

Mathématique et Pédagogie

Périodique bimestriel publié par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Sommaire

- **G. Noël**, *Éditorial* 2
- **G. Noël**, *Fractals* 3
- **J. Lefevre, S. Huberty et D. Roucou**, *La simulation de systèmes dynamiques (2)* 19
- **J. Rossi**, *L'algèbre : langage difficile ?* 40
- **D. Justens**, *Quelques utilisations pragmatiques de la mathématique financière* 46
- **Le Comité de l'A.M.U.Lg.**, *En l'an 2000, nos enfants auront-ils encore des professeurs de mathématiques ?* 66
- **N. Joelants, J.-P. Cazzaro, H. Pools, C. Festraets**, *Revue des revues* 74
- **F. Michel**, *Calculer* 82
- **Y. Noël**, *Dans nos classes* 89
- **C. Rédaction**, *Humour* 92
- **C. Festraets**, *Olympiades* 94

Éditorial

G. Noël,

La Commission présidée par Paul DANBLON et chargée par le Ministre de l'Education de lui faire rapport sur l'état actuel de l'enseignement des sciences et de la mathématique dans la Communauté Française de Belgique a entamé – paraît-il – la rédaction de son rapport. Dès que ce document sera en notre possession, nous l'étudierons avec attention et nous soumettrons nos réflexions à l'assemblée générale de la SBPM.

Mais dès à présent, il est clair que ce rapport ne clôturera pas la discussion sur l'enseignement des mathématiques en général et sur les programmes en particulier. Nombreux sont ceux qui demandent au Ministre d'installer une commission *permanente*. Qui poursuivra et approfondira la réflexion et la discussion. S'il est naturel que notre Société désire être associée aux travaux futurs, il est aussi indispensable que ses prises de position soient étayées par une analyse objective des difficultés de l'enseignement de la mathématique dans le contexte de la Communauté Française de Belgique. Et cette analyse devra être différenciée selon le type d'enseignement (général, technique, professionnel) et l'âge des élèves.

C'est dire que nous avons encore du pain sur la planche. Le Comité de la SBPM a chargé un groupe restreint d'approfondir les idées contenues dans le rapport remis à la "Commission Danblon" (et publié dans SBPM-Infor n°74). Un document plus vaste devrait guider la Société dans les actions qu'elle aura à entreprendre dans les prochaines années.

Le groupe a déjà entamé son travail. Dans un premier temps, il cherchera à dégager le bilan des réformes qui se sont succédées depuis 25 ans en analysant les activités mathématiques qui se déroulent dans les classes. Il s'intéressera notamment aux programmes et aux manuels. Du point de vue mathématique et du point de vue pédagogique. Il réalisera des enquêtes.

Bien entendu, les membres de la SBPM seront régulièrement informés. Leur participation sera sollicitée. Tous les enseignants sont concernés par cette initiative. Tous auront à coeur d'y collaborer !

G. NOEL

Fractals

G. Noël, Université de Mons

1. Un sujet à la mode !

Incontestablement, les fractals sont à la mode. Les ouvrages sur le sujet commencent à être nombreux. Des bandes vidéos, des programmes informatiques existent, aux titres évocateurs : « mandelvroom, promenades de Julia, attracteurs étranges, ... ». Et le phénomène déborde du cadre limité des mathématiciens et autres scientifiques. Des émissions de télévision donnent la parole au « père fondateur », Benoit MANDELBROT. Des revues de vulgarisation publient des articles abondamment illustrés. Des expositions parcourent l'Europe. ...

La raison de cet engouement est simple : les fractals sont souvent des objets extrêmement spectaculaires, d'une beauté saisissante. Le mathématicien peut apprécier la beauté et la simplicité de la mathématique sous-jacente, alors que le profane ne retient que l'aspect esthétique « extérieur ». Ne nous plaignons pas : il n'est pas si fréquent que des non-scientifiques soient touchés par un sujet mathématique.

Une chose est certaine : sans la micro-informatique, les fractals n'auraient pu être étudiés que par les privilégiés ayant accès aux gros ordinateurs disposant de capacités graphiques. Sans aucun ordinateur, jamais les fractals n'auraient été connus en dehors des milieux scientifiques. Et ils auraient vraisemblablement été considérés comme des objets monstrueux, difficiles à maîtriser. On peut même aller plus loin : sans ordinateurs, c'est-à-dire sans la capacité de représenter graphiquement des fractals, bien peu de personnes se seraient intéressées au sujet et beaucoup moins de résultats théoriques seraient disponibles. (Encore que même maintenant, il est malaisé de parler d'une « théorie des fractals » qui soit structurée comme le sont en général les théories mathématiques.) Ce n'est pas la première fois que l'informatique permet à la mathématique de progresser. Ce n'est sans doute pas la dernière non plus.

Pour ne pas faillir à la tradition, (et au risque que l'on me reproche de verser dans le spectaculaire), je vais donc illustrer cet article de quelques images que j'espère intéressantes. Mais les amateurs seront sans doute déçus. Car je ne saurais produire que des images de qualité bien inférieure à celle

des illustrations que l'on rencontre couramment dans la littérature. Déjà la couleur manque. Ensuite, je ne dispose pas d'un matériel très sophistiqué! N'hésitez donc pas à vous faire offrir les ouvrages mentionnés dans la bibliographie.

2. Un sujet nouveau ?

Si les fractals sont devenus assez récemment très attrayants, il serait excessif de croire que ce sont là des objets vraiment nouveaux. Dans [13], MANDELBROT cite à de nombreuses reprises les travaux de nombreux mathématiciens du 19ème siècle et, dans un aperçu historique, il remonte même à Aristote. Le grand mérite de MANDELBROT, à partir des années 70 a été d'exhiber toute une série d'objets fractals, anciens et nouveaux, d'en créer lui-même un grand nombre, de les populariser, d'en systématiser la présentation et de leur donner un nom : **fractal** ⁽¹⁾. Ce faisant, il a donné à l'étude des fractals l'impulsion qui a permis, depuis une dizaine d'années, des progrès spectaculaires et des applications non négligeables.

Comme je n'ai pas l'intention de faire dans cet article un exposé historique systématique, je me contenterai de mentionner quelques fractals « anciens » et quelques dates.

- 1875 : WEIERSTRASS donne le premier exemple de fonction continue non dérivable, exhibant ainsi un « monstre » dont certains mathématiciens parmi les plus grands se « détournent avec horreur ». (On connaît la réaction d'HERMITE à ce sujet.) Le graphe d'une telle fonction est un ensemble très irrégulier, un fractal.

Une fonction de WEIERSTRASS (figure 1) :

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos 7^n \pi x$$

1. Je ne sais trop quel est le statut du mot "fractal". Est-ce un substantif ou un adjectif employé substantivement ? Est-il masculin ou féminin ? Certains, y compris Mandelbrot lui-même, disent "une fractale". L'usage tranchera !

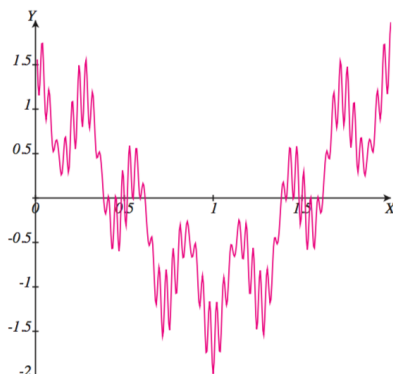


Figure 1

Fonction de WEIERSTRASS (2)

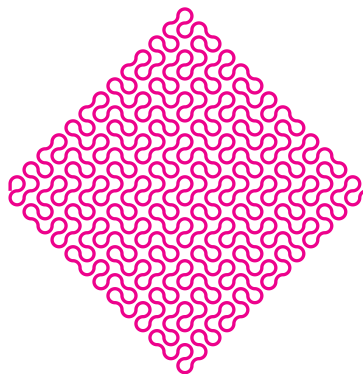


Figure 2

La courbe de PEANO (3)

- 1883 : CANTOR introduit l'ensemble « triadique » qui porte son nom : l'ensemble des réels appartenant à l'intervalle $[0,1]$ qui en base 3 admettent un développement ne comportant que des 0 et des 2. Par exemple, $1/4$ est un élément de l'ensemble de CANTOR car en base 3, $1/4$ s'écrit $0,020202\dots$ L'ensemble triadique de CANTOR (on dit aussi la « poussière » de CANTOR) est aussi un « monstre » : sa longueur est **nulle** et cependant, il contient autant d'éléments que le segment $[0,1]$ lui-même !
- 1890 : PEANO montre l'existence d'une courbe qui passe par tous les points d'un carré.
- 1918 : JULIA étudie les itérations des fonctions rationnelles et fait apparaître des ensembles invariants particulièrement « biscornus ».

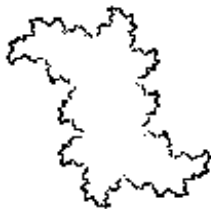


Figure 3

Une courbe de JULIA

La courbe ci-contre est invariante pour la transformation du plan complexe qui applique z sur $z^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$.

Il faut noter qu'à l'époque, JULIA ne disposait pas d'ordinateur, et qu'il était donc incapable de visualiser les objets de son étude. Son mérite n'en est que plus grand !

3. Le graphique est celui d'une somme partielle de la série $W(x)$.

4. La figure montre comment un quadrillage est parcouru. La courbe de Peano est la limite du graphe lorsque la maille du quadrillage tend vers un point et le nombre de mailles vers l'infini.

Arrêtons là cet inventaire. Il a ensuite fallu attendre MANDELBROT et le fait qu'il disposait de beaucoup de temps de calcul pour que les choses recommencent à bouger.

3. Qu'est-ce qu'un fractal ?

On ne trouve guère dans la littérature de définition précise de ce qu'est un fractal. Fondamentalement, un fractal est un ensemble extrêmement irrégulier (personne n'aurait l'idée de dire qu'une droite est un fractal). Et cette irrégularité doit être mesurée d'une façon ou d'une autre. Le plus souvent, on utilise dans ce but la notion de dimension fractionnaire. Mais même cela ne nous conduit pas à quelque chose de tout à fait précis car il existe *plusieurs* notions non équivalentes de dimension fractionnaire. Dans [15], MANDELBROT explique qu'il a mis l'accent sur la dimension de HAUSDORFF pour des raisons d'opportunité, mais que ce n'était sans doute pas le meilleur choix.

Par ailleurs certains développements récents, s'ils sont particulièrement spectaculaires dans le cas d'ensembles irréguliers, n'en fournissent pas moins une approche qui est également nouvelle pour les ensembles réguliers traditionnels. On notera que par exemple dans [3], le mot « fractal » est quasiment synonyme de « ensemble compact ». Peut-être un jour en viendra-t-on à considérer que ce sont surtout les nouvelles méthodes et techniques qui sont importantes (et donc méritent un nouveau nom) notamment du fait qu'elles s'appliquent à des objets irréguliers, mais pas uniquement à cause de cela.

Une autre notion souvent rencontrée à propos des fractals est celle d'ensemble *auto-semblable*. Parfois, on explique même qu'un fractal est un ensemble qui a toujours le même aspect, qu'on le regarde à l'œil nu ou au microscope. Il n'y a aucun doute que cette approche est par trop simpliste : elle aboutirait à affirmer qu'une droite est un fractal ! Elle néglige de prendre en compte l'irrégularité nécessaire d'un fractal. En réalité, il existe aussi bien des fractals non auto-semblables que des ensembles auto-semblables qui ne sont pas des fractals. L'idée d'auto-similitude n'a eu du succès que parce qu'elle permet d'engendrer l'irrégularité de façon régulière : les fractals auto-semblables sont les fractals les plus simples à définir et à étudier. En particulier, des procédures récursives permettent de les faire dessiner « simplement » par un ordinateur.

4. Des courbes irrégulières

La première caractéristique d'un fractal est l'irrégularité. Pour une courbe, celle-ci se marque par exemple par l'absence de tangente. Et pas seulement en des points isolés. C'est le cas du graphe de la fonction de WEIERSTRASS dont il a été question ci-dessus. Un théorème classique, dû à H. LEBESGUE permet de montrer que toute courbe rectifiable (c'est-à-dire toute courbe à laquelle on peut attribuer une longueur finie) admet une tangente presque partout (c'est-à-dire partout sauf au plus en les points d'un ensemble de mesure de LEBESGUE nulle).

Ainsi, nous devons rechercher des courbes irrégulières parmi les courbes de longueur infinie. L'exemple du flocon de KOCH est bien connu. Voici un exemple analogue.

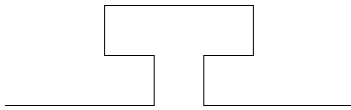


Figure 4 : Niveau 1

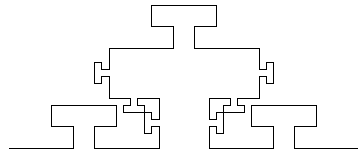


Figure 5 : Niveau 2

Le point de départ est le “motif” représenté à la figure 4. Sa longueur totale est de 15 unités. (Les petits segments du motif sont de longueur 1, les autres de longueur 3.) La figure 5 est obtenue en remplaçant chaque segment de la figure 4 par un motif semblable à l'entière. Neuf motifs sont ainsi reproduits, à des tailles différentes. On trouve facilement que la longueur totale de la courbe de la figure 5 est $15 \times \frac{15}{7}$. L'opération est répétée indéfiniment. Les figures 6 et 7 présentent les courbes des niveaux 3 et 5.

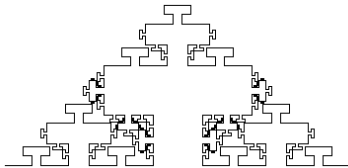


Figure 6 : Niveau 3

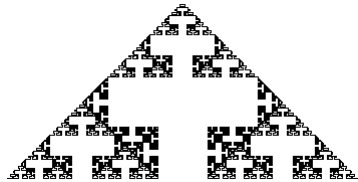


Figure 7 : Niveau 5

Chaque fois que le niveau augmente de 1, la longueur est multipliée par $\frac{15}{7}$. A la limite, elle est bien infinie. Par ailleurs, il est bien clair qu'à chaque

augmentation du niveau, le nombre de points où la courbe n'admet pas de tangente augmente également.

Si la courbe limite ne peut se voir attribuer une longueur finie, on peut se demander s'il n'est pas possible de lui attribuer une aire. L'examen de la figure 7 nous donne en effet à penser que cette courbe pourrait bien remplir complètement une zone plane d'aire non nulle. Après tout, cela n'est-il pas le cas de la courbe de PEANO ?

Pour évaluer l'aire d'une partie P du plan, l'usage est de recouvrir cette partie par un quadrillage et de compter le nombre de carrés dont l'intersection avec la partie n'est pas vide. Si ϵ est la longueur du côté d'un carré, et si $N(\epsilon)$ carrés sont nécessaires pour recouvrir P , l'aire est la limite de $\epsilon^2 N(\epsilon)$ lorsque ϵ tend vers 0.

Dans le cas présent, la méthode n'est pas simple à appliquer puisque nous ne dessinons pas la courbe limite elle-même, mais uniquement des approximations polygonales. Heureusement, il n'y a que quelques séries géométriques à sommer (de raison strictement inférieure à 1) pour constater que la courbe limite ne sort certainement pas du carré construit sur le segment de base (voir ci-contre).

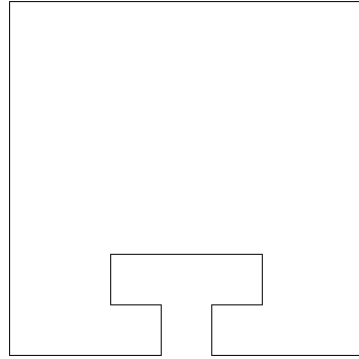


Figure 8

Et comme nous pouvons tenir le même raisonnement à chaque niveau de la construction, nous constatons que la courbe limite est successivement contenue dans 1 carré de côté 7, puis 3 carrés de côté 3 et 6 carrés de côté 1, puis 36 carrés de côté $\frac{1}{7}$, 36 carrés de côté $\frac{3}{7}$ et 9 carrés de côté $\frac{9}{7}$, etc. A chaque étape, un segment de longueur l est remplacé par 6 segments de longueur $l/7$ et 3 segments de longueur $3l/7$. Un dénombrement sans grande difficulté montre qu'à l'étape n , la courbe obtenue comporte $\binom{n}{k} 3^k 6^{n-k}$ segments de longueur $\frac{3^k}{7^{n-1}}$ ($k = 0, \dots, n$). Cette courbe peut donc être recouverte par des carrés d'aire totale

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 6^{n-k} \left(\frac{3^k}{7^{n-1}} \right)^2 = \frac{33^n}{49^{n-1}}$$

Et cette aire tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, notre courbe limite est à la fois de longueur infinie et d'aire nulle. Ni la longueur, ni l'aire ne sont très utiles pour la mesurer.

5. La dimension fractionnaire

Felix HAUSDORFF est le premier (en 1919, voir [11]) à avoir eu l'idée que certaines parties du plan pourraient mieux être étudiées si on les dotait d'une dimension non entière. L'idée est finalement assez simple : si $\epsilon N(\epsilon)$ tend vers l'infini, et si $\epsilon^2 N(\epsilon)$ tend vers 0, essayez $\epsilon^d N(\epsilon)$, avec $1 < d < 2$. La définition choisie par HAUSDORFF est un peu plus subtile que cela, et la dimension de HAUSDORFF n'est pas toujours facile à calculer. On utilise plus souvent la *dimension fractale* qui est toujours supérieure ou égale à celle de HAUSDORFF :

Si P est une partie de $\mathbb{R}^2$, notons $N(\epsilon)$ le plus petit nombre de disques de rayon ϵ nécessaires pour recouvrir P . La dimension fractale de P est le réel positif d_0 tel que pour tout réel positif d :

$$d < d_0 \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^d N(\epsilon) = +\infty$$

et

$$d > d_0 \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^d N(\epsilon) = 0$$

Cette définition s'étend sans difficulté aux parties de $\mathbb{R}^n$. Un bon exercice d'analyse (niveau 1ère candidature) consiste à montrer l'égalité

$$d_0 = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log 1/\epsilon}$$

6. Les fractals auto-semblables

On l'a dit plus haut : les fractals auto-semblables étant "réguliers dans l'irrégularité" sont plus faciles à appréhender. En particulier, on peut assez facilement obtenir une majoration de leur dimension fractale. Précisons d'abord le vocabulaire :

Une partie P de $\mathbb{R}^2$ sera dite auto-semblable si elle est la réunion d'un nombre fini de parties $P_1, \dots, P_n$ qui lui sont semblables.

Remarquons que les rapports de similitude sont fatalement inférieurs à 1.

La figure ci-contre représente une variante d'un fractal auto-semblable célèbre : le tapis de SIERPINSKI. Il est la réunion de 8 parties qui lui sont semblables. De plus les intérieurs de ces 8 parties (les distinguez-vous ?) sont deux à deux disjoints. Quant aux rapports de similitudes, ils sont égaux à $\frac{1}{3}$.

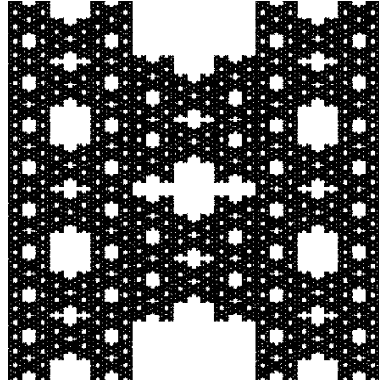


Figure 9

Essayons d'évaluer la dimension fractale d'un fractal auto-semblable dans le cas où toutes les similitudes ont même rapport r .

- Si le fractal P est la réunion de n parties $P_1, \dots, P_n$ qui lui sont semblables, tous les rapports de similitude valant r
- et si $N(1)$ est le nombre minimum de boules de rayon 1 nécessaires pour recouvrir P
- alors $nN(1)$ boules de rayon r suffisent pour recouvrir P .
- Par conséquent

$$N(r) \leq nN(1)$$

Par récurrence, on obtient pour tout naturel k :

$$N(r^k) \leq n^k N(1)$$

Puisque $r < 1$, r^k tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, et nous pouvons appliquer la formule énoncée précédemment :

$$\begin{aligned} d_0 &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log 1/\epsilon} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(r^k)}{\log 1/r^k} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log n + \log N(1)}{-k \log r} \leq -\frac{\log n}{\log r} \end{aligned}$$

Conclusion :

Si le fractal P est réunion de n parties qui lui sont toutes semblables, dans le même rapport de similitude, r , alors la dimension fractale de P vaut au plus

$$-\frac{\log n}{\log r}$$

Ainsi, la dimension fractale de la figure 9 vaut au plus $\frac{\log 8}{\log 3}$, soit 1.892... On peut en fait montrer qu'elle est *égale* à ce nombre. Nous énoncerons plus loin un théorème d'après lequel la dimension fractale d'un ensemble réunion de n parties qui lui sont semblables dans le rapport r est effectivement égale à $-\frac{\log n}{\log r}$ si les intérieurs des n parties en question sont deux à deux disjoints.

Mais, dans le cas général, on n'a pas l'égalité. En effet, le raisonnement fait ci-dessus montrait qu'il était possible de recouvrir P par $n^k N(1)$ boules de rayon r^k , mais ne prouvait pas que ce nombre était le minimum possible. Il se pourrait par exemple que les parties $P_1, \dots, P_n$ se chevauchent, auquel cas la dimension fractale sera inférieure à $-\frac{\log n}{\log r}$.

Considérons par exemple le « triangle » oab de la figure 10 : c'est une variante du triangle de Sierpinski. Il est la réunion de ses images par les six homothéties de rapport 1/2 et de centres o, a, b, c, d, e . Le nombre $-\frac{\log n}{\log r}$ vaut 2.5849..., alors que la dimension fractale ne dépasse jamais 2. En fait dire que la dimension fractale vaut 2 signifie intuitivement que la figure considérée « remplit » une partie du plan d'aire non nulle. Ce n'est pas le cas du « triangle » considéré : son intérieur (au sens topologique) est vide.

