Mathématique
et
Pédagogie

Sommaire

N° 103 **Septembre – Octobre 1995**

Editorial

G. Noël,

Quand vous lirez ces lignes, notre congrès 1995 aura eu lieu, un nouveau Conseil d'Administration aura été mis en place. Je ne puis mieux définir ce que devront être les préoccupations des nouveaux administrateurs qu'en reproduisant un extrait de l'Editorial publié par notre collègue Jean-François Noel, Président sortant de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France), dans le dernier Bulletin de cette association :

Nous luttons contre une espèce de mal pernicieux qu'on pourrait appeler "le misérabilisme". "Alléger", "réduire", sont des slogans publicitaires pour régime minceur, des termes démagogiques pour satisfaire les tendances d'une société (d'une jeunesse, peut-être) dans laquelle la notion d'effort intellectuel est reléguée au rang de gadget ringard. Toute tentative d'appauvrissement de notre enseignement des mathématiques doit être combattue : programmes, horaires, niveaux d'exigence ont déjà été bouleversés ces dernières années (pour raisons que nous avons analysées en leur temps). Même si un consensus s'avère difficile à trouver, le débat de fond doit continuer et rester permanent.

Il n'y a pas une virgule à changer à ce texte pour qu'il s'applique à notre situation en Communauté Française de Belgique. Le nouveau Conseil d'Administration devra immanquablement adopter des positions sur des sujets difficiles (les programmes par exemple). Il ne peut le faire valablement qu'avec le concours du plus grand nombre possible de membres de la SBPM. Il n'est pas nécessaire d'être membre du C.A. pour s'exprimer. Faites-nous part de votre opinion sur les points qui vous intéressent. Mieux encore : participez aux activités de la Commission Pédagogique. Tout membre (en règle de cotisation) de la SBPM en a le droit. Mon adresse est connue. Utilisez-la.

Augustin-Louis Cauchy : l'itinéraire tourmenté d'un mathématicien légitimiste

J. Mawhin, *Université Catholique de Louvain* ([1])

Nous sommes à Paris, à la fin du printemps 1789. Les Etats-Généraux se sont réunis à Versailles le 5 mai et l'atmosphère est lourde. Le lieutenant général de Police de la capitale est sur les dents et il en est de même de son premier commis, Louis-François Cauchy. Né à Rouen le 27 mai 1760, élève brillant, ce dernier a étudié à Paris et obtenu le prix d'honneur du concours général décerné par l'Académie de Paris. De retour à Rouen comme avocat au parlement de Normandie, il a été rapidement remarqué par l'intendant de la ville, Louis Thiroux de Crosnes, qui le prend comme secrétaire en 1783 et l'emmène avec lui à Paris en 1785, au titre de premier commis, lorsqu'il y est nommé lieutenant général de la police. Louis-François Cauchy réalise d'importants travaux d'assainissement dans la capitale. C'est par ses soins que l'insalubre cimetière des Innocents disparaît du quartier des Halles. En 1787, Louis-François épouse une parisienne de vingt ans, Marie-Madeleine Desestres, un beau parti qui l'introduit dans une famille aisée et bien en vue. C'est ainsi que le jeune couple peut acheter à Arcueil, à mi-chemin aujourd'hui entre le centre de Paris et l'aéroport d'Orly, une terre de quelques hectares avec maison de campagne.

La Révolution française va brutalement interrompre cette irrésistible ascension. La Bastille est prise le 14 juillet et Louis Thiroux s'empresse de gagner discrètement l'Angleterre. Louis-François Cauchy reste à Paris, sans protecteur et sans emploi, dans la crainte constante d'être pris à parti par les insurgés, en tant que représentant de l'autorité honnie. Il est d'autant plus inquiet que sa femme est enceinte d'un premier enfant, qui naît le 21 août, reçoit le prénom d'Augustin-Louis, sera, durant le second quart du XIXe siècle, le premier mathématicien de France et disputera à Gauss, de onze ans son aîné, le titre de premier mathématicien d'Europe. Notons qu'Augustin-Louis est parent et contemporain de François-Philippe Cauchy (1795-1842), polytechnicien, membre de l'Académie Royale de Belgique, ingénieur en chef des mines et professeur de minéralogie et métallurgie à l'Athénée de Namur, qui a donné son nom à un boulevard de cette ville.

La vie d'Augustin-Louis ne commence pourtant pas sous d'heureux auspices. Son père cherche à passer inaperçu en obtenant l'emploi de chef des

1. Conférence faite le 18 novembre 1994 aux Facultés Universitaires N.D. de la Paix de Namur.

bureaux des ateliers de bienfaisance, qu'il conserve jusqu'à la Terreur. Mais lorsque son ancien patron, Louis Thiroux, imprudemment rentré d'exil, est guillotiné le 28 avril 1794, Louis-François estime plus prudent de quitter ce Paris en furie et de se réfugier, avec sa famille, dans leur maison d'Arcueil. Heureux temps où un si proche exil vous mettait à l'abri ! La vie s'y déroule sous le régime des privations et de l'insécurité et marquera sans aucun doute le jeune Augustin-Louis, dans sa chair et dans son esprit. Peut-être doit-on voir dans ces premières années anxieuses la cause de l'attachement inébranlable d'Augustin-Louis aux Bourbons et sa haine de tout mouvement révolutionnaire.

C'est d'Arcueil que datent les premières leçons de Louis-François à ses fils, rédigées en alexandrins pour aider la mémorisation et pour permettre au père d'exercer des dons de versificateur, dont Augustin-Louis héritera. Il paraît que ces leçons étaient des petits chefs-d'oeuvre d'érudition et de piété, qui marqueront le futur mathématicien d'une empreinte indélébile.

En 1794, la chute de Robespierre rend possible le retour à Paris. Louis-François y révèle des dons d'adaptation peu communs : sous-chef de la division des arts et manufactures de la commission d'agriculture et des arts sous Thermidor, il gravit un échelon à chaque changement de régime, qu'il ne manque jamais de célébrer en vers latins. En particulier, en 1799, peu après le coup d'état du 18 Brumaire, Louis-François double son salaire en devenant, le 1er janvier 1800, Secrétaire Général du Sénat nouvellement créé par Bonaparte. Il y est chargé de la rédaction des procès-verbaux, avec en outre les fonctions d'archiviste et de garde du sceau. Il conservera cette fonction jusqu'en 1830, pour la céder à son fils Eugène qui l'occupera jusqu'en 1848, passant ainsi à travers des régimes aussi différents que l'Empire, la première Restauration, les Cent-Jours, la deuxième Restauration et la Monarchie de Juillet. Il n'est pas étonnant que Louis-François figure en bonne place dans un *Dictionnaire des girouettes* publié en 1832.

Mais revenons à son fils aîné, qui, dès sa petite enfance, montre des aptitudes exceptionnelles pour l'étude. Le mythe des génies cancres a surtout été créé pour consoler les parents. Augustin-Louis rafle tous les prix en langues anciennes à l'Ecole Centrale du Panthéon qu'il fréquente dès 1802. La remise solennelle, qui a lieu à l'Institut, est suivie d'un dîner en tête à tête avec le ministre. Augustin-Louis est bien excusable d'en ressentir quelque vanité, mais on peut lire, en 1804, dans ses résolutions de première communion : *Je ne me vanterai jamais du peu de science que j'ai acquis par les soins de mon père, (...),s'il ne se fût donné la peine de m'instruire, je serais aussi ignorant que beaucoup d'autres enfants.* D'ailleurs, sa mère avouera à l'une de ses petites-nièces que son fils avait alors *beaucoup de défauts dans le caractère, mais le coeur bon, l'esprit droit, et beaucoup de courage pour se corriger.*

Malgré ses succès littéraires, Augustin-Louis rompt avec la tradition familiale (droit et belles-lettres), en choisissant d'embrasser la carrière d'ingénieur et d'entrer à l'Ecole Polytechnique. Ses frères, plus conventionnels, se contenteront d'être d'éminents juristes. Le professeur de mathématiques Dinet, qui prépare Augustin-Louis pour le concours d'entrée, habite Arcueil et devient évidemment un ami de la famille. En 1805, âgé de seize ans, Augustin-Louis est admis second dans la prestigieuse école, l'année même où Napoléon Ier en fait une école militaire, ce qu'elle est encore. On peut imaginer qu'Augustin-Louis préfère la vie de famille à la discipline militaire, et voit souvent sa piété mise à mal par ses turbulents camarades. Mais il se console en suivant avec intérêt le cours d'analyse de Lacroix, mathémacien moins célèbre aujourd'hui que ses contemporains Lagrange, Laplace, Monge ou Legendre, mais dont les encyclopédiques traités ont joué un grand rôle dans la formation de nombreux savants.

Par ailleurs, quelques semaines avant l'entrée d'Augustin-Louis à l'Ecole Polytechnique, un jeune étudiant de l'Ecole des Ponts et Chaussées, Paul-Emile Teysseyrre, y est nommé répétiteur adjoint en analyse et mécanique. C'est un ardent catholique et un membre de la *Congrégation de la Sainte Vierge.* Fondée en 1801 par le père jésuite Bourdier-Delpuits pour organiser des réunions de prières, cette société va vite se donner pour but la lutte contre l'incrédulité et l'irréligion du temps, et pour moyen le noyautage des institutions politiquement et socialement importantes. Pas étonnant dès lors qu'elle s'infiltre dans cette pépinière de futurs notables qu'est l'Ecole Polytechnique. Pas étonnant non plus que, poussé par son tempérament et son éducation familiale, Augustin-Louis en devienne un membre actif dès 1808. La querelle de Napoléon avec la Papauté rend la Congrégation de plus en plus clandestine et de plus en plus royaliste, ce qui n'est pas pour déplaire à un Augustin-Louis, marqué dans sa petite enfance par les excès de la révolution.

Les études à l'Ecole Polytechnique durent deux ans et, sorti second de sa promotion en 1807, Augustin-Louis est admis à l'Ecole des Ponts et Chaussées. Il y rafle quatre premiers prix et sort premier de sa promotion. Les mémoires qu'il rédige sont couverts d' éloges, même si deux d'entre eux, qui devaient être soumis au jugement de l'Institut de France, sont malencontreusement égarés. Ils seront retrouvés bien plus tard dans les papiers de Prony, directeur de l'Ecole, et célèbre pour un autre type de freins. La même histoire se répétera plusieurs fois dans la carrière de Cauchy, mais les rôles seront alors inversés.

Tout cela n'empêche pas Augustin-Louis d'être envoyé en mission à Cherbourg, pour aider à la réalisation d'installations militaires et portuaires conçues par Napoléon pour résister à la flotte anglaise. Augustin-Louis emporte quatre livres dans ses bagages : *Virgile* (pour faire plaisir à son père), l'*Imitation de Jésus-Christ* (pour faire plaisir à sa mère), le *Traité des fonctions analytiques de Lagrange*, et la *Mécanique céleste* de Laplace (pour se faire plaisir lui-même, et en même temps à son père, car Lagrange et Laplace, tous deux sénateurs, font partie du cercle des connaissances de Louis-François Cauchy, et Laplace est son voisin à Arcueil).

Il n'a guère été question, jusqu'à présent, de mathématiques. Les biographes d'Augustin-Louis notent cependant – mais n'est-ce pas une constante des biographes – que les aptitudes mathématiques du jeune Cauchy, penché sur ses livres dans le cabinet de travail de son père, attirent très tôt l'attention de Lagrange et de Laplace. Lagrange aurait dit en 1801 : *vous voyez ce petit jeune homme ; eh bien ! il nous remplacera tous tant que sommes, pauvres géomètres.* Le même Lagrange insiste auprès du père de Cauchy, (mais était-ce bien nécessaire ?) pour qu'on donne à l'enfant une solide instruction littéraire, sinon : *son goût l'entraînera, il sera un grand mathématicien, mais il ne saura pas même écrire sa langue.* Lagrange aurait même ajouté : *Ne laissez pas cet enfant toucher un livre de Mathématiques avant l'âge de dix-sept ans.* Un conseil qui ferait aujourd'hui le bonheur de bien des parents ! Des signes plus sérieux sur les aptitudes mathématiques d'Augustin-Louis sont fournis par les solutions originales de quelques problèmes de géométrie qu'il publie lorsqu'il est encore élève à l'Ecole Polytechnique.

A Cherbourg, tout en remplissant avec zèle ses fonctions d'ingénieur, en sacrifiant à un minimum de vie mondaine, en se livrant à des exercices poétiques (en français dans les lettres à sa mère, en latin dans les lettres à son père), et en donnant des leçons particulières gratuites, Augustin-Louis ne perd pas de vue les mathématiques puisque, dans une lettre de 1810 adressée à ses parents, il écrit qu'il *entend repasser par une étude suivie toutes les branches des Mathématiques, en commençant par l'Arithmétique et finissant par l'Astronomie ; éclaircissant de son mieux les endroits obscurs, s'appliquant à simplifier les démonstrations et à découvrir des propositions nouvelles.* Bourbaki n'a rien inventé ! Il semble que Lagrange signale à cette époque, au jeune ingénieur, un sujet de recherche, un problème ouvert dirait-on aujourd'hui. On connaissait depuis les grecs l'existence de cinq et seulement cinq polyèdres réguliers convexes : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre. En 1809, Poinsot ajoute à la famille trois nouveaux polyèdres réguliers *non convexes.* Augustin-Louis prouve alors qu'il n'en existe pas d'autres, convexes ou non. Son mémoire, présenté et favorablement accueilli à l'Institut (l'ancienne Académie des Sciences) en 1811, est suivi d'un autre en 1812, rédigé sur le conseil de Legendre et Malus, et démontrant une proposition énoncée sans preuve par Euclide.

