Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N° 100 *Janvier – Février 1995*

Editorial

G. Noël,

Vingt ans après

Avez-vous remarqué que ce numéro de *Mathématique et Pédagogie* porte le numéro 100 ? Cela signifie concrètement que notre revue a été publiée très régulièremnt durant 20 ans, à raison de 5 numéros par an. Le numéro 1 était daté de Mars-Avril 1975. S'il comportait 68 pages, il était néanmoins de présentation bien modeste. C'est que la SBPMef n'était guère riche. L'ancienne Société Belge de Professeurs de Mathématiques (bilingue) avait connu de plus en plus de difficultés pour fonctionner correctement et venait d'être dissoute, remplacée par la SBPMef d'une part, la VVWL d'autre part. Après la parution de 67 numéros, la revue de la SBPM, *Mathematica & Paedagogia*, disparaissait également, remplacée par *Mathématique et Pédagogie* et *Wiskunde en Didaktiek*. Assez rapidement, les deux sociétés unilingues devinrent plus importantes chacune que ne l'était la société bilingue auparavant. Notre revue pouvait reprendre un aspect plus profesionnel.

La publication régulière de notre revue n'a pu être réalisée sans le concours de très nombreux collaborateurs. Il n'est pas mauvais de rappeler que toutes les tâches "intellectuelles" (et parfois certaines tâches matérielles) ont toujours été réalisées tout à fait bénévolement par des membres. Je ne suis pas en mesure de citer, ni de remercier individuellement chacun d'entre eux. Je ne puis cependant pas ne pas citer au moins les trois derniers collègues ayant assuré la direction de la publication : Willy Vanhamme, Claudine Festraets et Jacques Bair. Tous trois ont réalisé un travail remarquable. Tous trois ont contribué de façon significative à la réalisation de nos objectifs.

A l'occasion de la parution du numéro 100, jetons un coup d'œil sur les sujets abordés dans le numéro 1. En tête de ce premier numéro, on trouvait deux courts textes redéfinissant les objectifs de la SBPMef et de sa revue. Les auteurs étaient Jean Nachtergaele et Jean Wilmet. Tous deux ont assuré ultérieurement la présidence. Leur avis de 1975 n'en a que plus de poids. Jean Nachtergaele écrivait notamment *"les professeurs de mathématique ont besoin d'un lieu d'expression de leur liberté de pensée, de leurs initiatives, de leurs suggestions, de leurs critiques, de leur imagination créatrice"*. Et Jean Wilmet ajoutait *"il faut que la revue soit un terrain d'échange et non* *plus seulement un flux des rédacteurs vers les lecteurs"*. Venaient ensuite quatre articles dont j'extrais des passages significatifs.

Dans *Calculons en raisonnant*, Jean Carlot et Bernard Honclaire conseillaient notamment l'usage d'organigrammes pour analyser un calcul, car

> *Pour pallier les difficultés des élèves, on leur fait généralement résoudre de nombreux exercices. . .Il nous semble que le drill est nocif s'il se limite à une répétition aveugle de procédés opératoires. . . .Bien souvent les déficiences sont dues à une mauvaise analyse.. . .Nous estimons indispensable au début d'expliciter entièrement l'enchaînement des calculs.*

Mustapha Kassab consacrait un article aux *Anneaux à diviseurs non nuls de zéro.* Ce texte était pensé pour les étudiants de régendat, ce qui expliquait *"surtout la bonne place qu'on y réserve au calcul"*. J'ajouterais *"et à des calculs obéissant à des règles non usuelles"*.

Un sujet faisant le lien entre enseignements primaire et secondaire était traité par Garabed Garikian : *Propriétés mathématiques des grandeurs physiques.* Il débutait par une affirmation commune à l'époque :

> *La mathématique, et plus particulièrement celle d'aujourd'hui se préoccupe davantage des relations entre les éléments qu'elle utilise que de ces éléments eux-mêmes.*

Se référant à un ouvrage de H. Freudenthal, il poursuivait :

> *Il n'est pas nécessaire de pouvoir définir une grandeur physique pour étudier ses propriétés mathématiques. Seules doivent être précisées les propriétés relationnelles entre ces objets et l'on ne peut dénier à une telle théorie d'être rigoureusement correcte.*

Enfin, Francis Buekenhout s'intéressait au *Lien entre groupes et géométrie*. Il débutait par une constatation que ne désavouerait pas Nicolas Rouche : *Parmi les nombreuses critiques que l'on adresse à l'enseignement actuel, il en est une qui émerge de plus en plus souvent : les élèves, les parents et les professeurs eux-mêmes ne savent pas très bien pourquoi on enseigne telle notion et pourquoi on l'enseigne de telle manière.* Cherchant alors à motiver l'enseignement des groupes, F. Buekenhout énumérait d'abord des exemples d'ensembles structurés et de leurs symétries ou automorphismes.

Rappelant ensuite que ceux-ci constituent un groupe, il citait également Freudenthal :

> *Pourquoi les groupes sont-ils si énormément importants en mathématique ? La réponse peut être très courte : les groupes sont importants parce que les automorphismes de n'importe quelle structure forment un groupe et parce que les automorphismes permettent d'apprendre tant de choses sur la structure elle-même.*

Nul doute que ces propos sont encore susceptibles d'alimenter de nombreuses réflexions et discussions aujourd'hui. La situation n'a-t-elle aucunement évolué en 20 ans ? J'ai envie de dire qu'elle est devenue encore plus complexe. Car c'est l'évolution globale de l'école qui est désormais au centre des débats. Le phénomène que nous avons constaté en mathématique existe également dans d'autres disciplines. On me permettra de citer ici quelques extraits d'un rapport récent de la Commission Société-Enseignement de la Fondation Roi Beaudouin ([1])

> *L'augmentation spectaculaire de la connaissance rend indispensable le passage de celle-ci à la compréhension des mécanismes et des règles. . . .La signification et le sens doivent prendre résolument le pas sur la mémoire.*
>
> *Les socles de compétence doivent devenir le fondement social d'une réelle autonomie des écoles et des enseignants, non l'amorce d'un contrôle plus strict, pour ne pas dire standardisé.*
>
> *L'ordinateur doit devenir le plus rapidement possible un outil ordinaire, utilisable en souplesse par les enseignants et par les élèves pour faciliter et approfondir le processus d'apprentissage. Il y a une contradiction absurde entre le terme d'"ordinateur personnel" et l'existence de locaux où les ordinateurs sont gardés sous clé.*

Comme vous pouvez le constater, plus que jamais, les propos de Jean Nachtergaele et Jean Wilmet rappelés plus haut sont pertinents. Notre Société et sa revue n'ont rien perdu de leur utilité. Plus que jamais également, la revue sera d'abord l'œuvre des membres de la SBPMef. A eux de s'exprimer, en toute liberté, et dans une optique constructive.

G. Noël

1. L'école n'est pas toute seule, De Boeck, 1994.

Arithmétique au premier degré

Y. Noël-Roch,

1. Introduction

Les textes des exposés faits aux congrès paraissent d'habitude dans cette revue. Compte tenu des nombreux passages communs entre mon exposé du 23 août à Binche (intitulé ≪Arithmétique dans l'enseignement secondaire≫) et le texte du dossier n°2 de la série ≪Explorations didactiques≫, il m'a paru inopportun de reproduire ici le contenu fidèle de l'exposé. Le souci d'ébaucher quelques ouvertures (non exhaustives !) vers les autres degrés du secondaire et le temps normalement imparti à une conférence plénière m'ont amenée à opérer des coupes dans les activités que j'aurais aimé aborder dans le cadre du premier cycle. Je consacrerai cet article à montrer la cohérence entre les propositions avancées pour le premier degré et le texte du programme actuellement disponible pour ce degré. Je renverrai par contre le lecteur aux dossiers ≪Arithmétique 1≫ et ≪Arithmétique 2≫ pour toute la partie de l'exposé qui peut y être trouvée.

Je n'aborderai pas non plus ici des prolongements aux deuxième et troisième degrés, réduisant ainsi provisoirement la spirale d'enseignement du primaire au premier degré du secondaire. Je ne résiste cependant pas à réaffirmer que le thème des plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple ne trouveront enfin leur place dans un cadre adéquat et non ambigu que lors de l'étude des polynômes, donc au-delà du premier degré. En effet, c'est dans l'ensemble des polynômes que les expressions ≪plus petit≫ et ≪plus grand≫ seront enfin exclusivement liées à la relation de divisibilité puisque, cette fois, deux éléments ne seront jamais comparables pour la relation $\leqslant$ si difficile à contourner (à cause du vocabulaire utilisé) dans les ensembles numériques.

2. La numération décimale de position

Aucune allusion n'y est faite dans le programme du premier degré. C'est donc qu'elle est bien maîtrisée par les élèves qui accèdent à ce niveau ? Comment expliquer alors les difficultés fréquentes dans la pratique du calcul écrit, les virgules baladeuses dans l'écriture des nombres, les incongruités obtenues comme produits d'un nombre par 1 ou par 0 ... ? Il me semble que

— les élèves ne peuvent bien percevoir le principe de numération décimale de position que s'ils disposent d'une image mentale des paquets d'unités, de dizaines, de centaines ...

— Ces images ne se fixent pas parce que l'écriture cache trop vite le mécanisme. Une assimilation valable ne peut être atteinte que si des bases autres que la base dix sont pratiquées, au moins pour la conceptualisation de la numération.

— Si les élèves avaient perçu les principes de la numération de position, ils auraient moins de problèmes avec les propriétés

$$0 \times a = 0$$

$$1 \times a = a$$

Ils les auraient en effet vécues en situation puisque, en base dix, 30107 est formé de 3 dizaines de mille, 0 millier, 1 centaine, 0 dizaine et 7 unités. Ou encore

$$30107 = (3 \times 10000) + (0 \times 1000) + (1 \times 100) + (0 \times 10) + (7 \times 1)$$

Et, quelle que soit la base b choisie ($b > 7$) :

$$30107 = (3 \times b^4) + (0 \times b^3) + (1 \times b^2) + (0 \times b) + 7$$

3. La divisibilité

Il est normal que la divisibilité de a par b soit associée dans l'enseignement primaire à la possibilité de *répartir équitablement et exactement* a objets entre b enfants. Et puisqu'il est souhaitable qu'une image mentale soit associée à ce partage, une première étape est donc que a et b soient des naturels strictement supérieurs à 1 et que la divisibilité de a par b soit liée à *l'exécution* (plus ou moins mentale, plus ou moins réelle) de la division de a par b. Comme pour l'assimilation des principes de la numération de position, il est essentiel que les élèves aient vécu, dans l'enseignement primaire, une pratique répétée de partages d'objets, qu'ils ≪voient≫ bien qu'on épuise les unités d'un ordre, puis d'un autre ordre, avec transfert d'unités restantes d'un ordre à l'ordre suivant. La compréhension d'un caractère de divisibilité par 3 (en numération décimale) peut par exemple reposer sur cet acquis.

Reprendre la divisibilité au début de l'enseignement secondaire doit la faire évoluer. Il faut absolument cette fois séparer la divisibilité de a par b de l'exécution de la division de a par b.

L'égalité

$$60 = 3 \times 20$$

induit les quatre propositions

60 est un multiple de 3

60 est un multiple de 20

3 est un diviseur de 60

20 est un diviseur de 60

De même, l'égalité

$$25 \times 0 = 0$$

induit les quatre propositions

0 est un multiple de 25

0 est un multiple de 0

25 est un diviseur de 0

0 est un diviseur de 0

Ainsi **0 est un diviseur de 0**

Cela n'a rien à voir avec le fait ≪qu'on ne peut pas diviser par zéro≫ puisque cela n'a rien à voir avec l'exécution d'une quelconque division ! Et cela n'induit en rien l'attribution d'une valeur au symbole ≪$\frac{0}{0}$≫ puisque $0 \times 2 = 0$ mais aussi $0 \times 285 = 0$ et $0 \times n = 0$ quel que soit le naturel n.

Quels que soient les naturels a, b et c, l'égalité $a = bc$ exprime que a est un multiple de b et de c aussi bien que b et c sont des diviseurs de a.

Réduire, comme le font les commentaires du programme de mars 1994, l'énoncé ci-dessus aux naturels non nuls ne peut que perpétuer une perception ambiguë de la notion de divisibilité.

4. Les arbres cachent la forêt

Extrayons du programme de première année une partie du contenu de

Nombres : noyau :

— *Nombres naturels*

- *Addition, soustraction, multiplication et division des nombres naturels, propriété d'associativité, de commutativité et de distributivité. Ces matières ont été enseignées dans le fondamental. On vise à ce que les élèves comprennent bien le sens des propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité.*
- *Divisibilité. Deux propriétés sont essentielles :*
  - *si un nombre divise un autre, alors il divise ses multiples,*
  - *si un nombre divise deux autres, alors il divise leur somme et leur différence.*

- *Expressions littérales*
  - *Développement, mise en évidence dans des expressions littérales simples de la forme $a(b+c)$ ou $ab+ac$.*

Je pense que les élèves ≪ne comprennent bien le sens≫ d'une notion, quelle qu'elle soit, que lorsqu'ils en ont acquis une image mentale disponible à tout moment et qui déclenche la reconnaissance chaque fois qu'elle est rencontrée, sous des formes plus ou moins variées. Le texte du programme repris ci-dessus éparpille une notion plutôt que d'en favoriser une conception synthétique efficace. Quelle clarté introduisons-nous chez les élèves si nous distinguons les propriétés citées :

- *la multiplication distribue l'addition dans les naturels.*
  Pour moi, cela signifie que
  $$\text{Quels que soient les naturels } a, b \text{ et } c, \qquad a.(b+c) = (a.b) + (a.c)$$
- *le développement d'une expression littérale.*
  Ici, le programme occulte le référentiel en parlant de *représentation littérale des nombres*. Restons par exemple dans le contexte des naturels pour expliciter la propriété :
  $$\text{Quels que soient les naturels } a, b \text{ et } c, \qquad a.(b+c) = (a.b) + (a.c)$$
- *la mise en évidence dans une expression littérale.*
  J'interprète de nouveau :
  $$\text{Quels que soient les naturels } a, b \text{ et } c, \qquad (a.b) + (a.c) = a.(b+c)$$
- *la propriété essentielle : si un nombre divise deux autres, alors il divise leur somme.*
  Conformément à ce qui a été dit plus haut, si a est un diviseur de x et de y, il existe deux naturels, soit x' et y' tels que
  $$x = a.x' \text{ et } y = a.y'$$

Dès lors,

$$x + y = (a.x') + (a.y') = a.(x' + y')$$

Cette dernière égalité exprimant que a est un diviseur de $x + y$ grâce au fait que $x' + y'$ est un naturel.

Reconnaissons donc partout la même formulation, bien que la *propriété essentielle* oblige à insister sur le référentiel de travail puisqu'il est …essentiel …de signaler que $x' + y'$ est un naturel pour conclure que a est un diviseur de $x + y$. La propriété de l'addition qui associe un naturel à tout couple de naturels est importante dans la justification de la propriété. Il est donc tout particulièrement malheureux de placer ≪sur le même pied≫ l'utilisation d'une différence et d'une somme dans cette *propriété essentielle.* De manière tout aussi insidieuse, pourquoi faut-il qu'≪un nombre divise deux *autres*≫ ? a n'est-il pas un diviseur de $a + b$ dès qu'il est un diviseur de b ? Ne compliquons donc pas la vie des élèves en choisissant des énoncés truffés de pièges que nous aurons bien du mal à contourner plus tard.

Que ce soit dans l'ensemble des naturels ou dans celui des entiers, chaque fois que l'égalité

$$(a.b) + (a.c) = a.(b + c)$$

interviendra dans la suite, je parlerai de ≪MISE EN ÉVIDENCE≫. Il s'agit évidemment d'un choix arbitraire, pratique par sa concision.

5. Caractères de divisibilité

Nous lisons en page 2 du programme, dans les *Tendances nouvelles :* *…les notions d'arithmétique abordent des enchaînements d'énoncés* …

Enchaînons donc
— La mise en évidence
— et le principe de numération (décimale) de position.

$$\begin{aligned} \ldots a &= \ldots \text{ dizaines } + a \text{ unités} \\ &= (\ldots \times 10) + a \\ &= (\ldots \times 2 \times 5) + a \end{aligned}$$

Ces égalités montrent que 2 (de même que 5) pourra être mis en évidence dès que a est multiple de 2 (5). On en déduit qu'un nombre est multiple de 2 (ou 5) dès que le nombre formé du seul chiffre des unités est multiple de 2 (ou 5).

De manière analogue :

$$\begin{aligned} \ldots ba &= \ldots \text{ centaines } + ba \\ &= (\ldots \times 100) + ba \\ &= (\ldots \times 4 \times 25) + ba \end{aligned}$$

Et la possibilité de mettre 4 ou 25 en évidence ne dépendra que du nombre ba. Pourquoi les élèves ne proposeraient-ils pas

$$\begin{aligned} \ldots ba &= \ldots \text{ centaines } + ba \\ &= (\ldots \times 100) + ba \\ &= (\ldots \times 5 \times 20) + ba \end{aligned}$$

Ils en déduiront qu'un nombre est multiple de 5 ou de 20 dès que le nombre formé de ses deux derniers chiffres à droite est multiple de 5 ou de 20. Ce n'est évidemment pas faux et ce sera une bonne occasion de déboucher sur des expressions du genre

— pour savoir si un nombre est ou n'est pas multiple de 5 il **suffit** de considérer le chiffre des unités.
— pour savoir si un nombre est ou n'est pas multiple de 4, il **ne suffit pas** de considérer le chiffre des unités mais il **suffit** de considérer le nombre formé des deux derniers chiffres à droite.
— pour savoir si un nombre est ou n'est pas multiple de 4, il **faut** considérer le nombre formé des deux derniers chiffres à droite.

Si des caractères classiques doivent être revus, comme l'indique le programme, ils doivent être liés à des raisonnements. Ainsi, le nombre de chiffres à considérer sera lié au fait que

— 10 est multiple de 2 et 5 mais ni de 4, ni de 8, ni de 25 ...
— 100 est multiple de 4 et 25 mais ni de 8, ni de 125 ...
— 1000 est multiple de 8 et de 125.

