Mathématique et Pédagogie

Sommaire

Nº 101 **Mars – Avril 1995**

Editorial

G. Noël,

Le *Conseil de l'Éducation et de la Formation* a fait appel aux dieux de l'antiquité grecque pour conjurer le mouvement étudiant en organisant des *Assises de l'Enseignement* à partir d'*Agora*. Encore que Minerve et Vulcain étaient plutôt des dieux romains, que Hercule n'était qu'un demi-dieu et que Homère n'en était pas un du tout. Un peu hochepot tout celà ! À l'image de l'enseignement actuel sans doute.

Que sortira-t-il des agoras ? Bien malin qui pourra le dire. La probabilité n'est pas nulle pour que la montagne accouche d'une souris. Les meilleures idées ne seront-elles pas vouées à l'oubli pour cause de financement insuffisant ? Ne serait-il pas temps de lever enfin et définitivement cette hypothèque ? Ne serait-il pas temps que les responsables, de tous niveaux, reconnaissent que les mesures à prendre pour *promouvoir le développement de la personne de chaque élève, amener les jeunes à construire leur savoir, les conduire à prendre une place active dans la vie économique, les amener à être des citoyens responsables dans une société libre* (Objectifs du système d'enseignement et de formation définis par le C.E.F. en 1992), ces mesures, loin de permettre des économies, ne pourront que coûter cher ?

Nous sommes sans illusions, mais nous n'attendront pas sans rien faire. La SBPMef est une des composantes du mouvement éducatif. Il est normal et légitime qu'elle fasse entendre son point de vue. Celui-ci a été défini dans son document consacré à la philosophie de l'enseignement des mathématiques, (discuté en assemblée générale en mars 1994, puis approuvé par le Conseil d'Administration, après modifications, en janvier 1995). Ce document, augmenté de quelques considérations générales, a été communiqué à « Hermès ».

Nous aurons l'occasion de revenir sur tout cela. mais au fond, s'il y a des problèmes dans l'enseignement, ne croyez-vous pas que c'est d'abord parce qu'il y en a dans la Société civile ? À quand des *Assises de la Société ?*

L'eulérien du foot

G. Papy, *Bruxelles*

Depuis les temps les plus reculés, la mathématique s'est constitué un musée imaginaire de joyaux remarquables par leur harmonieuse régularité et que les Anciens jugèrent dignes de symboliser la terre, l'air, le feu, l'eau, l'univers ou la quintessence. Pythagore célébrait déjà le tétraèdre, le cube et l'octaèdre. Platon accueillit en plus le dodécaèdre et l'icosaèdre. La famille s'élargit encore sous Archimède en assouplissant les exigences de la régularité.

Parmi ces *corps archimédiens*, figure le polyèdre que dessinent les triangles noirs et les pentagones blancs qui ornent un grand nombre des ballons utilisés dans les actuelles compétitions de foot, que pour faire court, nous nommerons ici l'*eulérien du foot*, ce qui apparaîtra par la suite plus ou moins justifié. Nous l'étudierons comme un exemple de cette géométrie de situation que "*Leibniz mentionna le premier*" – dixit Euler 1735 – en 1679. Conformément au voeu de Leibniz, notre *analyse* ne présuppose pas la connaissance des *Eléments* d'Euclide, mais *"pousse l'analyse jusqu'au bout"*. Lieu de nos ébats, la feuille de dessin, sera notre aire de communication, accueillante aux *idéogrammes.*

L'*axiome de régularité*, typiquement local, qui régit l'objet de notre étude, se formule de manière lapidaire

AXIOME DE REGULARITE
En chaque sommet :
2 triangles noirs et 2 pentagones blancs.

ce que synthétisent et précisent indépendamment

ce *cartouche* numérique et cet *idéogramme* situationnel pur,

(3, 5, 3, 5)

libres de toute contrainte de grandeur ou d'angle.

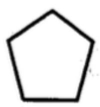
PROBLEME

Localement, en chacun de ses sommets,
le foot eulérien présente 2 faces noires et 2 blanches.

Le ballon entier respecte-t-il globalement cette proportion ?

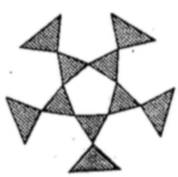
L'*idéogramme de régularité* impose des couleurs différentes aux faces adjacentes – une noire et une blanche – et met en relief des *bitriangles* noirs

La bande ci-après dessinée montre comment, à la lumière de l'idéogramme de régularité locale, un germe pentagone blanc



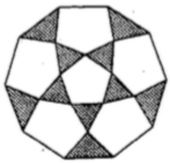
génère de proche en proche un idéogramme global du ballon de foot eulérien.

1.



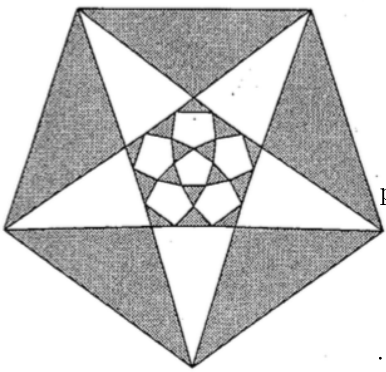
... car,
par l'axiome local de régularité,
chaque côté du pentagone
originel est commun à un
bitriangle noir.

2.



... car,
par l'axiome local de régularité,
les faces blanches sont
pentagones.

3.



... car,
par l'axiome local de régularité,
chacun des cinq pentagones
blancs, que l'idéogramme 2.
vient d'installer, appelle un
nouveau bitriangle noir.

... et, toujours
par l'axiome local de régularité,
ces bitriangles noirs se
rejoignent pour sertir cinq
pentagones blancs.

... enfin, l'idéogramme 3. adopte
l'astuce introduite par Schlegel
en 1881, par laquelle l'extérieur
du dessin figure un ultime
pentagone blanc.

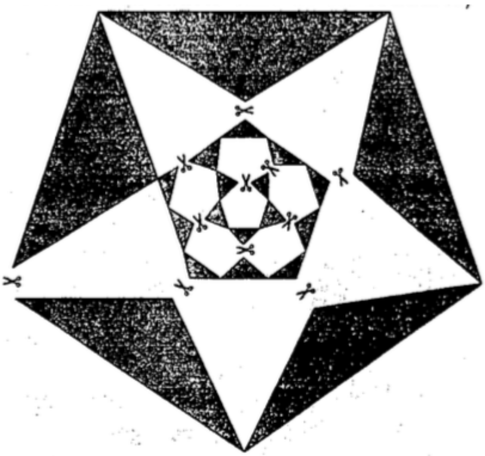
SOLUTION DU PROBLEME ENCADRE (page 5)

Comme l'eulérien du foot comporte 20 triangles noirs
pour 12 pentagones blancs,
*la proportion locale de 2 triangles noirs pour 2 pentagones blancs
ne passe pas au global.*

La mathématique est un ballet de structurations et de restructurations incessantes.

Le dessin de la page précédente peut se voir comme 20 triangles noirs soudés entre eux par leurs sommets, *chacun des* 60 *sommets étant soudé à un et un seul sommet d'un autre triangle*. En résulte aussitôt que l'eulérien du foot comporte exactement 30 sommets, chacun d'eux correspondant à une et une seule de ces soudures élémentaires.

Onze coups de ciseaux font sauter onze de ces soudures,



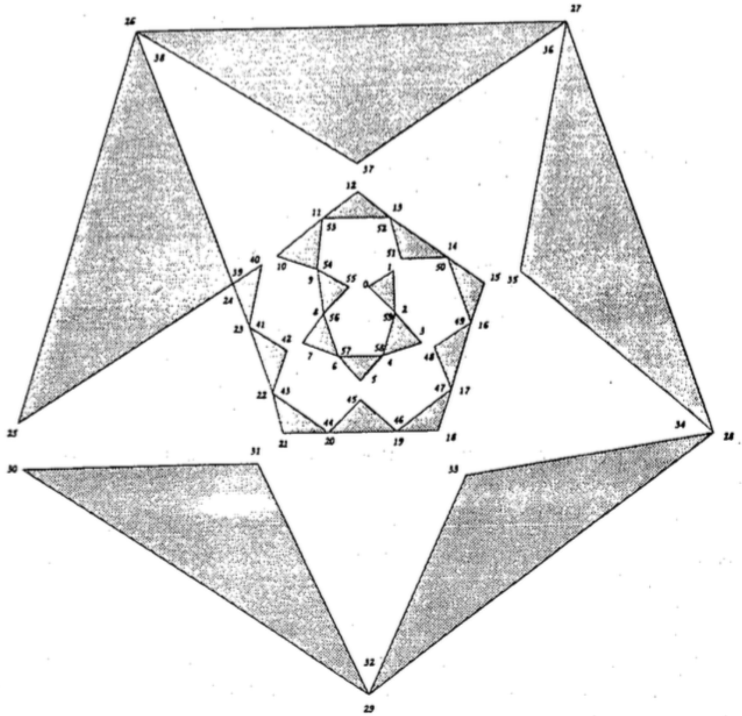
et dégagent une spirale de 20 triangles noirs en queue leu leu !

En l'idéogramme de l'eulérien du foot de la page 6 et des suivantes, les cinq pointes blanches de l'étoile centrale, sont des *pentagones*, adjacents chacun à cinq triangles noirs.

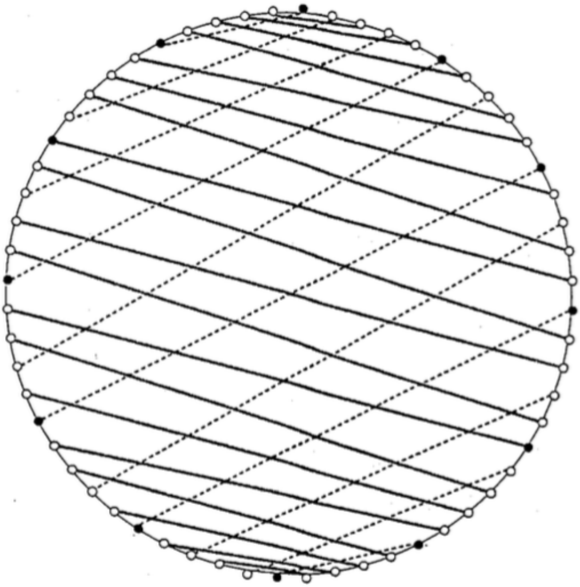
L'*eulérien du foot* est un *complexe* constitué de 30 sommets, 60 arêtes et 32 faces. Ses sommets et arêtes forment son *graphe* qui dessine le contour de la spirale noire formée de 20 triangles noirs dégagée ci-dessus.

Ce contour offre un circuit, dit *eulérien*, qui permet de parcourir le graphe de l'*eulérien du foot*, en passant une et une seule fois par chacune de ses arêtes.

Cette figure le balise en numérotant les sommets successivement desservis.



Inverserment, (le graphe de) l'eulérien du foot peut s'obtenir par des soudures adéquates, à partir d'un cercle sexagésimalement gradué, comme le cadran de ces chronographes analogiques qui partagent la minute en soixante secondes.



Les lignes grises indiquent les dix-neuf soudures qui produisent la spirale des vingt triangles noirs en queue leu leu.

Les lignes en trait interrompu indiquent les onze soudures – antagonistes des onze coups de ciseaux antérieurs – qui achèvent la construction de l'eulérien du foot.

Le dessin de la page précédente, figure les sommets du 60-gone de départ en noir et blanc, afin de rappeler le stéréotype du chronographe diviseur de la minute en secondes, qui facilite la lecture en évitant la disgrâce des surcharges numériques.

Ce dessin appelle une présentation en médaille : lignes grises sur l'une des faces, celles en trait interrompu sur l'autre.

L'une des faces présente ainsi les soudures élémentaires créatives des faces triangulaires ; et l'autre celles créant les pentagones.

Il est encore loisible de regarder les lignes grises et celles en trait interrompu comme les *sommets* du complexe foot eulérien.

En cette vision les soixantes arêtes sont les soixante arcs de seconde de temps (ou arcs de 6°) les sommets sont les $11+19=30$ segments rectilignes (grisés ou en trait interrompu) et les faces sont figurées par les segments de disque situés entre ces segments rectilignes sur les deux faces de la médaille.

Cette présentation – ségrégationniste – parmi les sommets du ballon de foot à triangles noirs et pentagones blancs distingue ceux produisant la queue leu leu de triangles noirs et ceux créant la queue leu leu de pentagones blancs ;

... alors qu'*ab ovo*, tous les sommets de ce ballon de foot sont intrinsèquement équivalents.

La discrimination provient du choix du *circuit* eulérien qui conduisit à la présentation en médaille à deux faces.

Il n'en reste pas moins réjouissant que la mise en face de médaille d'une queue leu leu des faces triangulaires fournisse, en cadeau au revers, une queue leu leu des faces pentagonales.

Si les 32 faces noires de l'*eulérien du foot* décorent généralement des ballons dont le relief présente 12 faces pentagonales et 20 hexagonales, elles se prêtent volontiers à orner le fer blanc du ballon de foot du pauvre.

Les ballons de foot originels sont physiquement métriques. En les pages précédentes, la géométrie de situation les a privés de leur habit métrique. Enfilant l'eulérien du foot, la boîte à conserve effectue une remétrisation surréaliste enrichissante.

Arlequin, empereur de la Lune,
qu'on voulait dépouiller sur le théâtre
mais on ne put jamais en venir à bout
car il avait je ne sais combien d'habits les uns sur les autres

Gottfried Leibniz.

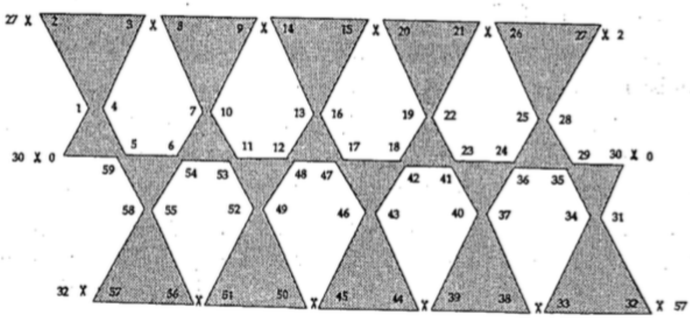
Maîtrise par remétrise !

En l'entreprise ci-dessous, les deux bases de la boîte seront pentagonales blanches et, sur cette *portée*,

s'écrit sa bande de roulement, eulérienne du foot à répétition,

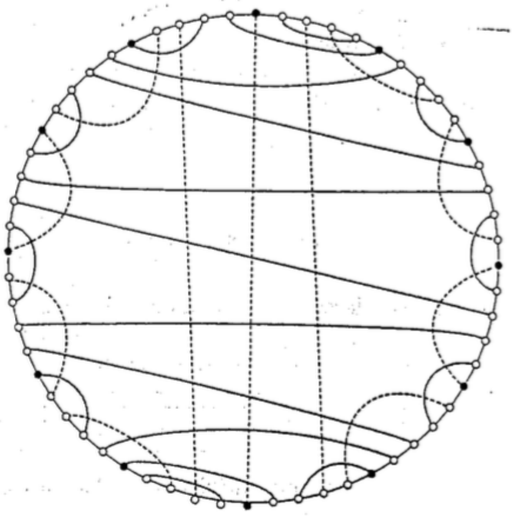
La période noire figure tout l'*eulérien du foot*, et suffit au tour de boîte.

Le revoici, agrandi après onze coups de ciseaux, et doté d'un circuit eulérien balisé



(par effet de manchon, le dessin répète trois des coups de ciseaux.)

... bientôt remonté en médaille.



En la face des pentagones délimités (par traits interrompus) : au centre, verticaux, les deux pentagones extrémistes en la figure de la page 12, ensuite de part et d'autres les deux bases, enfin, en couronne les huit pentagones centraux en la figure de la page 12.