Ces succès font naître chez le jeune Cauchy, et plus encore peut-être chez son père, l'ambition de se faire élire au fameux Institut. N'a-t-il pas déjà été admis, sur recommandation de Poisson, comme membre correspondant de la Société Philomatique de Paris. En 1812, Louis-François écrit à son fils : *Tu as frappé fort à la porte de l'Académie par ton dernier Mémoire sur les polyèdres. Un de ces théorèmes démontrés (les théorèmes de Fermat) te l'ouvrirait toute grande. Le moment est favorable, ne le laisse pas échapper.* Et notre fort en thème se met aussitôt au travail. Il lui faudra trois ans pour répondre aux attentes de son père et démontrer, en 1815, l'un des deux théorèmes conjecturés par Fermat : *Tout nombre entier est la somme de trois nombres triangulaires, de quatre nombres carrés, de cinq nombres pentagonaux,...*, dont la preuve avait résisté aux efforts de Lagrange et de Gauss. Notons en passant que la dernière conjecture de Fermat semble toujours résister aux efforts des mathématiciens ; pas pour longtemps peut-être. En 1847, Cauchy ajoutera son nom à l'impressionnante liste des mathématiciens qui en ont donné une preuve incorrecte. Auparavant, Augustin-Louis a obtenu d'importants résultats sur les *déterminants* et les *substitutions*, qui seront à la base de la *théorie des groupes*. Mais tous ces efforts conduisent au surmenage et maman Cauchy doit aller rechercher Augustin-Louis à Cherbourg et le ramener à Paris, pendant que papa Cauchy sollicite et obtient un congé pour son ingénieur de fils.

La chaleur du nid familial permet à Augustin-Louis de se refaire rapidement une santé. Il cherche en vain un emploi dans l'enseignement, postule sans succès un poste de bibliothécaire au Bureau des Longitudes et se résigne à reprendre ses fonctions d'ingénieur, mais sur des chantiers parisiens cette fois. Cela ne l'empêche pas de continuer à faire le siège de l'Institut en lui soumettant, peu après le décès de Lagrange en 1813, un mémoire sur la *théorie des équations*, qui répond à des questions posées par le mathématicien turinois. Mais c'est Poinsot qui est élu au siège de Lagrange. En 1814, Augustin-Louis recherche les faveurs de Laplace, qui règne sur la Classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut, en présentant un mémoire sur la *théorie des erreurs d'observation, entrepris* *sur commande, guidé par Monsieur Laplace.* C'est encore la lecture de travaux de Laplace sur le calcul d'intégrales réelles par passage à l'imaginaire qui inspire à Augustin-Louis, en 1815, un travail sur les *intégrales définies*, premier jalon de ce qui fera sa gloire : la théorie des *fonctions d'une variable complexe* et en particulier la *théorie des résidus.* Et comme l'Institut a mis la théorie de la *propagation des ondes à la surface d'un fluide* comme sujet de son Grand Prix de 1815, Cauchy rédige un mémoire sur ce thème et remporte évidemment le prix.

On voit que les mémoires de Cauchy écrits durant cette période semblent tous être des travaux de circonstance. Pourtant, leur importance sera déterminante pour le progrès des mathématiques. Durant toute sa carrière, Cauchy n'aura pas son pareil pour produire à volonté des mémoires motivés par l'une ou l'autre sollicitation extérieure, des travaux opportunistes pourrait-on dire, sans que cela ne nuise, en général, à leur qualité ou à leur originalité. Plutôt que poussé, comme maints créateurs, par une force intérieure, Cauchy donne l'impression de réagir surtout à des motivations extérieures, souvent étrangères au progrès de la science. Cela en dit long sur ses aptitudes intellectuelles exceptionnelles.

Les décès de Leveque et de Bossut libèrent de nouveaux sièges à l'Institut et Louis-François fait appel à toutes ses relations pour soutenir la candidature de son fils. C'est pourtant Ampère qui est élu. Lorsque Napoléon abandonne son siège à la section de mécanique, Augustin-Louis est encore candidat, mais le choix se porte sur un certain Molard, qui n'a pas laissé une trace indélébile dans l'histoire des sciences.

Le destin réservait à Augustin-Louis une voie inhabituelle et quasi inédite pour obtenir ce siège académique tant convoité. Le 18 juin 1815, Napoléon est défait à Waterloo et, un mois plus tard, les Alliés rétablissent les Bourbons sur le trône de France, en la personne de Louis XVIII, frère de Louis XVI. Un tel événement ne peut que réjouir le congréganiste et royaliste Augustin-Louis, et la fameuse Congrégation, sous la direction du père Legris-Duval, sort rapidement de sa semi-clandestinité napoléonienne pour participer de plus en plus activement à l'épuration qu'entraîne la Restauration, et dont Augustin-Louis va abondamment profiter.

En 1815, Cauchy est nommé professeur suppléant d'analyse à l'Ecole Polytechnique, par décision discrétionnaire du gouverneur, sans vote du Conseil de Perfectionnement ou du Conseil d'Instruction de l'Ecole, et sans y avoir jamais été répétiteur. L'année suivante il devient, avec Ampère, autre catholique convaincu, professeur titulaire d'analyse et de mécanique. La même année, l'Institut est dissout et réorganisé sous le nom d'Académie des Sciences. Carnot et Monge sont radiés pour leur attachement à la Révolution ou à Napoléon, et le Roi nomme à leur place, par décret et sans élections, Bréguet et Cauchy ! Inutile d'insister sur l'accueil plutôt froid que bon nombre de ses confrères réservent à Cauchy, considéré comme un arriviste sans scrupules. Le candide jeune homme n'y voit pourtant qu'une reconnaissance de sa valeur et de son attachement aux Bourbons. En 1817 enfin, Cauchy est appelé pour remplacer le physicien Biot dans la chaire de physique mathématique du Collège de France.

Il est grand temps de marier cette étoile montante de la science. Louis-François s'y emploie et choisit Aloïse de Bure, issue d'une célèbre dynastie d'éditeurs-libraires parisiens, qui sont aussi, est-ce une surprise, libraires de la bibliothèque du Roi. Le mariage a lieu à Saint-Sulpice en avril 1818 et Louis XVIII lui-même signe le contrat. Augustin-Louis, qui a le vers facile, exprime en quelques strophes ses sentiments pour Aloïse :

Si jamais il fut dans ma vie
Un doux moment, un heureux jour,
C'est bien celui, ma douce Amie,
Où tu m'accordes ton amour.

Dieu vient de consacrer lui-même
L'hymen qui comble tous mes voeux.
Sa douce loi veut que je t'aime,
Ah ! C'est ordonner d'être heureux.

Je t'aimerai, ma tendre amie,
Jusques au dernier de mes jours ;
Et puisqu'il est une autre vie
Ton Louis t'aimera toujours.

A la même époque, un certain Victor Hugo, encore adolescent, affirme : *Il n'y a aucune incompatibilité entre l'exact et le poétique. Le nombre est dans l'art comme dans la science.* Lui et Cauchy vont devenir, dans leurs domaines respectifs, les auteurs français les plus prolifiques du XIXe siècle. A en juger par son poème, il est heureux que Cauchy ait choisi les mathématiques. Victor Hugo ne semble pas s'être essayé aux sciences exactes, mais son neveu Léopold Hugo, un excentrique notable, cherchera à se faire un nom en mathématiques en étudiant un solide particulier, qu'il baptise *équidomoïde* et met à la base d'une école romantique de géométrie, l'école *hugomoïdale.* Salvador Dali n'a vraiment rien inventé.

Les jeunes époux s'installent chez les de Bure, dans un hôtel particulier proche du boulevard Saint-Michel, et prennent l'air à la maison de campagne familiale de Sceaux, devenue aujourd'hui lycée de la ville. Dieu bénit rapidement cette union par la naissance d'Alicia en 1819 et de Mathilde en 1823, qui deviendront respectivement vicomtesse de l'Escalopier et comtesse de Saint-Pol.

Cauchy va maintenant partager son extraordinaire énergie entre la recherche mathématique, la Congrégation et son enseignement à l'Ecole polytechnique, qu'il prend très au sérieux. Il en profite pour repenser les *fondements de l'analyse mathématique* et les asseoir systématiquement et solidement sur la notion de *limite*, dont il précise le sens. Ses efforts sont loin d'être appréciés à l'époque, et le jeune professeur est sans cesse en butte aux réactions négatives des Conseils de l'Instruction et de Perfectionnement de l'Ecole Polytechnique, où se réunissent les professeurs et dirigeants de l'Ecole pour discuter du contenu scientifique et pédagogique des cours.

Dès 1819, le directeur de l'Ecole cristallise les critiques de physiciens comme Arago et Petit en écrivant que *l'enseignement des mathématiques pures, aux dires de beaucoup de personnes en état d'émettre une semblable opinion, est poussé trop loin dans l'Ecole, et ce luxe dans cette partie non applicable à la Science tourne au préjudice des autres branches.* La situation n'est pas meilleure au cours lui-même puisqu'en 1821, à l'issue d'une leçon prolongée largement au-delà de l'horaire, (ce dont Cauchy est coutumier), le professeur est sifflé par cinq ou six élèves sortant de l'amphithéâtre et non identifiés. Le directeur fait, sur cet incident, un rapport qui donne plutôt tort à Cauchy : *Tantôt ce professeur retient les élèves plus d'une heure et demie, tantôt il emploie la partie de ce temps consacrée aux interrogations, à des explications nouvelles, quoiqu'il soit bien reconnu que, pour des matières aussi abstraites que l'analyse, les démonstrations du professeur ne doivent durer qu'une heure, les élèves n'étant pas susceptibles de prêter plus longtemps une attention utile. (...) Ces jeunes gens connaissent en outre par les programmes le nombre des leçons déterminées pour chaque cours, et ils voient qu'au lieu de se renfermer dans cinquante leçons, M. Cauchy est déjà à la soixante-cinquième et qu'il lui en faudra peut-être encore deux ou trois pour finir l'analyse.* Saisi de l'incident, le Ministère estime toutefois que les sifflets sont une manifestation politique contre les convictions ultraroyalistes de Cauchy. Si l'on rappelle que Monge, dont Cauchy a pris la place à l'Académie, a fondé l'Ecole Polytechnique, on peut comprendre que Cauchy n'y soit pas particulièrement aimé.

La publication du cours d'analyse, longtemps souhaitée par le Conseil d'Instruction, est progressivement assurée par Cauchy. Le *Cours d'analyse algébrique* paraît en 1821, les *Résumés des leçons sur le calcul infinitésimal*, en 1823, les *Applications du Calcul Infinitésimal à la Géométrie* entre 1826 et 1828, et les *Leçons de Calcul Différentiel* en 1829, tous publiés chez De Bure, faut-il le dire. Ces ouvrages sont unanimement considérés aujourd'hui comme les modèles de tous les traités d'analyse modernes. Pourtant, cet effort est loin de calmer les récriminations des collègues et des directeurs de l'Ecole Polytechnique, tant ces ouvrages fourmillent de nouveautés. Même Laplace, proche de Cauchy et éminent mathématicien, concède que *quelques feuilles de l'un de MM. les professeurs d'analyse* (Cauchy en l'occurence) *lui avaient paru peu intelligibles et qu'il n'était parvenu à les comprendre qu'après une troisième lecture.* Cauchy se défend en affirmant que *si l'on sacrifie quelque chose de la rigueur, l'expérience démontrera bientôt que les nouvelles méthodes, loin de nuire à l'instruction des élèves, leur permettent d'apprendre, en moins de temps et avec moins de travail, tout ce qu'ils apprenaient autrefois.* Mais les adversaires ne désarment pas et Cauchy finit par céder, annonçant au Conseil d'Instruction du 24 novembre 1825 que, *pour se conformer au voeux du Conseil, il ne s'attachera plus à donner, comme il l'a fait jusqu'à présent, des démonstrations parfaitement rigoureuses.* Ce n'est peut-être pas l'abjuration de Galilée, mais cet engagement doit laisser un goût amer dans la bouche du rigoureux analyste. S'il ne lui a pas montré les instruments de torture, le directeur l'a quand même averti que *dans le cas où de nouvelles tentatives resteraient sans succès, il se regarderait comme obligé de proposer au gouvernement une mesure de rigueur qui lui serait très pénible.* Il est bien difficile d'être prophète ou précurseur, quand on enseigne l'analyse aux ingénieurs.

Malgré ces tracasseries, Cauchy trouve encore le temps d'assurer d'autres enseignements et de continuer ses recherches, qui portent à l'époque sur la *mécanique des milieux continus* et *la théorie de l'élasticité, la théorie de la lumière* et *les équations aux dérivées partielles.* Au Collège de France, Cauchy expose ses méthodes de calcul d'intégrales, embryon du fameux *calcul des résidus.* Il est nommé chargé de cours de mécanique, et puis professeur adjoint à la Sorbonne. Il assiste chaque semaine aux séances de l'Académie et y présente, pendant la Restauration, une centaine de notes et de mémoires, au point de mettre en péril les finances de l'institution. Pour publier tout ce qu'il écrit, il se souvient alors d'avoir épousé la fille d'un éditeur et crée son propre journal, les *Exercices de Mathématiques*, publiés chez son beau-père, et dont il est le seul auteur. Augustin-Louis doit bénir son père de lui avoir assuré, en organisant ce mariage, un moyen unique d'écouler son intarissable production scientifique.