Ce thème ne me paraît défendable que s'il s'ouvre au-delà de ces quelques règles étriquées. Le programme incite à l'ouverture en fournissant l'exemple suivant

$$434 \text{ est multiple de 7 parce que } 434 = 420 + 14$$

Exploitons donc ce thème pour faire fonctionner la mise en évidence et apprendre à ≪regarder intelligemment≫ un nombre. J'entends par là qu'aucune mécanisation ne doit l'emporter. Ici par exemple, il est vrai que $434 = 400 + 30 + 4$ ...mais ce n'est pas la meilleure perception pour le moment ...même si elle est fondamentale à d'autres moments. S'il n'y a pas raisonnement et ouverture, il me paraît parfaitement inutile de rappeler quelques critères de divisibilité dont on n'a aucun véritable usage mais qui bénéficient apparemment de l'aura d'un autre âge.

6. Il faut, il suffit

Le programme recommande de *faire un bon usage oral et écrit de conjonctions telles que : or, en effet, donc, puisque, parce que, par ailleurs ...et des expressions telles que : il existe, certains, tous, si ...alors, si et seulement si, ...*

Je m'empresse d'utiliser les points de suspension du texte pour insister sur ≪**il faut**≫ et ≪**il suffit**≫. Si la méthode de décomposition en somme et mise en évidence exploitée au paragraphe précédent devient une mécanique aveugle, elle peut induire une idée fausse : le besoin que tous les termes d'une somme soient multiples d'un même nombre pour que la somme soit multiple de ce nombre. Ce piège peut être évité en exploitant par exemple le jeu suivant.

La classe propose trois nombres naturels. Le professeur construit un nombre en utilisant chacun des trois nombres au plus une fois et l'addition. Il gagne s'il réussit à fournir un multiple de 3, sinon c'est la classe qui gagne.

Exemple : si la classe propose 5, 14 et 22, le professeur peut trouver 27. Ce jeu est exploité à différents niveaux de difficulté dans [2] et amène d'autres notions mais je me limite ici à trois phrases qui explicitent la nécessité, la suffisance et l'équivalence :

— pour qu'une somme soit multiple de a, **il suffit** que chacun des termes soit multiple de a

— pour qu'une somme soit multiple de a, **il n'est pas nécessaire** que chacun des termes soit multiple de a.

— pour qu'un nombre soit multiple de 4, **il faut et il suffit** que le nombre formé de ses deux derniers chiffres à droite soit multiple de 4.

7. Algorithme d'Euclide

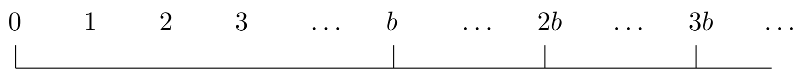
Je trouve encore dans le programme : *L'arithmétique a suscité la curiosité et l'intérêt depuis l'Antiquité, elle a toujours été considérée comme une branche pure des mathématiques et connaît actuellement un regain d'intérêt auquel l'informatique et l'algorithmique ne sont pas étrangères.*

D'autre part, je trouve dans le noyau sur les nombres naturels en deuxième année :
— *Division euclidienne : relation fondamentale.*
— *Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de deux nombres.*

Ce texte officiel conduit tout droit à l'algorithme d'Euclide. Voyons comment.

L'exploitation du jeu signalé au paragraphe précédent amène le classement des naturels en
— les multiples de 3 ($3\mathbb{N}$)
— les multiples de 3 auxquels on ajoute 1 ($3\mathbb{N} + 1$)
— les multiples de 3 auxquels on ajoute 2 ($3\mathbb{N} + 2$)

Plus généralement, il fait prendre conscience de la périodicité dans la succession des naturels :

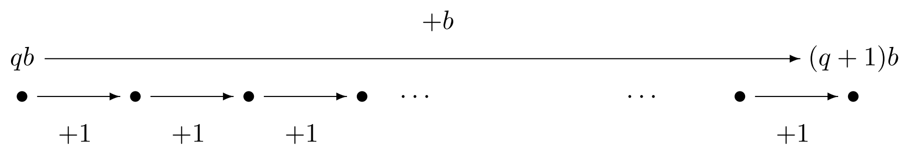


Tout naturel a est alors
— soit un multiple de b
— soit compris entre deux multiples consécutifs de b

En simulant l'insertion d'un naturel a dans le schéma ci-dessus, on débouche sur l'existence d'un naturel unique q pour lequel

$$q.b \leqslant a < (q+1).b$$

En analysant ensuite la situation entre les nombres $q.b$ et $(q+1).b$



on voit que, si a n'est pas égal à $q.b$, le nombre r à ajouter à $q.b$ pour obtenir a sera au maximum $b - 1$.

Ces observations conduisent donc à la relation suivante :

> Quel que soit le naturel a et le naturel non nul b,
> il existe un naturel unique q et un naturel unique r pour lesquels
>
> $$a = (q.b) + r \text{ et } 0 \leqslant r < b$$
>
> .

L'algorithme d'Euclide pour calculer le plus grand commun diviseur de deux nombres peut être démontré très simplement à partir de cette propriété. Il consiste à remplacer successivement le couple (a, b) par le couple (b, r) ...jusqu'à obtenir un couple sur lequel la réponse est ≪évidente≫.

Par exemple

$$\text{pgcd}(560, 400) = \text{pgcd}(400, 160) = \text{pgcd}(160, 80) = 80$$

Dans un premier temps, l'arrêt de l'algorithme n'est pas le test classique du reste nul mais la reconnaissance de ce qu'un des deux nombres est un diviseur de l'autre.

Démontrons l'algorithme :

Nous savons que

$$a = b.q + r \text{ et } 0 \leqslant r < b$$

Donc $a - q.b = r$ est un naturel et si d est un diviseur commun à a et b, il pourra être mis en évidence entre les deux termes du premier membre. Ce nombre d sera donc un diviseur de r.

Nous venons de démontrer que **tout diviseur commun à a et b est un diviseur commun à b et r.**

De même, l'égalité $a = q.b + r$ et la mise en évidence montrent que tout diviseur commun à b et r est un diviseur de a.

Nous venons de démontrer que **tout diviseur commun à b et r est un diviseur commun à a et b.**

Nous avons donc justifié que le couple (a, b) et le couple (b, r) ont même ensemble de diviseurs communs. Ils ont donc nécessairement même plus grand commun diviseur.

Pour convaincre les élèves de l'économie apportée par l'algorithme d'Euclide, il suffit de laisser exécuter la recherche par la méthode (antérieure donc malheureusement plus familière) des factorisations premières. Dans le cas du couple (560,400) ci-dessus, le calcul par factorisation nécessite 12 divisions et 4 multiplications tandis que l'algorithme donne la réponse en 3 divisions.

8. Jeux, défis, représentations, ...

Citons à nouveau le programme : *les activités dans le cadre de l'arithmétique peuvent comporter des jeux, des recherches, des représentations géométriques des nombres connues depuis l'Antiquité.*

8.1. Jeux

L'approche de la matière à travers le **jeu** motive la classe qui espère gagner contre le professeur. La stratégie qui consiste à créer deux équipes opposées est également payante. Plusieurs situations de jeu sont proposées dans [1] et [2], je ne les reproduis donc pas ici. Je partirai plutôt d'un **défi** qui peut être lancé dans une classe, en sachant fort bien que de nombreux élèves ne pourront pas le surmonter totalement. Certains élèves ne trouveront que très peu de réponses et elles seront dues au hasard. On peut donner un temps de recherche au-delà duquel chacun aura ≪honnêtement rempli son contrat personnel≫ pour éviter de traumatiser un élève consciencieux mais peu clairvoyant. Bref, il faudra faire preuve de tactique mais le niveau du défi est indispensable pour **nécessiter une organisation adéquate**.

8.2. Défi

Rechercher 30 nombres qui admettent tous exactement 8 diviseurs.

Si vous ne voyez pas immédiatement comment vous organiser pour affronter ce défi, je vous invite à prendre un crayon et du papier et à ne revenir que plus tard à votre lecture.

Le but est la prise de conscience d'un **besoin d'organisation**. La tâche est pénible et très ennuyeuse si nous prenons des nombres au hasard, recherchons leurs diviseurs ...pour constater le plus souvent qu'il n'y en a pas exactement 8. Par contre, quelques exemples chanceusement découverts peuvent être observés et des similitudes peuvent être découvertes. Si 24 et 40 sont par exemple découverts, les deux égalités

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \text{ et } 40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

mettent la puce à l'oreille à moins qu'elles ne mettent les treillis de diviseurs à l'esprit .

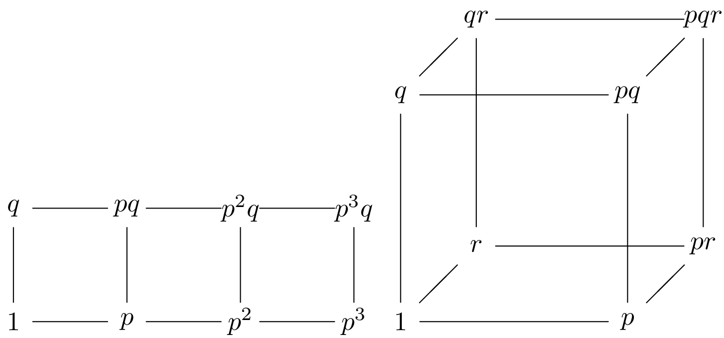
$$\begin{tikzcd}
5 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 10 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 20 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 40 \arrow[d, dash] \\
1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 4 \arrow[r, dash] & 8
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 6 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 12 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 24 \arrow[d, dash] \\
1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 4 \arrow[r, dash] & 8
\end{tikzcd}$$

Calculer 30 nombres sur ce schéma devient de nouveau rapidement peu intéressant. Par contre, la recherche peut être relancée sous forme d'un nouveau défi :

Rechercher les différents treillis sous lesquels se cachent les nombres qui admettent exactement 8 diviseurs.

De nouveau, des exemples déjà trouvés (128 et 30 par exemple) peuvent faciliter les tâtonnements mais la recherche débouchera sur une synthèse : les nombres admettant exactement 8 diviseurs sont nécessairement de la forme p^7 ou $p^3.q$ ou $p.q.r$ où p, q et r désignent des nombres premiers différents. Cette formulation n'est nullement nécessaire et peut être perçue dans les schémas suivants :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, dash] & p \arrow[r, dash] & p^2 \arrow[r, dash] & p^3 \arrow[r, dash] & p^4 \arrow[r, dash] & p^5 \arrow[r, dash] & p^6 \arrow[r, dash] & p^7
\end{tikzcd}$$



8.3. Situations, représentations

Dans [2], nous utilisons le ≪jeu du nombre interdit≫ pour provoquer l'apparition des treillis des diviseurs d'un nombre. Nous venons d'utiliser une autre situation. Pour la créer, nous avons tout simplement utilisé une méthode généralement efficace. Elle consiste à ≪retourner comme une chaussette≫ un exercice routinier connu : au lieu de partir d'un nombre pour en calculer les diviseurs, nous partons d'une **contrainte sur l'ensemble des diviseurs** d'un nombre à trouver.

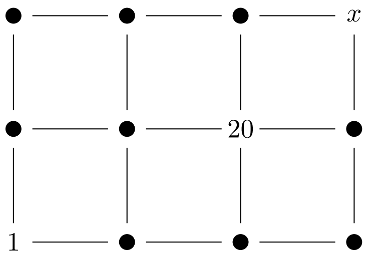
Ce ne sont pas les résultats numériques qui sont intéressants mais bien le support de raisonnement que la recherche a permis de motiver. Les treillis de diviseurs sont exploitables dans de nombreuses directions. Limitons-nous à trois exemples.

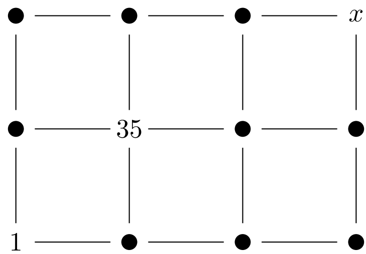
8.3.1. Treillis de diviseurs et calcul dans $\mathbb{N}$

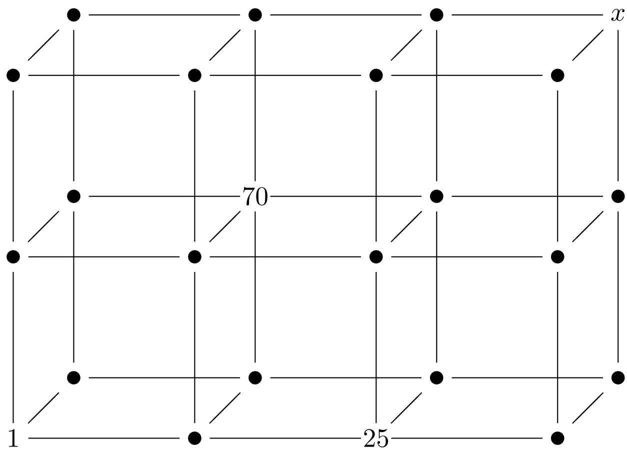
Selon que vous travaillerez avec des nombres construits en utilisant 1 ou 2 facteurs premiers ou que vous voudrez utiliser 3 ou 4 facteurs premiers différents, vous vous contenterez de travailler sur papier ou vous apprécierez l'aide d'un support informatique ([3]). Voici des situations qui motivent du calcul et du raisonnement. L'énoncé est toujours le même :

Calculer x si c'est possible. Sinon, demander des informations supplémentaires pour y parvenir.

Mais il s'applique à des treillis différents :

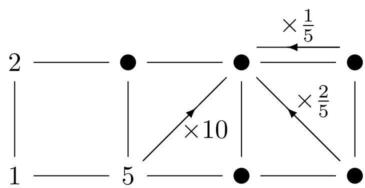




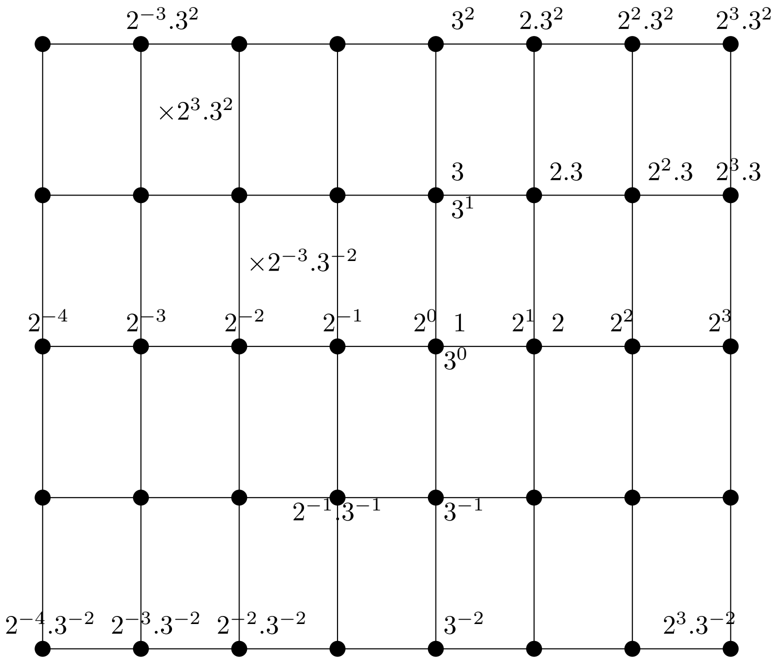


8.3.2. Treillis de diviseurs et calcul dans $\mathbb{Q}$

Les treillis de diviseurs privilégient les opérateurs du type $\times p$ où p est un nombre premier. Mais d'autres opérateurs y sont présents. Il y aura des composées et des réciproques comme $\times 10$ ou $\times \frac{1}{5}$ et le calcul avec des fractions trouve ici un nouveau support .



Les opérateurs réciproques incitent à étendre à tout le plan des treillis qui n'en occupaient qu'un quart. Et voilà les exposants entiers qui apparaissent.

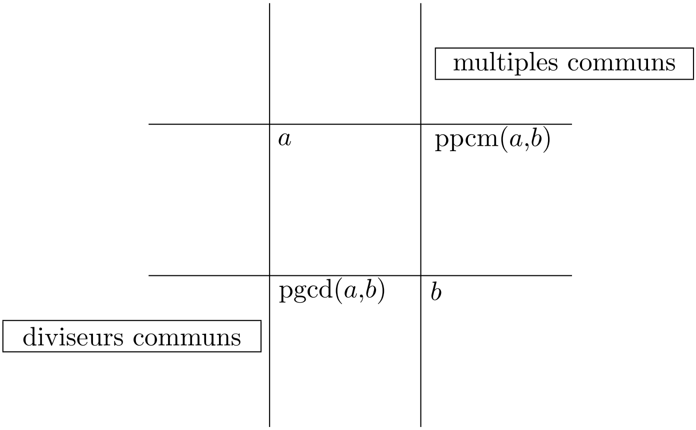


Pour de tels développements, je renvoie à [3].

8.3.3. Treillis et pgcd et ppcm

Je résume ici **très** brièvement une partie de l'exposé fait au congrès, renvoyant pour plus de développement à [2].

L'apport essentiel des treillis de diviseurs en ce qui concerne les notions de plus grand commun diviseur et de plus petit commun multiple de deux naturels me semble être la conceptualisation de ces notions en ne faisant intervenir qu'**une seule relation d'ordre** : la relation de divisibilité. En effet, sur ce type de schéma (limité dans un premier temps à deux diviseurs premiers)



il apparaît que

— pgcd(a,b) est **le diviseur commun qui est multiple de tous les diviseurs communs**

— ppcm(a,b) est **le multiple commun qui est un diviseur de tous les multiples communs**

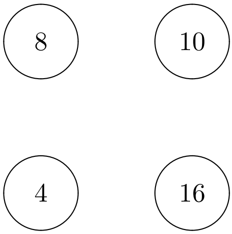
— pgcd (a, b). ppcm $(a, b) = a.b$

Le treillis des diviseurs **fixe une image** qui permet une **bonne conceptualisation** dans le cas où **deux** diviseurs premiers entrent en jeu. La généralisation peut être laissée à plus tard mais elle pourra s'appuyer sur cette base géométrique, même lorsque la dimension des treillis dépassera 2.

8.4. Un autre genre de représentation

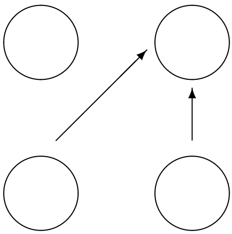
Le programme invite à utiliser des représentations mais les diagrammes sagittaux ne sont pas mentionnés, ils sont même proscrits par certains parce que trop ≪modernistes≫. Ne s'agit-il pas ici d'une confusion trop fréquente qui conduit à jeter le bébé en même temps que l'eau sale du bain ?