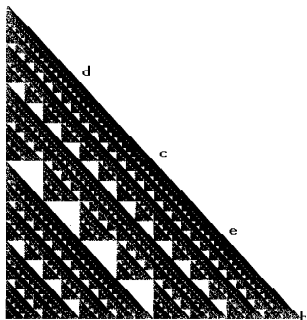


Figure 10



Figure 11

Dans le cas où toutes les similitudes ont même rapport r , le nombre $-\frac{\log n}{\log r}$ est appelé la *dimension de similitude interne* du fractal considéré. Dans le cas général, on adopte la définition suivante :

La dimension de similitude interne d'un fractal auto-semblable P , égal à la réunion de ses images par n similitudes de rapports $r_1, r_2, \dots, r_n$ est le nombre d , solution de l'équation

$$r_1^d + r_2^d + \dots + r_n^d = 1$$

Si $r_1 = \dots = r_n$, on retrouve bien le nombre $-\frac{\log n}{\log r}$.

La figure 11 présente un exemple de fractal réunion de trois parties qui lui sont semblables dans les rapports $0,55479\dots$, $0,46239\dots$ et $0,46768\dots$. Sa dimension de similitude interne vaut $1,566702\dots$.

7. Des invariants

La notion d'ensemble auto-semblable est généralisable. Ainsi, si W est la fonction de WEIERSTRASS, on vérifie assez facilement l'égalité $W(x/7) = W(x)/2 + \cos(\pi x/7)$. Il en résulte que la figure 1 est invariante par la transformation $\begin{cases} x' = x/7 \\ y' = y/2 + \cos(\pi x/7) \end{cases}$. Comme de plus la fonction W est périodique de période 2, la figure 1 se décompose en 7 parties, images du tout par des transformations que je n'écrirai pas explicitement (sauf la première ci-dessus). Ces transformations ne sont évidemment pas des similitudes, mais ce sont des *contractions*, au sens de la définition suivante.

Une transformation A du plan est appelée une *contraction* si et seulement s'il existe une constante réelle k , strictement inférieure à 1 telle que quels que soient les points x' et x'' on ait :

$$d(Ax', Ax'') \leq kd(x', x'')$$

où d est la distance usuelle.

Une similitude est une contraction si et seulement si son rapport est strictement inférieur à 1. Le théorème suivant est fondamental, il fait apparaître les fractals comme invariants d'ensembles finis de contractions et il donne un critère d'égalité de la dimension de similitude interne et de la

dimension de HAUSDORFF (Ces deux dimensions coïncident alors aussi avec la dimension fractale qui est toujours comprise entre les deux.)

THÉORÈME : ([7], p.122 ou [3], p.184) Soient $A_1, \dots, A_n$ des contractions du plan euclidien, de constantes $r_1, \dots, r_n$. Il existe un et un seul sous-ensemble P du plan qui soit borné, fermé, non vide et invariant pour chaque contraction A_i ($i = 1, \dots, n$).

Si les contractions sont des similitudes et s'il existe un ensemble ouvert borné U invariant pour chacune d'entre elles et tel que les ensembles $A_1(U), \dots, A_n(U)$ soient deux à deux disjoints, alors la dimension de HAUSDORFF de P coïncide avec la dimension de similitude interne.

La condition $A_i(U) \cap A_j(U) = \emptyset$ pour $i \neq j$ revient à exiger que le fractal P soit réunion de n parties qui lui sont semblables et “ne se chevauchent pas”.

On établit aussi dans [3] la validité du processus de construction suivant du fractal P associé aux transformations $A_1, \dots, A_n$:

- Choisir au hasard un point x_0 du plan.
- Choisir au hasard une transformation A_i parmi $A_1, \dots, A_n$, et poser $x_1 = A_i(x_0)$.
- Choisir au hasard une transformation A_i parmi $A_1, \dots, A_n$, et poser $x_2 = A_i(x_1)$.
- ...
- Choisir au hasard une transformation A_i parmi $A_1, \dots, A_n$, et poser $x_n = A_i(x_{n-1})$.
- ...

La suite $(x_i)_{i=0}^\infty$ obtenue par ce procédé se rapproche très vite du fractal P (d'autant plus vite que les constantes $r_1, \dots, r_n$ sont plus petites) et de plus, avec la probabilité 1 elle va passer aussi près que l'on veut de n'importe quel point de P .

La résolution des tables traçantes ou des imprimantes dont nous disposons étant très limitée, les points de la suite sont très rapidement trop près de P pour pouvoir en être distingués. Il suffit donc en général de ne pas dessiner quelques premiers points de la suite pour obtenir une représentation valable de P . Les figures 9 à 16 ont été obtenues par ce procédé.

Voici quelques fractals supplémentaires, engendrés par des transformations *affines* $A_1, \dots, A_n$.



Figure 12

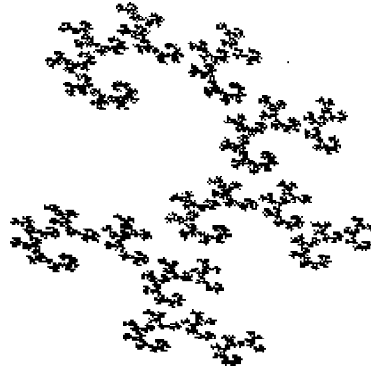


Figure 13

Une transformation affine quelconque s'écrit $\begin{cases} x' = ax+by+c \\ y' = dx+ey+f \end{cases}$

Les tableaux suivants définissent les transformations qui engendrent les figures 12 et 13.

	A_1	A_2	A_3	A_4
a	0	0,8415	0,195	-0,15
b	0	0,0255	-0,225	0,2812
c	0,5	0,0793	0,402	0,57
d	0	-0,0255	0,225	0,258
e	0,25	0,8415	0,195	0,2368
f	0	0,1727	0,048	-0,049

	A_1	A_2
a	0,444822	0,217317
b	-0,509328	-0,449915
c	0,519525	0,528014
d	0,488584	0,321918
e	0,721461	0,429224
f	-0,047945	-0,043379

Il suffit de modifier UNE des transformations (c'est à dire 6 coefficients) pour que la figure 12 se transforme en un arbre secoué par la tempête.



	A_1	A_2	A_3	A_4
a	0	0,842105	0,195	-0,15
b	0	0,35992	-0,225	0,2812
c	0,5	0,083192	0,402	0,57
d	0	-0,022831	0,225	0,258
e	0,25	0,831050	0,195	0,2368
f	0	0,168950	0,048	-0,049

Figure 14

8. Le théorème du collage

Certaines des figures précédentes sont très spectaculaires. On ne peut qu'être surpris de voir que des figures obtenues par un procédé géométrique finalement très simple reproduisent très fidèlement des formes que l'on pensait ne pouvoir trouver que dans la nature.

Nous atteignons ainsi ce que nous pourrions appeler la "philosophie fractale". Nous constatons en effet qu'il est possible de construire des modèles mathématiques de formes naturelles très complexes, des formes qui échappaient précédemment à toute étude géométrique. Et ces modèles mathématiques consistent en la répétition d'opérations extrêmement simples. Ainsi la fougère de la figure 12 est entièrement déterminée par la connaissance des 24 coefficients des 4 transformations affines mentionnées.

De là à se demander si les règles qui régissent le monde des organismes vivants (les règles de croissance par exemple) sont d'une telle nature itérative, de là à essayer de les reproduire ...

De ce point de vue, on peut se demander si n'importe quelle partie bornée et fermée du plan peut être obtenue comme invariant d'un ensemble fini de contractions. Et la réponse est positive, tout au moins de façon approchée, aussi approchée qu'on le souhaite : c'est le *théorème du collage* (M. BARNESLEY).

Rappelons d'abord ce qu'est la distance de HAUSDORFF de deux parties A et B du plan :

$$\delta(A, B) = \max(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A))$$

On a évidemment $\delta(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$. L'inégalité $\delta(A, B) < \epsilon$ signifie que tout point de A est à distance strictement inférieure à ϵ d'au moins un point de B , et vice-versa. La distance de HAUSDORFF mesure donc "le plus grand écart possible" entre deux ensembles.

Cela étant rappelé, voici le théorème du collage ([3], p.96) :

Soit E une partie du plan euclidien. Si $A_1, \dots, A_n$ sont des contractions de constante $r < 1$, et si $\delta(E, \bigcup_{i=1}^n A_n(E)) \leq \epsilon$, alors

$$\delta(E, P) \leq \frac{\epsilon}{1 - r}$$

où P est l'unique ensemble invariant pour $A_1, \dots, A_n$.

Ainsi, si l'on parvient à trouver des transformations $A_1, \dots, A_n$ telles que la réunion de $A_1(E), \dots, A_n(E)$ ne soit pas trop différente de E , alors le procédé décrit au paragraphe précédent fournit un ensemble (généralement fractal) qui constitue une approximation acceptable de E .

Michael BARNSELEY([3]) illustre ce théorème en approchant une feuille d'arbre par quatre copies réduites d'elle-même. Chacune des répliques est l'image de la feuille par une similitude dont les coefficients sont repris dans le tableau ci-contre. Les rapports des similitudes valent respectivement 0,6, 0,6, 0,5, 0,5.

	A_1	A_2	A_3	A_4
a	0,6	0,6	0,4	0,4
b	0	0	0,3	-0,3
c	0,18	0,18	0,27	0,27
d	0	0	-0,3	0,3
e	0,6	0,6	0,4	0,4
f	0,36	0,12	0,36	0,09

La figure 15 est extraite de [17] et reproduit la feuille et son approximation par 4 feuilles réduites. La figure 16 représente le fractal déterminé par les quatre similitudes. Sa dimension de similitude interne vaut 2,3403...

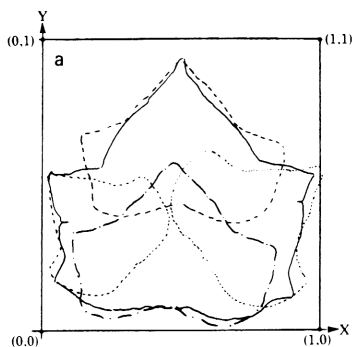


Figure 15

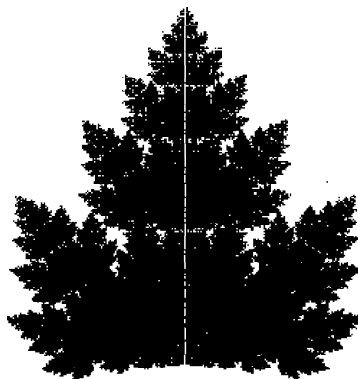


Figure 16

Le théorème du collage, manié par des mains expertes permet de reproduire avec grande fidélité des paysages et des scènes diverses, y compris les couleurs. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé aux ouvrages cités dans la bibliographie, et principalement [3] et [17]. Mais il n'est pas besoin de beaucoup d'efforts pour entrevoir les applications possibles de ce théorème, par exemple dans le domaine de la transmission des images par câble.

Bibliographie

- [1] K.-T. ALLIGOOD and J.-A. YORKE, *Fractal basin boundaries and chaotic attractors*, Proceedings of Symposia in applied mathematics, **39**, 41–56, American Mathematical Society, (1989).
- [2] M.-F. BARNSELY, *Iterated function systems*, Proceedings of Symposia in applied mathematics, **39**, 127–144, American Mathematical Society, (1989).
- [3] M.-F. BARNSELY, *Fractals everywhere*, Ed. Academic Press, San Diego, (1988).
- [4] B. BRANNER, *The Mandelbrot set*, Proceedings of Symposia in applied mathematics, **39**, 75–106, American Mathematical Society, (1989).
- [5] G. CHERBIT (Editeur), *Fractals, dimensions non entières et applications*, Ed. Masson, Paris, (1987).

-
-
- [6] R.-L. DEVANEY, *Dynamics of simple maps*, Proceedings of Symposia in applied mathematics, **39**, 1–24, American Mathematical Society, (1989).
- [7] K.-J. FALCONER, *The geometry of fractal sets*, Cambridge tracts in mathematics, N ° 85, Cambridge University Press, (1985).
- [8] J. FEDER, *Fractals*, Ed. Plenum Press, New York and London, (1988).
- [9] W.J. GILBERT, *Fractal Geometry derived from Complex bases*, The Mathematical Intelligencer, **4**, N ° 2, 78–86, (1982).
- [10] J. HARRISON, *Introduction to fractals*, Proceedings of Symposia in applied mathematics, **39**, 107–126, American Mathematical Society, (1989).
- [11] F. HAUSDORFF, *Dimension und äußeres maß*, Mathematische Annalen, **79**, 157–179, (1919).
- [12] L. KEEN, *Julia sets*, Proceedings of Symposia in applied mathematics, **39**, 57–74, American Mathematical Society, (1989).
- [13] B.-B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, Ed. Freeman, New York, (1983).
- [14] B.-B. MANDELBROT, *Les objets fractals : Forme, hasard et dimensions*, Ed. Flammarion, Paris, (1984).
- [15] B.-B. MANDELBROT, *Propos à bâtons rompus* in Dimensions non entières et applications, p. 4–15, Ed. Masson, Paris, (1987).
- [16] H.-O. PEITGEN and P.H. RICHTER, *The Beauty of Fractals, Images of Complex Dynamical Systems*, Springer Verlag, Berlin (1986).
- [17] H.-O. PEITGEN and D. SAUPE (Editors), *The Science of Fractal Images*, Springer Verlag, Berlin (1988)

La simulation de systèmes dynamiques (2)

J. Lefevre, S. Huberty et D. Roucou,

1. Principe de base d'un logiciel couplant simulation et EAO

Pour étudier une branche scientifique, on utilise habituellement diverses sources de connaissances :

- * Des exposés, des textes et des graphiques fournissent diverses données de base (faits expérimentaux, valeurs numériques..) et les théories pertinentes (apprentissage semi-passif).
- * Des exercices et des travaux pratiques permettent de tester et d'améliorer la compréhension (apprentissage actif).
- * Le contact avec des professeurs éclaire les points litigieux, détecte les incompréhensions et ouvre de nouvelles perspectives (guidance individualisée).

Le logiciel à définir doit être, pour ces trois aspects, une aide "informatique", permettant au professeur d'enseigner sans être chargé de travail ancillaire et à l'étudiant de suivre avec fruit et à son rythme un enseignement adapté à sa personnalité.

Tout professeur de sciences ou de mathématiques, compétent ou non en informatique ou modélisation, doit pouvoir écrire ses leçons (didacticiels) aisément et rapidement, y intégrer à son choix les trois modes d'apprentissage cités ci-dessus et employer après adaptation des didacticiels reçus d'autres professeurs.

Sil connaît la programmation et/ou l'informatique, le professeur doit pouvoir utiliser ses connaissances en rédigeant de nouveaux modèles mathématiques et en insérant dans les modèles existants des sous-routines mathématiques ou graphiques avancés.

Pour réaliser vraiment le dialogue interdisciplinaire recherché, le logiciel doit fournir aux professeurs des différentes branches un environnement convivial et uniforme encourageant le partage d'expériences et l'emploi de termes et concepts compatibles.

Afin de concrétiser notre propos, décrivons brièvement ce qu'est une leçon d'EAO. Il s'agit d'une suite d'écrans d'ordinateurs. Chaque écran

présente du texte (informations et/ou questions) et des dessins (schémas statiques, dessins animés, graphiques issus de simulations ou préenregistrés). A la différence des moyens audiovisuels classiques, l'ordre et la vitesse de succession des écrans doivent pouvoir être contrôlés, soit par l'ordinateur en fonction des réponses de l'étudiant aux questions posées, soit par l'étudiant. Un exemple d'écran est donné à la Fig. 1. (NDLR : voir M&P 76, p. 25)

A ce stade, nous décrivons un programme d'EAO comme il en existe des milliers : un "livre informatique" dont l'ordinateur tourne les "pages écrans" dans un ordre pré-établi ou en s'adaptant à l'étudiant. Selon le type et la quantité de questions posées à celui-ci (oui-non, choix multiples, réponses à clefs, questions ouvertes admettant des réponses en langage naturel), la méthode de branchement entre écrans peut être élémentaire ou intelligente et adaptative. Dans ce dernier cas, les programmes d'EAO simulent le comportement d'un professeur jugeant les aptitudes de l'élève et essayant de lui présenter les textes, questions et problèmes les plus adaptés à son degré de compréhension. Selon un récent rapport de l'UNESCO ce mouvement d'EAO normal s'essouffle et ne justifie pas les espoirs (et l'argent) mis en lui.

Les raisons en sont simples. Tout ce qui est rigide est, tôt ou tard, limitatif et ennuyeux. De plus, diviser une matière subtile en unités de compréhension est une tâche de Titan, vouée a priori à l'échec. D'autre part, les programmes dits "intelligents" ne le sont encore que très marginalement et sont, de toute façon, trop coûteux. Le professeur et sa pédagogie restent bien sûr inégalés. L'étudiant doit rester actif dans sa formation et non la subir comme une programmation.

Il nous faut aller beaucoup plus loin : utiliser l'ordinateur pour ce qu'il est seul à pouvoir nous apporter en donnant à l'étudiant la possibilité de réaliser lui-même ses expériences. Les écrans de la leçon doivent donc lui fournir les moyens de définir, de faire et de visualiser n'importe quelle expérience réalisable sur le modèle étudié. A ce moment, toutes les critiques précédentes tombent : plus de répétitivité, plus d'ennui, plus de découpage artificiel ou de structure rigide. Le professeur joue à plein son rôle de "Magister" ; l'étudiant, pris au jeu, se prend en charge et construit peu à peu ses capacités d'induction et de déduction.

En résumé, le logiciel désiré doit coupler étroitement deux modes complémentaires d'enseignement :

-
-
- **ENSEIGNEMENT PASSIF** : un système d'EAO classique avec ses parties rédaction et emploi de leçons.
 - **ENSEIGNEMENT ACTIF** : un environnement de modélisation, de simulation et d'expérimentation.

Vu notre opinion sur l'EAO passif, le lecteur peut s'étonner du maintien de cette méthode dans notre cahier des charges. Selon le principe de la langue d'Esopo, ce type d'EAO est cependant la meilleure ou la pire des choses. Son emploi exagéré est néfaste. Son utilisation raisonnable pour guider l'étudiant à travers la leçon, pour lui transmettre les renseignements importants et pour détecter ses problèmes majeurs permet de libérer le professeur des aspects répétitifs et triviaux de son enseignement. Il peut donc consacrer son énergie aux aspects plus avancés et réellement didactiques. Nous concevons donc l'EAO non pas comme un dialogue bipolaire "étudiant-ordinateur" mais comme une tripartite où le professeur continue à jouer le rôle essentiel et est présent dans la salle d'ordinateur, en interaction constante avec l'étudiant.

Jusqu'ici, nous avons dégagé les caractéristiques souhaitables du point de vue emploi par l'étudiant. Pour la rédaction de leçons, ce qui est nécessaire se résume en peu de mots : il faut pouvoir intégrer textes, graphiques, questions, simulations, modèles et expériences aussi simplement que l'on utilise un traitement de texte. Des éditeurs puissants doivent permettre de définir tous les éléments d'une leçon et d'en tester au choix tout ou partie.

Un système intégré doit donc comprendre quatre modules :

- * Un "Système d'auteur" ou programme permettant à un professeur de rédiger, sans programmation, un didacticiel appelé "leçon".
- * Un programme "exécutif" qui permet à un étudiant de suivre les leçons construites au moyen du système d'auteur.
- * Une "bibliothèque de modèles dynamiques" de systèmes étudiés dans diverses branches. Chaque modèle peut être utilisé pour écrire une ou des leçons.
- * Un "catalogue des leçons" existantes et pouvant donc être utilisées au moyen de l'exécutif sans aucun travail préalable.

Nous allons maintenant décrire chacune de ces parties et ensuite leur couplage en un outil pédagogique complet.

2. Un environnement simple d'enseignement programmé passif

Lors du développement d'un cours, il faut structurer sa rédaction de façon à n'avoir à chaque instant qu'un travail de complexité raisonnable. L'environnement de construction et d'exécution de leçons doit donc être modulaire et présenter des cours formés de leçons, elles-mêmes composées d'écrans. Voyons successivement ces entités :

2.1. Les écrans

Il doit être possible de définir un écran sans programmer par interaction avec un interface très convivial (menus, formulaires, éditeurs de textes et de graphiques). Après sa création, un écran doit pouvoir être automatiquement exécuté, tel que l'étudiant le verra, sans devoir attendre que toute la leçon soit disponible. La modification doit être très facile afin que l'on puisse partir d'une idée, la réaliser et la perfectionner au vu des résultats.

Au niveau du texte, remarquons que l'accumulation d'informations écrites à l'écran est très fastidieuse pour l'étudiant. On doit l'éviter autant que possible et on préférera accompagner le cours d'une brochure explicative donnant tous les détails nécessaires. Idéalement, les textes ne seront utilisés que pour rappeler un résumé de la théorie illustrée par le modèle et pour transmettre les informations nécessaires à la compréhension des expériences de simulation.

Les questions doivent être simples. L'essentiel est en effet ce qui se passe de façon intuitive dans la tête de l'étudiant et ce qui est échangé de façon orale avec le professeur. En pratique, les choix multiples suffisent amplement. De nouveau, nous pensons qu'une accumulation de questions est, quel que soit leur mode de présentation, ennuyeuse et contre-indiquée. Dans une bonne leçon de simulation, il y aura donc peu de questions. Elles serviront uniquement à vérifier si les messages véhiculés implicitement par les simulations ont été bien perçus. Elles présenteront aussi à l'étudiant des menus lui permettant d'orienter son travail.

Les dessins doivent être de divers types : schémas de principe des modèles, graphiques préenregistrés, texte "graphique" utilisant des polices de caractères et des présentations plus sophistiquées que celles de l'éditeur de texte normal.