A l'Académie, les affinités de Cauchy sont essentiellement déterminées par les convictions religieuses de ses confrères. Cournot note que *son catholicisme ardent, inquiet, ombrageux, faisait dans une telle assemblée une singulière bigarrure.* Au nom de la religion, Cauchy intervient à une séance de 1824 pour condamner la théorie des protubérances cérébrales du docteur Gall, considérée comme matérialiste, et pour attaquer un certain Souton coupable d'avoir affirmé que Newton doutait de l'existence de l'âme. Cela lui vaut les quolibets des journaux libéraux et Stendhal y raconte en 1825 que *M. Cauchy, de l'Institut, jésuite de robe courte, est aujourd'hui chargé de la mission honorable de traquer la physiologie, science qui a dernièrement été poussée si loin par les expériences de MM. Flourens, Magendie et Edwards.* Il ajoute qu'*on accueillit avec de grands éclats de rire les paroles de M. Cauchy qui est le Quatremère de l'Académie des sciences.*

Cauchy n'est pas très heureux non plus dans ses rapports avec les jeunes mathématiciens. Trop préoccupé par ses propres travaux et beaucoup plus disposé à en parler qu'à écouter les autres, il peut rarement s'empêcher, à la lecture d'un mémoire prometteur soumis à son jugement, d'utiliser ses extraordinaires capacités pour le généraliser sur l'heure, présenter en même temps son propre travail, et priver ainsi le jeune auteur d'une partie de ses mérites. Cette attitude se manifeste même lorsque le jeune calculateur prodige, Henri Mondeux se produit dans le salon du directeur des études de l'Ecole Polytechnique. Cauchy éprouve un plaisir enfantin à trouver la réponse avant le jeune homme, en utilisant des raccourcis puisés dans sa vaste culture mathématique. Comme l'écrit Joseph Bertrand, en racontant l'anecdote, *Cauchy avait commis un péché de surprise, la grâce actuelle lui avait manqué.* Cette indifférence à son prochain immédiat peut surprendre, chez un homme d'oeuvres comme Cauchy, mais chacun sait qu'elle est loin d'être exceptionnelle. Elle aura parfois des conséquences plus graves. Ainsi le jeune mathématicien norvégien Abel, qui admire l'oeuvre de Cauchy et vient à Paris pour le consulter, ne peut cacher sa déception lorsqu'en 1826, il écrit à l'un de ses amis : *Cauchy est fou et il n'y a rien à faire avec lui, bien qu'il soit en ce moment le mathématicien qui sait comment il faut traiter les mathématiques. J'ai achevé un grand mémoire sur une certaine classe de fonctions transcendantes pour le présenter à l'Institut. Je l'ai montré à Cauchy, mais c'est à peine s'il a voulu y jeter les yeux.* A la mort prématurée d'Abel en 1829, le rapport de Cauchy n'est toujours pas écrit, et l'on frôlera l'incident diplomatique entre la France et la Norvège avant que l'Académie publie enfin le mémoire en 1841. Cauchy n'est pas plus bienveillant pour Poncelet dont il démolit les travaux de géométrie, ni plus attentif pour le futur Lord Kelvin, qu'il tente seulement de convertir au catholicisme. Son attitude envers Galois semble avoir été plus positive (les experts en débattent encore), et ce sont probablement les événements de 1830 et leur répercussion sur la vie de Cauchy qui sont à l'origine de la regrettable perte du mémoire de Galois sur la théorie des équations, dont Cauchy était rapporteur.

Car la politique va donner une fois de plus à la carrière de Cauchy une orientation nouvelle et inattendue En juillet 1830, suite aux décrets de Charles X, frère et successeur de Louis XVIII, limitant la liberté de la presse et modifiant le système électoral, les parisiens se révoltent. Après trois jours d'émeutes auxquels participent les élèves de l'Ecole Polytechnique, la grande bourgeoisie fait nommer par les députés Louis-Philippe d'Orléans lieutenant-général du Royaume et puis Roi des Français. Charles X s'enfuit avec sa famille et commence un long périple à travers l'Europe. La Révolution de Juillet, libérale et anticléricale, balaye également la Congrégation et ses filiales, et les jésuites, grands amis de Cauchy, sont parmi les plus traqués.

Tout cela effraye beaucoup le pieux mathématicien, que le surmenage des dernières années a de nouveau conduit au bord de la dépression nerveuse. Pour couronner le tout, la loi du 30 août 1830 oblige les bénéficiaires de fonctions publiques à prêter serment de fidélité au Roi. Avec quelques autres, Cauchy considère ce serment comme un acte de félonie vis-à-vis de Charles X. Son père et ses frères n'ont pas ces scrupules et retrouvent rapidement leurs fonctions. Au mois d'août, sous prétexte de prendre du repos, Cauchy quitte brusquement la France, y laissant sa femme et ses deux filles. Il rejoint à Fribourg, où les jésuites sont très influents, une petite colonie d'émigrés, et tente d'y créer une Académie helvétique. Un changement de régime fait échouer l'entreprise et Cauchy, après quelques pérégrinations en Italie et en Suisse, est appelé à Turin, où les jésuites sont très influents à la cour du roi Charles-Albert. Une chaire de physique sublime (physique mathématique) est rétablie à Turin et offerte à Cauchy, qui l'occupe dès le début de 1832. Entretemps, suite à son absence et au refus de prêter le serment, Cauchy a perdu ses postes à l'Ecole Polytechnique, au Collège de France et à la Sorbonne. Le serment n'est pas requis à l'Académie et Cauchy conserve son siège, qu'il occupe même pendant un bref retour en France en 1832. Malgré l'insistance de sa famille, il regagne l'Italie, où son enseignement semble aussi peu apprécié qu'en France. Selon un témoin, *il était toute confusion, passant tout d'un coup d'une idée, d'une formule à l'autre, sans trouver le chemin de la transition. Son enseignement était un nuage obscur parfois illuminé par des éclairs de génie ; mais il était fatigant pour des jeunes élèves, aussi,* *bien peu purent le suivre jusqu'au bout et de trente que nous étions au début du cours, je restais le dernier sur la brèche.*

On peut dès lors s'étonner qu'en 1833, Charles X propose à un tel pédagogue un poste de précepteur du duc de Bordeaux, son petit-fils et l'héritier présomptif des Bourbons. Le légitimiste Augustin-Louis ne peut refuser cette royale requête, et, émule de Bossuet et de Fénelon, il se rend aussitôt en Bohême. Pendant cinq ans, Cauchy tente d'enseigner à l'enfant du miracle des rudiments de mathématiques et de sciences, enrobés dans un emballage de religion et de morale. La pédagogie du professeur est aussi discutable que sa patience est héroïque, et il paraît que *le Prince lui jouait des tours qui passaient souvent les bornes d'une simple plaisanterie.* Cauchy se fait même brutalement mettre à la porte par son royal élève tout en *faisant des excuses et en demandant ce qu'il avait pu faire pour déplaire à Monseigneur.* En termes moins diplomatiques, ces années sont un enfer pour Cauchy et il est heureux que le duc de Bordeaux n'ait jamais régné sur la France. Mais Augustin-Louis résiste, soutenu par sa foi et par sa dévotion aux Bourbons.

Après que sa famille l'ait rejoint à Prague en 1834, Cauchy doit suivre la cour à Teplitz, à Budweitz, à Kirchberg et à Gorizia, où il assiste aux derniers moments de Charles X. Pendant cette période, son activité mathématique est très ralentie. Il poursuit ses travaux sur la théorie de la lumière et sur les équations différentielles. En 1838, le duc de Bordeaux fête enfin ses 18 ans et la tâche de Cauchy s'achève. Le mathématicien, presque quinquagénaire, rentre en France avec sa famille et un titre de baron, auquel il attache beaucoup de prix.

Il redevient aussitôt assidu à l'Académie, recommence à l'inonder de mémoires, la forçant même à limiter à quatre pages (une règle toujours en vigueur) les articles publiés dans les *Comptes-Rendus* hebdomadaires, créés en 1836 par Arago, sur le modèle du *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique.* Plusieurs collègues parlent de *diarrhée mathématique.* Loin d'être rassasié par quelques leçons dans un établissement jésuite, Cauchy cherche à retrouver d'autres activités et se porte candidat à toutes les chaires vacantes. A chaque occasion, il oriente son activité scientifique du moment en fonction du domaine d'activité du poste à pourvoir. Après maintes péripéties, ses tentatives échouent systématiquement devant l'incontournable serment de fidélité à Louis-Philippe, que Cauchy refuse toujours de prêter. Il arrive même que sa candidature soit repoussée par ses collègues. Ainsi, lorsqu'il brigue en 1843 une chaire au Collège de France, alors bastion des opposants aux jésuites, on lui préfère même l'intrigant et médiocre Libri, poursuivi plus tard pour vol de livres et documents précieux dans les bibliothèques.

Notre baron oriente alors son énergie vers les bonnes oeuvres, et on le retrouve plus que jamais aux premières loges des activités caritatives ou prosélytes liées à la Congrégation comme la *Société des Bonnes Oeuvres*, la *Société Catholique des Bons Livres*, l'*Oeuvre de Saint-François-Regis* pour la réhabilitation des unions illicites et la légitimation des enfants qui en sont issus, l'*Oeuvre des Irlandais*, pour combattre la famine en Irlande, l'*Oeuvre des petits Savoyards*, les *Conférences de Saint-Vincent de Paul*, l'*Oeuvre pour l'observation du dimanche*, pour limiter l'ouverture des magasins aux jours de la semaine, l'*Oeuvre des Ecoles d'Orient*, pour la régénération morale des peuples asservis à la loi du Coran. Ces activités lui valent d'être probablement le seul mathématicien cité dans le *Manuel des Dames Patronesses* du Révérend Père de Damas. Il faut dire que la générosité de Cauchy pour les pauvres est indiscutable et engloutit une bonne part de ses appointements.

Cauchy est également très actif dans la création et l'organisation de l'*Institut Catholique*, où sont traitées des questions de science et de littérature dans un esprit essentiellement moral et chrétien. Il y donne même, en alexandrins, des leçons d'astronomie et de religion. Celle d'astronomie, intitulée *Epitre d'un mathématicien à un poète, ou une Leçon d'Astronomie*, commence comme suit

> Tu me crois obsédé par un mauvais génie
> Alcippe, tu te plains de l'étrange manie
> Qui fait qu'en ma maison devenu prisonnier
> D'un flox d'x et d'y grecs je couvre mon papier.
> Laisse-là me dis-tu l'Algèbre et ses formules,
> Laisse-là ton compas, laisse-là tes modules ;
> C'est un emploi bien triste et des nuits et des jours
> Que d'intégrer sans fin et de chiffrer toujours.

Et cela continue pendant des pages, qui fournissent pour le moins d'excellents arguments aux tenants de l'enseignement laïc.

L'affaire des jésuites donne à Cauchy une nouvelle occasion de manifester ses dons de polémistes et son attachement aux disciples d'Ignace de Loyola. Dans les dernières années du règne de Louis-Philippe, les jésuites sont, une fois de plus, menacés d'expulsion de France. Cauchy rédige en 1844 une brochure intitulée *Considérations sur les Ordres Religieux adressées aux amis des sciences*, rappelant le rôle joué par la Compagnie de Jésus dans le développement des sciences, un *Mémoire à consulter adressé aux membres des deux chambres* et *Quelques réflexions sur la liberté d'enseignement.* La même année, un jésuite, François Moigno, publie un *Cours de calcul différentiel et intégral*, fortement inspiré des idées et des manuscrits de Cauchy et qui fera beaucoup pour la diffusion des idées et des méthodes du savant français.

Mais tout cela n'empêche pas Cauchy, privé d'enseignement dans les grandes institutions parisiennes, d'être scientifiquement de plus en plus isolé, même si ses plus farouches adversaires politiques ou philosophiques sont maintenant unanimes à reconnaître son génie. Ils apprécient moins ses votes à l'Académie où Cauchy, après avoir fait publiquement l'éloge du candidat scientifiquement le meilleur, n'hésite jamais à voter pour le plus dévot. Les événements politiques vont, une fois de plus, modifier la destinée de l'obstiné légitimiste.

En février 1848, une nouvelle révolution met fin à la Monarchie de Juillet et proclame la IIe république. Si Cauchy n'est rien moins que républicain, il se réjouit du départ des Orléans et se met peut-être à rêver d'un retour des Bourbons. En outre, la République abolit le serment et lève ainsi, sans le vouloir sans doute, l'incontournable obstacle qui a privé Cauchy de toutes ses chaires. Candide ou inconscient, Cauchy se rend d'autorité au Bureau des Longitudes, où son élection sous Louis-Philippe n'avait pu être entérinée faute de serment, et prétend y siéger de droit. Le Président doit l'exclure, manu militari, avant d'ouvrir la séance. Cela n'empêche pas Cauchy d'être nommé, en 1849, professeur d'astronomie mathématique à la Faculté des Sciences de Paris, dans la chaire volontairement délaissée par son ami Le Verrier, l'irascible découvreur de la planète Neptune, pour occuper celle d'astronomie physique. Car, après avoir été géomètre, algébriste, analyste, mécanicien et physicien mathématicien, Cauchy est devenu astronome. Appelé à juger pour l'Académie, en 1845, un mémoire de Le Verrier, et peu désireux de refaire les inextricables calculs de l'astronome, Cauchy préfère inventer une nouvelle méthode de perturbations en mécanique céleste. Vers 1850, il tente aussi de retrouver une chaire au Collège de France, mais doit s'incliner devant Liouville, non sans provoquer encore de rocambolesques incidents liés à la présence d'un bulletin blanc.

Couronné Empereur en 1852, Louis-Napoléon rétablit le serment et Cauchy renonce pour quelque temps à son enseignement. Toutefois, plus sage que ses prédécesseurs, Napoléon III dispense finalement du serment le républicain Arago et le royaliste Cauchy. Notre astronome peut ainsi reprendre ses activités de professeur à la Faculté des Sciences, sans plus de succès qu'auparavant d'ailleurs, ainsi que le révèle le témoignage de Joseph Bertrand : *Lorsqu'en 1849 Cauchy fut appelé à occuper la chaire de mécanique céleste, ses premières leçons, il faut l'avouer, trompèrent complètement l'espoir d'un auditoire d'élite plus surpris que charmé par la variété un peu confuse des sujets abordés. La troisième, il m'en souvient, fut presque entièrement consacrée à l'extraction de la racine carrée et, le nombre 17 étant pris pour exemple, les calculs furent poussés jusqu'à la dixième décimale par des méthodes connues de tous les auditeurs, et que Cauchy croyait nouvelles parce que la veille sans doute elles avaient spontanément traversé son esprit.*

Les derniers mois de la vie de Cauchy sont pénibles. Il se sent seul et déprimé, et la mort d'un de ses frères lui porte, semble-t-il, un coup fatal. Il doit s'aliter pour un bronchite apparemment bénigne et va se reposer à Sceaux. Son état empire ; il faut lui administrer les derniers sacrements. Le récit qu'en a fait le père Coué dans la *Vie du P. de Ravignan* est presque comique, n'eût été le caractère solennel et sacré de l'instant. Cauchy veut faire fleurir le grand escalier où doit passer le saint-sacrement ; on lui fait comprendre que le temps manque. Il veut se reconfesser, bien qu'il l'ait fait la veille. Il craint que son oreille gauche trop peu découverte, n'ait pas reçu l'onction ; on doit recommencer ; il récidive lors de l'onction des pieds. Il a quelque crainte de n'avoir pas bien fait sa pénitence ; on doit la renouveler. Il se souvient alors d'avoir droit à une indulgence plénière spéciale, comme confrère de Saint-Vincent de Paul ; il faut recommencer celle donnée avant le viatique. Augustin-Louis Cauchy s'éteint pieusement le 23 mai 1857, âgé de 68 ans.