Les flèches ne servent en effet à rien dans un exercice comme celui-ci :



Dessine une flèche de x vers y pour indiquer que x est un diviseur de y

Sans flèche, il est par contre impossible de poser l'exercice suivant :

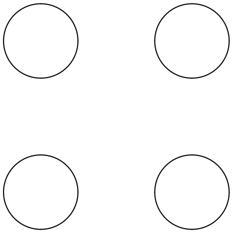


Indique des nombres dans les cercles de manière à ce que les flèches dessinées de x vers y indiquent que x est un diviseur de y

L'infinité de solutions permet à chacun de travailler à son rythme : des solutions déjà apportées par les élèves les plus rapides ne détruisent pas la recherche des plus lents. Des solutions provoquent la discussion : l'énoncé est volontairement flou. A-t-on dessiné **toutes** les flèches possibles ou peut-on ajouter des flèches ? Il faudra se mettre d'accord sur les boucles : on peut les ajouter et dire que **toutes** les flèches autorisées ont été dessinées, on peut aussi convenir de ne pas les dessiner puisqu'elles n'apportent aucune information dans ce type de recherche.

Nouvel énoncé susceptible de créer l'émulation : créer des exercices du type précédent, destiné à un camarade qui devra rechercher des nombres. On sait que les élèves sont toujours très motivés lorsqu'ils espèrent mettre les autres en difficulté. On peut aussi compter sur l'apport des discussions que ne manque pas de provoquer un énoncé mal conçu par celui qui le propose. Enfin, les énoncés peuvent être inventés par les élèves plus faibles en plaçant des nombres qu'ils effacent ensuite, mais les élèves les plus forts peuvent être incités à proposer des schémas sans y placer aucun nombre.

La difficulté précédente prépare à une exploitation du support au niveau le plus élevé :



Rechercher **tous** les schémas fléchés possibles entre 4 nombres naturels, les flèches signifiant ≪est un diviseur de≫.

9. Arithmétique et programme

Que le nouveau programme du premier degré **parle** plus d'arithmétique que le programme de 1980 ne fait pas de doute. Si cela permet de raisonner, de motiver des jeux et des recherches, de mettre en chantier des représentations riches de sens pour la suite, je me réjouis. Si cela ne conduit qu'à des rappels de quelques règles plus ou moins bien mémorisées à l'école primaire, je trouve cela lamentable. D'autant plus qu'il y a perte par rapport aux contenus précédents puisqu'en mettant les relations à la poubelle, on ne verra plus que ≪est un diviseur de≫ est un ordre dans les naturels. Il ne s'agit pas d'un regret de vocabulaire mais on se prive d'un support de démonstration de l'égalité de deux naturels :

Dans $\mathbb{N}$:
$a = b \Longleftrightarrow$ (a est un diviseur de b et b est un diviseur de a)

aussi bien que Dans $\mathbb{N}$: $a = b \Longleftrightarrow (a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a)$

…tout simplement parce que les deux relations sont des ordres dans $\mathbb{N}$. Seule la deuxième possibilité de démonstration existe dans les ensembles numériques obtenus par extension parce que la relation de divisibilité n'est plus un ordre dès que les entiers négatifs sont introduits. En ce qui concerne une approche de la divisibilité au premier degré, j'ai donc une impression globale de perte plutôt que de gain.

Qu'en est-il de la factorisation (programme de première année) et des notions de plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple (programme de deuxième année) ? Je pense qu'on n'avait jamais cessé de traiter ces thèmes, pas toujours à bon escient d'ailleurs puisque tout cela ne sert souvent qu'à rabâcher les techniques de calcul pour calculer $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$. Qu'apporte le nième rappel s'il se limite à une technique en dehors de toute image mentale du processus fondamental ? Je vois par contre un intérêt à la factorisation si elle est réellement mise en chantier pour faire progresser les notions de diviseur, de multiple, de diviseurs communs, ... Je vois aussi un intérêt de parler des plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple **à condition de faire progresser conceptuellement la notion et de donner aux élèves une méthode performante de calcul** du plus grand commun diviseur. Le calcul du plus petit commun multiple passera alors par celui du plus grand commun diviseur, lui-même calculé par l'algorithme d'Euclide (voir [2]).

Enfin, il est difficile de se faire actuellement une idée de la réalité ou non du retour de l'arithmétique dans les programmes puisque nous ignorons tout de la suite qui sera donnée au texte de mars 1994 dans les programmes des années suivantes.

Bibliographie

[1] Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, Explorations didactiques, Dossier n°1, Document AR.1.01, (1993).

[2] Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, Explorations didactiques, Dossier n°2, Document AR.1.02, Autour du plus grand commun diviseur, (1994).

[3] Centre de didactique des sciences, CDSMath6, Jeux mathématiques 1, Logiciel pour PC et livret d'accompagnement, Université de Mons-Hainaut, (1992).

[4] Papy, Mathématique moderne 5, Didier, (1966).

Adresse de l'auteur
Yolande Noël-Roch
rue des Fontaines 14bis
7061 Casteau

Démonstration élémentaire d'une formule relative aux nombres de Catalan

C. Radoux, *Université de Mons*

1. Rappelons que le $n^{\text{ième}}$ **nombre de Catalan** C_n est donné par la formule

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

Ce nombre a de très nombreuses interprétations combinatoires. Par exemple, depuis Euler, on sait qu'il n'est autre que le nombre de décompositions en triangles d'un polygone convexe de $n+2$ côtés par des diagonales ne se coupant pas dans ce polygone.

Dans [1], je citais une nouvelle propriété que j'avais trouvée et démontrée (voir [2]) par une technique algébrico-analytique remontant à Sylvester.

Plusieurs lecteurs m'ont écrit pour demander des détails complémentaires ; je me suis alors efforcé de trouver une preuve plus élémentaire. C'est maintenant chose faite.

2. Théorème

Soit H_n la **matrice de Hankel** construite sur la suite de Catalan :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 14 & \cdots & C_n \\ 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & \cdots & C_{n+1} \\ 2 & 5 & 14 & 42 & 132 & \cdots & C_{n+2} \\ 5 & 14 & 42 & 132 & 429 & \cdots & C_{n+3} \\ 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 & \cdots & C_{n+4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_n & C_{n+1} & C_{n+2} & C_{n+3} & C_{n+4} & \cdots & C_{2n} \end{pmatrix}$$

Quel que soit n, dét$(H_n) = 1$.

Démonstration

A. Le coefficient de x^{i+j+1} dans $(1-x)^2(1+x)^{2i+2j}$ vaut

$$\binom{2i+2j}{i+j+1} - 2\binom{2i+2j}{i+j} + \binom{2i+2j}{i+j-1} = -2C_{i+j}.$$

B. D'autre part, le coefficient de x^a dans $(1-x)(1+x)^{2i}$ vaut

$$\binom{2i}{a} - \binom{2i}{a-1} = \binom{2i}{a}\frac{2i-2a+1}{2i-a+1}.$$

C. Ainsi, en identifiant le terme en x^{i+j+1} dans l'identité triviale $(1-x)^2(1+x)^{2i+2j} = \left[(1-x)(1+x)^{2i}\right]. \left[(1-x)(1+x)^{2j}\right]$, on trouve

$$\begin{aligned} -C_{i+j} \;&=\; \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{2i}{i+k+1}\frac{2i-2(i+k+1)+1}{2i-(i+k+1)+1} \\ &\quad \binom{2j}{j-k}\frac{2j-2(j-k)+1}{2j-(j-k)+1} \end{aligned}$$

(où $\binom{a}{b} = 0$ lorsque $b<0$ ou $b>a$)

$$\begin{aligned} C_{i+j} \;&=\; \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{2i}{i+k+1}\frac{2k+1}{i-k}\binom{2j}{j-k}\frac{2k+1}{j+k+1} \\ C_{i+j} \;&=\; \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{2i}{i+k}\frac{2k+1}{i+k+1}\binom{2j}{j+k}\frac{2k+1}{j+k+1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$C_{i+j} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} T_{i,k} T_{j,k},$$

moyennant

$$T_{i,k} = \frac{\begin{pmatrix} 2i \\ i+k \end{pmatrix} (2k+1)}{i+k+1}$$

Appelons T_n la matrice triangulaire inférieure formée par ces coefficients $T_{i,k}$:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
5 & 9 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
14 & 28 & 20 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
42 & 90 & 75 & 35 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
132 & 297 & 275 & 154 & 54 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
429 & 1001 & 1001 & 637 & 273 & 77 & 13 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1430 & 3432 & 3640 & 2548 & 1260 & 440 & 104 & 15 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
4862 & 11934 & 13260 & 9996 & 5508 & 2244 & 663 & 135 & 17 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
T_{n,0} & T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & T_{n,4} & T_{n,5} & T_{n,6} & T_{n,7} & T_{n,8} & T_{n,9} & \cdots & T_{n,n}
\end{pmatrix}$$

Notre dernier résultat peut s'écrire maintenant

$$T_n U_n = H_n,$$

U_n désignant la transposée de T_n.

Puisque tous les éléments diagonaux de T_n valent 1, on obtient $dét(H_n) = dét(T_n).dét(U_n) = 1 \;.\; 1 = 1$, comme annoncé.

3. Remarques

– On a vu que $T_{m,k}$ n'est autre que le coefficient de x^{m-k} dans $(1-x)(1+x)^{2m}$. Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{m} T_{m,k} = \begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix} \text{ et } \sum_{k=0}^{m} (-1)^k T_{m,k} = 0.$$

- L'identité matricielle qui précède comprend comme cas particulier

$$\sum_{k=0}^{m} T_{m,k}^2 = C_{2m}.$$

– Une interprétation combinatoire des $T_{n,k}$ est la suivante : il s'agit du nombre de séquences formées de $(n+k)$ nombres 1 et de $(n-k)$ nombres

-1, à sommes partielles toutes positives ou nulles. Ce résultat sera publié ailleurs, avec d'autres identités concernant ces nombres.

- Une **question ouverte** est la suivante. Comme $\textit{dét}(H_n) = 1$, quel que soit n, la matrice H_n^{-1} est à coefficients entiers.

Posons $\alpha_{n,i,j} = (H_n^{-1})_{i,j}$.

Peut-on donner un sens combinatoire *direct* à $|\alpha_{n,i,j}|$?

Je n'ai, pour l'instant aucun début de réponse.

- Le théorème de même type relatif à la suite des $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$ également cité dans [1] (le déterminant de Hankel concerné vaut alors 2^n) se démontre de la même façon en partant de l'expression (encore plus) triviale $(1+x)^{2i}(1+x)^{2j}$.

T_n est à remplacer par la matrice des $\begin{pmatrix} 2i \\ i+k \end{pmatrix}$ et U_n, qui n'est plus ici la transposée de T_n, s'obtient en transposant T_n, puis en multipliant par 2 (simple avatar de la “convolution de Vandermonde”) toutes les colonnes, *sauf* celle d'indice 0.

- J'ai appliqué avec succès cette technique de factorisation en matrices triangulaires à d'**autres suites combinatoires classiques** (nombres de Bell, nombres d'Euler, nombres de dérangements, nombres d'involutions,...), mais les développements sans doute là un peu plus techniques risquent de ranimer les C.C.C. (Ciseaux du Comité de Censure).

Bibliographie

[1] Christian Radoux, *Géométrie combinatoire et nombres de Catalan*, Mathématique et Pédagogie, 58, 5-18, 1992.

[2] Christian Radoux, *Calcul effectif de certains déterminants de Hankel*, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, XXXI, 1 (série B), 49-55, 1979.

Adresse de l'auteur :

Christian Radoux
Drève du Prophète 13
7000 Mons

Mathématiques sans frontières. Une compétition inter-classes et transfrontalière

G. et R. Jost, *Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques - Strasbourg*

PRESENTATION GENERALE

Organisée en Alsace par l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques ([1]) et l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Académie de Strasbourg, cette compétition est ouverte aux classes entières de Troisième et de Seconde ou de niveau équivalent dans les pays étrangers.

Elle a pour objectif de favoriser le travail d'équipe et les initiatives de liaison collège-lycée, d'ouvrir les Mathématiques aux langues étrangères, de susciter des vocations scientifiques, et plus simplement, de contribuer à un enseignement des Mathématiques de qualité. Une classe entière résout en deux heures 12 ou 15 exercices de genres variés pour intéresser tous les élèves.

Pour sa première édition en 1990, cette compétition ne concernait que le Nord de l'Alsace. En 1991, elle s'est étendue à la Haute-Alsace ainsi qu'à l'Allemagne. En 1992, le Centre-Alsace a participé, ainsi que la Lombardie et la Suisse. En 1993, toute l'Académie de Strasbourg est concernée sur quatre secteurs d'organisation (75 % de taux de participation). La compétition s'est largement répandue au niveau international de l'Ecosse au Liban, de la Pologne à la Suisse, en passant par l'Italie, l'Allemagne, le Luxembourg, la Belgique et la Roumanie.

En 1994, pour la cinquième édition de Mathématiques sans Frontières, les taux de participation ont augmenté et d'autres régions d'Europe se montrent intéressées en particulier en Allemagne, en Italie, en Suisse, en Hongrie, en Espagne, en Irlande, au Danemark... Le Cap des 44 000 élèves et 1750 classes est déjà largement dépassé et les frontières n'arrêtent pas de tomber.

En cinq ans, la participation est passée de 2400 à 44 000 élèves, plus de 1750 classes dont plus de la moitié hors de France.

Quatorze pays sont représentés !

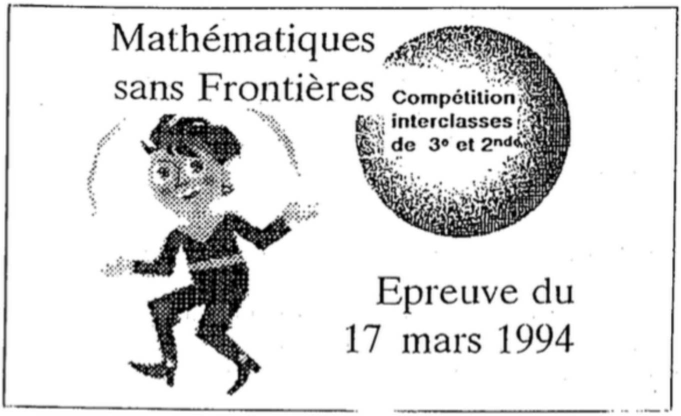
1. 6, rue de la Toussaint - 67081 Strasbourg Cedex - Télécopieur : 88 23 38 76

En mai et juin 1994 ont été organisées plus de dix distributions de prix festives au cours desquelles près de 350 classes sont primées, avec encore plus de prix de participation tirés au sort : des voyages, des spectacles, des cadeaux... pour faire plaisir. Et pour 1995, une équipe belge s'est constituée pour lancer Mathématiques sans Frontières en Belgique, sous l'égide de la SBPMef : pour tout renseignement, on peut contacter :

René SCREVE
rue Bocquain 16
1370 Jodoigne

En guise d'exemple, voici une épreuve complète d'exercices.

ACADEMIE
DE STRASBOURG
Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67081 Strasbourg Cedex



☐ **Toute solution, même partielle, sera examinée.**
☐ **Le soin sera pris en compte.**
☐ **Ne prendre qu'une seule feuille-réponse par exercice.**

Enoncé 1 (10 points) : Loto bus

Rédiger la solution de cet exercice en allemand, anglais, italien ou espagnol.

Um zur Universität zu fahren, kann Sylvie einen Autobus der Linie 3 oder einen Bus der Linie 7 benutzen.
Bei beiden Linien kommt alle 15 Minuten ein Bus. Die Busse der Linie 3 fahren jedoch stets 5 Minuten später als die Busse der Linie 7.
Sylvie fährt oft und zu sehr unterschiedlichten Zeiten zur Universität. Sie

nimmt stets den ersten Bus, die vorbeikommt.
Welche Linie benüzt Sylvie am häufigsten ? Erläutere die Antwort.

⋆ ⋆ ⋆⋆

To get to University, Sylvia can take bus n°3 or bus n°7.
A bus runs every 15 minutes on each bus route. Buses n°3 always leave 5 minutes after buses n°7.
Sylvia often goes to University, at very different times and she always catches the first bus that comes by.
Which is the bus route Sylvia uses most frequently ? Explain your answer.

⋆ ⋆ ⋆⋆

Par raggiungere l'Università Silvia ha a disposizione due autobus, il n. 3 e il n. 7.
In ogni linea gli autobus transitano ogni 15 minuti, gli autobus della linea 3 partono sempre 5 minuti dopo quelli della linea 7.
Silvia si reca spesso all'Università in momenti della gionarta diversi e sale sempre sul primo autobus che passa.
Quale linea Silvia utilizza più frequentemente ?
Si illustri la riposta.

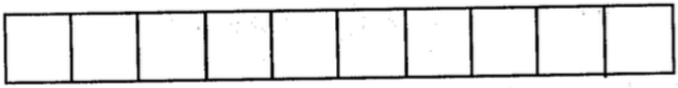
⋆ ⋆ ⋆⋆

Para ir a la Universidad, Silvia puede tomar un autobús de la línea número 3 o un autobús de la línea número 7.
En cada línea, un autobús passa todos los 15 minutos. Los autobuses de la línea número 3 salen siempre minutos despúes de los de la línea número 7.
Silvia suele ir a la Universidad a horas diferentes y toma siempre el primer autobús que pasa.
¿Cuál es la línea de autobús que toma más a menudo Silvia ?
Explicar la respuesta.

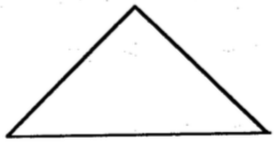
Exercice 2 (5 points) : équilibre précaire

Tracer une grille de dix cases comme celle représentée ci-dessous. Placer un chiffre dans chaque case de cette grille, de sorte qu'à la fin de l'opération, on puisse lire, de gauche à droite :
☐ dans la première case, le nombre de 1 placés dans la grille,
☐ dans la deuxième case, le nombre de 2 placés dans la grille,
... et ainsi de suite jusqu'à
☐ la neuvième case où l'on lira le nombre de 9 placés,

et enfin,
☐ dans la dixième case, le nombre de zéros placés dans la grille.



Exercice 3 (10 points) : 2 chiffres pour 3 angles



“Oh, regarde ce triangle isocèle : les mesures en degrés de ses angles sont des nombres entiers. De plus, il me suffit de deux chiffres pour écrire les mesures de ses trois angles”.
Trouver tous les triangles isocèles qui vérifient cette propriété.