Les graphiques de simulation présenteront sous forme de courbe ou de dessins animés l'évolution des variables du modèle. Formant l'essentiel du contenu pédagogique d'une leçon de simulation, ils seront décrits plus loin en détail.

2.2. Les leçons et les cours

Pour la facilité du développement, une leçon ne comprendra que 20 à 30 écrans séquencés simplement (peu de branchements). Cependant lors de l'exécution de chaque écran, si le développeur veut en laisser la possibilité à l'étudiant, celui-ci pourra sauter d'un écran vers n'importe quel autre. Il conservera donc la liberté de son cheminement à travers la matière. Les leçons se chaîneront les unes aux autres pour former un cours branché ou séquentiel.

En résumé, la simplicité est le mot d'ordre. En rupture avec la tradition, un environnement d'EO, adapté à la simulation, sera limité dans ses subtilités souvent surfaites dans la littérature. Il n'encouragera ni l'étudiant à être passif, ni le professeur à déléguer à l'ordinateur ses responsabilités pédagogiques. Il ne sera qu'un aide de laboratoire mais un aide performant et souple, guidant l'étudiant vers le plus important : réfléchir par lui-même et comprendre les simulations.

En ce qui concerne le développement, le système privilégiera la facilité, la modularité, l'interactivité et le graphisme.

3. Un laboratoire avance de simulation

Lors d'une expérience réelle (non simulée), un chercheur ou un étudiant organise en fait son travail en trois niveaux (Fig. 3) :

- * Au niveau le plus élémentaire se trouve le système à étudier.
- * Afin de permettre l'expérimentation, on connecte ce système à des appareils de mesure et dispositifs de contrôle.
- * Enfin, les procédures et instructions à exécuter pour réaliser l'expérience forment "un programme" au sens informatique.

Dans le mode réel, les deux premiers niveaux, formés de systèmes et d'équipements matériels sont de type "hardware". La troisième couche est de type "software". Afin de reproduire facilement une expérience, un environnement de simulation doit reproduire ces niveaux : systèmes, appareils et procédures y seront réalisés par des sous-routines spécifiques.

Par opposition avec la partie *EAO*, ici rien n'est trop beau : il faut donner à l'étudiant et au professeur le moyen d'exprimer leurs idées d'expériences. Tout aspect de la réalité doit pouvoir être simulé. Toute contrainte informatique est tôt ou tard perçue comme artificielle et inacceptable. L'environnement qui va être esquissé va donc synthétiser l'état des recherches en ce domaine.

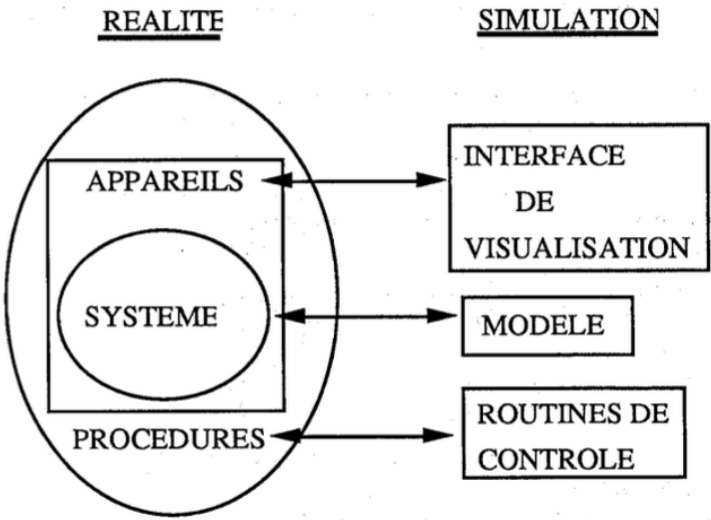


Fig. 3 : Organisation d'une expérience de laboratoire : un programme de simulation moderne doit fournir les outils logiciels pour simuler non seulement le modèle mais aussi l'ensemble des opérations réalisées dans ces trois couches.

3.1. Les modèles

Les modèles doivent être définis très simplement par des routines compréhensibles par chacun et similaires à celle décrite dans l'exemple (*RLC*) cité

plus haut. Les instructions de simulation (intégration, tests de précision, stockage de paramètres, dessins) doivent être définies dans le logiciel. L'utilisateur ne doit pas avoir à s'en préoccuper. L'intégration numérique doit utiliser au choix soit la méthode d'Euler vue précédemment, soit des méthodes plus précises (Adams-Moulton, Runge-Kutta...). Ce choix doit être accessible à l'utilisateur comme il utilise un appareil familier quelconque, sans nécessiter de connaissances mathématiques.

Si le professeur ne veut pas se préoccuper de modélisation, il doit trouver à sa disposition une librairie de modèles couvrant tous ses besoins. S'il veut écrire ses modèles ou modifier ceux de la librairie, le logiciel doit lui fournir un environnement complet et convivial de développement de modèles.

3.2. Une librairie de modèles orientée vers le secondaire

Une librairie permettant, au niveau secondaire, d'aborder tant les sujets classiques que les progrès récents (et donc motivants) peut, à titre d'exemple, avoir le contenu suivant :

Physique : loi de Newton, mouvements divers, orbites des planètes, gravité, satellisation, fusées, mouvement des électrons dans un champ magnétique, radioactivité, ondes.

Electricité : circuits *RLC* simples soumis à diverses excitations, filtrage du bruit, transmission d'ondes, redressement, modulation, électronique élémentaire.

Mécanique : pendules simples, frottements, oscillations libres et forcées, suspension de voiture, systèmes hydrauliques divers.

Régulation : contrôleurs *PID*, systèmes ouverts et fermés, contrôle par systèmes experts.

Systèmes multiénergétiques : barrages hydroélectriques et systèmes électriques à effet thermique (*CTN*, capteurs et transducteurs).

Mathématiques : aspect graphique et numérique de problèmes variés : fonctions, approximation, intégration, dérivation, séries.

Chimie : cinétique des réactions simples et/ou couplées, bilans de matières et d'énergie, enzymes, production biotechnologique.

Biologie : contraction cardiaque, muscles, transports cellulaires, cycle du glucose, potentiels électriques cellulaires, osmose et diffusion, circulation du sang, dynamique des populations.

Economie : gestion de stock, élasticité des prix, loi de l'offre et de la demande, dynamique des systèmes des populations.

Modèles non différentiels : filtres numériques, récurrences et chaos, attracteurs étranges, ensembles de Mandelbrot, lignes de transmission de paroles, réseaux de neurones formels.

Certains de ces sujets semblent dépasser le cadre du secondaire. Cependant, l'expérience prouve qu'il n'en est rien. Nous en avons réalisé des démonstrations devant des auditoires de ce niveau et l'apport majeur de la simulation est de mettre la formulation et l'étude de ces systèmes à un niveau de simplicité tel qu'elles peuvent s'aborder avec fruit dès la cinquième.

Faut-il refuser cette opportunité et cacher à nos élèves qu'ils peuvent comprendre aisément des sujets avancés. Ces modèles sont un réservoir inépuisable d'applications concrètes et intuitives des mathématiques et des diverses sciences et, en règle générale, motivent grandement l'étudiant.

3.3. Les appareils de visualisation et de mesure

Un environnement moderne doit être graphique pour deux raisons :

- * Il s'agit d'enseigner des concepts scientifiques souvent assez subtils (cf. le contenu de la librairie). Nous voulons amener nos étudiants, même peu doués, à la limite de leurs capacités. Il faut mettre tous les atouts dans notre jeu et le graphisme a une puissance évocatrice et ludique inégalée.
- * Nous voulons confronter nos étudiants non pas uniquement à des problèmes scolaires simplifiés mais aussi à des exemples tirés si possible de situations rencontrées dans les techniques et les sciences actuelles. Or, ils voient, tous les jours, des programmes performants (jeux, vidéo) ; comment les convaincre si nous leur donnons un programme qu'ils jugent dépassé ? Même, et surtout chez les étudiants simples, la qualité est de règle et seule, permet d'être pris au sérieux.

Il faut donc que le programme permette de choisir les variables à placer en abscisse et ordonnée des graphes, leurs échelles ainsi que leur emplacement sur l'écran. L'étudiant doit se sentir libre de construire l'aspect graphique de son travail. Il en éprouve de la fierté et de la joie.

Un modèle de complexité moyenne possède de nombreuses variables. On commence en général par en visualiser une ou deux. Beaucoup de professeurs pensent que l'étudiant se perd si on lui en montre trop à la fois. C'est vrai au début d'une étude. Toutefois, notre expérience montre que, rapidement, les utilisateurs éprouvent le besoin, pour éclaircir le comportement des signaux observés, d'en voir de nouveaux.

Ils sont ainsi amenés peu à peu à visualiser simultanément sur l'écran beaucoup de signaux afin de corréler diverses facettes du comportement du modèle (e.g. dans un circuit RLC : les tensions, courants, charges et flux en fonction du temps et/ou en plan de phase, diagrammes de Lissajous et réponses fréquentielles). Le logiciel doit permettre cette visualisation poussée. L'étudiant peut alors voir des graphes très simples ou intégrant de plus en plus d'informations.

Fréquemment, on aura aussi besoin de diagrammes plus spécifiques (polaires, logarithmiques, abaqes, diagrammes de Bode ...). Les appareils de mesure doivent aussi être simulés : cadrans, jauges, tableau de contrôle de type industriel,...).

En utilisant ces possibilités, on peut réaliser une simulation très sophistiquées et abstraite ou au contraire un environnement reproduisant assez fidèlement les capteurs et cadrans analogiques et numériques rencontrés dans la pratique. L'enseignement peut alors s'adapter aux besoins d'étudiants très différents.

3.4. Les procédures expérimentales

* Nous devons permettre la réalisation d'expériences élémentaires de façon très simple. Chaque étudiant, même peu familier avec le programme, doit pouvoir les réaliser.

A titre d'exemple, pour le modèle RLC vu plus haut, l'expérience la plus courante consiste à fixer les conditions initiales $VC0$ et $IL0$ ainsi que les divers paramètres et à réaliser la simulation de $T0$ à $TMAX$ en visualisant certaines variables. On peut alors modifier un paramètre et réobserver les résultats. En opérant de nombreux changements de paramètres et en essayant d'interpréter à chaque fois les résultats obtenus, l'étudiant obtient peu à peu une compréhension profonde du modèle étudié.

Une expérience de ce type peut être réalisée sur n'importe quel modèle. Elle est donc standard et pour la réaliser, le logiciel doit fonctionner en mode interactif (introduction par menus de toutes les modifications désirées).

* Cependant, nous devons aussi donner à l'étudiant avancé matière à réflexion et lui suggérer des problèmes de "recherche".

Un modèle doit donc, pour être intéressant, être ouvert. Ceci signifie que sa définition doit comporter de nombreuses variables (switchs de programmation) permettant de modifier, non seulement les paramètres mais aussi les caractéristiques structurelles. Par exemple, dans l'étude du circuit *RLC*, il faut donner à l'étudiant la possibilité de choisir la forme de l'excitation qu'il désire.

Nous pourrions au moyen d'un paramètre "switch" valant 1, 2, 3... considérer différentes sources (1 = impulsion, 2 = rampe, 3 = échelon, 4 = signaux périodiques, 5 = trains d'impulsions ...). Des switches similaires introduiraient optionnellement des résistances cubiques ou unidirectionnelles, des selfs à saturation, des condensateurs variables, des mesures de réponse en fréquence, des pannes...

En modifiant ces paramètres "switchs", l'étudiant et souvent même le professeur peuvent choisir leurs expériences et utiliser une leçon de nombreuses fois en découvrant toujours du nouveau.

* Enfin, pour déboucher sur l'application des mathématiques au réel, l'étudiant doit se rendre compte que l'aspect mathématique de ses simulations est, lui aussi, expérimental. Il doit pouvoir modifier les caractéristiques des méthodes de résolution et donc en analyser les aspects numériques (division par zéro, arrondis, erreur de discrétisation et d'échantillonnage, intégration par diverses méthodes).

Ces aspects appliqués sont pour lui des révélations : penser que le travail du mathématicien est fait d'essais et d'erreurs, de "sueur" et d'intuition lui ouvre des perspectives très éloignées de la vision livresque, déductive et axiomatique.

3.5. Guidance pédagogique de la découverte par simulation

Les parties d'EAO et de simulation qui viennent d'être décrites séparément, doivent en fait se renforcer dans chaque leçon : les textes,

questions et menus servant à guider l'étudiant dans sa démarche de compréhension du modèle simulé.

Ce soutien est bien nécessaire : devant réaliser des expériences de simulation, un étudiant est confronté à une tâche difficile. Il doit choisir les expériences simples par lesquelles démarrer, les valeurs de paramètres à fixer et à modifier, les signaux à visualiser. Après chaque simulation, il lui faut réfléchir aux interprétations des résultats, c'est-à-dire s'expliquer pourquoi les signaux dessinés ont les allure observées. Il doit en fait comprendre en détail les mécanismes et les relations de cause à effet à l'oeuvre dans le modèle. Chaque simulation lui suggère de nouvelles questions (que se passe-t-il si ... ? Pourquoi cela ... ? Comment arriver à tel résultat ?...) et peu à peu, comme expliqué plus haut, ses expériences et ses besoins de visualisation vont se complexifier.

Bien que son sujet d'étude ne soit pas le système réel mais des modèles plus simples, l'étudiant doit malgré tout apprendre à planifier sa démarche expérimentale. Le débutant, ne sachant en général pas par où démarrer, se bloque complètement. Le rôle de l'EAO est donc de :

- * décrire certaines expériences montrées à l'étudiant sans qu'il puisse intervenir et destinées à amorcer sa compréhension,
- * suggérer les expériences et les paramètres à essayer,
- * décrire et commenter les graphes et dessins visualisés,
- * demander les prévisions de l'étudiant avant un essai,
- * tester la compréhension des résultats et corriger les erreurs de prévision,
- * donner des explications alternatives et proposer des tâches annexes (e.g. lectures).

Rappelons que dans toutes ces tâches, l'EAO ne peut être qu'une aide pour le professeur. Celui-ci doit reprendre le contrôle des opérations (simulation) en interrompant la phase d'EAO dès que les questions abordées par l'étudiant deviennent plus complexes.

Nous supposons de plus que la transmission des connaissances de base et l'évaluation des étudiants sont réalisées par d'autres moyens.

Le caractère actif de la simulation est le principal avantage de notre approche. L'étudiant prend, en grande partie et sans même s'en rendre compte, son éducation en main. Il essaie ce que son imagination lui suggère.

Cela pose un problème : certains étudiants ont peu d'intérêt, de connaissances ou d'imagination. Il ne sert à rien de vouloir leur donner d'emblée

une liberté dont ils ne ressentiront peut-être jamais le besoin. Il faut éviter de transmettre le message :

”Vous êtes obligés de penser en toute liberté”

Il est donc nécessaire d'éduquer nos élèves à cette autonomie et d'admettre qu'elle est insupportable à certains. Pour apprendre graduellement aux étudiants à bien réfléchir et à travailler, les possibilités d'expérimentation ne doivent leur être données que de façon progressive. Lorsqu'une expérience est à réaliser, le professeur doit donc pouvoir choisir et augmenter graduellement l'autonomie de l'étudiant. Dans les cours donnés jusqu'ici avec un programme couplant EAO et simulation, nous utilisons quatre niveaux de liberté :

- * niveau 0 : voir une expérience imposée sans rien modifier et lire les explications données pas à pas.
- * niveau 1 : voir une expérience imposée et ensuite pouvoir modifier un ou deux paramètres imposés.
- * niveau 2 : modifier tous les paramètres librement, modifier les échelles des dessins et le nombre de points calculés.
- * niveau 3 : liberté totale (visualiser d'autres variables, changer le modèle par le biais des switches).

En général, les étudiants apprennent vite à se débrouiller. La partie EAO leur donne de l'autonomie et ils arrivent à se poser des questions plus poussées. Le professeur prend alors le relais.

Rappelons en effet une dernière fois que la simulation ne diminue en rien le rôle du professeur ni même sa charge d'enseignement. Elle les déplace simplement des tâches simples, routinières et peu intéressantes, vers des aspects plus fondamentaux.

En effet, si la liberté d'expérimentation est grande, la leçon ne peut tout prévoir. Interpréter, non pas les choses simples mais les aspects profonds, ne peut être fait que par le professeur. On arrive bien vite à un partenariat réel où professeur et étudiants mettent en oeuvre leurs facultés pour découvrir et comprendre des simulations de plus en plus réalistes. C'est là l'enseignement actif par excellence.

4. Conclusion : intérêt de la simulation

L'approche de la simulation qui vient d'être décrite rend plus vivantes les différentes sciences et montre leur intégration.

4.1. Impact du point de vue mathématique :

La simulation permet de percevoir la mathématique comme un outil de compréhension du monde réel et non comme un "jeu" de spécialiste.

Rendant inévitable, mais plus facile, la perception intuitive des concepts mathématiques, elle éveille l'intérêt de l'étudiant qui peut alors percevoir les aspects plus abstraits, s'y intéresser et sentir le besoin de rigueur dans ses formulations.

De très beaux exemples de découverte guidée sont les concepts de dérivée et d'intégrale. En début d'article, nous partons de l'hypothèse que l'étudiant moyen maîtrise ces notions. Ce n'est pas le cas normal. Toutefois, nous pouvons maintenant comprendre comment la simulation peut l'aider. Supposons qu'il commence par suivre une leçon sur trois modèles :

- * un mobile de vitesse donnée par des fonctions du temps connues : constante, polynomiale, exponentielle, sinus.
- * un réservoir rempli par un robinet dont le débit est également donné par diverses fonctions $f(t)$ connues.
- * une équation mathématique abstraite $[dy/dx = f(x)]$.

Il peut expérimenter sur ces modèles en choisissant les fonctions du temps et les valeurs de leurs paramètres. A l'écran, il peut voir les courbes dérivées (vitesse, débit, dy/dx) et les courbes intégrales (espace, volume, $y(x)$). L'écran lui montre également les dessins et les valeurs numériques des aires de rectangles sur les dérivées (intégration d'Euler) et des pentes de tangentes sur les intégrales. Guidé par l'EAO, il découvre les interprétations voulues. Voyant les courbes se tracer à l'écran, il en acquiert une vision intuitive qui lui servira, sans même qu'il s'en rende compte, chaque fois qu'il verra ensuite une courbe. Ces concepts deviennent partie intégrante de son bagage intellectuel.

Bien d'autres idées peuvent être illustrées par la simulation : étude des fonctions, polynômes, fractions rationnelles, calculs numériques, approxima-

tions et erreurs, limites, indéterminations, séries de puissances et de Fourier. Les expériences rendent très palpables et quasi concrètes ces notions abstraites.

4.2. Impact en physique, chimie, biologie et technique

Si l'expérience est difficile, lente, coûteuse ou dangereuse, la simulation est le moyen idéal de donner aux étudiants le contact avec le réel par des exemples plus poussés que les cas simplifiés que nous pouvons leur expliquer oralement. Rappelons par exemple, quelques modèles proposés auparavant :

satellisation, radioactivité, suspension automobile,
installation hydroélectrique, cinétique chimique,
osmose, chaos, attracteurs, énergétique musculaire,
cycle cardiaque, écologie.

De plus, même si l'expérience réelle est possible, la simulation en est un complément parfait :

Insistant sur la structure des concepts scientifiques, la simulation permet de se concentrer sur la compréhension causale des mécanismes de base sans être perturbé par des pannes, maladresses ou imperfections.

Toutefois, il ne faut pas exagérer : un modèle est une vision très simplifiée de la réalité. Cela doit être rappelé fréquemment aux étudiants qui, par vision réductrice, auraient tendance à croire que "toute la réalité" est prédite par le modèle. La simulation leur permet de "toucher du doigt" ce qu'est une théorie, concept dont beaucoup n'ont qu'une idée vague et péjorative. Ils doivent cependant relativiser les concepts de théorie et d'expérience et savoir que toutes deux sont nécessaires et complémentaires :

- * Rien n'est plus pratique qu'une bonne théorie.
- * Il est impossible de comprendre la réalité si on n'en comprend pas un modèle simplifié.
- * On ne découvre son degré d'ignorance d'un sujet qu'en le simulant sur ordinateur.
- * Le meilleur modèle du monde ne peut donner que ce qu'il a (ne vaut pas plus que ses hypothèses).

Enfin, par les rapprochements entre les sciences, la simulation est un outil d'unification illustrant de façon immanquable les analogies et économies de

pensée si utiles à la compréhension. A titre d'exemple, réexaminons nos exemples du début :

Vu la similitude des équations et des graphiques des variables, les analogies (masse-ressort) et (L-C) ressortent nécessairement. L'unité des phénomènes dissipatifs (résistance, frottement) est elle aussi évidente.

Ces analogies s'étendent à l'hydraulique à la pneumatique et à la thermodynamique introduite alors intuitivement : l'entropie est une "charge thermique" analogue à la charge électrique et $dS/dt \geq 0$ provient de l'existence d'une échelle absolue des températures (cf. bibliographie).

Les similitudes entre les systèmes précédents et les réactions chimiques deviennent claires. On peut définir des résistances et condensateurs "chimiques" manipulant l'énergie chimique comme les R et C électriques manipulent l'énergie électrique. Toutefois, les limitations de ces analogies sont mises en évidence : le concept de modèle dynamique en chimie est tout aussi valide qu'ailleurs mais les formules sont non-linéaires (action des masses $K * A * B$).

Par contre, la similitude entre la chimie simple et la biochimie ou la biotechnologie est claire : les modèles sont de même type mais toujours plus compliqués. La biochimie peut être illustrée par l'étude de mécanismes de contrôle enzymatique simple, mis à la portée des étudiants de cet âge.

Vu la facilité de formulation, l'étude ne se limite pas aux cas linéaires mais devient plus réaliste (hystérèse, saturations, dépendances temporelles) et débouche sur des systèmes réels que le logiciel permet de comprendre sans difficultés mathématiques. Chaque étudiant utilise alors l'intuition du domaine qui lui est le plus familier pour améliorer sa perception des autres.

