Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N° 102 ***Mai – Juin 1995***

Editorial

G. Noël,

Dans l'avant-dernier numéro de *Mathématique et Pédagogie*, je mettais en évidence le vingtième anniversaire de la création de la SBPMef et de sa revue. Assez naturellement, les vingtièmes anniversaires se suivent : ce samedi 6 mai, nous avons proclamé les résultats de la vingtième Olympiade Mathématique Belge. Dans ce domaine, nous pouvons dire que la SBPMef a fait œuvre de pionnier. C'est bien plus tard qu'ont été mises en place des organisations analogues dans certains pays occidentaux.

C'est l'occasion pour moi de remercier tous ceux — et ils sont nombreux — qui ont concouru au succès rencontré. Les membres du jury national élaborent les questionnaires et corrigent les réponses lors de la finale. Le secrétariat national porte tout le poids de l'organisation matérielle. Peu de personnes se rendent compte de ce que cela représente. Les membres des jurys régionaux sélectionnent les demi-finalistes et s'occupent de l'organisation matérielle de cette épreuve. Dans les écoles, les professeurs font démarrer la compétition et corrigent les questionnaires de l'éliminatoire. N'oublions pas les élèves, sans eux il n'y aurait pas d'Olympiades ! Le résultat final, une compétition qui rassemble quelque 22 000 participants, est impressionnant vu la taille de la Communauté Française de Belgique. Il l'est encore plus lorsqu'on se rappelle que, à tous les niveaux, tous les responsables sont entièrement bénévoles.

Cette année, lors de la proclamation des résultats, j'ai eu le plaisir de remercier tout particulièrement Francis Buekenhout, fondateur de l'Olympiade. Cette année, Francis quittera la présidence du jury national, laquelle sera désormais assurée par Jean-Pol Doignon. Qu'il veuille bien trouver ici mes remerciements renouvelés.

L'une des premières tâches de Jean-Pol Doignon sera de mettre en œuvre la dernière réforme programmée par Francis : le détriplement de l'Olympiade. Dès l'année scolaire prochaine, trois compétitions différentes, dénommées les MINI-, MIDI- et MAXI-Olympiades seront organisées. Les élèves des trois degrés de notre enseignement secondaire se verront ainsi proposer des questionnaires adaptés. Notre but est de donner à un nombre encore plus grand de jeunes la possibilité de faire preuve d'imagination, de créativité, la possibilité aussi de donner le meilleur d'eux-mêmes sans contrainte aucune. Jusqu'à présent peu d'élèves de première ou de quatrième année participaient à l'Olympiade : le questionnaire qui leur était destiné leur paraissait trop peu abordable. Désormais, il n'en sera plus ainsi. Que chacun encourage ses élèves, et notamment les plus jeunes, à s'inscrire !

G. Noël

Quelle philosophie pour l'enseignement des mathématiques au secondaire ?

Commission Pédagogique de la SBPM,

En cette période de modifications profondes de l'enseignement de la mathématique en Communauté Française de Belgique, le Conseil d'Administration de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française *a estimé souhaitable qu'ait lieu une réflexion approfondie sur les grandes orientations de cet enseignement. Il estime aussi que cette réflexion ne peut être le seul fait ni de la* Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française *ni même de l'ensemble des professeurs de mathématique. Pourraient et devraient y être associés d'autres milieux tels que les diverses composantes de la communauté mathématique belge (Société Mathématique de Belgique, Comité National de Mathématiques, Centre de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques, divers groupes universitaires, des représentants des mathématiciens non enseignants, ...) ainsi que des responsables de l'enseignement des différents réseaux, des représentants des utilisateurs de mathématique, etc.*

Le texte qui suit a été élaboré par la Commission Pédagogique de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, *soumis à une assemblée générale en mars 1994 et amendé dans le but de tenir compte des opinions émises lors de cette réunion. Il a été approuvé par le Conseil d'Administration en sa séance du 25 janvier 1995. Il doit être considéré non comme la conclusion d'un débat d'idées mais comme une contribution à la réflexion souhaitée. La* Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française *a l'espoir que d'autres organismes parmi ceux mentionnés plus haut, ou même éventuellement des groupes informels, examineront à leur tour les problèmes de fonds posés par l'enseignement de la mathématique en cette fin du deuxième millénaire, et feront connaître leurs points de vue. Elle est prête, par ses différentes publications, à diffuser les documents cohérents et substantiels qu'elle recevrait, même si leur contenu devait s'opposer à ses propres prises de position.*

1. Introduction

Bien que la SBPMef considère depuis longtemps que les réformes de contenu des programmes ne sont ni nécessaires ni suffisantes pour améliorer l'enseignement des mathématiques, face à la modification des grilles horaires mises en application dernièrement, elle doit se rendre à l'évidence : une révision des programmes de toutes les sections de l'enseignement secondaire, voire (par ricochet) de l'enseignement supérieur semble inévitable. Il convient de se demander comment devrait s'orienter une telle réforme des programmes, et comment, par qui, elle devrait être menée.

Dans son rapport, la Commission Danblon considérait que l'élaboration d'un programme de mathématique ne pouvait être réalisée seulement par les actuelles commissions de programmes. Celles-ci devraient *être entourées par des équipes attachées à produire des curriculums* [1]*, et recourir tout au long de leurs travaux à des mathématiciens professionnels et à des utilisateurs de mathématiques issus du milieu de l'industrie et des affaires.*

Dans l'optique de la Commission Danblon, on peut penser que l'élaboration de nouveaux programmes devait être précédée d'une réflexion aussi large que possible sur leur philosophie et leur contenu. Les questions qui se posent sont simples à énoncer : *quelle est la finalité de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire ? Quelle philosophie doit sous-tendre cet enseignement ? En particulier, quels sont les objectifs de comportement et de connaissance qu'il convient d'attribuer à la formation mathématique des différentes filières de l'enseignement secondaire ?*

Tout citoyen aura probablement des réponses à ces questions. Même en se limitant au milieu professionnel des enseignants de mathématique, les réponses individuelles seront très souvent contradictoires. C'est bien pourquoi la réflexion et la discussion ne peuvent être escamotées. Les questions posées sont délicates, complexes. Les réponses à retenir ne peuvent être sommaires. Il faut viser à aboutir à une synthèse cohérente des idées émises et non à la rédaction de textes qui soit les reprendraient toutes, soit ne retiendraient que celles qui seraient partagées par une écrasante majorité.

1. *Nous renvoyons pour la définition de ce terme au point 5.2 du rapport Danblon.*

2. Mathématique et société

La généralisation de l'enseignement secondaire à l'ensemble de la population est une des réformes les plus importantes intervenues dans le système éducatif dans les cinquante dernières années. De plus en plus, une scolarité de niveau secondaire sera indispensable à l'intégration sociale du jeune. On ne peut pas ne pas tenir compte de cette donnée sociologique essentielle lors d'une réflexion sur l'enseignement des mathématiques.

Le problème est donc de savoir ce que le cours de mathématique va apporter aux jeunes ; à *tous* les jeunes, aussi bien à ceux qui ne poursuivront pas d'études au delà de l'enseignement secondaire (voire qui n'achèveront pas ce cycle d'études) ou dont les activités ultérieures ne nécessiteront guère de connaissances mathématiques, qu'à ceux qui s'orienteront vers une carrière scientifique ou technique comportant une composante mathématique importante.

Pour tous nous pensons que le principal apport de l'enseignement des mathématiques doit se situer au niveau des comportements et de la culture générale.

Apprendre aux jeunes à aborder un problème — relevât-il même d'un domaine non scientifique — de façon ordonnée, méthodique, sans se laisser guider par des *a priori*, des slogans, sans pratiquer l'à-peu-près, serait leur donner une rigueur intellectuelle et une confiance en eux-mêmes les aidant à jouer un rôle constructif dans une société qui n'a que trop tendance à pratiquer des analyses sommaires, des amalgames et des simplifications abusives. Leur apprendre à choisir un moyen d'expression adéquat (dans certains cas, la langue française) et à traduire une idée d'un langage dans un autre est également un objectif essentiel.

En ce qui concerne la culture générale, on pourrait explorer des thèmes ayant joué un rôle important dans le développement de la pensée humaine. A titre d'exemple, l'histoire des tentatives de démonstration du postulat d'Euclide permet de retracer l'évolution de la notion de rigueur. Elle est aussi l'occasion de pratiquer la géométrie et donc de résoudre des problèmes.

Les principes qui viennent d'être énoncés sont selon nous valables pour tous les jeunes, y compris ceux des sections professionnelles et ceux des sections non scientifiques des autres filières de l'enseignement secondaire. Il est clair que si les mêmes principes sont d'application dans des contextes aussi différents, la façon de les appliquer devra tenir compte de situations concrètes extrêmement différentes et que bien des problèmes se posent pour lesquels nous n'avons pas nécessairement de solutions.

Pour les jeunes dont les activités ultérieures ne nécessiteront que peu de connaissances mathématiques, le choix des matières à enseigner n'a pas de caractère crucial, mises à part sans doute les notions absolument indispensables à l'insertion sociale du citoyen parmi lesquelles nous rangerions les fondements des statistiques. Par contre, pour les autres, il convient en plus de veiller à ce que l'utilité réelle pour les applications constitue un des critères de choix des matières enseignées.

3. Du point de vue des comportements

3.1. Méthode axiomatique et pédagogie des situations

La SBPM s'est prononcée depuis plusieurs années pour une pédagogie incluant comme une de ses méthodes essentielles, mais non exclusive, la pédagogie des situations, basée sur des résolutions de problèmes. Les situations peuvent être d'origine extra-mathématique auquel cas on pratiquera l'interdisciplinarité, ou d'origine mathématique. De cette façon les élèves comprendront ce que sont les mathématiques, à quoi elles peuvent servir, et comment on s'en sert.

L'objectif de comportement que nous attribuons à l'enseignement des mathématiques au secondaire, et qui est valable quelle que soit la filière d'enseignement, porte un nom : *l'apprentissage de la méthode axiomatique.* La méthode axiomatique est pour le mathématicien ce que la méthode scientifique est pour le physicien ou le chimiste. C'est une façon d'aborder rationnellement les situations problématiques, d'analyser les données et les questions, de mobiliser en fonction de celles-ci des connaissances théoriques susceptibles d'être utiles, puis de concevoir une stratégie de résolution. C'est bien un objectif valable pour tous les élèves.

Précisons bien que NOUS N'ENTENDONS PAS PAR MÉTHODE AXIOMATIQUE la *mise en forme, suivie de l'exposé purement déductif d'une théorie déjà élaborée.* Dans une telle activité, l'essentiel du travail est réalisé par l'enseignant, qui commence par dégager d'une masse de résultats connus ceux d'entre eux susceptibles d'être acceptés sans démonstration, puis qui structure la matière de façon que tout énoncé vrai s'obtienne à partir des précédents par les seules règles de la logique. Si des exposés de ce type sont utiles et même indispensables au mathématicien professionnel qui doit contrôler strictement la correction de son travail, ils ne peuvent généralement pas être recommandés dans l'enseignement secondaire car ils ne permettent à l'élève ni de participer personnellement à l'élaboration de nouveaux concepts ou à la découverte de nouvelles propriétés, ni de le motiver pour l'étude d'un sujet déterminé. La mathématique lui apparaît alors comme une activité gratuite et finalement peu intéressante.

Bien au contraire la méthode axiomatique que nous préconisons doit donner l'occasion à tout élève de s'approprier la mathématique grâce à une activité motivante et significative. Il s'agit de lui apprendre à modéliser une situation posant problème, à développer le modèle, puis à comparer les résultats obtenus au problème de départ afin de vérifier que la modélisation était satisfaisante. Si elle ne l'est pas, le modèle doit être soit rejeté, remplacé par un autre, soit affiné, perfectionné.

L'usage de l'expression “méthode axiomatique” se justifie par le fait que la modélisation d'une situation comporte la mise en évidence des propriétés fondamentales de la situation étudiée, celles que l'on essaie de placer à la base de la résolution du problème posé et qui de ce fait joueront le rôle d'axiomes pour une mini-théorie qui reste à construire. A titre d'exemple (très simple !), si un problème d'algèbre élémentaire se traduit en un système de deux équations linéaires à deux inconnues, nous pouvons considérer le système comme un modèle du problème, et les équations elles-mêmes comme les axiomes du modèle. Dans ce cas, résoudre le système consiste bien à rechercher certaines conséquences des axiomes.

La phase de modélisation est une phase de recherche, d'induction, de manipulation, de bricolage. Elle nécessite de l'imagination. C'est sans doute la plus difficile. Et c'est bien pourquoi on ne la rencontre que trop peu dans les classes. Et cependant, c'est vraisemblablement la plus importante ! Si vous pouvez mettre un problème en équation, une machine pourra éventuellement la résoudre. Mais si vous n'avez pas appris à la construire ?

La phase de modélisation est en particulier une phase d'abstraction. Nous devons ici nous inscrire en faux contre une opinion assez répandue ([2]) selon laquelle il convient de proscrire l'abstrait au profit du concret. Construire un modèle mathématique d'une situation (qu'elle soit elle-même extra-mathématique ou non) nécessite de distinguer parmi les éléments de la situation ceux qui seront utiles pour résoudre le problème posé et que la

2. et qui provient en partie de ce que les mots “abstrait” et “concret” sont employés couramment dans des sens différents

maturité des élèves permet de prendre en charge. On fait donc abstraction de certains éléments. Ainsi, le modèle abstrait n'est pas plus compliqué, mais plus simple que la situation de départ. S'il ne l'était pas, il serait inutilisable.

Ce qui peut être assez difficile pour l'élève, ce sont les processus d'abstraction et de modélisation eux-mêmes, plus que le modèle abstrait qui en résulte. Ces processus nécessitent des qualités d'*analyse* pour disséquer la situation donnée en éléments constitutifs, discerner ceux qui sont pertinents, détecter les relations qui les unissent. Ils nécessitent des qualités de *synthèse* pour reconstituer ces éléments, dépouillés du superflu, en un modèle cohérent et efficace. L'élève qui a participé activement à l'élaboration du modèle, qui en a suivi les différentes étapes, qui les a comprises, intégrées à ses démarches mentales, celui-là a accompli la plus grande partie du travail nécessaire.

L'abstraction et la modélisation sont des activités fondamentales de l'être humain. Un entrepreneur pourrait-il construire une maison sans en avoir au préalable fait établir des plans ? Ceux-ci constituent bien une modélisation abstraite d'un bâtiment qui n'existe même pas encore ! L'enseignement des mathématiques ne peut éviter de pratiquer la pédagogie des situations avec les démarches de modélisation que cela comporte.

Traduire un problème en équation, exécuter une représentation graphique (de type quelconque : arbre, diagramme de Venn, figure géométrique, ...), programmer un calcul, dresser un tableau, sont des exemples de démarches qui peuvent intervenir lors d'une modélisation. Cette liste pourrait être allongée. Les activités à soumettre aux élèves doivent tenir compte de leur développement intellectuel. Nous n'avons malheureusement pas d'outil très précis pour mesurer celui-ci. Et nous percevons parfois mal quelles démarches mentales doivent être mises en œuvre pour résoudre un problème donné, ou quelles difficultés présente l'apprentissage d'une théorie particulière. Analyser ces démarches mentales et ces difficultés est un des objectifs de la recherche en didactique des mathématiques.

Il paraît toutefois clair qu'avec de jeunes élèves, les situations à explorer doivent être élémentaires mais non simplistes. Leur modélisation peut se réduire à l'une des démarches mentionnées plus haut. Plus tard, plusieurs démarches de ce type devront être combinées, des analogies avec d'autres situations déjà rencontrées pourront être exploitées. Progressivement les problèmes proposés augmenteront en complexité et demanderont de plus en plus de connaissances préalables.