Adresse de l'auteur :

Georges Papy
Boulevard Mettewie 69/95
1080 Bruxelles

Principes et habiletés du comptage chez les jeunes enfants

P. Sartiaux (École normale de Braine-le-Comte) et O. Frydman (Université de Mons-Hainaut),

Avant-propos

Il n'est pas courant de lire dans "Mathématique et Pédagogie" des articles relevant en partie de la psychologie (Piaget aurait probablement utilisé ici le terme d'épistémologie génétique). C'est pourtant de cela qu'il sera question dans ces quelques lignes. Cet article donne le point de vue des auteurs sur l'acquisition des nombres par les tout jeunes enfants (entre 3 et 6 ans). Pour tout mathématicien (-ne) père (mère) de famille, cette question est intéressante et mérite réflexion. De même que pour tout enseignant d'école normale, principalement préscolaire. Il est également intéressant de voir comment une autre discipline que les mathématiques aborde les premiers apprentissages relatifs aux nombres. Ce sujet, fort étudié en psychologie de l'apprentissage, est l'objet de certaines controverses comme nous le détaillerons dans la suite. Les études relatives à notre sujet ont pour la plupart été menées par des psychologues, aussi certaines prises de position peuvent paraître étonnantes à des mathématiciens. Cet article a donc bien pour objet de faire connaître à ces derniers le travail de leurs collègues psychologues dans l'espoir de faciliter une certaine compréhension mutuelle.

Il ne saurait être question dans ces quelques lignes de faire le tour du problème relatif au rôle du comptage chez l'enfant. Nous nous contenterons d'expliquer un point de vue fort répandu (et pourtant considéré comme peu satisfaisant par certains mathématiciens) et d'en réaliser la critique. Une synthèse récente de la question peut se trouver dans le livre "Les chemins du nombre" [1], le détail des expériences réalisées par les auteurs ainsi qu'une bibliographie détaillée se trouvera dans [2].

Cadre théorique de la recherche, précisions conceptuelles et terminologiques

Nous avons dégagé trois compétences différentes qui nous paraissent fondamentales dans le développement du comptage chez l'enfant :

1. le savoir compter ;
2. le savoir comment compter ;
3. le savoir pourquoi compter comme on le fait.

La distinction entre le point 1 et le point 2 se justifie par le fait que les enfants pourraient connaître les règles du comptage (savoir comment compter) sans pour autant pouvoir les appliquer correctement lorsqu'ils comptent, ou vice versa.

D'autre part, le comptage est orienté vers un but : la détermination de la valeur cardinale d'un ensemble. Et c'est ce but qui contraint le comptage à certaines règles. La distinction entre le point 2 et le point 3 se justifie donc par le fait que les enfants pourraient connaître les règles du comptage sans en comprendre la signification cardinale. On constate, par exemple, que des enfants à qui on demande de dire combien d'objets se trouvent sur une table, se mettent à compter mais ne répondent pas à la question "combien" autrement que par ce comptage, même si on insiste en reposant la même question, ils répondent à nouveau par un comptage.

Le découpage de l'apprentissage selon les trois compétences précitées nous paraît plus claire et engendrer moins d'ambiguïté que les concepts de compétences conceptuelles, procédurales, voire même d'utilisation parfois introduits par certains auteurs afin de pouvoir expliquer leur modèle. De plus en posant le problème de l'acquisition numérique chez l'enfant en terme de savoir compter, de savoir comment compter et de savoir pourquoi compter comme on le fait permet d'envisager clairement l'étude des liens chronologiques entre ces différents savoirs.

Voyons à présent la terminologie couramment utilisée pour parler de ces notions.

Par *chaîne numérique*, il faut entendre l'énonciation par l'enfant de la litanie des nombres : un, deux, trois, quatre, ...

La *correspondance terme-à-terme* est un processus d'appariements d'éléments de deux collections distinctes en vue d'évaluer l'équivalence ou la non-équivalence cardinale de ces collections. La correspondance terme-à-terme est donc un codage relatif de l'information numérique concernant une collection d'objets (information obtenue éventuellement à partir d'une autre collection).

Le *comptage* est un codage absolu de l'information numérique. Il vise à déterminer la valeur cardinale d'une collection, laquelle correspond toujours au dernier mot-nombre cité. La *valeur cardinale* est alors le résultat d'un comptage significatif.

Par exemple, si un jeune enfant doit mettre des couteaux à côté d'assiettes qu'il ne voit pas, il peut énoncer chacun des mangeurs et prendre : "un couteau pour maman, un pour papa, un pour moi, un pour ma petite soeur Claire, un pour mon grand frère Alfred". Son codage est relatif dans le sens où il est constitué de la chaîne : "maman, papa, moi, Claire, Alfred", alors qu'il aurait pu tout aussi bien être : "maman, papa, moi, Alfred, Claire". Dans le cas où l'enfant résoud correctement le problème (en ayant conscience de l'équivalence des quantités) sans pour autant connaître le nombre exact de couteaux qu'il a pris, on dira qu'il a utilisé une correspondance terme-à-terme. Les derniers mots-nombres cités ne correspondent pas, ils sont une fois "Alfred" et une fois "Claire". Si l'enfant avait utilisé un comptage, il aurait compté "un, deux, trois, quatre, cinq" devant les assiettes puis pris cinq couteaux.

Nous distinguons la bijection de la correspondance terme-à-terme car la bijection est plus centrée sur l'appariement, les liens entre objets des deux collections, sans conscience d'une information numérique (même s'il y a conscience d'une comparaison). La correspondance terme-à-terme est, elle, orientée vers une information numérique, par exemple, "prendre le bon nombre de couteaux".

Par *pointage*, il faut entendre la désignation par les enfants d'objets lors d'un comptage (le pointage peut être visuel). L'observation du pointage est une manière pratique d'appréhender les procédures utilisées par les enfants lors d'un comptage.

Ce qui a été fait jusqu'à présent

Piaget [3] ne s'est jamais beaucoup préoccupé du comptage. Il ne voyait dans celui-ci qu'une activité somme toute assez répétitive et automatique sans véritable acquisition conceptuelle. Le comptage selon Piaget est donc une activité sans grande signification. Le nombre, quant à lui, est indépendant du comptage.

On sait, depuis, que Piaget a sous-estimé les implications du comptage et que celui-ci peut s'avérer plus complexe qu'il n'y paraît. Ces constatations proviennent pour l'essentiel des travaux de Rochel Gelman [4] qui a mis en évidence le rôle du comptage dans l'acquisition du nombre. C'est un des premiers auteurs à s'être intéressée de près au comptage chez l'enfant.

Pour Gelman, et contrairement à Piaget, le comptage joue un rôle essentiel dans l'acquisition du nombre. Elle remarque en effet lors d'expérimentations que les enfants utilisent une chaîne numérique relativement cohérente même si elle n'est pas correcte (en faisant compter deux fois un enfant, on peut détecter des éléments de chaîne stables et corrects puis stables et incorrects et enfin instables). Le fait d'avoir une chaîne non conventionnelle n'empêche pas l'enfant d'appliquer certains principes. C'est ainsi qu'elle remarque que les enfants insistent plus sur le dernier mot-nombre récité, comme s'il avait une signification cardinale. Le comptage s'appuierait donc selon Gelman sur 5 principes innés qui précèdent et guident son acquisition. Ces cinq principes sont :

1. **The one-to-one principle (correspondance unique nom/objet).**
   Chaque élément doit avoir une seule et unique désignation.

2. **The stable order principle (ordre stable).**
   Les éléments de la chaîne numérique doivent être énumérés dans un ordre stable.

3. **The cardinal principle (principe de cardinalité).**
   Dans tout comptage, la dernière désignation correspond au cardinal de l'ensemble.

4. **The abstraction principle (le principe d'abstraction).**
   Toutes sortes d'objets peuvent être rassemblés et comptés ensemble, qu'ils soient ou non identiques, réels ou non, ...

5. **The order irrelevance principle (la non-pertinence de l'ordre).**
   L'ordre dans lequel les éléments d'une série sont désignés est sans importance.

Les trois premiers principes décrits régissent le "comment" compter. Nous ne nous intéresserons qu'à eux. Des expériences rappelées ci-après, Gelman infère que ces principes sont innés, qu'ils sous-tendent et précèdent une connaissance du nombre et que cela guide l'enfant dans son comptage.

1. **“Les bébés et le calcul”** [4]
   On montre à des nourrissons des images représentant 2 ou 3 objets en leur faisant entendre des coups de tambour (2 ou 3). On constate que les bébés ont leur regard attiré significativement plus longtemps par l'image contenant le même nombre d'objets que de coups de tambour entendus. Pour Gelman, il y a donc une connaissance implicite de la cardinalité.

2. **“La détection d'erreur dans le comptage et dans la cardinalité.”**
   Pour montrer que les enfants possèdent des connaissances sans nécessairement savoir les appliquer, on demande à des enfants d'évaluer le comptage éffectué par une marionnette qui compte parfois correctement et parfois incorrectement (les enfants sont prévenus que la marionnette est susceptible de se tromper). Gelman observe que les enfants ont plus de facilité à détecter les erreurs qu'à compter eux-mêmes.

Critiques du modèle de Gelman [5, 6, 7]

Concernant “les bébés et le calcul”, les bébés pourraient établir l'équivalence des deux ensembles par un procédé s'apparentant à la correspondance terme à terme sans avoir établi la valeur cardinale de l'ensemble.

Concernant la deuxième série d'expériences, on n'a pas évalué les habiletés de comptage des enfants testés dans les expériences de détection d'erreurs. Il est dès lors impossible de savoir si l'une des habiletés précède l'autre.

Mais, même si les enfants détectent les erreurs commises dans le comptage fait par une marionnette en répondant à la question ”combien”, cela ne veut pas dire qu'ils ont acquis une *compétence conceptuelle* du comptage. Les enfants pourraient très bien détecter la violation d'une règle sans comprendre la portée, la réelle signification de cette violation. Or, la compétence conceptuelle suppose que l'enfant puisse non seulement détecter une erreur, mais qu'il en comprenne également la signification.

Enfin on peut se demander si Gelman ne surestime pas la connaissance de la cardinalité en l'attribuant aux enfants uniquement sur base de la réponse à la question ”combien”. En effet, la connaissance des différents aspects de la cardinalité repose aussi sur la compréhension du fait que *tous* les ensembles possédant le même nombre d'éléments ont même cardinal. Ce point sera développé ci-dessous.

Les questions que nous nous posons

Suite à ces positions relatives au comptage, nous nous sommes posé trois questions, nos expériences personnelles ne nous semblant pas en accord avec certaines interprétations de Gelman.

1. La connaissance des principes (via la détection d'erreurs) précède-t-elle les habiletés du comptage ?
2. Faut-il différencier les compétences procédurales des compétences conceptuelles et dans quel ordre ces compétences apparaissent-elles ?
3. Peut-on dire que la compréhension des relations entre comptage et cardinalité est immédiate ou relève-t-elle d'un stade ultérieur au comptage ? Dans ce cas, la réponse à la question "combien" est-elle un bon révélateur de la cardinalité ?

Partie expérimentale

Conditions

Nous avons testé 47 enfants issus de 3 écoles maternelles (ville et village) répartis comme suit (3 ;11 par exemple, signifie un enfant âgé de 3 ans et 11 mois) :

Année - intervalle	Nombre d'enfants	Moyenne	Écart-type (en mois)
3 ans (de 3 ;3 à 3 ;11)	6	3 ;7	4
4 ans (de 4 ;0 à 4 ;11)	24	4 ;5	3,5
5 ans (de 5 ;1 à 5 ;10)	11	5 ;6	3
6 ans (de 6 ;1 à 6 ;4)	6	6 ;2	1

Tableau 1 : détail de la répartition des enfants dans l'échantillon testé

Tous ces enfants possédaient une chaîne numérique stable de 5 nombres (huit d'entre eux avaient cependant une chaîne incorrecte).

Les tâches auxquelles nous soumettions les enfants relevaient de trois domaines : la connaissance de la chaîne numérique, la correspondance nombre/objet, les relations entre comptage et cardinalité. Pour chacun de ces domaines, la connaissance des procédures appliquées par les enfants nous intéressait, ainsi que leurs connaissances relatives au “pourquoi agir comme cela” (révélées par la détection de l’implication cardinale du comptage via la détection d’erreurs). Voici un tableau résumant les tâches.

	La chaîne numérique	Correspondance nombre/objet	Relations comptage/cardinalité
Action de l’enfant	-énumération de la chaîne avec comparaison entre deux énumérations	-pointage de 4 et 6 pions	-question ”combien” (dénombrement) -implication de la correspondance sur la cardinalité (1) -reconnaissance d’ensembles contenant la même quantité (2) -cardinalité “spontanée” (3)
Détection d’erreurs	-une marionnette énumère la chaîne (l’enfant émet un jugement sur la validité de la réponse)	-une marionnette compte en pointant (l’enfant émet un jugement sur la validité de la réponse)	-une marionnette répond à la question ”combien” (l’enfant émet un jugement sur la validité de la réponse)

Tableau 2 : les types d’épreuves

À titre indicatif, voici quelques renseignements relatifs aux modalités des tests (pour plus de détails, se rapporter à [2]).

1. On met des couverts sur une table pour des invités en montrant que l’on place un couteau à côté d’une fourchette et d’une cuillère (dans notre dispositif expérimental, une cuillère manquait, comme l’illutre le dessin ci-dessous).

   On demande aux enfants s’il y a le même nombre de chaque couvert et on ne poursuit que s’ils répondent correctement (“il y a la même chose, mais il manque une cuillère”, par exemple). On demande ensuite aux enfants de compter et de dire “combien” de couteaux il y a. On cache alors la rangée de fourchettes et on leur demande s’il peuvent dire combien de fourchettes se trouvent cachées. Pour s'assurer qu'ils ne répondent pas par automatisme, on cache les cuillères et on leur repose cette question. Cette épreuve est réalisée avec un ensemble de 4 couverts puis de 6 (respectivement 3 et 5 cuillères).

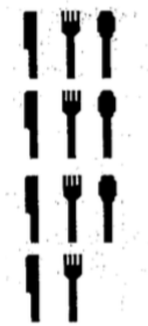


Figure 1 : disposition des couverts dans l'épreuve de correspondance

2. Quatre assiettes contenant de 2 à 4 smarties (pastilles de chocolat) sont présentées aux enfants et on leur demande de montrer les assiettes où il y a “la même chose”, “le même nombre”. Tous les smarties ont la même couleur.
3. On demande aux enfants de donner 4 smarties à la marionnette (sans lui donner de consignes sur la façon de procéder).

Résultats

Rappelons notre première question : la connaissance des principes, via la détection d'erreurs, précède-t-elle les habiletés du comptage ? (comme le prétend Gelman). Nous avons donc comparé les performances des enfants dans leur action et dans leur capacité à détecter des erreurs. Pour cette première question, on obtient les résultats suivants (à titre d'exemple pour le pointage et le dénombrement) :

		pointage de 4 pions	
		oui	non
détection d'erreurs de pointage	oui	24	2
	non	16	5

Tableau 3 : relation entre échec et réussite à l'épreuve de pointage de 4 pions et à l'épreuve de détection d'erreurs de pointage

		dénombrement de 4 pions	
		oui	non
détection d'erreurs de cardinalité	oui	18	2
	non	15	12

Tableau 4 : relation entre échec et réussite à l'épreuve de dénombrement de 4 pions et à l'épreuve de détection d'erreurs de cardinalité

On constate dans le tableau 3 que 40 enfants ne font aucune erreur dans le pointage alors que seulement 26 ne font pas d'erreur lorsqu'ils doivent détecter les erreurs de pointage d'une marionnette. Parmi ces derniers, seuls 2 enfants commettent des erreurs de pointage lorsqu'ils comptent alors que 16 des 40 enfants qui ne font pas d'erreur de pointage se trompent au moins une fois lorsqu'ils doivent évaluer le comptage de la marionnette.