La publication des oeuvres complètes de Cauchy débute en 1882 et s'achève en 1974. Elles remplissent 27 fort volumes in quarto et comprennent plus de 700 notes et mémoires et une dizaine d'ouvrages, couvrant plus de 13.000 pages. Cauchy est ainsi, après Euler (dont la publication des Oeuvres n'est pas encore terminée), le mathématicien le plus prolifique de l'histoire. Peut-être le plus paradoxal aussi. Ses ouvrages d'enseignement ont fixé les standards de la rigueur mathématique, mais ses mémoires sont souvent touffus, confus, obscurs, voire contradictoires. Ce bourgeois bien-pensant et réactionnaire reste, au fond de lui-même, un enfant possédé par les mathématiques, qu'une force mystérieuse pousse à raisonner et à calculer.

Sa personnalité présente les mêmes contradictions. Cauchy dépense sans compter son temps et son argent pour les pauvres, mais se montre d'un rare égoïsme pour ses collègues et ses jeunes émules. Il est décrit en 1828, dans la *Galerie historique des contemporains, comme une personnalité sèche, rigide, dont le manque de tolérance pour ou d'indulgence envers les jeunes qui cherchent à se forger une carrière par eux-mêmes dans les sciences, a fait de lui l'un des moins aimables – et certainement l'un des moins aimés – parmi les érudits et les savants.* Sa loyauté au Roi le conduit à l'exil, mais il sait se montrer retors dans les élections académiques et intrigant dans ses candidatures aux chaires vacantes. Sa foi est profonde et son éducation soignée, mais ses propos sur la religion ou la philosophie sont ceux d'un enfant. Il semble s'occuper très peu de l'éducation de ses filles, mais cultive avec soin l'art d'être grand-père. Enfin, il est l'ami fidèle et inconditionnel des jésuites, ce que chacun mettra librement au compte de ses qualités ou de ses défauts.

Les derniers mots de Cauchy au curé de Sceaux furent : *Les hommes passent, les oeuvres restent.*

Dieu soit loué, pourrait-on dire.

Bibliographie sommaire

La plus ancienne (et longtemps la seule) biographie de Cauchy est la suivante :
C.A. Valson, *La vie et les oeuvres du baron Cauchy*, 2 volumes, Gauthier-Villars, Paris, 1868. Réédition Blanchard, Paris, 1970.
Il s'agit plutôt d'une hagiographie, dont le style ravira les amateurs de vies de saints.
Une excellente biographie a été publiée récemment :
B. Belhoste, *Cauchy. Un mathématicien légitimiste au XIXe siècle*, Belin, Paris, 1985.
Elle est résumée dans l'article
B. Belhoste, Augustin-Louis Cauchy, *Pour la Science*, septembre 1983, 26-125. Reproduit dans "Les mathématiciens", *Dossier Pour la Science*, janvier 1994, 68-77,
et développée dans l'ouvrage
B. Belhoste, *Augustin-Louis Cauchy. A Biography*, Springer, New York, 1991

Adresse de l'auteur :

Jean Mawhin
Université Catholique de Louvain
Département de Mathématique
Chemin du cyclotron 2
1348 Louvain-La-Neuve

Christiaan Huygens en classe

Première partie : l'horloge à pendule et la cycloïde, *M. Roelens*
Maria Boodschap Lyceum Brussel
K.I.P.S.H.O. Hasselt

1. Introduction

Il est intéressant, pour les élèves comme pour les professeurs, de s'attarder un peu sur l'histoire des mathématiques et de voir comment les concepts et méthodes qu'on connaît aujourd'hui ont "grandi" petit à petit à travers des problèmes et les réponses des savants et mathématiciens de l'histoire. Plusieurs idées mathématiques étudiées dans notre enseignement secondaire (coordonnées, équations, dérivées, intégrales, ...) remontent essentiellement au dix-septième siècle, le siècle de Louis XIV, des perruques, de Descartes, de Newton et ... de Christiaan Huygens. Ce qui m'intéresse particulièrement dans l'oeuvre de ce dernier, c'est le lien étroit entre les mathématiques qu'il développe et des problèmes physiques et techniques très concrets.

Les deux passages de l'oeuvre de Huygens qui seront traités dans cet article, concernent chacun la fabrication ou le perfectionnement d'un instrument de son invention. Dans cette première partie, il s'agira de son *horloge à pendule* qu'il a améliorée en utilisant certaines propriétés de la *cycloïde*. Dans la deuxième partie, nous verrons comment des *fractions continuées* lui ont permis de calculer le nombre de dents à attribuer aux roues de son *planétarium*. Chaque partie comprendra la lecture d'un passage de Huygens ainsi qu'un traitement du même sujet par d'autres moyens (analytiques, graphiques). C'est la combinaison et la comparaison de ces différentes approches qui permettent, à mon avis, de faire apprécier par les élèves aussi bien nos outils analytiques et graphiques que les raisonnements de Huygens.

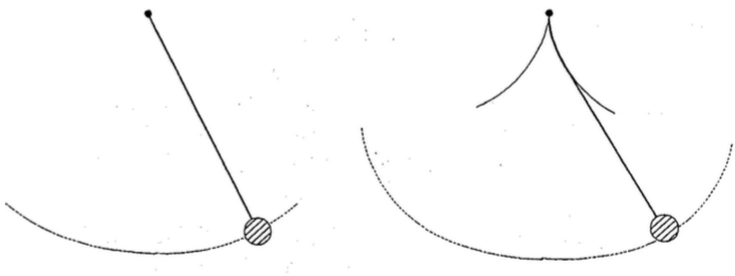
L'horloge à pendule peut être traitée dans une bonne classe de sixième, au moment où on étudie les équations paramétriques de courbes en géométrie analytique (mais il faut prévoir pas mal de temps). Le deuxième sujet, le planétarium, devrait être accessible à une (bonne) classe de quatrième.

2. Christiaan Huygens

Christiaan Huygens est né en 1629 comme deuxième fils de Constantijn Huygens, un célèbre poète et diplomate. A 16 ans, il étudia les mathématiques et le droit à l'université de Leiden. Bien vite, il étonna son professeur Frans Van Schooten avec ses inventions mathématiques, par exemple lorsqu'il démontra que la forme d'une chaînette pendue n'est pas, comme l'avait prétendu Galilée, une parabole. A 27 ans, il découvrit la lune Titan et l'anneau de Saturne (avant lui, on pensait que Saturne avait deux "anses"...). A partir de 1666, il s'installa à Paris où il était "sponsorisé" par Louis XIV pour ses travaux mathématiques et physiques. Membre de l'Académie des Sciences dès la fondation, il entretint des contacts avec tous les autres grands savants de son temps. En 1673, il publia *Horologium oscillatorium*, son chef-d'oeuvre concernant le perfectionnement de l'horloge à pendule (qu'il avait inventée lui-même 17 ans plus tôt) à l'aide des propriétés de la cycloïde. Il inventa et fabriqua entre autres un clavecin à clavier translatable et un planétarium. Il eut comme élève le jeune génie Leibniz. Plus tard, il n'a jamais utilisé dans ses textes le calcul différentiel et intégral de celui-ci et de Newton, mais il s'est tenu au style "géométrique" d'Archimède. Il n'a pas non plus accepté l'idée d'effet à distance qui intervient dans la théorie de la gravité universelle de Newton. En 1690, il publia le *Traité de la lumière*, qui contient son célèbre principe au sujet de la propagation des ondes. Il mourut en 1695. Plusieurs de ses oeuvres comme *Descriptio planetarii* et *Kosmotheoros*, qu'il n'avait pas voulu publier de son vivant, furent éditées après sa mort.

3. L'horloge à pendule

L'idée qu'un pendule possède une période plus ou moins fixe si les écarts restent "petits" était déjà mentionnée par Galilée. Il existait également des horloges mécaniques basées sur des roues dentées mises en mouvement par des poids. C'est Huygens qui a combiné ces deux idées en liant le pendule à l'horloge par le biais d'une "fourchette", de sorte que le pendule veille sur la régularité du rythme (*Horologium*, 1656). Il s'agit ici d'un pendule simple, suspendu en un point. Le problème, c'est que le pendule simple n'a une période constante que *par approximation.* Si le pendule fait des mouvements plus larges, la période est plus longue. Huygens eut bien vite l'idée d'accélérer un peu les mouvements plus larges, à l'aide de *lames* autour du point d'attache (figure ci-dessous). Il lui fallait donc trouver la forme des lames qui donneraient lieu à un mouvement parfaitement "isochrone", c'est-à-dire dont la période serait exactement la même pour n'importe quel écart du pendule.



Une courbe bien "à la mode" au dix-septième siècle, était la cycloïde : la trajectoire d'un point d'un cercle qui roule "sans glisser" le long d'une droite. En 1658, Blaise Pascal avait publié une question de concours sur la longueur, l'aire, le centre de gravité, ... de cette courbe. Un certain Christopher Wren avait répondu (sans ajouter de démonstration) que la longueur de la cycloïde égale quatre fois le diamètre du cercle générateur. Ce résultat avait fait impression, car il équivalait à la *rectification* d'une courbe (construction à la règle et au compas d'un segment de même longueur que la courbe), ce qui est impossible pour le cercle et n'avait réussi jusqu'alors pour aucune courbe.

Dans *Horologium oscillatorium*, publié en 1673, Huygens a démontré qu'on peut obtenir un pendule parfaitement isochrone en prenant des lames de forme cycloïdale. Quelques passages de l'introduction de *Horologium Oscillatorium* et de la première partie de cette oeuvre (contenant la description de l'horloge), permettent une prise de contact "directe" avec le contexte de l'horloge à pendule (extrait 1).

Dans cet extrait, Huygens suggère également quelques expériences qu'on peut effectuer avec les élèves afin d'entrer "physiquement" dans le sujet : l'observation d'une dizaine d'oscillations de deux pendules simples de même longueur mais d'amplitudes différentes et la construction d'une cycloïde en faisant rouler "sans glisser" un cercle. Pour cette deuxième expérience, une boîte vide de "*La vache qui rit*", transpercée d'une craie et roulant le long du bord du tableau, peut très bien faire l'affaire. Mes élèves ont également construit une “glissoire cycloïdale” dans laquelle deux balles de golf, lachées au même moment mais à différentes hauteurs, arrivent ensemble en bas.

Extrait 1

L'HORLOGE À PENDULE

OU

DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES

SUR LE

MOUVEMENT DES PENDULES ADAPTÉ AUX HORLOGES

PAR

CHRISTIAN HUYGENS DE ZUYLICHEM,

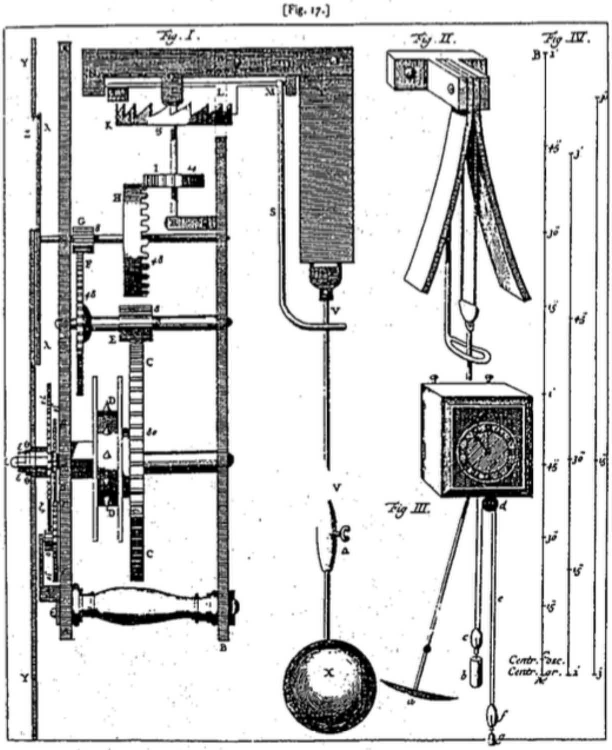
FILS DE CONSTANTYN.

Quinze années ſe ſont écoulées [1]) depuis celle où nous avons fait connaitre par la publication d'une brochure [2]) la conſtruction des horloges que nous avions récemment inventée à cette époque. Attendu que depuis ce temps nous avons trouvé pluſieurs choſes qui regardent la perfection de cet ouvrage, nous nous ſommes réſolus à les expliquer en particulier dans ce livre-ci.