Exercice 4 (10 points) : arc-en-ciel

La figure ci-dessous est le patron d’un cube-octaèdre : il s’agit d’un solide dont les 14 faces sont des carrés ou des triangles équilatéraux.

Réaliser un cube-octaèdre d’arête 4cm.

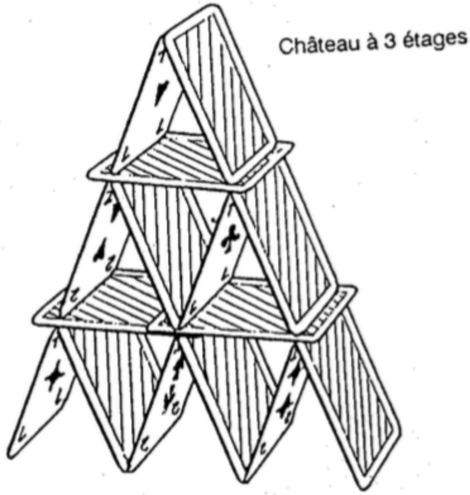
Reproduire ensuite le patron de ce solide sur la feuille-réponse en coloriant les faces de façon que :
- ☐ celles qui sont **parallèles** après assemblage soient de la **même couleur** sur le patron ;
- ☐ celles qui ne sont **pas parallèles** après assemblage soient **de couleurs différentes** sur le patron.

Exercice 5 (5 points) : châteaux de cartes

Victor est un garçon patient et méticuleux. Il s'applique à construire des châteaux de cartes suivant le modèle ci-dessous.

Victor aimerait construire un grand château utilisant toutes ses cartes. Hélas, son édifice s'effondre toujours bien avant qu'il ne soit achevé. Pourtant Victor a calculé que ses cinq jeux de 52 cartes lui suffiraient exactement pour réaliser son audacieux projet.

Quel est le nombre d'étages du château dont rêve Victor ?



Exercice 6 (5 points) : serpent monétaire

- ☐ Pour acheter 14 Francs français, les Allemands payent 4 Deutsche Mark.
- ☐ Pour acheter 3 Deutsche Mark, les Italiens payent 2 920 Lires.
- ☐ Pour acheter 10 000 Lires, les Suisses payent 9,1 Francs suisses.

Bientôt la Communauté Européenne va adopter une monnaie unique : l'ECU.
☐ 3 Ecus vaudront 20 Francs français.

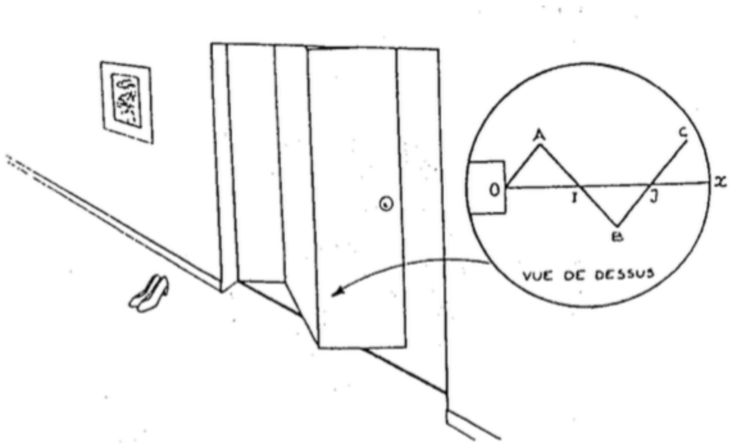
Combien de Francs suisses un Helvète devra-t-il alors payer pour acheter 60 ECUS si les parités monétaires restent à peu près inchangées ?

Exercice 7 (10 points) : porte ouverte…

La figure ci-dessous représente la vue de dessus d'une porte pliante et coulissante. Le point O est fixe : c'est le point d'attache au mur. Les points I et J peuvent se déplacer le long du rail $[Ox)$.

Les longueurs OA, AI, IB, BJ, JC sont égales et restent constantes au cours du déplacement. De plus, à tout instant, I est le milieu du segment $[AB]$ et J celui du segment $[BC]$.

En prenant $OA = 4cm$, construire sur une même figure les trajectoires des points A, B et C quand la porte prend toutes les positions possibles.



Exercice 8 (5 points) : tarte flambée

Après une longue séance de travail, sept professeurs de mathématiques ont décidé d'aller manger une tarte flambée.

Lorsque la tarte rectangulaire de 42 $cm \times 35$ cm fut servie, on chargea l'un des convives de la couper équitablement en sept portions. Il s'en tira facilement par six coups de couteau rectilignes tous issus du même coin de la tarte.

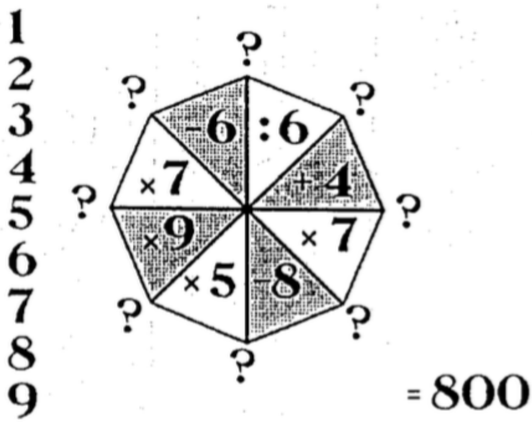
Représenter cette solution sur la feuille-réponse : pour ce faire, tracer un rectangle $ABCD$ de $8,4$ $cm \times 7$ cm que l'on partagera en sept morceaux d'aires égales par six segments de droites joignant le sommet A à des points de $[BC]$ ou de $[CD]$. Donner une justification de la solution.

Exercice 9 (10 points) : un peu de bons sens !

Ludivine a choisi un nombre entier compris entre 1 et 9.

Partant de ce nombre, elle a effectué successivement et dans l'ordre les huit opérations de la figure ci-dessous. Elle a obtenu ainsi le nombre 800 comme résultat.

Quel nombre Ludivine a-t-elle choisi ?
Par quelle opération a-t-elle commencé ?
Dans quel sens a-t-elle tourné ?



Exercice 10 (5 points) : gruyère

Un cube a des arêtes de 5 cm.

On perfore ce cube de part en part : chaque trou a la forme d'un parallélépidède rectangle dont la section est un carré de 1 cm de côté. Les douze trous sont disposés "régulièrement" comme l'indique la figure ci-dessous.

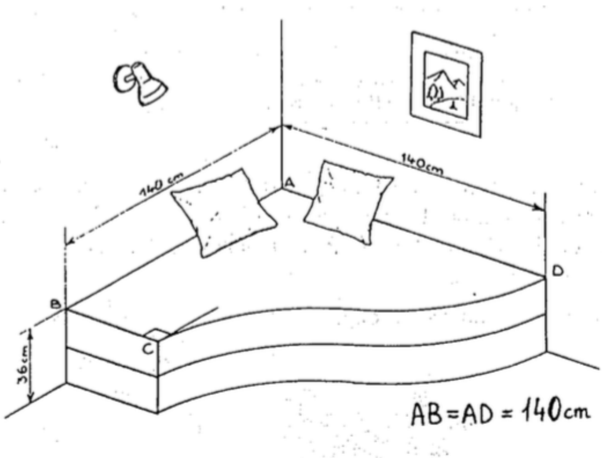
Calculer le volume total du cube ainsi perforé.

Exercice 11 (10 points) : le divan

Conçue comme une assise bien confortable, cette banquette d'angle se transforme facilement en un lit de 140 cm $\times$ 190 cm (épaisseur 18 cm) : il suffit pour cela de juxtaposer les deux blocs de mousse dont elle est composée.

Pour que les deux parties de ce lit se complètent parfaitement, la courbe CD est constituée de deux arcs de cercles. La tangente à la courbe en C est perpendiculaire au côté BC.

Construire sur la feuille-réponse une vue de dessus des deux parties à l'échelle 1/10 disposées de manière à reconstituer un rectangle. Laisser visibles les traits de construction.

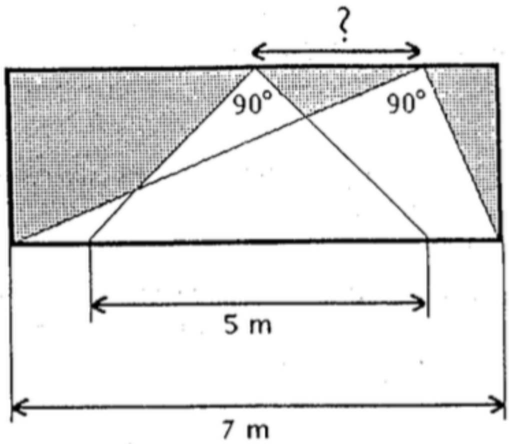


Exercice 12 (15 points) : c'est clair !

Au sous-sol, Pitt' a équipé son local long de 7 m d'un éclairage fort intéressant : il a installé deux spots halogènes orientables dont chaque faisceau conique a une ouverture de 90 degrés (voir figure ci-dessous).

Le premier spot, placé en plein centre du plafond de la pièce, est orienté de façon à éclairer le sol suivant un disque de 5 m de diamètre. Le faisceau du second couvre quant à lui la totalité de la longueur du local, sans en éclairer les murs.

Calculer la distance exacte qui sépare les deux spots. Expliquer.

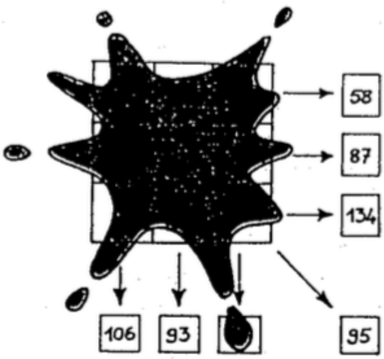


Exercice 13 (5 points) : quelle tache !

spéciale seconde

Voici un tableau carré de neuf cases dans lequel on a inscrit neuf nombres. On a calculé la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et d'une diagonale. Une tache a malencontreusement masqué ce tableau ainsi qu'une de ces sommes.

Indiquer cette somme en expliquant la méthode employée.



Exercice 14 (10 points) : pour être au courant

spéciale seconde

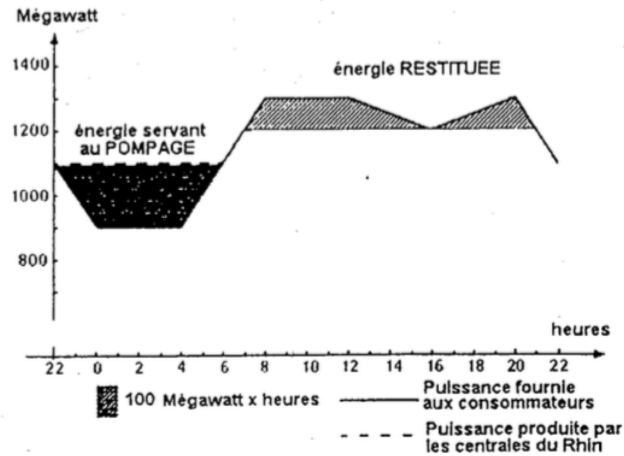
Le Lac Noir et le Lac Blanc sont deux réservoirs situés à des altitudes différentes et reliés par des conduites forcées.

Ce dispositif permet, lorsque la consommation est faible, de stocker les excédents de l'énergie produite par les centrales hydroélectriques et nucléaire du Rhin. Il permet aussi de restituer l'énergie lorsque les besoins des consommateurs sont importants.

La nuit, on pompe ainsi l'eau du Lac Noir vers le Lac Blanc en consommant de l'électricité produite par les centrales du Rhin. Le jour, on fait redescendre cette eau qui produit alors de l'électricité en actionnant des turbines. Cette production permet, aux heures de pointe, d'économiser les coûteux carburants (pétrole et charbon) qu'il faudrait alors brûler dans des centrales thermiques.

Sur le graphique ci-dessous, la surface noire représente l'énergie nécessaire au pompage, la surface hachurée représente l'énergie restituée par les turbines. Exprimer leurs valeurs en Mégawatt x heures et les comparer.

Expliquer ensuite l'intérêt économique de ce dispositif, sachant que le prix de revient de l'électricité des centrales du Rhin est de 80 F le MWh, tandis que celui de l'électricité d'origine thermique se monte à 200 F le MWh.



Exercice 15 (15 points) : tiré par les cheveux

spécial seconde

Madame Yolande se rend chez son coiffeur.

Quand elle prend place dans le fauteuil, il est 14 heures précises à sa montre et elle voit dans le miroir devant elle l'image de l'horloge du salon. Celle-ci marque 6 h 40 comme l'indique le dessin : le coiffeur vient d'en remplacer la pile, mais il n'a pas eu le temps de la remettre à l'heure.

A la fin de la séance, au moment de quitter le fauteuil, Madame Yolande constate avec étonnement que les aiguilles de sa montre et celles de l'horloge sont exactement dans la même position.

Quelle heure est-il alors, sachant que l'horloge et la montre ont fonctionné normalement ?

Voyage au pays de SIMSON ou "Le roman ...inachevé d'une droite"

G. Robert, *Centre FOPEMA - F.N.D.P. - Namur*

Notre propos est de présenter aux enseignants du secondaire supérieur un exemple de "Conférence" destinée aux élèves et dont le contenu et les modalités de présentation nous paraissent assez bien rencontrer plusieurs objectifs précisés lors du "Débat consacré à la philosophie des programmes" (Congrès de Ferrières - 1993) dont un résumé a été rédigé par Yolande Noël ([1]) : nous en extrayons le passage suivant qui nous semble particulièrement significatif (tout en vous invitant à relire l'entièreté de l'article et notamment la page 94) :

> "...*le problème fondamental* qui consiste à faire aimer les mathématiques aux enfants :
> – Continuer à les faire aimer à ceux qui les aiment déjà
> – Y prendre goût pour ceux qui ne les ont pas encore appréciées."

Avant de passer au texte même de l'exemple choisi, nous croyons utile de préciser l'esprit général de notre démarche et de détailler quelque peu la "banque de données de situations mathématiques" qui permet la mise au point de telles "Conférences".

Conférences

Pourquoi avoir choisi ce mode de présentation ?

Si l'objectif est de faire aimer les mathématiques, il convient de susciter un intérêt et une écoute attentive par "autre chose" qu'un cours complémentaire ou une succession trop longue d'exercices (forcément répétitifs) : il faudra, à la fois, "faire du neuf" et s'appuyer sur des notions acquises antérieurement. Il s'agit de mettre en place, au départ d'un sujet très simple, tous les éléments constitutifs d'une "situation mathématique" à explorer. On verra d'ailleurs, dans l'exemple qui suit, l'illustration d'une telle exploration, laquelle – dans ce cas précis – est presque une recherche "en direct" (de quoi aiguiser la curiosité !).

1. Yolande NOEL, "Congrès de Ferrières. Débat consacré à la philosophie des programmes", Mathématique et Pédagogie, 1994, 95, 92-94.

La forme de "conférence" – qui sous-entend l'absence d'obligation formelle d'assimiler complètement ou de mémoriser entièrement – peut contribuer à rendre l'esprit plus libre et, par là, plus réceptif.

Sujet traité

Le sujet choisi est "Le Triangle" (à comprendre dans un sens très large qui apparaîtra plus loin). Ce choix se justifie par les raisons suivantes (non exhaustives) :

- Richesse extraordinaire des développements possibles.
- Niveau très facilement adaptable (de la quatrième à la sixième).
- Possibilité quasi-permanente de mettre en évidence la complémentarité des "disciplines" et techniques (rappel incessant à des théories peut-être oubliées : justification de leur utilité).
- Occasionnellement : évocations historiques (culture mathématique).

Tout en gardant à l'esprit l'objectif général évoqué plus haut et tout en se limitant (si l'on peut dire) à ce seul sujet, TROIS approches différentes, mais souvent complémentaires, seront utilisées. Dans les trois cas, la présentation aux élèves de certains morceaux choisis – au gré de l'enseignant – se fera sous forme de "conférences" :

1. Géométrie du Triangle.
2. "Triangles spéciaux".
3. Série(s) de "Questions proposées".

A. "Géométrie du Triangle"

Il faut comprendre ce titre au sens qui lui a été donné par les géomètres à la fin du siècle dernier. Il s'agissait alors de mettre en place une présentation coordonnée des propriétés connues du triangle et de mettre en évidence des propriétés plus générales pouvant expliquer les liens existant entre les précédentes. Il s'agissait, en outre, de poursuivre les recherches …lesquelles, par ailleurs, se révélèrent particulièrement fructueuses (Lemoine, Brocard, Neuberg, Steiner, Casey, …et beaucoup d'autres). L'homothétie, la similitude d'une part, les coordonnées ternaires (normales, barycentriques) d'autre part, jouèrent un rôle essentiel dans cette unification et ces découvertes. Ce n'est certainement pas un hasard si F. KLEIN élabora son programme d'Erlangen à la même époque.

Tel que nous l'envisageons actuellement, ce domaine couvrirait les "Chapitres" suivants :

1. Cercle et droite d'EULER.
2. La droite de SIMSON + Compléments (Orthopôle, ...).
3. Les cercles inscrits + Gergonne, Nagel, Feuerbach, ...
4. Points alignés et droites concourantes (Ménélaüs, Céva, Desargues, Hexagone de Pascal, ...).
5. Le point de Lemoine ...
6. Les points de Brocard ...
7. De quelques coniques associées au triangle.

Cet aperçu indique qu'il est possible, au départ de cette matière (très abondante) de choisir des thèmes dont l'exposé remplirait le rôle que nous assignons aux "conférences". La somme des propriétés, lieux géométriques, développements, ...contenus dans l'ensemble ci-dessus permet, facilement, la préparation d'un grand nombre d'exposés très variés de sorte que la non-répétition est largement assurée et que l'enseignant lui-même y trouvera plaisir et satisfaction.

B. "Triangles Spéciaux"

Ce sujet a déjà été évoqué ([2]) : nous reprenons ici l'essentiel de l'idée directrice.

Un triangle est déterminé par TROIS éléments dont UN au moins n'est pas un angle. Si l'une des données est remplacée par une relation entre éléments du triangle ou par une propriété géométrique, on obtient une "famille" de triangles dont chaque membre satisfait à la relation ou jouit de la propriété de définition.

