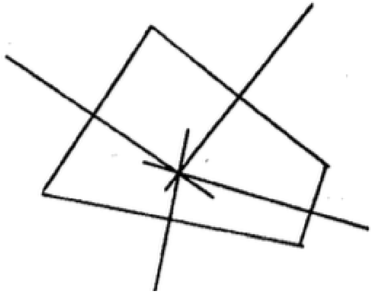


Fig. 3.19

3.14. Problème : Tracer le cercle circonscrit (c'est-à-dire passant par tous les sommets) à chacune des figures suivantes.

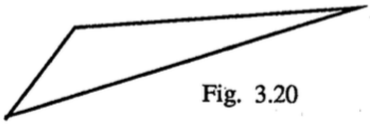


Fig. 3.20

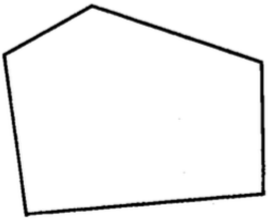


Fig. 3.21

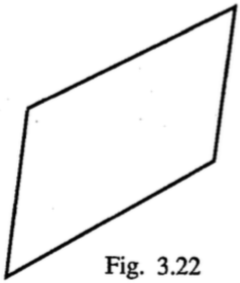


Fig. 3.22

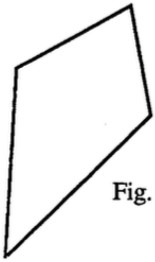


Fig. 3.23

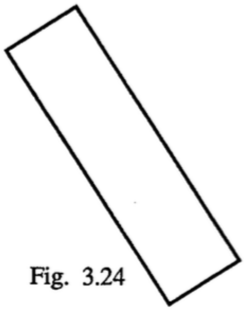


Fig. 3.24

Solution du Problème 3.11

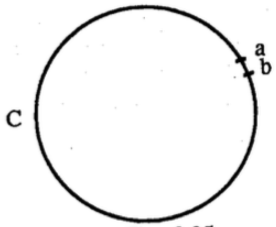


Fig. 3.25

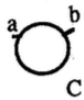


Fig. 3.26

Les deux figures ci-dessus nous feraient presque douter. Nous arriverons cependant à une conviction en utilisant les énoncés qui concernent le cercle et la médiatrice.

Les points a et b appartiennent au cercle C. Le centre 0 de ce cercle est à égale distance de a et de b, donc 0 appartient à la médiatrice de $[ab]$. Nous avons utilisé la propriété 2) p.62. L'énoncé suivant est donc vrai : dans un cercle, la médiatrice d'une corde passe par le centre de ce cercle.

Solution du Problème 3.12

Lorsqu'on dessine les trois médiatrices d'un triangle, il arrive souvent qu'on ne les voie pas se couper exactement en un même point. Il est a fortiori difficile, pour un triangle comme celui de la Fig. 3.27, de vérifier expérimentalement la propriété. La conviction que les médiatrices sont concourantes nous viendra en raisonnant.

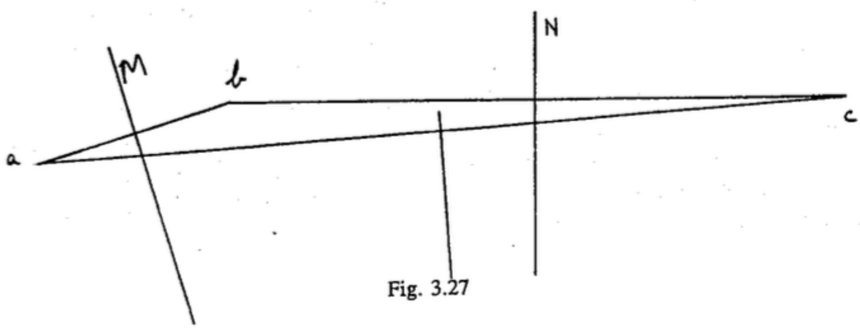


Fig. 3.27

Soit M, la médiatrice de $[ab]$ et N, la médiatrice de $[bc]$. Les droites M et N ne sont pas parallèles, sinon ab et bc le seraient. Les droites M et N se rencontrent donc en un point que nous appellerons i. La propriété 1) p.62 de la médiatrice nous permet d'affirmer que $\overline{ia} = \overline{ib}$ et que $\overline{ib} = \overline{ic}$, donc que $\overline{ia} = \overline{ic}$. Le point i est ainsi à égale distance de a et de c. Il appartient donc à la médiatrice de $[ac]$ (grâce à la propriété 2),p.62).

Il est donc vrai que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Solution du Problème 3.13

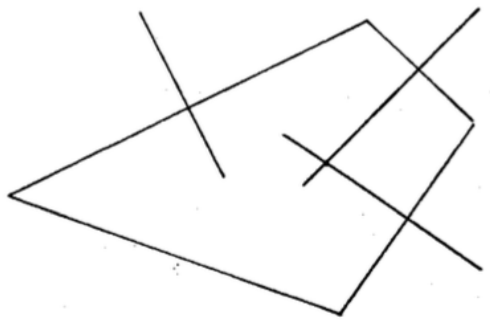


Fig. 3.28

La fig. 3.28 montre un quadrilatère dont les médiatrices ne sont pas concourantes. L'énoncé "les médiatrices d'un quadrilatère sont concourantes" est donc faux.

Solution du Problème 3.14

La Fig. 3.20 est un triangle, donc ses médiatrices sont concourantes et leur point de concours est à égale distance des sommets du triangle. Ce point est donc le centre d'un cercle circonscrit au triangle. Dans la Fig. 3.21, les médiatrices sont aussi concourantes et le pentagone est inscriptible dans un cercle. Les figures 3.22 et 3.23 ne sont pas inscriptibles dans un cercle, il y a plusieurs façons de s'en convaincre et pas seulement en utilisant les médiatrices. Le rectangle de la Fig. 3.24 est inscriptible et c'est le cas pour tous les rectangles. En effet, les médiatrices de tout rectangle sont concourantes. Est-ce le cas de tous les pentagones ?

Bibliographie

[1] D. Van Hiele, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.*, Thèse de doctorat, Utrecht, 1957.

[2] N. Rouche, *Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?* Actes du Colloque inter-IREM d'Histoire et Epistémologie des Mathématiques, Besançon, mai 1989 [à paraître].

Adresse de l'Auteur
F. Van Dieren
117, avenue de Burbure
1950 Kraainem

Olympiades

C. Festraets,

Voici les solutions des trois premiers problèmes proposés à la 30e Olympiade Mathématique Internationale.

Les énoncés étaient présentés respectivement par les Philippines, l'Australie et les Pays-Bas.

1. *Démontrer que l'on peut décomposer l'ensemble* $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ *en* 117 *sous-ensembles deux à deux disjoints* $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ *tels que :*

(i) chaque A_i *contient* 17 *éléments,*

(ii) la somme des éléments de chaque A_i *est la même pour tout* $i = 1, 2, \ldots, 117$.

Démonstration

$$\{1, 2, \ldots, 1989\} = X \cup Y \text{ avec } \begin{array}{l} X = \{1, 2, \ldots, 3 \times 117 = 351\} \\ Y = \{352, 353, \ldots, 1989\}. \end{array}$$

a) Répartissons les nombres appartenant aux couples ci-dessous

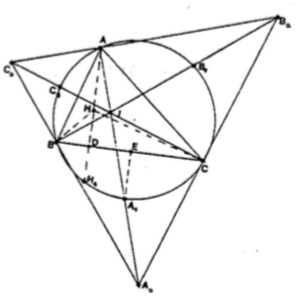
$$\begin{gathered} (352, 1989) \\ (353, 1988) \\ \vdots \\ (1170, 1171) \end{gathered}$$

de manière arbitraire dans 117 ensembles $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{117}$ en sorte que chaque Y_i comprenne les nombres de 7 de ces couples.
La somme des éléments de chaque Y_i est constante (elle vaut $7 \times (352 + 1989) = 16387$).

b) Répartissons les éléments de X en 117 ensembles $X_1, X_2, \ldots, X_{117}$ comprenant chacun trois éléments et tels que la somme des éléments de chaque X_i soit constante ($\frac{351.352}{2.117} = 528$).
$X_1 = \{1, 176, 351\}$, $X_2 = \{2, 177, 349\}$, $X_3 = \{3, 178, 347\}, \ldots,$ $X_{59} = \{59, 234, 235\}, X_{60} = \{60, 118, 350\}, X_{61} = \{61, 119, 348\}, \ldots, X_{117} = \{117, 175, 236\}$
En prenant $A_i = X_i \cup Y_i$, les conditions de l'énoncé sont satisfaites.