Une statistique (test du signe) nous permet de dire que la différence entre les deux types d'épreuves est significative au seuil de 0.05. Le tableau 4 conduit aux mêmes observations. On remarque effectivement que ces données ne vont pas du tout dans le sens des hypothèses de Gelman mais au contraire que les habiletés se développent bien avant la connaissance (la compréhension) des principes alors que pour Gelman, les habiletés du comptage sont guidées par une connaissance innée des principes du comptage. Les résultats obtenus à propos de la chaîne (non présentés ici) vont dans le même sens : les enfants savent faire avant de savoir comment faire. C'est ainsi qu'ils peuvent par exemple énumérer correctement la chaîne sans détecter les erreurs commises par une marionnette dans l'énumération de la chaîne (exemple d'erreur : "1, 2, 3, 4, 3").

Notre deuxième question était la suivante : faut-il différencier les compétences procédurales (comment compter) des compétences conceptuelles (pourquoi compter comme on compte) et dans quel ordre ces compétences apparaissent-elles ? Nous avons donc comparé les performances des enfants lorsqu'ils devaient détecter des erreurs qu'une marionnette faisait en comptant et lorsqu'une marionnette commettait une erreur en répondant à la question “combien” après avoir réalisé un comptage. Dans un cas, la détection portait sur une erreur de procédure que les enfants avaient à détecter alors que dans l'autre cas, ils avaient à saisir la signification cardinale d'une erreur dans le comptage.

détection d'erreurs ...		de pointage	
		oui	non
à la question ”combien”	oui	16	4
	non	10	17

Tableau 5 : relation entre échec et réussite aux épreuves de détection d'erreurs lors de la question ”combien” et lors du pointage

La différence entre la détection d'erreurs dans le comptage et la détection d'erreurs à la question “combien” tend vers la signification (test du signe à 0.10). On ne tirera donc pas de conclusions définitives mais ces résultats semblent quand même indiquer que ces épreuves mettent en jeu des compétences différentes. En rapprochant ces résultats de ceux repris dans le tableau 3, on peut dire que les enfants réalisent plus tôt le pointage que l'implication cardinale de celui-ci. Il semble donc que la compréhension de la signification cardinale des erreurs de comptage se développe bien après la connaissance active du comptage (la connaissance d'un principe cardinal ne serait donc pas à la base du comptage). Ceci répond déjà partiellement à notre troisième question.

Rappelons cette troisième question : la compréhension des relations entre comptage et cardinalité est-elle immédiate ou relève-t-elle d'un stade ultérieur au comptage ? Dans ce cas, la réponse à la question ”combien” est-elle un bon révélateur de la cardinalité ? (Rappelons que comprendre la cardinalité ce n'est pas seulement répondre à la question ”combien” mais comprendre que des ensembles qui ont le même nombre d'éléments ont le même cardinal.)

On peut d'emblée répondre en utilisant les résultats des expériences faisant intervenir l'implication cardinale de la correspondance (expériences des couverts). En effet, parmi les 37 enfants sachant dire combien de couteaux se trouvent devant eux, 16 d'entre eux ne parviennent pas à déduire la valeur cardinale des fourchettes en correspondance. Et 12 enfants seulement comprennent que les cuillères sont moins nombreuses. Les autres épreuves mettent aussi en évidence une différenciation des connaissances relatives à la cardinalité.

Épreuves ...		Donner 4 smarties	
		oui	non
Identification de collections ayant même cardinal (smarties 2-2-3-4)	oui	16	4
	non	10	17

Tableau 6 : relation entre échec et réussite aux épreuves de "cardinalité spontanée" (donner 4 smarties) et de reconnaissance de collections possédant le même nombre d'éléments

Onze enfants parvenaient à donner 4 smarties à la marionnette alors qu'ils ne distinguaient pas que deux assiettes parmi 4 avaient le même nombre de smarties (2) contre 2 enfants qui ne parvenaient pas à former correctement un ensemble de 4 smarties alors qu'ils reconnaissaient que deux assiettes avaient le même nombre de smarties. La différence est significative au seuil de .05 entre les deux catégories d'enfants. La reconnaissance de la cardinalité comme propriété commune à différentes collections spatiales semble se développer plus tardivement que la capacité de donner une quantité déterminée d'objets. L'explication que nous proposons à ces résultats est la suivante : les enfants utilisent plus facilement le comptage de façon spontanée pour donner des smarties à la marionnette que pour reconnaître parmi 4 assiettes les 2 ayant le même nombre d'éléments. Même lorsqu'ils effectuent un comptage, ils n'en déduisent pas toujours correctement les assiettes contenant le même nombre de smarties. En effet, nous avons observé des enfants qui se mettaient à compter les smarties dans les assiettes (qui le faisaient correctement) et qui, lorsqu'il fallait montrer les assiettes contenant la même quantité disaient qu'il n'y en avait pas deux contenant le même nombre. Ces résultats ne font que confirmer que l'aspect cardinal est loin d'être intégré d'emblée au comptage et qu'il ne peut se réduire à la question "combien".
Une étude des corrélations entre les résultats à ces épreuves relevant des différents aspects de la cardinalité montre une possibilité d'interdépendance entre certaines d'entre elles (à titre d'exemple, le dénombrement de 4 objets semblent aller de pair avec l'implication cardinale de la correspondance entre deux collections). Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à notre travail [2].

Ces épreuves relevant de la cardinalité ne sont pas réussies simultanément et donc la seule réponse à la question ”combien” ne suffit pas à attribuer à l'enfant une connaissance cardinale du nombre (ni du comptage) comme c'est souvent le cas dans les études relatives à ce sujet.

Conclusions

Les résultats ont montré que les enfants font plus d'erreurs dans la détection d'erreurs de comptage que dans leur propre comptage. Ces résultats n'appuient donc pas du tout l'idée que le comptage est guidé par une connaissance des règles. Il semblerait plutôt qu'il soit d'abord appris par imitation et que les enfants déduisent petit à petit de leur pratique les principes sous-jacents.

En ce qui concerne la vérification de notre seconde hypothèse, la distinction entre deux niveaux conceptuels via deux types de détection d'erreurs : la compréhension des règles (compétence procédurale) et la compréhension de leur signification cardinale (compétence conceptuelle), il faut constater aussi que deux niveaux semblent exister. Notons que cette comparaison est originale à notre travail.

Les résultats montrent aussi que, contrairement à ce que Gelman affirme, la capacité de répondre à la question ”combien” ne sous-estime pas du tout la compréhension de la relation entre la cardinalité et le comptage mais qu'au contraire elle la surestime. Nous voulons dire par là que créditer un enfant de la connaissance du principe cardinal sur base de sa réussite à la question ”combien” est une erreur en ce sens que la réussite à cette épreuve n'entraîne aucunement une réussite à d'autres épreuves de cardinalité. En particulier, les enfants capables de répondre correctement à la question “combien” ne sont pas toujours capables d'inférer l'équivalence des valeurs cardinales de deux ensembles mis en correspondance. La réponse à la question ”combien” n'est donc pas un bon indicateur, et certainement pas un indicateur unique, de la connaissance de principes cardinaux.
Nous pourrions synthétiser nos résultats par la chronologie suivante :

1. **les enfants apprennent d'abord à compter** ;
2. **ensuite, ils parviennent à détecter des erreurs commises par une marionnette** ;
3. **dans un troisième temps, ils parviennent à établir des relations entre comptage et cardinalité**.

Nous n'avons pas trouvé de traces indiquant que les principes du comptage précédaient ou guidaient le comptage des enfants. Nous n'avons pas non plus trouvé d'indices permettant d'affirmer un lien entre le comptage et la signification cardinale du comptage chez les jeunes enfants.

Au contraire, nous avons plutôt trouvé que le comptage se développe comme une routine et que les différents aspects du comptage et de la cardinalité se développaient séparément et parfois de façon indépendante. Ces acquisitions se font progressivement et ne sont pas immédiatement présentes lorsque l'enfant commence à compter. Affirmer cela nous entraîne tout naturellement vers les implications pédagogiques de ces résultats.

En effet, si le comptage se base sur des principes innés, l'aspect pédagogique est dénué d'intérêt. Si les enfants possèdent les principes, ils parviendront bien tôt ou tard à les appliquer. Par contre, dès que l'on adopte une position non "Gelmanienne", on est amené à se préoccuper du type d'apprentissage qui serait approprié à l'acquisition du comptage. Une réflexion sur les outils devient nécessaire. À partir du moment où la compréhension des principes du comptage n'est pas innée et qu'elle ne s'acquiert pas spontanément, un enseignement approprié doit être envisagé. Il ne suffit pas d'apprendre à compter pour actualiser les principes (du moins les principes relevant de la cardinalité), au contraire il faut mettre en place un processus s'approchant de la métacognition pour permettre aux enfants d'acquérir la compréhension des différents aspects de la relation entre comptage et cardinalité.

Si l'on veut que les enfants acquièrent les principes du comptage, il est essentiel de les amener à réfléchir à la signification cardinale des différents aspects de la procédure du comptage ainsi qu'aux erreurs commises. On pourrait ainsi songer à des activités où l'enfant est amené à manipuler pour découvrir les principes et leurs implications. En chargeant le comptage de l'enfant de sens réels différents, on lui donne les outils lui permettant de développer de nouvelles aptitudes qui seront elles-mêmes à la base de connaissances nouvelles.

Au lieu de se contenter de lui faire répondre à la question "combien", il faudrait songer à développer les autres aspects de la cardinalité (reconnaissance d'ensembles ayant même cardinal, perception globale d'une petite quantité, ...).

Au lieu de le faire compter, on pourrait également lui apprendre à corriger les erreurs d'autres enfants ou d'une marionnette, les niveaux de compétences étant bien différents (suite aux résultats de notre travail). Car il est faux de se dire que si l'enfant sait bien compter, il parviendra à corriger les erreurs. Si cela s'apprend de toute façon "à la longue", le fait de savoir que ces niveaux de compétences sont différents permet aux enseignants d'être plus efficaces et de développer plus facilement et peut-être plus précocement certaines aptitudes au comptage.

Bibliographie

[1] BIDEAUD J., MELJAC Cl. et FISHER J.P. (Eds.), *Les chemins du nombre*, PUL, Lille, 1991.

[2] SARTIAUX P., *L'acquisition du comptage chez l'enfant : "les principes précèdent-ils les habiletés ?"*, mémoire de licence sous la direction de O. FRYDMAN, Université de MONS, 1994.

[3] PIAGET J. et SZEMINSKA A., *La genèse du nombre chez l'enfant*, (4ème édition, 1ère édition : 1941), Delachaux et Niestlé, Neuchatel, (1967).

[4] GELMAN R., Les bébés et le calcul, *La recherche*, 149 , pp 1382-1389, novembre, (1983).

[5] FRYDMAN O., (À paraître, in *Cahier de psychologie cognitive*), Concept of number and acquisition of the concept of counting : the "when", the "how", and the "what" of it.

[6] BRIARS D., SIEGLER R. S., *A Featural Analysis of Preschooler's Counting Knowledge*, Developmental Psychology, Vol. 20, 4, (1984), 607-618.

[7] FUSON K., *Children's counting and concepts of number*, Springer Series in Cognitive Developpement, (1988).

[8] C. R. GALLISTEL, R. GELMAN, Preverbal and verbal counting and computation, *Cognition*, 44, p. 43-74, 1992.

Adresses des auteurs :

Pierre SARTIAUX
Rue de la Citronnelle 5/112
1348 Louvain-La-Neuve

Olivier FRYDMAN
Université de Mons-Hainaut
Service de Psychologie Clinique
Place du Parc 18
7000 Mons

Didacticiels dans l'enseignement des mathématiques

B. Honclaire et E. Liénard, *CREM et A.R.J. d'Avesnes*

1. Introduction

C'est devenu le compagnon privilégié des jeux de nos enfants, il envahit de plus en plus notre vie de chaque jour, peut-être même certains d'entre vous ont-ils voté en sa compagnie lors de ces dernières élections et pourtant ... Pourtant, nous ne pouvons que constater sa trop rare présence, au quotidien, dans nos classes !

C'est bien évidemment d'"ordinateurs" dont nous allons vous parler – plus précisément d'E.A.O., de l'aide que cet outil peut nous apporter à nous, professeurs de mathématique.

Lorsque nous évoquons l'E.A.O., la même image nous vient encore trop souvent à l'esprit : celle d'une classe dans un labo, si possible le mieux achalandé du monde, un ordinateur par élève bien évidemment ! Ce faisant, on en oublie un autre type d'E.A.O., celui-là même que nous allons aborder aujourd'hui.

E.A.O. mono ou multipostes ? Voilà toute la question !

Aucun d'entre nous n'oserait bien entendu remettre en question l'importance primordiale de posséder dans son école un(des) laboratoire(s) informatique(s). Cependant, nous allons essayer de mettre en exergue les avantages que peut présenter dans une classe de mathématiques un seul ordinateur, muni d'un grand écran que d'aucuns n'hésiteront pas à qualifier de **super-**

tableau.

MONOPOSTE	MULTIPOSTE
Aide omniprésente dans une classe.	Besoin de se partager le laboratoire.
Discussion permanente avec la classe. On "construit" ensemble le cours.	Individualisation du travail fourni.
Surveillance et sauvegarde du matériel.	Certaines classes jugées trop dangereuses, ne doivent pas utiliser le labo.

2. Les conditions matérielles

Le choix des collègues mathématiciens s'est porté sur la solution suivante :

— l'équipement de plusieurs classes

— un ordinateur relié à un grand écran supplémentaire pour que toute la classe puisse participer.

Ceci explique le fait que nous utilisons des logiciels permettant un usage collectif.

Plusieurs solutions techniques sont possibles :

A. Un deuxième moniteur de grande diagonale (21")
avantage : la qualité de l'image
inconvénient : son prix élevé (minimum 70.000 F)

B. Une tablette de rétroprojection
avantage : la taille de l'image projetée
inconvénients : son prix élevé (à partir d'environ 100.000 F, sans rétroprojecteur !) - occultation de la classe souhaitée.

C. Un grand écran TV (70 cm) et un adaptateur du type Encoder ou autre
avantage : le prix abordable (à partir de 40.000 F, adaptateur compris)
inconvénient : une perte de qualité d'image.

Les raisons budgétaires nous ont imposé la solution C.

En ce qui concerne l'ordinateur utilisé, une carte VGA est pratiquement indispensable pour les programmes avec graphisme : les animations sont plus agréables lorsqu'on dispose de plusieurs pages graphiques.

3. Compte rendu d'expériences

3.1. La motivation par des jeux

Plusieurs logiciels nous permettent de rencontrer une grande partie des notions d'arithmétique en les présentant au départ de jeux :

— DES CHIFFRES ET DES LETTRES (logiciel distribué par Logiciels Jeux Nathan)
Ce logiciel simule parfaitement le jeu bien connu (pas de tous les élèves !) et permet en plus un mode problème : on entre les nombres et l'ordinateur recherche une solution.
Matières rencontrées :
— organisation de calculs successifs
— écriture d'expressions numériques
— usage de parenthèses
— utilisation d'organigrammes
— mise en place de conventions d'écriture
— mise au point sur les priorités des opérations

— GRILFICH (disquette n°6 du CDS, Université de Mons)
Exemple de situation :

a	b	c	48
d	e	f	189
g	h	i	40
432	14	60	

il faut placer dans la grille les nombres de 1 à 9, de manière que le produit des trois nombres situés sur une même rangée soit égal à la valeur correspondante inscrite en marge du tableau.
Matières rencontrées :
— usage d'un codage pour faciliter la communication (lettres, ...)
— notions de produits, facteurs, multiples et diviseurs
— caractères de divisibilité
— si un nombre en divise deux autres, il divise également leur somme et leur différence

— premières déductions
par exemple : on sait que 60 et 40 sont les seuls multiples de 5
on déduit que $i = 5$

— organisation d'une recherche et tableau à double entrée

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
48	×	×	×	×		×		×	
189	×		×				×		×
40	×	×		×	×			×	
60	×	×	×	×	×	×			
14	×	×					×		
132	×	×	×	×		×		×	×

Des prolongements possibles :
— peut-on inventer une grille avec six produits pairs ? (impairs ?)
— tous les produits peuvent-ils être multiples de 3 ?
— existe-t-il des grilles avec plusieurs solutions ?