Le problème qui nous préoccupera ici sera de déduire de la "définition" (relation ou propriété) d'autres relations et d'autres propriétés spécifiques à la "famille" étudiée, de rechercher des lieux géométriques particuliers, de construire un triangle membre de la famille, ...le tout en utilisant toutes les ressources disponibles : géométrie, trigonométrie, géométrie analytique (coordonnées cartésiennes ou polaires, représentation paramétrique d'une courbe), étude de fonctions, ... L'ensemble des résultats obtenus lors de ces

2. Guy ROBERT, "Le triangle – Champ d'investigation et de découvertes", Mathématique et Pédagogie, 1993, 91, 27–41 et 1993, 92, 17–26.

recherches pourra, ensuite, être coordonné en une “Monographie” pouvant faire l’objet d’une conférence. Mais ici, il y a mieux encore : il “suffit” d’imaginer (et là, le choix est illimité) une relation ou une propriété de définition et de proposer aux élèves de trouver des relations ou propriétés spécifiques qui en découlent, de rechercher des lieux géométriques, …bref, d’élaborer *eux-mêmes* la “monographie” de la famille proposée. Dans ce cas, l’intérêt – préparé par une “conférence” donnant un exemple d’une telle monographie – serait accru par la stimulation de la recherche de propriétés ou de relations qui ne figurent dans aucun manuel : ils en seraient les “découvreurs” ou les “inventeurs” ! !

C. “Questions proposées”

Si, en raison du niveau de la classe ou des pré-requis nécessaires ou encore du temps disponible, il s’avérait indispensable de réduire la difficulté (toute relative puisqu’il s’agit de “conférences”) ou le temps y consacré, nous proposons une troisième approche n’excluant nullement les deux précédentes : les “Questions proposées”.

Il s’agit, en fait, d’exercices, mais nous évitons ce terme pour des motifs déjà précisés : il ne faut pas tenter d’éveiller l’intérêt en créant simultanément un obstacle psychologique.

On trouvera, dans ces “Questions proposées” des exercices, de difficulté variable, qui TOUS :
- insistent sur l’application des techniques acquises et sur l’emploi des outils disponibles,
- sont susceptibles de développements introduisant des notions nouvelles,
- seraient présentés, eux aussi, sous forme de “conférences” ou, si l’on préfère dans ce cas particulier, sous forme d’exercices entièrement dirigés.

Ces questions proposées sont toutes inspirées par le triangle et ses propriétés : application des propriétés développées dans “Géométrie du Triangle” ou de propriétés originales découlant des recherches menées sur certaines familles de triangles spéciaux.

Mise en oeuvre

En dehors de l'aspect "conférence" largement évoqué dans les pages précédentes, l'emploi de l'ordinateur sera privilégié pour un certain nombre de raisons que nous résumons ci-après :

- La présence de l'ordinateur, en classe, confirme pour les élèves le côté "conférence" : il est certainement rare qu'un COURS soit donné à l'aide de l'ordinateur. (Ceci pour l'aspect psychologique de la présentation).
- Il arrive que de beaux exercices (nous entendons par là des exercices dont la solution apporte du neuf, ouvre des horizons, établit des liens entre différents aspects et une passerelle entre différentes techniques) soient négligés parce que les figures qui les accompagnent normalement sont trop difficiles à réaliser au tableau noir ou se révèlent trop "embrouillées" pour qu'on puisse y "voir clair". L'ordinateur sera, dans ce cas, d'une grande utilité en raison de ses possibilités graphiques.
- Grâce à l'ordinateur, il sera possible également de dynamiser les démonstrations et de réaliser (rapidement) la figure qui convient à un moment précis (ni trop, ni trop peu).
- La possibilité de réaliser des programmes inter-actifs autorisant l'utilisateur (enseignant, élève) à introduire ses propres données lui permettant ainsi d'envisager facilement les divers cas de figure d'une même question.
- Enfin, la puissance de calcul de l'ordinateur permet de traduire facilement sous forme de présentation graphique les résultats d'une recherche analytique.

Dans de nombreux cas, on pourra se limiter à utiliser les programmes pour réaliser des transparents au départ de copies d'écran : il ne sera pas indispensable de disposer de l'ordinateur lui-même au moment de l'exposé. Il faut cependant noter que, dans ce cas, on perd le bénéfice de l'aspect dynamique des programmes et la possibilité – lorsqu'elle est prévue – d'une intervention de l'utilisateur pour la modification des données.

L'emploi généralisé de l'ordinateur pour les trois approches envisagées (Géométrie du Triangle – Triangles spéciaux – Questions proposées) nous a conduit à la rédaction de programmes spécialisés, très développés et adaptés à la préparation de "conférences". Dans le cas particulier des "Triangles spéciaux", ils sont complétés par d'autres programmes assurant certains calculs destinés à faciliter les recherches et à “contrôler” les résultats obtenus. On aura un aperçu fragmentaire des possibilités de ces programmes dans l’exemple proposé plus loin : l’indication <P> (en marge du texte) signale l’intervention du(des) programme(s) utilisé(s).

Place à l’exemple ...

On aura compris, d’après le titre de l’article, qu’il s’agira de quelques développements à propos de la droite de SIMSON.

<P> Le “menu” de la deuxième partie de “Géométrie du Triangle” (entièrement consacrée à la droite de SIMSON) donne une première idée de l’ampleur des développements possibles. La conférence-exemple proposée est organisée au départ d’extraits (enchaînés et coordonnés) de ces programmes.

$\longrightarrow$ Le texte présenté ici est une version “allégée” de la “conférence” elle-même, en ce sens que ne sont pas reproduits (notamment) certains calculs et que les démonstrations des propriétés utilisées ou invoquées sont réduites à de courtes synthèses ou mêmes absentes. (Se reporter aux programmes).

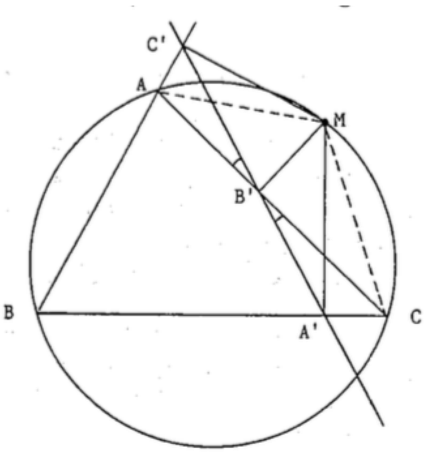
L’exposé complet comporte deux parties indépendantes : le seul lien entre elles est le théorème d’existence de la droite de SIMSON énoncé, démontré et largement commenté dans la première partie.

PREMIERE PARTIE

a) Droite de Simson - Théorème d’existence

Les pieds des perpendiculaires abaissées sur les côtés d’un triangle d’un point M de la circonférence circonscrite à ce triangle sont en ligne droite. (Cette droite est appelée “Droite de SIMSON” du point M par rapport au triangle).

La démonstration de cette propriété (tout au moins celle qui est proposée dans le programme) s’appuie sur les propriétés angulaires des quadrilatères inscrits. L’idée générale est la suivante : envisageant les quadrilatères inscriptibles $MB'A'C$ et $MB'AC'$, on démontre l’égalité des angles $A'B'C$ et $AB'C'$, ...



<P> Le programme détaille cette démonstration (pas à pas), présente la réciproque (qui est vraie) et donne ensuite la possibilité de construire la droite de SIMSON de tout point M de la circonférence circonscrite. Enfin, le programme est complété par une généralisation : des droites isoclines remplaçant les perpendiculaires sur les côtés (avec la même possibilité de construction).

b) Complément

Par tout point P du plan d'un triangle ABC passent TROIS droites de SIMSON.

Cette proposition qui ressemble davantage à une remarque qu'à un théorème est, en réalité, une propriété qui se révèle très féconde dans une étude approfondie de la droite de SIMSON. Nous en donnons ici une démonstration analytique s'appuyant uniquement sur le théorème d'existence de la droite de SIMSON.

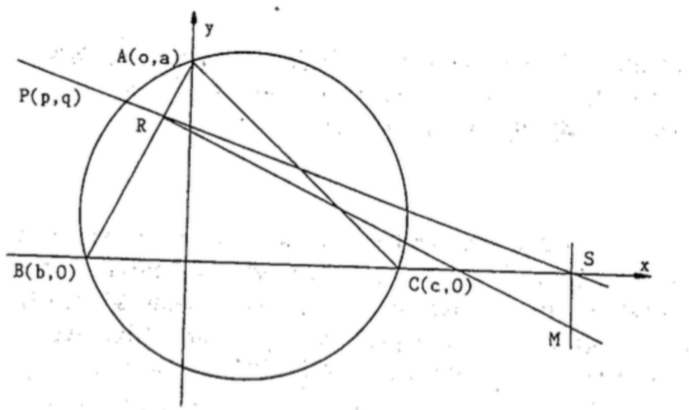
Nous consacrons à cette démonstration des développements (et commentaires) qui peuvent paraître assez longs : ils ont – aussi – pour objet d'attirer l'attention, dès le début, sur la "complémentarité" des outils et techniques disponibles. On verra, en particulier :

– que la "méthode des deux lieux" trouve ici une application de prime abord inattendue (si l'on se réfère uniquement à la formulation de la propriété).
– qu'il convient d'adopter une attitude critique permanente dans la recherche de lieux géométriques (notamment par voie analytique).

Principe de la démonstration

1. Considérant un point P quelconque du plan du triangle ABC, s'il existe des droites de SIMSON passant par ce point, les points "M" de ces droites sont sur la circonférence circonscrite au triangle (Théorème d'existence et sa réciproque). Cette circonférence est donc un premier lieu des points dont la droite de SIMSON passe par P.

2. Soit une transversale passant par P et coupant les côtés AB et BC du triangle respectivement en R et S. Si cette transversale est droite de SIMSON du triangle, le point M qui la détermine est l'intersection des perpendiculaires RM et SM aux côtés AB et BC.



Les points susceptibles d'engendrer les droites de SIMSON passant par le point P sont donc les intersections du lieu du point M (lorsque la transversale tourne autour du point P) et de la circonférence circonscrite au triangle.

Résumé de la démonstration

Choix des axes : Le côté BC du triangle et la hauteur correspondante.

Lieu de M

Soit $y = m.(x - p) + q$ l'équation d'une transversale passant par le point $P(p, q)$. Le coefficient angulaire m de cette transversale est le paramètre de l'équation. On obtiendra l'équation du lieu de M en éliminant m entre les équations (à déterminer) des droites RM et SM. On trouve :

$$abx^2 - a^2xy - (abp - a^2q + ab^2)x + (a^2p + abq)y - ab(aq - bp) = 0 \quad (1)$$

Cette équation est celle d'une conique (second degré en x, y) passant par $B(b, 0)$ et – plus particulièrement – d'une hyperbole (le binôme caractéristique de (1) est toujours négatif). Pour achever de caractériser la courbe, indiquons qu'il est facile de vérifier que ses asymptotes sont perpendiculaires aux côtés AB et BC du triangle.

Equation de la circonférence circonscrite

On trouve

$$x^2 + y^2 - (b + c)x - \frac{bc + a^2}{a}\, y + bc = 0 \quad (2)$$

> En calculant les coordonnées des points d'intersection des courbes (1) et (2), on obtient celles des points M engendrant des droites de SIMSON passant par P.

...

Marquons ici un temps d'arrêt pour examiner, avec soin, un point particulier très important. L'énoncé de la proposition conduit à conclure qu'il y aurait TROIS points d'intersection, ce qui – même s'il existait, parmi ceux-ci, des points imaginaires – ne serait pas compatible avec le fait que deux coniques se coupent toujours en QUATRE points !

$\longrightarrow$ Il y a là un point à élucider !

Revenons à la détermination de la courbe (1) : nous avons supposé que la transversale mobile issue de P rencontrait les côtés AB et BC du triangle en deux points R et S d'une droite de SIMSON (si elle existe), un troisième point étant le point P. Remarquons que cette construction est prise en défaut lorsque la transversale passe par le sommet B : les points R et S sont confondus (en B) et les droites RM et SM se coupent en B (M est confondu avec B). La droite de SIMSON correspondant à ce point d'intersection est indéterminée [3]

> Encore qu'il soit analytiquement correct, le point B est à exclure en tant qu'intersection acceptable de l'hyperbole (1) et de la circonférence (2). Il reste ainsi TROIS points dont les droites de SIMSON passent par P.

Notons encore que deux de ces points d'intersection peuvent être imaginaires lorsqu'une des branches de l'hyperbole ne coupe pas la circonférence circonscrite. L'autre branche coupera toujours la circonférence puisque l'hyperbole passe par le sommet B (réel) : il y aura donc toujours au moins UN point réel.

...

La démonstration, en tant que telle, est ainsi achevée et précisée. Si l'on souhaite une présentation graphique, il reste à déterminer (calculer) les coordonnées des points d'intersection des courbes (1) et (2). Remarquant que l'équation de l'hyperbole ne contient pas de terme en y^2, il est possible d'expliciter y en fonction de x. On trouve :

$$y = -\frac{abx^2 - (abp - a^2q + ab^2)x - ab(aq - bp)}{-a^2x + a^2p + abq} \tag{3}$$

En remplaçant, dans (2), y par cette valeur (3), on obtient une équation du quatrième degré en x dont les racines sont les abscisses des quatre points d'intersection (dont B) de l'hyperbole et de la circonférence. Ces abscisses, introduites dans (3), conduisent aux ordonnées correspondantes : les points d'intersection sont ainsi complètement déterminés. En pratique, on aura recours à une méthode numérique pour résoudre l'équation du quatrième degré obtenue comme indiqué plus haut. (C'est ce qui est réalisé dans le programme illustrant cette question).

<P> Après une figure indiquant le principe de la démonstration (intersection des deux lieux), le programme comporte trois parties :

a) Exemple de TROIS points d'intersection réels.
b) Exemple avec UN seul point d'intersection réel et deux points d'intersection imaginaires.
c) Choix, par l'utilisateur, de la position du point P : le programme assure tous les calculs (circonférence circonscrite, hyperbole, in-

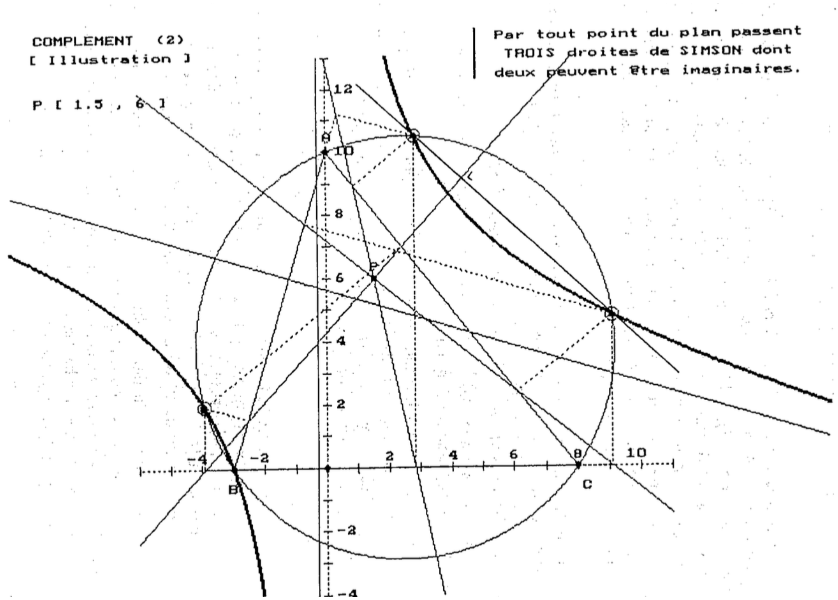
3. En tant que point appartenant à la circonférence circonscrite au triangle, le point B admet une droite de SIMSON : c'est la hauteur du triangle issue du sommet B (elle ne passe généralement pas par le point P).

tersections et droites de SIMSON correspondantes) et en donne une présentation graphique.

Remarques

1. En exécutant la troisième partie et en choisissant P de manière qu'il appartienne à la hauteur issue de B, on notera que la branche d'hyperbole passant par B est tangente à la circonférence circonscrite (point double) : on a retrouvé, dans ce cas, le sommet B conduisant à une droite de SIMSON passant par P.
2. En examinant la figure obtenue dans le cas de trois points d'intersection réels, on remarque qu'il semble que les trois droites de SIMSON obtenues soient chacune perpendiculaire à un côté du triangle formé par les trois points d'intersection.

   (Voir la figure – copie d'écran – de la page suivante).



Une recherche plus approfondie montrerait que cette conjecture se vérifie : érigée en propriété (démontrée), elle est au centre de nouveaux développements à propos de la droite de SIMSON.

<P> D'autres programmes de "Géométrie du Triangle" (notamment : "Triangles S" et "Orthopôle") sont consacrés à ces développements.

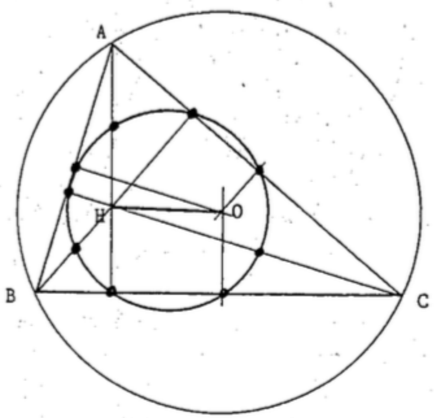
DEUXIEME PARTIE

Préliminaires

L'exposé de cette deuxième partie suppose connu le cercle d'EULER et ses propriétés de base. Nous rappelons ces notions (sans démonstration). ([4])

1. Etant donné un triangle ABC, les milieux des côtés, les pieds des hauteurs (sur les côtés) et les milieux des segments joignant les sommets du triangle à l'orthocentre (points eulériens) sont NEUF points concycliques. (Le cercle est appelé “Cercle d'EULER” ou encore “Cercle des neuf points”).

2. Le centre du cercle d'EULER est le milieu du segment OH et son rayon est la moitié du rayon R du cercle circonscrit au triangle.