La phase de modélisation est aussi une phase de *formalisation*. On ne fait pas d'abstraction sans un certain formalisme. Un plan d'architecte, une carte de géographie, un schéma électrique utilisent aussi des conventions. Le formalisme n'a pas été inventé pour compliquer la vie des élèves, mais au contraire pour simplifier la vie de tous. Ce que nous n'acceptons pas, c'est le formalisme qui ne recouvre pas un vécu, c'est le formalisme creux, sans substance, le formalisme dont l'élève ne voit pas l'utilité. Le formalisme inventé lors de l'étude d'une situation sert de support aux idées. Ce qui est difficile, c'est d'avoir des idées, puis de trouver un moyen de les exprimer. Parfois l'élève est ainsi amené à inventer son propre formalisme, qui sera peut-être assez maladroit mais qui l'aidera à réfléchir, à comprendre, à travailler. La réflexion, les discussions avec d'autres élèves, l'intervention du professeur feront évoluer le formalisme utilisé, qui sera de mieux en mieux adapté à la situation considérée. Finalement, il ne sera pas difficile à l'enseignant de substituer le formalisme standard à celui qui aurait été inventé par l'élève, tout en en conservant la signification.

L'assimilation progressive du formalisme mathématique, organisée de façon que ce formalisme soit porteur de sens, met l'élève en possession d'un puissant moyen d'expression. La méthode axiomatique utilise la mathématique comme langue pour analyser, interpréter et comprendre le milieu. On rejoint ainsi l'usage fait de la mathématique par les autres disciplines. Celles-ci peuvent fournir au cours de mathématique des situations à étudier, permettant de montrer l'intérêt et la puissance d'une théorie mathématique particulière. Un cours de mathématique conçu de cette façon débouche inévitablement sur l'interdisciplinarité et sur le décloisonnement dans l'esprit de l'élève des matières vues aux cours de mathématique, de physique, d'histoire, ...

Une fois une situation traduite en un modèle mathématique, le développement du modèle constitue un travail plus classique. Théorèmes, applications, cas particuliers, exemples, calculs, raisonnements logiques, constructions, ...Ces différentes activités ne peuvent non plus être négligées. Elles permettent d'aboutir à la solution du problème posé. Sans un minimum de compétence et d'habileté, le résultat ne sera pas fiable, même si les idées de départ étaient géniales !

La troisième phase de la méthode axiomatique, la comparaison des résultats obtenus au problème de départ, est tout aussi indispensable. Elle permet de décider si le modèle est à rejeter, ou s'il est acceptable soit tel quel, soit après avoir été affiné. Elle comporte notamment l'analyse des résultats et leur interprétation, y compris une éventuelle composante subjective (par exemple en statistique).

Pour la commodité, on a découpé ci-dessus la méthode axiomatique en trois phases. C'est déjà une simplification, un modèle (abstrait) de la réalité, laquelle est plus complexe : les trois phases peuvent se mêler, on peut être amené à rebondir de l'une à l'autre ...

3.2. La mise en pratique de la pédagogie des situations

Si les principes de la pédagogie des situations font l'objet d'un consensus de plus en plus large, on doit reconnaître que sa mise en pratique se heurte encore trop souvent à des contraintes matérielles de divers types. Les difficultés soulevées ci-dessous sont loin d'être toutes d'ordre scientifique ou pédagogique. Elles n'en sont pas moins bien réelles et risquent de contrarier la réalisation des objectifs que nous attribuons à l'enseignement des mathématiques au secondaire. Certaines nécessitent des réponses que seules les autorités de l'enseignement peuvent apporter.

1. La mise en pratique de la pédagogie des situations nécessite de la part de l'enseignant à la fois une plus grande compétence scientifique et une plus grande compétence pédagogique. Il doit pouvoir faire face à des situations imprévues, amenées par le développement de la recherche des élèves.

   Ce point soulève — une fois de plus — la question de la formation initiale et continuée des professeurs de mathématique. Il est impératif que les futurs professeurs soient confrontés à la pédagogie des situations tout au long de leurs études. Ils seront ainsi familiers avec une méthodologie qu'on leur demandera d'appliquer lorsqu'ils seront enseignants.

   Il est tout aussi indispensable que tout enseignant puisse se remettre en question et réfléchir à sa propre pratique pédagogique. Il ne pourra le faire s'il n'a été initié lors de ses études à la réflexion épistémologique et à la réflexion sur les principes philosophiques qui sous-tendent une pédagogie.

   Enfin, pratiquer un enseignement de qualité suppose des enseignants motivés, exerçant leur métier avec le minimum de liberté et de stabilité qui leur permet d'exprimer leur créativité et leur esprit de recherche. Le système scolaire doit encourager ses éléments les plus dynamiques.

2. La mise en pratique de la pédagogie des situations nécessite une documentation importante, qui existe mais est souvent mal connue et peu accessible aux enseignants. Nous tenons à rappeler ici une suggestion inscrite dans le livre blanc de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* ([3]), consistant à créer dans les écoles des postes de coordonnateurs pédagogiques dont une des fonctions serait d'informer leurs collègues de la documentation disponible et notamment des nouvelles publications. De plus, des équipes devraient se consacrer à l'élaboration de recueils de situations.

3. La pratique de la pédagogie des situations est de nature à remettre en cause les techniques d'évaluation des élèves. Etant donné que le système d'évaluation conditionne grandement le système d'enseignement, cette question ne peut être sous-estimée. Citons quelques rubriques qui pourraient être évaluées dans le cadre d'une pédagogie des situations.

   (a) la lecture des données

   (b) la correction, la clarté et l'utilité des schémas réalisés

   (c) la disponibilité des connaissances théoriques susceptibles d'aider à la résolution d'un problème

   (d) la communication des démarches qui ont été effectuées et la présentation des résultats

   Ces quelques idées n'épuisent certainement pas le problème de l'évaluation. La *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* compte bien approfondir sa réflexion à cet égard.

4. Il est généralement admis que la pratique de la pédagogie des situations nécessite plus de temps que la pédagogie traditionnelle. A une époque où les horaires des élèves ont plutôt tendance à se contracter, cette constatation peut faire craindre une diminution de la formation globale des élèves. Il est d'autant plus nécessaire pour le cours de mathématique de choisir des sujets à enseigner particulièrement importants, et de ne pas simplement ajouter les objectifs de la pédagogie des situations à ceux de pédagogies plus traditionnelles.

   Par ailleurs, on considère aussi que les notions mathématiques sont mieux assimilées, donc nécessitent moins de rappels, lorsqu'elles se raccrochent à des problèmes qui leur donnent du sens.

3. ¿ Enseigner la mathématique ?, *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*, 1991, pp. 23 à 26

5. La pédagogie des situations doit être complétée par des mises au point, des synthèses, qui permettent aux élèves de structurer leur savoir et de se munir de points de repères. C'est évident : pas plus qu'aucune autre méthode pédagogique, la pédagogie des situations n'est une panacée universelle. Ne plus accorder d'attention qu'aux résolutions de problèmes pourrait entraîner l'apparition de générations d'élèves capables de réaliser d'ingénieux raisonnements mais ne disposant pas des connaissances leur permettant d'exercer leurs aptitudes. Une structuration de la matière et des exercices de fixation restent nécessaires.

La *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* ne se dissimule aucune des difficultés auxquelles se heurte la pratique de la pédagogie des situations. Mais elle estime que cette pratique est aujourd'hui une nécessité incontournable dans la formation de l'élève dans les trois aspects retenus par le *Conseil de l'Education et de la Formation* : l'épanouissement personnel, l'insertion professionnelle et la formation du citoyen.

4. Du point de vue du contenu

4.1. Quelques remarques générales

L'objectif de comportement proposé au point précédent pourrait être appelé un objectif de "tête bien faite". Ce que l'on oppose d'habitude à la "tête bien pleine". Mais n'imaginons pas qu'une tête vide puisse être bien faite. Pour pouvoir résoudre des problèmes difficiles, pour pouvoir appliquer la méthode axiomatique, un bagage minimum de connaissances est indispensable. La résolution d'un problème sert de motivation à l'étude d'une théorie. Et les connaissances nouvellement acquises permettent d'aborder de nouveaux problèmes. Nous ne pouvons échapper à la question du contenu à enseigner.

A l'occasion de l'enseignement de n'importe quel chapitre mathématique, il est possible d'adopter un point de vue *structural*. Quelques remarques générales s'imposent à ce sujet.

On dit souvent que les structures permettent une économie de pensée. C'est bien là leur rôle en effet. Encore faut-il que l'élève éprouve le besoin de faire des économies ! Introduire une structure nouvelle est absurde à un moment où on n'en connaît qu'un seul exemple. C'est tout aussi absurde si les problèmes qui font intervenir ces exemples leur sont spécifiques et ne peuvent apparaître comme des cas particuliers d'un problème général. Pour que l'introduction d'une structure nouvelle soit justifiée, il convient que des analogies aient été perçues entre des situations apparemment différentes, des analogies portant sur des objets ou sur des relations qui lient des objets. Il est aussi indispensable que des contre-exemples soient disponibles, montrant le rôle précis des propriétés qui deviendront les axiomes de la structure.

Les structures permettent de formaliser des analogies entre situations différentes. L'introduction d'une structure nouvelle doit être l'aboutissement d'un processus de modélisation dont l'utilité apparaît clairement aux élèves.

De plus, avec divers auteurs nous pensons que, d'une façon générale, les objets mathématiques réellement significatifs sont plutôt *les morphismes* que *les structures*. Ainsi, les ensembles sont souvent moins importants que les fonctions, les groupes moins importants que les morphismes de groupes, les espaces vectoriels moins importants que les applications linéaires, les espaces topologiques moins importants que les fonctions continues, etc.

Plus précisément une structure donnée (la structure d'espace vectoriel par exemple) ne doit son intérêt qu'au fait qu'elle permet d'exprimer commodément les résultats concernant les morphismes (les applications linéaires dans ce cas). Elle a le plus souvent été inventée dans ce but. Les structures constituent des cadres facilitant l'étude des morphismes, mais l'objet essentiel de l'étude continue d'être les morphismes. Historiquement, il est d'ailleurs clair que les grandes structures ont été introduites après les morphismes correspondants, et parfois longtemps après.

Ainsi, quand nous parlons d'algèbre linéaire, nous pensons d'abord aux applications linéaires, aux matrices, aux équations linéaires, quand nous parlons d'analyse, nous pensons aux fonctions continues et dérivables, quand nous parlons de probabilités, nous pensons aux variables aléatoires.

A la fin du paragraphe 2 nous avons déjà énoncé deux critères de choix des sujets à enseigner : l'utilité pour les applications et la culture générale. Nous ne reviendrons pas sur le deuxième : il laisse une très grande liberté dans le choix des sujets. Pour les élèves qui ne pratiqueront plus guère les mathématiques ultérieurement, pourquoi ne pas laisser l'enseignant choisir certains thèmes d'études en fonction de ses goûts, de ses intérêts et de ceux de ses élèves ? La seule contrainte serait alors au niveau des comportements. Quant aux élèves qui continueront à utiliser la mathématique, l'objectif de culture générale n'est pas incompatible avec l'objectif utilitaire.

L'enseignant devra profiter de toutes les occasions pour situer les notions rencontrées dans leur cadre historique ou philosophique.

Avant d'expliciter et d'exploiter le critère *utilité pour les applications*, il nous semble utile d'énoncer un critère *à ne pas utiliser* : la difficulté de l'enseignement, notamment le risque de dérapage inhérent à certains sujets. Il convient dans un tel cas d'analyser les raisons pour lesquelles l'enseignement passe mal, de repenser cet enseignement, de réévaluer à quel âge on va le présenter aux élèves, d'analyser sa place par rapport à d'autres sujets, mathématiques ou non, bref d'étudier sa faisabilité. Et si après ce travail, la conclusion générale est que le sujet est décidément trop difficile, il reste à examiner ce qui peut être mis en place au niveau du secondaire pour en préparer l'étude au niveau du supérieur, dans une optique d'enseignement en spirale.

4.2. Des théories "terminales"

Examinons à présent le critère *utilité pour les applications*. Il s'applique principalement pour élaborer le programme des élèves qui se destinent à une carrière scientifique ou technique nécessitant un bagage mathématique important. Le mot *applications* doit être considéré dans un sens très large. Il ne s'agit pas nécessairement d'applications extra-mathématiques. L'enseignement d'une théorie peut se justifier par le fait qu'elle est utile, voire nécessaire, pour en aborder une autre. Par exemple, les automorphismes d'une structure donnée s'organisent naturellement en groupes et des morphismes de groupes apparaissent tout aussi naturellement. Ainsi l'algèbre des groupes est utile dans l'étude d'autres sujets mathématiques, une utilité qui résulte d'abord des méthodes de raisonnement qu'elle met en place.

Dans cette optique, commençons par choisir les théories *terminales* (relativement à l'enseignement secondaire). Ce doivent être des théories importantes par leurs applications et dont l'étude ne peut se faire qu'à la fin du secondaire.

Nous proposons le choix suivant :

— ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE
— ANALYSE
— PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Ce sont les trois domaines qui nous semblent les plus porteurs d'applications. Avec la géométrie, ils permettent particulièrement bien la mise en œuvre de la méthode axiomatique. Cela ne signifie pas que les autres domaines sont sans intérêt, mais que dès la première année, les programmes de mathématique du secondaire devraient tenir compte de ce que, pour un nombre non négligeable d'élèves, cet enseignement culminera au cours des deux dernières années avec ces trois sujets et qu'il convient donc d'en préparer l'étude chaque fois que c'est possible, directement ou indirectement.

Détaillons quelques raisons pour lesquelles les trois sujets indiqués plus haut nous paraissent dominants. Cela nous amènera à évoquer des morceaux de théorie non actuellement enseignés dans le secondaire. Cela ne veut pas dire que nous préconisons que ces morceaux soient inscrits dans les programmes (cela ne veut pas dire le contraire non plus). Mais l'enseignement ne s'arrête pas à la fin du secondaire. Celui-ci a aussi pour fonction de préparer l'enseignement supérieur, y compris dans la conception des programmes.

4.2.1. L'algèbre linéaire et la géométrie

L'algèbre linéaire tire une grande partie de son importance de la difficulté technique de résoudre les problèmes non linéaires. Alors, on simplifie, on linéarise. Les phénomènes linéaires sont simples. Dès que l'on passe au degré deux, les situations peuvent devenir atroces. Faut-il rappeler que la génération de certains fractals, l'ensemble de Mandelbrot étant le plus connu, ne fait intervenir que des fonctions du second degré ? L'algèbre linéaire est peut-être même trop simple, c'est une théorie qui ne réserve guère de surprises. Cependant, on nous fera remarquer que certains élèves ont de grosses difficultés à assimiler ce qu'on en enseigne actuellement. C'est vrai mais cela ne prouve à nos yeux que la nécessité de repenser cet enseignement. Met-on les choses importantes en évidence ? Sont-ce les espaces vectoriels (les structures) qui posent problème ou les applications linéaires (les morphismes) ? Peut-être accorde-t-on trop de place à la structure, et pas assez aux morphismes et que de ce fait, l'élève ne perçoit pas le véritable sens de l'algèbre linéaire.

Dans un premier temps, l'algèbre linéaire est inséparable de la géométrie analytique, du plan et de l'espace. Elle fournit un moyen efficace et puissant de résoudre des problèmes de géométrie du premier et du second degré. Une précaution doit être prise : l'algèbre linéaire ne peut absorber complètement la géométrie, sous peine de voir disparaître l'intuition géométrique. Loin d'être inutile, celle-ci est indispensable pour assimiler l'algèbre linéaire elle-même. Toute séparation entre les deux sujets serait dommageable pour les deux.

Au niveau des applications linéaires, l'idée qui possède vraisemblablement le plus grand nombre d'applications est celle de diagonalisation des matrices, c'est-à-dire la mise en évidence des vecteurs propres et valeurs propres. Pensons à la décomposition de la lumière blanche en onde monochromatiques, aux petits mouvements autour d'une position d'équilibre, aux modes normaux de vibration, aux axes d'inertie d'un solide, aux analyses factorielles en statistique, à la résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, à la décomposition d'un son en harmoniques, à la mécanique quantique, etc. Tous ces phénomènes reposent sur la même idée mathématique : déterminer les vecteurs propres d'une matrice ou plus généralement d'un opérateur linéaire. Ici aussi les approches géométriques et analytiques d'un même problème se complètent harmonieusement.