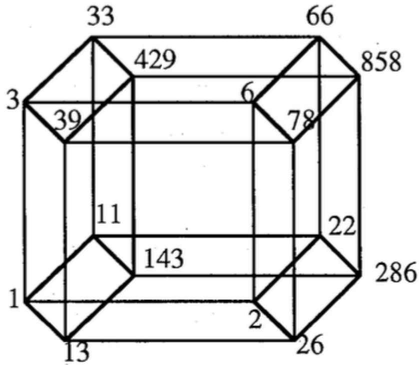
— LE NOMBRE INTERDIT (disquette n°6 du CDS)

Exemple de jeu :
— nombre choisi 24
— deux jours ou deux équipes
— à tour de rôle, chacun propose un diviseur de 24
— perd la partie celui qui sera obligé de dire 24

attention : proposer un nombre annule la faculté de proposer ensuite les diviseurs de celui-ci.
ex. : A dit 6. On ne peut plus proposer 1,2,3 et 6.
La recherche de tous les diviseurs du nombre interdit est une activité qui est rapidement proposée par les élèves ; elle est loin de permettre de trouver une stratégie gagnante.
L'organisation des diviseurs sous la forme d'un treillis facilite (parfois ! !) la mise au point d'une telle stratégie. (Ce n'est pas le but poursuivi).
Pour de plus amples commentaires sur les deux derniers jeux et le programme TREILLIS, reportez-vous à la brochure d'accompagnement de la disquette n°6 du CDS.

Matières rencontrées :
— nombres premiers
— décomposition en facteurs premiers
— opérateurs fractionnaires
— représentation en perspective de parallélipipèdes
— rencontre de translations dans l'espace
— pgcd et ppcm

— puissances
— expressions littérales de la forme $a^n b^m$
— rencontre de rationnels
— extension aux exposants négatifs
— notion d'inverses.
Un exemple de treillis :



le nombre 858 a 16 diviseurs

3.2. Simulation et aide à la conjecture

Si PROBLEMES OUVERTS, alors	– CONJECTURES – EXTRAPOLATIONS

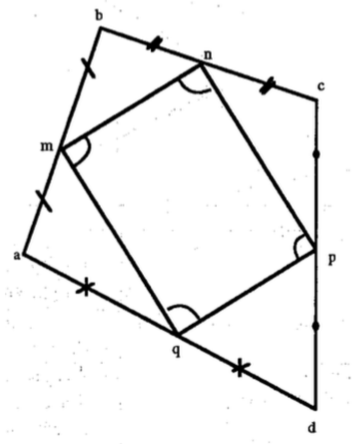
⟶ nécessité d'une aide efficace : un *didacticiel* approprié

A) A partir de figures

Impossible de parler l'E.A.O. sans évoquer "CABRI-GEOMETRE" qui peut être présent au quotidien dans nos classes. L'un de ses nombreux avantages est **son extrême aisance à faire varier des figures**.

— Simulation très facile :
⟶ l'élève relativise mieux **sa** construction ;
⟶ le professeur approche plus rapidement **celle de l'élève**.
Exemple 1 : prérequis : – théorème des milieux ;
– propriétés de quadrilatères particuliers.

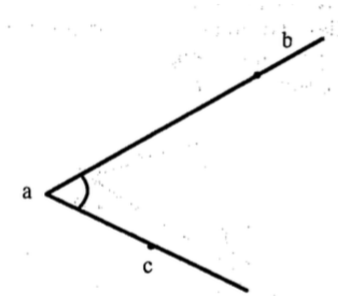
Voici un quadrilatère *abcd*
1. Construis m, n, p et q, milieux des côtés.
2. Propose et justifie.
3. Quelle condition devras-tu imposer à *abcd* pour que :
– *mnpq* soit un losange
– *mnpq* soit un carré ?



— Usage des relations entre des propriétés :
Un autre avantage de Cabri est de pouvoir **réduire les menus**, contraignant ainsi l'élève à :
⟶ se servir des **seuls outils** qui lui sont offerts ;
⟶ accroître ses capacités d'**analyse** et d'**adaptabilité**,
tout en conservant un aspect **ludique** à la séquence proposée.
Exemple 2 : prérequis : – bissectrice
– triangle isocèle, losange
– invariants des symétries orthogonales
– théorème des milieux.

De l'importance de pouvoir réduire les menus ...

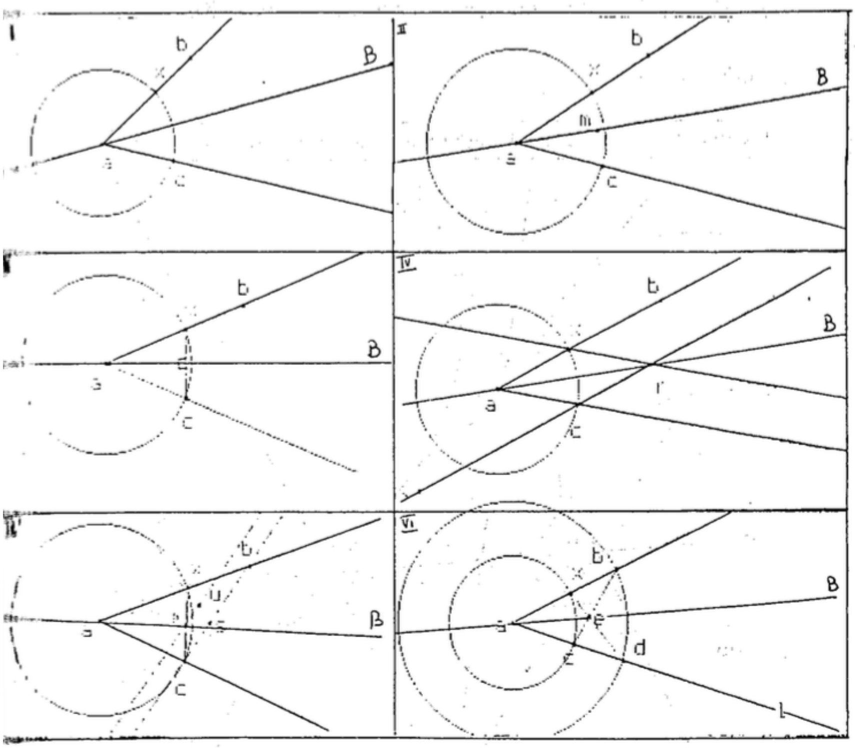
Construis la bissectrice de l'angle $b\hat{a}c$.



Suppression de BISSECTRICE	– cercle $C(a, c)$ – $[ab]$ inter $C \to x$ – médiatrice de $[xc]$
Suppression de MEDIATRICE	– milieu de $[xc] \to m$ – droite am
Suppression de PERPENDICULAIRE	– // à ax comprenant c – // à ac comprenant x – intersection droite-droite $\to r$ – droite ar
ou	– point quelconque u – symétrique de $x/u \to s$ – droite sc – // à sc comprenant $u \to m$ – droite am
Suppression de PARALLELE	– cercle $C_1(a, c))$ – cercle $C_2(a, b)$ – C_1 inter $[ab]$ – C_2 inter $[a1]$ – segments $[xd], [bc]$ – segment inter segment $\to e$ – droite ae

Si l'on peut réduire les menus, il nous est également loisible de les enrichir en fabriquant des **macros-constructions** :
$\longrightarrow$ extensions très intéressantes à réaliser avec les élèves puisque leurs macros devront se faire accepter par le didacticiel !

— Puisque nous vous avons parlé de **supertableau**, évoquons maintenant l'aide qu'apporte un tel didacticiel au professeur :
Exemple 3 : prérequis : – bissectrice
– cercles tangents à 2 droites.



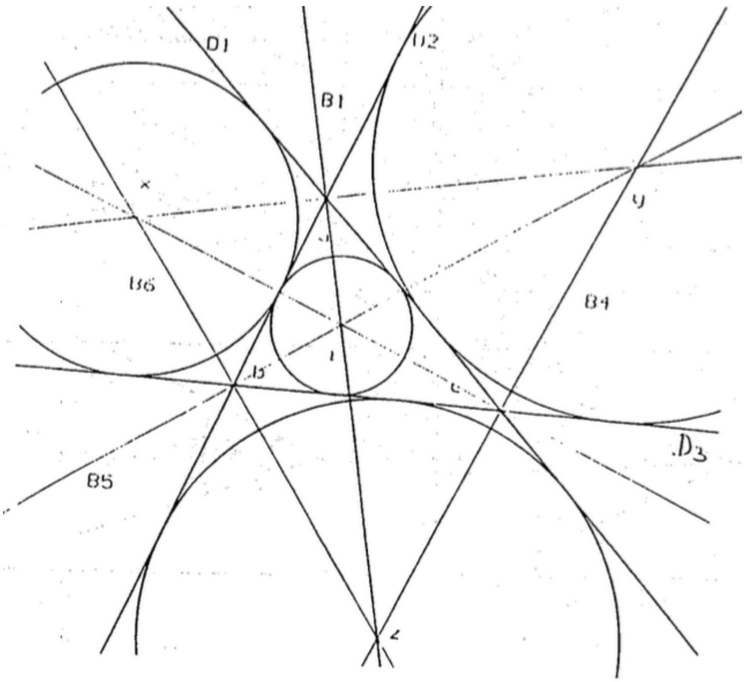
$\longrightarrow$ **précision du tracé de la machine** : un beau tableau, des documents de travail précis, impeccables, créés "à vie" mais que l'on peut faire varier "à l'infini" ...
$\longrightarrow$ **aspect "historique"** : réitère au rythme choisi par l'élève les étapes d'une construction et aide à la correction.

— Nous ne pourrions pas quitter Cabri sans évoquer la rubrique **lieux géométriques**. Des problèmes de ce type ne sont pas évidents à réaliser avec des élèves du degré inférieur.

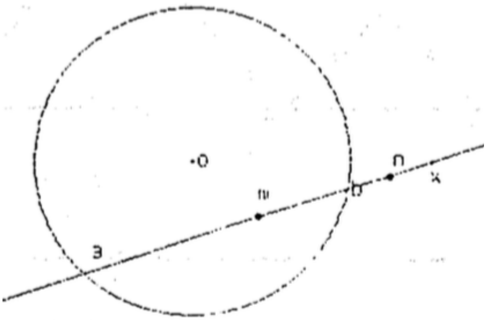
Exemples 4, 5 et 6
⟶ des élèves moins rebutés devant l'ampleur de la tâche car **visualisation aisée** ;
⟶ extrême facilité à présenter des lieux **moins usités**.

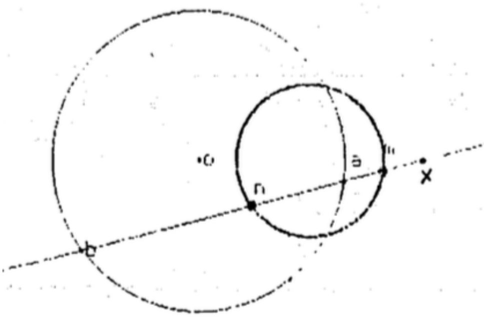
Exemple 4 :

Construis des cercles tangents aux 3 droites D_1, D_2 et $D3$



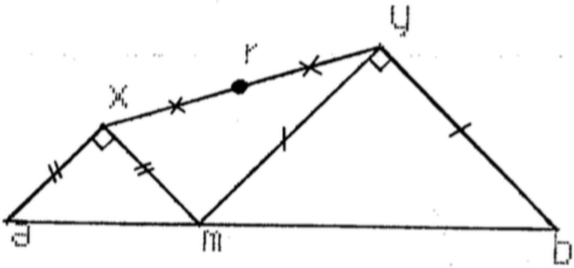
Exemple 5 :
— Construis m, milieu de $[ax]$ et n, milieu de $[bx]$.
— Trouve une transformation du plan qui applique b sur n et a sur m.
— Recommence les constructions à partir d'autres droites comprenant x et sécantes ou tangentes au cercle.
— Quelle est la figure déterminée par les milieux construits ?

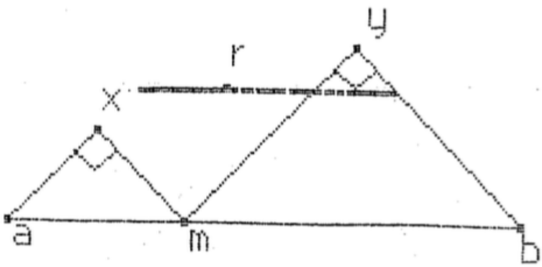




Exemple 6 :

Détermine l'ensemble des points r lorsque m parcourt $[ab]$.





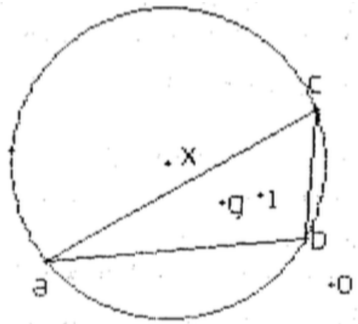
Exemple 7 : Voici le cercle X et la corde $[ab]$. Détermine :

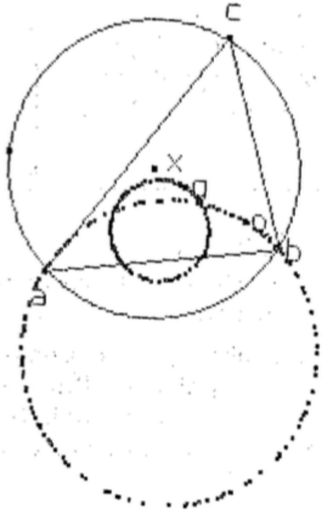
— l'ensemble des *centres de gravité* des triangles abc, c étant un point du cercle X.

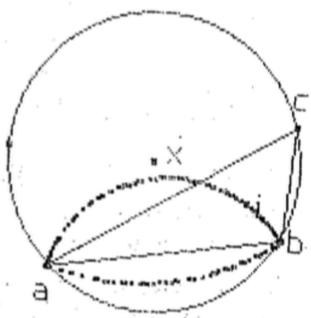
— l'ensemble des *orthocentres* de ces triangles.

— l'ensemble des *centres des cercles circonscrits* à ces mêmes triangles.

— l'ensemble des *centres des cercles inscrits* à ces mêmes triangles.







B) A partir de tableaux de nombres

C'est dès la première année que l'obligation d'utiliser un tableur se fait sentir. Chez nous, nous utilisons MULTIPLAN, que nous pouvons employer sur un matériel qui est loin d'être sophistiqué.

En algèbre et arithmétique, ses qualités sont nombreuses ; elles se rapprochent de celles offertes en géométrie par Cabri ;

Ajoutons qu'il peut :
$\longrightarrow$ **débarrasser l'élève de calculs fastidieux**

$\longrightarrow$ **lui donner plus d'assurance** en lui permettant de confronter ses résultats ou ceux de la calculatrice à ceux du tableur.
$\longrightarrow$ **amuser** par sa **rapidité d'action**.

Exemple 8 : prérequis : calcul fractionnaire.

– En 2ème : avec des entiers ;

– En 3ème : avec des non-entiers ;
en généralisant : calcul littéral.

DES SUITES DE NOMBRES ? ? ?

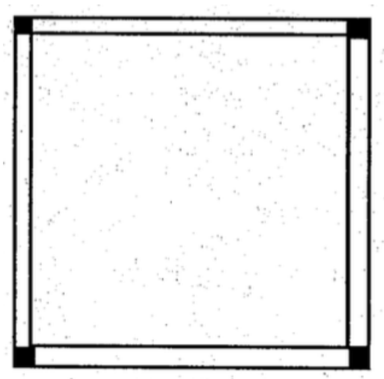
• Choisis-toi deux naturels non nuls : n_1 et n_2.
• Construis un troisième nombre $n_3 = (n_2 + 1) : n_1$
un quatrième nombre $n_4 = (n_3 + 1) : n_2$
un cinquième nombre $n_5 = (n_4 + 1) : n_3$
et ainsi de suite ...
• Propose, justifie.