2. *Soit* ABC *un triangle dont tous les angles sont aigus. Les bissectrices intérieures des angles* A, B, C *recoupent le cercle circonscrit au triangle* ABC *respectivement en* A_1, B_1, C_1.

On appelle A_0 le point d'intersection de la bissectrice intérieure AA_1 avec les bissectrices extérieures des angles B et C. Les points B_0 et C_0 sont définis de manière analogue.
Prouver que :
(i) l'aire du triangle $A_0B_0C_0$ est le double de l'aire de l'hexagone $AC_1BA_1CB_1$,
(ii) l'aire du triangle $A_0B_0C_0$ est supérieure ou égale à quatre fois l'aire du triangle ABC.



Démonstration

$$
\begin{aligned}
(i)\widehat{IBA_1} &= \widehat{B_1BA_1} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{B_1C} + \overset{\frown}{CA_1}) \\
&= \frac{B}{2} + \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{BIA_1} &= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BA_1} + \overset{\frown}{AB_1}) \\
&= \frac{A}{2} + \frac{B}{2}
\end{aligned}
$$

le triangle BA_1I est donc isocèle et $\mid BA_1 \mid = \mid IA_1 \mid$ (1)

$$
\begin{aligned}
\widehat{A_1BA_0} &= 90^\circ - \widehat{A_1BI} \\
&= 90^\circ - \frac{B}{2} - \frac{A}{2} \\
\widehat{A_1A_0B} &= 90^\circ - \widehat{BIA_0} \\
&= 90^\circ - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}
\end{aligned}
$$

le triangle BA_1A_0 est aussi isocèle et $\mid BA_1 \mid = \mid A_0A_1 \mid$ (2)

De (1) et (2), $\mid IA_1 \mid = \mid A_0A_1 \mid$, A_1 est le milieu de $[IA_0]$

$$
\begin{array}{lllll}
\text{d'où} & \text{aire } A_0BI & = & 2\,.\text{ aire } & A_1BI \\
\text{et} & \text{aire } A_0CI & = & 2.\text{ aire } & A_1CI \\
\text{de même} & \text{aire } B_0AI & = & 2.\text{ aire } & B_1CI \\
 & \text{aire } B_0CI & = & 2.\text{ aire } & B_1CI \\
 & \text{aire } C_0AI & = & 2.\text{ aire } & C_1AI \\
 & \text{aire } C_0BI & = & 2.\text{ aire } & C_1BI
\end{array}
$$

et en additionnant, on obtient

$$\text{aire } A_0B_0C_0 = 2 \cdot \text{aire } AC_1BA_1CB_1.$$

(ii) Soient H l'orthocentre du triangle ABC et H_1 le point d'intersection de AH avec le cercle circonscrit.

$$\begin{aligned}
\widehat{BHC} &= 180^\circ - (\widehat{HBC} + \widehat{HCB}) \\
&= 180^\circ - (90^\circ - C + 90^\circ - B) \\
&= B + C \\
\widehat{BH_1C} &= \frac{1}{2}\,(\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{AC}) = C + B
\end{aligned}$$

Les triangles BHC et BH_1C sont donc symétriques par rapport à BC et on a : aire BHC = aire BH_1C.

Or aire $BH_1C \leqslant$ aire BA_1C

car A_1 est le milieu de $\overset{\frown}{BA_1C}$ et dès lors $\mid DH_1 \mid \leqslant \mid EA_1 \mid$

D'où aire $BHC \leqslant$ aire BA_1C

2 aire $BHC \leqslant$ aire BA_1C + aire BHC = aire quadr. HBA_1C

De même

2 aire $CHA \leqslant$ aire quadr. HAB_1C

2 aire $AHB \leqslant$ aire quadr. HBC_1A

Et en additionnant, il vient

$$2 \text{ aire } ABC \leqslant \text{aire hex.} AC_1BA_1CB_1 = \frac{1}{2} \text{ aire } A_0B_0C_0.$$

3. *On considère deux entiers strictement positifs k et n et un ensemble S de n points du plan tels que*

(i) trois points quelconques de S ne sont pas alignés,

(ii) pour tout point P de S, il existe au moins k points distincts dans S situés à une même distance de P.

Démontrer que : $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Démonstration par l'absurde.

Supposons $k \geqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$

Soit P un point de S ; les k points de S situés à la même distance de P déterminent C_k^2 segments dont les médiatrices passent par P

$$\begin{aligned} C_k^2 &= \frac{k(k-1)}{2} \\ &\geqslant \frac{(\frac{1}{2}+\sqrt{2n})(\frac{1}{2}+\sqrt{2n}-1)}{2} \quad \text{en vertu de l'hypothèse} \\ &\geqslant \frac{2n-\frac{1}{4}}{2} > \frac{2n-2}{2} = n-1 \end{aligned}$$

Chacune de ces médiatrices passe au plus par deux points de S (car trois points de S ne sont pas alignés), le nombre total des médiatrices passant par les n points de S est donc au moins

$$\frac{1}{2}n.C_k^2 > \frac{1}{2}n.(n-1) = C_n^2$$

Ce qui est impossible, car C_n^2 est le nombre de médiatrices des segments formées par les n points pris 2 à 2.

Calculer

F. Michel,

La HP48SX. Premières impressions

Le 16 février, Hewlett-Packard nous a présenté sa nouvelle machine scientifique : la HP48SX. Je la présente très sommairement ci-dessous en espérant communiquer une analyse plus détaillée quand j'aurai pu me familiariser avec ce nouvel outil.

La HP48SX est une synthèse des HP28 et HP41 : elle offre la puissance de calcul de la première et les possibilités de communications avec d'autres systèmes de la seconde, tout en améliorant ces deux aspects.

La machine a une taille et une allure proche de la HP41 munie du lecteur de fiches magnétiques : dans la partie supérieure, un écran graphique 64×131 pixels ou 8 lignes de 22 caractères et un clavier de 50 touches ; à l'arrière la connexion pour RS232, un infra-rouge bidirectionnel et deux entrées pour des cartes magnétiques ROM ou RAM de la taille d'une carte de crédit.

La mémoire est de 256K ROM et 32K RAM ; chaque carte apporte 32 ou 128K de RAM supplémentaire, ou bien 32 ou 128K de logiciel en ROM. La machine dispose donc d'un maximum de $256 + 32 + 2 \times 158 = 544$K contre $128 + 32 = 160$K pour la HP28S.

HP fournit un programme pour ordinateur IBM-compatible ou Macintosh pour transférer des fichiers, éditer des programmes en RPL ou imprimer des graphiques. Les fichiers textes sont en ASCII et les fichiers graphiques en TIF et sont donc utilisables dans la plupart des logiciels classiques.

Les HP48SX peuvent communiquer entre elles par infra-rouge et recevoir des données des HP28. L'impression peut se faire par la sortie infra-rouge vers la mini-imprimante ou par la RS232 vers des imprimantes classiques.

Les prix annoncés (hors TVA) sont de 16000 FB pour la machine, 4750 FB pour l'interface avec l'ordinateur, 4700 FB pour une carte de logiciels scientifiques, 3700 FB pour 32K RAM et 12000 FB pour 128K RAM.

Je ne dispose pas encore de la machine qui sera mise en vente à la fin mars (manuel en français en juillet) et ne peux pas juger des nouvelles possibilités du logiciel ; à première vue, on peut signaler de nouveaux types de graphiques (polaires, histogrammes, etc...), une écriture à deux dimensions des expressions mathématiques très proche de l'écriture habituelle, de plus grandes possibilités en statistique (analyse multivariée, tables, etc...), vecteurs à trois dimensions, etc ...

Notons aussi une nette amélioration de la présentation graphique : on peut voir le graphique d'une fonction, travailler sur la courbe à l'aide du curseur et demander des racines ou des pentes sur le même écran. Un dispositif de projection par rétroprojecteur est fourni gratuitement pour toute commande de dix machines.

Un émulateur de la HP41 est disponible et on peut imaginer qu'on disposera un jour d'un émulateur RPL pour PC.