Faut-il pour autant prendre la diagonalisation des matrices comme objectif de l'enseignement de l'algèbre linéaire au secondaire ? Peut-être pas. Mais ce qui semble évident, c'est que l'importance de l'algèbre linéaire ne peut être sous-estimée.

4.2.2. L'analyse

Avec l'analyse, les élèves se trouvent en présence d'un phénomène qu'ils n'ont rencontré auparavant que de façon accidentelle : la nécessité de procéder à des approximations. Qu'est-ce qu'effectuer un passage à la limite sinon considérer des approximations de plus en plus précises d'un nombre (ou d'une fonction) ? De nombreuses démonstrations d'analyse reviennent à prouver qu'une limite vaut 0. Elles se font en manipulant des *inégalités*. Au contraire, l'algèbre, l'arithmétique et même la géométrie manipulent le plus souvent des égalités. L'analyse nécessite donc une nouvelle forme d'intuition, qu'elle contribue à former : celle qui permet de manipuler les approximations. Inutile d'espérer fixer par exemple la notion de nombre réel sans formation de cette intuition.

Nous ne considérons donc pas comme analyse les calculs de dérivées ou de primitives, ni même de limites qui ne mettent en œuvre que des manipulations algébriques. Et le premier objectif que nous attribuons à l'enseignement de l'analyse est la formation de l'intuition liée aux approximations.

A côté des applications qui se traduisent par des recherches d'extrema, il faudrait en envisager d'autres qui fassent apparaître des équations différentielles. Celles-ci ne sont pas actuellement au programme du secondaire. Et pourtant le modèle mathématique de nombreuses situations extraites des disciplines scientifiques ou des sciences humaines repose sur des équations différentielles. Qu'il nous suffise de rappeler les équations de la mécanique, de l'électromagnétisme, de la cinétique chimique, de la dynamique des populations ainsi que les modèles dynamiques en économie et en gestion.

Ajoutons que si la fonction exponentielle e^{kx} est importante, c'est essentiellement parce qu'elle est solution de l'équation $y' = ky$, c'est-à-dire qu'elle apparaît dans les solutions de tout problème où le taux d'accroissement d'une grandeur est proportionnel à cette grandeur. (Croissance des populations, désintégration radioactive, évolution de la valeur acquise par un capital...) Il faudra examiner si les équations différentielles linéaires à coefficients constants constituent un objectif inaccessible pour l'enseignement secondaire.

Mettre les élèves en possession de méthodes de résolution d'équations différentielles, si simples soient-elles, c'est leur donner de nouvelles possibilités d'appliquer la méthode axiomatique.

4.2.3. Les probabilités et statistiques

Si on réalisait un jour le hit-parade des applications des mathématiques, les statistiques (plus encore que les probabilités) seraient classées au tout premier rang. Faut-il faire remarquer que l'Etat s'est doté d'un *Institut National des Statistiques*, mais non d'un Institut National d'Algèbre linéaire ou d'Analyse ? Indispensables à tous les niveaux de décision, les statistiques n'en sont pas moins très mal connues du grand public. Elles sont aussi souvent manipulées ou réduites au calcul d'une moyenne arithmétique. L'importance des statistiques dépasse l'enseignement des mathématiques ou même la culture générale. Il s'agit de la formation du citoyen à son rôle de participant à la prise de décision politique. Ce sujet pourrait donc être abordé, à des niveaux différents, avec l'ensemble de la population du secondaire.

Statistiques et probabilités se prêtent également particulièrement à l'application de la méthode axiomatique. Les situations sont nombreuses qui permettent d'élaborer des modèles. Les difficultés traditionnellement rencontrées, tant par les enseignants que par les élèves, proviennent d'ailleurs de cet aspect. Il est à noter aussi que les modèles rencontrés en statistiques et probabilités font intervenir une quantité non négligeable d'algèbre linéaire ou d'analyse.

La notion de morphisme que l'on rencontre en probabilité est celle de variable aléatoire. Il est clair que les distributions de probabilités qui y sont associées ont de tout temps constitué l'essentiel du sujet. Il est tout aussi clair qu'il n'est pas indispensable d'introduire la structure générale d'espace probabilisé pour parler de variable aléatoire. Au niveau où nous nous plaçons, l'étude des variables discrètes d'une part, des variables qui admettent une densité de probabilité d'autre part est largement suffisante.

4.3. D'autres sujets, non moins importants

Ayant passé en revue les théories "terminales", nous pouvons "remonter la chaîne". Contentons-nous de quelques remarques.

4.3.1. Les nombres

Les nombres figurent évidemment parmi les objets mathématiques fondamentaux. Les extensions successives de la notion de nombre sont apparues en réponse à des problèmes.

Les nombres naturels, entiers, rationnels sont rencontrés en arithmétique, particulièrement à l'occasion de l'étude de la divisibilité et de celle des fractions. On constate à cette occasion l'apparition d'une forme de pensée particulière liée à ce que, comme l'analyse, l'arithmétique utilise une relation d'ordre plutôt que l'égalité. A la différence de l'analyse, cet ordre — la divisibilité — est un ordre discret : entre deux nombres, il n'est pas toujours possible d'en insérer un troisième. Il en résulte que la pratique de l'arithmétique permet le développement de compétences spécifiques.

Les nombres réels s'introduisent un peu subrepticement dans les cours de mathématique. Quelques individus isolés apparaissent très tôt, comme $\sqrt{2}$ ou π. Progressivement, l'élève prend conscience de certaines différences entre rationnels et irrationnels (notamment le caractère périodique ou non des développements décimaux). C'est au cours d'analyse qu'il revient de distinguer avec plus de précision entre les deux notions. Il est toutefois difficile de croire que l'enseignement secondaire puisse "épuiser le sujet".

Les nombres complexes sont traditionnellement au programme de la dernière année des sections scientifiques. Pour être justifié, leur enseignement devrait s'appuyer sur des applications. Nous pensons notamment à l'interprétation géométrique des nombres complexes et à leur utilisation en vue de la résolution de certains problèmes de géométrie.

4.3.2. L'algorithmique

La démarche algorithmique, y compris la rédaction et l'exécution d'un programme informatique, est un excellent accompagnement de l'enseignement de nombreux sujets. Elle contribue à la fixation des notions étudiées en les rendant opérationnelles. Elle développe particulièrement la rigueur et nécessite à la fois une vision d'ensemble d'un problème et une étude tout à fait détaillée de celui-ci. L'utilisation de calculateurs s'avère également utile sinon indispensable pour la résolution de problèmes dont les données n'ont pas été trafiquées. Ainsi, l'algorithmique peut être directement liée à la pratique de la pédagogie des situations.

L'algorithmique doit également être associée à d'autres sujets, en particulier l'analyse et l'arithmétique. Très souvent en effet, les algorithmes utilisés sont de nature itérative : une technique de discrétisation permet le calcul d'une suite de valeurs approchées du résultat cherché. L'analyse permet de justifier rigoureusement ces algorithmes qui mettent parfois en œuvre des notions d'arithmétique et d'analyse combinatoire très poussées.

4.3.3. La géométrie

Tout à la fois observation, analyse et étude de l'espace dans lequel nous vivons, la géométrie est aussi *modélisation* de cet espace, dès les notions les plus élémentaires (droites, points, plans, ...). L'étude des transformations est, elle aussi, un bel exemple de modélisation mathématique de mouvements ou d'effets artistiques (symétries, rotations, ...) ou de théories construites à partir de problèmes (projections parallèles, homothéties, ...)

Tout en constituant un terrain privilégié pour initier l'élève à la démonstration, la pratique de la géométrie est peut-être plus importante pour la formation de l'intuition géométrique que pour les résultats géométriques eux-mêmes. On a parfois dit, en caricaturant sans doute quelque peu, que la géométrie ne comportait que deux théorèmes : ceux de Thalès et de

Pythagore. Le premier est à associer à l'algèbre linéaire, le second à l'algèbre bilinéaire (ou des formes quadratiques).

Il est donc vrai que les résultats significatifs de géométrie pourraient se déduire d'autres sujets tels que l'algèbre linéaire. Ce serait cependant une erreur de supprimer un enseignement autonome de la géométrie. L'intuition géométrique permet à l'élève en cours d'apprentissage d'exploiter au mieux une perception visuelle, de se créer des images mentales, contribuant ainsi à la compréhension de sujets plus complexes.

L'étude des transformations géométriques prépare également la mise en place de la structure de groupe dont nous avons dit plus haut qu'elle se rencontre chaque fois que l'on considère les automorphismes, c'est-à-dire les symétries, d'une structure. On sait que faire apparaître des invariants et des symétries est une technique d'investigation très souvent fructueuse. La reconnaissance et l'exploitation de la structure de groupe des automorphismes d'une situation sont donc des objectifs à poursuivre.

4.3.4. L'algèbre et le calcul littéral

Le calcul littéral est une modélisation des calculs numériques de même que les équations algébriques résultent de modélisations de *problèmes*. L'apprentissage de l'algèbre et du calcul littéral s'inscrit ainsi dans le cadre de l'apprentissage de la méthode axiomatique. Une certaine habileté et une certaine fiabilité en calcul algébrique restent indispensables pour pouvoir mener à bien des résolutions de problèmes difficiles.

4.3.5. Le langage ensembliste et relationnel

Si, comme il est dit plus haut, un formalisme sans signification est à proscrire, il y a néanmoins lieu d'amener progressivement l'élève à utiliser des notations et un langage rigoureux et cohérents. C'est à travers tous les chapitres du cours de mathématique que cet objectif doit être poursuivi. En particulier le vocabulaire ensembliste permet de munir l'élève d'un moyen d'expression puissant, mais non exclusif. Les activités de traduction d'un langage dans un autre constituent une occasion de vérifier la compréhension véritable du formalisme utilisé.

Les opérations ensemblistes élémentaires ne peuvent donc être négligées. La mise en évidence des relations d'ordre et d'équivalence fournit également à l'élève un moyen de clarifier ses conceptions et d'organiser ses activités.

Dans le même ordre d'idées, les remarques fondamentales concernant les opérations logiques élémentaires, ainsi que la manipulation des quantificateurs, doivent trouver naturellement place dans l'étude des chapitres principaux du cours de mathématique.

5. Conclusions

Nous avons déjà beaucoup parlé de la pédagogie des situations. N'y revenons pas. Il est un autre principe qui mérite d'être réaffirmé : celui de l'enseignement en spirale. Il intervient notamment au moment de la réalisation des programmes de l'enseignement secondaire. Ci-dessus, nous n'avons abordé que des aspects très généraux. Nous souhaitons qu'ils soient pris en considération par les commissions de programmes. Et que celles-ci prévoient des programmes permettant plusieurs retours sur une matière donnée de façon tout à la fois à favoriser l'assimilation, à éviter le phénomène d'oubli et à permettre une progression.

La rédaction d'un programme est chose difficile. Le développement intellectuel des enfants doit être évalué correctement malgré les difficultés que cela comporte. L'utilisation de l'enseignement en spirale permet aussi de minimiser les erreurs éventuelles de conception des programmes.

Souhaitons enfin que les programmes ne soient pas fragmentés en petites parcelles. Une présentation très détaillée favorise une pratique de l'enseignement très analytique, très linéaire, du type "j'ai appris aujourd'hui à mes élèves à résoudre les équations $x + a = b$, demain je leur apprendrai à résoudre les équations $ax + b = c$". Une telle pratique ne rencontre guère les objectifs de comportement que nous attribuons à l'enseignement des mathématiques. Elle n'accorde qu'une autonomie très limitée aux professeurs et à leurs élèves. Elle diminue les possibilités de donner du sens aux notions étudiées. Elle n'est guère compatible avec l'utilisation de la pédagogie des situations, qui généralement suscite une approche plus globale. Elle focalise l'enseignement sur la fixation de points de matière, au détriment de l'activité mathématique.

Au contraire, la méthodologie mise en œuvre doit permettre à l'élève de comprendre la signification et l'importance (relative) des notions qui lui sont présentées. Il doit sentir qu'en les assimilant, il devient capable de résoudre des problèmes qu'il ne pouvait résoudre auparavant. Il doit donc se sentir plus efficace, plus compétent. Le rôle du professeur consiste aussi à mettre l'élève en confiance, par exemple en le sécurisant lors d'une recherche. De façon plus générale, on rappellera l'importance de la qualité de la relation entre professeur et élève : au-delà de ses performances en mathématique, celui-ci doit se sentir encouragé, reconnu et estimé. La meilleure méthode d'enseignement ne sera épanouissante que si le professeur aime les mathématiques et surtout ses élèves.

Découpages, translations, rotations et Cabri-géomètre

F. Denis et S. Courtois, *Inspecteurs honoraires*

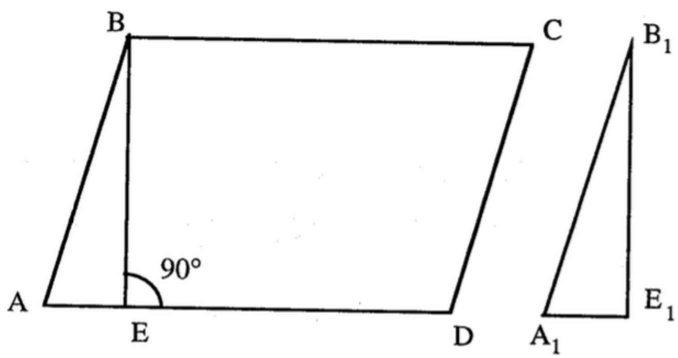
On peut illustrer la notion d'aire et l'équivalence d'aires de figures de plusieurs manières grâce à Cabri-géomètre.

Dans cet article, nous avons choisi de l'aborder en faisant référence à des découpages parce que les découpages et, en général, toutes les manipulations sont trop souvent négligés, y compris dans l'enseignement fondamental, alors que de telles approches des notions seraient utiles, voire indispensables, pour un grand nombre d'élèves.

Les exemples qui suivent correspondent à des situations bien connues, le seul but étant de montrer l'intérêt d'utiliser Cabri-géomètre parce que les constructions sont très précises, mais surtout parce que, grâce à l'aspect dynamique du logiciel, les éléments de base peuvent être modifiés à tout instant (dimensions et positions relatives).

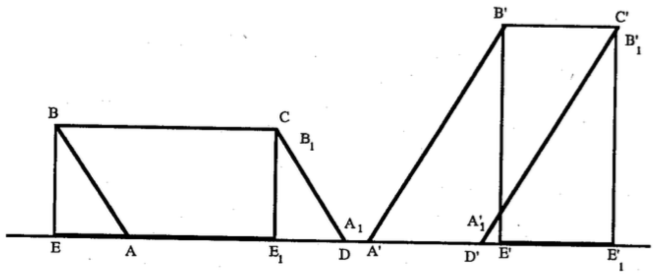
Tous les dessins obtenus à l'écran répondent aux conditions de l'énoncé car les constructions réalisées sont indépendantes du cas particulier initialement envisagé (*propriété essentielle qu'il est impossible d'exploiter complètement dans un écrit*). Ils remplacent avantageusement la figure qui illustre classiquement un énoncé.

1. Aire du parallélogramme



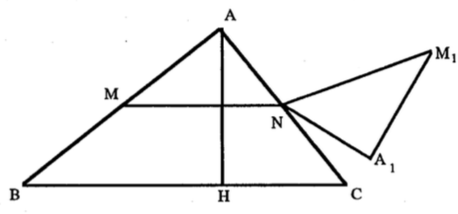
Au lieu de découper le triangle BEA, on peut construire un triangle isométrique $B_1E_1A_1$ en imposant au point E_1 d'appartenir à la droite AD (article "point sur objet") ce qui permet de translater ce triangle et d'amener le segment $[A_1B_1]$ à coïncider avec $[DC]$.

Voyons ce qui se passe si E est extérieur au segment $[AD]$.



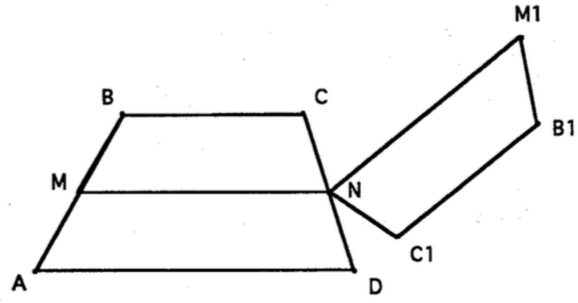
On obtient dans tous les cas un rectangle de même aire que le parallélogramme ayant même base et même hauteur. Ce qui montre que le procédé généralise le découpage et l'assemblage physiques.