— Abordons maintenant l'étude de **fonctions**
Nous aimerions, bien évidemment, ne jamais parler de fonctions sans trouver une motivation dans un problème ouvert.
En voici un qui fut commenté, il y a de nombreuses années, dans "REFORME PEDAGOGIQUE DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE" – document 4D, publié par la Direction Générale de l'Organisation des Etudes et que, personnellement, j'hésiterais à aborder avant de posséder un tableur dans mes classes.

Exemple 9 :

LA PLUS GRANDE BOITE

Aux quatre coins d'une feuille de papier de 30 cm de côté, imagine que l'on découpe une encoche carrée de 1 cm de côté.
On relève verticalement les 4 bords de manière à obtenir une cuvette en forme de prisme droit à base carrée de 28 cm de côté et 1 cm de hauteur.
On répète l'opération en agrandissant chaque fois l'encoche de 1 cm.
A quelle grandeur d'encoche correspond la "cuvette" ayant la plus grande capacité ?
Représente le diagramme cartésien de cette fonction :
– en abscisses : profondeur de l'encoche
– en ordonnées : capacités en cm^3.
Recommence ensuite la même recherche sur d'autres dimensions :
carrés de côtés 24 cm, 33 cm, 45 cm, ...



1. On étabit un tableau des résultats pour un côté de 30 cm, par exemple.
2. On représente cette fonction du 3ème degré.
3. On change la longueur du côté du carré.

4. On essaie d'élaborer la règle du jeu : "n'existerait-il pas un rapport entre la longueur du côté du carré donné et celle de l'encoche correspondant à la capacité maximale ?"

5. On vérifie ses hypothèses en recherchant plus de précisions.

6. On conclut : **La capacité maximale est trouvée pour une encoche valant le sixième de la longueur du côté du carré donné**.

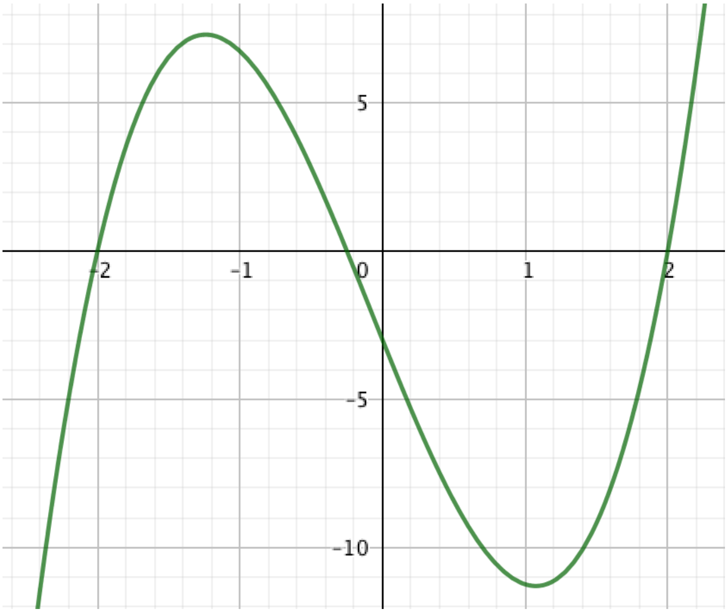
Et le graphique de la fonction correspondant à chaque longueur de côté de carré est obtenu grâce à un petit didacticiel qui permet de la représenter et d'en trouver des couples (x, y), amenant ainsi les élèves à **comparer**, très rapidement, des graphiques et des fonctions.

— Il y a encore d'autres recherches rendues plus intéressantes par l'utilisation de MULTIPLAN et de ce même didacticiel qui offre un **support géométrique** au tracé de fonctions :
Trop souvent encore, on trouve dans les cahiers d'élèves de 3ème, une série impressionnante d'exercices de **factorisations**, qui sont effectués de façon mécanique, sans que l'on ait montré "à quoi ça sert" !
Cela fait longtemps que notre politique est autre : l'un des buts de la factorisation étant la recherche des racines de fonctions, pour ne pas dépasser les seuils de maturité de nos jeunes élèves, il est primordial, lorsqu'on emploie ce type de stratégie, de posséder des outils adéquats :
$\longrightarrow$ recherche des zéros d'une fonction ;
$\longrightarrow$ règle de Hörner ;
$\longrightarrow$ division de polynômes ;
$\longrightarrow$ loi du reste ;
$\longrightarrow$ exercices diversifiés de factorisations.

Exemple 10 : $\boxed{\text{recherche des zéros d'une fonction.}}$

Recherche des valeurs qui annulent :

$$y = 3x^3 + 0.75x^2 - 12x - 3$$



Règle de Hörner
La valeur d'un polynôme peut toujours être calculée par une composée d'opérateurs additifs et multiplicatifs.

Pour la fonction polynôme qui nous intéresse :

$$\begin{aligned} 3x^3 + 0.75x^2 - 12x - 3 &= x(3x^2 + 0.75x - 12) - 3 \\ &= x[x(3 + 0.75) - 12] - 3. \end{aligned}$$

x	.3	+0.75	.x	−12	.x	−3
−3	−9	−8.25	24.75	12.75	−38.25	−41.25
−2.75	−8.25	−7.5	20.625	8.625	−23.71875	−26.7185
−2.5	−7.5	−6.75	16.875	4.875	−12.1875	−15.1875
−2.25	−6.75	−6	13.5	1.5	−3.375	−6.375
−2	−6	−5.25	10.5	−1.5	3	0
−1.75	−5.25	−4.5	7.875	−4.125	7.21875	4.21875
−1.5	−4.5	−3.75	5.625	6.375	9.5625	6.5625
−1.25	−3.75	−3	3.75	−8.25	10.3125	7.3125
−1	−3	−2.25	2.25	−9.75	9.75	6.75
−0.75	−2.25	−1.5	1.125	−10.875	8.15625	5.15625
−0.5	−1.5	−0.75	0.375	−11.625	5.8125	2.8125
−0.25	−0.75	0	0	−12	3	0
0	0	0.75	0	−12	0	−3
0.25	0.75	1.5	0.375	−11.625	−2.90625	−5.90625
0.5	1.5	2.25	1.125	−10.875	−5.4375	−8.4375
0.75	2.25	3	2.25	−9.75	−7.3125	−10.3125
1	3	3.75	3.75	−8.25	−8.25	−11.25
1.25	3.75	4.5	5.625	−6.375	−7.96875	−10.96875
1.5	4.5	5.25	7.875	−4.125	−6.1875	−9.1875
1.75	5.25	6	10.5	−1.5	−2.625	−5.625
2	6	6.75	13.5	1.5	3	0
2.25	6.75	7.5	16.875	4.875	10.96875	7.96875
2.5	7.5	8.25	20.625	8.625	21.5625	18.5625
2.75	8.25	9	24.75	12.75	35.0625	32.0625
3	9	9.75	29.25	17.25	51.75	48.75

3.3. Représentations de solides et problèmes sur des solides

— SECTIONS (disquette n°7 du CDS)

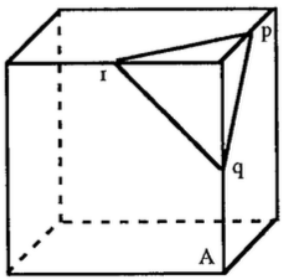
Le logiciel permet diverses représentations des polyèdres réguliers par
perspective centrée
perspective cavalière
projection orthogonale.

Il permet de visualiser des familles de sections.

Il est intéressant de montrer différentes représentations d'un cube et de faire apparaître, par comparaison, les caractéristiques de la perspective cavalière.

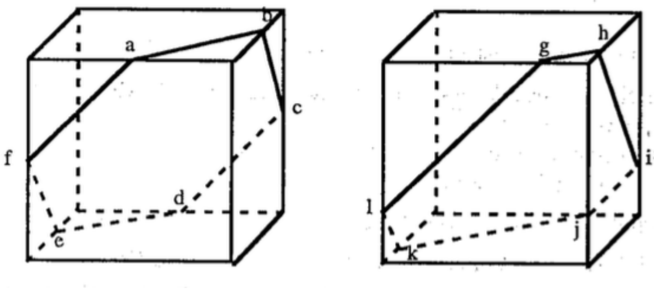
De même montrer aux élèves des familles de sections permet de contrôler leur acquis du primaire en ce qui concerne la reconnaissance des polygones. (Pour des informations plus complètes, voir le manuel d'accompagnement).

— LOGO sur le cube (disque n°7 du CDS)
Ce logiciel permet d'aborder des problèmes sur le cube (ou sur un parallélipipède rectangle) et d'amener le développement comme outil de raisonnement.
Par exemple : rédiger le programme pour obtenir la figure



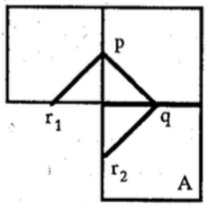
①

Comparer les deux trajets

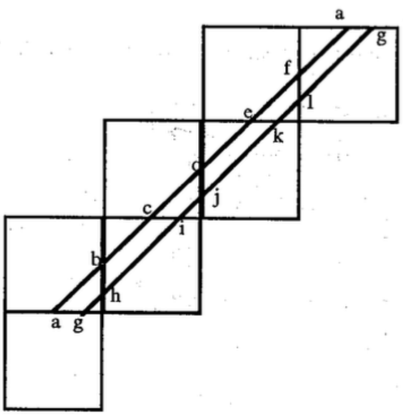


2

Et en rabattant les faces :



1



2

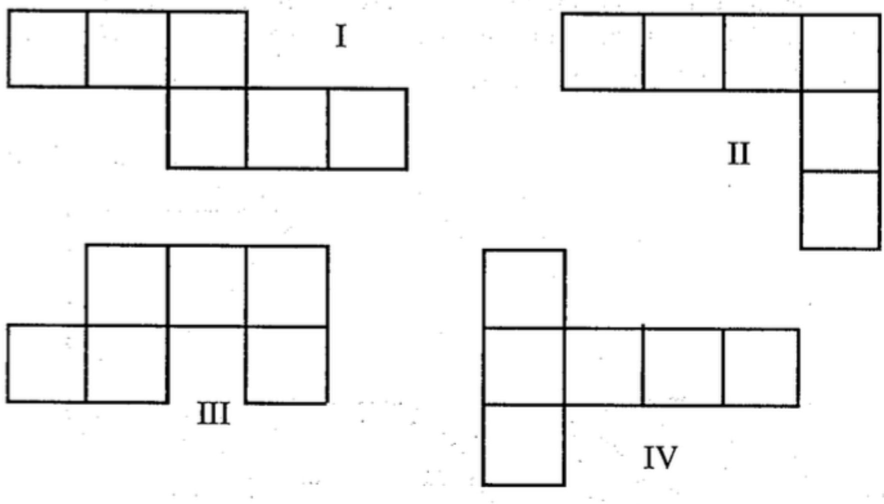
— IMAGES du CUBE (logiciel diffusé par le SEDIMA)
  Ce logiciel permet de poser de nombreux problèmes sur le cube ; le menu qui suit en est un bon résumé :

Images du cube

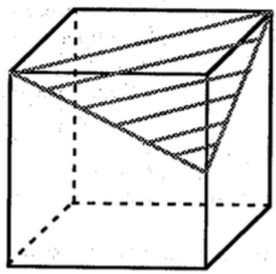
1. Perspective
2. Voir un cube
3. Droites - arêtes
4. Développements
5. Sections
6. Sections parallèles
7. Rotations
8. Axes
9. Problèmes
10. Terminer

Voici quelques exemples de situations proposées :

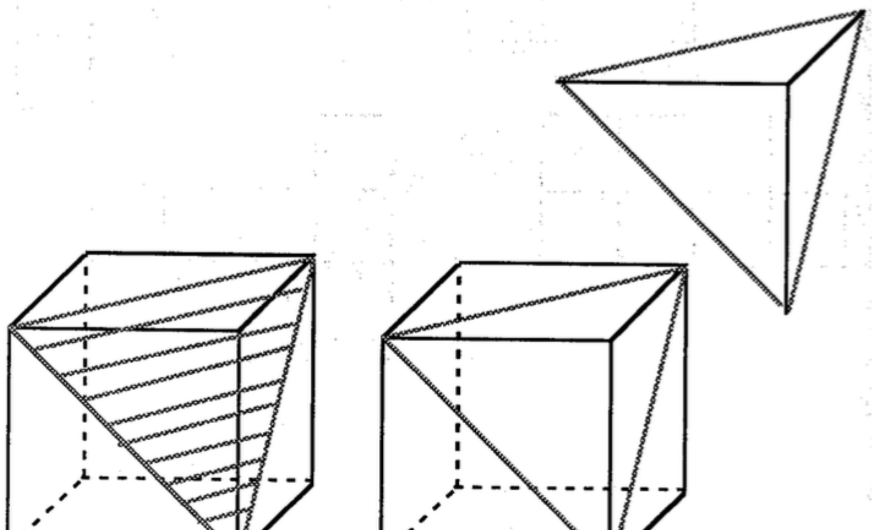
Les patrons suivants sont-ils des développements d'un cube



Est-ce un triangle isocèle ?



Voici un cube. Imagine un large couteau qui, d'un seul coup et sans dévier de sa direction initiale, le tranche en 2 parties. *Quelle figure plane obtiens-tu ?*



4. Conclusion

Nous aurions beaucoup de mal à faire un résumé succinct de nos expériences. C'est même pour nous une mission impossible. En effet, sachez que, pendant notre travail de préparation, nous nous sommes constamment sentis frustrés de ne pouvoir vous consacrer qu'un temps aussi bref.

Qu'est-ce donc à dire ? Des idées exploitables avec des élèves du degré inférieur, nous en avons encore “à revendre” ; des didacticiels, que nous utilisons chaque jour, même s'ils ne sont pas parfaits, ni commercialisables, nous en possédons bien d'autres et ils ont tous leur utilité et ils ont tous leurs qualités. De sorte que nos choix furent bien douloureux !

Nous sommes également persuadés que certains d'entre vous ou certains de vos collègues font des créations qui pourraient nous intéresser.

Alors, une idée un peu folle nous a traversé l'esprit : “Et si, à la suite de cet article, naissait une banque d'échanges – tous réseaux et tous niveaux confondus . . . ?”

De sorte que, si ce mot doit être celui de la fin, sachez que nous sommes à votre entière disposition et aussi, et surtout, que nous espérons beaucoup de vous . . .

Adresses des auteurs :

Bernard HONCLAIRE	**Eveline LIENARD**
C.R.E.M.	Athénée Royal J. D'Avesnes
rue E. Vandervelde 5	avenue Gouverneur Cornez
1400 Nivelles	7000 Mons

Du taux de chargement annuel réel au taux annuel effectif global

J. Bair et D. Justens, *Université de Liège et Institut Coremans*

Lorsqu'une personne achète à tempérament une voiture ou un gros appareil électroménager par exemple, elle doit rembourser au total une somme évidemment supérieure à la valeur empruntée. Quel est le taux de cette opération financière ?

Le législateur s'est penché à diverses reprises sur cette question et a fourni une réponse variable au cours du temps : de 1974 à 1991, il faisait appel au taux de chargement réel (TCAR, en abrégé) ; depuis 1991, il a recours au taux annuel effectif global (TAEG, en abrégé).

Nous nous proposons d'expliquer comment ces taux peuvent être introduits, interprétés (d'un point de vue mathématique), puis comparés.

Il est impossible d'envisager, dans cette note, toutes les modalités de remboursement d'un emprunt. Nous nous limiterons au cas courant d'un emprunt *indivis* – c'est-à-dire d'un emprunt qui ne comporte qu'un seul prêteur (encore appelé *créancier*) – pour lequel le *débiteur* (c'est-à-dire l'emprunteur) doit payer mensuellement une somme constante.