En guise de conclusion, répondons à deux questions qui nous sont fréquemment formulées :

Q : Tout cela est bien beau mais va prendre du temps, denrée rare dans des programmes surchargés. Où le trouver ?

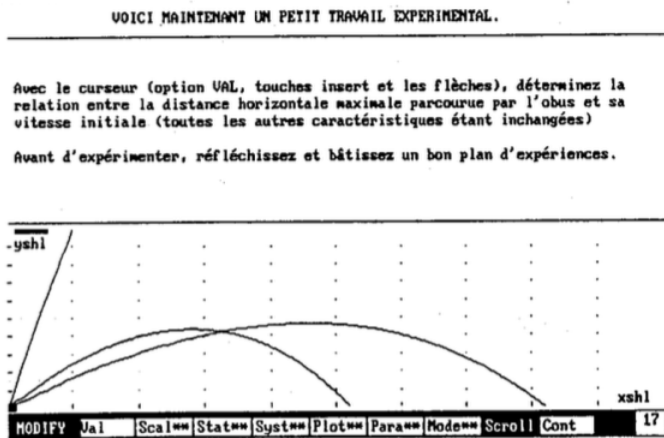
R : Ce n'est pas un problème. Les heures passées à passionner les élèves pour les mathématiques par la simulation se regagnent très aisément vu leur plus grand intérêt et leurs meilleures bases. Est-il utile de sauter cette phase ?

Par ailleurs, dans l'étude des sciences, en rendant familières des idées difficiles, la simulation fait toujours gagner du temps et crée de meilleurs rapports entre élèves et professeurs.

Q : Nous ne sommes pas formés à ces méthodes et à l'emploi de ces programmes. Comment pourrions-nous donc utiliser cette approche ?

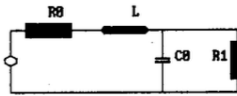
R : Les programmes décrits ci-dessus existent réellement et ont été testés par de nombreux étudiants et enseignants. Pour les utiliser, il n'est pas nécessaire de connaître la modélisation et la simulation. Il faut simplement consacrer quelques heures à la découverte des possibilités de la simulation dans un domaine où l'on est déjà compétent. Pour aller plus loin, des recyclages, organisés par le Ministère de l'Education, de la Formation et de la Recherche scientifique, permettent d'étudier la modélisation et de maîtriser l'outil logiciel.

Appendice : exemples d'écrans couplant EAO et simulation



Un canon tire des obus (vitesse et angle réglables, frottement, pesanteur et densité de l'air simulés). Une ligne de commande fournit les moyens d'expériences (VAL : valeurs numériques, SCAL : échelles, STAT : valeurs initiales, SYST : caractéristiques de la résolution mathématique, PLOT : visualiser d'autres variables, PARA : changer les paramètres.)

DANS CETTE LECON, VOUS ALLEZ UTILISER LE MODELE DESSINE CI-DESSOUS.



SE = sinus, pulse, step
ou rampe.

L'entrée en tension SE
est bruitée ou non.

C8 and R8 sont linéaires
ou quadratiques.

SIMCAI vous donne un banc d'essai sur le modèle qu'il utilise et vous pouvez
simuler toutes les expériences que vous feriez en réalité avec le système
réel représenté.

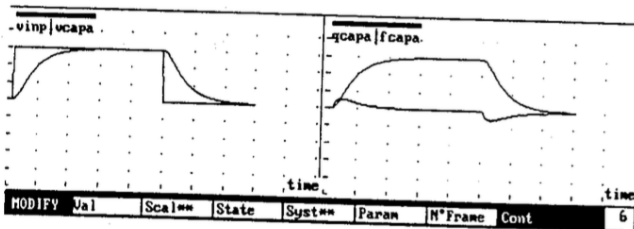
Utilisant cette démonstration devant vos étudiants, vous pouvez donc leur
montrer toutes les facettes du comportement du circuit RLC.

VUE N°Frame Cont 2

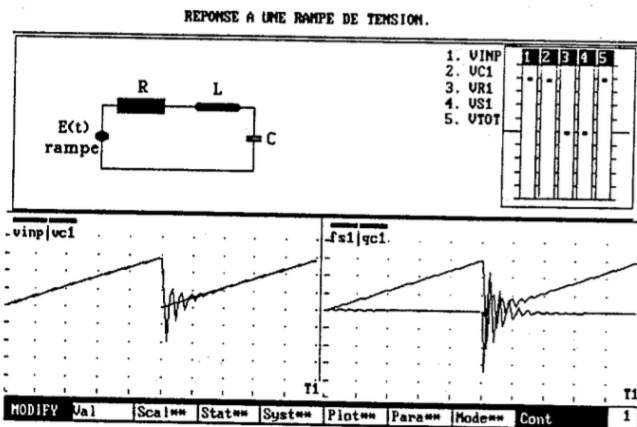
Ecran expliquant aux professeurs devant utiliser un circuit RLCR ce qu'ils
peuvent modifier dans le modèle utilisé.

REPONSE IMPULSIONNELLE: ETUDE EN FONCTION DU TEMPS.

Le graphe de gauche donne v_{inp} (pulse d'entrée) et v_{capa} (tension sur C8) en
fonction du temps. A droite, vous avez q_{capa} (charge de C8) et f_{capa} (courant
dans C8 = dérivée de la charge). MODIFIEZ $r8$, $c8$, $f1$, $tdpuls$ et $apuls$.
Pour certaines valeurs, la résolution numérique et/ou le plot sont
impossibles. MODIFIEZ alors les variables systèmes et les échelles.

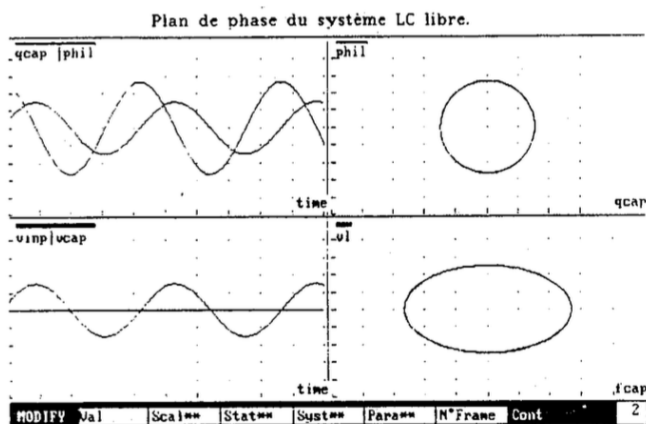


Réponse impulsionnelle du circuit de l'écran précédent ($R1$ très grand). Le
texte décrit les différentes variables et suggère une expérience (note : $f1$ =
courant IL dans la self, $tdpuls$ et $apuls$, durée et amplitude de l'impulsion
de tension d'entrée).

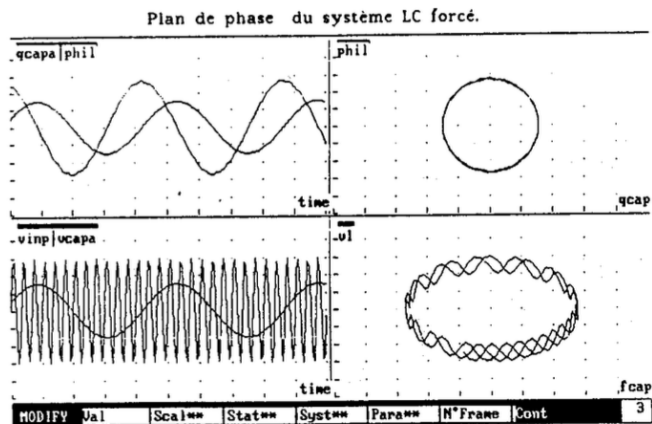


Réponse du circuit illustré à une rampe de tension triangulaire, on voit les oscillations de relâchement sur toutes les réponses du circuit. Remarquez la simulation d'appareils de mesures.

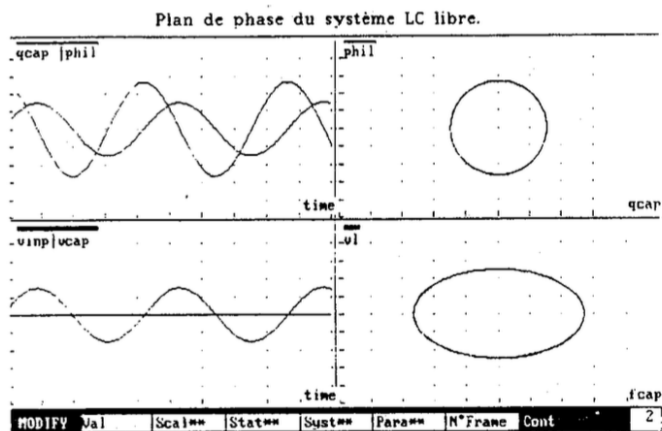
Note : les figures données ici, étant initialement en couleurs, sont mal rendues par l'impression.



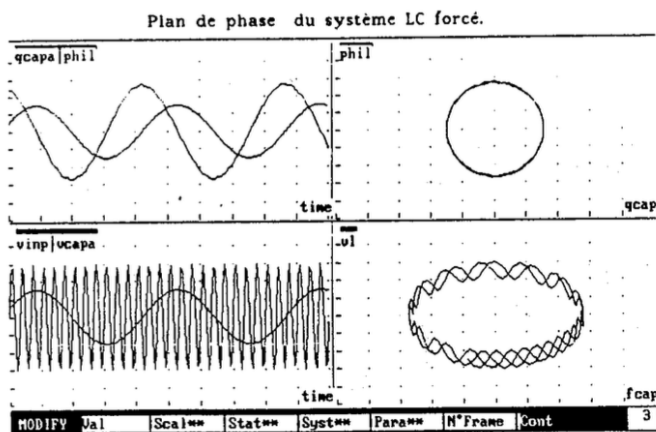
Système $L-C$ (sans résistance) : oscillations libres dues à une charge initiale sur C . (note : $qcap$ = charge sur C , $phil$ = flux sur L , $vcap$ = tension sur C , $fcap$ = courant dans C , $v1$ = tension sur L)



Oscillations forcées du même circuit (tension sinusoïdale $vinp$ à fréquence beaucoup plus élevée que la période propre du système LC). Remarquez la différence entre les plans de phase intégraux $[\phi, q_{cap}]$ et dérivés $[v = d(\phi)/dt, f_{cap} = d(q_{cap})/dt]$.



Un système biologique (ventricule gauche de l'homme) : simulation des pressions lors d'un infarctus très aigu. Inexplicable ici par manque d'espace, ce modèle a été testé par plus de 1000 étudiants (secondaire et université) et 50 cardiologues.



Le coeur, mourant dans l'écran précédent, est ici sauvé par la réaction de l'étudiant. C'est un exemple frappant du réalisme de la simulation. On est loin de l'académisme des exemples usuels. Note : les équations de cet exemple sont identiques à celles d'un circuit électrique possédant un condensateur variable.

Bibliographie

- [1] G.V. Korn et J.V. Wait : *Digital Continuous System Simulation*, Prentice Hall, 1978, 220 pages.
Introduction concrète, simple et didactique à la simulation.
- [2] J.R. Randall : *Microcomputers and Physiological simulation*, Addison-Wesley, 1980, 235 pages.
Applications biologiques ; livre simple à comprendre si on a d'abord parcouru les chapitres 1 et 2 de la référence 1.
- [3] D.R. Karnopp et R. Rosenberg : *System Dynamics, a unified approach*, Wiley, 1975, 400 pages.
La référence princeps du modélisateur de systèmes physiques. Pédagogique, pragmatique et complet, ce livre forme la base du contenu des journées de formation citées dans l'article.
- [4] J. Lefèvre et J. Barreto, An approach of biochemical models, *Journal of Franklin Institute*, vol 319, n° 1/2, pp. 201-220, 1985.

Extension de la méthode utilisée dans la référence 3 à la biochimie, exemples utilisables dans l'enseignement.

- [5] E. Cambier, R. Moonens, C. Klipper : numéro spécial de la revue "*Education et Technique*" consacré à la simulation et à la modélisation, n° 28, mai 1989, 40 pages

Etude de l'impact potentiel de la modélisation dans notre enseignement. (contient aussi une bibliographie)

- [6] J. Lefèvre : An authoring system coupling simulation to computer aided instruction, in "*Modelling and Simulation for control of lumped and distributed parameter systems.*", Proceedings of an IMACS-IFAC symposium, P. Borne ed., Villeneuve d'Ascq, France, pp.511-516, 1986.

Description du logiciel dont sont tirées les illustrations de cet article et qui possède les fonctions d'EAO décrites dans le texte principal. Ce logiciel s'appelle :

SIMCAI = SIMULATION AND COMPUTER AIDED
INSTRUCTION

Pour tout renseignement complémentaire au sujet de ce programme ou pour tout commentaire sur cet article, s'adresser à

IDEAS : Information Developpements for Educational
Applications and Systems
151, Av. De Fré, 1180, Bruxelles - tel. : 02/3740739

NDLR : L'éditeur responsable de la revue "Education et Technique" nous a aimablement accordé l'autorisation de reproduire ce texte, paru dans le n°29 du journal "Education et Technique" (1989, pp. 3-35), et dont la première partie a été publiée dans le n°76 de "Mathématique et Pédagogie" (1990, pp. 19-35).

L'algèbre : langage difficile ?

J. Rossi, *I.T.E. Huy, animateur au C.A.F. Huy*

Grâce à la collaboration de dix établissements des Provinces de Liège et du Hainaut, le Centre d'Autoformation et de Formation Continue de Huy s'est intéressé aux difficultés que rencontrent certains élèves lors de l'apprentissage de l'algèbre. Près de 2000 épreuves d'élèves, relevant de questions classiques d'algèbre, ont pu être examinées pour les 3-ièmes et 4-ièmes années. Cette enquête ne prétend nullement donner une image fidèle de "l'élève moyen" face au calcul algébrique. Elle donne plutôt l'image que nous renvoient les élèves de notre enseignement : image parfois déformée mais toujours révélatrice.

Les erreurs des élèves ont été classées en diverses catégories. On a admis, à ce niveau, qu'il était possible dans la plupart des cas d'identifier ce qui avait provoqué la faute lors d'un calcul (erreur de signe, de calcul d'une valeur numérique, erreur lors d'une addition de fractions ...) même si, dans l'absolu, une erreur considérée dans sa globalité ne peut se comparer à une autre. Ces classes étant définies, avec les précautions évoquées, on peut alors tenter de déterminer dans quelles circonstances elles apparaissent et sous quelle forme : c'est l'image que l'élève nous renvoie. Il ne s'agit donc pas de mesurer des fréquences absolues d'erreurs mais d'affecter à tel type d'exercice d'algèbre classique les classes d'erreurs les plus représentatives et de confronter cette observation avec l'expérience quotidienne de nombreux collègues. Nous nous sommes limités à dix types de questions : les opérations sur les polynômes, le calcul de la valeur numérique d'un polynôme, la factorisation, les opérations sur les fractions rationnelles, les opérations sur les radicaux, la résolution d'équations et d'inéquations réductibles au second degré, les systèmes de deux équations linéaires paramétriques, le tracé de la fonction du second degré et enfin une classe de questions plus large relative à la résolution de problèmes par l'algèbre.

Dans le cas des opérations sur les polynômes, les fautes de calcul numérique et de signe l'emportent largement sur les erreurs liées à la connaissance de la méthode à appliquer. A ce stade de l'apprentissage, les opérations telles que

$$x + 0, 19x$$

ou

$$2, 3x + \frac{1}{3}x$$

provoquent de nombreuses erreurs et l'utilisation correcte du signe d'égalité n'est pas encore assimilée. Ainsi la suite bien connue

$$3x^2 + x(x+1) = x^2 + x = 4x^2 + x$$

est une suite d'égalités fausses que l'on rencontre également lors du calcul de la valeur numérique d'un polynôme. A cette occasion, on remarque la même inexpérience dans la manipulation des symboles $p(x), p(-2), \dots$ que celle observée à propos du signe d'égalité. De même, les étapes intermédiaires, si utiles lors des premiers pas de l'apprentissage, sont escamotées par de nombreux élèves. A titre d'exemple, pour la question

$$p(x) = 3x^2 + 5x - 4 \quad q(x) = 3x - 3$$

calcule

$$p(x) - q(x)$$

l'étape qui consiste à "poser le calcul"

$$p(x) - q(x) = 3x^2 + 5x - 4 - (3x - 3)$$

est rarement explicite.

Les difficultés liées à l'usage des parenthèses se précisent dans les exercices de factorisation. On a

$$a(x+1) + b(x+1) \longrightarrow ab(x+1)$$

ou encore

$$ax + bx + a + b \longrightarrow x(a+b)(a+b).$$

Plus tard, nous les retrouverons dans d'autres circonstances telles que le développement correct du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & -1 \end{vmatrix} \longrightarrow (1-1) - (m-m)$$

ou plus clairement dans les opérations de substitution lors de la résolution de systèmes.

Transformer une expression en produit de facteurs n'est pas une opération évidente à comprendre. Certains se contenteront de

$$x^3 - x^2 + x - 1 \longrightarrow x(x^2 - x + 1) - 1,$$

la factorisation “complète” comme nous la souhaitons n’étant pas reconnue, d’autres écriront

$$\begin{aligned}
 x^6 - 64a^6 &= (x^3 - 8a^3)(x^3 + 8a^3) \\
 &= (x - 2a)(x^2 + 2ax + 4a^2)(x + 2a)(x^2 - 2ax + 4a^2) \\
 &\rightarrow (x - 2a)(x + 2a)^2(x + 2a)(x - 2a)^2 \\
 &\rightarrow (x - 2a)^3(x + 2a)^3 \\
 &\rightarrow (x^3 - 6ax^2 + 12ax \dots)(\dots)
 \end{aligned}$$

Il faut remarquer que, pour tous ces élèves, le traitement intensif d’expressions littérales, avec usage de techniques diverses, parfois très éloigné d’opérations numériques concrètes, est d’introduction récente. Le traitement algébrique demandé est assez formel et, détaché d’un contexte palpable, il ne représente pour certains élèves qu’une succession de symboles. Leurs erreurs sont là pour en témoigner :

$$\begin{aligned}
 (x - 2)(x + 2) &\longrightarrow (x + 2)^2 \\
 (a^2 - 9) &\longrightarrow (a - 3)^2 \\
 (a^2 - 6a + 9) &\longrightarrow (a - 3a + 3)^2
 \end{aligned}$$

Le sens attribué à l’expression par l’élève est dans ce cas plus visuel qu’opérateur ou, si l’on veut, le sens de l’expression dépend plus de ce qu’il “voit” que de ce qu’il “comprend”. La reconnaissance de l’ensemble des opérations à faire dans un ordre cohérent pour mener à bien l’exercice proposé est le niveau le plus profond de l’incompréhension. Elle est liée à d’autres niveaux de reconnaissance tels que la distinction entre un produit et une somme, un facteur et un terme, la reconnaissance d’un produit remarquable et l’analyse correcte des rôles respectifs des constituants de l’expression (rôle des parenthèses, rôle des barres de fraction, identification des éléments à substituer dans une formule, etc). C’est peut-être ce qui explique que les outils de remédiation traditionnels, comme les exercices répétitifs, nous paraissent inefficaces tant que l’élève n’a pas franchi le stade de l’assimilation de la signification de l’expression algébrique qui lui est proposée et tant qu’il ne maîtrise pas les règles de transformation de l’expression en une expression égale.

Dans les calculs relatifs aux fractions littérales, l'élève nous restitue des erreurs analogues :

$$\begin{aligned}\frac{a(a+1)+\dots}{a^3+1} &\longrightarrow \frac{a(a+1)+\dots}{a^{3^2}+1} \\ \frac{a}{a+2} + \frac{2a}{a^2-4} &\longrightarrow \frac{a}{a+2} + \frac{2a}{a+2} \cdot \frac{2a}{a-2} \\ \frac{(a+3)^2}{(a-3)^2} &\longrightarrow -1 \\ \frac{2a}{2b-c} : \left(\frac{b+c}{3} - \frac{c}{2} \right) &\longrightarrow \frac{2a}{2b-c} \left(\frac{3}{b+c} - \frac{2}{c} \right)\end{aligned}$$

Il paraît clair que l'élève tente de reproduire (d'imiter) un traitement inadapté à une expression pour lui formellement équivalente à une autre déjà rencontrée dans son passé algébrique. On reconnaît d'ailleurs le même schéma dans le cas de traitements de radicaux :

$$\begin{aligned}(3\sqrt{5}-4) &\longrightarrow 3\sqrt{5}^2 - \dots \longrightarrow 15 - \dots \\ 2\sqrt{3} &\longrightarrow 3 \\ \sqrt{a^2+16} &\longrightarrow a+4\end{aligned}$$

dans ce dernier cas, l'élève tente de reproduire le traitement "distributif" qui, à ce moment, est devenu un automatisme bien rodé.

Dans tous les cas cités ci-avant, il ne faut pas sous-estimer les lacunes liées à la méconnaissance des propriétés qui devraient être connues par l'élève. Ainsi, dans une classe de 4-ième (début d'année), on obtient la répartition suivante :

$\sqrt{9}$ vaut	3	± 3
réponses	43%	57%

⁽¹⁾

La résolution d'équations et d'inéquations réductibles au second degré, fort présente dans les questions posées en 4-ième, confirme les diverses interprétations déjà citées. Il faut en effet comprendre que la forme factorisée est utile et s'y ramener sans faute. Ce calcul algébrique doit être pensé avant d'être réalisé et il semble que l'élève ne fait pas aisément cette anticipation. Mais d'autres difficultés sont présentes. Ainsi, l'élève ne sait pas

1. Pierre DASSY, Professeur à l'Athénée Royal de Hannut, m'a fait part de nombreuses observations faites dans ses classes

toujours ce qu'il doit faire des dénominateurs : les développer ? les factoriser ? les chasser ? les annuler ? ... S'il trouve le dénominateur commun correct, il faudra encore qu'il construise correctement les divers numérateurs correspondants et qu'il utilise avec soin divers signes, barres de fractions, parenthèses, exposants, bref toute une syntaxe qu'il a tendance à malmenier et à "court-circuiter". L'obstacle grammatical étant surmonté, il doit décoder la nouvelle situation et éviter de lui appliquer une recette consciencieusement répétée.