Ces choſes ſont ſi intimement liées à la perfection de cette invention qu'elles peuvent être conſidérées comme la principale partie et pour ainſi dire le fondement, qui y manquait auparavant, de tout ce mécaniſme. En effet, le pendule ſimple ne poſſédait pas de meſure du temps certaine et égale, puiſqu'on obſerve que les plus larges mouvements ſont plus tardifs que les plus étroits; or, nous avons trouvé par le moyen de la géométrie une façon differente, inconnue juſqu'ici, de ſuſpendre ce pendule: nous avons découvert une ligne poſſédant une courbure telle qu'elle ſe prête d'une façon entièrement admirable à lui donner l'égalité déſirée. Depuis notre application de cette ligne aux horloges leur mouvement eſt devenu ſi conſtant et ſi certain qu'enſuite de pluſieurs expériences faites par terre et par mer il eſt maintenant manifeſte que ces horloges ſont très utiles et à l'aſtronomie et à l'art de naviguer. C'eſt cette ligne que décrit en l'air par ſa circonvolution continuelle un clou attaché à une roue courante. Les géomètres de notre temps l'ont appelée cycloïde et l'ont examinée avec ſoin à cauſe de ſes diverſes autres propriétés. Quant à nous, nous l'avons conſidérée à cauſe de cette faculté dont nous parlions, ſavoir celle de meſurer le temps, laquelle nous y avons trouvée ſans en avoir le moindre ſoupçon, rien qu'en raiſonnant ſuivant les méthodes de l'art. Ayant depuis longtemps fait connaitre cette propriété à quelques amis versés en ces matières (car c'est peu de temps après la première édition de l'horloge que nous l'avons aperçue), nous la proposons maintenant à lire à tous confirmée par la démonstration la plus exacte que nous ayons pu trouver. Ainsi ce sera en cette démonstration que consistera la principale partie de ce livre. Pour la donner, il a été nécessaire tout d'abord de corroborer et d'amplifier la doctrine du grand Galilée touchant la chute des corps graves, doctrine dont le fruit le plus souhaité et pour ainsi dire le sommet le plus élevé est précisément la propriété de la cycloïde que nous avons découverte.

Au reste, afin qu'on pût rapporter cette propriété à l'usage des pendules, il nous a fallu établir une nouvelle théorie des lignes courbes, savoir la théorie des courbes qui par leur évolution en engendrent d'autres. Ceci conduit à la comparaison de la longueur des lignes courbes et des lignes droites entre elles que j'ai poursuivie même au-delà de ce que mon sujet demandait: je l'ai fait à cause de la beauté et de la nouveauté apparentes de cette théorie.

[Fig. 17.]



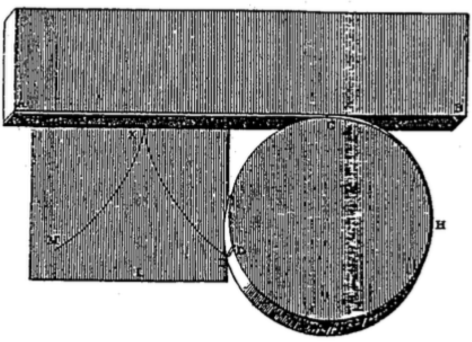
PREMIÈRE PARTIE DE L'HORLOGE À PENDULE

Contenant la description de l'horloge ¹).

Reste à décrire la forme des lames entre lesquelles nous avons dit que le pendule est attaché [Fig. 17 II] et dont la fonction fort importante est de rendre sa période constante. En effet, sans elles les oscillations simples du pendule (quoique d'aucuns aient pensé différemment ¹)) ne seront pas isochrones mais les plus étroites auront une période plus courte. C'est ce qu'on découvre aisément par l'expérience suivante: si l'on prend deux fils de même longueur, portant des poids égaux et suspendus séparément, qu'on écarte l'un beaucoup, l'autre peu, de la perpendiculaire et qu'on les lâche simultanément, on ne les verra pas longtemps mouvoir ensemble dans le même sens mais celui dont les oscillations sont plus étroites prendra l'avance.

Il pourra peut-être sembler que dans nos horloges du genre ici considéré, où l'amplitude des oscillations est toujours la même, l'inégalité dont nous parlions n'aura aucune importance et que par conséquent aucune correction du pendule ne sera nécessaire. Il en serait vraiment ainsi si l'amplitude de toutes les oscillations était constamment et absolument la même. Mais comme elle est quelquefois un peu plus grande et d'autres fois un peu plus petite, une assez grande différence résulte enfin de ce grand nombre de différences fort minimes; c'est ce que l'effet et les expériences font bien voir. Car quoique la force du poids par rapport à la prochaine roue soit toujours la même, cependant, étant transmise par tant d'autres, avec quelque soin qu'on les ait limées, elle ne parvient pas toujours en même intensité au pendule. D'ailleurs le mouvement des roues est aussi rendu plus difficile par le froid et par la disparition ou la corruption de l'huile qu'on y verse. Mais ce sont surtout les oscillations des horloges marines qui deviennent inégales à cause du ballottement continuel du navire, de sorte qu'il faut sans doute corriger le défaut d'inégalité chez toutes les horloges, mais que c'est surtout dans le cas des horloges marines qu'il faut veiller à ce que les oscillations de grande et de petite amplitude soient isochrones.

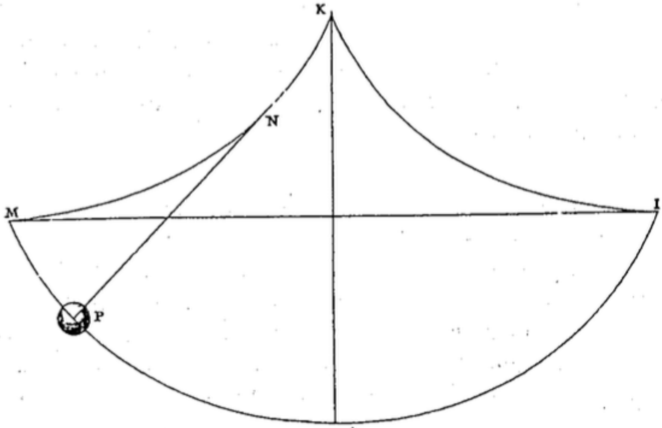
[Fig. 18.]



Soit attachée sur une table plane la règle AB grosse d'un demi-doigt [Fig. 18]. Ensuite soit fait un cylindre CDE d'une hauteur égale à cette grosseur et ayant le diamètre de la base égal à la moitié de la longueur du pendule; et soit FGHE une petite bande ou plutôt une mince plaque attachée à la règle en F et à la circonférence du cylindre en quelque point E, de sorte qu'elle s'applique en partie au cylindre et qu'en partie elle s'étende le long de la règle AB. Qu'une pointe de fer DI soit attachée au cylindre laquelle ait son extrémité un peu au-delà de la base inférieure et en façon qu'elle réponde exactement à sa circonférence.

Les choses étant ainsi arrangées, la pointe I décrira sur le plan de la table placée au-dessous la ligne courbe KI appelée cycloïde, aussitôt que le cylindre tourne en suivant la règle AB, dont il n'est séparé que par la grosseur de la petite lame FG. La base du cylindre employé sera le cercle générateur, CDE, de la cycloïde. Or, après que nous avons appliqué à la règle AB la table ou lame KL et que la partie KI de la cycloïde y a été tracée, nous retournerons cette lame et tracerons sur l'autre côté une ligne semblable KM émanant du même point K. Ensuite nous découperons la figure MKI exactement suivant ces lignes. C'est à cette figure-là qu'il faut adapter l'intervalle des lames entre lesquelles le pendule est suspendu [1]). À l'usage des horloges les petites portions d'arcs KM et KI suffisent; le reste de la ligne courbe serait inutile puisque le fil du pendule ne peut l'atteindre.

[Fig. 19.]



Mais afin qu'on entende plus pleinement la nature et l'effet de cette ligne admirable, il m'a semblé bon de représenter ici dans une autre figure [Fig. 19] les semicycloïdes entières KM et KI entre lesquelles le pendule KNP, d'une longueur égale à deux fois le diamètre du cercle générateur, est suspendu, lequel étant mis en mouvement exécutera des oscillations isochrones, quelle que soit leur amplitude, jusqu'à la plus grande de toutes correspondant à l'arc MPI: de telle manière que le centre de la sphère P attachée au fil se trouve toujours sur la ligne MPI qui est elle aussi une cycloïde. J'ignore si cette propriété remarquable est donnée à aucune autre ligne, savoir celle de se décrire soi-même par son évolution [2]). Or, ce que nous avons dit à propos d'elle sera démontré en détail lorsque nous traiterons de la chute des corps graves et de l'évolution des courbes.

De cette lecture et de ces expériences, nous retenons la description-définition de la cycloïde ainsi que les trois affirmations suivantes, qui demandent à être démontrées.

Affirmation 1 Le pendule simple n'est pas isochrone.

Affirmation 2 Sur une trajectoire cycloïdale, le mouvement d'un corps "grave" est isochrone.

Affirmation 3 Pour obtenir une trajectoire cycloïdale, il suffit de suspendre le pendule entre deux lames cycloïdales (de dimensions appropriées).

Il est clair que les deux dernières affirmations impliquent l'isochronisme d'un pendule muni de telles lames.

4. Les démonstrations de Huygens

4.1. Les affirmations 1 et 2

Huygens ne démontre pas la première affirmation mais il se réfère à l'expérience (extrait 1). Passons donc à l'affirmation 2. La démonstration de Huygens remplit environ 32 pages de texte latin (avec, en regard, la traduction française du dix-septième siècle). Nous nous limiterons ici à un survol rapide.

Les propriétés du mouvement de chute sont déduites de quelques "hypothèses" inspirées des lois de Galilée (extrait 2). On remarque la subordonnée "*de quelque cause qu'elle provienne*" dans la deuxième hypothèse : Huygens n'accepte pas l'influence à distance comme une explication satisfaisante. Tandis que Descartes "invente" une autre explication (des tourbillons de particules invisibles), Huygens est convaincu que la véritable *cause* du mouvement de chute doit encore être découverte plus tard.

Extrait 2

DEUXIÈME PARTIE DE L'HORLOGE À PENDULE.

De la Chute des Corps peſants et de leur Mouvement cycloïdal.

HYPOTHÈSES.

I.

Si la gravité n'exiſtait pas et qu'aucune réſiſtance d'air ne s'oppoſait au mouvement des corps, chacun d'eux continuerait ſon mouvement avec une viteſſe uniforme en ſuivant une ligne droite.

II.

Mais maintenant il arrive par l'action de la gravité, de quelque cauſe qu'elle provienne, que les corps ſe meuvent d'un mouvement compoſé de leur mouvement uniforme dans une direction quelconque et de celui de haut en bas qui eſt dû à la gravité.

III.

On peut conſidérer ces deux mouvements ſéparément et l'un n'eſt pas empêché par l'autre [1]).

A partir de ces hypothèses, Huygens déduit d'autres propriétés du mouvement de chute et les applique à des "glissoires" composées de lignes polygonales. Par ce que nous appellerions un "passage à la limite", il arrive aux glissoires courbes ("*Si l'on considère les lignes courbes comme composées d'une infinité de lignes droites*, [...]", [Hu2], p.146. C'est cette même idée audacieuse qui a permis à Leibniz, pendant les mêmes années 1670, d'"inventer" le calcul différentiel.)

C'est alors qu'intervient la cycloïde. Huygens démontre la construction suivante d'une tangente en un point donné de la cycloïde, à l'aide du cercle générateur après un demi-tour (extrait 3).

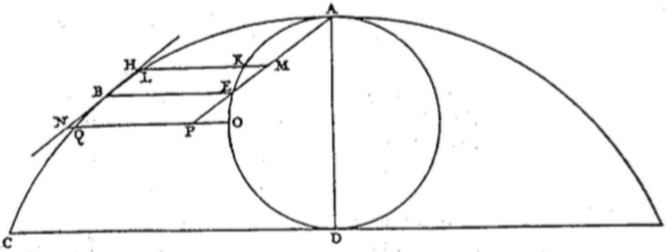
Extrait 3

PROPOSITION XV.

Un point ſur une cycloïde étant donné, mener par lui une tangente à la cycloïde [1]).

Soit ABC [Fig. 36] la cycloïde et B le point donné ſur lui par lequel il faut mener la tangente.

[Fig. 36.]



Conſtruiſons autour de l'axe AD de la cycloïde le cercle générateur AED et menons BE parallèlement à la baſe de la cycloïde, laquelle parallèle coupe la circonférence du cercle nommé en E. Joignons les points A et E par une droite et tirons enfin par B une parallèle HBN à cette dernière. Je dis que cette parallèle touche la cycloïde en B.

La démonstration consiste à déduire une contradiction de l'hypothèse selon laquelle cette droite aurait un deuxième point d'intersection avec la cycloïde. Le style de Huygens est purement "géométrique", contrairement au "principe d'invention" cinématique de Roberval (1602-1675). Celui-ci décompose le mouvement de la roue en un mouvement linéaire et un mouvement circulaire de même vitesse ("sans glisser"...) et construit la tangente comme la diagonale d'un losange, ce qui correspond à la somme vectorielle des vitesses des deux mouvements (voir par exemple [No]).

Huygens poursuit par plusieurs propositions concernant la chute sur une trajectoire cycloïdale et sur des petits segments tangents à la cycloïde, pour aboutir finalement à sa "proposition XXV", où non seulement il énonce que le temps de chute sur une trajectoire cycloïdale est constant, mais de plus il précise la valeur de ce temps constant en fonction du diamètre du cercle générateur (extrait 4).

Extrait 4

PROPOSITION XXV.

Dans une cycloïde à axe vertical et dont le sommet se trouve en bas, les temps de descente dans lesquels un mobile, partant du repos d'un point quelconque de la courbe, atteint le point le plus bas, sont égaux entre eux, et ont au temps de la chute verticale le long de l'axe entier de la cycloïde une raison égale à celle de la demi-circonférence d'un cercle à son diamètre.

4.2. L'affirmation 3

La troisième partie de *Horlogium oscillatorium* est intitulée *de l'évolution et de la dimension des lignes courbes*. Huygens ne se limite pas à la démonstration de l'affirmation 3, mais il cadre cette démonstration dans une théorie concernant les *développantes* et les *développées* des courbes, termes qu'il définit dans les définitions III et IV (extrait 5).

Extrait 5

TROISIÈME PARTIE
DE L'HORLOGE À PENDULE.

De l'Evolution et de la Dimension des Lignes courbes.

DEFINITIONS.

I.

Appelons ligne courbée vers un seul côté une ligne que toutes ses tangentes touchent du même côté. Que si la ligne a quelques parties droites, les prolongements de celles-ci seront considérés comme des tangentes.

II.