1. Notion de taux de chargement

Pour définir le taux de chargement, le capital amorti après chaque versement est supposé constant : il est obtenu en divisant le montant du capital prêté (encore appelé le *nominal*) par le nombre de remboursements et vaut donc $\frac{N}{n}$, où N désigne le montant nominal et n le nombre de paiements mensuels ; il s'agit en réalité d'un *faux amortissement* car l'hypothèse d'égalité des capitaux amortis n'est pas correcte et ne respecte pas la *règle d'or* de la mathématique financière selon laquelle il ne faut jamais comparer des valeurs échéant à des époques différentes, sans les avoir au préalable ramenées à une même date d'évalutation [1, p.69].

La valeur a débitée lors de chaque remboursement s'obtient en ajoutant au capital amorti des charges financières (telles que des frais de dossier, des rémunérations d'agents immobiliers, des primes d'assurances, ...) qui portent globalement le nom de *chargement* : la charge financière mensuelle F est égale à $F = a - \frac{N}{n}$. Cette "charge financière" est alors constante. Ce dernier point est en contradiction avec l'hypothèse d'un amortissement constant qui induit des soldes restant dus en progression arithmétique : les frais financiers, proportionnels à ceux-ci, doivent suivre la même progression.

On appelle *taux de chargement* (sous-entendu mensuel) le rapport c entre le chargement mensuel et le nominal, soit $c = \frac{F}{N}$; il est donc égal à la charge financière mensuelle relative à un montant emprunté unitaire.

D'un point de vue pratique, la connaissance du taux de chargement est intéressante, principalement dans la mesure où elle permet le calcul aisé de chaque remboursement à partir du capital emprunté : de fait, on a $a = \frac{N}{n} + c \times N$. En guise d'exemple, considérons l'achat d'une voiture de 465 000 F ; le client paie 105 000F au comptant et a recours à un financement pour les 360 000 F restants ; le remboursement se fera à l'aide de 36 versements mensuels, avec un taux de chargement égal à 0,7%. Chaque mois, cette personne devra payer 12 520 F, somme qui se décompose en $\frac{360000}{36} = 10\ 000$ F pour l'amortissement et en 360 000 F $\times 0,007 = 2520$ F pour le chargement.

2. Le taux de chargement annuel réel

Le taux de chargement défini ci-dessus l'est par mois. Or, très souvent, le public se réfère à un taux annuel.

En 1974, Le Moniteur Belge publiait une façon “légale” de calculer le TCAR. On pouvait y lire : ≪ considérant qu'il y a lieu en vue d'une information adéquate des acheteurs et prêteurs à tempérament, de mentionner dans les contrats, en plus du taux de chargement mensuel, le taux annuel réel de chargement, (...) il (le taux de chargement) est également exprimé sous forme d'un taux annuel calculé suivant une de ces formules :

$$\text{(i) } i = \frac{p \times 24 \times n}{n+1}$$

$$\text{(ii) } i = \frac{L \times 100 \times 12}{N \times d}$$

$$\text{(iii) } i = \frac{\frac{12}{d} \times L \times 100}{N}$$

Légende :

i = taux de chargement annuel réel
p = taux de chargement mensuel
n = nombre de remboursements mensuels
d = durée moyenne = $\frac{n+1}{2}$
N = montant nominal du crédit
L = chargement total du crédit.

Le calcul du taux de chargement annuel réel doit être poursuivi jusqu'à la deuxième décimale.≫ [8]

Nous nous proposons de montrer l'équivalence de ces trois formules, puis de voir comment elle ont été construites et dans quelle mesure elle sont pertinentes.

Les deuxième et troisième égalités, qui sont bien entendu identiques (...tout du moins pour les mathématiciens !), sont équivalentes à la première, car le chargement total L est égal à $n \times c \times N$, d'où

$$\frac{L \times 100 \times 12}{N \times d} = \frac{n \times c \times N \times 100 \times 12}{N \times d} = \frac{n \times 12 \times 100 \times c}{d} \; ;$$

comme $d = \frac{n+1}{2}$, la conclusion souhaitée s'obtient en posant $100 \times c = p$. Notons au passage que le législateur exprime les taux (annuels et mensuels) en pour-cent : par exemple, il écrit 5 pour un taux égal à 0,05.

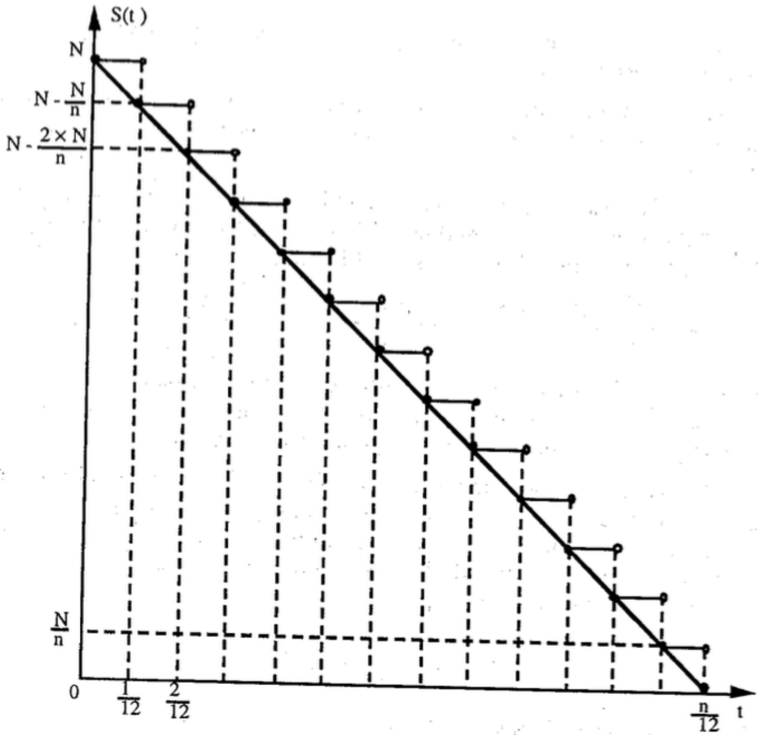
Ces trois formules font appel aux intérêts simples, théorie qui est certainement la plus élémentaire, mais aussi la moins cohérente [2, 3, 6]. De fait, en admettant que le chargement total du crédit correspond à l'intérêt global obtenu pour un nominal N placé (à intérêt simple) pendant le temps moyen d au taux périodique $\frac{i}{12 \times 100}$, on obtient

$$L = \frac{i}{12 \times 100} \times N \times d.$$

Cela revient encore à égaler cet intérêt total L à la somme des intérêts simples mensuels provoqués par les “faux” capitaux restant dus égaux à N, $N - \frac{N}{n} = N \times \frac{n-1}{n}$, $N - \frac{2 \times N}{n} = N \times \frac{n-2}{n}$, $\ldots$, $N - \frac{(n-1) \times N}{n} = \frac{N}{n}$ respectivement aux temps (exprimés en années) 0, $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \ldots, \frac{n}{12}$. Cette somme vaut effectivement, pour un taux mensuel de $\frac{i}{12 \times 100}$:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{12 \times 100} \times \left[N + N \times \frac{n-1}{n} + N \times \frac{n-2}{n} + \cdots + \frac{N}{n} \right] \\ = \; & \frac{i \times N}{12 \times 100 \times n} \times [n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1] \\ = \; & \frac{i \times N \times \frac{n \times (n+1)}{2}}{12 \times 100 \times n} = \frac{i}{12 \times 100} \times N \times \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Ce raisonnement peut être visualisé en traçant le graphique de la fonction $S(t)$ donnant, en fonction du temps t (exprimé en années), les faux soldes restant dus



La charge financière calculée sur base du taux de chargement est proportionnelle à l'aire du rectangle de sommets $(0,0),(0,N),(\frac{n}{12},N)$ et $(\frac{n}{12},0)$, le coefficient de proportionnalité étant égal à $12 \times c = \frac{p}{100} \times 12$, puisque l'aire R du rectangle vaut $N \times \frac{n}{12}$. Par contre, en utilisant le taux d'intérêt calculé sur base du faux solde restant dû, on obtient une charge financière proportionnelle à la surface délimitée par la fonction en escaliers $S(t)$, le facteur de proportionnalité valant $\frac{i}{100}$: en effet, cette aire, égale à $T = \int_0^{\frac{n}{12}} S(t)dt$, est la somme des aires de $(n+1)$ triangles, à savoir le grand de sommets $(0,0),(0,N)$ et $(\frac{n}{12},0)$ et de n petits égaux correspondant aux marches de la fonction $S(t)$, soit

$$T = \frac{N \times \frac{n}{12}}{2} + \frac{n \times \frac{N}{n} \times \frac{1}{12}}{2} = \frac{N \times (n+1)}{2 \times 12}.$$

En égalant ces deux charges financières, comme le fait en réalité la formule légale, on trouve cette relation entre les aires R et T :

$$\frac{p \times 12}{100} \times R = \frac{i}{100} \times T \quad \text{ou} \quad i \times T = p \times 12 \times R;$$

puisque T vaut à peu près la moitié de R, on en déduit l'approximation $i \simeq 2 \times 12 \times p$.

En remplaçant T par $\frac{N \times (n+1)}{24}$ et R par $\frac{N \times n}{12}$, on retrouve :

$$\frac{i \times N \times (n+1)}{24} = p \times 12 \times \frac{N \times n}{12}.$$

$$i = \frac{24 \times p \times n}{(n+1)}$$

qui est bien la relation I du moniteur.

Lorsque la période de référence est l'année, le rapport approximatif entre les taux de chargement c et le taux i est de 1 à 2, puisque le premier se réfère à l'aire du rectangle, tandis que le second se rapporte à l'aire du triangle qui divise le rectangle en deux parties égales.

On comprend désormais mieux pourquoi les commerçants ont tendance à présenter aux clients potentiels le taux de chargement plutôt que le taux d'intérêt calculé sur les soldes restant dus, ce dernier représentant pourtant une mesure nettement plus objective de la rémunération exigée.

3. Notion de taux effectif (mensuel)

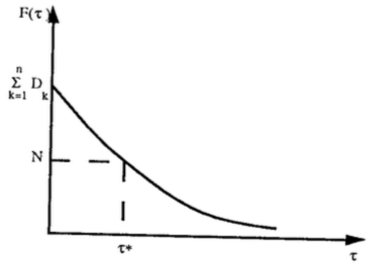
Le taux de chargement annuel i, même s'il est qualifié de “réel” par le législateur, n'est pas le vrai taux d'intérêt de l'opération financière considérée. Ce dernier, appelé *taux effectif* (ou encore *taux actuariel*) est obtenu en écrivant l'équivalence à ce taux des sommes prêtées et des sommes remboursées.

Le cadre idéal pour calculer ce taux effectif est le modèle exponentiel de la théorie des intérêts composés, notamment parce que l'équation établissant l'égalité de la succession de flux opposés ne dépend pas de l'instant choisi pour la mise en équation [2] ;[3]. On peut montrer également (voir [3]) que c'est la seule méthode répondant aux exigences légitimes des utilisateurs de produits financiers.

Dans ce contexte, on peut affirmer que, pour tout contrat d'emprunt, il existe un taux périodique unique strictement positif réalisant l'égalité des flux opposés. Démontrons ce résultat dans le cas général d'un nominal N remboursé par n versements quelconques D_k (pour $k = 1, 2, \ldots, n$). Le taux périodique τ^* cherché doit être solution de l'équation suivante en la variable τ [2] ;[3] :

$$N = \sum_{k=1}^{n} D_k (1+\tau)^{-k}.$$

Etudions la fonction $F(\tau) = \sum_{k=1}^{n} D_k(1+\tau)^{-k}$ sur $I = [0, +\infty[$. On doit avoir $F(0) = \sum_{k=1}^{n} D_k > N$; de plus, $F'(\tau) < 0$ et $F''(\tau) > 0$ pour tout τ positif, avec $\lim_{\tau \to +\infty} F(\tau) = 0$. Sur I, F est donc une fonction continue, convexe et strictement décroissante : par le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend une et une seule fois toutes les valeurs comprises entre 0 et $\sum_{k=1}^{n} D_k$, ce qui prouve l'existence et l'unicité de τ^*.



4. Le taux annuel effectif global

Dans le rapport au Roi accompagnant un Arrêté royal relatif aux coûts, aux taux, à la durée et aux modalités de remboursement du crédit à la consommation, on peut lire : ≪ la loi du 12 juin 1991 relative au crédit à la consommation, modifiée par la loi du 6 juillet 1992, prévoit, à l'instar de la directive du Conseil des Communautés européennes du 22 décembre 1986 relative au rapprochement des dispositions législatives, réglementaires et administratives, modifiée par la directive du Conseil des Communautés européennes du 22 février 1990, l'introduction d'un taux annuel effectif global qui devra, en principe, servir d'instrument de comparaison pour toutes les formes de crédit à la consommation dans tous les Etats membres≫ [9, p.19525]. L'Arrêté royal définit le TAEG comme étant ≪ le taux à exprimer en pour-cent qui rend égales, sur une base annuelle, les valeurs actuelles de l'ensemble des engagements existants ou futurs, puis par le prêteur et par le consommateur (...) L'équation de base qui définit le taux annuel effectif global en exprimant l'égalité entre d'une part la somme des valeurs actualisées des prélèvements de crédit et d'autre part, la somme des valeurs actualisées des termes, est la suivante :

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{C_K}{(1+x)^{t_K}} = \sum_{L=1}^{m'} \frac{D_L}{(1+x)^{s_L}},$$

où :

m désigne le numéro d'ordre du dernier prélèvement de crédit ;

K désigne le numéro d'ordre d'un prélèvement de crédit, soit $1 \leqslant K \leqslant m$;

C_K désigne le montant du prélèvement de crédit numéro K ;

t_K désigne l'intervalle de temps, exprimé en années et fractions d'années, entre la date du prélèvement de crédit numéro 1 et celle du prélèvement de crédit numéro K ;

Σ le signe de sommation ;

m' désigne le numéro d'ordre du dernier montant d'un terme ;

L désigne le numéro d'ordre d'un montant d'un terme, soit $1 \leqslant L \leqslant m'$;

D_L désigne le montant du terme numéro L ;

s_L désigne l'intervalle de temps, exprimé en années et fractions d'années, entre la date du prélèvement de crédit numéro 1 et celle du montant d'un terme numéro 1 ; x désigne le taux annuel effectif global ≫ [9]

Dans le cas particulier d'un emprunt N remboursé par n versements mensuels de valeur a, la formule de base s'écrit :

$$N = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{(1+x)^{\frac{k}{12}}},$$

où x désigne toujours le TAEG.

D'un point de vue pratique, mais aussi mathématique, il convient d'abord de calculer le taux effectif mensuel μ qui obéit à l'égalité :

$$N = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{(1+\mu)^k} = \frac{a}{1+\mu} \times \frac{1-(1+\mu)^{-n}}{1-(1+\mu)^{-1}} = \frac{a}{\mu} \times \left[1-(1+\mu)^{-n}\right]$$

d'où l'on tire

$$\mu = \frac{a}{N} \times \left[1-(1+\mu)^{-n}\right].$$

Partant d'une valeur positive μ_0 arbitraire, on construit la suite récurrente définie par

$$\mu_{j+1} = \frac{a}{N} \times \left[1-(1+\mu_j)^{-n}\right].$$

la fonction $g(\mu) = \frac{a}{N} \times [1-(1+\mu)^{-n}]$ est telle que

$$0 < g'(\mu) = \frac{a}{N} \times \frac{n}{(1+\mu)^{n+1}} < \frac{1}{1+\mu} < 1$$

vu que

$$N = \frac{a}{1+\mu} + \frac{a}{(1+\mu)^2} + \cdots + \frac{a}{(1+\mu)^n} > \frac{n \times a}{(1+\mu)^n},$$

la suite ainsi construite converge vers le nombre μ cherché [6, p.52].