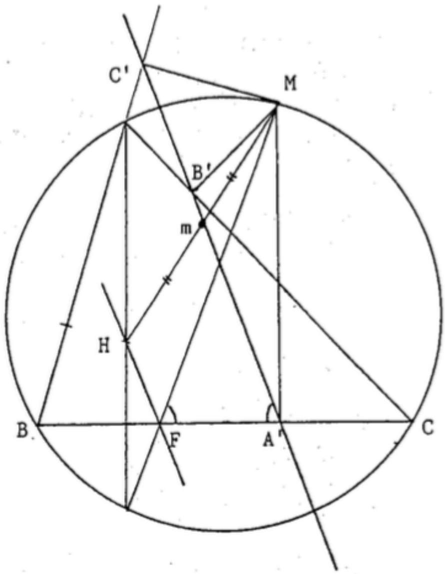
4. L'exposé – assez complet – du Cercle d'EULER (et de la Droite d'EULER) est donné dans “Géométrie du Triangle” – Première Partie.

a) Deux propriétés des droites de SIMSON

Nous utiliserons dans la suite deux propriétés des droites de SIMSON. Nous nous contenterons, ici, de les indiquer (sans démonstration). ([5])

1. *Désignant par* H'_a *le second point d'intersection de la hauteur du triangle issue du sommet* A *avec le cercle circonscrit, la droite de SIMSON du point* M *et la droite* MH'_a *sont également inclinées sur le côté* BC. ([6]) *– Propriété analogue pour les trois côtés –*

2. *La droite de SIMSON d'un point* M *par rapport au triangle* ABC *coupe le segment joignant* M *à l'orthocentre* H *au point* m *: ce point est le milieu du segment* MH *et appartient au cercle d'EULER du triangle.*



5. <P> Les démonstrations de ces deux propriétés sont présentées, en détail, dans les programmes.
6. On dit aussi "antiparallèles" par rapport à BC.

b) Enveloppe des droites de SIMSON

Préliminaires

> *L'enveloppe d'un ensemble de droites est la courbe à laquelle toutes ces droites sont tangentes.* ([7])
>
> *Exemple* : L'enveloppe des droites situées à distance constante d'un point donné est une circonférence dont le centre est le point donné et dont le rayon est égal à la distance constante.

Nous nous proposons ici de rechercher l'enveloppe des droites de SIMSON d'un triangle lorsque le point M (qui détermine chacune d'elles) parcourt la circonférence circonscrite au triangle. Dans la présentation qui sera faite, nous procéderons en deux étapes :

1. Une approche “expérimentale” (utilisant les ressources graphiques de l'ordinateur) qui illustrera la notion même d'enveloppe et qui donnera une première indication, assez précise, de la nature de l'enveloppe cherchée.
2. Une recherche analytique – s'appuyant sur les deux propriétés rappelées plus haut – qui conduira à l'équation de la courbe-enveloppe des droites de SIMSON.

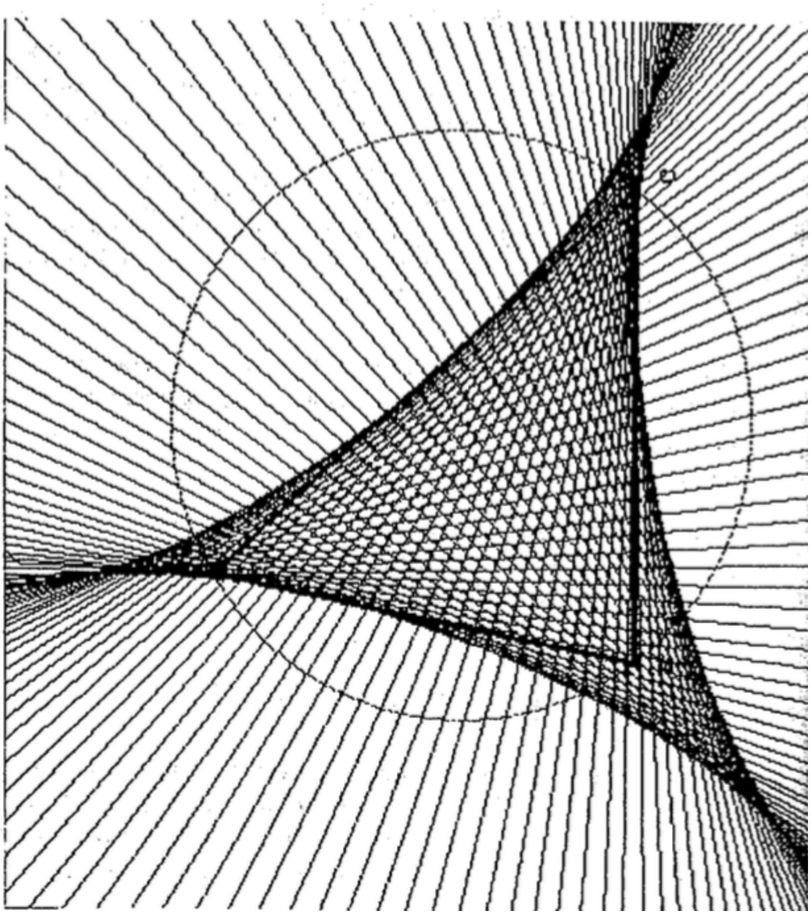
Approche expérimentale

1. Utilisant le potentiel de calcul et les possibilités graphiques de l'ordinateur, nous réalisons, dans un premier temps, une “expérience” qui consiste à tracer un grand nombre de droites de SIMSON d'un triangle donné. On obtient ainsi la figure de la page suivante. <P>

   Arrêtons-nous à cette figure.

   a) La forme de l'enveloppe apparaît très nettement : c'est la courbe entourant la partie du plan dans laquelle s'entrecroisent les droites de SIMSON dessinées. En raison de la “qualité” du tracé obtenu, on peut dire – sans prendre de risque inconsidéré – que la courbe présente trois axes de symétrie, nettement indiqués par des points de rebroussement, alors que le triangle ABC utilisé ne présente aucune symétrie !

7. Le texte qui accompagne les programmes donne une définition rigoureuse de l'enveloppe des droites (non reprise ici).



Enveloppes des droites de SIMSON - Approche “expérimentale”

b) Se souvenant – fort à propos – du lien existant entre droites de SIMSON et cercle d’EULER (Propriété 2), on peut s’interroger sur un lien éventuel existant entre l’enveloppe de ces droites et ce cercle. Pour répondre à cette interrogation (toujours de manière expérimentale), le programme dessine, dans une étape suivante, le cercle d’EULER du triangle et l’on découvre que ce cercle est tritangent à la courbe-enveloppe ! Cette dernière se précise.

c) Le programme s’achève par le tracé de l’enveloppe – grâce à une équation établie ultérieurement (voir plus loin : “Recherche analytique") : on a, par anticipation, confirmation des conjectures précédentes. On note aussi que la courbe-enveloppe est tangente aux trois côtés du triangle : ceci s'explique par le fait que chaque côté du triangle est droite de SIMSON (des points diamétralement opposés aux sommets).

2. Une deuxième partie du programme complète les expériences :
   a) En assurant les mêmes dessins que ci-dessus (ensemble de droites de SIMSON, "image" de l'enveloppe, cercle d'EULER) pour un triangle dont l'utilisateur choisit la forme (acutangle, obtusangle, rectangle, équilatéral). On constate, avec quelque surprise peut-être, que quelle que soit cette forme, la courbe-enveloppe conserve sa régularité (axes de symétrie) alors même qu'elle se déplace dans le plan.
   b) En donnant un complément d'information : les trois points de rebroussement se trouvent sur une circonférence concentrique au cercle d'EULER et de rayon triple de ce dernier.

Recherche analytique

Introduction

Rappelons (ou indiquons) que la détermination analytique de l'enveloppe d'une famille de droites repose sur le théorème suivant ([8]) :

La famille de droites d_λ d'équation générale

$$u(\lambda)x + v(\lambda)y + w(\lambda) = 0 \qquad (1)$$

admet, en général, une enveloppe engendrée, lorsque λ varie, par le point commun à d_λ et à la droite associée d'_λ

$$u'(\lambda)x + v'(\lambda)y + w'(\lambda) = 0 \qquad (2)$$

dont l'équation est obtenue en annulant la dérivée première, par rapport à λ, du premier membre de l'équation de d_λ.

Equation de l'enveloppe des droites de SIMSON

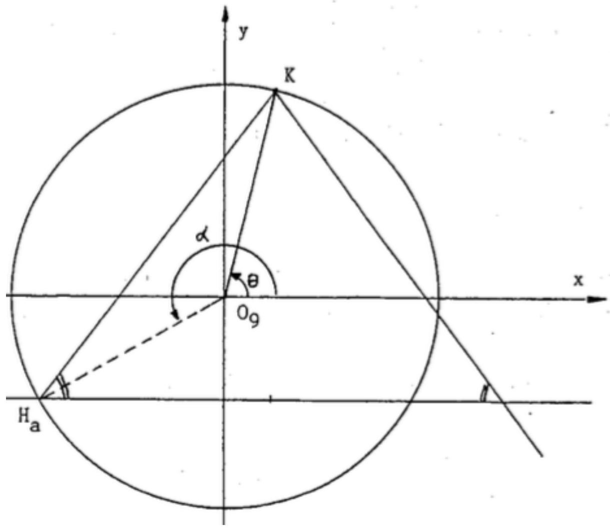
Choix des axes

8. Pour la démonstration, voir "Géométrie du Triangle" - Deuxième partie.

On a vu (Propriétés) que le cercle d'EULER était intimement lié aux droites de SIMSON. Les "expériences" menées plus haut semblent indiquer, de surcroît, le rôle particulier de ce cercle relativement à l'enveloppe cherchée. Nous choisirons donc les axes coordonnés en tenant compte à la fois de l'importance du cercle d'EULER et des éléments nécessaires et suffisants à la détermination d'une droite de SIMSON. D'où : origine : le centre d'EULER, Ox parallèle au côté BC du triangle.

Equation de la droite de SIMSON associée à un point M

En désignant par H l'orthocentre du triangle et par H_a le pied de la hauteur issue de A (sur le côté BC), le milieu K du segment MH appartient, à la fois, à la droite de SIMSON de M et au cercle d'EULER du triangle. D'autre part, la droite KH et la droite de SIMSON de M sont également inclinées sur le côté BC (voir les propriétés rappelées plus haut). Enfin, H_a appartient au cercle d'EULER. Rassemblant ces divers éléments, on obtient la figure suivante :



En désignant par α l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH_a})$ et par θ l'angle fixant la position de K sur le cercle d'EULER (paramètre de l'équation), on trouve pour équation de la droite de SIMSON :

$$y \sin \frac{\theta + \alpha}{2} - x \cos \frac{\theta + \alpha}{2} + \frac{R}{2} \cos \frac{3\theta + \alpha}{2} = 0 \qquad (1)$$

La dérivée première de (1), par rapport au paramètre θ, égalée à zéro s'écrit :

$$y\cos\frac{\theta+\alpha}{2}+x\sin\frac{\theta+\alpha}{2}-\frac{3R}{2}\sin\frac{3\theta+\alpha}{2}=0 \tag{2}$$

On obtiendra une représentation paramétrique de l'enveloppe des droites de SIMSON en résolvant, par rapport à x et y, le système des équations (1), (2). On trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{R}{2}\left[2\cos\theta-\cos(2\theta+\alpha)\right] \\ y &= \frac{R}{2}\left[2\sin\theta-\sin(2\theta+\alpha)\right] \end{aligned}}$$

Note : La courbe définie par la représentation paramétrique ci-dessus est une "Hypocycloïde à trois rebroussements". On obtient cette courbe en considérant un cercle (C) de rayon R roulant sans glisser à l'intérieur d'un cercle (O) de rayon $3R$: un point M, attaché au cercle (C) décrit une hypocycloïde à trois rebroussements.

Complément

On a vu ci-dessus que la droite de SIMSON d'un point M est complètement déterminée par la connaissance de DEUX points attachés au triangle : le centre du cercle d'EULER et le pied H_a de la hauteur issue de A.

> Il en résulte que tous les triangles ayant même centre du cercle d'EULER et même H_a forment une famille de triangles dont tous les membres ont même ensemble de droites de SIMSON : l'enveloppe de ces dernières est commune à tous les triangles de la famille.
> La forme des équations paramétriques trouvées précédemment ne fait que confirmer cette remarque : ces équations ne dépendent que de α et du rayon R du cercle circonscrit. On obtiendra un triangle particulier de la famille en se fixant un troisième point : l'orthocentre, un sommet, ... ([9])

9. A ce propos, une série d'exercices pourrait consister en la construction d'un triangle connaissant de position le centre O_9 du cercle d'EULER et le point H_a et, en outre : H

On a ainsi “expliqué” – grâce au rôle central du cercle d'EULER – que l'allure régulière de la courbe-enveloppe des droites de SIMSON n'était nullement affectée par la forme du triangle !

Adresse de l'auteur :

Guy Robert
Avenue Félicien Rops 15
5000 Namur

ou A, ou B, ou G, ou …(en notant que la construction peut fort bien ne pas être possible pour certaines positions du troisième point, d'où la nécessité d'une discussion).

A propos de la dérivation d'une fonction composée

G. Noël, *Université de Mons-Hainaut*

1. Rappel

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. f est dérivable en un point x_0 de $]a, b[$ si et seulement si le quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite lorsque x tend vers x_0. De plus

$$Df(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Intuitivement : on part d'un **taux d'accroissement moyen** de la fonction f sur l'intervalle $[x_0, x]$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, et on passe à la limite. La dérivée est donc un **taux d'accroissement instantané** (marginal dit-on encore par analogie avec un concept souvent rencontré en sciences économiques). Le lien avec la vitesse moyenne et la vitesse instantanée est bien connu.

2. Une nouvelle définition de la dérivée ?

Notons f_1 la fonction *taux d'accroissement moyen* :

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Alors, pour tout $x \neq x_0$, on a $f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0)$. La fonction f_1 n'est pas définie en x_0. Mais si f est dérivable en x_0, alors f_1 admet une limite en x_0 et $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = Df(x_0)$.

Réciproquement, si f_1 admet une limite en x_0, alors f est dérivable en x_0. Ainsi :

f est dérivable en x_0	$\Leftrightarrow$	Il existe une fonction f_1 telle que 1) $f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0)$ pour $x \neq x_0$ 2) f_1 admet une limite en x_0.

De plus, $Df(x_0) = \lim_{x \to x_0} f_1(x)$.

Ce n'est pas une nouvelle définition de la dérivabilité, mais une autre formulation de la définition usuelle. Son avantage : elle ne fait pas intervenir de quotient.

3. La dérivée d'une composée

Considérons deux fonctions :

$$\begin{aligned} f &: [a,b] \to \mathbb{R} \\ g &: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

On choisit $x_0 \in]a,b[$ et on suppose que $f(x_0)$ appartient à $]\alpha,\beta[$. On note $y_0 = f(x_0)$.

Supposons f dérivable en x_0 et g dérivable en y_0. Il existe donc des fonctions f_1 et g_1 ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f_1(x)(x - x_0) && (1) \\ g(y) &= g(y_0) + g_1(y)(y - y_0) && (2) \\ f_1 & \quad \text{admet une limite en } x_0 && (3) \\ g_1 & \quad \text{admet une limite en } y_0 && (4) \end{aligned}$$

Pour composer g et f, nous remplaçons y par $f(x)$ dans (2) :

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g_1(f(x))(f(x) - f(x_0))$$

En utilisant (1), et en posant $h(x) = g(f(x))$:

$$h(x) = h(x_0) + g_1(f(x))f_1(x)(x - x_0)$$

Posons $h_1(x) = g_1(f(x))f_1(x)$. Pour montrer que h est dérivable en x_0, il suffit d'établir que h_1 admet une limite lorsque x tend vers x_0. Or

— $f_1(x) \to Df(x_0)$ si $x \to x_0$

— $f(x) \to f(x_0) = y_0$ si $x \to x_0$ car $f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0)$

— $g_1(y) \to Dg(y_0)$ si $y \to y_0$

Nous sommes ainsi ramenés à étudier la limite d'un produit et la limite d'une composée.

Si nous savons que, u et v étant deux fonctions quelconques :

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \to p \text{ pour } x \to x_0 \\ v(x) \to q \text{ pour } x \to x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow u(x)v(x) \to pq \text{ pour } x \to x_0$$

et

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \to y_0 \text{ pour } x \to x_0 \\ v(y) \to q \text{ pour } y \to y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow v(u(x)) \to q \text{ pour } x \to x_0$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} g_1(f(x))f_1(x) &= \lim_{x \to x_0} g_1(f(x)) \lim_{x \to x_0} f_1(x) \\ &= Dg(y_0)Df(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0) \end{aligned}$$

Ainsi h est dérivable en x_0 et $Dh(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0)$: la formule de dérivation d'une fonction composée est établie.

4. Commentaires

Comme on le voit, ce n'est pas vraiment la démonstration de la formule de dérivation d'une composée qui pose problème, mais surtout celle qui concerne la limite d'une composée. Rappelons-la :

Théorème *Si* $\lim_{x \to x_0} u(x) = y_0$ *et* $\lim_{y \to y_0} v(y) = q$,
alors $\lim_{x \to x_0} v(u(x)) = q$.

Si la fonction v n'est pas définie en y_0, on commencera par la prolonger en ce point en lui attribuant la valeur q. De même, si u n'est pas définie en x_0, nous la prolongeons en lui donnant la valeur y_0 en x_0. De cette façon nous évitons des complications techniques relativement au domaine de $v \circ u$, et nous n'avons pas à spécifier des conditions $x \neq x_0$ ou $y \neq y_0$ dans les inégalités qui suivent.

Si les limites ont été définies de la façon usuelle en ε, δ :

Puisque $v(y) \to q$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : y_0 - \delta \leqslant y \leqslant y_0 + \delta \Rightarrow q - \varepsilon \leqslant v(y) \leqslant q + \varepsilon$$

Puisque $u(x) \to y_0$:

$$\forall \delta > 0 \; \exists \eta > 0 : x_0 - \eta \leqslant x \leqslant x_0 + \eta \Rightarrow y_0 - \delta \leqslant u(x) \leqslant y_0 + \delta$$

Par conséquent à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $\eta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} x_0 - \eta \leqslant x \leqslant x_0 + \eta \;&\Rightarrow\; y_0 - \delta \leqslant u(x) \leqslant y_0 + \delta \\ &\Rightarrow\; q - \varepsilon \leqslant v(u(x)) \leqslant q + \varepsilon \end{aligned}$$

et $\lim_{x \to x_0} v(u(x)) = q$.