Le langage de programmation RPL a fait ses preuves avec la HP28S et va pouvoir maintenant s'imposer à un niveau plus élevé. Souhaitons qu'il reçoive un accueil favorable des professeurs comme il l'a reçu des informaticiens. Les expériences que j'ai menées dans ma classe ont montré que les élèves pouvaient le manier avec une grande dexterité.

La HP48SX ne va pas remplacer la HP28S qui restera un outil merveilleux pour un premier contact avec l'algorithmique ; HP va d'ailleurs faire une importante promotion dans les écoles pour ce produit. La HP48SX me semble par contre une bonne approche de l'informatique pour les futurs scientifiques et pour ceux qui disposent d'un ordinateur.

La rubrique "Calculer" reste ouverte à tous les lecteurs et des contributions relatives aux machines venant des horizons les plus variés sont souhaitées. Merci d'avance pour votre collaboration.

La correspondance concernant cette rubrique doit être envoyée à l'adresse suivante :

Francis MICHEL
av. des Campanules, 28
1170 Bruxelles

Dans nos classes

Y. Noël,

Les énoncés suivants sont tirés de MATHEMATICS TEACHER., vol. 82, n°9 - décembre 1989.

1. Pour revoir un peu de vocabulaire et faire réfléchir nos élèves de première année :

   Trouver deux nombres entiers consécutifs dont le produit a "8" comme chiffre des unités.

   Et si tu peux choisir trois nombres consécutifs ? ... quatre nombres consécutifs ?

2. Les élèves n'imaginent généralement pas à quelle vitesse croissent les nombres lorsqu'on procède par calcul de puissances. Voici une variante de l'échiquier et des grains de riz, des piquets et des intervalles :

   3^{3^3} désigne $3^{(3^3)}$, c'est-à-dire 3^{27} ou encore 7 625 597 484 987.

   Pour écrire ce nombre sur un papier quadrillé habituel (0,5 cm $\times$ 0,5 cm), en groupant les chiffres en blocs de trois et en séparant les blocs successifs par un carré, nous utilisons une bande de 17 carrés, ou encore 8,5 cm de longueur.

   Quelle est la longueur de bande nécessaire pour écrire – dans les mêmes conditions – le nombre $10^{10^{10}}$?

3. Une autre énigme "sur des puissances" :

   $64 = 8^2 = 4^3 = 2^6$. Ceci montre que 64 est à la fois un carré, un cube et une sixième puissance.

   $1 = 1^2 = 1^3 = 1^4 = \ldots$. Ainsi, 1 est à la fois carré, ...

   Trouver un nombre différent de 1 qui est à la fois carré, cube, troisième, quatrième, ... et dixième puissance ?

   Le nombre proposé est-il le plus petit possible ? Peux-tu en proposer d'autres ?

4. Et encore un peu d'arithmétique élémentaire :

   Quel est le plus petit nombre naturel qui, divisé successivement par 2,3,4,5,...,10 donne comme restes 1,2,3,4,...9 ?

   Quel est l'ensemble des nombres qui satisfont à cette condition ?

5. Comme dans l'exercice précédent, apprendre à analyser des données et écrire une formule qui pourra être traitée :

$$\begin{aligned} 2+2 &= 2\times 2 \\ 3+1,5 &= 3\times 1,5 \\ 5+1,25 &= 5\times 1,25 \\ 11+1,1 &= 11\times 1,1 \end{aligned}$$

   Trouver une méthode pour allonger à l'infini cette liste de deux nombres dont la somme égale le produit.

6. Angles droits, angles inscrits dans un cercle et théorème de Pythagore :

   C est un cercle de 3 cm de rayon et $abcd$ est un carré inscrit à ce cercle.

   Quel que soit le point p de C, que vaut la somme des carrés des distances de p aux quatre sommets du carré ?

7. Longueur et aire d'un cercle ; un peu de calcul littéral dans une résolution partielle d'un système de deux équations à deux inconnues :

   p est un “petit cercle” de rayon r et G un “grand cercle” de rayon R. Les longueurs de p et G diffèrent de r ; leurs aires diffèrent de $2+\frac{1}{2\pi}$.

   Calculer l'aire du petit cercle.

SOLUTIONS

1.

$$\begin{array}{r} \dots a \\ \dots b \\ \hline 8 \end{array}$$

Le chiffre 8 du produit ne dépend que des chiffres a et b qui doivent apparaître dans les deux nombres consécutifs. Il faut donc que a et b soient des nombres consécutifs dont le produit vaut 8. Comme les seules décompositions de 8 sont 8.1 et 4.2, le problème n'a aucune solution.

Il n'existe pas plus de solution si on dispose de plus de nombres consécutifs.

2.

$$10^{10^{10}} = 10^{10000000000} = \underbrace{100\dots0}_{10000000001 \text{ chiffres}}$$

Nous aurons donc 3 333 333 333 blocs de 3 chiffres et 1 bloc de 2 chiffres dans l'écriture complète.

La bande devra donc mesurer

$$0,5 \text{ cm} \times (10\ 000\ 000\ 001 + 3\ 333\ 333\ 333) = 6\ 666\ 666\ 666{,}5 \text{ cm},$$

c'est-à-dire plus de 66.666 km.

Ainsi la bande fixée en un point du globe terrestre en ferait plus d'une fois et demie le tour !

3. Le nombre le plus petit possible est la puissance de 2 la plus petite possible. Pour que le nombre soit carré, cube, ..., dixième puissance, il faut que l'exposant soit multiple de 10,9,8,...,2. Le plus petit nombre sera donc

$$2^{2\times3\times2\times5\times7\times2\times3} = 2^{2520}$$

L'ensemble des nombres solutions du problème est

$$\{x^{2520} \mid x \in \mathbb{N}\}.$$

4. Il existe des entiers $p_1, p_2, \dots, p_{10}$ pour lesquels

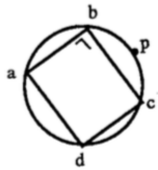
$$x = 2p_1 + 1,\ x = 3p_2 + 2\dots,\ \ x = 10p_{10} + 9$$

Donc $x+1$ est multiple de 2,3,4,...,10, et la plus petite valeur possible de $x+1$ est, comme dans l'exercice précédent, 2520. Ainsi, la plus petite valeur possible de x est 2519, et l'ensemble des solutions est

$$2519 + 2520\,\mathbb{N} = \{2519, 5039, 7559, \ldots\}$$

5. La condition $x + y = x.y$ nous donne une solution immédiate (0,0) et bien d'autres car la condition $y = \frac{x}{1-x}$ permet de trouver une infinité de couples d'origine différente de 1, parmi lesquels (10,10/2) par exemple. Enfin, les élèves pourront encore justifier qu'il n'existe aucun couple d'origine 1.

6.



$$\left.\begin{array}{l}|pa|^2 + |pc|^2 = 36cm^2 \\ |pb|^2 + |pd|^2 = 36cm^2\end{array}\right\} \Rightarrow \text{la somme}$$
cherchée vaut 72 cm^2.

7.

$$\left.\begin{array}{l}2\pi R - 2\pi r = r \\ \pi R^2 - \pi r^2 = 2 + \frac{1}{2\pi}\end{array}\right\} \Rightarrow \pi(\frac{r^2(1+2\pi)^2}{4\pi^2} - r^2) = 2 + \frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow r^2(\frac{1+4\pi}{4\pi}) = \frac{4\pi+1}{2\pi} \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}.$$

Le coin de MATH-JEUNES

C. Festraets,

Le numéro spécial de Math-Jeunes, distribué à tous les participants de l'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge, semble avoir été fort apprécié. Depuis lors, les nouveaux abonnés sont nombreux et certains élèves souhaitent même recevoir les numéros des années précédentes.

Si vous souhaitez collaborer de manière efficace à la rédaction de Math-Jeunes, je vous rappelle les adresses auxquelles vous pouvez envoyer vos articles.