2. Aire du triangle



M et N étant les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$, on construit le triangle M_1NA_1 isométrique au triangle MNA de manière que M_1NA_1 soit l'image de MNA par une rotation de centre N (M_1 est un point du cercle de centre N et de rayon $|NM|$), ce qui permet d'amener $[NA_1]$ en coïncidence avec $[NC]$ en saisissant le point M_1 avec la souris et d'obtenir un parallélogramme (ce qu'il conviendrait d'ailleurs de prouver !) de côté $[BC]$ dont la hauteur vaut la moitié de celle du triangle.

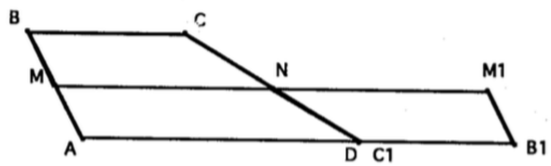
3. Aire du trapèze



M et N sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[DC]$.

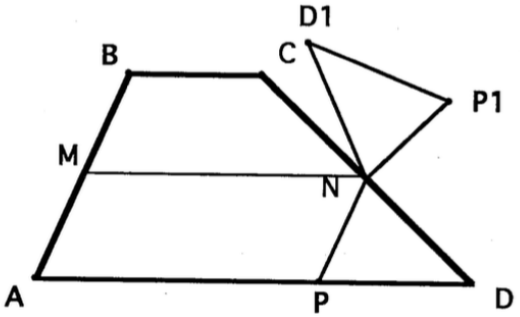
La technique utilisée est identique à celle du point 2 (le trapèze $NM_1B_1C_1$ est l'image du trapèze $NMBC$ par une rotation de centre N) : il suffit de déplacer le point M_1 pour amener C_1 en D et obtenir un parallélogramme de même aire que le trapèze $ABCD$.

Il est évident qu'il restera toujours à faire la preuve qu'il s'agit effectivement d'un parallélogramme, mais la possibilité de modifier instantanément les positions relatives des éléments de base devrait amener à penser que "cela a l'air d'être toujours vrai" et justifier le fait que l'on s'attachera à prouver qu'il en est bien ainsi.

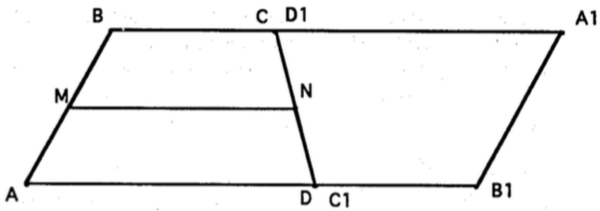


Cette construction correspond à : "L'aire d'un trapèze est égale au produit de la somme des bases par la moitié de la hauteur".

Après avoir construit $[NP]$ parallèle à $[AB]$, on aurait pu construire le triangle NP_1D_1 image de NPD par une rotation de centre N pour illustrer le fait que l'aire de $ABCD$ est égale au produit de la mesure de la longueur du segment MN par la mesure de la hauteur du trapèze.



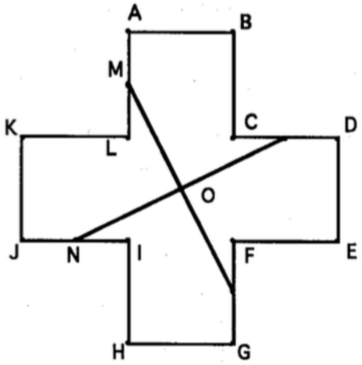
Il est également possible de construire l'image de $ABCD$ par une rotation de centre N et d'obtenir un parallélogramme dont un des côtés est égal à la somme des bases du trapèze et de même hauteur que celle du trapèze, parallélogramme dont l'aire vaut le double de celle du trapèze.

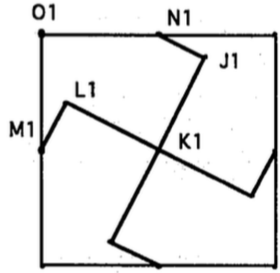


4. Puzzles

Voici deux des exemples de puzzles imaginés par H.E. DUDENEY proposés par H.M. CUNDY et A.P. ROLLETT dans leur ouvrage intitulé "Modèles mathématiques" édité par CEDIC en 1978 :

- Découper une croix grecque en quatre morceaux et les réarranger pour former un carré.

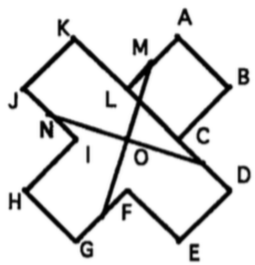


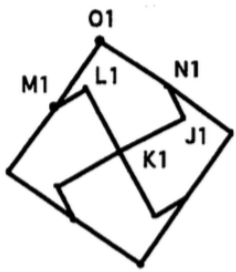


M et N ainsi que leurs symétriques par rapport au point O sont les milieux des côtés auxquels ils appartiennent.

$O_1N_1J_1K_1L_1M_1$, figure isométrique à $ONJKLM$, est l'image de cette pièce du puzzle par la composée de la translation de couple (O, O_1) et de la rotation de centre O_1 et d'angle orienté (OM, O_1M_1). Le carré a ensuite été complété par des rotations successives de $O_1N_1J_1K_1L_1M_1$ d'amplitudes $90°, 180°$ et $270°$ et de centre K_1.

On peut évidemment modifier à tout moment la longueur du côté du carré qui a servi à construire la croix grecque, la position de cette croix et celle du carré obtenu par assemblage des pièces du puzzle. Par exemple :





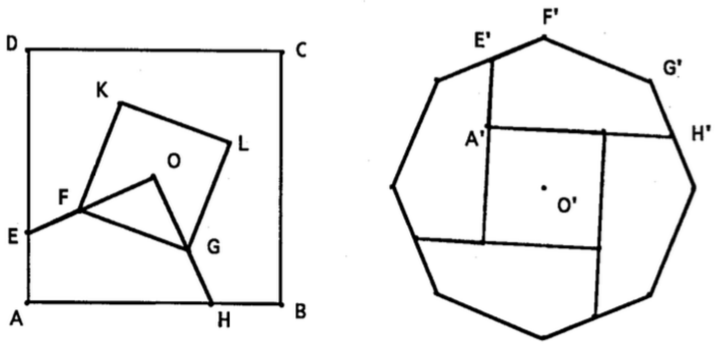
- Découper un carré en cinq morceaux pour obtenir un octogone régulier de même aire.

L'ouvrage précité donne les figures que voici, mais ne fournit aucune indication sur les constructions qui permettent de réaliser le découpage du carré.

1. Le carré et l'octogone admettent quatre rotations de $90°, 180°, 270°$ et $360°$.

Le puzzle est donc constitué de quatre pentagones identiques à $AEFGH$ et du carré $FGLK$.

2. Supposons le problème résolu.



Si on désigne par C_4 et C_8 les longueurs des côtés du carré et de l'octogone, on voit que $|AE| = C_4 - |AH|$ et $|AE| = |AH| - C_8$ donc $2. |AE| = C_4 - C_8$ et que $|EF| = C_8 : 2$.

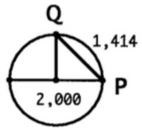
Pour construire $AEFGH$ (et ensuite le carré $FGLK$) dans le carré $ABCD$, il suffit de connaître les longueurs des segments $[AE]$ et $[EF]$.

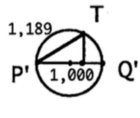
Le problème se ramène donc à déterminer C_8 en fonction de C_4 sachant que l'aire de l'octogone régulier est $(C_4)^2$ ou, ce qui est équivalent, à déterminer le rayon R du cercle circonscrit à l'octogone. Or on sait (ou on retrouve aisément) que l'aire de l'octogone régulier vaut $2\sqrt{2}.R^2$.

3. Détermination du rayon R du cercle circonscrit à un octogone régulier de même aire que le carré de côté C_4 donné (le logiciel permettra de changer la longueur du côté du carré lorsqu'on le souhaitera).

$$R = \frac{C_4}{\sqrt{2\sqrt{2}}}.$$

La construction d'un segment dont la mesure est égale à la racine carrée de 2 et celle d'un segment dont la mesure est égale à la racine quatrième de 2 sont des applications directes du théorème de Pythagore et du théorème : "Un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse entière et sa projection orthogonale sur l'hypoténuse".

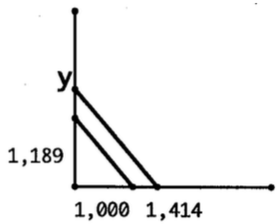




$$|PQ| = |P'Q'| = \sqrt{2} \text{ et } |P'T| = \sqrt[4]{2}.$$

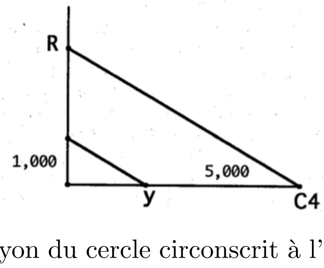
Celle de $y = \sqrt{2}.\sqrt[4]{2}$ est une application du théorème de Thalès, car :

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{y}$$



C'est également Thalès qui permet de construire un segment de mesure R tel que

$$\frac{y}{1} = \frac{C_4}{R}$$

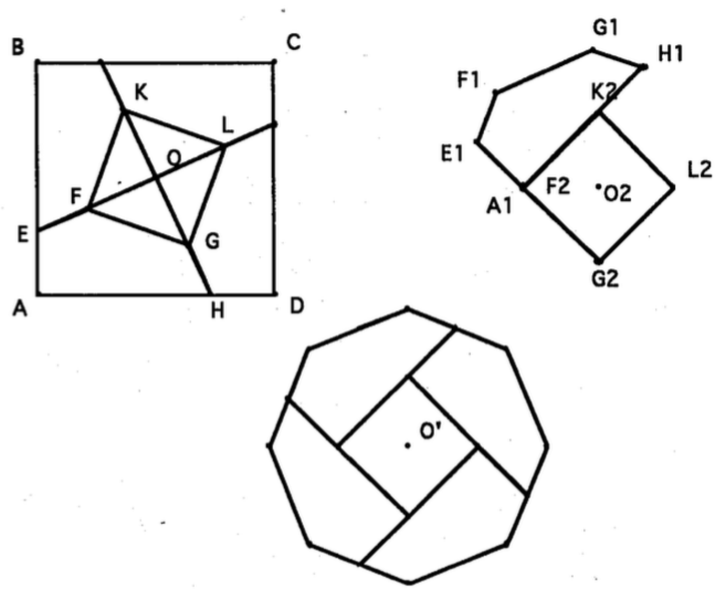


On dispose maintenant du rayon du cercle circonscrit à l'octogone régulier (et donc de C_8) de même aire que le carré de côté C_4, ce qui permet de déterminer les longueurs des segments $[AE]$ et $[EF]$ et de terminer le découpage du carré.

4. $A_1E_1F_1G_1H_1$ est l'image du pentagone $AEFGH$ par la translation définie par le couple (A, A_1) et une rotation de centre A_1 (on choisit H_1 sur un cercle de centre A_1 et de rayon $|AH|$).

$F_2G_2L_2K_2$ est l'image du carré $FGLK$ par la translation définie par le couple (F, F_2) et une rotation de centre F_2 (on choisit G_2 sur un cercle de centre F_2 et de rayon $|FG|$, article "point sur objet").

Il suffit d'assembler ces pièces en faisant coïncider F_2 avec A_1 et en plaçant le point K_2 sur $[A_1H_1]$ pour obtenir une figure dont les rotations ayant pour centre celui du carré et pour amplitudes $90°, 180°, 270°$ achèveront le puzzle de l'octogone régulier.



5. Théorème de Pythagore

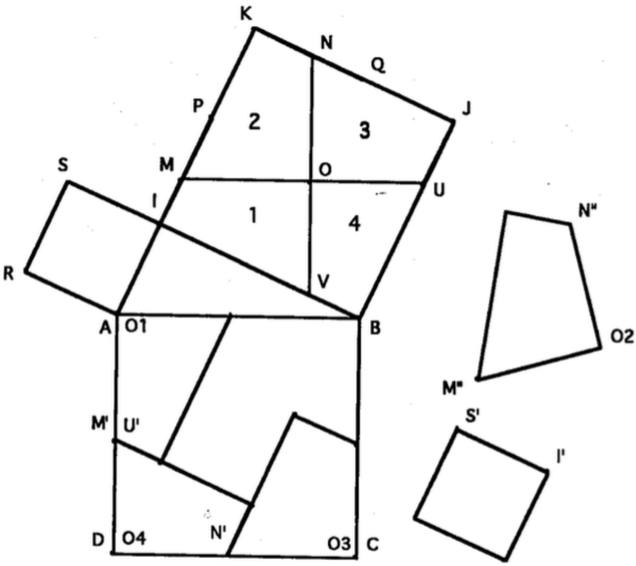
La même technique permet de montrer que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

P est le milieu de $[IK]$ et

Q est le milieu de $[KJ]$

M appartient au segment $[IP]$ et N au segment $[KQ]$.

MU est parallèle à AB et NV est perpendiculaire à AB.



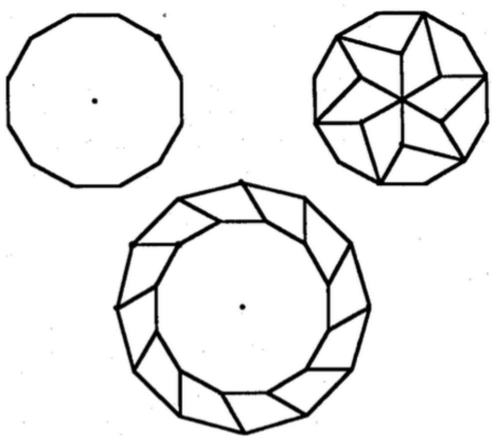
Afin de mettre en évidence la manière d'assembler les cinq pièces du "puzzle", pièces qui sont des figures isométriques à $OMIV$, $OMKN$, $ONJU$, $OUBV$ et $SIAR$ et qui sont appelées à recouvrir le carré $ABCD$, nous avons choisi de représenter l'étape à l'issue de laquelle trois seulement de ces pièces ont été correctement mises en place sur le carré $ABCD$.

6. Figures semblables

Deux découpages proposés dans l'ouvrage "Modèles mathématiques" dont les références figurent ci-dessus, peuvent être réalisés en utilisant la technique utilisée dans les paragraphes précédents.

Il s'agit :

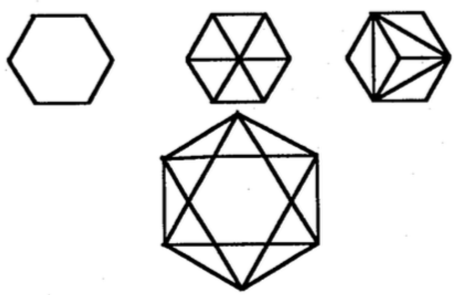
1. De découper un dodécagone régulier en douze pièces superposables qui ajoutées à un dodécagone isométrique au premier permettront de construire une figure semblable dans le rapport $\sqrt{2}$.



On appelle *gnomon* d'une figure donnée toute figure dont la juxtaposition à la figure donnée produit une figure résultante semblable à cette figure. (concept dû à Aristote)

Remarque : six des pièces du puzzle doivent être retournées pour construire le dodécagone régulier dont l'aire est le double de l'aire du dodécagone régulier initial.