Lorſque deux lignes de cette eſpèce émanent d'un même point et que la convexité de l'une eſt tournée vers la concavité de l'autre, comme ſont placées dans la figure ci-jointe [Fig. 52] *les courbes* ABC *et* ADE, *elles ſeront dites concaves l'une et l'autre vers le même côté.*

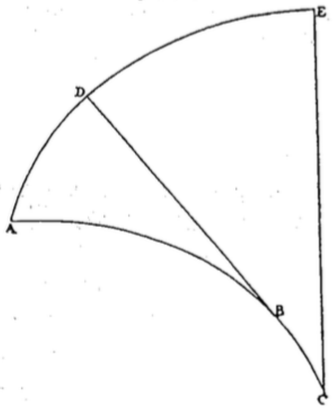
III.

Si l'on conſidère un fil, ou une ligne flexible, enroulé ſur une ligne courbée vers un ſeul côté, et que, une extrémité du fil demeurant attachée à la courbe, l'autre en eſt écartée de telle manière que la partie libre du fil reſte toujours tendue, il eſt manifeſte qu'une certaine autre courbe eſt décrite par cette extrémité du fil. Donnons-lui le nom de Développante.

IV.

Et que celle ſur laquelle le fil eſt enroulé porte le nom de Développée. Dans la figure qui précède [Fig. 52] ABC *eſt la développée et* ADE *la développante correspondante de ſorte que, lorſque l'extrémité du fil paſſe de* A *en* D, *la partie tendue du fil eſt la droite* DB, *le reſte* BC *étant encore enroulé ſur la courbe* ABC. *Il eſt manifeſte que* DB *touche la développée en* B.

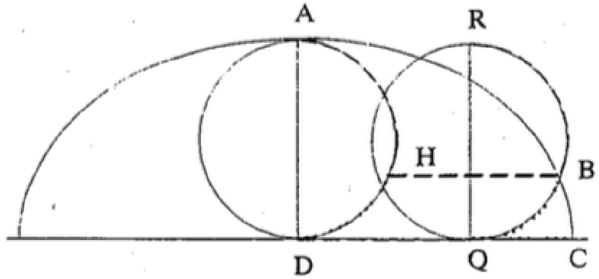
[Fig. 52.]



L'affirmation 3 peut donc être énoncée ainsi : *la développante d'une cycloïde (en prenant un fil de longueur égale à la moitié de la cycloïde) est une cycloïde, égale à la première.*

Le raisonnement se résume ainsi. Au lieu de considérer une cycloïde et sa développante, Huygens part de deux cycloïdes égales comme sur sa figure 58 (extrait 6). Il démontre, en général, que les tangentes d'une courbe donnée sont toujours perpendiculaires à la développante de cette courbe (proposition I). Et inversement, si *toutes* les tangentes d'une courbe sont perpendiculaires à une autre courbe, celle-ci doit être la développante de celle-là (proposition IV). Finalement, il démontre que les tangentes de la première cycloïde sont perpendiculaires à la seconde (proposition V). Donc, la seconde cycloïde est la développante de la première (proposition VI).

Le "passage à la limite" et la "dérivabilité" supposée des courbes se cachent dans les propositions II et III (dont nous n'avons pas repris ici les démonstrations). La proposition XV de la première partie, utilisée dans la démonstration de la proposition V (extrait 6), est l'égalité du segment HB et de l'arc HA dans la figure ci-dessous. Cette propriété de la cycloïde est assez facile à démontrer : le segment HB est égal à DQ, donc à $DC - QC$. Mais DC égale la demi-circonférence du cercle et QC égale l'arc QB et donc l'arc DH. Donc, HB égale la demi-circonférence du cercle moins l'arc DH, donc l'arc HA.



Extrait 6

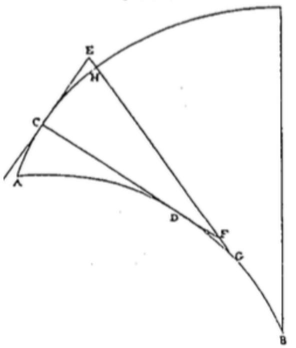
PROPOSITION I[1]).

Toute tangente à la développée rencontrera la développante à angles droits.

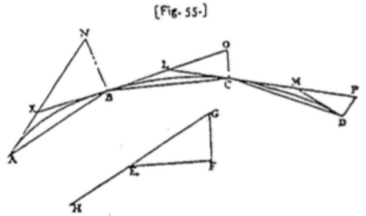
Soit AB [Fig. 53] la développée et AH la ligne décrite par ſon évolution. Puiſſe la droite FDC, tangente en D à la courbe AD, couper en C la courbe ACH. Je dis qu'il la coupe à angles droits, en d'autres termes que ſi l'on mène la droite CE perpendiculairement à CD elle touche la courbe ACH en C. En effet, puiſque DC touche la développée en D, il apparait qu'elle repréſente la poſition du fil au moment où ſon extrémité eſt parvenue juſqu'au point C; et ſi nous réuſſiſſons à démontrer que le fil, dans la deſcription entière de la courbe ACH, n'atteint nulle part la droite CE excepté au point C, il ſera manifeſte que la droite CE touche la courbe ACH en ce point.

Prenons ſur AC un point H quelconque différent de C et conſidérons d'abord le cas où ce point eſt plus éloigné de l'origine de la développante que le point C. Suppoſons que la partie libre du fil ſoit HG lorſqu'il eſt parvenu avec ſon extrémité juſqu'au point H. HG touche donc la ligne AB en G. Et comme dans la deſcription de la partie CH de la courbe, l'arc DG a été développé, CD prolongée du côté D coupera HG, p. e. en F. Appelons E le point de rencontre de GH avec la droite CE. Puiſque l'enſemble des deux lignes CF et FG eſt alors plus grand que DG, que cette dernière ſoit courbée ou droite, il en réſultera, lorſqu'on ajoute de part et d'autre la droite DC, que la ſomme des droites CF et FG eſt plus grande que celle de la droite CD et de DG. Mais à cauſe de l'évolution du fil, il apparait que la droite HG eſt égale à la ſomme de la droite CD et de DG. Par conſéquent la ſomme CF + FG ſera auſſi plus grande que la droite HG; et en retranchant la partie commune FG, on trouve que CF eſt plus grande que HF. Or, FE > FC, parce que l'angle C du triangle FCE eſt droit. FE eſt donc a fortiori plus grande que FH. D'où il reſſort que du moins de ce côté-là du point C l'extrémité du fil n'arrive pas juſqu'à la droite CE.

[Fig. 53.]



[Fig. 55.]



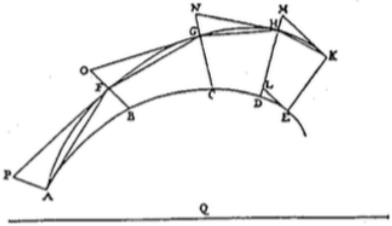
PROPOSITION II.

Toute ligne courbe terminée, courbée vers un ſeul côté, telle que ABD [Fig. 55] *peut être diviſée en un ſi grand nombre de parties qui ſi l'on tire les cordes qui ſouſtendent chacun des arcs, telles que* AB, BC *et* CD, *et enſuite depuis chacun des points de diviſion et auſſi depuis l'extrémité de la courbe les tangentes* AN, BO, CP, *chacune juſqu'à la normale à la courbe au point de diviſion ſuivant* (BN, CO, DP *ſont des normales*), *que chaque corde, dis-je, aura à la normale correſpondante* (AB *à* BN, BC *à* CO, CD *à* DP) *un rapport ſupérieur à tous rapport arbitrairement donné.*

PROPOSITION III.

Deux lignes courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même côté ne peuvent émaner d'un seul point dans une telle position l'une par rapport à l'autre que toute droite normale à l'une soit aussi normale à l'autre.

[Fig. 56.]



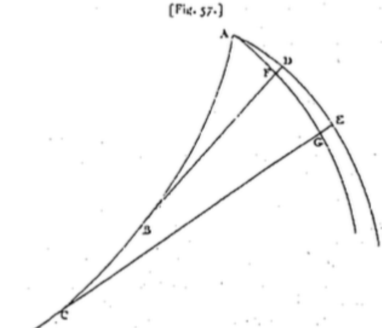
PROPOSITION IV.

Si d'un même point partent deux lignes courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même côté, et ainsi situées l'une par rapport à l'autre que toutes les tangentes à l'une d'elles coupent l'autre à angles droits, cette deuxième sera la développante de la première à partir du point commun.

Soient données les lignes ABC et ADE [Fig. 57] courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même côté, possédant l'extrémité commune A. Puissent toutes les tangentes à la ligne ABC, telles que BD et CE, couper la ligne ADE normalement. Je dis que ADE est décrite par l'évolution de ABC à partir de l'extrémité A.

En effet, supposons, si cela est possible, que par la dite évolution soit décrite une certaine autre courbe AFG. Par conséquent des lignes droites quelconques, tangentes à la développée ABC, telles que BD et CE, couperont cette courbe AFG à angles droits *, p. e. en F et G. Mais par hypothèse ces mêmes tangentes sont aussi normales à la ligne ADE. Or, nous avons affaire à des courbes ADE et AFG, se terminant au même point A, courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même côté, puisqu'elles sont concaves vers le même côté que ABC; car ceci est vrai de la ligne ADE par hypothèse et de la ligne AFG d'après la première proposition de cette Partie. De plus toutes les normales à l'une d'elles sont aussi normales à l'autre. Mais il a été démontré plus haut que ceci est impossible *. Il est donc établi que ADE elle-même sera décrite par l'évolution de la ligne ABC. C. Q. F. D.

[Fig. 57.]

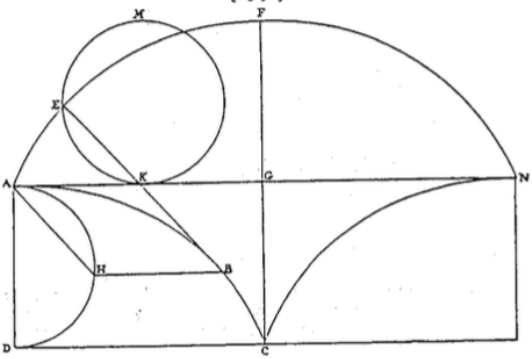


PROPOSITION V.

Lorsqu'une droite touche une cycloïde en son sommet et qu'on construit sur cette droite prise pour base une autre cycloïde, semblable et égale à la première, à partir du point coïncidant avec le sommet nommé, une tangente quelconque à la cycloïde inférieure sera normale à l'arc cycloïdal supérieur[1]).

Supposons que la droite AG [Fig. 58] touche la cycloïde en son sommet A et que sur cette droite prise pour base une autre cycloïde AEF à sommet F soit construite. Soit BK une tangente à la cycloïde ABC. Je dis que cette tangente, prolongée jusqu'à la cycloïde AEF, la rencontrera à angles droits.

[Fig. 58.]



En effet, décrivons autour de AD, axe de la cycloïde ABC, le cercle générateur AHD qui coupe BH, parallèle à la base, en H, et tirons la droite HA. Il s'ensuit, puisque BK touche la cycloïde en B, qu'elle est parallèle à la droite HA *. Par conséquent AHBK est un parallélogramme et AK est égale à HB, c.à.d. à l'arc AH *. Décrivons maintenant le cercle KM égal au cercle générateur AHD, touchant la base AG en K et coupant la droite BK prolongée en E. Comme BKE est parallèle à AH et par conséquent EKA = KAH, il est manifeste que le prolongement de BK coupe de la circonférence KM un arc égal à celui que la droite AH coupe de la circonférence AHD. Par conséquent l'arc KE est égal à l'arc AH, c.à.d. à la droite HB et à la droite KA. Mais de cette égalité il résulte, d'après une propriété de la cycloïde, puisque le cercle générateur MK a touché la règle en K, que le point décrivant la cycloïde a passé par E. La droite KE rencontre donc la cycloïde en E à angles droits *. Or, KE n'est autre chose que le prolongement de BK. Il est donc évident que BK prolongée jusqu'à la cycloïde lui est normale. C. Q. F. D.

* Propos. 15. de la 2ieme Partie.
* Propos. 14. de la 2ieme Partie.
* Propos. 15. de la 2ieme Partie.

PROPOSITION VI.

Par l'évolution, à partir du sommet, d'une demi-cycloïde, une autre demi-cycloïde est décrite, égale et semblable à la première, dont la base coïncide avec la droite qui touche la cycloïde développée en son sommet.

Soit donnée une demi-cycloïde ABC [Fig. 58] à laquelle soit imposée une autre demi-cycloïde semblable AEF, comme dans la proposition précédente. Je dis que lorsque la ligne flexible appliquée à la demi-cycloïde ABC est développée à partir du point A, elle décrit de son extrémité la demi-cycloïde AEF. En effet, puisque les demi-cycloïdes ABC et AEF, courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même côté, de plus situées de sorte que toutes les tangentes de la demi-cycloïde ABC coupent la demi-cycloïde AEF à angles droits, il s'ensuit que cette dernière est décrite par l'évolution de la première à partir du point A *. C. Q. F. D.

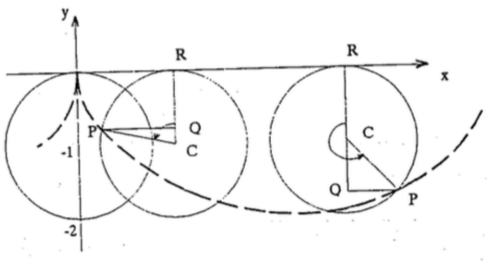
5. L'utilisation de moyens analytiques

La question qui reste ouverte après la lecture (attentive) de ces démonstrations de Huygens, c'est "comment a-t-il trouvé ça ?" Comme dans tout texte organisé de façon déductive, l'auteur ne le dit pas ! Au contraire, il prétend l'avoir trouvé par hasard et sans peine : "[...], *laquelle nous y avons trouvée sans en avoir le moindre soupçon, rien qu'en raisonnant suivant les méthodes de l'art*" (extrait 1).

Redémontrons maintenant ces mêmes affirmations en utilisant les moyens actuels de l'analyse. Les questions parsemées dans le texte peuvent servir en classe pour guider les élèves qui en ont besoin (non sans leur avoir donné d'abord l'occasion de réfléchir à la stratégie globale à suivre). Nous commençons cette fois par l'affirmation 3.