Rédacteur en chef :

G. NOEL, 14 bis, rue des Fontaines, 7460 Casteau (065-723269)

Articles

C. VILLERS, 29, rue Piérard, 7020 Hyon (065-338825) (secondaire inférieur)

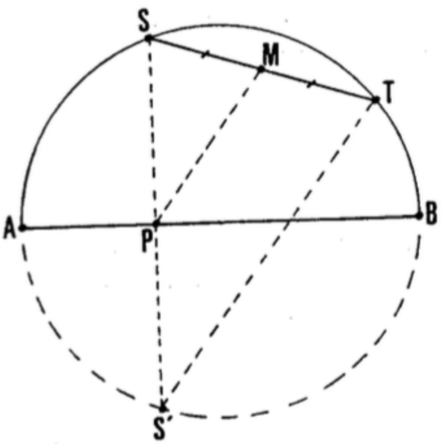
M. SCHNEIDER, 42, Dennenboslaan, 1900 Overijse (02-6531073) (secondaire supérieur)

S. TROMPLER, 42, drève du Sénéchal, 1180 Bruxelles (02-3740764) (articles généraux).

Voici les énoncés et solutions des quatre problèmes proposés dans le numéro 47 de Math-Jeunes.

1. Une corde $[ST]$ de longueur constante glisse autour d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. M est le milieu de $[ST]$ et P le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur AB. Prouver que l'angle $\widehat{SPM}$ est constant quelle que soit la position de ST

Solution



Dessinons le second demi-cercle de diamètre AB et désignons par S' le symétrique de S par rapport à AB (S' appartient donc au second demi-cercle).

$$|SP| = |PS'|,$$

$|SM| = |MT|$ (car M est le milieu de $[ST]$ par hypothèse). Donc, dans le triangle $SS'T$, on a $PM//S'T$.

Et $\widehat{SPM} = \widehat{SS'T}$ (angles correspondants déterminés par la sécante SS' sur les deux droites parallèles PM et $S'T$). Or $\widehat{SS'T}$ est un angle constant, quelle que soit la position de la corde ST, puisqu'il intercepte un arc de longueur constante. D'où $\widehat{SPM}$ est aussi constant.

2. Quel est le reste de la division du polynôme $x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ par $x^3 - x$?

Solution.

$$\begin{aligned} x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81} &= x(1 + x^8 + x^{24} + x^{48} + x^{80}) \\ &= x[1 + (x^8 - 1) + (x^{24} - 1) + (x^{48} - 1) + (x^{80} - 1) + 4] \\ &= x[(x^8 - 1) + (x^{24} - 1) + (x^{48} - 1) + (x^{80} - 1)] + 5x \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^8 - 1 \\ x^{24} - 1 \\ x^{48} - 1 \\ x^{80} - 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{sont divisibles par } x^2 - 1, \text{ d'où} \\ x[(x^8 - 1) + (x^{24} - 1) + (x^{48} - 1) + (x^{80} - 1)] \\ \text{est divisible par } x(x^2 - 1) = x^3 - x. \end{array}$$

Le reste cherché est donc $5x$.

3. On considère un tableau carré comprenant 20 *lignes et* 20 *colonnes formées des points soit rouges, soit verts. Deux points adjacents (et situés sur la même ligne ou sur la même colonne) ayant la même couleur sont reliés par un segment de cette même couleur. Deux points adjacents de couleurs différentes sont reliés par un segment noir. Il y a en tout* 219 *points rouges* *dont* 39 *sont sur les bords, mais aucun dans les coins et il y a* 237 *segments noirs. Quel est le nombre de segments verts ?*

Solution.

Dans une ligne, il y a 19 segments, donc en tout $19 \times 20 = 380$ segments "horizontaux" ; et de même, il y a 380 segments "verticaux". Donc au total, 760 segments. Parmi ceux-ci, on sait qu'il y a 237 segments noirs, ce qui nous laisse 523 segments rouges ou verts ; nous écrirons

$$r + v = 523$$

Tout point du bord est extrémité de 3 segments,

fig.2

out point intérieur est extrémité de 4 segments

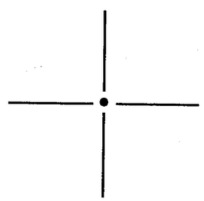


fig.3

Aux points rouges, correspondent

$$39 \times 3 + 180 \times 4 = 837$$

segments (les uns rouges, les autres noirs).

Tout segment rouge a deux extrémités rouges,

tout segment noir a une extrémité rouge,

tout segment vert a zéro extrémité rouge.

Aux segments correspondent ainsi

$$r \times 2 + 237 \times 1 + v \times 0 = 2r + 237 \text{ points rouges}$$

D'où l'égalité

$$\begin{aligned} 837 &= 2r + 237 \\ 600 &= 2r \\ r &= 300 \end{aligned}$$

Et de $r + v = 523$, on déduit que le nombre de segments verts est 223.

4. Pour tout polyèdre, il existe deux faces délimitées par le même nombre d'arêtes.

Solution.

Supposons que toutes les faces du polyèdre soient délimitées par un nombre d'arêtes différent et soit n le plus grand de ces nombres.

Chaque face peut être rangée dans une boîte numérotée

$$3, 4, 5, \ldots, n-1, n$$

de façon que la face bordée par k arêtes soit dans la boîte portant le numéro k (remarquons qu'aucune face n'est bordée par moins de 3 arêtes !).

Il y a $n - 2$ boîtes.

Or la face bordée par n arêtes est contiguë à n faces, donc le polyèdre comporte au moins $n + 1$ faces. Et si ces $n + 1$ faces ont été placées dans $n - 2$ boîtes, il y a forcément (au moins) une boîte qui contient (au moins) deux faces qui, dès lors, sont bordées par le même nombre d'arêtes.

Géométrie

C. Festraets, *Athénée Royal de Woluwe-Saint-Pierre*

A la suite du premier article de cette série, paru dans Mathématique et Pédagogie n°74, j'ai reçu une lettre intéressante de Claude VILLERS. Je vous en livre le contenu.

1. Ceci concerne le dernier problème proposé (page 53) dont je rappelle l'énoncé.

Soit ABC un triangle, D le milieu de $[AB]$ et P un point intérieur au triangle et tel que $\widehat{PBC} = \widehat{PAC}$. De P, on abaisse la perpendiculaire PL sur BC (L appartient à BC) et la perpendiculaire PM sur AC (M appartient à AC). Démontrer que $|DL| = |DM|$.

Il s'agit (sauf erreur de ma part) de l'énoncé d'un problème proposé aux participants de l'Olympiade Internationale de 1983 en Australie.

Ce qui me met mal à l'aise dans ce genre d'énoncé, comme, en général, dans tous ceux où est utilisée la notion d'angle, c'est l'ambiguïté des notations $\widehat{PBC}$ et $\widehat{PAC}$. S'agit-il d'angles orientés ou cette précision est-elle inutile par suite de la présence d'une figure de référence ? Pour moi, l'ambiguïté serait levée si on précisait qu'il s'agit d'angles orientés et en écrivant "$\widehat{PBC}$ et $\widehat{PAC}$ sont *opposés*" !

De plus, le problème proposé est un cas particulier de l'énoncé plus général que voici.

$ABCC'$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle γ. G et F sont deux points de l'arc $\overset{\frown}{CC'}$ tels que $\left|\overset{\frown}{CF}\right| = \left|\overset{\frown}{C'G}\right|$. De P appartenant à $AF \cap BG$, on trace PM perpendiculaire à AC' (M appartient à AC') et PL perpendiculaire à BC (L appartient à BC). D est le milieu de $[AB]$. Démontrer que $|DL| = |DM|$.

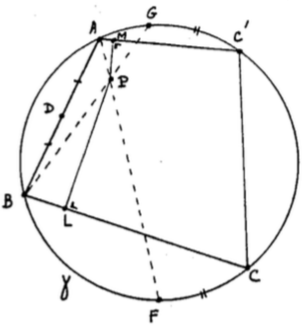


fig. 1

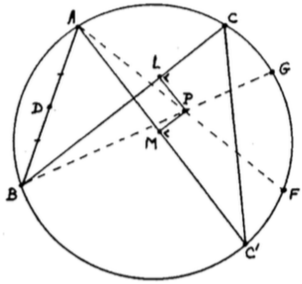


fig. 2

Et bien d'autres cas de figures !

Un autre cas particulier fournit le problème que voici.

Un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscrit dans un cercle γ. P est le point commun aux diagonales de ce quadrilatère. On trace PL perpendiculaire à BC (L appartient à BC) et PM perpendiculaire à AD (M appartient à AD). Q et N sont les milieux de $[AB]$ et de $[CD]$. Démontrer que QN est la médiatrice de $[LM]$.