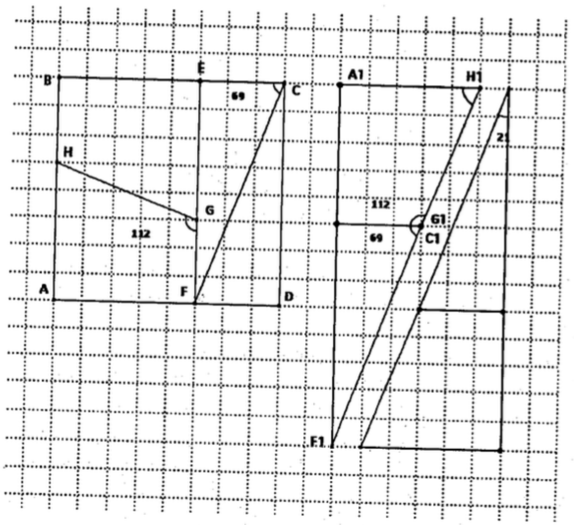
2. Etant donné trois hexagones réguliers isométriques, il s'agit d'en découper deux en six parties et d'assembler ces pièces avec le troisième hexagone pour obtenir un hexagone régulier dont la longueur du côté est le produit des longueurs des côtés des trois hexagones initiaux par $\sqrt{3}$.



7. Un découpage-piège

En découpant de façon adéquate un carré de 8 cm de côté on peut donner l'impression que les pièces obtenues permettent de construire un rectangle de 13 cm de longueur et 5 cm de largeur ce qui donne $64 = 65$!

Voyons ce que donne ce découpage avec Cabri-géomètre.



La mesure des angles permet de constater que les points $F1, C1$ (confondu avec $G1$) et $H1$ ne sont pas alignés.

La mesure de l'aire comprise entre les deux pseudo-triangles est 14 (actuellement la mesure des aires n'est possible qu'avec la version Macintosh de Cabri-géomètre).

La supercherie est ainsi mise à jour, **mais elle doit inciter à toujours douter et contrôler et renvoie à la nécessité de faire la preuve.**

Adresse des auteurs :

F. DENIS
Rue Duchêne 9
4120 NEUPRE

S. COURTOIS
Rue de Racour 83
3400 LANDEN

La recherche d'applications concrètes en calcul des probabilités

D. Justens, *Institut Cooremans (Ville de Bruxelles)*
Université de Liège

1. Le contexte sociologique

Le calcul des probabilités et la statistique descriptive présentent (ou du moins devraient présenter) à notre avis un terrain privilégié pour donner des mathématiques, dès le secondaire, une vision un peu moins abstraite, voire même, c'est aussi nécessaire, utilitariste. Quel n'est pas notre désappointement de retrouver dans presque tous les manuels ou les notes de cours les même *fausses* applications construites de toutes pièces, inventées pour les besoins de la cause et généralement très éloignées de la réalité qui pourtant intéresserait au premier titre la très grande majorité des élèves ou étudiants. C'est contre cette mise à l'écart systématique de résultats essentiels que nous entendons ici protester en donnant quelques applications simples (et même simplistes) du théorème des probabilités totales. Les sacs remplis de boules rouges et noires dans lesquels on opère des tirages nous irritent particulièrement : outre le fait que les questions construites sur base de cet exemple soient très rarement pédagogiquement intéressantes, car abstraites et éloignées d'une activité raisonnable réelle, on peut se demander quel individu normalement constitué accepterait de perdre son temps à remplir des urnes d'objets de couleurs différentes pour s'amuser ensuite à en *choisir* une *au hasard* pour y prélever un objet *aléatoirement*.

Nous pensons que la présentation d'un exercice dans un contexte réaliste (et non artificiellement mis en place pour justifier une partie du cours), loin de décourager les élèves, va au contraire stimuler leur esprit de réflexion et les amener progressivement à l'abstraction.

L'erreur commise en ayant recours aux *faux exemples* est de considérer que leur simplicité constitue un avantage pédagogique. En fait l'absurdité implicite des situations qu'ils présentent ferme souvent définitivement les portes de la compréhension et provoque le refus de l'abstrait.

Notre expérience nous a parfois conduit à constater (et nous espérons bien que notre propos en choquera plus d'un) que la présentation de pseudo-applications volontairement simplistes et dégagées de contexte concret, était une forme explicite de mépris. A la question : “A quoi cela sert-il ?”, posée par leurs disciples, trop de mathématiciens répondent encore “que c’est trop compliqué à expliquer”, “qu’ils verront cela plus tard” (quand ?) et proposent pour se dédouaner de fausses applications inventées tout exprès, qui traînent, poussièreuses, dans les manuels et auxquelles personne, jamais, n’a pu trouver d’utilité véritable.

Le contexte probabiliste

Nous allons travailler dans le cas d’un ensemble fondamental Ω de cardinal fini, ce qui permet de probabiliser l’espace sans devoir recourir à la notion abstraite de σ-algèbre. On peut alors toujours considérer l’ensemble des parties de Ω comme constituant l’ensemble des événements auxquels il faut associer une probabilité. Dans le cadre de notre exemple, introduction du contrôle de qualité dans une chaîne de fabrication, l’ensemble Ω est initialement de cardinal 2, puis progressivement, à mesure que l’intervention du gestionnaire se justifie, il croît géométriquement, conformément à la notion d’arborescence. Notre espace de probabilité est donc : $\{\Omega, P(\Omega), P\}$.

Nous supposons l’axiomatique connue (et intuitivement justifiée ...) et rappelons uniquement les principaux résultats théoriques (dont les démonstrations élémentaires se retrouvent dans tous les manuels) afin de fixer les notations.

Théorème des probabilités totales

Soient $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ un système complet d’événements (partition de Ω) et A un événement quelconque, tous définis dans Ω. On a :

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)$$

Théorème des hypothèses : formule de Bayes

Soient $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ un système complet d’événements et A un événement quelconque, tous définis dans Ω. On définit les probabilités *a* *posteriori* $P(B_k|A)$ et on calcule :

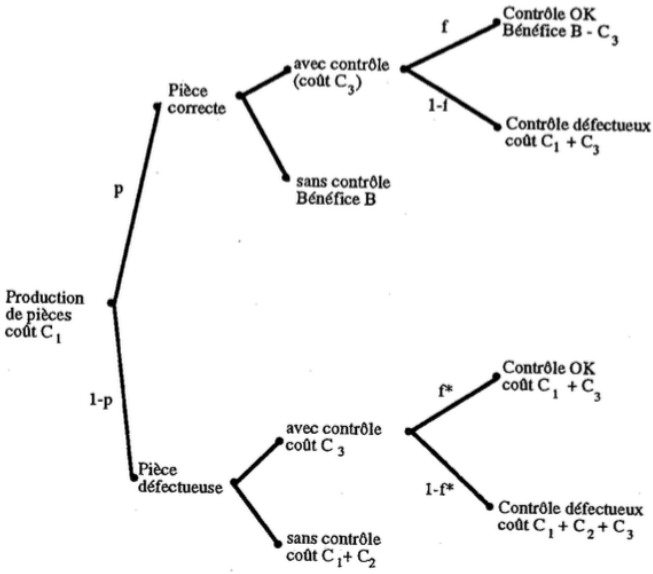
$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)} \qquad \forall k = 1, \ldots, n$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)} \qquad \forall k = 1, \ldots, n$$

2. Le contexte économique : le contrôle de qualité

L'environnement scientifique dans lequel nous vivons depuis quelques décennies nous a progressivement déshabitué de la notion d'erreur. Tout doit être parfait : le non-fonctionnement d'un appareil, la défectuosité d'un système apparaissent aujourd'hui comme autant d'anomalies incompréhensibles. Or toute activité humaine, même électroniquement contrôlée, est de fiabilité strictement inférieure à 100%. C'est ainsi que les possesseurs d'une certaine carte de crédit se sont vus envoyer au mois d'octobre 1994 des récapitulatifs parfaitement fantaisistes, que les débits automatiques par voie de domiciliation sont régulièrement erronés, que tout appareil acheté, même et surtout l'ordinateur sur lequel je travaille en ce moment, est susceptible d'un disfonctionnement, d'une panne plus ou moins grave. Afin de limiter les effets désastreux au niveau renommée de problèmes répétés pour un même produit, il est courant de procéder à un contrôle de qualité pour les objets qui sortent d'une chaîne de fabrication. Ce contrôle est lui également de fiabilité strictement inférieure à 1. Cette dernière est généralement différente pour les pièces correctes et pour les pièces défectueuses et ceci s'explique parfaitement : il s'agit en fait de probabilités conditionnelles et non de simples probabilités ! Présentons graphiquement la situation d'une chaîne de production pour laquelle on envisage la mise en place d'une unité de contrôle.

L'arborescence présentée correspond aux trois niveaux d'activité de l'entreprise : production, décision de contrôle et efficacité du contrôle. Les valeurs indiquées sur les “branches” correspondent aux probabilités associées.



Les hypothèses implicites à notre arborescence sont les suivantes :

- C_1 représente le coût total unitaire à la production

- C_2 modélise le supplément de coût unitaire en cas de mise en circulation d'un article défectueux. C_2 reprend donc entre autres la quantification de la perte d'image de marque consécutive à la vente d'un article de qualité inférieure et celle-ci peut dans certains cas s'avérer relativement importante.

- C_3 quantifie le coût de contrôle par unité produite.

- B représente le bénéfice unitaire réalisé en cas de mise en circulation d'un objet de qualité suffisante sans tenir compte du niveau de fiabilité de la chaîne de production. B n'est évidemment pas égal au solde unitaire du compte "résultats" qui doit prendre en considération les flux négatifs C_2 et C_3 consécutifs au contrôle et à la production d'objets non commercialisables.

- Nous allons supposer que la fiabilité du contrôle est la même pour des objets de qualité suffisante ou insuffisante : $f = f^*$.

Dans ces conditions, faut-il produire ?

C'est le cas lorsque l'espérance de flux financier F consécutif à notre activité est strictement positive.

Sans contrôle, on a donc :

$$E[F] = pB - (1-p)(C_1 + C_2) > 0$$

Ou encore :

$$p > \frac{C_1 + C_2}{B + C_1 + C_2} \tag{1}$$

Avec contrôle apparaît intuitivement la notion d'espérance conditionnelle,

$$\begin{aligned} E[F|C] &= pf(B - C_3) - (C_1 + C_3)p(1-f) - (C_1 + C_3)(1-p)f \\ &\quad -(C_1 + C_2 + C_3)(1-p)(1-f) \end{aligned}$$

Le contrôle est financièrement rentable dès que

$$E[F|C] > E[F]$$

c'est-à-dire que :

$$p < \frac{fC_2 - C_3}{B(1-f) + C_1(1-f) + fC_2} \tag{2}$$

On vérifie aisément que cette dernière quantité est strictement inférieure à 1 et qu'elle est positive dès que l'on se place dans des conditions raisonnables d'utilisation : f proche de 1 et C_2 nettement supérieur à C_3.

Après mise en place du système de contrôle, on peut mesurer expérimentalement le pourcentage de pièces considérées comme correctes et le pourcentage de pièces écartées à la sortie du système de contrôle.

Soit A l'événement "une pièce est déclarée commercialisable".

On peut approcher expérimentalement $P(A) = a$.

Soit le système complet d'événements :

B_1 : la pièce est correcte

B_2 : la pièce est défectueuse.

Dès lors la fiabilité du système nous permet de calculer les probabilités conditionnelles :

$$P(A|B_1) = f$$

$$P(A|B_2) = 1 - f$$

par définition de la fiabilité du système de contrôle.

Le théorème des probabilités totales nous permet alors aisément d'estimer le pourcentage p de pièces correctes sortant de la chaîne de production :

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$a = pf + (1-p)(1-f)$$

On en tire :

$$p = \frac{(a+f)-1}{2f-1} \tag{3}$$

Une autre question importante est la suivante : combien de pièces correctes met-on en circulation après contrôle ? La formule de Bayes nous permet de donner une réponse à cette question. En effet, avec nos notations, il faut calculer :

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} \\ &= \frac{pf}{a} \end{aligned} \tag{4}$$

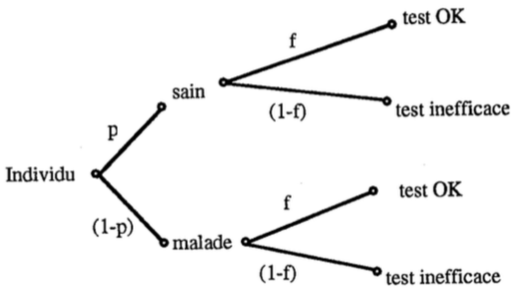
La quantité p est déterminée par (3).

3. Le contexte médical : le dépistage du SIDA

Dans le cadre moins plaisant, mais qui frappe les étudiants par son actualité et qui les concerne tous personnellement, on peut également présenter l'exemple du dépistage d'une maladie contagieuse.

L'arborescence est très proche de ce qui a été présenté au point précédent :

Un individu se présente au dépistage, il est soit sain (probabilité p) soit atteint (probabilité $(1-p)$). Le test est de fiabilité f strictement inférieure à 1. On peut éventuellement travailler avec des fiabilités différentes sur des individus sains ou contaminés, ceci ne modifie pas le caractère illustratif de l'exemple.



La connaissance du pourcentage d'individus déclarés positifs a nous permet d'estimer le pourcentage $q = (1 - p)$ d'individus réellement atteints (probabilités totales). De même la formule de Bayes permet de répondre à la question : lorsque l'on est déclaré positif, quelle est la probabilité d'être malade ? On peut à ce sujet étudier l'évolution de cette dernière probabilité lorsque a croît régulièrement comme c'est le cas actuellement en Belgique pour le virus du SIDA. Ainsi que se passe-t-il par exemple lorsque a passe de 0.0001 à 0.005, f restant constant à 0.999 ? Vous pourrez constater que ce genre de calcul laisse rarement indifférent ...

Adresses de l'auteur :

Daniel Justens
Rue du Jardinage 39
1080 Bruxelles

Curieux arrêté royal

C. Festraets,

Les textes du moniteur ne constituent certainement pas votre lecture favorite, la mienne non plus d'ailleurs. Cependant tout bon citoyen se devant d'être éclairé sur le fonctionnement des institutions, il m'a semblé nécessaire et urgent de signaler au lecteur de cette revue l'arrêté ci-dessous. Et comme, après lecture, vous risqueriez d'avoir des doutes sur le sérieux de cet article, je vous donne la référence : Moniteur Belge du 30.06.94, page 17619.

9 MAI 1994 - Arrêté royal relatif au nombre minimum d'emplois à prévoir au cadre organique des fonctionnaires de police de la police communale

ALBERT II, Roi des Belges,

A tous présents et à venir, Salut

Vu l'article 189 de la nouvelle loi communale ;
Vu l'association des régions ;
Vu le protocole n° 93/07 du Comité des services publics provinciaux et locaux des 23 et 30 novembre 1993 ;
Vu l'avis du Conseil d'Etat ;
Sur la proposition de Notre Ministre de l'Intérieur et de l'avis de Nos Ministres qui en ont délibéré en Conseil ;

Nous avons arrêté et arrêtons :

Article 1er. Le cadre organique des fonctionnaires de police de chaque corps de police communale prévoit un nombre d'emplois au moins égal à la norme minimale de sécurité visée à l'article 2 du présent arrêté, augmentée de 10 %.

Art. 2. Le nombre de fonctionnaires de police, nécessaire pour répondre à la norme minimale de sécurité, est calculé pour chaque commune sur la base de la formule suivante :

$$\begin{aligned}\log(Y) &= -3,40 + 0,09\log(Xa) - 0,36\log(Xb) + 0,28\log(Xc)\\ &\quad -1,60\log(Xd) + 0,09\log(Xe) + 0,16\log(Xf)\\ &\quad +0,32\log(Xg).\end{aligned}$$

Pour l'application de cette formule, il faut entendre par :
Y : le nombre de fonctionnaires de police par 1000 habitants ;
Xa : le nombre de crimes et délits enregistrés dans la commune par 1000 habitants ;
Xb : le pourcentage de jeunes âgés de moins de 20 ans domiciliés

dans la commune par rapport à la population totale ;
Xc : le pourcentage de la population active au sein de la commune, travaillant dans le commerce et dans le secteur horeca ;
Xd : l'indice de la population scolaire hors-centre, c'est-à-dire le rapport entre l'ensemble de la population scolaire qui réside dans la commune et la partie qui fréquente une école en dehors de la commune ;
Xe : le nombre d'accidents de la circulation ayant occasionné un préjudice physique par km^2 dans la commune ;
Xf : le nombre de personnes bénéficiant du minimum de moyens d'existence dans la commune par 1000 habitants ;
Xg : le revenu cadastral moyen par habitant dans la commune.
Si le résultat du calcul ainsi obtenu comporte une décimale égale ou supérieure à 5, il sera arrondi à l'unité supérieur.
Art. 3. Cette norme minimale de sécurité est calculée pour la première fois sur la base des données émanant de :
Y : INS, statistiques population relative à 1991 ;
Xa : ...
...
Art. 4. Le présent arrêté n'est pas applicable aux villes d'Anvers, de Charleroi, de Gand, de Liège et aux 19 communes de la Région de Bruxelles-Capitale.
Art. 5. Notre Ministre de l'Intérieur est chargé de l'exécution du présent arrêté.