Quelques situations "classiques" :

$$\frac{3x^2 - x - 18}{x^2 - x - 6} > 2 \longrightarrow 3x^2 - x - 18 > 2(x^2 - x - 6)$$

$$x^2 - 2 > 0 \longrightarrow x > \pm\sqrt{2}$$

$$D = m(m + 4) + 3 = 0 \iff m = 0 \text{ ou } m = -4$$

Pour l'élève en difficulté, le calcul algébrique est une succession d'obstacles grammaticaux et sémantiques auxquels il substitue, pour se rassurer, une série de recettes. Dans le "meilleur des cas", seuls les automatismes sont connus. Pour le professeur, se pose la question de définir les formes des expressions que l'élève est capable de décoder. Souvent, celles-ci sont trop complexes pour être analysées sans recours au concret. Chaque fois qu'une famille de formes est ainsi analysée et illustrée, on peut alors se permettre de la transformer. Or, dans la plupart des séquences d'apprentissage (cf. manuels scolaires par ex.), le travail sur les formes précède de loin l'application de celles-ci à des problèmes réels. Cet ordre de présentation n'est cohérent qu'en apparence puisque, lors du travail sur ces formes, le sens des symboles n'est pas présent. Ainsi, il est difficile de montrer à l'élève, autrement que par un autre calcul formel, pourquoi on lui apprend telle ou telle technique.

Un regard sur l'organisation de l'apprentissage est d'autant plus nécessaire que, contrairement à d'autres langages, le langage algébrique est desservi par le passé de l'élève. En général, le vécu de l'enfant est assez pauvre pour ce qui est du formalisme et de la logique symbolique. Ainsi, des élèves peu familiarisés pratiquement avec la parabole et son équation $y = ax^2 + bx + c$ proposeront des énoncés tels que :

$$\Delta = -2 < 0 \Rightarrow \text{pas de sommet}$$

ou

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{impossible (sans définir ce qui est impossible),}$$

alors que d'autres, bons calculateurs, se contenteront de calculer de nombreux points de la courbe et obtiendront un tracé valable.

On peut profiter de ce penchant naturel pour le point par point (qui permet le contact avec des situations concrètes : variation d'aires, saut en longueur, ...) pour se familiariser avec des graphes de fonctions non linéaires et mettre en évidence les familles $y = ax^2$ puis $y = ax^2 + bx$.

Pour de nombreux élèves, ces étapes de maturation sont indispensables avant d'aborder la forme $y = ax^2 + bx + c$. Dans ce cas, l'organisation de l'apprentissage est inversée puisque la parabole est une "donnée".

Précisons qu'il n'est pas question de réduire les compétences exigibles, au contraire. La synthèse des divers résultats s'organise autour des familles de courbes représentées, de leurs équations respectives et des valeurs de Δ , a , $-\frac{b}{2a}$, c .

Le cas de la fonction de second degré est particulièrement simple puisque l'objet médiateur vers le réel est tout trouvé : la courbe elle-même ! Dans d'autres circonstances d'apprentissage, les références au réel sont moins faciles. Dans tous les cas, elles seraient bien précieuses pour favoriser la maturation du sens, maturation dont nous ressentons également la nécessité lorsque nous nous proposons d'explorer un domaine des mathématiques qui ne nous est pas familier.

Adresse de l'auteur :

Jean ROSSI

C.A.F. (Centre d'Autoformation et de Formation Continué de la
Communauté Française)

1A, rue Grégoire Bodart

5200 Huy.

Quelques utilisations pragmatiques de la mathématique financière

D. Justens, *Institut Cooremans, Université Libre de Bruxelles*

L'exception confirme la règle : l'impôt peut parfois être bénéfique.

1. Présentation

L'utilisation du crédit est quasi systématique aujourd'hui. Il apparaît très souvent que le grand public est généralement très mal informé du coût réel de l'emprunt auquel il doit (ou veut) avoir recours.

Nous avons montré par exemple (voir [5]) que l'utilisation du taux de chargement et l'obligation légale de donner une mauvaise approximation du taux réel ajoutaient encore au désarroi général. Nombreuses sont en effet les personnes qui confondent allègrement les notions de taux d'intérêt et de taux de chargement. Une erreur que certains ont par ailleurs intérêt à encourager...

Des techniques mathématiques existent qui permettent le calcul du taux réel de rémunération du service rendu. Ces méthodes sont malheureusement fort peu diffusées. Il apparaît donc essentiel de les rappeler en montrant comment on peut étendre sans effort significatif de mathématisation à la fois leur champ d'application et la portée des résultats obtenus. Il est par exemple possible de calculer l'incidence de l'impôt sur le taux réel lorsque les charges financières sont partiellement déductibles, ce qui est le cas de la plupart des emprunteurs privés.

La première remarque est la suivante : l'impôt touche différemment la partie remboursement du capital proprement dit, l'amortissement, que la partie rémunération du service rendu, la charge financière. En effet, la charge financière est presque toujours partiellement déductible, l'amortissement l'est beaucoup plus rarement et généralement dans une moindre mesure. Il importe donc de scinder les remboursements en distinguant d'emblée les deux parties constitutantes.

2. Amortissements et frais financiers.

Nue-propriété et usufruit

Cette partie est largement développée dans [5] et dans [6].

Considérons un contrat tout à fait général : un emprunt de montant V souscrit en $t = 0$ et remboursé par n montants équidistants a_k .

Les remboursements peuvent être quelconques. Il est toutefois nécessaire de supposer

$$\sum_{k=1}^n a_k > V$$

ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution $i > 0$ à l'équation :

$$V = \sum_{k=1}^n a_k \cdot (1+i)^{-k}. \quad (1)$$

(1) exprime l'égalité entre les montants empruntés et remboursés actualisés. La théorie de l'actualisation peut se trouver notamment dans [2], [3] et [4].

La fonction $(1+i)^{-k}$ permet de donner la valeur aujourd'hui d'un versement échéant k unités plus tard. Le taux i est le taux d'intérêt associé à l'unité de temps correspondant à l'intervalle de temps écoulé entre deux versements successifs. Nous avons supposé cet intervalle constant, ce qui assure la cohésion de la représentation.

On peut remarquer que bien des organismes définissent i pour une période différente de l'unité *naturelle* du contrat.

Il convient de diviser a_k en amortissements et frais financiers. Ceci se fait aisément en utilisant la dette restante due en $t = k - 1$, c'est-à-dire une unité de temps avant le moment considéré.

Notons par exemple : D_{k-1} la dette restant due. On peut alors définir la charge financière

$$F_k = D_{k-1} \cdot i. \quad (2)$$

Nous obtenons ainsi une interprétation naturelle du taux d'intérêt : celui-ci est tout simplement la proportion du capital dû exigée comme rémunération pour le service rendu. On peut vérifier que cette interprétation est compatible avec l'équation (1).

On trouve ensuite :

$$M_k = a_k - F_k. \quad (3)$$

La nouvelle dette restant due est alors :

$$D_k = D_{k-1} - M_k. \quad (4)$$

Le calcul itératif est possible si l'on observe que $D_0 = V$.

On peut donc sans difficulté construire pas à pas la succession des amortissements et des frais financiers. On montre que (voir [5]) :

$$\sum_{k=1}^n M_k = V \quad (5)$$

ce qui assure la cohérence de la théorie classique des tableaux d'amortissements.

La différence essentielle existant entre les amortissements (récupération du capital) et les frais financiers (rémunération du service) conduit aux notions de nue-propriété et d'usufruit.

On appelle nue-propriété d'un emprunt, la valeur actuelle des amortissements. Le taux d'actualisation considéré ne doit pas nécessairement être égal au taux du contrat. Soit x ce taux. On a :

$$P(x) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot (1+x)^{-k}. \quad (6)$$

De même on appelle usufruit d'un emprunt la valeur actuelle des charges financières. Comme précédemment, on a :

$$U(x) = \sum_{k=1}^n F_k \cdot (1+x)^{-k}. \quad (7)$$

On montre très facilement que lorsque x est le taux du contrat, à savoir lorsque $x = i$:

$$P(i) + U(i) = V. \quad (8)$$

En regroupant les termes ayant même facteur d'actualisation, on retombe sur l'équation (1).

La relation (8) n'est vérifiée que pour le taux i . Elle peut donc être considérée comme une définition implicite de ce taux.

Pour se dégager des conditions particulières d'un contrat, il nous reste à définir les notions de nue-propriété et d'usufruit unitaires :

On appelle nue-propriété unitaire la nue-propriété par unité de montant emprunté ou encore par unité monétaire empruntée. On a

$$p(x) = \frac{P(x)}{V}. \quad (9)$$

L'usufruit unitaire est l'usufruit par unité de montant emprunté et par unité de taux. L'usufruit est donc doublement unitaire. On note :

$$u(x) = \frac{U(x)}{V.i}. \quad (10)$$

Remarquons que l'usufruit est unitarisé par rapport au taux du contrat et non par rapport au taux d'actualisation choisi.

Démontrons une propriété essentielle des nue-propriété et usufruit unitaires : quel que soit le taux x choisi pour l'actualisation, on a :

$$p(x) + x.u(x) = 1. \quad (11)$$

Remarquons tout d'abord que pour les nue-propriété et usufruit, cette relation s'écrit :

$$P(x) + \frac{x}{i} U(x) = V. \quad (12)$$

On observe que (12) n'est pas équivalente à (8) et qu'elle ne peut constituer une définition d'un quelconque taux.

Démontrons cette propriété.

Calculons :

$$\frac{U(x)}{i} = V.u(x) = \sum_{k=1}^n D_{k-1} \cdot (1+x)^{-k} \text{ et } P(x) = V.p(x) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot (1+x)^{-k}$$

Par soustraction, on obtient immédiatement :

$$V.[u(x) - p(x)] = \sum_{k=1}^n [D_{k-1} - M_k] \cdot (1+x)^{-k}.$$

En utilisant la relation (4),

$$= \sum_{k=1}^n D_k \cdot (1+x)^{-k} = (1+x) \sum_{k=1}^n D_k \cdot (1+x)^{-(k+1)}.$$

En observant que D_n est nul et en changeant d'indice, on écrit :

$$= (1+x) \cdot \sum_{k=2}^n D_{k-1} \cdot (1+x)^{-k}.$$

En ajoutant et en retranchant un même terme, on trouve :

$$\begin{aligned} V \cdot [u(x) - p(x)] &= (1+x) \cdot \left[\sum_{k=1}^n D_{k-1} \cdot (1+x)^{-k} - D_0(1+x)^{-k} \right] \\ &= (1+x) \cdot [u(x) \cdot V - V \cdot (1+x)^{-1}]. \end{aligned}$$

Simplifions par V et distribuons :

$$u(x) - p(x) = u(x) + x \cdot u(x) - 1.$$

On obtient immédiatement :

$$p(x) + x \cdot u(x) = 1$$

ce qui achève la démonstration.

3. Modifications extérieures au contrat

Les conditions théoriques du contrat sont soumises à diverses modifications. Les frais de notaire, les frais d'enregistrement, l'assurance-vie sont autant de versements dus par le débiteur qui altèrent de façon très significative le montant réellement perçu, et partant le taux réel du contrat. De plus, les conditions particulières d'exonération touchent d'une manière différente les amortissements et les charges financières. En Belgique, les amortissements ne sont déductibles fiscalement que dans une très petite mesure et seulement pour des constructions soumises à des règles strictes qui font que bien peu sont en mesure d'en profiter. Par contre, les charges financières sont généralement déductibles à concurrence du revenu cadastral.

Ces modifications perturbent les conditions générales du contrat. L'équation (8), qui pouvait être considérée comme une définition implicite du taux théorique i , est sensiblement modifiée. Notons x le taux réel du contrat, le taux *actuariel*, prenant en considération tous les flux financiers découlant de manière directe ou indirecte du contrat théorique. Ce taux obéit à l'équation :

$$P'(x) + U'(x) = V'. \quad (13)$$

(13) est l'équivalent de (8).

$P'(x)$ est en fait la nue-propriété réelle, tenant compte de tous les flux.

On pose :

$$P'(x) = \mu.P(x). \quad (14)$$

A titre d'exemple, envisageons trois cas :

— Un emprunt obligataire.

Les emprunts d'Etat peuvent être remboursés anticipativement. Ceci se fait essentiellement lorsque le taux du marché est en chute. (Le risque est réduit actuellement.)

Le débiteur se réserve le droit de rembourser l'emprunt anticipativement mais doit en toute logique rémunérer le créancier. Cela se fait alors sur base d'un montant plus élevé que le nominal de l'emprunt. A titre d'exemple, citons l'emprunt d'état 227/33 qui a pris naissance en 1986, qui doit être remboursé en 1994 mais qui peut l'être anticipativement en 1991 à 101 % de sa valeur nominale.

On trouve donc dans ce cas précis :

$$\mu = 1.01$$

— un emprunt hypothécaire sans déductibilité des amortissements.

Ce cas est le plus simple : comme il n'y a pas de modifications de nue-propriété, $P'(x) = P(x)$ et donc :

$$\mu = 1$$

— un emprunt hypothécaire avec déductibilité partielle.

On suppose que l'on peut exprimer la partie déductible comme une fraction de l'amortissement. Soit f cette partie et q le taux marginal d'imposition. Le débiteur en récupère donc une fraction $q.f$ mais pas de façon instantanée. Le gain en impôt ne sera sensible que lors de l'envoi de l'avertissement. Notons r l'intervalle de temps entre le paiement et la *récupération*.

On a :

$$P'(x) = P(x) - q.f.P(x).(1+x)^{-r}.$$

On en déduit aisément :

$$\mu = 1 - q.f.(1+x)^{-r}.$$

On constate que dans ce dernier exemple, le coefficient μ est une fonction du taux inconnu x .

Conformément aux notations précédemment introduites, on pose :

$$U'(x) = \lambda.U(x) \quad (15)$$

Envisageons les mêmes exemples que plus haut :

- un emprunt hypothécaire.

Dans ce cas très simple, l'usufruit est confondu avec les coupons touchés par le possesseur. Ceux-ci sont amputés à la source (sans retard) d'une partie égale au précompte. Celui-ci a été jusqu'ici de 25%.

On a donc :

$$\lambda = 0.75$$

Lors du passage au précompte de 10%, les choses seront quelque peu modifiées.

On aura alors :

$$\lambda = 0.9.$$

- un emprunt hypothécaire.

En Belgique, les frais financiers sont souvent déductibles. Si, pour d'obscures raisons, ils ne le sont pas, on a tout simplement :

$$\lambda = 1.$$

Lors de la déductibilité, on note g la partie déductible. q représente à nouveau le taux marginal d'imposition.

On trouve comme plus haut :

$$\lambda = 1 - g.q(1 + x)^{-r}.$$

Venons-en aux modifications affectant le capital prêté proprement dit : on note V' le capital réellement affecté à la transaction. On pose ensuite :

$$V' = \alpha.V. \quad (16)$$

A titre d'exemples, considérons les cas identiques à ceux déjà exposés précédemment :

- un emprunt obligataire.

Il peut arriver que l'emprunt soit vendu à un montant supérieur ou inférieur au nominal théorique. Des frais de souscription sont parfois dus.

Considérons un emprunt émis avec 0.5% de frais de souscription.
Pour cet emprunt, on a :

$$\alpha = 1.005.$$

Considérons à présent un emprunt émis à 98% de sa valeur nominale.
Ceci peut parfois être le fait pour attirer le client malgré un taux
légèrement inférieur au taux du marché.

Dans ce cas :

$$\alpha = 0.98.$$

— un emprunt hypothécaire.

Un emprunt de montant V est cause de frais divers de montant F .
On a alors

$$V' = V - F$$

et

$$\alpha = \frac{V - F}{V}.$$

Venons-en à présent à la résolution du problème qui nous est posé. Quel
est le taux véritable de la transaction ? Quel est le *taux actuariel* ?

4. Mise en équation et résolution par approximations successives

Il faut résoudre l'équation (13). L'utilisation des notations (14), (15) et
(16) nous permet d'écrire :

$$P'(x) + U'(x) = V'$$

sous la forme

$$\mu P(x) + \lambda U(x) = \alpha V.$$

En divisant par αV , on peut retrouver les définitions unitaires :

$$\frac{\mu}{\alpha} \frac{P(x)}{V} + \frac{\lambda}{\alpha} i. \frac{U(x)}{i.V} = 1.$$

Ou encore :

$$\frac{\mu}{\alpha} p(x) + \frac{\lambda}{\alpha} i.u(x) = 1. \tag{17}$$

(17) n'introduit pas la variable x de façon explicite.

On peut utiliser (11) que nous avons démontrée précédemment pour écrire :

$$\frac{\mu}{\alpha} p(x) + \frac{\lambda}{\alpha} i.u(x) = p(x) + x.u(x). \quad (18)$$

On peut alors isoler le x du membre de droite pour écrire :

$$x = \left[\left(\frac{\mu}{\alpha} - 1 \right) + \frac{\lambda}{\alpha} i.u(x) \right] / u(x). \quad (19)$$

Nous verrons qu'il est relativement facile dans les applications de calculer $p(x)$. Le calcul de $u(x)$ est souvent plus délicat. Il est dès lors intéressant de remplacer $u(x)$ par une valeur déduite de (11).

On écrit :

$$u(x) = \frac{1 - p(x)}{x}. \quad (20)$$

En introduisant (20) dans (19), on obtient la relation

$$x = \frac{\lambda}{\alpha} i + \left[\frac{\mu}{\alpha} - 1 \right] \frac{x.p(x)}{1 - p(x)}. \quad (21)$$

C'est cette dernière relation qui sera utilisée dans les applications.

Elle est connue sous le nom de *relation de Makeham*, l'actuaire qu'il n'est plus utile de présenter.

Abordons à présent les successions de calculs. La description théorique est achevée. Les calculs de α, λ, μ et $p(x)$ devront être refaits pour chaque application particulière. Nous verrons néanmoins que certaines classes d'applications tolèrent des descriptions suffisamment semblables pour que l'on puisse informatiser la résolution sans trop de difficultés.

5. Applications

5.1. L'amortissement unique : l'utilisation pour les emprunts obligataires

Dans ce cas, le calcul de la nue-propriété est des plus aisés. L'amortissement consiste en un seul versement échéant forcément en fin de contrat, une échéance que nous notons $t = n$.

On trouve donc :

$$P(x) = V.(1+x)^{-n} \text{ et } p(x) = (1+x)^{-n}. \quad (22)$$

Considérons le cas d'une obligation d'un montant nominal 100 000, émise au taux de 8.75% et remboursée après 8 ans. Des frais de souscription sont exigés pour un montant de 500. Le précompte est (hélas encore) de 25%. En cas de remboursement anticipé après 6 ans, le remboursement sera de 101 000. Après 7 ans, il sera de 100 500. Quels sont dans tous les cas envisageables les taux de rendement *réel* ?

Envisageons pour commencer le cas du remboursement à terme (8 ans). Dans ce cas, le remboursement se fait au pair et $\mu = 1$.

Le précompte nous permet de calculer $\lambda = 0.75$.

Les frais portent le coefficient α à 1.005.

Il est relativement aisé de calculer les valeurs successives de $p(x)$ (22) et les valeurs x découlant de (21) y associées. Il est nécessaire de choisir une valeur initiale. Nous avons opté pour la valeur i , taux nominal de l'obligation en question.

On trouve ici :

$$i = 0.0875 = x_0.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} p(i) &= p(x_0) = 0.51171 \\ x_1 &= 0.0648433. \text{ (utilisation de (21))} \end{aligned}$$

Et successivement :

$$p(x_1) = 0.604943, \quad x_2 = 0.0648045, \quad p(x_2) = 0.605119, \quad x_3 = 0.0648044.$$

Et ce, toujours en utilisant (21).

Le faible écart existant entre les deux approximations successives x_2 et x_3 nous conduit à accepter x_3 comme solution du problème.

Le lecteur intéressé par la mesure de l'erreur commise en agissant ainsi peut consulter [5].

Envisageons à présent les cas de remboursements anticipés.

Pour $n = 7$ et $\mu = 1.005$, on trouve : $x = 0.0652985$.

Pour $n = 6$ et $\mu = 1.01$: $x = 0.066001$.

Que donneraient ces différents rendements avec un précompte de 10% ?
Il suffit de travailler avec $\lambda = 0.9$ et l'on trouve :

Pour $n = 8$ ($\mu = 1$) : $x = 0.0778869$.

Pour $n = 7$ ($\mu = 1.005$) : $x = 0.0783582$.

Enfin, pour $n = 6$ ($\mu = 1.01$) : $x = 0.079038$.

5.2. L'amortissement constant : l'utilisation pour les emprunts ordinaires

Dans ce cas, le calcul de la nue-propriété se réduit à la somme de versements constants actualisés, un concept qui correspond à la somme de termes en progression géométrique. Considérons un montant V remboursé en n versements. Chaque versement contient donc une partie M_k constante : V/n et une partie variable F_k calculée sur base du solde restant dû.

La nue-propriété est égale à :

$$P(x) = \sum_{k=1}^n [V/n] \cdot (1+x)^{-k}. \quad (23)$$

On calcule aisément :

$$P(x) = \frac{V}{n \cdot x} [1 - (1+x)^{-n}]. \quad (24)$$

Dès lors, on obtient comme nue-propriété unitaire :

$$p(x) = \frac{1}{n \cdot x} [1 - (1+x)^{-n}]. \quad (25)$$

Considérons pour commencer le cas d'un emprunt de 2 000 000 devant être remboursé par 10 annuités selon le principe des amortissements constants. Le taux du marché est de 9.75% ($i = 0.0975$).