Le taux annuel effectif global x s'en déduit par la formule d'équivalence :

$$1+\mu = (1+x)^{\frac{1}{12}}.$$

En guise d'exemple d'application, considérons la vente à tempérament d'un bien ou d'une valeur de 100 000F pour laquelle le contrat de crédit prévoit un acompte de 20 000F et 24 montants de termes mensuels de 4000 F [9, Exemple 1 ; p. 19539]. Dans ce cas, $m = 1, C_1 = 100000 - 20000 = 80000, t_1 = 0$, $m' = 24, D_1 = D_2 = \cdots = D_{24} = D = 4000, s_1 = \frac{1}{12}$, $s_2 = \frac{2}{12}, \ldots, s_{24} = \frac{24}{12} = 2$; l'équation de base s'écrit

$$80000 = \sum_{L=1}^{24} \frac{4000}{(1+x)^{\frac{L}{12}}}.$$

Le taux effectif mensuel μ est solution de l'équation

$$80000 = \sum_{k=1}^{24} \frac{4000}{(1+\mu)^k},$$

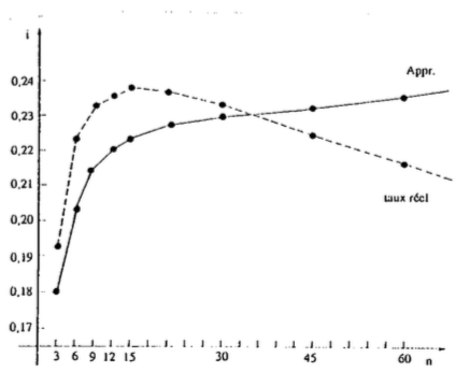
à savoir $\mu = 0,01513$. Le TAEG équivalent vaut

$$x = (1+\mu)^{12} - 1 = 0,1975,$$

soit un taux annuel de $19,75\%$.

5. Comparaison entre les TCAR et TAEG

Des exemples numériques montrent que le TAEG x et le TCAR $\frac{i}{100}$ peuvent différer fondamentalement : tantôt, le taux de chargement sous-estime la réalité, tantôt la tendance est inverse. En guise d'illustration, voici la représentation graphique de l'évolution des taux en fonction de la durée du contrat, les calculs étant réalisés en prenant $c = 0,01$ [6, p.153]



On peut néanmoins montrer qu'au prix de plusieurs approximations relativement raisonnables, le TAEG x est, dans les cas courants, une approximation acceptable du TCAR $\frac{i}{100}$. En effet, de la formule

$$\mu = \frac{D}{N} \times \left[1 - (1+\mu)^{-n}\right],$$

on déduit, moyennant l'égalité $D = (\frac{1}{n} + \frac{p}{100}) \times N$,

$$\mu = (\frac{1}{n} + \frac{p}{100}) \times \left[1 - (1+\mu)^{-n}\right].$$

Observons au passage que μ converge vers $\frac{p}{100}$ lorsque n tend vers l'infini.

En développant le second membre de la dernière égalité à l'aide de la formule de Mac Laurin sur la variable μ et en s'arrêtant à l'ordre 2, on trouve

$$\begin{aligned}\mu &= (\frac{1}{n}+\frac{p}{100})\times\left[1-(1-n\times\mu-n\times(\frac{-n-1}{2})\times\mu^2+\cdots)\right]\\ &= (1+\frac{n\times p}{100})\times\mu-(1+\frac{n\times p}{100})\times\frac{n+1}{2}\times\mu^2+\cdots\end{aligned}$$

d'où

$$(1+\frac{n\times p}{100})\times\frac{n+1}{2}\times\mu=\frac{n\times p}{100}+\cdots$$

et

$$\mu=\frac{n\times p}{100}\times\frac{2}{n+1}\times\frac{1}{1+\frac{n\times p}{100}}+\ldots$$

En négligeant le reste de Lagrange du développement et en confondant $\frac{1}{1+\frac{n\times p}{100}}$ avec 1 - ce qui est assez réaliste puisque μ est de l'ordre de $0,01$ et n généralement proche de 30 - on trouve cette approximation :

$$\mu\simeq\frac{n\times p}{100}\times\frac{2}{n+1}.$$

Or, $x=(1+\mu)^{12}-1$. En s'arrêtant à l'ordre 1 dans le développement de Mac Laurin de $(1+\mu)^{12}$, ce qui revient en fait à remplacer le taux annuel équivalent par le taux proportionnel à μ, on obtient dès lors

$$x\approx\frac{12\times n\times p\times 2}{100\times(n+1)}$$

ou encore

$$100\times x\approx\frac{24\times n\times p}{n+1}=i$$

6. En guise de conclusion

Depuis la plublication de l'arrêté royal introduisant le TAEG, nous avons observé que les firmes qui vendent à tempérament affichent le plus souvent le TAEG légal et véritable. Toutefois, nous avons relevé des cas où la loi n'est pas respectée. Par exemple, une firme de crédit propose le contrat “$10+1$” qui consiste à rembourser le montant emprunté en 11 mensualités égales à $\frac{1}{10}$ du nominal ; le TAEG annoncé est de $0,1742\ldots$alors que l'on peut vérifier que le taux mensuel réel de ce contrat est de $0,01623$; ce qui correspond à un taux annuel effectif de $0,2131$! Il convient donc de rester vigilant ...et de contrôler les taux proposés par les créanciers.

Terminons cette note en remarquant que le passage du TCAR au TAEG est important dans la mesure où le législateur belge a délaissé une théorie mathématique assez "légère" au profit d'une autre tout à fait cohérente et en accord avec les développements classiques de la mathématique financière.

Nous ne pouvons nous empêcher de voir dans ce changement un point positif. Plus la mathématique sera connue et diffusée tant sous son aspect axiomatique que sous une forme plus accessible car concrète, moins nous serons les jouets de personnes sans scrupules qui utilisent l'ignorance de la plupart pour gruger tout le monde.

Bibliographie

[1] Ansion G. - Houben T., *Mathématique financière*, A. Colin, Paris, 1989.

[2] Bair J. - Hinnion R. - Justens D., *Applications économiques au service de la mathématique*, Soc. Belge des Prof. de Math., 1989.

[3] Bair J. - Justens D., *De l'incohérence à l'incertitude : un rapide parcours de la théorie de l'intérêt*, Université de Liège, 1994.

[4] Bonneau P., *Mathématiques financières*, Dunod, Paris, 1988.

[5] Husset Y., Calcul du taux effectif global d'intérêt d'un prêt à amortissement échelonné : état de la question, *Bull. de A.P.M.E.P.*, n° 386, 1992, pp. 519-534.

[6] Justens D., *Introduction à la mathématique financière*, De Boeck Université, Bruxelles, 3ème édition revue et augmentée, 1995.

[7] Journal Officiel des Communautés *n*° L61, 10 mars 1990, directive 90/88/CEE du 22 février 1990.

[8] Moniteur Belge du 2 octobre 1974, pp. 12104-12105.

[9] Moniteur Belge du 8 septembre 1992, pp. 19525-19544.

Adresses des auteurs :

Jacques Bair
Boulevard du Rectorat 7 (Bât B31)
4000 Liège

Daniel Justens
Rue du Jardinage 39
1080 Bruxelles

Le squelette d'EUCLIDE

R. Graas, *(Compléments)* (1)

1. L'église de la Prospekt NEVSKY (N et non M) se trouve, avec un cimetière, au lieu-dit "Alexandre LAURE".
2. Les noms des auteurs de la "GEOMETRIA" de Quito sont : C. CALACHE, T. ROSERO et M. YACELSA pour le tome II (280 pp.) avec en plus, C. TERAN pour le tome I (430 pp.).
3. Les lignes 10 et 11 n'attaquent – bien sûr – ni l'algèbre linéaire ni les transformations. Cependant, la première conduit les étudiants à travailler sans figure (ce n'est d'ailleurs pas son privilège exclusif) et il convient de rappeler ici l'article "Une figure ? Pour quoi faire ?" (Mathématique & Pédagogie, n° 87 - 1991). Et la deuxième théorie entraîne le risque, pour les étudiants, de se retrouver dans la situation de l'écureuil en cage, faute de repères fixes dûment situés. La défense du "squelette d'EUCLIDE" – revu par LEGENDRE et des successeurs moins savants – a son meilleur appui dans une chaîne logique (suffisante à ce stade : faut-il rappeler les "niveaux de rigueur" de FREUDENTHAL ?).
4. Une autre livre de géométrie élémentaire plane "FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA PLANA" par F. ABREU-ABREU, publiée en République Dominicaine (référence perdue, hélas), contient de curieux et simples exercices. Il n'y a pas de prlongement pour l'espace : cela semble tenir à la structure et aux programmes du secondaire là-bas.
5. Le retour en force de la géométrie dans les Olympiades paraît de bon augure.

1. *Voir Mathématique & Pédagogie, n° 98, pp. 37–38, 1995.*

Revue des revues

C. Villers,

Bulletin de l'APMEP (France) - *n°* 395 - septembre 1994.

Tout beau, tout pimpant dans sa nouvelle couverture (verte ...couleur de l'espérance), tel nous apparaît cette livraison dont le sommaire comporte :

— L'éditorial de Jean-François Noël qui plaide pour un effort de recrutement.

— *Une bouée pleine de surprises* par G. LAVAU.
Des collègues de plusieurs établissements se sont passionnés pour un exercice figurant dans un manuel :
"On dispose d'une bouée circulaire de 6 cases et de 5 couleurs. De combien de manières différentes peut-on peindre la bouée de façon que deux cases adjacentes ne soient pas de la même couleur ?"
L'article montre comment des interprétations différentes de cet énoncé débouchent sur une grande variété de solutions et, surtout, sont à la base d'un nombre important d'outils mathématiques à mettre en jeu. Des prolongements sont aussi exposés.

— *Premiers bilans d'après-rénovation (L'évaluation, les modules et le programme de seconde)* par Yves OLIVIER et J.P. MANCEAU.

— *Mathématiques en Terminales ES* par S. GARGUET et R. CLUZEVILLE.

— *Scions du bois (Pour faire des dodécaèdres et icosaèdres en taillant dans des cubes)* par F. PECANT.
Cet article montre en détail comment fabriquer en bois plein les deux polyèdres de Platon les plus "compliqués".
Vous y apprendrez comment les réaliser en découpant des cubes et aussi comment utiliser les chutes.

— *Motiver les élèves par les compétences exigibles* par J. TERRIER.
On y propose une grille de capacités exigibles des élèves de 3ème année (France) (3ème année aussi en Belgique). Des commentaires bien utiles l'accompagnent.

— *L'enseignement des mathématiques en Russie, hier et aujourd'hui* par Evguéri BONNIMOVITCH.

Et les rubriques habituelles que sont *Mots flous, Avis de recherche, Les problèmes de l'APMEP, Courrier des lecteurs, Vie de l'Association.*

Bulletin de l'APMEP (France) - *n°* 396 - décembre 1994.

Au sommaire de cette livraison, nous relevons

— L'éditorial de Jean-François NOËL - Réflexions sur l'enseignement de la mathématique et sur le sort réservé par l'"Administration" à cette branche essentielle.
  J.F. Noël y rappelle que l'APMEP propose et défend un enseignement efficace, cohérent et qualifiant pour tous. Ses préoccupations regoignent ainsi celles si souvent exprimées par la SBPM pour la Belgique francophone.
— *Enseigner la géométrie : permanences et révolutions* par C. LABORDE.
  Texte important (25 pages A5) inspiré d'une conférence plénière donnée à Québec en août 1992 (ICME 7).
— *Catégories et topos : des univers à explorer* par Michel PAJUS.
  Il s'agit d'une explication très complète et documentée, en réponse à une question portant sur ce qu'est "une catégorie opposée ou duale".
— 3, 4 *ou* 5 *: partout !* par H. CAMOUS.
  L'auteur y expose une particularité qui est celle de la présence des facteurs 3, 4 et 5 dans la mesure des longueurs des côtés d'une multitude de triangles rectangles.
— *Mécanisme simple de démonstration des saisons* par D. MANSION.
— *Une activité à partir du cube* par M. DELHAY-DEQUICK.
  Cette activité menée dans une classe de 5ème (1ère année en Belgique) permet de donner du sens aux mots "section de cube", de découvrir le parallélisme et la perpendicularité dans l'espace, de découvrir de nouveaux solides à partir du cube.

Et les rubriques *Mots flous, Avis de recherche, Les problèmes de l'APMEP, Courrier des lecteurs.*

Claude VILLERS

Olympiades

C. Festraets,

Toute correspondance concernant cette rubrique sera envoyée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles

Voici les solutions des problèmes posés le second jour lors de la 35ème Olympiade Mathématique Internationale.

Q4. *Trouver tous les couples (m,n) d'entiers strictement positifs tels que*

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

soit un entier.

Posons

$$\frac{n^3+1}{mn-1} = k \tag{1}$$

où k désigne un naturel non nul.

Isolons m :

$$m = \frac{n^3+1+k}{kn}$$

m est entier, donc n est un diviseur de $1+k$ et on peut poser

$$1+k = tn, \qquad \text{où } t \in \mathbb{N}^*.$$

En remplaçant k par $tn-1$ dans l'égalité (1), il vient

$$\begin{aligned} n^3+1 &= (mn-1)(tn-1) \\ &= mtn^2 - mn - tn + 1 \end{aligned}$$

d'où l'équation du 2^d degré en n,

$$n^2 - mtn + m + t = 0.$$

Si cette équation admet des solutions x, y, on a

$$\begin{cases} mt = x+y \\ m+t = x.y \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{N}^*.$$

1er cas : $mt \geqslant m+t$
alors

$$\begin{aligned} x+y &\geqslant xy \\ x(y-1) &\leqslant xy. \end{aligned}$$

Si $y=1$, alors

$$\begin{cases} mt = x+1 \\ m+t = x \end{cases} \tag{2}$$

d'où

$$\begin{aligned} mt &= m+t+1, \quad (t \neq 1, \text{ car } m \neq m+2) \\ m &= \frac{t+1}{t-1} = 1 + \frac{2}{t-1}. \end{aligned}$$

Les seules valeurs possibles pour t sont $t=2$ ou $t=3$, qui conduisent respectivement à $m=3$, $m=2$ et on obtient les solutions

$$m=3 \ , \ \begin{cases} n=x=5 \\ \text{ou} \\ n=y=1 \end{cases}$$

$$m=2 \ , \ \begin{cases} n=x=5 \\ \text{ou} \\ n=y=1. \end{cases}$$

$$n=y=1.$$

Si $y>1$, alors

$$x \leqslant \frac{y}{y-1} = 1 + \frac{1}{y-1}.$$

Pour $y=2$, on a $x \leqslant 2$.

$$x=1 \quad \text{donne} \quad \begin{cases} mt=3 \\ m+t=2 \end{cases},$$

système qui n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.

$$x=2 \quad \text{donne} \quad \begin{cases} mt=4 \\ m+t=4 \end{cases} \Leftrightarrow m=t=2$$

et on obtient la solution $m=2$, $n=x=y=2$.

Pour $y > 2$, on a $x \leqslant 1$, donc $x = 1$, ce qui donne

$$\begin{cases} mt = 1 + y \\ m + t = y \end{cases}$$

et conduit aux mêmes solutions que le système (2).

2ème cas : $mt \leqslant m + t$.

Alors

$$x + y \leqslant xy$$

et les solutions (x, y, m, t) trouvées dans le 1er cas deviennent ici (m, t, x, y).

On obtient finalement comme valeurs pour le couple (m, n) :

$$(3,5),(5,3),(3,1),(1,3),(2,5),(5,2),(2,1),(1,2),(2,2)$$

Q5. *Soit S l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1. Trouver les applications $f : S \to S$ vérifiant les deux conditions :*

(i) Pour tout x et y de S : $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$.

(ii) La fonction $x \to \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante sur chacun des intervalles $-1 < x < 0$ et $x > 0$.