Donné à Bruxelles le 9 mai 1994.

ALBERT
Par le Roi :
Le Ministre de l'Intérieur
L. TOBBACK

Qu'une formule aussi sophistiquée que celle prévue par cet arrêté soit nécessaire pour déterminer le nombre de policiers d'une commune me laisse béate d'admiration. Nos fonctionnaires connaissent les logarithmes et sont capables de calculs aussi compliqués, ils disposent de tables, de calculatrices scientifiques, d'ordinateurs peut-être. Il est clair que nous vivons dans un pays de haute civilisation !

Mais examinons cette formule de plus près. Bien évidemment, aucun des paramètres qui y figurent ne peut valoir 0 ou $+\infty$. Si, par exemple, le nombre de crimes et délits commis en 1990 (année de référence pour Xa) est nul, alors $\log(Xa) = \log 0 = -\infty$ et si $\log(Y) = -\infty$, voilà une commune sans aucun policier. C'est peut-être une situation peu plausible. Mais imaginons qu'aucun jeune ne fréquente une école en dehors de la commune, dans ce cas, l'indice Xd vaut $+\infty$ et à nouveau, on a $\log(Y) = -\infty$. Ne parlons pas des formes indéterminées du type $\infty - \infty$ que l'on pourrait obtenir, ne parlons pas non plus du manque de clarté de la dernière phrase de l'article 1er.

Pour voir ce que cette formule peut fournir comme résultat, j'ai imaginé une commune fictive avec les valeurs suivantes pour les différents paramètres :
1 crime ou délit par an pour 1000 habitants : $Xa = 1$,
30 % de jeunes : $Xb = 0,30$,
15 % de la population active travaillant dans le commerce ou l'horeca : $Xc = 0,15$,
1 % des élèves fréquente une école hors de la commune : $Xd = 100$,
10 accidents par km^2 : $Xe = 10$,
10 personnes sur 1000 avec un minimum de moyens d'existence : $Xf = 10$,
20000 F de revenu cadastral par habitant : $Xg = 20000$.

Ces valeurs nous donnent $\log(Y) = -3,092\ldots$, d'où $Y \cong 8,07.10^{-4}$. Remarquons tout de même que d'après l'article 1er, ce nombre est augmenté de 10 %.

Prise de scrupules, je me suis demandée si j'avais bien compris la signification de "pourcentage" dans la définition de Xc et j'ai refait mon calcul en remplaçant Xc par 15 au lieu de 0,15. Il n'y a pas beaucoup de différence, cela nous donne $Y \cong 2,93.10^{-3}$.

Si j'analyse la formule de plus près, et cette fois sans plaisanter, et que je me demande ce qui est le mieux susceptible de faire augmenter le nombre de policiers, je m'aperçois alors que les log du nombre de crimes et délits et du nombre d'accidents de la circulation n'ont qu'un facteur de 0,09, celui du log du nombre de commerçants, restaurateurs et hôteliers est de 0,28 et celui du log du revenu cadastral est 0,32. Vous voilà donc prévenu, si vous voulez être protégé par un police nombreuse, allez vivre dans une commune où il y a beaucoup de commerces et de restaurants, mais surtout où il y a beaucoup de grosses propriétés, à Knokke-Le-Zoute, par exemple. Sans commentaire.

Adresse de l'auteur :

Claudine Festraets
rue J.B. Vandercammen 36
1160 Bruxelles

Forme polynomiale de l'inverse d'une matrice carrée

J. Bair – H. Dujacquier, *Université de Liège – Ecole Normale de Braine-le-Comte*

Dans les écoles du réseau catholique, le cours de 6ème (6 h) comprend des activités sous forme de "thèmes au choix". Parmi ceux-ci, figure le calcul matriciel limité aux opérations sur les matrices. Il est regrettable que l'étude des déterminants n'y figure pas (ainsi que les applications linéaires) sauf pour les élèves qui ont, dans certaines écoles, la possibilité de choisir deux heures de "préparation aux études supérieures".

Par ailleurs, dans le réseau officiel, le programme de sixième (option 6 périodes hebdomadaires) prévoit un chapitre consacré au calcul matriciel : on doit "se limiter à des matrices $m \times n$ où m et n n'excèdent pas 2 et 3" et aborder "les opérations sur les matrices, l'inverse d'une matrice, la définition et les propriétés classiques sur les déterminants d'ordre 2 et 3" [8] ; il est de plus recommandé "d'énoncer la règle de construction de l'inverse d'une matrice" avant de traiter "le calcul des déterminants en se servant de la notion de cofacteur (mineur)" [8].

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier l'inverse d'une matrice en nous servant exclusivement des opérations fondamentales du calcul matriciel (à savoir la somme, le produit de deux matrices, le produit d'une matrice par un réel [8]), principalement en exploitant les puissances de la matrice à inverser.

Nous supposerons parfaitement introduite la notion d'inverse (bilatère) et, pour rester fidèles au programme de l'enseignement secondaire, nous considérerons d'abord le cas des matrices carrées de genre (2,2) ou, plus simplement d'ordre 2, puis d'ordre 3, avant de traiter le cas général d'ordre n quelconque.

Conformément à une tendance actuelle, nous désignerons les matrices par des lettres majuscules en caractères gras ; nous noterons $\mathbf{I}_n$ la matrice-unité d'ordre n et $\mathbf{O}_n$ la matrice nulle de format $n \times n$; pour toute matrice $\mathbf{A}$ carrée d'ordre n quelconque, nous poserons $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$, noterons $\det \mathbf{A}$ le déterminant de $\mathbf{A}$ et dirons qu'un polynôme f *annule* $\mathbf{A}$ lorsque $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}_n$.

1. Matrices carrées d'ordre 2

Proposition 1.1. *Pour toute matrice* $\mathbf{A}$ *carrée d'ordre* 2*, il existe deux réels* α *et* β *tels que* $\mathbf{A}^2 = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{I}_2$

Preuve. Lorsque $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ne coïncide pas avec le produit de $\mathbf{I}_2$ par un réel, le système linéaire (S) suivant en les inconnues α et β

$$(S)\begin{cases} a^2 + bc = \alpha a + \beta \\ ab + bd = \alpha b \\ ac + cd = \alpha c \\ bc + d^2 = \alpha d + \beta \end{cases}$$

possède l'unique solution $\alpha = a + d$ et $\beta = bc - ad$.

Dans le cas où $\mathbf{A} = k\mathbf{I}_2$, le système (S) est indéterminé et possède notamment la solution obtenue dans le cas précédent.

■

Remarque. Une autre façon de démontrer cette proposition consiste à faire appel à une version faible du théorème de Cayley-Hamilton, selon laquelle toute matrice carrée $\mathbf{A}$ annule son polynôme caractéristique [1, 5, 6] (pour rappel, le polynôme caractéristique associé à une matrice $\mathbf{A}$ d'ordre n est le polynôme $\Phi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)$). Dans le cas où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on obtient alors cette égalité :

$$\mathbf{A}^2 - (a + d)\mathbf{A} + (ad - bc)\mathbf{I}_2 = \mathbf{O}_2,$$

où l'on peut remarquer que le coefficient de la matrice $\mathbf{A}$ est l'opposé de la trace de $\mathbf{A}$ (c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux), tandis que le coefficient de $\mathbf{I}_2$ n'est autre que $\det \mathbf{A}$.

Proposition 1.2. *Une matrice* $\mathbf{A}$ *carrée d'ordre* 2 *est inversible si et seulement s'il existe deux réels* α *et* β *tels que* $\mathbf{A}^2 = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{I}_2$ *avec* β *non nul ; dans ce cas,*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\beta}(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}_2).$$

Preuve. Si $\mathbf{A}^2 = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{I}_2$ avec $\beta \neq 0$, alors on a, d'après 1.1, $\mathbf{A}^2 - \alpha\mathbf{A} = \beta\mathbf{I}_2$, c'est-à-dire, $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}_2) = \beta\mathbf{I}_2$ et donc

$$\frac{1}{\beta}(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}_2)\mathbf{A} = \mathbf{A}\frac{1}{\beta}(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}_2) = \mathbf{I}_2,$$

d'où $\mathbf{A}$ est inversible et

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\beta}(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}_2).$$

La réciproque peut être démontrée en exprimant que $\mathbf{A}$ annule son polynôme caractéristique.

■

Exemple 1. Pour $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, essayons de déterminer deux réels α et β, le second étant non nul, tels que $\mathbf{A}^2 = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{I}_2$. Le système (S) correspondant se réduit à

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 5 &=& \alpha + \beta \\ 8 &=& 2\alpha \\ 13 &=& 2\alpha + \beta \end{array}\right.$$

et possède l'unique solution $\alpha = 4$ et $\beta = 1$. $\mathbf{A}$ est donc inversible et

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} - 4\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. Pour $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$, le système (S) s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} 13 &=& \alpha + \beta \\ 52 &=& 4\alpha \\ 39 &=& 3\alpha \\ 156 &=& 12\alpha + \beta \end{array}\right.$$

et possède l'unique solution $\alpha = 13$ et $\beta = 0$. Comme β est nul, $\mathbf{A}$ n'est pas inversible (ce qui est bien entendu confirmé par le caractère nul de $\det \mathbf{A}$).

Exemple 3. Pour toute matrice $\mathbf{A}$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix},$$

avec a et b non nuls, on a $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}_2$, d'où le système (S) correspondant possède l'unique solution $\alpha = \beta = 0$. La matrice $\mathbf{A}$ n'est donc pas inversible (ce qui est encore confirmé par la nullité de $\det \mathbf{A}$).

2. Matrices carrées d'ordre 3

Proposition 2.1. *Pour toute matrice $\mathbf{A}$ carrée d'ordre 3, il existe trois réels α, β et γ tels que $\mathbf{A}^3 = \alpha\mathbf{A}^2 + \beta\mathbf{A} + \gamma\mathbf{I}_3$.*

Preuve. La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

annule son polynôme caractéristique, d'où

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}^3 + (a+e+i)\mathbf{A}^2 - (ae+ai+ei-gc-db-hf)\mathbf{A} \\ +(aei+dhc+gbf-gec-dbi-ahf)\mathbf{I}_3 = \mathbf{O}_3. \end{aligned}$$

■

Remarque. Le coefficient de $\mathbf{A}^2$ dans la dernière égalité vaut la trace de $\mathbf{A}$, celui de $\mathbf{A}$ est égal à l'opposé de la somme des mineurs principaux d'ordre 2, tandis que celui de $\mathbf{I}_3$ coïncide avec $\det \mathbf{A}$ [1, 5, 6].

Proposition 2.2. *Une matrice $\mathbf{A}$ carrée d'ordre 3 est inversible si et seulement s'il existe trois réels α, β et γ tels que $\mathbf{A}^3 = \alpha\mathbf{A}^2 + \beta\mathbf{A} + \gamma\mathbf{I}_3$ avec γ non nul ; dans ce cas,*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\gamma}(\mathbf{A}^2 - \alpha\mathbf{A} - \beta\mathbf{I}_3).$$

Preuve. Le raisonnement est identique à celui de la proposition 1.2.

■

Exemple 4. Pour

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on vérifie aisément que $\mathbf{A}^3 = 3\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + \mathbf{I}_3$, d'où $\mathbf{A}$ est inversible et

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Matrices carrées d'ordre quelconque

Proposition 3.1. *Une matrice $\mathbf{A}$ carrée d'ordre n est annulée par une infinité de polynômes de degré inférieur ou égal à n^2 ; parmi ces polynômes figure le polynôme caractéristique $\Phi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)$ de degré n ; de plus, il existe, parmi les polynômes annulant $\mathbf{A}$, un unique polynôme dont le coefficient du terme principal* (1) *est égal à 1, et qui est de degré minimum.*

Preuve. Comme les matrices carrées d'ordre n forment un espace vectoriel de dimension n^2 [6], les n^2+1 matrices $\mathbf{I}_n, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{n^2}$ sont linéairement dépendantes, de sorte qu'il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}$ non tous nuls tels que

$$\alpha_0\mathbf{A}^{n^2} + \alpha_1\mathbf{A}^{n^2-1} + \cdots + \alpha_{n^2-1}\mathbf{A} + \alpha_{n^2}\mathbf{I}_n = \mathbf{O}_n.$$

Une autre façon de raisonner consiste à remarquer que l'égalité matricielle précédente donne naissance à un système linéaire homogène comprenant n^2 équations en les n^2+1 inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}$; la conclusion résulte du caractère indéterminé de ce système.

La deuxième partie de l'énoncé découle du théorème de Cayley-Hamilton [5, 6].

Enfin, la dernière partie se démontre par l'absurde. En effet, s'il existe deux polynômes f_1 et f_2 annulant $\mathbf{A}$, de même degré minimum d, le coefficient du terme principal étant égal à 1, alors $f_1 - f_2$ annule encore $\mathbf{A}$ et est de degré inférieur à d, ce qui contredit le caractère minimum de d.

∎

Proposition 3.2. *Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée d'ordre n quelconque ; $\mathbf{A}$ est inversible si et seulement s'il existe un entier positif p et des réels*

1. *Pour un polynôme $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$, de degré n, le terme principal vaut $a_0 x^n$.*

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ tels que

$$\mathbf{A}^p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{A}^{p-i},$$

avec $\alpha_p \neq 0$; dans ce cas,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha_p}\left(\mathbf{A}^{p-1} - \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \mathbf{A}^{p-1-i}\right).$$

Preuve. Si $\mathbf{A}^p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{A}^{p-i}$ avec $\alpha_p \neq 0$, alors

$$\frac{1}{\alpha_p}(\mathbf{A}^{p-1} - \alpha_1 \mathbf{A}^{p-2} - \alpha_2 \mathbf{A}^{p-3} - \cdots - \alpha_{p-1}\mathbf{I}_n)\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

■

Remarque. Il est évidemment préférable de trouver un entier p aussi petit que possible. Or, le plus petit entier p qui peut être choisi est le degré du *polynôme minimum* dont il a été question dans la proposition 3.1 ; on peut démontrer que ce polynôme est le quotient du polynôme caractéristique $\Phi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$ par le plus grand commun diviseur des mineurs de la matrice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n$ [5], ce polynôme coïncidant avec le polynôme caractéristique lorsque toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont distinctes [6].

Exemple 5. Pour la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le polynôme caractéristique s'écrit $-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)$, d'où

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - \mathbf{I}_3 \text{ et } \mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I}_3.$$

Mais, il y a plus simple, car la matrice des mineurs de $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3$ est la suivante

$$\begin{pmatrix} -\lambda(1-\lambda) & 0 & -(1-\lambda) \\ 0 & \lambda^2 - 1 & 0 \\ -(1-\lambda) & 0 & -\lambda(1-\lambda) \end{pmatrix};$$

comme le plus grand commun diviseur des mineurs est égal à $\lambda - 1$ (au signe près), le polynôme minimum de $\mathbf{A}$ vaut $\lambda^2 - 1$, d'où $\mathbf{A}^2 - \mathbf{I}_3 = \mathbf{O}_3$ et $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.