5.1. L'affirmation 3

Tout d'abord, il faut "traduire" la définition "mécanique" de la cycloïde en langage analytique. Prenons comme unité de longueur le rayon de la "roue".



1. Comment traduire le fait que la roue "ne glisse pas" ?

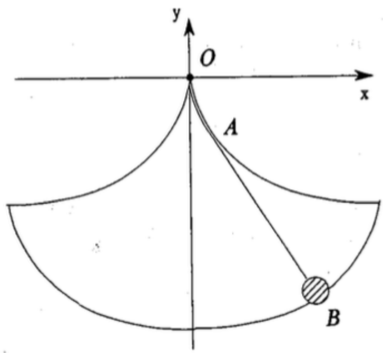
2. Exprimer les coordonnées de C en fonction de l'angle θ.

3. Utiliser le triangle CPQ afin d'exprimer les coordonnées de P en fonction de θ.

Nous obtenons des équations paramétriques de la première cycloïde (les “lames”) :

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = -1 + \cos\theta \end{cases}$$

Attachons maintenant en O un pendule de longueur égale à celle de l'arc OM. A un moment donné, la corde suit l'arc OA et continue de A à B selon la tangente. Soit θ_1 la valeur du paramètre θ en A.



4. Calculer la mesure de l'arc OA et du segment AB.

On trouve pour l'arc OA

$$\int_0^{\theta_1} \sqrt{\left(\tfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \cdots = 4(1 - \cos\frac{\theta_1}{2}).$$

5. Quelle doit être la longueur du fil ? Déterminer la longueur de AB.

En remplaçant θ_1 par π, on voit que la corde mesure 4 unités. AB mesure donc $4\cos\frac{\theta_1}{2}$ unités.

6. Les coordonnées de B sont celles de A plus $|AB|$ fois un vecteur normé tangent à la cycloïde et orienté de A vers B. Qu'est-ce que ça donne ?

Cela donne, après quelques lignes de calcul, $B(\theta_1 + \sin\theta_1, -3 - \cos\theta_1)$.

7. Montrer que, si θ_1 varie, B parcourt une cycloïde qui est l'image de la première par une translation.

Il faut pour cela vérifier par exemple que

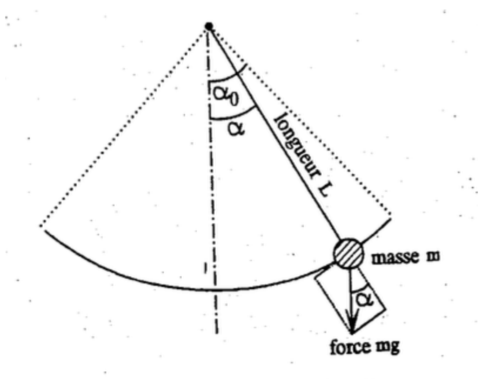
$$\begin{cases} B_x(\theta) = A_x(\theta + \pi) - \pi \\ B_y(\theta) = A_y(\theta + \pi) - 2. \end{cases}$$

Certes, il y a bien d'autres façons de procéder pour démontrer que la développante est une cycloïde égale. On pourrait partir des équations des deux cycloïdes, définir B comme le point d'intersection de la tangente en A et la deuxième cycloïde, et vérifier que la somme de $|arc\, OA|$ et $|AB|$ égale $|arc\, OM|$. Ou alors, on pourrait suivre Huygens de plus près : démontrer "en général" qu'une courbe normale à toutes les tangentes d'une courbe donnée en est la développante, et puis vérifier que nos deux cycloïdes présentent cette propriété.

Les concepts utilisés et les calculs de l'approche analytique sont plus compliqués que ceux de Huygens. L'avantage, néanmoins, c'est qu'il s'agit d'un *calcul* : la stratégie à suivre n'est pas difficile à découvrir ; pour aboutir, il suffit de persévérer et d'être un peu habile en calcul algébrique. Le "calculus" de Newton et autres nous permet, en quelque sorte, de nous passer du génie de Huygens ...

5.2. L'affirmation 1

Le pendule simple est un sujet classique dans les cours de physique d'un enseignement supérieur. On applique la deuxième loi de Newton, "force égale masse fois accélération".



Seule la composante tangente de la force de gravité agit (la composante normale étant compensée par la résistance du fil). La distance parcourue par le poids du pendule mesure $L(\alpha_0 - \alpha)$, et donc l'accélération est $-L\frac{d^2\alpha}{dt^2}$. La loi de Newton fournit donc l'équation différentielle

$$mg\sin\alpha = m\left(-L\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$$

ou encore

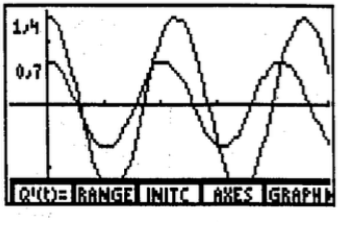
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\alpha$$

Dans une approximation pour petits angles α, on remplace $\sin\alpha$ par α et on trouve comme solution $\alpha = \alpha_0\cos(\sqrt{\frac{g}{L}}t)$. La période (approchée), $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, ne dépend pas de α_0.

Il est bien plus compliqué de calculer la période exacte. On trouve (dans des cours universitaires de mécanique) :

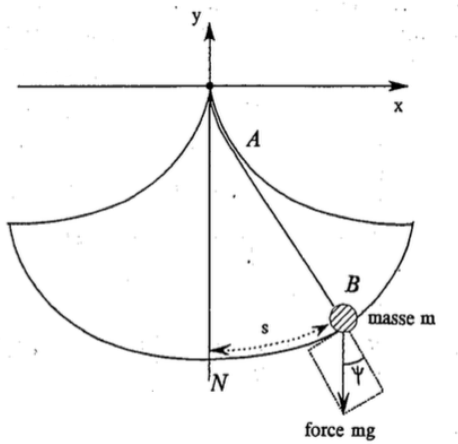
$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha_0}{2}\sin^2\varphi}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)})^2\sin^{2n}\frac{\alpha_0}{2}\right). \end{aligned}$$

L'équation différentielle est bien trop difficile à résoudre de façon analytique dans le secondaire, mais il est possible de l'aborder graphiquement. On introduit l'équation différentielle dans une calculatrice graphique (en prenant, par exemple $L = 1$ mètre) et on choisit deux valeurs différentes pour la condition initiale α_0, par exemple 1,4 rad et 0,7 rad.



Les solutions graphiques données par la machine (suivant une méthode numérique nommée Runge-Kutta) n'ont manifestement pas la même période. Nous avons utilisé ici (et dans le paragraphe suivant) la TI-85 de *Texas Instruments.*

5.3. L'affirmation 2



Sur la figure, on voit que la composante tangente de la pesanteur mesure $mg \sin \psi$. On obtient donc l'équation différentielle

$$-mg \sin \psi = m \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

8. Quel rapport y a-t-il entre l'angle ψ et la valeur du paramètre θ en A ?

Il suffit, par exemple, d'exprimer la pente de AB, d'une part en fonction de θ (en utilisant les équations de la première cycloïde), et d'autre part en fonction de ψ, pour trouver que $\psi = \frac{\theta}{2}$.

9. Exprimer la mesure s de l'arc NB en fonction de θ.

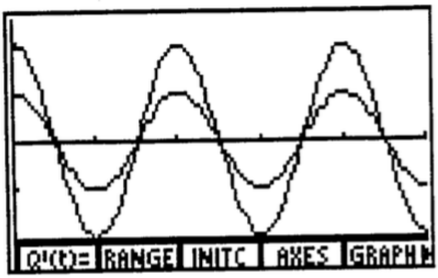
Pas besoin pour cela de calculer à nouveau une intégrale : on peut réutiliser intelligemment la formule trouvée plus haut pour la mesure de l'arc OA. On trouve : $s = 4 \sin \frac{\theta}{2}$.

En substituant tout ça dans l'équation différentielle, on obtient

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4}s.$$

La solution est $s = s_0 \cos(\frac{\sqrt{g}}{2}t)$. La période, $\frac{4\pi}{\sqrt{g}}$, est donc constante, en effet.

Graphiquement, ceci peut être découvert par des élèves qui n'ont pas étudié la résolution d'équations différentielles. On fait tracer sur l'écran les solutions pour quelques valeurs de la condition initiale s_0, et on constate que la période ne change pas.



Adresse de l'auteur :

Michel Roelens
Blijde Inkomststraat 49
3000 Leuven

A suivre...

Des polygones semblables aux homothéties

A. Chevalier, *(Collège Saint-Hubert à Bruxelles - G.E.M. Louvain-la-Neuve)*

"L'idée de similitude, c'est-à-dire de ressemblance de deux figures qui ne diffèrent que par l'échelle sur laquelle elles sont construites, doit certainement aussi être mise au nombre des données de l'intuition immédiate. Que l'on montre à un enfant de trois ans le portrait de son père en miniature, le dessin d'un édifice qui frappe journellement ses regards, et il reconnaîtra son père, il reconnaîtra l'édifice. Il n'attend pas pour cela qu'on lui ait enseigné la géométrie et donné la définition de similitude à la manière des géomètres..." (A.A.Cournot, 1861)

La séquence d'enseignement telle qu'elle est présentée ci-dessous se base sur cette capacité des élèves de savoir reconnaître des figures semblables complexes à vue et propose une succession de questions qui amènent à préciser les critères de similitude de polygones et conduisent à la définition d'homothétie. Celle-ci permettra, par la suite, de donner une définition générale de figures semblables.

Le présent article propose des questions dans un ordre qui permet de construire une théorie tout en résolvant des problèmes. Les réponses aux questions sont peu développées. Par contre, chacune des questions est suivie de l'acquis théorique lié à celle-ci.

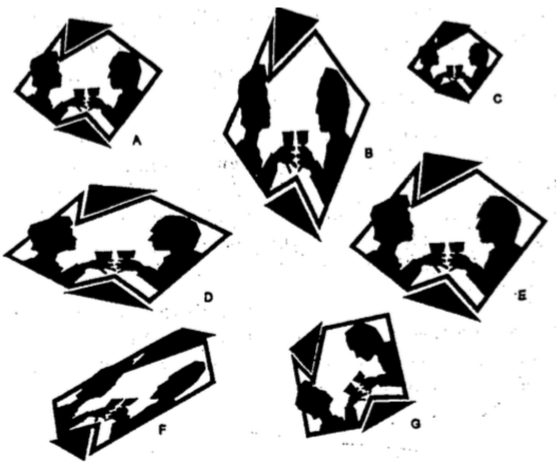
1. Prérequis

Des manipulations et des observations des ombres au soleil de bâtonnets verticaux ainsi que d'une règle plantée de clous équidistants devraient précéder cette séquence afin de mettre au point la propriété suivante : "l'ombre au soleil d'une règle graduée régulièrement est une règle graduée régulièrement" dont la traduction mathématique est : " toute projection parallèle d'une règle graduée régulièrement sur un plan sécant à celle-ci et dont la direction de projection n'est pas celle de la règle est une règle graduée régulièrement".

2. Images transformées

Nous avons exprimé que la similitude est une notion première. Il nous a toutefois semblé indispensable de démarrer l'étude des figures semblables en situant celle-ci dans un cadre plus large qui est celui des transformations. Les logiciels de dessin sont des outils aujourd'hui à notre disposition pour transformer des images. Ouvrons-en un et transformons de diverses façons une figure quelconque.

Les images B, C, D, E, F et G de la figure 1 ont été obtenues à partir de manipulations de l'image A avec un programme de dessin sur ordinateur. Observez-les et décrivez comment on a transformé le dessin A pour obtenir chacun des autres dessins.



Acquis théorique :

1) On distingue parmi diverses transformations celles qui conservent la forme des autres.

2) Définition : on appelle *figures semblables*, toutes les figures qu'on obtient par agrandissement ou réduction d'une même figure de départ ou encore toutes figures qui ont la même forme, indépendamment de la grandeur.

3. Des rectangles semblables

S'il nous semble aisé de reconnaître des figures semblables complexes à vue, le problème n'est plus aussi simple pour des figures élémentaires comme les triangles, rectangles et autres polygones. C'est à ce stade qu'il va falloir se mettre d'accord sur des critères qui s'accordent avec l'intuition première. Dans le cadre du sujet qui nous intéresse, des critères de type numérique ou géométrique vont surgir selon les problèmes posés.

3.1. Les formats de photos

Voici, en cm, différents formats commercialisés de photos :

a) 9×13
b) 10×15
c) 13×18
d) 20×25
e) 30×45

Sachant qu'on part d'un négatif de 24×36 *(en mm), quels sont les formats pour lesquels il est possible d'imprimer exactement le contenu du négatif ? Expliquez votre raisonnement.*

Le problème étant spécifié numériquement, il est clair que la résolution va faire apparaître des critères numériques de similitude de rectangles. Deux modes de comparaison sont possibles. On compare la largeur d'un format à celle du négatif, en établissant le rapport et on vérifie si celui-ci est le même entre les longueurs correspondantes.

négatif	24	36
format d	20	25
format e	30	45

Tab.1

Ainsi, on obtient que

$$\frac{20}{24} \neq \frac{25}{36}$$

Par contre,

$$\frac{30}{24} = \frac{45}{36} = \frac{5}{4}$$

Cette méthode est relativement fastidieuse puisqu'elle nécessite deux comparaisons par rectangle. Une approche plus rapide consiste à caractériser un rectangle par le rapport de sa largeur et de sa longueur. Cela nous conduit tout de suite à dire que le format d ne permet pas de reproduire l'entièreté du négatif car

$$\frac{24}{36} \neq \frac{20}{25}$$

Tous les formats dont le rapport de la largeur et de la longueur vaut 2/3 sont semblables au format du négatif.

Acquis théorique :

Deux rectangles sont semblables si on peut constuire un tableau de proportionnalité à partir de leurs dimensions.