Notons que cette démonstration peut être assaisonnée d'une représentation graphique qui en facilitera la compréhension. Sa principale difficulté est la manipulation des quantificateurs. C'est peut-être pour moi l'occasion de noter que le cours d'analyse est celui qui utilise le plus les quantificateurs, et de la façon la plus significative (peu importe qu'on les désigne par des mots ou par des symboles). La présence simultanée dans une même formule des quantificateurs existentiel et universel rend automatiquement indispensable qu'un peu de temps soit consacré à interpréter convenablement la formule, à examiner ce qui se passe par exemple si on permute les quantificateurs. Ainsi, la définition de la limite s'écrit

$$\begin{gathered} \lim_{x \to x_0} u(x) = p \\ \Updownarrow \\ (\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta \Rightarrow p - \varepsilon \leqslant u(x) \leqslant p + \varepsilon) \end{gathered}$$

Les puristes (je devrais dire "ceux qui sont encore plus puristes que moi") ne manqueront pas de noter que cette formule est incorrecte. Il faudrait en réalité écrire

$$\begin{gathered} \lim_{x \to x_0} u(x) = p \\ \Updownarrow \\ (\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta \Rightarrow p - \varepsilon \leqslant u(x) \leqslant p + \varepsilon) \end{gathered}$$

Mais le quantificateur $\forall x \in \mathbb{R}$ que j'ai omis ne me semble pas jouer de rôle important tant qu'on ne nie pas l'implication. Que signifierait donc la formule obtenue en permutant $\forall \varepsilon$ et $\exists \delta$? Comment l'interpréter ?

$$\exists \delta > 0 \; \forall \varepsilon > 0 : x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta \Rightarrow p - \varepsilon \leqslant u(x) \leqslant p + \varepsilon$$

Quel que soit ε, tous les éléments du segment $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ vérifieraient la condition $p-\varepsilon \leqslant u(x) \leqslant p+\varepsilon$. Autrement dit, pour tout élément de $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, on aurait $u(x)=p$, la fonction f serait constante sur ce segment.

Dans un cours d'analyse, deux philosophies sont possibles :

— ou bien se contenter d'approches intuitives du genre "$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ si $f(x)$ se rapproche d'aussi près que l'on veut de α lorsque x se rapproche suffisamment près de x_0". Les quantificateurs et les inégalités peuvent alors se contenter d'apparitions fugitives. Dans cette optique, il n'est pas difficile de justifier intuitivement la plupart des résultats et notamment la formule de la limite d'une composée. L'inconvénient est que les connaissances des élèves restent dans ce cas assez peu opérationnelles.

— ou bien on veut précisément assurer aux élèves une connaissance opérationnelle de l'analyse. Dans ce cas, on ne voit pas comment éviter les quantificateurs et les inégalités car ce sont eux qui constituent les outils les plus fréquemment utilisés. Même dans ce cas, l'approche intuitive reste nécessaire pour faire comprendre la formulation mathématique.

A chacun de faire son choix entre les deux philosophies, en tenant compte, non de ses goûts personnels, mais des élèves auxquels il s'adresse, de leurs aptitudes réelles et de ce que seront leurs besoins ultérieurs.

Adresse de l'auteur :

G. Noël
Rue des Fontaines 14bis
7061 Casteau

Activités sur les fonctions

H. Dujacquier, *Ecole Normale de Braine-le-Comte*

Ayant eu l'occasion de lire le premier numéro d'une revue roumaine [1], j'ai été directement "branché" sur deux problèmes relatifs aux fonctions.

Problème 1 (légèrement modifié)

Soit $f = [1, +\infty[\to [a, +\infty[$ *où* $a \geqslant 1$ *une fonction surjective et strictement croissante vérifiant la relation suivante :*

$$\forall x \in [1, +\infty[: f(f(x)) = x^2 - 2x + 2$$

Déterminer $f(1)$.

Puisque f est strictement croissante et surjective sur $[1, +\infty]$, on en déduit que $f(1) = a$ avec $a \geqslant 1$ d'après l'énoncé.

Si $a > 1$, le caractère strictement croissant de f entraîne $a : [a > 1] \Rightarrow [f(a) > f(1)]$: cela est absurde puisque $f(a) = f(f(1)) = 1 - 2 + 2 = 1$. En conséquence $1 \geqslant a$, d'où finalement, $a = f(1) = 1$.

Problème 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction ayant la propriété suivante :

$$\forall r, s \in \mathbb{R} : |f(r) - f(s)| = \min\{f(r+s), f(r-s)\}$$

Prouver que :

1) $f(0) = 0$

2) le minimum de f est égal à 0

3) f est paire

1) prenons $r = s = 0$. On a $|f(0) - f(0)| = \min\{f(0)\}$ d'où $f(0) = 0$

2) prenons $s = 0$. On a $|f(r) - f(0)| = \min\{f(r), f(0)\}$ c'est-à-dire, vu 1), $\underbrace{|f(r)|}_{\geqslant 0} = \min\{f(r), 0\}$ donc $f(r) \geqslant 0$ et le minimum de f est bien égal à 0 puisqu'il existe au moins un réel t tel que $f(t) = 0$ (en fait $t = 0$).

3) prenons $s = -r$. On a

$$\begin{aligned}
|f(r) - f(-r)| &= \min\{f(0), f(2r)\} \\
|f(r) - f(-r)| &= \min\{0, f(2r)\} \text{ vu 1)} \\
|f(r) - f(-r)| &= 0 \quad \text{vu 2)} \\
\text{d'où } f(r) - f(-r) &= 0 \\
f(r) &= f(-r)
\end{aligned}$$

et finalement, f est bien paire.

Bibliographie

[1] "Octogon" Mathematics Magazine - Brasov-Romania, Volume 1, $n°$ 1, April 1993, page 15 : PP8 et PP9 ; Editor : Mihaly Beneze .

Adresse de l'auteur :
Hector DUJACQUIER
chaussée d'Enghien 165
7060 Soignies

Olympiades

C. Festraets,

Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

Voici les solutions des trois problèmes proposés le premier jour à l'Olympiade Mathématique Internationale de 1994.

1. Soit m et n deux entiers strictement positifs et $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des éléments distincts de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. On suppose que, chaque fois que, pour $i, j, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$, $a_i + a_j$ est inférieur ou égal à n, il existe k, $1 \leqslant k \leqslant m$, tel que $a_i + a_j = a_k$.

Démontrer que :

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}$$

Solution

Les a_i étant distincts, on peut toujours supposer

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leqslant n.$$

Si $a_1 + a_m \leqslant n$, alors, par hypothèse, il existe a_k tel que $a_1 + a_m = a_k$, ce qui est impossible puisque a_m est le plus grand élément de l'ensemble des a_i.

Donc, $a_1 + a_m \geqslant n + 1$.

Si $a_2 + a_{m-1} \leqslant n$, alors on a

$$a_{m-1} < a_1 + a_{m-1} < a_2 + a_{m-1} \leqslant a_m \leqslant n$$

et, par hypothèse, il existe a_k et a_j tels que $a_1 + a_{m-1} = a_k$ et $a_2 + a_{m-1} = a_j$, donc

$$a_{m-1} < a_k < a_j \leqslant a_m,$$

ce qui est impossible.

Donc, $a_2 + a_{m-1} \geqslant n + 1$.

Si $a_3 + a_{m-2} \leqslant n$, alors on a

$$a_{m-2} < a_1 + a_{m-2} < a_2 + a_{m-2} < a_3 + a_{m-2} \leqslant a_m \leqslant n$$

et, par hypothèse, il existe a_k, a_j, a_t tels que $a_1+a_{m-2} = a_k$, $a_2+a_{m-2} = a_j$, $a_3 + a_{m-2} = a_t$, donc

$$a_{m-2} < a_k < a_j < a_t \leqslant a_m,$$

ce qui est impossible.

Donc, $a_3 + a_{m-2} \geqslant n + 1$.

Et ainsi de suite. On a finalement :

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_m & \geqslant & n+1 \\ a_2 + a_{m-1} & \geqslant & n+1 \\ a_3 + a_{m-2} & \geqslant & n+1 \\ & \vdots & \\ a_m + a_1 & \geqslant & n+1 \end{array}$$

et en additionnant, il vient

$$2.\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant m.(n+1)$$

d'où

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}$$

2. ABC est un triangle isocèle où $AB = AC$. On suppose que :

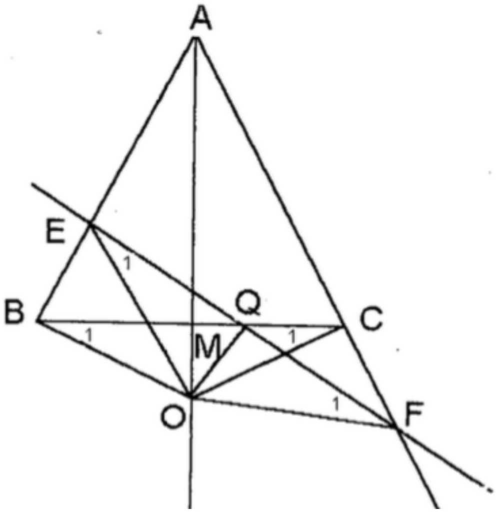
(i) M est milieu de BC et O est le point de la droite AM tel que la droite OB soit perpendiculaire à la droite AB ;

(ii) Q est un point quelconque du segment $[B, C]$ différent de B et de C ;

(iii) E est un point de la droite AB et F de la droite AC tels que E, Q, F soient colinéaires et distincts.

Montrer que la droite OQ est perpendiculaire à la droite EF si et seulement si $QE = QF$.

Solution



1) Soit $QE = QF$.

Considérons le triangle AEF et la sécante BC ; appliquons le théorème de Ménélaüs :

$$\frac{\vec{AB}}{\vec{BE}} \cdot \frac{\vec{EQ}}{\vec{QF}} \cdot \frac{\vec{FC}}{\vec{CA}} = -1$$

Or, $AB = AC$, car le triangle ABC est isocèle et $QE = QF$ par hypothèse, d'où $BE = CF$.

AO étant la médiatrice de BC dans le triangle isocèle ABC, AO est axe de symétrie de $OBAC$ et puisque $OB \perp AB$, on a aussi $OC \perp AC$; de plus $OB = OC$.

Les triangles OBE et OCF sont donc isométriques, car ils sont rectangles et $OB = OC, BE = CF$. D'où $OE = OF$.

Dès lors, le triangle EOF est isocèle et OQ, médiane de EF, est aussi hauteur. Donc $OQ \perp EF$.

2) Soit $OQ \perp EF$.

Les quadrilatères $OBEQ$ et $OQCF$ sont inscriptibles car ils ont deux angles opposés de 90°. On a alors des angles inscrits égaux :

$$\hat{B}_1 = \hat{E}_1$$

et

$$\hat{F}_1 = \hat{C}_1.$$

Or, dans le triangle isocèle BOC, on a $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$. D'où $\hat{E}_1 = \hat{F}_1$ et le triangle EOF étant isocèle, la hauteur OQ est aussi médiane, d'où $EQ = QF$.

3. Pour tout entier k strictement positif, $f(k)$ est le nombre d'éléments de l'ensemble $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ dont la représentation en base 2 contient exactement trois fois le chiffre 1.

(a) Montrer que pour tout entier strictement positif m, il existe au moins un entier strictement positif k tel que $f(k) = m$.

(b) Trouver tous les entiers strictement positifs m pour lesquels il existe un unique entier k tel que $f(k) = m$.

Solution

(a) Soient

$$\begin{aligned} S_k &= \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}, \\ S_{k+1} &= \{k+2, k+3, \ldots, 2k, 2k+1, 2k+2\}, \\ \text{et } f(k) &= m. \end{aligned}$$

En base $2, k+1$ et $2k+2$ ont le même nombre de chiffres 1, puisque doubler un nombre consiste à lui ajouter un zéro comme chiffre des unités.

D'où

$f(k+1) = f(k) = m$ si $2k+1$ ne comporte pas exactement trois chiffres 1 (en base 2).

$f(k+1) = f(k) + 1 = m + 1$ si $2k+1$ comporte exactement trois chiffres 1.

f est donc une fonction croissante, qui croît d'une unité à la fois ; on a, par exemple :

$$
\begin{array}{ll}
S_1 = \{2\}_{10} = \{10\}_2 & \text{et } f_1 = 0 \\
S_2 = \{3,4\}_{10} = \{11,100\}_2 & \text{et } f_2 = 0 \\
S_3 = \{4,5,6\}_{10} = \{100,101,110\}_2 & \text{et } f_3 = 0 \\
S_4 = \{5,6,7,8\}_{10} = \{101,110,111,1000\}_2 & \text{et } f_4 = 1 \\
S_5 = \{6,7,8,9,10\}_{10} = \{110,111,1000,1001,1010\}_2 & \text{et } f_5 = 1 \\
S_6 = \{7,8,9,10,11\}_{10} = \{111,1000,1001,1010,1011,1100\}_2 & \text{et } f_6 = 2 \\
\ldots &
\end{array}
$$

f augmente d'une unité chaque fois que $2k+1$ comporte, en base 2, exactement trois chiffres 1, c'est-à-dire lorsque $2k$ et k comportent exactement deux chiffres 1. Comme il y a une infinité de telles valeurs de k, f prendra toutes les valeurs entières et positives ;

(b) Soit m un entier strictement positif tel qu'il existe un unique entier positif k tel que $f(k) = m$.

On a $f(k-1) = m-1$ et $f(k+1) = m+1$.

Posons $k - 1 = 2^n + r$ avec $r, n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < 2^n$.

Puisque $f(k) = f(k-1)+1$, $2(k-1)+1 = 2^{n+1} + 2r + 1$ comporte exactement trois chiffres 1.

De plus, $1 \leqslant 2r+1 < 2^{n+1}+1$ et $2r+1$ est impair, donc $1 \leqslant 2r+1 \leqslant 2^{n+1}-1$. Et dès lors, $2r+1$ comporte exactement deux chiffres 1, d'où $2r$ et r comportent exactement un chiffre 1.

Puisque $f(k+1) = f(k)+1$, $2k+1 = 2^{n+1}+2r+3$ comporte exactement trois chiffres 1.

De plus, $3 \leqslant 2r+3 \leqslant 2^{n+1}+1$. Si $2r+3 = 2^{n+1}+1$, alors $2k+1 = 2^{n+1}+2^{n+1}+1 = 2^{n+2}+1$ et $2k+1$ n'a que deux chiffres 1. Donc, $3 \leqslant 2r+3 \leqslant 2^{n+1}-1$. Et dès lors, $2r+3$ comporte exactement deux chiffres 1, ce qui entraîne que $2(r+1)$ et $r+1$ comportent exactement un chiffre 1. La seule valeur de r telle que r et $r+1$ comportent un seul chiffre 1 est $r = 1$.

Dans ce cas, $5 \leqslant 2^{n+1}-1$, donc $n \geqslant 2$ et $k = 2^n + 2$.

Déterminons $f(k)$.

On a $k - 2 = 2^n = (1\underbrace{00\cdots0}_{n \text{ chiffres } 0})_2$

Dans l'ensemble $\{2^n+1, 2^n+2, \ldots, 2^n+2^n = 2^{n+1}\}$, les nombres qui comportent exactement 3 chiffres 1 sont ceux où l'on a placé deux chiffres 1 à deux endroits occupés par des 0 dans l'expression binaire de 2^n. On a donc

$$f(k-2) = \binom{n}{2}.$$

$f(k-1) = f(k-2)$ car $2(k-1)+1 = 2^{n+1}+1$ ne comporte que deux chiffres 1.

On a donc

$$\begin{aligned} f(k) = f(k-1)+1 &= \binom{n}{2} + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1 \\ &= \frac{n^2-n+2}{2} \text{ avec } n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles

$\boxed{\text{Angles}}$ problème $n°$ 148 de M. et P. $n°$ 97

Déterminer les angles θ tels que

$$\sin\theta + \cos\theta + \operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta + \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = 6,4$$

Solution de M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre.

On a $\sin\theta + \cos\theta + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = 6,4$

Cette expression est symétrique en $\sin\theta, \cos\theta$; reformulons-la en termes de $S = \sin\theta + \cos\theta$ et $P = \sin\theta \cdot \cos\theta$:

$$S + \frac{1}{P} + \frac{S}{P} = 6,4.$$

Puisque $1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta = S^2 - 2P$, on a $2P = S^2 - 1$ et l'équation devient

$$S(S^2 - 1) + 2 + 2S = 6,4(S^2 - 1)$$

et après simplifications,

$$5S^3 - 32S + 5S + 42 = 0$$

qui se fractionne aisément

$$(S + 1)(S - 6)(5S - 7) = 0$$

$S = -1$ ne convient pas, car nous donne $P = 0$ et dans ce cas, $\sin\theta = 0$ ou $\cos\theta = 0$ et l'expression donnée n'est pas définie.

$S = 6$ ne convient pas car $S \leqslant \sqrt{2}$.

Donc, la seule solution est $S = \frac{7}{5}$.

On trouve alors $P = \frac{1}{2}(\frac{49}{25} - 1) = \frac{12}{25}$ et il s'ensuit que $\sin\theta$ et $\cos\theta$ sont les racines de

$$x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{12}{25} = 0.$$

On obtient finalement

$$\sin\theta = \frac{3}{5} \text{ et } \cos\theta = \frac{4}{5}$$

ou

$$\sin\theta = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{3}{5}$$

θ est donc l'un des angles aigus du triangle rectangle $(3, 4, 5)$.

Solutions analogues de *J.L. AYME* de St. Denis de la Réunion et de J. FINOULST de Diepenbeek. Bonnes solutions aussi (peut-être un peu moins directes) de F. GLINEUR de Quiévrain, B. LOISEAU de Mouscron, A. PATERNOTTRE de Boussu et J. RONDOU de Heverlee.

Moyenne problème n° 149 de M. et P. n° 97

Quel est le plus petit entier n $(n > 1)$ tel que la moyenne quadratique des n premiers entiers positifs est un entier ?

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek.

Nous faisons usage de la somme

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Selon l'énoncé on a

$$\sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n}} = k,$$

k entier positif ou

$$(n+1)(2n+1) = 6k^2.$$

Cette équation diophantienne peut s'écrire

$$4n^2 + 6n + 2 = 12k^2 \ \text{ ou } (2n + 3/2)^2 + 2 - 9/4 = 12k^2$$

$$(4n+3)^2 - 48k^2 = 1. \qquad (1)$$

On a donc à résoudre une équation de PELL de forme générale

$$x^2 - Dy^2 = 1 \ \ (D \text{ n'est pas le carré d'un entier !}) \qquad (2)$$

On sait que si (x_0, y_0), où x et y sont strictement positifs et x_0 le plus petit possible, est solution de (2), toute solution (x, y) de (2) est donnée par

$$x + y\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^r, r = 1, 2, \ldots$$

Revenons à (1).