2. Puisque l'article en question souhaite proposer des problèmes simples où agissent les transformations du plan, je signale ci-dessous une très jolie justification de la relation de Pythagore où on utilise les notions de translation, de rotation et leurs propriétés élémentaires, du calcul algébrique (produit remarquable) et des notions d'aires, ce qui peut intéresser mes collègues de 2ème et 3ème années.

Cette "démonstration" serait due, paraît-il, à James Abram Garfield (1831-1881) qui devint Président des Etats-Unis en 1881 et périt assassiné.

Soit BAC un triangle rectangle en A.

Soit $|AB| = c, |AC| = b, |BC| = a$.

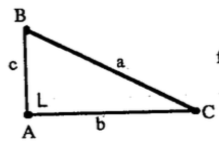


fig.3

On construit d'abord $A'B'C' = t(ABC)$, t étant la translation définie par (B, C).

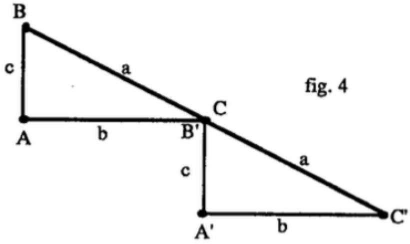


fig. 4

On construit ensuite $A''B''C'' = r(A'B'C')$, r étant la rotation de centre $B' = C$ et d'angle $+90°$; on obtient

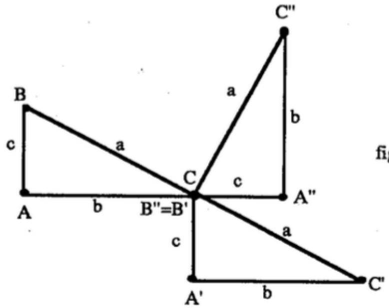


fig. 5

On a donc $BC \perp CC''$ (rotation de $+9O°$).

On observe alors le quadrilatère $BAA''C''$ dont on évalue l'aire de deux façons

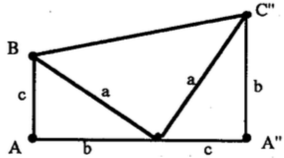


fig. 6

$S_{BAA''C''} = \frac{1}{2}(b + c).(b + c)$ (trapèze)

$S_{BAA''C''} = \frac{1}{2}\ b.c + \frac{1}{2}\ a.a + \frac{1}{2}\ b.c$ (trois triangles)

Et on a : $\quad (b+c)^2 = a^2 + 2bc$

ou $\quad b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$

et enfin $b^2 + c^2 = a^2$.

Claude Villers.

* * * *

Voici à présent deux nouveaux problèmes. Le premier m'a été proposé par Gérald TROESSART ; il aurait été proposé à un examen d'entrée aux facultés polytechniques. J'avoue que l'énoncé m'a égaré pendant un certain temps ; j'ai pensé hyperbole, tangente, normale, quaternes harmoniques de points ..., avant que la solution ne m'apparaisse soudain, toute simple.

Dans un triangle ABC, le côté $[BC]$ est fixe et le point A est tel que la différence des côtés $[AB]$ et $[AC]$ est constante. Déterminer le lieu de la projection orthogonale D du sommet C sur la bissectrice intérieure de l'angle A.

Sur la demi-droite $[AB$, construisons le point E tel que $|AE| = |AC|$.

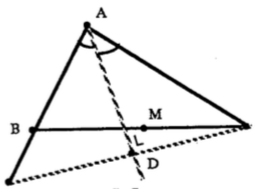


fig.7

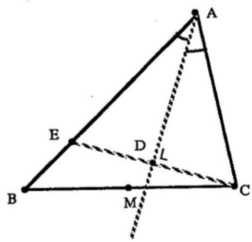


fig. 8

$$\begin{aligned} |AC| - |AB| &= |AE| - |AB| \\ &= |BE| \\ &= k \text{ par hyp.} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |AB| - |AC| &= |AB| - |AE| \\ &= |BE| \\ &= k \end{aligned}$$

B est fixe, donc quand A varie, le lieu de E est le cercle de centre B et de rayon k.

L'homothétie h de centre C est de rapport $\frac{1}{2}$ applique E sur D (car la bissectrice intérieure de l'angle A est médiatrice de $[EC]$) et B sur M

milieu de $[BC]$. Donc, le lieu de D est le cercle homothétique du précédent, c'est-à-dire le cercle de centre M et de rayon $\frac{k}{2}$.

Remarque : si le triangle ABC est isocèle avec $|AB| - |AC| = 0$, le lieu se réduit au point M.

On considère le triangle ABC, un carré de centre 0_1 et de côté $[AB]$, un carré de centre 0_2 et de côté $[AC]$ et 0_3 milieu de $[BC]$. Démontrer que

1) le triangle $0_1 0_3 0_2$ est rectangle isocèle ;

2) les trois cercles de centre 0_1 et passant par A, B, de centre 0_2 et passant par A, B, de centre 0_3 et passant par B, C, se coupent en un même point.

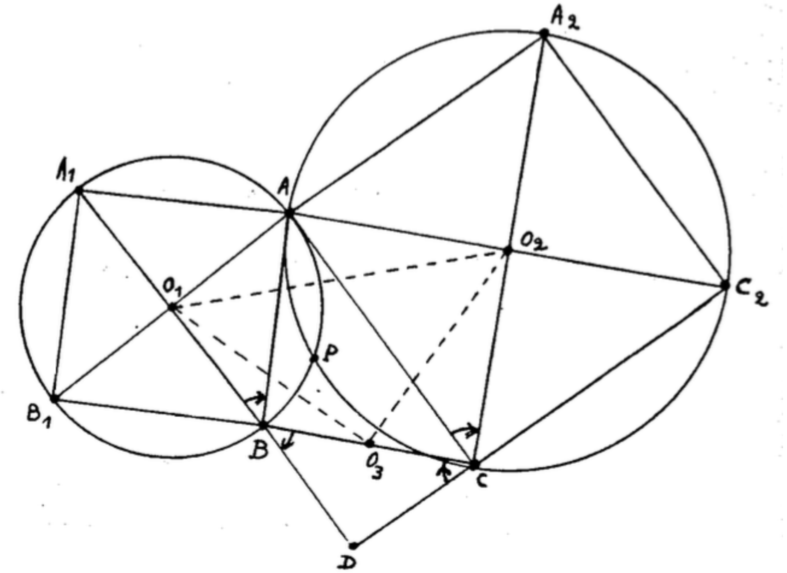


fig. 9

1) La rotation r_1 de centre B et d'angle $+45°$, composée avec l'homothétie h_1 de centre B et de rapport $\sqrt{2}$ (similitude σ_1) applique 0_1 sur A et 0_3 sur D.

La rotation r_2 de centre C et d'angle $+45°$, composée avec l'homothétie h_2 de centre C et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (similitude σ_2) applique A sur 0_2 et D sur 0_3.

Remarquons que la similitude $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est une rotation d'angle 90° ($h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport$\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$) dont le point fixe est 0_3.

Et comme $(\sigma_2 \circ \sigma_1)(0_1) = 0_2$, on a bien $|0_3 0_1| = |0_3 0_2|$ et $\widehat{0_1 0_3 0_2} = +90°$; le triangle $0_1 0_3 0_2$ est donc rectangle isocèle.

2) Les cercles circonscrits aux carrés construits sur $[AB]$ et sur $[AC]$ se coupent en A et en P.

Montrons que le cercle de diamètre $[BC]$ passe aussi par P.

La symétrie orthogonale s_1 d'axe $0_1 0_2$ applique A sur P ; la symétrie orthogonale s_2 d'axe $0_1 0_3$ applique P sur un certain point P'.

La composée $s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre 0_1 et d'angle $-90°$ (double de $\widehat{0_2 0_1 0_3}$ et $\widehat{0_2 0_1 0_3} = -45°$ car le triangle $0_1 0_3 0_2$ est rectangle isocèle) ; c'est donc la rotation de centre 0_1 qui applique A sur B.

On a ainsi $P' = B$.

$0_1 0_3$ étant axe de symétrie de $[PB]$, P est bien sur le cercle de centre 0_3 et passant par B.

Remarque : la démonstration ci-dessus ne dépend pas du fait que les carrés sont construits à l'extérieur du triangle ABC.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

$\boxed{64 = 65\,?}$ M. et P. n° 74, page 72.