Les remboursements seront en progression arithmétique. On calcule :

$$a_1 = V/n + V \cdot i, \quad a_2 = V/n + (V - V/n) \cdot i.$$

Le nouveau solde restant dû se calcule en utilisant (4).

Et, d'une manière générale :

$$a_k = V/n + [V - (k - 1).V/n].i. \quad (26)$$

Nous supposons, dans un premier temps, que seuls les frais divers modifient le contrat.

Si l'on cumule les frais de notaire, d'enregistrement et d'assurance-vie, on obtient la somme non négligeable de 110 000.

La valeur α se calcule donc comme suit :

$$\alpha = \frac{2000000 - 110000}{2000000} = 0.945.$$

En effet, l'obtention des 2 000 000 ne peut se concevoir que si l'on débourse 110 000. Le montant réellement perçu est donc de 1 890 000 !

Lorsque les seuls frais interviennent, on trouve aisément :

$$\mu = \lambda = 1.$$

Les valeurs successives de $p(x)$ et de x sont obtenues à partir d'une valeur initiale arbitraire x_0 . Nous choisissons ici la valeur i , correspondant au taux nominal de l'emprunt. Ici, $i = 0.0975 = x_0$.

On trouve successivement :

$p(i) = p(x_0) = 0.621112$, $x_1 = 0.112477$, $p(x_1) = 0.582856$, $x_2 = 0.112321$, $p(x_2) = 0.583234$, $x_3 = 0.112323$, $p(x_3) = 0.583231$, $x_4 = 0.112323 = x_3$ aux erreurs d'arrondi près.

Cette dernière valeur peut donc être considérée comme une bonne approximation de la solution.

Remarquons que dans la suite, nous ne donnerons plus que la solution retenue, évitant ainsi de déconcerter le lecteur par des successions de nombres auxquelles la plupart des mathématiciens sont allergiques. Afin que cette omission volontaire n'altère en rien la partie numérique de cet exposé, nous donnons en annexe quelques logiciels élémentaires en BASIC qui permettent d'obtenir sans effort toutes les valeurs cherchées.

Envisageons à présent l'intervention de l'impôt. Supposons les frais financiers (les F_k) partiellement déductibles.

En notant g la partie déductible et q le taux marginal d'imposition, on avait trouvé :

$$\lambda = 1 - g.q.(1 + x)^{-r}.$$

Supposons à présent que la moitié des frais financiers soient déductibles et que le souscripteur soit imposé marginalement à 52% + 8% de taxes communales. Les taxes communales étant calculées sur base de l'impôt lui-même et non sur base du revenu, on trouve :

$$\begin{aligned} g &= 0.5 \\ q &= [0.52] \cdot 1.08 = 0.5616. \end{aligned}$$

Supposons enfin que le contrat est souscrit en mai de cette année, et que les impôts relatifs à cet exercice seront exigés en octobre de l'année prochaine. On trouve :

$$r = \frac{17}{12}.$$

On peut enfin se lancer dans la succession d'approximations. A chaque itération, il faut à présent calculer la valeur $p(x)$ correspondant à l'approximation du moment et également la valeur $\lambda(x)$ correspondant à cette même approximation. Les calculs sont à présent relativement longs et le recours à l'informatique s'avère nécessaire. On obtient le tableau de valeurs :

Valeur du taux x	calcul de $p(x)$	calcul de $\lambda(x)$
0.0975	0.621112	0.753874
0.087083	0.650089	0.750526
0.0868515	0.650756	0.750451
0.0868463	0.650771	0.750449

On retient comme solution la valeur suivante :

$$x = 0.0868462.$$

Pour résumer les différentes situations :

taux nominal	: 0.0975
taux actuariel avec frais sans impôts	: 0.112323
taux actuariel avec frais et impôts	: 0.0868462

5.3. Remboursements constants : l'utilisation pour les emprunts de particuliers

Ce cas représente la grande majorité des emprunts. Il est relativement facile de construire la succession des amortissements et donc de calculer la nue-propriété.

Reprenons les relations (2), (3), (4) :

$$F_k = D_{k-1}.i, \quad M_k = a_k - F_k, \quad D_k = D_{k-1} - M_k.$$

Dans le cas des remboursements constants, ces relations peuvent s'écrire :

$$M_k = a - D_{k-1}.i \quad (27)$$

$$D_k = D_{k-1} - M_k \quad (28)$$

De même en $t = k + 1$, la relation (27) devient :

$$M_{k+1} = a - D_k.i. \quad (29)$$

En introduisant (28) dans (29) :

$$M_{k+1} = a - (D_{k-1} - M_k).i \quad (30)$$

En soustrayant (27) de (30), on obtient :

$$\begin{aligned} M_{k+1} - M_k &= a - a - D_{k-1}.i + m_k.i + D_{k-1}.i \\ M_{k+1} &= M_k(1 + i) \end{aligned} \quad (31)$$

Les amortissements successifs sont donc en progression géométrique de raison $(1 + i)$.

On peut exprimer tous les amortissements à partir de M_1 et noter :

$$M_k = M_1(1 + i)^{(k-1)}.$$

La somme des amortissements est bien évidemment égale à V (montant emprunté) et donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_k &= V \\ \sum_{k=1}^n M_1(1 + i)^{k-1} &= M_1 \sum_{k=1}^n (1 + i)^{k-1} \\ &= M_1 \cdot \frac{1 - (1 + i)^n}{1 - (1 + i)} = M_1 \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$M_1 = \frac{V.i}{(1+i)^n - 1} \quad (32)$$

$$M_k = \frac{V.i}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+i)^{k-1} \quad (33)$$

Il nous faut à présent calculer la nue-propriété. On retrouve encore une fois une progression géométrique et l'on n'a pas de mal à effectuer les opérations qui suivent :

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=1}^n M_k (1+x)^{-k} \\ &= \frac{V.i}{(1+i)^n - 1} \cdot \sum_{k=1}^n \left[\frac{(1+i)}{1+x} \right]^{(k-1)} \cdot (1+x)^{-1} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{V.i}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+x)^{-1} \cdot \frac{1 - [(1+i)/(1+x)]^n}{1 - (1+i)/(1+x)} \\ &= \frac{V.i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{1 - [(1+i)/(1+x)]^n}{x - 1} \end{aligned} \quad (35)$$

On constate que cette dernière relation n'est pas définie pour la valeur $x = i$ et qu'il nous faut en conséquence faire choix d'une autre valeur initiale dans la construction de la suite définie par l'expression (21). Heureusement, la méthode étant autocorrectrice et indépendante de cette valeur, la suite va toujours converger vers la solution.

La valeur initiale est au choix. On peut, par jeu, introduire successivement différentes valeurs et constater empiriquement l'indépendance de la solution relativement aux conditions initiales de calcul.

Reprenons à présent les données du problème résolu plus haut dans le cas des amortissements constants.

La suite des valeurs converge vers le taux : $x = 0.085327$.

A titre de comparaison, rappelons la valeur trouvée dans le cas des amortissements constants : $x = 0.0868642$.

Cette dernière valeur est supérieure à celle de notre présent problème. On peut en déduire que le retard d'amortissement qui découle de la progression géométrique de raison strictement supérieure à 1 a un effet bénéfique sur

le taux réel d'un contrat. A taux constant, il est intéressant de retarder les amortissements. Ce dernier résultat peut facilement être généralisé. Il suffit de constater que le retard d'amortissements se traduit par la multiplication de $p(x)$ par un facteur d'actualisation :

$$p(x \mid \text{retard} = R) = p(x) \cdot (1+x)^{-R}.$$

A l'extrême limite pour R tendant vers l'infini, le facteur d'actualisation tend vers 0 et l'on obtient comme relation modifiée :

$$x = (\lambda \cdot i) / \alpha.$$

5.4. Les remboursements constants : le cas des sociétés

La fiscalité des sociétés (ISOC – impôt des sociétés – par opposition à l'IPP : impôt des personnes physiques) fait couler actuellement beaucoup d'encre. Nous pouvons y ajouter notre grain de sel. Le modèle qui vient d'être utilisé au point 5.3 convient particulièrement bien. Il suffit d'introduire les paramètres qui suivent :

- $\alpha = 1$: pas de frais de notaire, d'assurance-vie.
- $g = 1$: tous les frais financiers sont déductibles.
- $q = 0.43$: le taux marginal est fixe, il va probablement passer à 0.41 dans les prochains mois.
- $r = 0.5$: ceci est totalement arbitraire, mais le retard réel peut bien sûr être calculé.
- $x = 1$: le taux initial est au choix.
- $\mu = 1$: lorsque les amortissements sont supposés non déductibles : nous verrons plus loin ce qui se produit lorsque l'on suppose les amortissements également déductibles.
- $i = 0.0975$: nous conservons les mêmes données.
- $n = 10$: idem.

La suite des valeurs converge vers la valeur :

$$x = 0.0567156.$$

Lorsque l'on suppose les amortissements également déductibles, la suite converge vers la valeur (il suffit de poser $\mu = \lambda$ pour résoudre le problème) :

$$x = -0.016415.$$

La méthode est-elle donc faillible ? Cette valeur négative doit en déranger plus d'un. Ne peut-on la justifier totalement ?

Rappelons que le contrat initial est celui d'un emprunt d'un montant V remboursé au taux i en n annuités a constantes.

La relation entre l'emprunt et les remboursements est connue. Le calcul est en fait identique à celui qui fut fait pour la relation (25) : une somme de termes en progression géométrique.

On a :

$$V = \frac{a}{i} \cdot [1 - (1 + i)^{-n}]. \quad (36)$$

On a déduit :

$$a = (Vi) / [1 - (1 + i)^{-n}]. \quad (37)$$

Dans le cas qui nous occupe, on trouve pour $V = 1$:

$$a = 0.1610016567.$$

En acceptant la déduction de la totalité des remboursements (amortissements et frais financiers), on trouve un a réel de :

$$a = 0.1610016567 \cdot 0.57 = 0.091770944.$$

Les dix versements a ne couvrent plus le montant emprunté :

$$10 \cdot a < 1.$$

Le taux négatif est donc attendu. Que l'on vienne encore dire que l'impôt n'est pas une bénédiction ... pour qui sait s'en servir !

Bibliographie

- [1] AYRES, F. *Mathematics of finance*, New-York, Mc Graw-Hill, Schaum's outline series in Business, 1963.
- [2] BAIR, J., HINNION, R., JUSTENS, D. *Applications économiques au service de la mathématique*, SBPM, 1989.
- [3] CNAPELIXCKX, G., NYSTEN, L., MEURICE, P. *Algèbre financière*, Bruxelles, De Boeck, 1986, 21e édition.
- [4] FERRET et LANGLOIS, *Mathématiques appliquées*, Paris, Foucher, 1979.

-
-
- [5] JUSTENS, D. *Introduction à la mathématique financière*, Bruxelles, De Boeck, 1989, 2e édition.
- [6] SAADA, M. *Traité de mathématique financière. 1. Procédure fondamentales. 2. Emprunts indivis. 3. Investissements en avenir certain*. Paris, Vuibert, 3 volumes.

Adresse de l'auteur :

Daniel JUSTENS
CADEPS/ULB : CP 194/7
50, Avenue Roosevelt,
1050 Bruxelles.

ANNEXES

Résolution du point a.

```
10 clear
20 input "alpha",a
30 input "lambda",l
40 input "mu",m
50 input "taux nominal",i
60 input "durée",n
70 e=10^-6 : x=i
80 p=(1+x)^-n
90 y=l*i/a +(m/a-1)*x*p/(1-p)
100 lprint p,y
110 if abs(x-y)<e then 130
120 x=y: goto 80
130 lprint "taux réel=", y
```

Résolution du point b. - sans intervention de l'impôt.

```
10 clear
20 input "alpha",a
30 input "lambda",l
40 input "mu",m
50 input "taux nominal",i
60 input "durée",n
70 e=10^-6 : x=i
80 p=1/(n*x)*(1-(1+x)^-n)
90 y=l*i/a +(m/a-1)*x*p/(1-p)
100 lprint p,y
110 if abs(x-y)<e then 130
120 x=y: goto 80
130 lprint "taux réel=", y
```

Résolution du point b. - avec l'intervention de l'impôt.

```
10 clear
20 input "alpha",a
30 input "partie déductible",g
32 input "taux marginal",q
34 input "retard",r
40 input "mu",m
50 input "taux nominal",i
60 input "durée",n
70 e=10^-6 : x=i
80 p=1/(n*x)*(1-(1+x)^-n)
85 l=1-q*g*(1+x)^-r
90 y=l*i/a +(m/a-1)*x*p/(1-p)
100 lprint p,l,y
110 if abs(x-y)<e then 130
120 x=y: goto 80
130 lprint "taux réel=", y
```

Résolution des points c. et d. : Frais financiers déductibles

```
10 clear
20 input "alpha",a
30 input "partie déductible",g
32 input "taux marginal",q
34 input "retard",r
36 input "taux initial", x
40 input "mu",m
50 input "taux nominal",i
60 input "durée",n
70 e=10^-6
80 p= i/(x-i)*(1-((1+i)/(1+x))^n)/((1+i)^n-1)
85 l=1-q*g*(1+x)^-r
90 y=l*i/a +(m/a-1)*x*p/(1-p)
100 lprint p,l,y
110 if abs(x-y)<e then 130
120 x=y: goto 80
130 lprint "taux réel=", y
```

Résolution des points c. et d. : Frais financiers et amortissements déductibles

```
10 clear
20 input "alpha",a
30 input "partie déductible",g
32 input "taux marginal",q
34 input "retard",r
36 input "taux initial", x
50 input "taux nominal",i
60 input "durée",n
70 e=10^-6
80 p= i/(x-i)*(1-((1+i)/(1+x))^n)/((1+i)^n-1)
85 l=1-q*g*(1+x)^-r
87 m = l
90 y=l*i/a +(m/a-1)*x*p/(1-p)
100 lprint p,l,y
110 if abs(x-y)<e then 130
120 x=y: goto 80
130 lprint "taux réel=", y
```

En l'an 2000, nos enfants auront-ils encore des professeurs de mathématiques ?

Le Comité de l'A.M.U.Lg.,

C'est pour répondre d'une façon aussi précise que possible à cette question que le Comité de l'A.M.U.Lg. (Association des Docteurs et Licenciés en Sciences Mathématiques de l'Université de Liège) a décidé d'effectuer une enquête.

Cette enquête se propose de comparer statistiquement le *nombre d'emplois* vacants dans la province de Liège au terme des 5, 10, 15, 20 années à venir au *nombre de jeunes* qui, pendant ces intervalles de temps, devraient avoir obtenu les diplômes de *licencié en sciences mathématiques* et d'*agrégé de l'enseignement secondaire supérieur*.

Notre enquête

En mai 1989, nous avons demandé à 230 établissements scolaires (de tous les réseaux), situés dans la *province de Liège*, de nous faire connaître *l'année de naissance*, *le sexe* et *le nombre d'heures hebdomadaires* des professeurs qui donnent actuellement le cours de mathématiques dans l'enseignement secondaire supérieur (général ou technique), normal, supérieur de type court ou de promotion sociale.

D'autre part, nous nous sommes informés auprès des Universités de l'Etat de Liège et de Mons, de l'Université Libre de Bruxelles, de l'Université Catholique de Louvain et des Facultés Notre-Dame de la Paix de Namur sur le *nombre d'étudiants inscrits* en candidature ou en licence en sciences mathématiques.

Résultats

I. Sur les 230 établissements interrogés, soit par courrier, soit par l'intermédiaire du pouvoir organisateur, 150 ont répondu. Les écoles pour lesquelles nous n'avons reçu d'informations ne sont pas systématiquement d'un certain type ou situées à un endroit particulier ; nous pensons dès lors que

les nombres d'heures qui nous ont été communiqués auraient été multipliés par le coefficient $230/150 \approx 1,53$ dans le cas de 230 réponses au lieu de 150.

Tableau des renseignements reçus		Projection pour la province de Liège	
Année de naissance	Nombre d'heures de 20 h/ sem.	Année de la pension (*)	Nombre d'heures $\times 1,53$
1925	1,2	1985	1,8
de 1926 à 1930	2,8	de 1986 à 1990	4,3
de 1931 à 1935	22,3	de 1991 à 1995	34,2
de 1936 à 1940	46,55	de 1996 à 2000	71,4
de 1941 à 1945	82,7	de 2001 à 2005	126,9
de 1946 à 1950	84,25	de 2006 à 2010	129,6
de 1951 à 1955	62,7	de 2011 à 2015	96,1
de 1956 à 1960	63,9	de 2016 à 2020	98
de 1961 à 1965	15,85	de 2021 à 2025	24,3
1966	2	2026	3,1
Nombre total d'heures	384,25	Nombre total d'heures	589,6

(*) Dans l'avant-dernière colonne, nous avons indiqué l'année à laquelle les professeurs actuellement en fonction seront âgés de 60 ans, c'est-à-dire l'âge moyen auquel les professeurs demandent leur admission à la retraite.

La dernière colonne du tableau précédent nous montre que 42% des charges complètes seront libérées entre 2000 et 2010 dans la province de Liège.

II. Le tableau suivant nous renseigne sur le nombre d'étudiants inscrits en sciences mathématiques durant l'année académique 1988-1989.

Nbre d'étudiants à en	U.Lg.	U.L.B.	U.C.L.	F.N.D.P. Namur	Etat Mons
1ère candidature	38	38	62	71	16
2ème candidature	15	18	22	20	13
1ère licence	12	15	25	24	6
2ème licence	12	15	30	22	17

Hypothèses de travail

Avant de dresser un tableau du nombre d'emplois vacants dans les 5, 10, 15 ou 20 années à venir et de tracer des graphiques nous permettant de comparer ce nombre à celui des enseignants disponibles, il faut formuler nos hypothèses de départ.

1. a) Chaque année, l'Université de Liège diplôme environ une quinzaine de licenciés en sciences mathématiques dont 40% au maximum désirent enseigner. Parmi ceux-ci, la plupart postulent un emploi dans la province de Liège et quelques-uns sont engagés par d'autres provinces, notamment celle du Luxembourg.

b) Quelques licenciés issus des autres universités francophones sont également employés dans la province de Liège.

Dès lors, il nous paraît plausible de supposer que chaque année, 6 licenciés en sciences mathématiques commenceront leur carrière dans un établissement scolaire situé dans la province de Liège.

Cette supposition ne tient évidemment pas compte des variations éventuelles du nombre de candidats à l'enseignement dans les prochaines décennies.

2. Nous supposons que l'âge moyen auquel les professeurs demandent leur admission à la retraite est de 60 ans ; de plus, nous ne tenons pas compte du nombre de professeurs qui quittent définitivement l'enseignement.

3. Nous supposons également que chaque licencié diplômé depuis 1989 aura une charge complète en mathématiques et que son nombre d'heures hebdomadaires sera inchangé.

4. En ce qui concerne les établissements scolaires, nous supposons que la population restera à peu près constante dans les prochaines décennies et que le nombre d'élèves par classe ne variera pas.

5. Enfin, nous supposons qu'en 1990, toutes les charges de professeurs de mathématiques seront pourvues et qu'il n'y aura pas de licenciés en sciences mathématiques disponibles.

Précisons que, durant l'année scolaire 1988-1989, certains établissements ont dû engager des ingénieurs, des architectes, des chimistes ou des étudiants pour pallier un manque de professeurs de mathématiques.

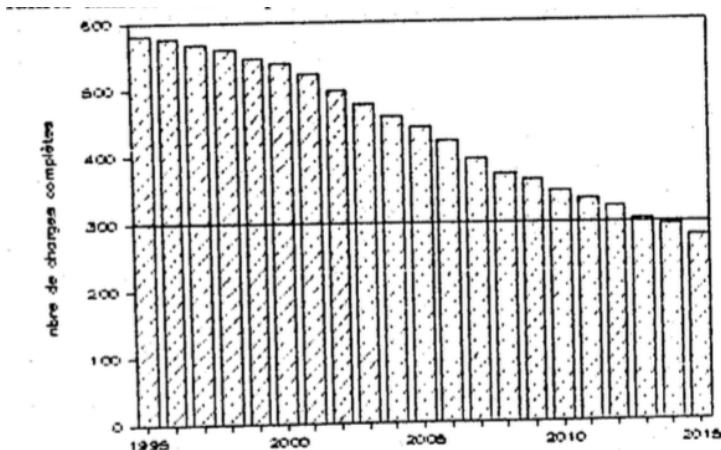
Interprétation des résultats

En rassemblant les résultats de notre enquête et en nous basant sur les hypothèses précédentes, nous obtenons le tableau et les graphiques suivants.

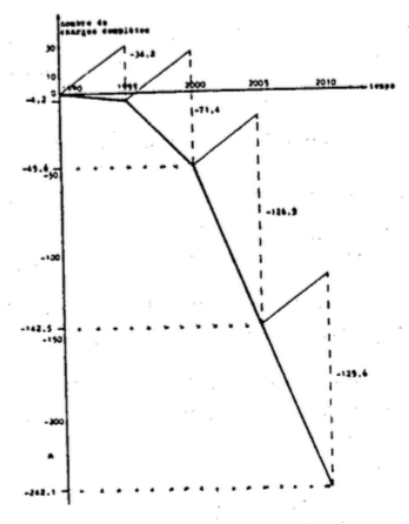
PROJECTIONS	1991-1995	1996-2000	2001-2005	2006-2010
nombre de - professeurs admis à la retraite - nouveaux professeurs	34,2 30	71,4 30	126,9 30	129,6 30
différence de ces nombres ou nombre d'heures libérés sans titulaire	4,2	41,4	96,9	99,6
	en 1995	en 2000	en 2005	en 2010
nombre d'heures sans titulaire	4,2	45,6 4,2 + 41,4	142,5 45,6+96,9	242,1 142, 5+99,6
% du nombre d'heures non pourvus (*)	0,7%	7,7%	24%	41%

(*) Ce pourcentage a été calculé par rapport au nombre total de professeurs nécessaires soit $384,25 \times 1,53 \approx 589,6$.