Exemple 6. Pour la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, on peut vérifier que

$$\mathbf{A}^2 = 4\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3,$$

d'où

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}(-\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 7. [7] Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n ($n > 1$) telle que $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 0$ pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$. On trouve aisément cette identité :

$$\mathbf{A}^2 = (n-2)\mathbf{A} + (n-1)\mathbf{I}_n,$$

et, par conséquent,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{n-1}(\mathbf{A} - (n-2)\mathbf{I}_n).$$

Proposition 3.3. *Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée d'ordre n. S'il existe un entier positif p pour lequel $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^p = \mathbf{O}_n$, alors $\mathbf{A}$ est inversible et*

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=0}^{p-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^i.$$

Preuve. Posons $\mathbf{B} = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}$. De l'égalité

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{B})(\mathbf{I}_n + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \cdots + \mathbf{B}^{p-1}) = \mathbf{I}_n - \mathbf{B}^p = \mathbf{I}_n,$$

on déduit

$$\mathbf{A}\left(\sum_{i=0}^{p-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^i\right) = \mathbf{I}_n.$$

■

Exemple 8 [4]. Soit $\mathbf{A}$ une matrice triangulaire supérieure d'ordre n dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. Pour $\mathbf{B} = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}$, on a $\mathbf{B}^n = \mathbf{O}_n$, d'où

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}^i.$$

En guise d'illustration, reprenons l'exemple 4, à savoir $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; pour $\mathbf{B} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^3 = \mathbf{O}_3$ et

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{I}_3 + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple 9 [2, 3]. Les économistes considèrent souvent une économie qui comporte n secteurs S_i produisant chacun un seul type de biens. Le problème consiste à déterminer les productions globales de chaque secteur de manière que toute l'économie fonctionne parfaitement et qu'une demande finale exogène (c'est-à-dire extérieure aux secteurs) soit satisfaite : c'est l'objet de l'analyse “input-output” qui a été rendue célèbre notamment par les travaux de W. LEONTIEF qui reçut (en 1973) le Prix Nobel d'Economie. On montre que $\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{D}$, où $\mathbf{X}$ désigne le vecteur-colonne dont les n composantes sont les productions globales (inconnues) des S_i, $\mathbf{D}$ est le vecteur-colonne dont les n composantes représentent les quantités demandées par l'extérieur aux S_i, tandis que $\mathbf{A}$ est la matrice technologique dont l'élément générique a_{ij} représente la valeur de la production totale du secteur S_i que le secteur S_j doit acquérir pour produire une unité de son propre bien[2, 3]. Il s'agit donc de calculer le vecteur $\mathbf{X}$ tel que $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{D}$, où les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ sont connues.

Dans le cas particulier où la matrice $\mathbf{A}$ est nilpotente (c'est-à-dire telle qu'une de ses puissances est nulle), on peut calculer facilement $\mathbf{X}$

puisque, si $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}_n$, $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ est inversible et d'inverse égale à $\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i$, d'où $\mathbf{X} = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i \mathbf{D}$.

Dans le cas général, on a toujours $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{A}^i$, car les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont, en module, inférieures à l'unité et l'on peut démontrer dans ce cas que la série matricielle considérée converge [1, 6] et que

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{A}^i \right) (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \mathbf{I}_n.$$

De la sorte, on peut donner une interprétation économique intéressante de la solution $\mathbf{X} = \mathbf{D} + \mathbf{AD} + \mathbf{A}^2\mathbf{D} + \mathbf{A}^3\mathbf{D} + \cdots$

En effet, pour satisfaire la demande finale, chaque secteur devra bien sûr produire la quantité qui lui est commandée. Cette production $\mathbf{D}$ exigera de tous les secteurs des outputs supplémentaires qui seront utilisés comme matières premières (ou inputs) : ces productions additionnelles dépendront des coefficients techniques a_{ij} et seront données par la matrice $\mathbf{AD}$. Les outputs $\mathbf{AD}$ vont, à leur tour, réclamer de nouveaux outputs qui seront exploités comme inputs, leur quantité provenant du produit matriciel $\mathbf{A}^2\mathbf{D}$. De même, les outputs $\mathbf{A}^2\mathbf{D}$ vont réclamer une nouvelle production donnée par $\mathbf{A}^3\mathbf{D}$, et ainsi de suite. On obtient de la sorte une interprétation concrète de chaque terme de la série livrant $\mathbf{X}$.

4. Remarque

La théorie qui précède permet de calculer aisément les puissances (élevées) des matrices carrées. De fait, considérons une matrice $\mathbf{A}$ carrée d'ordre n, un polynôme f qui annule $\mathbf{A}$ et de degré d supérieur (ou égal) à un entier m pour lequel on veut calculer la puissance $\mathbf{A}^m$.

Par division de λ^m par $f(\lambda)$, on trouve

$$\lambda^m = f(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda)$$

donc,

$$\mathbf{A}^m = f(\mathbf{A})Q(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$$

puisque $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}_n$.

Exemple 10. Pour $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique est donné par $\Phi(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 10$, d'où l'on déduit, par exemple,

$$\lambda^3 = (\lambda^2 + 3\lambda - 10)(\lambda - 3) + 19\lambda - 30$$

donc,

$$\mathbf{A}^3 = 19\mathbf{A} - 30\mathbf{I}_2.$$

Plus généralement, pour tout entier m au moins égal à 3,

$$\lambda^m = \Phi(\lambda)Q(\lambda) + 2\lambda + b.$$

Or, $\Phi(2) = \Phi(-5) = 0$, ce qui entraîne

$$2^m = 2a + b \quad \text{et} \quad (-5)^m = (-5)a + b,$$

soit

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{7}\left[2^m - (-5)^m\right] \\ b &= \frac{1}{7}\left[5.2^m + 2(-5)^m\right] \ ; \end{aligned}$$

en conséquence,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^m &= \frac{1}{7}\left[2^m - (-5)^m\right]\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\left[5.2^m + 2(-5)^m\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6.2^m + (-5)^m & 2(2^m - (-5)^m) \\ 3(2^m - (-5)^m) & 2^m + 6(-5)^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Bair J., *Algèbre linéaire*, Presses Universitaires de Liège, 1994.

[2] Bair J., *Algèbre linéaire pour l'économie et les sciences sociales*, De Boeck Université, Bruxelles, 2e édition 1994.

[3] Bair J., Hinion R. et Justens D., *Applications économiques au service de la mathématique*, Société Belge des Professeurs de Mathématiques, 1989.

[4] Braemer J.M. et Richard D., *Les cours de Serge Lang, Algèbre linéaire* 1, Inter Editions, Paris, 1976.

[5] Garnir H.G., *Calcul matriciel*, Université de Liège, Faculté des Sciences.

[6] Mirsky L., *An introduction to linear algebra*, Clarendon Press, Oxford, 1955.

[7] Faculté Polytechnique de Mons, *Questions types de l'examen d'entrée*, 1990–1991.

[8] Programme de sixième année, option 6 périodes hebdomadaires, document de travail, EGD3-6B.DOC 26/2/94.

Adresse des auteurs :

BAIR Jacques
Université de Liège (FEGSS)
Boulevard du Rectorat 7 (Bât. B31)
4000 Liège

DUJACQUIER Hector
Chaussée d'Enghien 165
7050 Soignies

Olympiades

C. Festraets,

Toute correspondance concernant cette rubrique sera envoyée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

189 élèves ayant obtenu un résultat supérieur ou égal à 100 à la demi-finale de l'Olympiade Mathématique Belge (maxi) ont été invités à participer au 13^e Annual American Invitational Mathematics Examination (AIME) le samedi 25 mars à Namur.

127 élèves ont effectivement participé à cette épreuve : 22 élèves de 4^e année, 39 élèves de 5^e année, 65 élèves de 6^e année et 1 élève de spéciale math.

Un seul des concurrents a obtenu un résultat supérieur à la moyenne : Sébastien LEROY, de l'institut St Boniface-Parnasse à Bruxelles qui a répondu correctement à 10 questions sur 15.

Voici le nombre de réponses correctes à chaque question

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	85	18	3	18	0	6	3	26	12	4	2	3	12	0	0

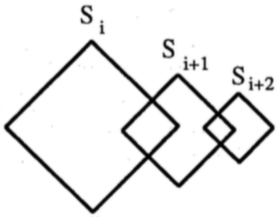
Remarquons qu'aucun élève n'a répondu correctement aux questions $5, 14, 15$; la question 5 me paraît pourtant assez simple (pour un élève de 6^e).

Le temps imparti à l'épreuve est de 3 heures, les réponses sont des entiers compris entre 0 (inclus) et 999 (exclu). La grille des solutions est à la fin du questionnaire.

13th Annual American Invitational Mathe - matics Examination 1995 (AIME)

1. S_1 est un carré de côté 1. Pour $i \geqslant 1$, la longueur des côtés du carré S_{i+1} est moitié de la longueur des côtés du carré S_i, deux côtés adjacents du carré S_i sont médiateurs de deux côtés adjacents du carré S_{i+1}, et les deux autres côtés du carré S_{i+1} sont médiateurs de deux côtés adjacents du carré S_{i+2}.

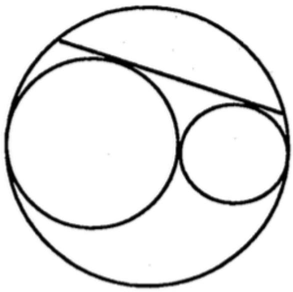
L'aire totale limitée par le bord de la figure composée de S_1, S_2, S_3, S_4,
S_5 peut être écrite sous la forme $\frac{m}{n}$ où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m - n$.



2. Trouver les trois derniers chiffres du produit des racines positives de

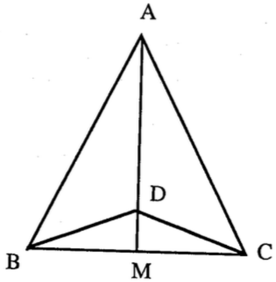
$$\sqrt{1995}\, x^{\log_{1995} x} = x^2$$

3. Partant de $(0, 0)$, un objet se déplace dans le plan muni d'un repère orthonormé en effectuant une suite de pas, chacun de longueur un. Chaque pas se fait soit vers la gauche, vers la droite, vers le haut ou vers le bas avec la même probabilité. Soit p la probabilité que l'objet atteigne $(2, 2)$ en six pas ou moins. Sachant que p peut être écrit sous la forme $\frac{m}{n}$ où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux, trouver $m + n$.
4. Deux cercles de rayons respectifs 3 et 6 sont tangents extérieurement entre eux et tous deux tangents intérieurement à un cercle de rayon 9. Le cercle de rayon 9 a une corde qui est tangente extérieure commune aux deux cercles. Trouver le carré de la longueur de cette corde.



5. Pour certaines valeurs réelles de a, b, c et d, l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ a quatre racines non réelles. Le produit de deux de ces racines est $13 + i$ et la somme des deux autres est $3 + 4i$ où $i = \sqrt{-1}$. Trouver b.

6. Soit $n = 2^{31}3^{19}$. Combien de diviseurs entiers positifs de n^2 sont inférieurs à n mais ne divisent pas n ?
7. On donne $(1+\sin t)(1+\cos t) = \frac{5}{4}$ et $(1-\sin t)(1-\cos t) = \frac{m}{n} - \sqrt{k}$ où k, m et n sont des entiers positifs tels que m et n sont premiers entre eux ; Trouver $k+m+n$.
8. Pour combien de paires ordonnées d'entiers positifs (x, y) avec $y < x \leqslant 100$, $\frac{x}{y}$ et $\frac{x+1}{y+1}$ sont-ils tous deux entiers ?
9. Le triangle ABC est isocèle, $AB = AC$, sa hauteur $AM = 11$. Supposons qu'il existe un point D sur $\overline{AM}$ avec $AD = 10$ et $\angle BDC = 3\angle BAC$. Le périmètre du triangle ABC peut être écrit sous la forme $a + \sqrt{b}$ où a et b sont entiers. Trouver $a+b$.



10. Quel est le plus grand entier positif qui n'est pas la somme d'un multiple entier positif de 42 et d'un entier positif composé ?
11. Un prisme droit P de base rectangulaire (parallélipipède rectangle) a ses côtés de longueurs entières a, b, c avec $a \leqslant b \leqslant c$. Un plan parallèle à une des faces de P coupe P en deux prismes de volumes non nuls dont un est semblable à P. Sachant que $b = 1995$, pour combien de triples ordonnés (a, b, c), un tel plan existe-t-il ?
12. Soit $OABCD$ une pyramide de base carrée $ABCD$, les arêtes $\overline{OA}, \overline{OB}$,
$\overline{OC}$ et $\overline{OD}$ sont égales, l'angle AOB vaut $45°$. Soit θ la mesure de l'angle dièdre formé par les faces OAB et OBC. Sachant que $\cos\theta = m + \sqrt{n}$ où m et n sont des entiers, trouver $m+n$.
13. Soit $f(n)$ l'entier le plus proche de $\sqrt[4]{n}$. Trouver $\sum_{k=1}^{1995} \frac{1}{f(k)}$.
14. Dans un cercle de rayon 42, deux cordes de longueur 78 se coupent en un point se trouvant à distance 18 du centre du cercle. Les deux cordes divisent l'intérieur du cercle en quatre régions. Deux de ces régions sont limitées par des segments de longueurs inégales et l'aire de chacune d'elles peut être exprimée de façon unique sous la forme

$m\pi - n\sqrt{d}$ où m, n et d sont des entiers positifs et d n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier. Trouver $m + n + d$.

15. Soit p la probabilité que, dans le processus de jets successifs d'une pièce de monnaie équilibrée, on rencontre une succession de 5 faces avant une succession de 2 piles. Sachant que p peut s'écrire sous la forme $\frac{m}{n}$ où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux, trouver $m + n$.

Réponses.

1 255	2 025	3 067	4 224	5 051
6 589	7 027	8 085	9 616	10 215
11 040	12 005	13 400	14 378	15 037

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

Toute correspondance concernant cette rubrique sera envoyée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

Méchant système problème *n°* 154 de M. et P. *n°* 99

Dans $\mathbb{R}$, *résoudre le système*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 22 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{-z}{xy} \end{cases}$$

Solution de J. JANSSEN de Lambermont.

Les inconnues sont toutes trois non nulles.

Posons $y = ax$ et $z = bx$.

La 3ème équation s'écrit alors

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{ax} + \frac{1}{bx} = \frac{-bx}{ax^2}$$

et donne, après simplification

$$(a + b)(b + 1) = 0$$

ce qui conduit à deux cas :

1er cas : $a = -b$,
alors $y = -z$ et la 1ère équation donne $x = 2$; en remplaçant dans la 2ème équation, on obtient

$$y = -z = 3 \quad \text{ou} \quad y = -z = -3$$

2ème cas : $b = -1$
alors $x = -z$, et de la même façon on trouve $y = 2$ et

$$x = -z = 3 \quad \text{ou} \quad x = -z = -3$$

Conclusion : les solution pour (x, y, z) sont $(2, 3, -3), (2, -3, 3), (3, 2, -3)$ et $(-3, 2, 3)$.

Ce problème a aussi été résolu par H. DUJACQUIER de Soignies, F. GLINEUR de Quiévrain, J. GOLDSTEINAS de Bruxelles, M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre, B. LOISEAU de Mouscron, J. RONDOU de Heverlee, J.G. SEGERS de Liège et H-J SEIFFERT de Berlin.

$\boxed{\text{Des cosinus}}$ problème $n°$ 155 de M. et P. $n°$ 99

Soient a, b, g les angles d'un triangle acutangle.

Démontrer que

$$\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}+\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{g}{2}+\cos\frac{g}{2}.\cos\frac{a}{2}>\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}.$$

Solution de M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre.

Il est clair que $\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}>0$, donc

$$-2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}=\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}<0.$$

Comme $0<a+b=\pi-g<\pi$, on a $0<\cos\frac{a+b}{2}<1$ et

$$2\cos\frac{a+b}{2}.(\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2})<0$$

ce qui donne successivement

$$\begin{aligned} 2\cos^2\frac{a+b}{2} &< 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ 1+\cos(a+b) &< \cos a+\cos b \\ \cos a+\cos b+\cos g &> 1 \qquad (\text{ car } a+b=\pi-g) \end{aligned}$$

$\cos a, \cos b$ et $\cos g$ étant strictement positifs, on a

$$\begin{aligned} (1+\cos a)(1+\cos b)(1+\cos g) &= 1+\cos a+\cos b+\cos g+\cos a\cos b \\ &\quad +\cos b\cos g+\cos g\cos a \\ &\quad +\cos a\cos b\cos g \\ &> 1+\cos a+\cos b+\cos g \\ &> 2 \end{aligned}$$

d'où

$$2\cos^2\frac{a}{2}.2\cos^2\frac{b}{2}.2\cos^2\frac{g}{2}>2$$

et $\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{g}{2}>\frac{1}{4}$.