Remarque préalable :

$$\forall x, y \in S : x + f(y) + xf(y) \in S$$

car

$$f(y) > -1$$

donc

$$(x + 1)f(y) > -(x + 1) \qquad (x + 1 > 0)$$

et

$$x + f(y) + xf(y) > -1.$$

La condition (i) donne, $\forall x \in S$,

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x) \tag{1}$$

Posons $x + (x + 1)f(x) = \alpha$.

On sait, par la remarque précédente que $\alpha \in S$.

1er cas : $\alpha \in \oint -1, 0$

En remplaçant x par α dans (1), il vient

$$f(\alpha + f(\alpha) + \alpha f(\alpha)) = \alpha + f(\alpha) + \alpha f(\alpha),$$

or $f(\alpha) = \alpha$, d'où

$$f(2\alpha + \alpha^2) = 2\alpha + \alpha^2$$

$\alpha^2 + 2\alpha > -1$, car $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2 > 0$, et $\alpha^2 + 2\alpha = \alpha(\alpha + 2) < 0$, car $\alpha > 0$ et $\alpha + 2 > 0$, donc $\alpha^2 + 2\alpha \in \oint -1, 0$.

On a $f(x) = x$ pour $x = \alpha$ et pour $x = \alpha^2 + 2\alpha$ dans l'intervalle $\oint 1, 0$; or on sait que la fonction $x \to \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante dans cet intervalle, donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^2 + 2\alpha \\ \alpha^2 + \alpha &= 0 \\ \alpha &= 0 \text{ ou } \alpha = -1, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec $\alpha \in \oint -1, 0$.

2ème cas : $\alpha \in \oint 0, +\infty$

On tient exactement le même raisonnement que dans le 1er cas, avec $\alpha^2 + 2\alpha > 0$, car $\alpha > 0$.

3ème cas : $\alpha = 0$

$$x + (x + 1)f(x) = 0,$$

d'où

$$f(x) = \frac{-x}{x + 1}.$$

f possède bien les propriétés requises.

(i)

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{-y}{y+1} + x.\frac{-y}{y+1}\right) &= y + \frac{-x}{x+1} + y.\frac{-x}{x+1} \\ f\left(\frac{xy + x - y - xy}{y+1}\right) &= \frac{xy + y - x - xy}{x+1} \\ f\left(\frac{x - y}{y+1}\right) &= \frac{y - x}{x+1} \\ \frac{-\frac{x-y}{y+1}}{\frac{x-y}{y+1} + 1} &= \frac{y - x}{x+1} \end{aligned}$$

$$\frac{y-x}{x-y+y+1} = \frac{y-x}{x+1}.$$

(ii) La fonction $x \to \frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{x+1}$ est bien strictement croissante dans $\oint -1, 0$ et dans $\oint 0, +\infty$.

Q6. *Montrer qu'il existe un ensemble A d'entiers strictement positifs ayant la propriété suivante : pour tout ensemble infini S constitué de nombres premiers, il existe un entier k supérieur ou égal à deux et deux entiers strictement positifs m et n, $m \in A$, $n \notin A$, chacun d'eux étant un produit de k éléments distincts de S.*

Soit A l'ensemble comprenant
tous les produits de deux facteurs premiers comprenant le facteur 2,
tous les produits de trois facteurs premiers comprenant le facteur 3,
tous les produits de cinq facteurs premiers comprenant le facteur 5,
...
tous les produits de p_n facteurs premiers comprenant le facteur premier p_n,
...

Soit S un ensemble infini de nombres premiers et soit q le plus petit élément de S ($q \geqslant 2$). En prenant pour m un produit de q éléments de S comprenant le facteur q, on a bien $m \in A$ et en prenant pour n un produit de q éléments de S ne comprenant pas le facteur q, on a bien $n \notin A$.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

Toute correspondance concernant cette rubrique sera envoyée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

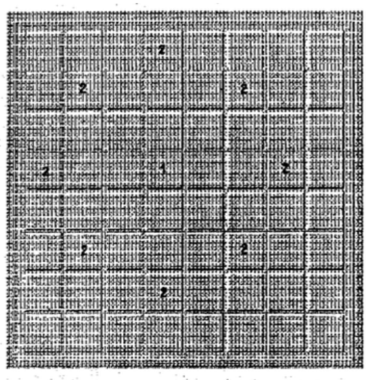
Vous disposez d'un crayon et de papier quadrillé. Dessinez une grille $n \times n$ ($n \geqslant 4$) et essayez de la remplir avec les entiers de 1 à n^2 en respectant les règles suivantes :

1) on peut placer 1 dans n'importe quelle case de la grille ;

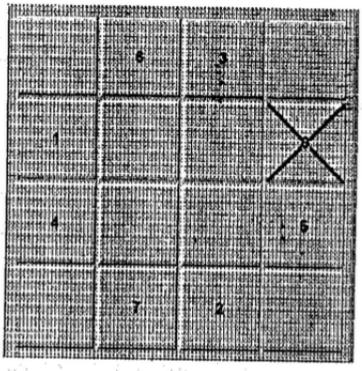
2) deux entiers consécutifs sont placés consécutivement ;

3) on se déplace de la case où on est vers la case suivante,
soit horizontalement en sautant deux cases,
soit verticalement en sautant deux cases,
soit en diagonale en sautant une case.

Donc, à partir de 1 placé arbitrairement, voici sur une grille 8×8, les cases où on peut placer le 2.



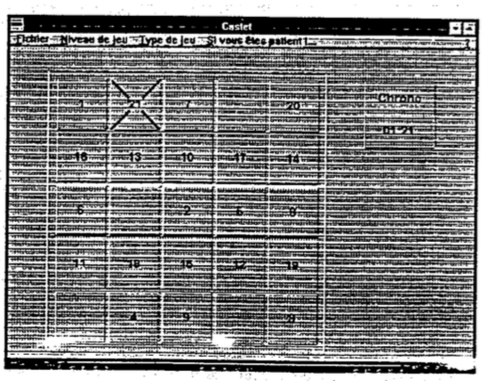
Il est clair que sur une grille 4×4, le problème est impossible : on peut au maximum placer les nombres de 1 à 8.



Tandis que sur une grille 5 × 5, le problème admet une solution quelle que soit la case de départ. Je vous laisse le soin de découvrir ces solutions.

Questions intéressantes : pour quelles valeurs de n est-il possible de remplir complètement la grille ? Y a-t-il une stratégie gagnante ? Je n'ai pas de réponse à ces questions, aussi les vôtres seront les bienvenues.

Pour ceux que cela intéresse, ce jeu est proposé pour P.C. (sous Windows). On peut se le procurer en écrivant à Alex CHAMBILY, 24, résidence du Val, 91340 Ollainville, France.



Voici maintenant vos solutions aux problèmes 151, 152 et 153.

$\boxed{\text{Divisibilité}}$ problème 151 de M. et P. n° 98

a et b étant des nombres naturels, démontrer que si $a+b+1$ est un nombre premier, alors $a!b!+(-1)^a$ est divisible par $a+b+1$.

Solution de A. LAFORT de Montignies-sur-Sambre.

L'énoncé peut se mettre sous la forme : si p est premier, alors $a!(p-a-1)!+(-1)^a$ est divisible par p, avec $0 \leqslant a \leqslant p-1$.

Posons $P(p,a)=a!(p-a-1)!+(-1)^a$, on calcule facilement que

$$P(p,a+1)=\frac{(a+1)P(p,a)+(-1)^{a+1}p}{p-a-1},$$

ce qui permet de conclure que si $P(p,a)$ est divisible par p, alors $P(p,a+1)$ est aussi divisible par p.

On peut donc se contenter de démontrer le théorème pour $a=0$, c'est-à-dire

$$(p-1)!+1 \text{ est divisible par } p,$$

ce qui est le théorème bien connu de Wilson.

J'ai reçu de bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek, J. JANSSEN de Lambermont, M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre, B. LOISEAU de Mouscron, J. RONDOU de Heverlee, J-J. SEIFFERT de Berlin, H. STRODIOT de Soignies. Toutes utilisent le théorème de Wilson.

Paires de chaussettes problème 152 de M. et P. n°98.

Dans un sac contenant 5 *paires de chaussettes de* 5 *couleurs différentes, on prélève un échantillon de* 4 *chaussettes. Les paires complètes sont écartées et remplacées par un nouveau tirage, et ainsi de suite jusqu'à épuisement du sac ou jusqu'à ce que le jeu s'achève par la présence hors du sac de* 4 *chaussettes de couleurs différentes. Quelle est le probabilité de cette dernière éventualité ?*

Solution inspirée par celle de J. JANSSEN de Lambermont.

Remarquons que si, à un moment quelconque, on a tiré du sac deux paires de chaussettes, il est impossible avec les trois couleurs qui restent d'obtenir 4 chaussettes de couleurs différentes.

Il n'y a donc que deux cas à examiner :

1) on tire du sac 4 chaussettes de couleurs différentes (A) ;

2) on tire 2 chaussettes de couleurs différentes et une paire (B) que l'on élimine et qui, au tirage suivant, est remplacée par 2 chaussettes qui avec les 2 chaussettes du 1er tirage forment un ensemble de 4 chaussettes de couleurs différentes (C).

probabilité de (A) : $\dfrac{C_5^4.2^4}{C_{10}^4} = \dfrac{5.16}{210} = \dfrac{8}{21}$.

probabilité de (B) : $\dfrac{C_5^1.C_4^2.2^2}{C_{10}^4} = \dfrac{5.6.4}{210} = \dfrac{4}{7}$.

probabilité de (C) : $\dfrac{2}{C_6^2} = \dfrac{4}{15}$

d'où la probabilité cherchée

$$\frac{8}{21} + \frac{4}{7}.\frac{4}{15} = \frac{56}{105} = \frac{8}{15}.$$

Plusieurs lecteurs ont malheureusement fait des fautes de calcul ou de raisonnement. Outre J. JANSSEN, seul B. LOISEAU de Mouscron a envoyé une solution correcte, avec en outre une généralisation au cas où le sac contient n paires de chaussettes qui le conduit à une jolie formule de récurrence :

$$P_n = \frac{1}{2n-1}\left(6P_{n-1} - \frac{3}{2n-3}\,P_{n-2}\right) \quad (n \geqslant 3)$$

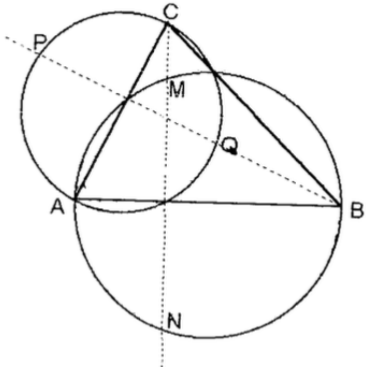
P_n désignant la probabilité de perdre, c'est-à-dire de ne pas pouvoir obtenir 4 chaussettes de couleurs différentes.

Points concycliques | problème 153 de M. et P. n° 98

Dans le plan, on considère un triangle ABC acutangle. Le cercle de diamètre $[AB]$ coupe la hauteur CC' aux points M et N et le cercle de diamètre $[AC]$ coupe la hauteur BB' aux points P et Q. Démontrer que M, N, P, Q sont concycliques.

Solution de B. LOISEAU de Mouscron.

Le triangle ABC est acutangle, donc son orthocentre lui est intérieur, ce qui garantit l'existence des points M, N, P et Q.



Montrons que $|AM| = |AP|$. Les données ne permettant pas de distinguer M de N et P de Q, on aura $|AM| = |AN| = |AP| = |AQ|$ et les quatre points M, N, P, Q seront sur un cercle de centre A.

Comme M est sur le cercle de diamètre $[A, B]$, on a $AM \perp MB$; comme M est sur la hauteur issue de C, on a $CM \perp AB$. De même, $AP \perp PC$ et $BP \perp AC$.

Choisissant résolument d'utiliser **cette merveilleuse structure de référence que représente pour moi l'algèbre linéaire**, j'écris ces quatre faits sous forme vectorielle :

$$\overrightarrow{AM} \,.\, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} \,.\, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} \,.\, \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BP} \,.\, \overrightarrow{AC}$$

ce qui me permet d'éviter de devoir prouver des détails comme $A \neq M, \ldots$

Je conclus

$$\begin{aligned} |AM|^2 &= \overrightarrow{AM} \,.\, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} \,.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{AM} \,.\, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} \,.\, \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AM} \,.\, \overrightarrow{AB} + \vec{0} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}).\, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} \,.\, \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{AB} \\ |AP|^2 &= \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} \quad \text{(on échange } M \text{ et } P,\ B \text{ et } C). \end{aligned}$$

Donc

$$|AM|^2 = |AP|^2$$

et

$$|AM| = |AP| \,.$$

Bonnes solutions de J-L. AYME de St Denis de la Réunion, J. FINOULST de Diepenbeek, J. JANSSEN de Lambermont, A. LAFORT de Montignies-sur-Sambre, G. ROBERT de Namur, J. RONDOU de Heverlee, J.G. SEGERS de Liège, C. VILLERS de Hyon.

Des lecteurs soucieux de m'épargner du travail m'ont adressé des suggestions de problèmes. Monsieur G. ROBERT vous soumet le problème de géométrie ci-dessous et Madame J. RONDOU propose d'améliorer l'énoncé du problème 155 "des cosinus".

160. Points alignés

Si, par les sommets B et C d'un triangle ABC, on mène deux droites rectangulaires quelconques, qu'on abaisse du sommet A une perpendiculaire sur une de ces droites, de l'orthocentre H une perpendiculaire sur l'autre, les pieds de ces deux perpendiculaires sont en ligne droite avec le pied de la hauteur issue de A.

161. Des cosinus (bis)

Soient α, β, γ les angles d'un triangle acutangle. Démontrer que

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}>\frac{1}{2}+\sqrt{2}.$$

162. Un cube et deux carrés

x, y, z étant des entiers strictement positifs, résoudre l'équation

$$x^2+y^3=z^2.$$

Remarque : je signale que l'énoncé du problème 156 doit être corrigé : le polygone a 1994 sommets.

Humour

R. Haine,

La réalité dépasse la fiction
Que ne feraient pas nos jeunes élèves pour tout apprendre!

La scène se passe en 5ème année, garçons et filles de 17 ans, au cours de mathématiques, d'analyse plus précisément. Le Professeur initie les élèves aux notions d'infini ($+\infty, -\infty$) de limites et, en particulier, aux limites des polynômes lorsque la variable tend vers l'infini. Ainsi, essaie-t-il de faire deviner les résultats des calculs suivants

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - x^2) & \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - x^2) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(5x^3 - 10^6x^2) & \lim\limits_{x\to-\infty}(-10^{-6}x^3 + 10^6x^2) \end{array}$$

Et les élèves de jouer avec leur machine, de pronostiquer, de conjecturer, de parier ...Chacun attribue des valeurs à x et fournit son résultat, bon ou mauvais; dans ce dernier cas, le professeur a beau jeu de dire aux élèves qu'ils se sont trompés ou qu'ils ont fait une erreur de manipulation de machine. Et alors, les élèves de râler parce que le "prof" atteint plus vite qu'eux le bon résultat, dans tous les cas :
Un élève : "Mais comment faites-vous? Est-ce possible?"
Le prof : "Parce que je suis un "Pro" !
Un élève : "Comment faites-vous?"
Le prof : "Ah ..." (une inspiration subite) "Si vous voulez le savoir, il faudra mettre le prix".
Les élèves : "Oh!!!"
Le prof : "C'est cher, c'est très cher, quel prix êtes-vous prêts à mettre?"
Une élève du premier rang : "Un bisou".
Le prof : "Ce n'est pas assez"
Une élève du dernier rang : "Un strip-tease".
Le prof : "Ce n'est pas assez ..."

Le coup de sonnerie de fin de cours laissera plâner beaucop de doutes (Que ne feraient pas nos étudiant(e)s pour améliorer leurs connaissances?) ...et une certitude (on ne s'embête pas toujours au cours de math!).