Je me rappelle que le problème traité était celui du découpage d'un carré de côté c en quatre morceaux que l'on redispose de manière à obtenir un rectangle $a \times b$ et où l'on constate (constatation erronée, bien sûr) que $a.b = c^2 + 1$.

On était amené à traiter l'équation $x^2 - xy + y^2 = 1$ dont les solutions (x, y) nous fournissaient les dimensions

$$c = x + y \quad , \quad a = x + 2y \quad , \quad b = y$$

des deux figures.

J'avais remarqué, sans pouvoir l'expliquer, que la liste des valeurs de x et de y conduisait à la suite de Fibonacci

x	1	3	8	21	...
y	2	5	13	34	...

M. Jules MIEWIS, de Grivegnée, a fort aimablement pris la peine de m'éclairer à ce sujet. Je vous livre ci-après ce qu'il m'écrit.

En posant $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, l'une des racines de $x^2 - x - 1 = 0$ (le nombre d'or), l'autre racine vaut $(-\Phi)^{-1}$ (puisque le produit est -1), on montre aisément qu'un terme quelconque de la suite de Fibonacci est

$$u_n = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\Phi - (-\Phi)^{-1}} = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

en remarquant que $\Phi - (-\Phi)^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

(On démontre cette valeur de u_n en montrant qu'elle convient pour $n = 0$ et $n = 1$, puisqu'elle vérifie l'équation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$).

Si l'on pose $x = u_n$ et $y = u_{n+1}$, on peut calculer $y^2 - xy - x^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{5}[(\Phi^{n+1} - (-\Phi)^{-n-1})^2 - (\Phi^{n+1} - (-\Phi)^{-n-1})(\Phi^n - (-\Phi)^{-n}) - (\Phi^n \\
& \quad -(-\Phi)^{-n})^2] \\
= & \frac{1}{5}[\Phi^{2n+2} + (-\Phi)^{2n-2} - 2\Phi^{n+1}.(-\Phi)^{-n-1} - \Phi^{2n+1} \\
& \quad +\Phi^{n+1}(-\Phi)^{-n} + (-\Phi)^{-n-1}.\Phi^n - (-\ \Phi)^{-n-1}.(-\Phi)^{-n} - \Phi^{2n} \\
& \quad -(-\Phi)^{-2n} + 2\Phi^n.(-\Phi)^{-n}] \\
= & \frac{1}{5}[\Phi^{2n}(\Phi^2 - \Phi - 1) + (-\Phi)^{-2n-2}(1 - (-\Phi) - (-\Phi)^2) \\
& \quad +\Phi^n.(-\Phi)^{-n-1}(-2\Phi + \Phi.(-\Phi) + 1 + 2(-\Phi))] \\
= & \frac{1}{5}[0 + 0 + \Phi^n.(-\Phi)^{-n-1}(1 - 4\Phi.\Phi^2)] \\
& \qquad\qquad (\text{car } \Phi \text{ est solution de } x^2 - x - 1 = 0) \\
= & \frac{1}{5}\Phi^n.(-\Phi)^{-n-1}(-5\Phi) \\
= & -(\Phi.(-\Phi)^{-1})^{n+1} \begin{cases} = 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ = -1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases} \text{car } \Phi.(-\Phi)^{-1} = -1.
\end{aligned}$$

Il est donc assez logique que ce soit justement des nombres consécutifs de la suite de Fibonacci qui font en sorte que $y^2 - xy + x^2$ prennent la plus petite valeur qui entraîne le paradoxe, à savoir une unité de décalage dans un sens ou dans l'autre.

Pour conclure, un autre point. Si on veut résoudre $y^2 - xy - x^2 = 0$ (avec $x, y > 0$), en divisant par x^2, on retrouve une équation de Fibonacci, soit $(\frac{y}{x})^2 - (\frac{y}{x}) - 1$ et ainsi $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on sait que c'est là la limite de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci. Ce rapport prouve accessoirement que le paradoxe peut être levé (et disparaître si $\frac{y}{x}$ est justement le nombre d'or).

$\boxed{\text{Coloriage et triangles}}$ problème n°90 de M. et P. n°74.

Soit S un ensemble fini de points du plan, les uns coloriés en rouge, les autres en bleu. Trois points de même couleur ne sont jamais alignés. Démontrer qu'il existe un triangle dont les sommets sont de la même couleur et dont au moins un côté ne contient aucun point de l'autre couleur.

Voici la solution proposée par Mme J. VANHAMME de Bruxelles.

Supposons, sans restreindre la généralité qu'il existe au moins trois points rouges dans S. Nous considérons alors toutes les aires des triangles dont les trois sommets sont rouges. Ces aires sont en nombre fini et aucune d'elles n'est nulle, puisque trois points rouges ne sont jamais alignés. Par conséquent, il existe un triangle dont les trois sommets A, B, C sont rouges et dont l'aire est minimale. A l'intérieur de ce triangle, il ne peut pas y avoir d'autre point rouge D, car sinon, l'aire du triangle (à sommets rouges) ABD serait strictement inférieure à celle du triangle ABC, ce qui est contraire à l'hypothèse de minimalité.

Considérons maintenant les côtés du triangle ABC. S'il en existe un qui ne contient pas de point bleu, alors la thèse est vérifiée. Dans le cas où il y a au moins un point bleu sur chacun des côtés du triangle ABC, on peut former un triangle T dont les trois sommets sont bleus et qui est situé entièrement à l'intérieur du triangle ABC. Or comme il n'y a pas de points rouges à l'intérieur du triangle ABC, il ne peut y en avoir sur les côtés de T. D'où le triangle T.

Carré

problème 91 de M. et P. $n°74$.

Déterminer tous les entiers positifs n tels que

$$2^{13} + 2^{10} + 2^n$$

soit le carré d'un entier.

La solution que voici est celle de M. J. GOLDSTEINAS de Bruxelles.

Posons $k^2 = 2^{13} + 2^{10} + 2^n$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned} k^2 &= 2^{10}.(2^3+1) + 2^n \\ &= 2^{10}.3^2 + 2^n \\ &= (2^5.3)^2 + 2^n \\ &= 96^2 + 2^n \\ \text{d'où } 2^n &= k^2 - 96^2 \\ &= (k-96)(k+96) \end{aligned}$$

La décomposition en facteurs, unique dans $\mathbb{N}$, permet d'affirmer qu'il existe t tel que $t \in \mathbb{N}$ et

$$k - 96 = 2^{n-t} \quad (1)$$

$$k + 96 = 2^t \quad (2)$$

En soustrayant (1) de (2), il vient

$$\begin{aligned} 192 &= 2^t - 2^{n-t} \\ 2^6.3 &= 2^{n-t}(2^{2t-n} - 1) \qquad (n-t<t) \end{aligned}$$

L'unicité de la décomposition dans $\mathbb{N}$ entraîne les égalités $\left\{\begin{array}{r} n-t=6 \\ 2t-n=2 \end{array}\right.$.

Ce système admet la solution unique $t = 8,\ n = 14$, et effectivement $\begin{aligned} 2^{10}+2^{13}+2^{14} &= 25600 \\ &= 160^2 \end{aligned}$.

Le problème admet donc une et une seule solution.

J'ai également reçu des solutions correctes de Mme VANHAMME, de Bruxelles, de Mme J. RONDOU, de Leuven et de M. M. LARDINOIS, de Haine-Saint-Pierre.

M. J. GOLDSTEINAS nous propose une généralisation de ce problème.

Considérons l'équation

$$2^x + 2^y + 2^z = k^2 \tag{3}$$

$(x, y, z \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z})$; elle admet au moins une solution : $x = 10, y = 13, z = 14, k = 160$. En admet-elle d'autres ?