Le graphique ci-dessous montre l'évolution prévisible du nombre de professeurs licenciés en sciences mathématiques en fonction au cours des 25 prochaines années dans la province de Liège.



Quant au graphique suivant, il fait apparaître l'arrivée de nouveaux diplômés sur le marché de l'emploi et le départ des professeurs admis à la retraite.



Légende

_____ Le trait fin suite le nombre de professeurs nouvellement diplômés à raison de 6 par an ou 30 sur 5 ans.

- - - - Le trait interrompu vertical indique le nombre de professeurs admis à la retraite en 5 ans.

_____ Le trait renforcé suit l'évolution du nombre de charges complètes non pourvues.

CONCLUSIONS

En faisant cette analyse, notre association a voulu quantifier la pénurie de plus en plus importante de professeurs licenciés en sciences mathématiques dans la province de Liège (qui n'est d'ailleurs pas la seule à être touchée par ce phénomène).

Compte-tenu de cette constatation, le Comité de l'A.M.U.Lg. a décidé d'alerter les responsables de la formation de ces professeurs, les responsables de leur recrutement, de leur rétribution, les écoles, les associations de parents,...

Il nous semble que la raison principale de cette pénurie est le désintérêt des jeunes pour la carrière d'enseignant.

Pourquoi de moins en moins de jeunes s'orientent-ils vers la profession d'enseignant ?

Ils ont constaté principalement les faits suivants :

1. Cette profession n'offre qu'une rémunération bien modeste comparée à celle reçue dans d'autres secteurs par des diplômés de niveau égal ou moindre ; de plus, elle ne permet aucun avancement ou promotion.
2. Le métier d'enseignant est souvent très mal considéré par le public, y compris par les parents et les élèves eux-mêmes.
3. Ces dix dernières années, beaucoup de professeurs n'avaient pas d'emploi (surtout dans d'autres branches que les mathématiques) ou travaillaient uniquement par intérim et attendaient leur nomination de nombreuses années.
4. Les compensations aux rémunérations peu élevées, à savoir la stabilité de l'emploi et l'assurance d'une pension confortable, sont devenues des mythes devant la réalité des faits (mise en disponibilité partielle, réaffectation, déplacement entre écoles, ...).
5. Dans un ménage, la profession d'enseignant est devenue de plus en plus un métier d'appoint et les nombres le prouvent. En effet, notre enquête nous montre également que 16% des professeurs de mathématiques nés entre 1931 et 1935 sont des femmes, mais que ce taux passe à 66% dans les périodes 1951-1955 et 1956-1960.
6. L'apparente monotonie du métier et l'augmentation des travaux administratifs (beaucoup de conseils de classe, feuilles d'objectifs, 4 appréciations de natures différentes par période, ...) rebutent certains.
7. Même les deux mois de vacances et les 20 heures par semaine, tellement enviés, ne parviennent plus à attirer les jeunes vers une profession qu'ils savent exigeante et qui s'exerce dans une atmosphère parfois pénible (certains de leurs professeurs sont menacés dans leur intégrité physique).

Les élèves savent aussi que la longueur des vacances n'est qu'un leurre. Si elles sont une période de récupération justifiée pour les élèves, elles sont aussi indispensables pour les professeurs dont le système nerveux a été mis à rude épreuve durant l'année scolaire. Cependant, beaucoup de ceux-ci consacrent une partie de cette période de relaxation à l'amélioration de leurs cours.

Que pourrait-on faire pour rendre cette profession plus attractive ?

Il faudrait informer les étudiants, lors des séances d'orientation qui ont lieu chaque année dans les établissements scolaires, des prévisions chiffrées relatives à l'emploi dans les différentes branches de l'enseignement.

Faut-il dire qu'un autre élément de la solution est sans doute la revalorisation du traitement des enseignants de manière à le rendre comparable à celui offert dans d'autres secteurs ?

En ce qui concerne plus spécialement l'enseignement des mathématiques.

Les élèves trouvent que la tâche de leur professeur est particulièrement ingrate. En effet, ils ont l'impression que :

- il n'est pas aisé de faire comprendre un cours qui, de l'avis de beaucoup d'adultes, relève de la gymnastique mentale (quelques-uns mettent même son utilité en doute) ;
- leur professeur de mathématiques a l'obligation de terminer tout son programme pour ne pas que ses élèves en subissent un quelconque préjudice l'année suivante ;
- l'abondance des notions théoriques laisse peu de temps à leur professeur pour des applications concrètes des matières enseignées ;
- même leurs parents, s'ils désirent les épauler dans le cycle inférieur, se sentent dépassés.

Dès lors, si le nombre d'élèves par classe diminuait et si les groupements d'élèves de classes à options de base différentes disparaissaient, par un choix d'exercices appropriés et liés directement aux options choisies par chacun de ses élèves, le professeur de mathématiques pourrait alors mieux

faire percevoir l'intérêt fondamental de son cours et combien son métier est passionnant.

Quoi qu'il en soit, il est urgent de réfléchir et de prendre des mesures, en concertation avec le corps enseignant, pour attirer plus de jeunes vers l'enseignement des mathématiques, branche indispensable dans la formation de base de ceux qui devront participer aux différentes activités dans ce pays et dans l'Europe de demain.

Revue des revues

N. Joelants, J.-P. Cazzaro, H. Pools, C. Festraets,

MATH-ECOLE,

139, Septembre 1989

(*) CALAME A., De l'expérimentation à la démonstration.

(**) HIRSING F., GUIGNARD N., DOMINONS la différenciation.

(***) JAQUET F., A propos de la géométrie de Vincenot.

(*) Malgré les risques de généralisation abusive conduisant à l'apparition de propositions fausses, la recherche d'une propriété générale à partir de l'examen de plusieurs cas particuliers est une activité enrichissante.

Voici ce que tente de nous prouver l'auteur de cet article à l'aide de plusieurs exemples : un premier exemple concerne la somme des angles d'un polygone, le deuxième fait intervenir des dénombrements, le troisième la manipulation de nombres, ... bref, des exemples divers et variés qui sont présentés sous forme de fiches et destinés à des élèves de 14,15 ans.

(**) A l'aide des multiples possibilités qu'offre un jeu de dominos, les auteurs de cet article plaident en faveur d'un enseignement différencié. Vous trouverez un bref compte-rendu des différents résultats obtenus par des élèves de 8 à 12 ans partant tous du même problème, à savoir combien de dominos y-a-t-il dans un jeu ?

Selon F. Hirsing et N. Guignard, cette pédagogie de la différenciation "permet à l'enfant de se forger sa propre image du travail à accomplir, de progresser à son rythme, de découvrir qu'il est capable d'appréhender un problème, de s'approprier la tâche et de la mener au but."

(***) Encore un retour au nombre d'or...

Nadine JOELANTS

Mathematics and Computer Education

Vol. 23, n° 1 (1989)

- (*) D. SPROWS, Sociable sequences and diminishing functions.
H. BRAVERMAN, A computer program to graph cubic polynomials.
J.M. ROGAN, Introducing the standard error of the difference between two means.
L.H. MINOR, Factoring twins and pythagorean triplets.
J.N. BOYD and P.N. RAYCHOWDHURY, A chain rule for convex coordinates.
J.B. DENCE and T.P. DENCE, An infinite product approach to Vieta's formula.
O.D. ANDERSON, Some results for repeating decimals.
A.B. AYOUD, Which one is the bisector of the acute angle.
- (*) L'ordinateur est un outil performant pour résoudre des problèmes tels la détermination de nombres parfaits, la détermination de paires de nombres amiables ou encore la détermination de groupes sociables. L'auteur nous montre ici que l'ordinateur permet également d'établir certains résultats valides dans un nombre infini de cas, c'est notamment le cas de certaines classes de problèmes liés aux "diminishing functions", une "diminishing function" étant une fonction f de l'ensemble des naturels dans lui-même pour laquelle il existe un nombre naturel N tel que

$$f(n) < n \text{ quel que soit } n \geq N.$$

Les résultats démontrés sont illustrés par un programme rédigé en PASCAL.

Jean-Pierre CAZZARO

CIEL ET TERRE,

Vol. 105, n° 4

- (1) M. GABRIEL, La théorie des épicycles (suite).
- (2) A. JORISSEN, R. de Terwangne, observateur hors pair.
- (3) J. BOURGEOIS, L'entraînement d'un télescope par un moteur pas à pas.
- (4) J. SAUVAL, A propos des débris spatiaux en orbite.

- (1) La théorie des épicycles s'est développée en adoptant au départ les axiomes "la Terre est au centre de l'Univers" et "les mouvements des astres sont des combinaisons de mouvements circulaires et uniformes."

L'auteur nous décrit les contributions de Ptolémée à cette théorie.

- (2) Six pages consacrées aux soixantes années d'observations du Baron de Terwangne.
- (3) Cet article propose la réalisation pour 4000 FB d'un dispositif d'entraînement horaire comprenant un microordinateur pas à pas muni de son réducteur, et boîtier de commande électrique.
- (4) Une publication récente de l'Agence Spatiale Européenne décrit les différents objets artificiels en orbite autour de la Terre : environ 7000 catalogues (satellites en activité ou débris spatiaux) gravitant autour de notre planète. Ce rapport (ESA-SP 1109) peut être obtenu au prix de 30 florins à l'adresse suivante :

ESA Publications Division, ESTEC, Noordwijk, Nederland

Henri POOLS

CIEL ET TERRE,
Vol. 105, n° 6 (Nov.-Déc. 1989)

Au sommaire

(*) Les pages de l'observateur.

(**) J. MANFROID, Neptune : l'apothéose de la mission Voyager.

Nous avons rencontré un observateur passionné : Jean BOURGEOIS.

M. VAN DIEPENBEECK, Résumés climatologiques mensuels.

(***) M. VANDIEPENBEECK, L'été 1989.

Bibliographie.

(*) De superbes photos du disque solaire, de ses taches et protubérances, de la comète Brorsen-Metcalf et de Jupiter.

(**) L'article nous rappelle les grands moments des missions Voyager 1 et Voyager 2, leurs rencontres avec Jupiter et Saturne, puis pour Voyager 2, l'exploration de Neptune, de son environnement et en particulier, les remarquables découvertes au sujet du satellite Triton. Une très belle série de clichés dus à la NASA accompagne cet article.

(***) Nous avons vécu en 1989 un fort bel été précédé d'un hiver doux et d'un printemps fort agréable. Depuis 1901, neuf années ont eu un été avec température moyenne égale ou plus élevée, quatre étés seulement ont eu un total de précipitations inférieur et dix-neuf étés ont été plus ensoleillés. L'auteur de l'article examine d'une part s'il est possible de tirer quelques indications sur l'hiver qui suit un bel été, d'autre part, comment situer cet été dans le cadre d'un réchauffement climatique de la Terre.

Claudine FESTRAETS.

Bulletin de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques et de l'Enseignement Public (France))

Numéro 371 - Décembre 1989

Au sommaire de ce numéro :

- L'éditorial de la Présidente Elisabeth Busser *Lettre ouverte à Monsieur le Ministre de l'Education Nationale* où l'auteur rejoint les remarques et commentaires de la SBPMef sur les formations initiale et continuée des maîtres, le souhait d'être associé à la conception des programmes et la volonté de pratiquer un enseignement de mathématique qui s'adapte à l'actualité et à la réalité des élèves d'aujourd'hui.
- *Comportements insolites à l'égard de l'infini* par Ahmed Yahiteue. Il s'agit de commentaires au départ du livre de Christine Hauchart et Nicolas Rouche "Apprivoiser l'infini".
- *Une expérience en classe de sup TC : le forum correction* par Patrick Prignot.
C'est la description d'une expérience menée dans le cadre d'une classe préparatoire aux grandes écoles commerciales (constats, objectifs, construction des connaissances).
- *Une approche par le dessin géométrique* par Yves Ducel et Marie-Lise Peltier.
- *Utilisations pédagogiques des calculatrices* par André Benedetti.
- *De la présentation de l'exponentielle à la salle de mathématique équipée d'un ordinateur* par Hervé Depecker.
- *Imagiciels pour la classe de seconde.*
- *Est-il possible de recruter des professeurs de mathématiques ?* par Daniel Djament.
L'auteur y expose ce qu'il intitule lui-même ses "états d'âme" sur une certaine crise du recrutement des professeurs de mathématiques, ses conséquences. Il dresse un bilan (personnel) de ce qui peut attirer ou dissuader les éventuels candidats.
Et les rubriques
- *Problèmes de l'APMEP.*
- *Jeux et math.*

Numéro 372 - Février 1990

Au sommaire :

- *Pour que continue la formation.* Un éditorial d'Elisabeth Busser.

-
-
- Plaidoyer pour la forme de question-réponse, en faveur d'une formation continue qui soit de qualité. L'auteur exprime des souhaits qui rejoignent de façon très précise ceux de la SBPM.
- *Effet du mode de présentation d'un problème aléatoire sur les modèles développés par les élèves.* par J. Cordier et M.A. Lecoutre.
Les auteurs mettent en évidence deux résultats principaux de leurs recherches.
 1. Lors de l'examen de situations aléatoires élémentaires, les élèves développent des modèles spontanés dont certains ne sont pas pertinents.
 2. Une modification de la présentation favorise le développement de modèles pertinents.
 - *Comment je suis devenu mathématicien.*
Entretien de Israël Moissevitch Gelfaud avec les mathématiciens V. Retah et A. Sossinski.
 - *Un exemple d'utilisation du référentiel en classe de seconde.*
Document présenté par un groupe de travail APMEP, à partir d'un document du Lycée technique d'Aulnay-sous-bois.
 - *Un outil sous-estimé : l'arbre probabiliste.* par Bernard Parzysz.
L'auteur préconise un emploi plus institutionnel et plus étendu de l'arbre probabiliste représentant les différents événements avec indicateur de leurs probabilités.
 - *Le nouveau programme des classes de seconde.*
 - *Analyse des sujets du Baccalauréat 1989.*
 - *L'exercice de Probabilités au Baccalauréat Série D de Paris-Créteil-Versailles (1989).* par Jean Capron et Françoise Boucher.
Une fois encore, on ne peut que regretter l'absence du rappel de l'énoncé qui rend incompréhensible au lecteur non initié le texte en question.
 - *Les problèmes de l'APMEP.*
 - *Dans nos classes.*
 - *Jeux et Math.*
 - *Tribune libre.*
 - *Courrier des lecteurs.*

Claude VILLERS

MATHEMATICAL SPECTRUM

volume 21 - n°2.

Au sommaire de ce numéro :

Angela NEWING : The life and work of H.E. Dudeney.

(*) Guido LASTERS : An algebra of points.

(**) Peter O'GRADY : An iterative method of construction.

(***) Nicholas SHEA : Summing the series $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots$.

(****) Keith AUSTIN : My logical lady.

(*) Monsieur Lasters est un compatriote et enseigne à Saint-Trond. Son article présente un exemple original d'algèbre de points dont la somme est construite par similitude de triangles (propriété intéressante).

(**) Cet article présente une jolie construction des angles d'amplitude $k \cdot 10^\circ$ pour k naturel variant de 1 à 17. Malheureusement, la mesure n'est qu'approximative pour certains angles. Qu'à cela ne tienne, l'auteur montre que cette construction, judicieusement répétée, permet d'améliorer la précision d'un facteur 4 à chaque étape. Petit exercice de dessin scientifique, cet article est utilisable dans le cours de géométrie du cycle inférieur et peut même être le prétexte d'un exercice de trigonométrie plane en 4-ème année.

(***) L'auteur était encore étudiant lors de la rédaction de cet article qui présente différents procédés d'évaluation de la série des carrés des inverses des nombres naturels. Il faut constater une erreur (de jeunesse?) et une manipulation un peu indélicate.

(****) Sous forme de pastiche d'une aventure de Sherlock Holmes, l'auteur présente quelques éléments de logique de manière narrative.

A propos, si dans un code on a les transcriptions suivantes :

page = 1010 adjust = 001000 mack = 0000

happen = 001100 glaze = 10000

pouvez-vous encoder les mots "box", "quiver", "way" ?

(le code ne contient que des 0 et des 1).

Michel HERMAN

A méditer

Un étudiant n'a plus besoin de savoir calculer l'application numérique d'une formule, ou presque – il suffit qu'il sache sur quel bouton appuyer. Il a par contre besoin de savoir quelle formule il doit utiliser, et la façon dont il doit l'interpréter, et dans quelles conditions il a le droit de le faire (G. Le Calvé dans la préface du livre *Eléments de statistique* par J.J. Droesbeke, S.M.A., Ellipses, 1988).

Calculer

F. Michel,

Coniques sur HP48SX

1. Introduction

Après quelques heures de travail nous pouvons donner nos premières impressions sur la HP48SX maintenant disponible sur le marché belge. Il faut d'abord bien préciser qu'il s'agit plutôt d'un ordinateur de poche que d'une machine à calculer et qu'à ce titre son prix (17.000 FB environ) est très compétitif.

Un habitué des HP28 et HP41 sera vite à l'aise sur cette machine et c'est ce type d'utilisateur que vise la firme. Cependant nos élèves ne sont pas dans cette situation et des explications plus complètes sont nécessaires. Dans cet article je considérerai néanmoins que le lecteur a une connaissance élémentaire du langage RPL commun à la HP28 et la HP48. Nous avons longuement présenté ce langage dans les numéros 62,64(1987), 67, 68(1988) et 72 (1989) de "Mathématique et Pédagogie".

La HP48SX est essentiellement mathématique mais offre des possibilités intéressantes pour les autres sciences (emploi des unités) et peut aussi supporter des applications plus typiquement informatiques sur lesquelles nous reviendrons plus tard lorsque de nouveaux logiciels seront proposés. Pour le moment seule la machine est disponible ; on attend l'interface avec les PC et les cartes d'extension RAM et ROM.

2. Nouvelles possibilités

L'écran graphique est la nouveauté la plus frappante de la machine : il permet l'écriture à deux dimensions des formules ; on retrouve les touches $\triangleright$, $\triangleleft$, $\triangle$ et ∇ de déplacement du curseur classiques sur les claviers des ordinateurs. Mais c'est aussi des possibilités étendues pour le dessin : points, droites et courbes sont faciles à tracer sur l'écran suivant une logique proche des logiciels usuels sur micro-ordinateurs.

Les études de fonctions sont aussi facilitées par le graphisme étendu : vision des coordonnées du curseur, calcul interactif des racines et des extrema avec la présentation du graphe, modes graphiques divers : graphes cartésiens ou polaires, coordonnées paramétriques ou implicites, histogrammes.

L'impression peut se faire sur l'imprimante thermique HP par la sortie infra-rouge comme pour la HP28 mais pourra aussi s'effectuer sur toute autre imprimante par la sortie RS232.

Si la structure du langage est restée la même que sur la HP28, de nombreuses extensions doivent être notées : réorganisation des types d'objets, horloge et calendrier, nouveaux flags, fonctions d'entrée-sortie, librairies etc... Nous présenterons cela dans de prochains articles au travers des applications proposées.

Dans l'exemple qui suit nous tirons parti des possibilités graphiques, du nouvel éditeur de matrices et des vecteurs à deux et trois dimensions. Une meilleure organisation des menus est aussi proposée.

3. Un exemple : étude de coniques

3.1. Organisation des menus

Le menu principal est constitué de sous-menus :

MENUC : $\ll\{\text{INITC PRMC ETUDC CNVC}\} \text{MENU}\gg$

Le menu INITC sert à initialiser les paramètres de la conique :

INITC : $\ll\{\text{INITG M M}\rightarrow\text{CNQ GRPH SCALE CENTR}\} \text{TMENU}\gg$

Le menu PRMC donne les paramètres :

PRMC : $\ll\{\text{A B C D E F}\} \text{TMENU}\gg$

Le menu ETUDC est celui qui effectue les calculs pour l'étude :

ETUDC : $\ll\{\text{M CNTR DAS DPR GPOL SOL2}\} \text{TMENU}\gg$

Le menu CNVC contient les conversions :

CNVC : $\ll\{\text{P}\rightarrow\text{CN V}\rightarrow\text{DR H}\rightarrow\text{C C}\rightarrow\text{H D}\rightarrow\text{H}\} \text{TMENU}\gg$

3.2. Objets

Une définition rigoureuse des objets sur lesquels on va travailler doit précéder toute programmation. Voyons ceux qui nous intéressent ici.