Appliquons l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique aux trois nombres positifs $\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$, $\cos\frac{b}{2}\cos\frac{g}{2}$ et $\cos\frac{g}{2}\cos\frac{a}{2}$:

$$\frac{1}{3}(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\cos\frac{b}{2}\cos\frac{g}{2}+\cos\frac{gamma}{2}\cos\frac{a}{2})$$
$$geq\sqrt[3]{\cos\tfrac{a}{2}\cos\tfrac{b}{2}\cos\tfrac{beta}{2}\cos\tfrac{g}{2}\cos\tfrac{g}{2}\cos\tfrac{a}{2}}$$

d'où finalement

$$\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\cos\frac{b}{2}\cos\frac{g}{2}+\cos\frac{gamma}{2}\cos\frac{a}{2} \quad & geq \quad 3\sqrt[3]{\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{g}{2}} \\ & > \quad 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}.\end{aligned}$$

Bonnes solutions de F.GLINEUR de Quiévrain, J. GOLDSTEINAS de Bruxelles et H-J. SEIFFERT de Berlin.

B. LOISEAU de Mouscron démontre une inégalité plus forte, celle qui vous est proposée dans le n° 101 de M. et P. (problème 161).

L'énoncé du problème 156 comportant une erreur (il fallait lire 1994 sommets au lieu de 1995), la solution est reportée à un prochain numéro.

163. Pauvres élèves

Dans une classe de n élèves, le professeur remet à l'aveuglette les interrogations aux élèves. Calculez la probabilité pour que k élèves reçoivent leur propre interrogation (proposée par A. LAFORT de Montignies-sur-Sambre).

164. Le juste milieu

Considérons un triangle quelconque ABC et $B' \in [AC]$, $A' \in [BC]$, $C' \in [AB]$. Démontrez que si le triangle $A'B'C'$ a ses côtés parallèles à ceux de ABC, alors A', B' et C' sont les milieux des côtés $[BC], [AC]$ et $[AB]$ (proposé par A. LAFORT).

165. Coloriage

Chaque point du plan est colorié en blanc ou en noir de manière arbitraire. Démontrer qu'il existe un triangle équilatéral de côté de longueur 1 ou $\sqrt{3}$ et dont les trois sommets sont de la même couleur (olympiade chinoise, 1986).

Revue des revues

P. Dalle-Piane,

Mathematical Spectrum Volume 25 $N°2$

Factorisation : compte rendu des progrès

par Paul Leyland et Joseph Mac Lean

- Les deux auteurs se sont particulièrement attachés à la factorisation de nombres du type $nx^n \pm 1$. Ils ont ainsi pu dresser des tables complètes pour $2 \leqslant x \leqslant 9$ et $n \leqslant 100$. Pour $x > 4$, les travaux ont pris plus de 3 ans.
- Lorsqu'un nombre est choisi pour être factorisé, la première étape est de trouver les plus petits facteurs premiers en procédant par essais. Ensuite, on cherche les facteurs premiers de moins de 10 chiffres par les méthodes de Pollard et de William. Si le reste est encore composé, ce qui peut aisément être obtenu par l'algorithme de Miller-Rabin, on utilise des procédés plus complexes que les auteurs citent dans cet article, sans les détailler. Ce sont les :
  - méthode elliptique (ECM)
  - méthode du crible multi-polynomial quadratique (MPQS).

  La première méthode est très performante pour des facteurs de taille moyenne (c'est-à-dire jusqu'à 20 et parfois même 30 chiffres). Sa vitesse d'exécution est indépendante de la taille du nombre traité, mais dépend de celle des plus petits diviseurs.

  La seconde, au contraire est indépendante de ces facteurs, mais dépend fortement de la taille du nombre traité, et le temps d'exécution devient très long pour des nombres de plus de 70 chiffres. Mais l'algorithme permet de répartir la charge de travail sur plusieurs ordinateurs travaillant simultanément.
- Les auteurs donnent plusieurs exemples illustrant les performances de cet algorithme :

  Par exemple, pour factoriser $87.9^{87} + 1$, il a fallu faire travailler 4 ordinateurs Sun-4 pendant $8,5$ jours, en utilisant une capacité de travail des ordinateurs de un "mipsan".

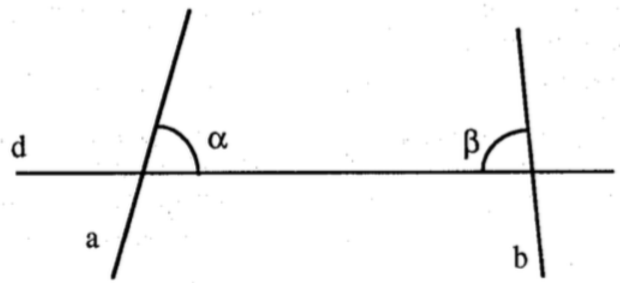
  Il faut savoir que "un mips" (million d'inctruction par seconde) est une mesure de la puissance d'un ordinateur établie en prenant comme référence un minicomputer $VAX11/780$. Un "mipsan" correspond à une consommation équivalente à l'utilisation d'un Vax pendant toute une année, sans interruption.

- Le plus grand nombre factorisé par les auteurs est $97.9^{97}-1$. Il comporte 91 chiffres.
  Cela a pris 2 mois et a nécessité une puissance d'environ 10 mipsans.
- Un autre mathématicien, Arjen Lenstra, peut maintenant factoriser des nombres tels que $99.9^{99}+1$ (92 chiffres) en moins de 12 heures. Il utilise pour cela d'autres algorithmes et des machines plus puissantes.
  On arrive ainsi à factoriser des nombres comprenant jusqu'à 125 chiffres.
- Enfin, les auteurs donnent une bibliographie relative à ces différents algorithmes et aux résultats obtenus.

Nicolai Ivanovich Lobachevsky : Le Copernic de la géométrie

par Roger Webster

- L'article a pour but de célébrer le bicentenaire de la naissance de Lobachevsky (né en 1792). L'auteur donne avec lyrisme de nombreux détails de la biographie du mathématicien russe, disant de lui, à la suite de W.K. Clifford, qu'il est à Euclide ce que Copernic est à Ptolémée.
- L'histoire commence 2000 ans avant la naissance de Lobachevsky avec le texte mathématique le plus influent jamais écrit en la matière : LES ELEMENTS d'Euclide. Le but d'Euclide en écrivant ses Eléments était de bâtir tout l'édifice des connaissances grecques en géométrie sur cinq évidences bien choisies appelées axiomes :
  1) Par deux points passe une ligne droite.
  2) Une ligne droite peut être prolongée de façon continue en une ligne droite.
  3) Un cercle est déterminé par son centre et son rayon.
  4) Tous les angles droits sont égaux .
  5) Si une droite d est coupée par deux autres droites a et b de telle sorte que la somme des angles a et b ainsi déterminés est inférieure à $180°$, alors a et b se coupent du côté de ces deux angles, lorsqu'on prolonge a et b indéfiniment.



- Le cinquième axiome, habituellement appelé "*axiome de parallélisme*", a une complexité qui contraste fortement avec la simplicité des quatre autres. Euclide lui-même retarda l'usage de cet axiome jusqu'à ce qu'il arrive à sa 29^{me} proposition, mais il constate que cet axiome est ensuite indispensable au développement de sa géométrie.
- Une approche du problème de l'axiome de parallélisme est de le remplacer par un autre plus acceptable. De toutes les tentatives produites au cours des ans, la plus populaire est la suivante : "Par un point n'appartenant pas à une droite donnée, passe une et une seule droite parallèle à cette droite donnée" Cet axiome (aussi appelé axiome de Playfair) est équivalent à l'axiome de parallélisme en ce sens que, joints aux quatre premiers non-controversés, ils conduisent tous deux à la géométrie d'Euclide.
- Une attaque plus téméraire du problème était d'essayer de déduire l'axiome de parallélisme des quatre autres, et donc de changer son statut d'axiome en celui de théorème, mais toutes les démarches faites en ce sens se sont soldées par des échecs.
- Cet état de choses insatisfaisant persiste jusqu'au début du 19ème siècle, quand trois hommes, travaillant indépendamment, abordent cette énigme avec la conviction que puisque l'axiome ne peut pas être démontré, il doit exister une géométrie où il est violé. Ces trois géomètres révolutionnaires étaient l'allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), le hongrois Janos Bolyai (1802-1860) et le russe Lobachevsky (1792-1856) ; Gauss n'a toutefois rien publié à ce sujet.
- La géométrie de Lobachevsky, baptisée par lui "*géométrie imaginaire*", est fondée sur les quatre premiers axiomes d'Euclide et le suivant, en conflit direct avec l'axiome de parallélisme : "Par un point n'appartenant pas à une droite donnée, passent plus d'une droite coplanaire ne rencontrant pas la droite donnée."

Les résultats que Lobachevsky découvre dans sa géométrie imaginaire sont étonnamment différents de leurs homologues dans la géométrie euclidienne. Quelques exemples : la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits ; l'aire d'un triangle est proportionnelle à la quantité qui manque à la somme de ses angles pour faire deux droits ; la circonférence d'un cercle croît plus rapidement que son rayon ; les points équidistants d'une droite, et situés d'un même côté par rapport à celle-ci, ne forment pas une droite, mais une courbe ...

- Lobachevsky développe sa géométrie en utilisant des formules trigonométriques, abandonnant les arguments de la géométrie classique en faveur de ceux de la théorie des fonctions. Il observe que ces formules qu'il a établies dans sa propre géométrie imaginaire pourraient aisément être trouvées à partir des formules correspondantes de la géométrie sphérique simplement en remplaçant les mesures a, b, c des côtés d'un triangle par les imaginaires purs ia, ib, ic.
- Cette théorie révolutionnaire fut très mal accueillie par le monde scientifique jusqu'à ce que, d'une part, Gauss manifeste son intérêt pour le sujet, et surtout lorsque le mathématicien italien E. Beltrami décrouvrit la *pseudosphère*, une surface qui ressemble à une tentacule, ou une trompe, prolongée indéfiniment, dont la géométrie intrinsèque est celle de Lobachevsky, de la même manière que la géométrie sphérique est la géométrie naturelle de la sphère.
- Grâce à cet exemple concret, Lobachevsky et Bolyai furent finalement reconnus. L'acceptation d'une géométrie non-euclidienne montrait qu'il n'existe pas qu'une géométrie, mais que les diverses théories possibles reposent sur le choix des axiomes.

  En libérant la géométrie de son modèle traditionnel, on ouvrit la porte à la création d'une foule de géométries non-euclidiennes. Dans la classification qui s'ensuivit, la géométrie de Lobachevsky et Bolyai devint connue sous le nom de *géométrie hyperbolique*.

  Celle-ci continue à être étudiée sous divers aspects et a trouvé des applications notamment dans la description de l'espace dans la théorie de la relativité d'Einstein.

Formules d'intégration inhabituelles

par P. Glaister

L'auteur montre que :

$$\int sec^3 x dx = \frac{1}{2}\left(\int sec\, x dx + \frac{d}{dx} sec\, x\right)$$

et donc que $y = sec\, x$ est une des solutions de :

$$\int y^3 dx = \frac{1}{2}\left(\int y dx + \frac{dy}{dx}\right)$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - y.$$

L'auteur indique également que $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}\, tanh\, \frac{x}{\sqrt{2}}$ est une des autres solutions de cette équation différentielle (sachant que $tanh$ = tangente hyperbolique).

Angles dans les solides de Platon

par Dermot Roaf

Puisque les cinq solides de Platon sont réguliers, ils présentent des symétries telles que chaque sommet peut être amené par rotation sur un autre sommet, en prenant comme centre de rotation le centre de symétrie du solide.

En se servant de cette propriété, l'auteur calcule, pour chacun des solides de Platon, la mesure de l'angle au centre sous-tendu par chacune des arêtes du solide considéré.

Mouvement circulaire dans les lois des gaz : une approche alternative du mouvement circulaire

par Mark French

L'auteur établit un parallèle entre un résultat applicable aux gaz parfaits, et un autre relatif au mouvement circulaire :

- Considérons une particule de masse m, qui rebondit sur les parois d'une boîte cubique de côté x, avec une vitesse constante v, parallèle aux arêtes de la boîte. Lorsque la particule percute les parois, la force moyenne exercée sur celles-ci est

$$\bar{F} = \frac{mv^2}{x} \tag{1}$$

- Considérons maintenant une particule de masse m animée d'un mouvement circulaire, et décrivant une trajectoire de centre 0 et de rayon r avec une vitesse constante v.
  La force exercée à chaque instant sur la particule est

$$F = \frac{mv^2}{r} \tag{2}$$

- La similitude entre les formules (1) et (2) est évidente, mais difficile à justifier. L'auteur tente l'explication suivante : si on considère que la particule décrit un mouvement constant de va-et-vient le long d'un diamètre, la force exercée lors de chaque contact avec le cercle est précisément

$$F = \frac{mv^2}{r}.$$

Une intégrale de Ramanujan

par L. Short

Srinivasa Ramanujan (1887-1920) est célèbre pour ses intégrales et formules diverses venues apparemment de nulle part. La majorité d'entre elles nécessitent l'usage de séries infinies et de techniques avancées d'analyse. L'auteur part de celle-ci :

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+11^2)(x^2+21^2)(x^2+31^2)(x^2+41^2)(x^2+51^2)}dx$$
$$= \frac{5\pi}{12 \times 13 \times 16 \times 17 \times 18 \times 22 \times 23 \times 24 \times 31 \times 32 \times 41}$$

Il la généralise en établissant une récurrence pour le calcul de

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a_1^2)(x^2+a_2^2)\cdots(x^2+a_n^2)}dx.$$

En particulier, il applique les résultats obtenus au cas où les a_i sont en progression arithmétique.

La page de l'ordinateur

par Mike Piff

L'auteur donne une version de l'algorithme de Bresenham (déjà cité dans le numéro précédent) destinée cette fois à tracer un cercle de centre et de rayon donnés.

Lettre à l'éditeur. Problèmes et solutions

La revue présente différents problèmes à résoudre et donne les solutions des problèmes parus dans le volume 24, $n°$ 4.

Revue des revues

C. Villers,

Bulletin de l'APMEP (France) *N*°397 février 1995.

Au sommaire, nous relevons

- L'éditorial de J.F. Noël.
- Des comptes rendus de conférences données lors des journées Nationales 1994 à Brest et à Loctudy dont le texte de la conférence donnée par Nicolas Rouche et sous-titrée "Du savoir à l'élève ou de l'élève au savoir" ! ainsi qu'un texte sur la démonstration, avec la question "aura-t-elle encore une place dans l'enseignement des mathématiques !" On y trouve des interventions de E. Barbin, M. Chomette, J. Houdebine et R. Duval.
- Un texte sur le théorème de Robbins sur la forte-connexité par Peter Greenberg et Martin Loebl.
- Deux exemples de travaux pratiques pour les premières et terminales scientifiques, l'un portant sur le cercle des huit points d'un quadrilatère à diagonales perpendiculaires et l'autre sur les circuits logiques, par Danièle Duverney.
- Un texte sur l'utilisation parfois (souvent ?) abusive de si et seulement si par Etienne Gille.
- Un exposé d'un projet Stimul dans un lycée par Mme Masson et Mr Grand.

  Les objectifs de ce projet sont

  a) d'aider l'élève à surmonter ses difficultés en évitant de le laisser se décourager

  b) de pratiquer une pédagogie de l'erreur

  c) de faire prendre des habitudes de travail

  d) de rendre les connaissances plus solides.
- Des considérations sur les activités mathématiques périscolaire par Dominique Roux dans lequel l'auteur montre l'intérêt que peuvent revêtir les clubs, revues et compétitions se situant à la périphérie de l'enseignement.

  Cette livraison du bulletin comporte en outre les rubriques habituelles

  - Mots flous
  - Matériaux pour une documentation
  - Nouvelles brèves
  - Avis de recherche

- Les problèmes de l'APMEP
- La vie de l'association