Remarquons que l'équation "duale"

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^k$$

admet une infinité de solutions car 2^k n'est pas de la forme $4^t(8l + 7)$ (théorème dû à Legendre, dans "Essai sur la théorie des nombres", 1798) ; en particulier, si k est pair, $2^{k/2}$ peut toujours être exprimé comme somme de quatre carrés en vertu du théorème de Bachet (d'ailleurs, tout naturel possède cette propriété) et il suffit d'appliquer une identité de Lebesgue

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 &= (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 + (2ac+2bd)^2 \\ &+ (2ad-2bc)^2 \end{aligned}$$

Revenons maintenant à l'équation 3 ; on sait que

$$2^{10} + 2^{13} + 2^{14} = 160 = 2^{10}.5^2$$

En divisant les deux membres par 2^{10}, il vient

$$1 + 2^3 + 2^4 = 5^2$$

et en multipliant les deux membres par 4^t, on obtient

$$\begin{aligned} 2^{2t} + 2^{2t+3} + 2^{2t+4} &= 5^2.2^{2t} \\ &= (5.2^t)^2 \end{aligned}$$

ce qui nous donne une famille infinie de solutions lorsque t varie dans $\mathbb{N}$.

Mais avons-nous obtenu toutes les solutions ?

Le problème reste ouvert.

Le problème $n°89$ de M. et P. comportait une erreur de typographie. En voici l'énoncé correct.

89. Et si on jouait avec des équations

Deux personnes A et B jouent au jeu suivant. Dans le système d'équations $\begin{cases} x + a_1 y = b_1 \\ a_2 y + b_2 z = a_3 \\ b_3 x + a_4 z = b_4 \end{cases}$ où les a_i, b_i sont entiers

A et B choisissent à tour de rôle les coefficients de la manière suivante

	A	choisit	a_1
puis	B	choisit	b_1
puis	A	choisit	a_2
...			
puis	B	choisit	b_4

A gagne si le système admet une et une seule solution entière. Sinon, B gagne.

a) A a-t-il une stratégie gagnante ?

b) A peut-il donner à l'avance des valeurs aux coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 telles qu'il gagne quel que soit le choix de B ?

95. Factorielles

Démontrer que 3!!! s'écrit (dans le système décimal) avec plus de 1000 chiffres et déterminer le nombre de zéros qui termine 3!!!.

$\boxed{\text{96. Cercles et cordes}}$

Dans un cercle C de centre 0, on considère deux cordes $[a\ b]$ et $[a'\ b']$ se coupant en p. Soient 0_1 le centre du cercle circonscrit au triangle paa' et 0_2 le centre du cercle circonscrit au triangle pbb'. Démontrer que $p0_1 0 0_2$ est un parallélogramme.

$\boxed{\text{97. Inégalité}}$

A étant l'aire d'un triangle et $2p$ son périmètre, démontrer l'inégalité

$$A \leqslant \sqrt{3}\,\frac{p^2}{9}$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si le triangle est équilatéral.

Revue des revues

G. Noël, C. Villers,

Teaching Statistics vol. 11, n°3, (1989)

Extrait du sommaire :

A.J. BACZKOWSKI, On buying a caravan
D.N. HUNT, Sampling common sense
(*) J. GANI, The many faces of statistics
V.C. HOMBAS, Combinations of independant normal random variables
(**) R. MARCUSON, Chess-board combinatorics
J. GILLETT, Statistics out of doors
N.R. FARNUM and L.W. STANTON, How many regressions ?
A. HAWKINS, Training teachers to teach statistics.

(*) Cet article est le texte d'une conférence de GANI où il essaie d'expliquer à des non-spécialistes ce que font les statisticiens. Trois sujets sont choisis pour illustrer l'exposé : recensements et relevés statistiques utilisés pour les besoins de l'état et de l'économie, prédiction des tremblements de terre, diffusion d'une maladie telle que le SIDA.

(**) L'auteur dénombre des chemins sur un quadrillage pour établir les formules

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n, \ \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n},$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{m}{i} = \binom{m+n}{n}$$

Cette méthode de démonstration n'est pas nouvelle, mais néanmoins peu connue et tellement plus belle que les preuves par récurrence !

Signalons aussi que depuis 1989, *Teaching Statistics* a adopté une nouvelle présentation et comporte des rubriques régulières telles que "Databank", "Computing corner", "Problem Page", "Book Reviews", ... où chacun peut grapiller des idées.

Guy NOEL

Bulletins de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public - France)

n^{0}367 - Février 1989

Au sommaire, nous avons particulièrement relevé

"Former de bons maîtres". Editorial par Annie Bollote-Bonté.
Réflexions pertinentes au sujet des problèmes posés par la formation des instituteurs.

"Compter et mesurer en Fibonacien" par Louis Mordefroid.
Où il apparaît que compter et calculer dans le monde des suites de Fibonacci présente des analogies avec le calcul classique dans le quadrillage euclidien orthonormé.

"Recherche de solutions approchées d'une équation $f(x) = 0$" par G. Macia.

"L'univers né du vide" par H. Andrillat.
Présentation d'une définition de l'univers : géométrie de son espace.

"Compter à l'école maternelle ? Oui. Mais ..." par Rémi Brissiaud.
Présentation de quelques travaux récents sur les premiers apprentissages numériques et réflexion critique sur la façon dont les pédagogues utilisent les travaux de psychologie.

"Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels" par Aline Robert.
Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une réflexion générale sur les mathématiques et leur enseignement.

"Travaux pratiques pour les premières scientifiques" par Daniel Duverney.

"Une expérience pour aider les élèves à apprendre à rédiger un devoir de mathématiques" par Michel Mante.
Présentation d'une expérience menée dans une classe de quatrième pour aider les élèves à apprendre à rédiger un devoir à la maison et recherche des objectifs poursuivis par l'enseignant en proposant un tel travail.

"Nouveaux programmes pour la classe de troisième."
Projet de commentaires sur ce programme.

"Faut-il enseigner des mathématiques aux enfants dont les parents ne souhaitent pas qu'ils deviennent professeurs ?" par G. Walusinski.

et la rubrique traditionnelle de problèmes.

n^0 368 - Avril 1989

Au sommaire de ce numéro, nous relevons

"Mathématiques-Algorithmique-Informatique dans le secondaire" un essai de prospective s'appuyant sur les réalisations personnelles de l'auteur : Robert Amalberti.

Une série de textes faisant suite aux journées nationales de 1989 à Rouen, qui traitent de la curiosité et des mathématiques par P. Legrand, M. Henry, M. Fort, J. Nimier et B. Charlot.

"L'enseignement des mathématiques et les besoins de la société" compte-rendu d'une conférence de Claude Pair, rédigé par Annie Bollotte.
La société actuelle a deux besoins
– besoin d'une élévation du niveau des formations
– besoin de former davantage de scientifiques.
L'article présente la recherche de réponses à ces demandes.

" Les nouveaux manuels de cinquième vus par les enseignants" par M. Le Berre et M. Pecal.
Résultats d'une enquête menée auprès de professeurs de mathématiques avec, pour objectif, l'appréciation de leur degré de satisfaction vis-à-vis des nouveaux manuels de cinquième utilisés dans leur établissement.

"L'évaluation du savoir mathématique" par Antoine Bodin.

et les rubriques habituelles concernant les matériaux pour une documentation, les problèmes de l'APMEP, les jeux, le courrier des lecteurs.

Claude VILLERS

Bibliographie

J. Bair, C. Villers,

Eléments de statistique
par Jean-Jacques DROESBEKE
Editions de l'Université de Bruxelles et Ellipses
Collection "Statistique et Mathématiques Appliquées" (SMA) 1988,
446 pages, 995 FB

Les Statistiques sont devenues, de nos jours, d'un usage très courant ; malheureusement, elles ne sont pas toujours bien comprises par les utilisateurs, ce qui rend parfois crédible l'adage "on fait dire ce que l'on veut aux statistiques".

Pour exploiter à bon escient les statistiques, il faut en comprendre parfaitement les principes fondamentaux... ce qui nécessite de bonnes connaissances théoriques et un bagage mathématique non négligeable.

L'ouvrage de J.J. DROESBEKE explique de façon très claire et didactique les concepts de base, dont la portée est toujours illustrée par de nombreux exemples tirés de la vie courante (avec des données réelles) et rencontrés dans des situations très variées, orientées principalement vers les sciences humaines en général, et plus particulièrement vers les sciences sociales, politiques, économiques et de gestion. De plus, l'auteur ne présente pas de simples "recettes à appliquer" ; au contraire, il justifie de nombreux résultats en les commentant et illustrant de manière fort démonstrative et en démontrant beaucoup de résultats de façon rigoureuse (certaines preuves étant rejetées dans des notes en bas de page, ce qui allège considérablement le texte) ; les raisonnements les plus difficiles sont toutefois omis, mais une référence précise indique alors où le lecteur peut les trouver.