On voit que $(4n + 3, k) = (7, 1)$ correspond à la solution (x_0, y_0) de (2). Toutes les solutions $(4n+3, k)$ de (1) se déduisent des valeurs de la puissance $(7 + \sqrt{48})^r$:

$r = 2$ donne $4n + 3 = 97, k = 14$; ne convient pas, n n'étant pas entier ;

si $r = 3$ on a d'abord $4n + 3 = 1351$ ou $n = 337$ et $k = 195$.

337 est donc le plus petit entier $n > 1$.

Solutions similaires de J.L. AYME de St Denis La Réunion, F. GLINEUR de Quiévrain, M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre et B. LOISEAU de Mouscron (ce dernier envisage aussi le cas où les n premiers entiers positifs sont $0, 1, 2, \ldots, n - 1$; le nombre cherché est alors $n = 25$).

Triangles et pentagones problème $n°$ 150 de M. et P. $n°$ 97

Soient A et B deux ensembles finis disjoints de points du plan tels que trois points distincts de $A \cup B$ ne soient pas colinéaires et que l'un au moins des ensembles A, B comprenne au moins 5 points.

Démontrer qu'il existe un triangle dont les trois sommets appartiennent à l'un des ensembles et dont l'intérieur ne comprend aucun point de l'autre ensemble.

Je n'ai reçu qu'une seule solution à ce problème, celle de B. LOISEAU de Mouscron. Elle est assez longue, aussi je vais essayer de la résumer au mieux.

Supposons que l'ensemble A comprenne au moins 5 points. Numérotons ces points par ordre croissant de leur distance à l'un d'eux A_1 fixé au départ. Le disque ouvert de centre A_1 et de rayon $|A_1A_5|$ ne contient pas d'autres points de A que A_1, A_2, A_3 et A_4. Donc l'enveloppe convexe de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ ne contient pas d'autre point de A, puisqu'elle est intérieure à ce disque ouvert, à l'exclusion de A_5 (et éventuellement de A_4 si $|A_1A_4| = |A_1A_5|$, de A_3 si $|A_1A_3| = |A_1A_5|, \cdots$).

1) Cette enveloppe convexe est un pentagone.

Décomposons-le en trois triangles

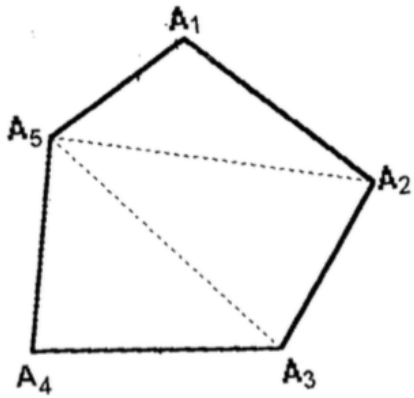


Fig. 1

Soit l'un au moins de ces triangles ne contient aucun point de B et la propriété est démontrée. Soit chacun de ces triangles contient un point de B, ce qui fournit un triangle dont les sommets appartiennent à B et qui ne contient aucun point de A.

2) Cette enveloppe convexe est un quadrilatère.

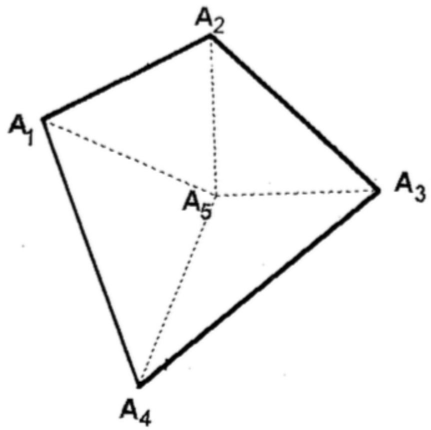


Fig. 2

A_5 détermine, avec les quatre autres sommets, quatre triangles adjacents.

Soit l'un au moins de ces triangles ne contient aucun point de B et c'est gagné. Soit chacun de ces triangles contient un point de B, ce qui fournit un quadrilatère dont les sommets appartiennent à B. Partageons ce quadrilatère en deux triangles. A_5 ne peut appartenir qu'à un seul de ces deux triangles (s'il était dans les deux triangles, il serait nécessairement sur le côté commun, ce qui est impossible car, par hypothèse, trois points de $A \cup B$ ne sont jamais alignés). Donc l'autre triangle ne contient aucun point de A.

3) Cette enveloppe convexe est un triangle

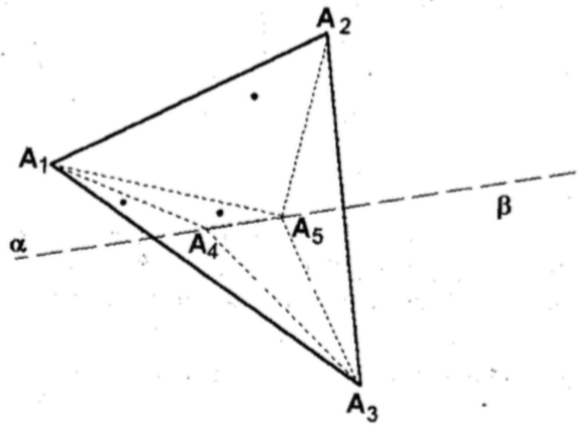


Fig. 3

Ce triangle peut être partitionné en 5 triangles $A_1A_4A_5$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_5$, $A_2A_3A_5$ et $A_3A_4A_5$.

La droite A_4A_5 détermine deux demi-plans α et β.

Ou bien l'un au moins des 5 triangles ne contient aucun point de B et la propriété est démontrée.

Ou bien chacun des triangles contient un point de B. On a ainsi 5 points de B dont au moins 3 appartiennent au même demi-plan (α sur la figure) et forment donc un triangle ne contenant aucun point de A.

157. Trois, quatre, cinq, ...

Démontrer que, si x, y, z sont entiers et si $x^2 + y^2 = z^2$, alors $xyz \equiv 0 \pmod{60}$.

(Problème proposé par J. GOLDSTEINAS de Bruxelles, référence : Number Theory for Beginners de A. WEIL)

158. Egaux, peut-être ?

n étant un entier positif, lequel des deux nombres $99^n + 100^n$ et 101^n est le plus grand ?

159. Un peu de géométrie

Un triangle ABC et un point D de son plan satisfont la relation

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CA}{BD} = \frac{AB}{CD} = \sqrt{3}.$$

Démontrer que ABC est un triangle équilatéral et que D est son centre.

Revue des revues

P. De Rijck,

Mathematical Spectrum 1992/93 Volume 25 $N°1$

Les nombres de Carmichael

par Keith Devlin

- On sait qu'un nombre est *premier* s'il n'est divisible que par lui-même et l'unité.
  Euclide (350 av. J.C.) avait déjà démontré qu'ils sont en nombre infini.
  Leur utilisation permet notamment d'écrire certaines données de façon très fiable, ce qui explique leur intérêt.
  FERMAT (17ème s.) avait démontré dans son "Petit théorème" la propriété suivante : pour tout nombre premier p et pour tout nombre n, $n^p - n$ est divisible par p.
- Mais Carmichael montra, en 1910, l'existence de nombres non premiers (appelés *nombres de Carmichael*) tels que $n^p - n$ est divisible par p, quel que soit n.
  Par exemple $561 = 3 \times 11 \times 17$ vérifie cette propriété. C'est le plus petit des nombres de cette espèce.
- Trois professeurs de l'université de Géorgie (Andrew GRANVILLE, Carl POMERANCE, et Red ALFORD) ont démontré récemment que les nombres de Carmichael sont en nombre infini, grâce au théorème suivant :
  "Il existe un nombre k, tel que pour tout $x > K$, il existe plus de $x^{2/7}$ nombres de Carmichael inférieurs à x."
  Puisqu'on peut prendre x aussi grand qu'on veut, cela démontre la proposition annoncée.

A propos d'un problème de Thwaites

par R.H. Eddy

- Les principales recherches de l'auteur portent sur les inégalités géométriques et spécialement sur leurs applications dans l'optimalisation des techniques.
- Le problème dont il est question dans cet article est le suivant :
  ABC est un triangle, et ABC', BCA', CAB' sont des triangles équilatéraux construits respectivement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ et extérieurs à ABC.
  Prouvez que AA', BB', et CC' sont concourantes et que $[AA']$, $[BB']$, et $[CC']$ sont de même longueur.
  La démonstration se base sur le théorème de CEVA.
  Le point d'intersection des droites AA', BB', CC' est appelé *point de Fermat.*
- Propriété de ce point de Fermat F : F est tel que $|AF|+|BF|+|CF|$ est minimum. L'auteur en donne une démonstration intuitive basée sur l'utilisation des principes de la physique statique.
- Généralisation du problème :
  On construit sur les côtés de ABC des familles de triangles isocèles ABC', BCA', CAB' dont les angles à la base ont une mesure ϕ. Ces triangles peuvent être intérieurs ou extérieurs à ABC. Les droites AA', BB', CC' sont encore concourantes quel que soit ϕ.
  De plus, le lieu des points d'intersection P ainsi obtenus est une hyperbole appelée *hyperbole de Kiepert* (1846-1934), brillant mathématicien allemand qui la découvrit en 1869. Cette hyperbole passe par A, B, C, le centre de gravité de ABC, son orthocentre, ainsi que le point de Fermat.
- Enfin, si à chacun de ces points P, on fait correspondre la courbe $p = (AB \cap A'B') \cup (BC \cap B'C') \cup (CA \cap C'A')$ on obtient une enveloppe formée de courbes toutes tangentes à une parabole appelée *parabole de Kiepert* et dont la directrice est la droite d'Euler.

Les nombres de Bernoulli

par Joseph Mc Lean

- L'auteur s'intéresse principalement à la théorie des nombres.
  Il reprend un article de A.W.F. Edwards paru dans "Mathematical Spectrum Volume 23 $N°4$" intitulé : "Exemples et nombres premiers dans le triangle de Bernoulli".

Pour Edwards, le nombre de Bernoulli ${}^nB_r (0 \leqslant r \leqslant n)$ est défini par :

$$ {}^nB_r = \sum_{i=0}^{r} C_n^i = \sum_{i=0}^{r} \frac{n!}{(n-i)!i!} $$

Edwards démontrait que ${}^nB_r$ est un nombre composé (c'est-à-dire un nombre qui n'est pas premier) pour r impair, $r > 1$, dès que $n+1 > r\,!$.
On en déduit aisément qu'il n'y a pas de nombre de Bernoulli premiers pour $n = 3$ ou 5.

- L'auteur améliore ce résultat en démontrant que ${}^nB_r$ ne peut être premier que si $n+1$ divise $r\,!$
- Il démontre en outre que : "Si n et r sont impairs, alors ${}^nB_r$ est pair".
  Par conséquent, pour r impair fixé, les nombres ${}^nB_r$ premiers s'obtiendront en ne considérant que les n pairs, tels que $n+1$ divise $r\,!$.
  L'auteur établit ainsi le début de la suite de ces nombres premiers.

Quadrilatères inscriptibles

par j.H. Littlewood

L'auteur démontre la propriété suivante :

Si dans un quadrilatère inscriptible $ABCD$, on trace des cercles tangents simultanément à deux des côtés de $ABCD$ et à une de ses diagonales, alors

a) les centres de ces cercles sont les sommets d'un rectangle $PQRS$.

b) les côtés de $ABCD$ sont parallèles à une des tangentes communes à ces cercles.

L'APR était difficile

par Alan Fearnehough

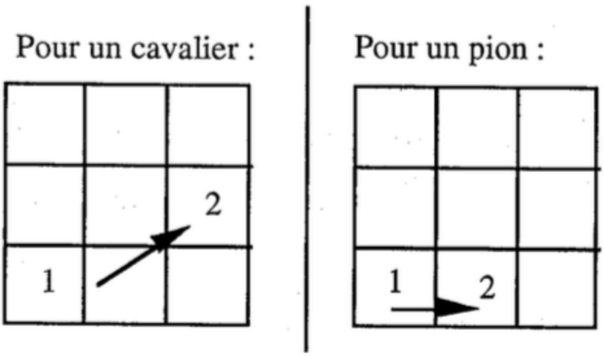
- L'une des questions posées parfois aux étudiants est d'estimer le taux annuel réel de remboursement (appelé APR), à partir d'un pourcentage annuel moyen, pour un emprunt pris sur un certain nombre d'années et remboursé mensuellement.
  L'APR est le taux annuel d'intérêt qui serait affecté à un emprunt si la somme totale était remboursée en une seule fois à la fin de la période d'emprunt.
  En remboursant par acomptes, la dette restante est réduite chaque mois, et c'est pourquoi le taux moyen d'intérêt est inférieur au taux exact, l'APR.
- L'auteur, traite l'exemple suivant : Le prix d'achat d'une voiture neuve est $8000 \pounds$.
  On la paie en versant 30% d'acompte, et le reste en 36 mensualités de $205 \pounds$.
  Somme empruntée $= \frac{70 \times 8000 \pounds}{100} = 5600 \pounds$
  Somme remboursée $= \frac{30 \times 8000 \pounds}{100} + 36 \times 205 \pounds = 9780 \pounds \Rightarrow$ Intérêts payés $= 9780 \pounds - 8000 \pounds = 1780 \pounds$.
  Ceci représente un pourcentage de
  $$\frac{1780 \times 100}{5600} = 31,8\% \quad \text{en} \quad 3 \text{ ans}$$
  et donc un taux d'intérêt moyen de $\frac{31,8\%}{3} = 10,6\%$.
- La théorie fournie aux élèves préconise alors d'évaluer l'APR grâce à une fourchette obtenue en multipliant ce nombre par les coefficients 1,8 et 2.
- L'auteur justifie cette méthode en élaborant une formule permettant de calculer exactement l'APR, puis en montrant que la méthode empirique donnée ci-dessus en fournit une bonne approximation.

Parcours - Figures

par Georges Jelliss

- L'auteur s'inspire du jeu d'échec pour obtenir d'intéressantes propriétés des nombres. Il utilise le trajet imposé par les règles relatives à une des pièces pour obtenir des particularités originales pour certains ensembles de nombres.

- Soit un tableau carré $n \times n$.
  Considérons une pièce du jeu d'échec, qui parcourt entièrement le tableau, en se déplaçant seule suivant ses règles propres. Notons dans chaque case l'entier i désignant les positions successives de cette pièce.
  Exemples :



- Lorsque chaque case du tableau est occupée par un et un seul entier i, on constate que certains trajets ont placé des ensembles significatifs de n nombres dans des configurations géométriques remarquables telles que des lignes droites, des carrés, des rectangles, des étoiles, ...
  C'est ce que l'auteur appelle des parcours-figures, reprenant de la sorte un terme utilisé pour la première fois par T.R. Dawson en 1932.
- Parmi les ensembles significatifs de n nombres, il place, entre autres :
  - des progressions arithmétiques de 1 à n^2, de raison $n+1$
  - les carrés parfaits $1, 4, \ldots, n^2$
- L'auteur donne plusieurs exemples de ces parcours-figures qu'il a réalisés lui-même (et sans l'aide d'ordinateurs) ou en s'inspirant d'auteurs plus anciens.
- Il note que chaque parcours symétrique induit des propriétés numériques correspondant à cette propriété géométrique.

Exemple

Dans un tableau 5×5, considérons le trajet suivant, effectué par un cavalier :

23	18	5	10	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
12	7	2	15	20
1	16	21	8	3

La diagonale donne la progression arithmétique $\{1, 7, 13, 19, 5^2 = 25\}$. Sa raison est $n + 1 = 6$.

Dites-vous *Ar* ou *Arc* ?

par Paul Belcher

Pour la fonction réciproque $\sin^{-1}$, la notation habituelle est arcsin, tandis que pour $\sin h^{-1}$, certains utilisent *arcsinh* et d'autres *arsinh*. L'auteur cherche une justification à ces notations en utilisant une interprétation graphique.

Il montre que la notation *arcsin* est justifiée car si $T = sin^{-1}(x)$, alors T représente effectivement l'*arc* dont le *sin* est x.

Par contre, si $T = sinh^{-1}(x)$, alors T représente une aire, et il est donc préférable d'utiliser la notation *arsinh* (*ar* étant considéré comme abréviation de area = aire).

L'effet de dissipation du temps de vol

par P. Glaister

- L'auteur, inspiré par la contemplation d'un match de cricket (dont il est amateur) traite un problème relatif à la chute des corps.
- Soit un corps lancé verticalement vers le haut, avec une vitesse initiale U.
  Le laps de temps écoulé entre l'instant du lancer et l'instant où l'objet revient à son point de départ est, *si on néglige les frottements de l'air* :

  $$T = \frac{2U}{g} \tag{1}$$

  où g est la constante de la gravitation.
  Dans ce cas (c'est-à-dire sans frottement), la vitesse initiale U est égale à la vitesse finale V.

La formule peut donc s'écrire

$$T = \frac{U + V}{g} \qquad (2)$$

- Mais dans la réalité, il y a toujours un frottement de l'air. Il y a donc une perte d'énergie et la vitesse finale V est inférieure à la vitesse initiale U.
  La formule 1 est donc fausse, mais l'auteur cherche à vérifier si la formule 2 reste vraie (ce qui impliquerait que le temps de vol réel est inférieur au temps théorique trouvé ci-dessus).
- Par intégrations successives, il montre qu'en effet $T = \frac{U+V}{g}$ à condition que la loi de frottement soit linéaire (c'est-à-dire proportionnelle à la masse de l'objet).
  Mais on obtient $T < \frac{U+V}{g}$ lorsque les frottements sont plus forts encore (loi quadratique ...)
- Par conséquent, dans chacun de ces différents cas, le laps de temps durant lequel l'objet reste réellement en l'air est inférieur au temps obtenu dans le cas où l'on suppose les frottements nuls.

La page de l'ordinateur

par Mike Piff

L'algorithme de Bresenham

L'auteur remarque que demander à un ordinateur de tracer une ligne droite peut se faire de plusieurs façons, mais que ces procédés diffèrent, par leur vitesse d'exécution, et par la qualité du résultat.

Il donne l'algorithme de Bresenham.

Lettres à l'éditeur. Problèmes et solutions

Dans ces deux rubriques, la revue présente différents problèmes à résoudre, et donne les solutions des problèmes parus dans le volume 24, $n°3$.

P. De Rijck, épouse Dalle Piane