La conique : elle est représentée par une matrice réelle symétrique 3×3 (M), par 6 nombres réels (A,B,C,D,E et F) ou par une équation algébrique. On écrit la matrice avec l'éditeur MATRIX et les programmes qui transfèrent les coefficients dans la mémoire :

M→CNQ : $\ll\text{'M' STO COEF}\gg$

COEF : $\ll\text{M ARRY} \rightarrow \text{DROP 'C' STO 'D' STO 'E' STO DROP 'B' STO 'F' STO DROP DROP 'A' STO}\gg$

Le programme suivant écrit l'équation de la conique :

P→CN : $\ll\text{A 'X' SQ * B 'Y' SQ * + C + D 'Y' * 2 + E 'X' * 2 * + F 'X' 'Y' * * 2 * +}\gg$

Les points : ils sont représentés par leurs coordonnées cartésiennes (C : vecteur à deux dimensions) ou homogènes (H : vecteur à trois dimensions). Les programmes suivants effectuent les conversions :

C→H : $\ll\text{V} \rightarrow 1 \rightarrow \text{V3}\gg$

H→C : $\ll\text{V} \rightarrow \text{SWAP OVER / ROT ROT / SWAP} \rightarrow \text{V2}\gg$

Les droites : elles sont représentées par un vecteur à trois dimensions ou une équation. Le programme suivant fait la conversion :

V→DR : $\ll\text{V} \rightarrow \text{SWAP 'Y' * + SWAP 'X' * +}\gg$

Les directions : elles sont données par un nombre réel ou un point à l'infini. Le programme suivant fait la conversion :

D→H : $\ll 1 \text{ SWAP } 0 \rightarrow \text{V3}\gg$

On aura aussi besoin d'un programme pour résoudre les équations du second degré ; nous en proposons un ci-dessous qui prend les coefficients dans le stack et donne les deux solutions réelles ou complexes :

SOL2 : $\ll \rightarrow a \ b \ c \ll b \text{ SQ } a \ c * 4 * - \sqrt{} \ b - 2 / a / c \text{ OVER } / a / \gg \gg$

3.3. Dessin de la conique

La variable PICT contient à tout moment l'état du graphique : elle est gérée par les différentes commandes et par les programmes. Le programme INITG qui suit initialise notre dessin en préparant les axes des coordonnées :

```
INITG :  <<CONIC 'X' INDEP 'Y' DEPND (0,0) CENTR 1 1 SCALE  
ERASE DRAX>>
```

Pour dessiner le graphe :

```
GRPH :  <<P→CN STEQ DRAW GRAPH>>
```

Le dessin de la polaire d'un point dont les coordonnées cartésiennes ou homogènes sont dans le premier niveau du stack se fait par l'appel du programme suivant :

```
GPOL :  <<DUP  
        IF SIZE {3} ≠  
        THEN C→H END  
        M SWAP * V→DR STEQ DRAW GRAPH>>
```

3.4. Quelques calculs

Nous donnons quelques exemples de recherches sur la conique ; les amateurs étendront aisément les possibilités du programme.

Recherche du centre :

```
CNTR :  <<M INV 0 0 1 →V3 * H→C>>
```

Directions asymptotiques :

```
DAS :  <<B F 2 * A SOL2 DUP  
        IF TYPE 0 ==  
        THEN D→H SWAP D→H END>>
```

Directions principales :

```
DPR :  <<F A B - F NEG SOL2 D→H SWAP D→H>>
```

3.5. Utilisation des programmes

Après avoir écrit tous les programmes dans un répertoire (CONIQ par exemple), presser MENC pour installer le menu principal dans le menu "custom". A chaque pression de la touche CST on reviendra alors au menu principal. Le choix des menus secondaires ou temporaires (TMENU) ne modifie pas la variable CST.

Dans INITC, écrire la matrice avec l'éditeur de matrices et presser M→CN pour rentrer les paramètres en mémoire, INITG pour initialiser le graphe et GRPH pour voir le dessin. SCALE et CENT sont des commandes HP qui permettent de modifier l'échelle et le centrage du graphique décrites dans le manuel.

Dans ETUDC on trouvera les recherches diverses et GPOL pour dessiner les résultats.

3.6. Exemples

Nous présentons ci-dessous les résultats sur l'imprimante thermique HP :

MENU PRINCIPAL:

```

< MENU PRINCIPAL >
4:
3:
2:
1:
INIT (PRINCIPAL) [OK]

```

EDITEUR DE MATRICES:

```

3:
2:
1:
EDIT [OK] [DEL] [END] [F5] [F6] [F7] [F8]

```

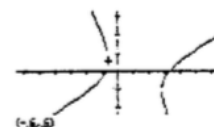
MENU INITC:

```

< MENU INITC >
4:
3:
2:
1:
INITC [OK] [DEL] [END] [F5] [F6] [F7] [F8]

```

GRAPHE:



ETUDE CENTRE:

```

< MENU CENTRE >
4:
3:
2:
1:
CENTRE [OK] [DEL] [END] [F5] [F6] [F7] [F8]

```

DIR. ASYMPTOTIQUES:

```

< MENU DIR. ASYMPTOTIQUES >
4:
3:
2:
1:
DIR. ASYMPTOTIQUES [OK] [DEL] [END] [F5] [F6] [F7] [F8]

```



DIR. PRINCIPALES:

```

< MENU DIR. PRINCIPALES >
4:
3:
2:
1:
DIR. PRINCIPALES [OK] [DEL] [END] [F5] [F6] [F7] [F8]

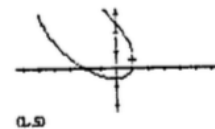
```



```

< MENU DIR. PRINCIPALES >
4:
3:
2:
1:
DIR. PRINCIPALES [OK] [DEL] [END] [F5] [F6] [F7] [F8]

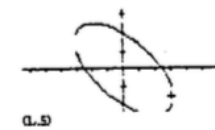
```



```

< MENU DIR. PRINCIPALES >
4:
3:
2:
1:
DIR. PRINCIPALES [OK] [DEL] [END] [F5] [F6] [F7] [F8]

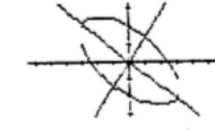
```



```

< MENU DIR. PRINCIPALES >
4:
3:
2:
1:
DIR. PRINCIPALES [OK] [DEL] [END] [F5] [F6] [F7] [F8]

```



4. Conclusion

Le principe essentiel de la programmation de la HP48SX reste comme pour la HP28, l'extrême modularité des programmes. Chaque procédure a sa fonction propre et elle est utilisable et testable indépendamment des autres.

L'organisation générale de la machine est bien complète et très souple même si elle semble un peu obscure au premier abord ; il faut rentrer dedans !

La richesse des fonctions proposées est incomparable ; il faut de nombreuses heures de travail pour faire le tour de cette machine. On regrettera cependant qu'on ne puisse toujours pas mettre des variables dans les vecteurs et qu'on doive toujours programmer les statistiques en données groupées soi-même comme sur la HP28.

Il est indéniable que cette machine est la plus performante disponible actuellement. La liaison avec les micro-ordinateurs sera un atout considérable pour les développements futurs.

Adresse de l'auteur

Francis MICHEL

28, avenue des Campanules

1170 Bruxelles.

Dans nos classes

Y. Noël,

Tous les énoncés sont extraits de MATHEMATICS TEACHER -
Vol. 83 n° 1. Janv. 1990.

1. Pour jouer avec une formule littérale :

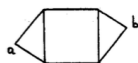
Un cylindre C a un volume V .

Le cylindre C' a comme hauteur le tiers de la hauteur de C et comme diamètre le triple du diamètre de C .

Que vaut le volume de C' ?

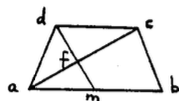
2. Pour utiliser des transformations du plan :

a. Deux triangles rectangles identiques sont juxtaposés à un carré de la manière suivante :



Démontrer que ab est bissectrice des deux angles droits en a et en b .

b.



$abcd$ est un trapèze dont la hauteur mesure 12 cm.

m est le milieu de $[ab]$.

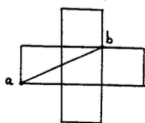
Calculer l'aire de $cfmb$ sachant que $[dc]$ mesure 15 cm et $[ab]$ 24 cm.

3. Pour apprendre à se simplifier la vie en “regardant bien” :

a. Dans un cercle C , on inscrit un rectangle et on considère le losange ayant comme sommets les milieux des côtés du rectangle.

Que vaut le périmètre du losange sachant que r est le rayon du cercle ?

b. Une croix est formée de cinq carrés comme ci-dessous. Que vaut l'aire de la croix si $[ab]$ mesure 10 cm ?



c. Voici deux demi-cercles. La droite ab est tangente au plus petit et est parallèle au diamètre cd du plus grand.

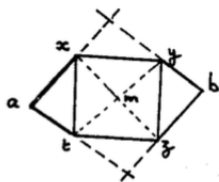


Que vaut l'aire hachurée si $[ab]$ mesure 24 cm ?

Solutions

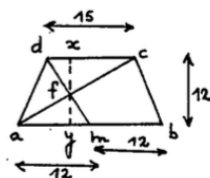
1. $\text{Vol } C' = 3 \text{ Vol } C$

2.a



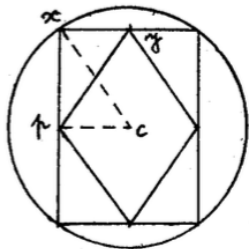
Le centre m du carré $xyzt$ est aussi centre de symétrie du carré $asbr$ dans lequel ab est une diagonale.

2.b



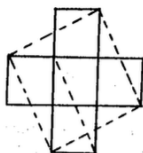
En utilisant par exemple l'homothétie de centre f et qui applique d sur m , on peut déterminer $||fy|| = 16/3$.
L'aire de $cfmb$ peut être calculée par différence de celle de cad et de fam :
 $144 - 32 = 112$.

3.a



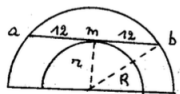
Quel que soit le rectangle inscrit, cx est une diagonale du rectangle $xycp$ et le périmètre demandé vaut $4r$, où r désigne le rayon du cercle.

3.b On peut appliquer le théorème de Pythagore et obtenir $\sqrt{2}$ comme côté d'un des petits carrés assemblés ... mais on peut aussi “regarder” :



et raisonner en utilisant une symétrie centrale.

3.c Rien ne modifie l'aire cherchée si nous déplaçons le petit demi-cercle :
mais ici :



$$\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 12^2 = 72\pi.$$

L'aire hachurée vaut donc $72\pi \text{ cm}^2$.

A méditer

De nombreux élèves seront sans doute étonnés d'avoir une mauvaise note pour une copie “très longue” (...) : les copies “fleuve” brillent par l'absence de tout raisonnement solide et calcul correct, d'où l'appréciation sévère des correcteurs ... Ont été également sévèrement sanctionnés ceux qui, naïfs ou malhonnêtes, aidés par les réponses fournies par le sujet, essaient par un semblant de démonstration de tromper le correcteur, ... peut-être même hélas, de se duper eux-mêmes (Extrait du rapport du correcteur, E.S.S.E.C., 1982).

Humour

C. Rédaction,

La réforme de l'enseignement est loin de faire l'unanimité. Un groupe d'enseignants de très haut niveau s'est penché sur une question qui préoccupe la majorité des futurs professeurs ; l'évolution d'un problème mathématique.

L'exposé, par exemple, de cette évolution vous aidera sans doute à vous y retrouver.

ENSEIGNEMENT 1960

Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 100Fr. Ses frais de production s'élèvent aux $\frac{4}{5}$ du prix de vente. Quel est son bénéfice ?

ENSEIGNEMENT TRADITIONNEL 1970

Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 100Fr. Ses frais de production s'élèvent aux $\frac{4}{5}$ du prix de vente, c.à.d. à 80Fr. Quel est son bénéfice ?

ENSEIGNEMENT MODERNE 1970

Un paysan échange un ensemble "P" de pommes de terre contre un ensemble "M" de pièces de monnaies. Le cardinal de l'ensemble "M" est égal à 100 et chaque élément "PMF" vaut 1 Fr. Dessine 100 gros points représentant les éléments de l'ensemble "M". L'ensemble "F" des frais de production comprend 20 gros points de moins que l'ensemble "M". Représente l'ensemble "F" comme sous-ensemble de l'ensemble "M" et donne la réponse à la question suivante : Quel est le cardinal de l'ensemble "B" des bénéfices ? (A dessiner en rouge).

ENSEIGNEMENT RENOVE 1980

Un agriculteur vend un sac de pommes de terre pour 100Fr. Les frais de production s'élèvent à 80Fr. et le bénéfice est de 20Fr. Souligne les mots "pommes de terre" et discutes-en avec ton voisin.

ENSEIGNEMENT REFORME 1980

Un peizan kapitalist privilaiégi s'anrichi injustemen de 20 Fr. sur un sac de patat. Analiz le tekst et chairch les fôte de kontenu, de gramère, de pontuasson et ensuit di se ke tu panse de sette maniaire de s'anrichir.

ENSEIGNEMENT ASSISTÉ PAR ORDINATEUR 1990

Un producteur de l'espace agricole câblé consulte en conversationnel une data bank qui display le day-rate de la patate. Il loadé son progiciel de computation fiable et détermine le cash-flow sur écran bit-map haute résolution (sous MS-DOS avec config dual floppy et hard-disk 20Mb). Dessine avec ta souris le contour intégré 3-D du sac de patates puis logue-toi au réseau "Arpanet" par le code 36-15 "BP" (Blue Potatoe) et suis les indications du menu pour plotter le graphe sur ta super-imprimante laser.

ENSEIGNEMENT DE L'AN 2000

Qu'est-ce qu'un paysan ?

Un problème stupide ! ?

Un père a 25 ans de plus que son fils. Dans 7 ans, il aura 5 fois l'âge de son fils. Que fait le père ?

Réaction d'un étudiant optimiste !

Après son examen de mathématiques, un étudiant envoie ce télégramme à ses parents : "très content ! jury enthousiasmé, désire me revoir l'an prochain."

Olympiades

C. Festraets,

A propos de la solution du 4e problème de la finale maxi de l'O.M.B. 1989, solution publiée dans le Mathématique et Pédagogie n° 74 (pages 87 et 88), le Dr. W. MOLDENHAUER de Erfurt (D.D.R.) m'envoie la remarque que voici.

$$\text{On a } 1989 = 30^2 + 33^2 = a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Si l'on prend $a = 30, b = 33, c = 30, d = 33$, alors

$$\begin{aligned} 1989^2 &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \\ &= (30^2 + 33^2)^2 + 0^2, \end{aligned}$$

ce qui n'est pas la somme de deux carrés non nuls.

On doit donc prendre $a = 33, b = 30, c = 30, d = 33$ et dans ce cas, on obtient

$$1989^2 = (2 \cdot 30 \cdot 33)^2 + (33^2 - 30^2)^2.$$

A chaque étape, il faut donc veiller à ce que $ad - bc$ soit non nul ($ac + bd$ est évidemment positif) ; ceci peut être réalisé en prenant $a > b$ et $d > c$, ce qui est toujours possible puisque 1989^n est impair.

La solution publiée était donc incomplète et je remercie le Dr. MOLDENHAUER pour ces indispensables précisions.

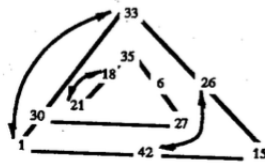
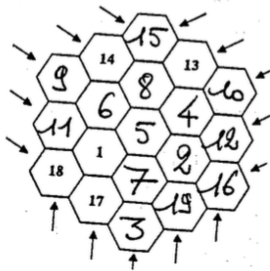
Les questions de l'éliminatoire du quatrième championnat de France des jeux mathématiques et logiques ont été publiées dans le Mathématique et Pédagogie n° 75 (pages 83 à 88). En voici les solutions.

Catégorie individuel non scolaire HC et GP

1. 1522
2. 405
3. 204 (une seule solution à
4. 882 (chaque problème).
5. 43
6. 129158041750920

Catégorie collectif Lycées

- 1. 1000 m
- 2.
- 3.

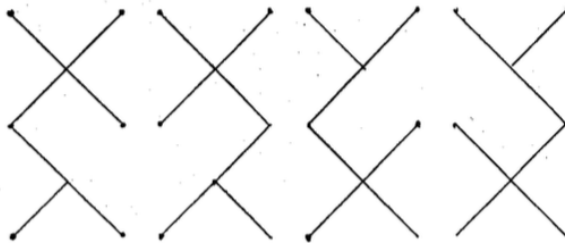


les flèches indiquent les permutations possibles.

- 4. 1394 (une solution)
- 5. 6928 m (une solution)
- 6. 17910.

Catégorie collectif Collèges

- 1. Quatre solutions symétriques possibles.

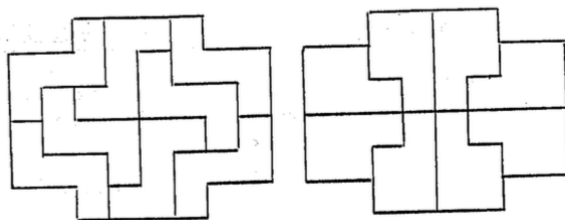


- 2. 3 et 5
- 3. sept solutions

10 12 14	12 12 12	14 12 10	16 12 8
7 9 11	10 10 10	13 11 9	16 12 8
4 6 8	8 8 8	12 10 8	16 12 8

18 12 6	20 12 4	22 12 2
19 13 7	22 14 6	25 15 5
20 14 8	24 16 8	28 18 8

4. deux solutions



5. 1287

6. 32

Les énoncés et solutions de tous les jeux-problèmes publiés dans le cadre du championnat sont édités dans un recueil qui vous fera passer de nombreuses heures de réflexion intense.

Annales volume 1 (championnat 1987 A) : 250F

64 pages - 47 jeux problèmes

Annales volume 2 (championnat 1987 B) : 250 F

62 pages - 42 jeux problèmes

Annales volume 3 (championnat 1988) : 250 F

95 pages - 70 jeux problèmes

Annales 89 :

Les mètres du mystère

La fraction du Bicentenaire : 550F

2×128 pages - 122 jeux problèmes

A verser au compte :

001 - 2215663 - 65

de F.F.J.M.

André PARENT

B.P. 157

7700 MOUSCRON

Voici maintenant quinze questions de la 2^{de} partie du test américain. Je rappelle que chaque réponse est un nombre entier positif de trois chiffres au plus. Les solutions seront publiées dans le Mathématique et Pédagogie de septembre-octobre 1990.

8 th Annual American Invitational Mathematics Examination
--

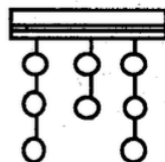
1. La suite croissante 2,3,5,6,7,10,11,... se compose de tous les entiers positifs qui ne sont ni le carré ni le cube d'un entier positif. Trouver le 500^e terme de la suite.

2. Trouver la valeur de $(52 + 6\sqrt{43})^{3/2} - (52 - 6\sqrt{43})^{3/2}$
3. Soit P_1 un polygone régulier de r côtés et P_2 un polygone régulier de s côtés ($r \geq s \geq 3$) tels que chaque angle intérieur de P_1 vaut $\frac{59}{58}$ de chaque angle intérieur de P_2 . Quelle est la plus grande valeur possible de s ?
4. Trouver la racine positive de

$$\frac{1}{x^2 - 10x - 29} + \frac{1}{x^2 - 10x - 45} - \frac{2}{x^2 - 10x - 69} = 0.$$

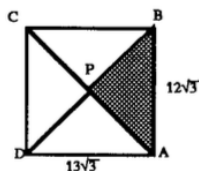
5. Soit n le plus petit entier positif qui est un multiple de 75 et qui a exactement 75 diviseurs entiers positifs, y compris 1 et 75. Trouver $\frac{n}{75}$.
6. Une biologiste veut évaluer le nombre des poissons dans un lac. Le 1er mai elle pêche au hasard un échantillon de 60 poissons, les marque et les remet dans l'eau. Le 1er septembre elle pêche au hasard un échantillon de 70 poissons et constate que 3 d'entre eux sont marqués. Pour calculer le nombre des poissons qui, le 1er mai, se trouvaient dans le lac, elle admet que 25% de ces poissons n'y seront plus, le 1er septembre (à cause des décès et des émigrations), que 40% des poissons présents le 1er septembre n'y ont pas été, le 1er mai (à cause des naissances et des immigrations) et que les nombres des poissons non marqués et des poissons marqués dans l'échantillon du 1er septembre sont représentatifs pour toute la population. Combien de poissons sont le 1er mai dans le lac selon les calculs de la biologiste?
7. Les sommets d'un triangle ont les coordonnées $P(-8, 5)$, $Q(-15, -19)$ et $R(1, -7)$. L'équation de la bissectrice de l'angle en P peut être écrite sous la forme $ax + 2y + c = 0$. Trouver $a + c$.
8. Dans une compétition de tir, huit cibles en argile sont arrangées en deux colonnes suspendues chacune de trois cibles et une colonne de deux cibles (voir figure). Un tireur doit briser toutes les huit cibles selon les règles suivantes :

- (1) Le tireur choisit d'abord une colonne dont il veut briser une cible.
- (2) Le tireur doit alors briser, dans la colonne choisie, la cible la plus basse qui est encore intacte.



Si ces règles sont suivies, dans combien d'ordres différents les huit cibles peuvent-elles être brisées?

-
-
9. Une pièce de monnaie non truquée doit être lancée dix fois. Soit $\frac{i}{j}$, sous forme irréductible, la probabilité que face n'arrive jamais dans des jets consécutifs. Trouver $i + j$.
10. Les ensembles $A = \{z : z^{18} = 1\}$ et $B = \{w : w^{48} = 1\}$ sont tous les deux des ensembles de racines complexes de l'unité. L'ensemble $C = \{zw : z \in A \text{ et } w \in B\}$ est aussi un ensemble de racines complexes de l'unité. Combien d'éléments distincts sont dans C ?
11. Quelqu'un a observé que $6! = 8.9.10$. Trouver le plus grand entier positif n pour lequel $n!$ peut être exprimé comme produit de $n - 3$ entiers positifs consécutifs.
12. Un polygone régulier de 12 côtés est inscrit dans un cercle de rayon 12. La somme des longueurs de tous les côtés et de toutes les diagonales peut s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ où a, b, c, d sont des entiers positifs. Trouver $a + b + c + d$.
13. Soit $T = \{9^k : k \text{ est un entier, } 0 \leq k \leq 4000\}$. On sait que 9^{4000} a 3817 chiffres et que le premier chiffre (à gauche) est 9. Alors combien des éléments de T ont 9 pour premier chiffre à gauche ?
14. Le rectangle $ABCD$ (voir figure ci-dessous) a les dimensions $AB = 12\sqrt{3}$ et $BC = 13\sqrt{3}$. Les diagonales $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ se coupent en P . Si le triangle ABP est détaché et enlevé, les côtés $\overline{AP}$ et $\overline{BP}$ sont réunis, et la figure est alors pliée selon les segments $\overline{CP}$ et $\overline{DP}$, afin d'obtenir une pyramide triangulaire dont les quatre faces sont toutes des triangles isocèles. Trouver le volume de cette pyramide.



15. Trouver $ax^5 + by^5$ si les nombres réels a, b, x et y vérifient $ax + by = 3$, $ax^2 + by^2 = 7$, $ax^3 + by^3 = 16$, $ax^4 + by^4 = 42$.