Le compromis entre la rigueur et la bonne compréhension du texte est dès lors des plus heureux. D'une part, le lecteur non-mathématicien y trouvera une présentation claire et assez complète des "éléments de statistique", avec un excellent aperçu des problèmes qui peuvent être traités par les théories exposées. D'autre part, tout mathématicien professionnel, particulièrement chaque professeur de mathématique, sera intéressé par la lecture de cet ouvrage : outre la façon très pédagogique dont la matière est présentée, il appréciera certainement l'analyse et l'application des résultats énoncés, les nombreux exemples variés fort bien choisis, ainsi que la liste abondante d'exercices proposés (toujours avec des données réelles et avec les solutions des principaux énoncés) ; de plus, il lira avec attention et intérêt les nombreux commentaires historiques bien documentés sur la statistique et les statisticiens.

Le livre est donc vraiment remarquable en ce qui concerne sa forme, compte tenu du public initialement visé (les étudiants de l'Université Libre de Bruxelles dans des domaines tels que la sociologie, l'anthropologie, les sciences politiques, l'histoire, l'urbanisme, les sciences du travail, la criminologie, le journalisme,..., ainsi que les étudiants en sciences commerciales contenu, il est extrêmement classique. Dans l'ordre, on y retrouve les chapitres habituels (à l'exception des chapitres 1 et 7 qui sont assez originaux et fort intéressants), à savoir : 1) un peu d'histoire ; 2) la présentation des données ; 3) les paramètres de position, de dispersion et de forme ; 4) éléments de théorie des probabilités ; 5) variables aléatoires et distributions de probabilité ; 6) indépendance et comportements asymptotiques ; 7) les méthodes de sondage ; 8) les tests d'hypothèses ; 9) l'analyse bivariée. En fin de volume figurent plusieurs annexes mathématiques sur les ensembles, les fonctions, le signe de sommation, les logarithmes et les matrices, ainsi que différentes tables statistiques et une bibliographie bien fournie.

Jacques BAIR

<u>Mathématique discrète, outil pour l'informaticien</u>
par Michel MARCHAND
DE BOECK Université, Série Accès Sciences
Bruxelles, 1989, 499 pages, 1580 FB.

L'informatique est assurément à la mode : presque tout le monde possède et utilise un ordinateur, pour des raisons professionnelles ou autres. Or, tout qui désire réaliser un travail informatique rigoureux et précis doit faire appel, de façon fondamentale, à des théories mathématiques. Il était donc indispensable de pouvoir disposer d'un ouvrage exposant clairement les notions mathématiques utiles pour la conception des programmes informatiques. Le livre de M. MARCHAND répond parfaitement à cette attente.

Comme l'écrit l'auteur dans son avant-propos ([1]) : ”*Ce livre n'est pas un traité, mais un ouvrage de première approche. L'intention est, après avoir décrit quelques concepts fondamentaux, d'ouvrir des pistes, de solliciter l'imagination, de laisser entrevoir des exploitations possibles de l'outil mathématique dans toute une série de domaines informatiques”* (page 8).

Cet ouvrage débute par un chapitre sur la logique (bivalente) et quelques notions de base comme les ensembles, le dénombrement (ou analyse combinatoire), la récurrence et l'induction, des éléments d'arithmétique et les matrices numériques et booléennes. Ensuite sont étudiées les relations et les fonctions. Puis différentes structures, à savoir les structures ordonnées, algébriques et d'arbres, sont analysées. Enfin, trois chapitres plus spécifiques traitent des langages formels, des machines à nombre fini d'états (automates), de codage-décodage.

Tour mathématicien sera vivement intéressé par les interactions profondes entre la mathématique et l'informatique : d'une part la mathématique favorise la réflexion informatique en lui fournissant des modèles, d'autre part l'informatique permet parfois de mieux assimiler des concepts mathématiques et certaines théories mathématiques, exposées brièvement dans cet ouvrage, sont nées de problèmes purement informatiques.

Tout professeur de mathématique appréciera dans cet ouvrage la présentation très didactique, assez souvent originale et fort cohérente : ce livre est assurément le fruit d'une profonde réflexion sur ces matières. De plus, chaque notion est graphiques faciles à interpréter, de nombreux algorithmes présentés en pseudocode et de multiples exercices (plusieurs centaines au total) avec les solutions. Enfin, ce livre est très agréable à lire grâce à la qualité du style de l'auteur et à la bonne présentation du texte.

Pour terminer cette analyse, je ne résiste pas à extraire un passage (choisi parmi d'autres) montrant que la programmation informatique nécessite souvent une réflexion en profondeur sur des concepts mathématiques fondamentaux, ce qui peut donner de bonnes idées d'un point de vue pédagogique. ”*Il est fréquent, et parfois dangereux, de confondre une fonction f avec la valeur $f(x)$ qu'elle prend en un élément anonyme x de son domaine. L'expression $x^2 + 2x + 1$, par exemple, pourrait servir à décrire la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, caractérisée par : $g(x) = (x + 1)^2$. Mais cette même expression pourrait aussi désigner la valeur prise, au point $x + 1$, par la fonction caractérisée par $f(x) = x^2$. Les fonctions f et g en cause sont distinctes et, à elle seule, l'expression $x^2 + 2x + 1$ est suffisante pour décrire clairement ce*

1. Les extraits du livres sont reproduits avec l'aimable autorisation de l'Editeur

dont on veut parler. Pour éviter de genre d'imprécision, certains langages de programmation, comme LISP, utilisent une notation plus méticuleuse : la lambda-notation. La fonction $x \to f(x)$, qui à la valeur x fait correspondre $f(x)$, est dénotée : $\lambda x(fx))$. Ainsi, $\lambda x(x^2)$ désigne la fonction f définie par l'égalité : $f(x) = x^2$. Pour désigner $f(x)$, c'est-à-dire la valeur prise par f au point x, on écrira, en lambda-notation : $(\lambda x(x^2))(x)$. De même, l'écriture $(\lambda x(x^2))(x+1)$ désigne la valeur $f(x+1)$ prise par f au point $x+1$. Revenant à l'exemple ci-avant, on peut écrire :

$$(\lambda x(x^2))(x+1) = x^2 + 2x + 1 = (\lambda x((x+1)^2))(x).$$

Mieux que le symbole imprécis f (dont il faut se souvenir de la signification dans le contexte), l'écriture $\lambda x(x^2)$, au prix d'une certaine lourdeur, contient toute l'information sur la façon dont travaille la fonction". (pages 155-156)

Jacques BAIR

MATHEMATISONS 1
par Paul COENRAETS, Pierre COLIN, René JANSSENS et Michel NOIRHOMME (Coordination G. HALIN et F. LOUSBERG),
manuel de mathématique destiné à la première année de l'enseignement secondaire,
édition 1989 chez DE BOECK.

Il s'agit d'une toute nouvelle édition d'un manuel bien connu dans le milieu des enseignants des premières années du secondaire. C'est d'ailleurs un élément d'un ensemble de manuels couvrant les six années de cet enseignement secondaire.

Si cette édition reste, dans son ensemble, assez fidèle aux précédentes, les auteurs ont cependant voulu que son contenu privilégie la liberté de créativité de l'élève en le rendant moins directif.

La matière y est présentée en quatre parties qui sont :

- Ensembles et relations

- Les nombres

- La géométrie

- Situations et problèmes

Chacune de ces parties est alors divisée en chapitres dont le découpage répété systématiquement comporte un exercice destiné à introduire la matière par la mise en éveil de l'esprit du lecteur, le développement de la notion ciblée, des exercices de fixation présentés en deux séries (la première vise à assurer le savoir-faire de base et la deuxième présente des exercices de renforcement et des exercices de réflexion).

Chaque chapitre est précédé d'une liste bien réussie grâce à une impression soignée, aérée et bien référencée.

Personnellement, je regrette que les deux séries d'exercices aient été séparées des chapitres de théorie auxquels elles se rapportent. Cela oblige inutilement l'utilisateur à se déplacer dans tout le manuel pour trouver les exercices immédiatement applicables.

Le manuel est accompagné d'un livret d'exercices qui se présente sous la forme d'un cahier pré-imprimé reprenant certains exercices du manuel. Ce livret n'est, bien entendu, utilisable qu'une seule fois puisqu'il doit être complété par le lecteur.

Claude VILLERS