Ce qui signifie que d'une part on peut obtenir chacune des dimensions du rectangle b en multipliant celles du rectangle a par un même nombre k .

rectangle a	l	L	$\times k$
rectangle b	l'	L'	

Tab.2

Ce nombre k correspond au *coefficient d'agrandissement ou de réduction* du rectangle a au rectangle b et correspond à $\frac{L'}{L}$ ou à $\frac{l}{l'}$.

D'autre part, on sait que, dans un tableau de proportionnalité, on multiplie tous les éléments d'une colonne par un même nombre pour obtenir les éléments correspondants d'une autre colonne. Ceci entraîne les égalités suivantes pour deux rectangles semblables de dimensions l et L d'une part et l' et L' d'autre part :

$$\frac{L}{l} = \frac{L'}{l'}$$

De façon générale, on peut exprimer que deux rectangles sont semblables

- soit lorsqu'il y a égalité de rapport entre la largeur et la longueur de chacun des rectangles ;

- soit lorsqu'il existe un coefficient d'agrandissement ou de réduction entre toutes les dimensions de l'un et de l'autre.

3.2. Les écrans de télévision

La question suivante va nous permettre de traiter de la proportionnalité des autres grandeurs à l'intérieur de rectangles semblables.

Pourquoi, dans le commerce, les écrans de télévision sont-ils spécifiés uniquement à partir de leur diagonale ? Cette dimension fournie, peut-on retrouver la hauteur et la largeur d'un écran ?

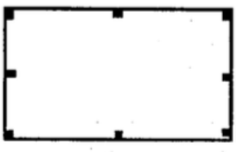
Tous les écrans de télévision sont semblables puisqu'ils peuvent transmettre la même image sans la déformer, quelles que soient les dimensions de l'écran. Le rapport entre la largeur et la hauteur des écrans classiques est toujours 4/3. Sachant que la diagonale d'un rectangle de 4 sur 3 est toujours 5, on peut retrouver les dimensions d'un écran quelconque, dont la diagonale est fournie, à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

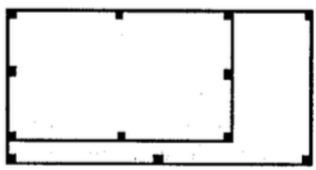
Acquis théorique :

On peut établir un tableau de proportionnalité entre toutes les dimensions de deux rectangles semblables.

3.3. Agrandir ou réduire une figure sur un ordinateur

Sur un certain nombre de programmes d'ordinateur, il est possible de déformer un dessin de la façon suivante. Lorsqu'on active la figure, un cadre rectangulaire apparaît. Les huit petits carrés noirs placés comme sur la figure 2 peuvent être déplacés de façon à faire varier les dimensions du cadre et du dessin par la même occasion. Par exemple, si on déplace un des carrés placés au milieu des côtés, on étire le dessin soit dans le sens de la longueur, soit dans le sens de la largeur. Par contre, lorsqu'on déplace un coin, on détermine un nouveau rectangle comme sur la figure 3.



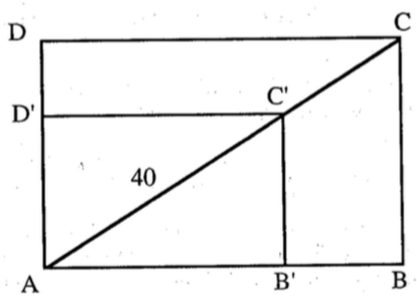


Comment faut-il procéder en une étape pour agrandir ou réduire une figure donnée ?

Pour agrandir ou réduire une figure, il suffit de transformer le cadre en un rectangle semblable au premier. Dans la situation qui nous occupe, le rectangle nous est fourni sans ses dimensions. On ne peut plus s'aider d'un tableau de proportionnalité. Comment traiter alors de la similitude de deux rectangles ? Il faut trouver un critère géométrique et non plus numérique pour résoudre ce problème et montrer ensuite l'équivalence entre les deux types de critères.

Acquis théorique :

On obtient un rectangle semblable au premier en positionnant le sommet déplacé le long de la diagonale du rectangle initial (ou de son prolongement). La figure 4 nous en fournit un exemple.

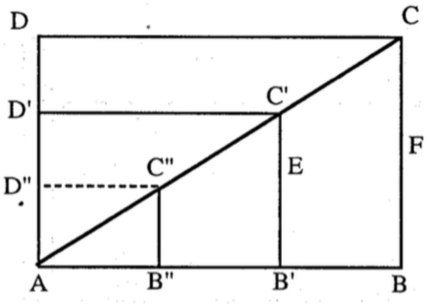


Montrons que le rectangle $AB'C'D'$ est semblable au rectangle $ABCD$. Supposons que la diagonale du nouveau rectangle vaut les 2/3 de l'autre (1). Il faut donc prouver que

$$\overline{AB'} = \frac{2}{3}\overline{AB} \text{ et } \overline{AD'} = \frac{2}{3}\overline{AD}.$$

Situons les points C'' et C', respectivement au tiers et aux deux tiers du segment $[AC]$ qui devient ainsi une règle graduée (figure 5).

1. Le 2/3 est choisi à titre d'exemple. N'importe quelle autre fraction permettrait une démonstration analogue. Bien sûr, il faudra se reposer la question de la pertinence de la démonstration au moment de la découverte des rapports incommensurables.



Traçons les segments parallèles aux côtés $[CB]$ et $[CD]$, issus de C' et C'' jusqu'aux côtés $[AB]$ et $[AD]$. Par cette construction, les points C' et C'' sont envoyés d'une part parallèlement à CD sur AD et d'autre part parallèlement à CB sur AB. Or, nous savons que toute projection parallèle d'une règle graduée régulièrement est une règle graduée régulièrement. On peut en déduire que

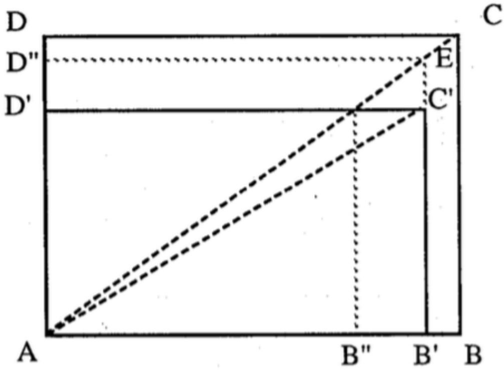
$$\overline{AB''} = \overline{B''B'} = \overline{B'B} \text{ et } \overline{AD''} = \overline{D''D'} = \overline{D'D}$$

et donc

$$\overline{AB'} = \frac{2}{3}\overline{AB} \text{ et } \overline{AD'} = \frac{2}{3}\overline{AD}.$$

Les rectangles $ABCD$ et $AB'C'D'$ sont donc bien semblables.

Si on déplace le point C du rectangle $ABCD$ ailleurs que sur la diagonale $[AC]$ (figure 6), le nouveau rectangle $AB'C'D'$ ne peut être semblable au rectangle $ABCD$.



En effet, le rapport entre les longueurs des deux rectangles est donné par $\frac{AB'}{AB}$. Grâce aux projections parallèles, on a

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AD''}{AD} \neq \frac{AD'}{AD}.$$

De même, si on part du rapport entre les largeurs $\frac{AD'}{AD}$, on peut établir

$$\frac{AD'}{AD} = \frac{AB''}{AB} \neq \frac{AB'}{AB}.$$

Par ailleurs, on peut observer que les deux triangles qui constituent le rectangle $AB'C'D'$ n'ont pas la même forme que les deux triangles qui constituent le rectangle $ABCD$ puisque l'angle entre la diagonale issue de A et chacun des côtés a varié.

Le triangle $AB'C'$ n'est pas semblable au triangle ABC. Par contre, le triangle $AB'E$ est semblable au triangle ABC.

Les angles correspondants de deux polygones semblables ont même amplitude.

On peut donc vérifier le caractère semblable de deux rectangles uniquement géométriquement. On superpose deux rectangles en faisant coïncider un sommet ainsi que les côtés issus de ce sommet et on vérifie que les diagonales issues du sommet se superposent.

4. Des figures obtenues à l'aide d'un pantographe

4.1.

Aujourd'hui, l'utilisation de logiciels de dessin permet de transformer des figures. Avant l'apparition de ces outils modernes, on utilisait à cet effet des appareils articulés appelés pantographes. Construisez-en un en suivant les indications ci-dessous.

1) Procurez-vous quatre lattes en bois ou en carton dans lesquelles vous percez des trous en respectant les intervalles indiqués à la figure 7 ;

2) Assemblez les lattes à l'aide de vis et d'écrous ou d'attaches-parisiennes afin d'obtenir le schéma de la figure 7.

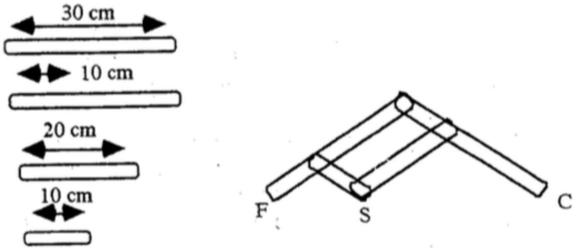


Fig.7

3) Les trois trous F, S et C vont nous servir à placer
- en F, un point fixe (à l'aide d'une punaise ou d'une attache parisienne par exemple) de l'appareil sur la feuille de dessin ;
- en S, une pointe sèche que l'on conduit le long de la figure modèle ;
- en C, une pointe de crayon ou de compas qui trace le nouveau dessin.

4.2.

Dessinez, sur une feuille de dessin, un motif M_1 *dans le style de celui proposé à la figure 8. Fixez le point* F *du pantographe sur la feuille de dessin. Transformez ce motif en un motif* M_2 *à l'aide du pantographe en choisissant les positions des points* F, S *et* C *comme sur la figure 7. Comparez la figure* M_2 *avec la figure* M_1.

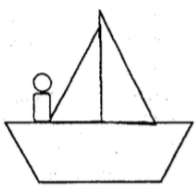


Fig.8

4.3.

Sur le pantographe, on peut échanger les positions du point fixe (F), de la pointe sèche (S) et du crayon (C). Transformez le même motif M_1 en disposant à chaque fois le pantographe comme indiqué sur la figure 9 et en replaçant chaque fois le point fixe F au même endroit sur une feuille de dessin. Qu'observez-vous ?

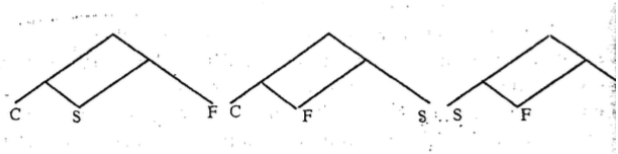


Fig.9

4.4.

Nous observons que le pantographe est un appareil articulé qui transforme une figure en une figure semblable. Retrouvez le coefficient d'agrandissement ou de réduction pour chacune des figures obtenues à partir de la figure M_1. Trouvez un lien entre la disposition des points F, S et C sur le pantographe et le coefficient de similitude ainsi que l'orientaion du motif.

4.5.

Observez le pantographe qui a permis de dessiner M_2 (figure 7). Pourquoi les points F, S et C restent-ils toujours alignés et sont -ils toujours disposés de telle sorte que le segment $[SC]$ ait une longueur double de celle de $[FS]$?

Les points F, S et C sont alignés si on peut montrer que la somme des amplitudes des angles FSP, PSQ et QSC vaut 180°.

Par construction, les segments $[PR]$ et $[SQ]$ ont même longueur. Il en est de même pour les segments $[RQ]$ et $[PS]$. Le quadrilatère $PRQS$ a ses côtés opposés de même longueur. Il s'agit donc d'un parallélogramme. On peut en déduire que PS est parallèle à RC et SQ est parallèle à FR.

La droite SQ, sécante aux parallèles PS et RC, détermine les deux paires d'angles alternes-internes PSQ et SQC, FPS et PSQ (figure 10).

Donc les deux triangles FPS et SQC, qui sont isocèles par construction, ont leur angle au sommet et leurs angles à la base également respectivement de même amplitude.

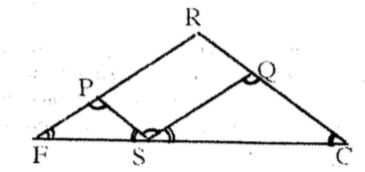


Fig.10

La somme des amplitudes des angles FSP, PSQ et QSC est donc égale à la somme des amplitudes de angles de chacun des deux triangles, à savoir 180°. Les points F, S et C sont donc bien alignés.

Par ailleurs, dans le triangle RFC, par construction, $[PR]$ a une longueur double de $[FP]$. En situant le point M, milieu de $[PR]$, on obtient une règle graduée régulièrement. Si, de chacun des points de division, on trace des parallèles à RC, celles-ci rencontrent $[FC]$ en trois points qui divisent $[FC]$ en trois segments de même longueur. On peut en déduire que $[SC]$ a une longueur double de celle de $[FS]$ ou encore que la distance qui sépare C de F vaut le triple de celle qui sépare S de F (figure 11).

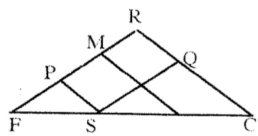


Fig.11

5. Et sans pantographe ?

5.1.

On peut observer que le point C du pantographe se situe à l'intersection de la droite FS et de la droite parallèle à PS passant par R (figure 11). En *vous basant sur cette propriété, trouvez une construction du point A' image du point A par la transformation à l'aide du pantographe.*

Voici deux possibilités :

1) Supposons qu'on ait situé trois points F, P et R tels que $\overline{FR} = 3\overline{FP}$.

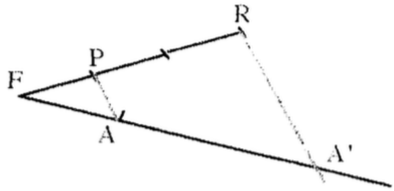


Fig.12

Le point A' se situe à l'intersection de la droite FA et de la parallèle à PA menée par R.

2) Une autre solution consiste à se donner un calque sur lequel on a dessiné trois droites parallèles f, a et a' de telle sorte que la distance FR qui sépare a' de f vaut trois fois la distance FP qui sépare f de a (figure 13).

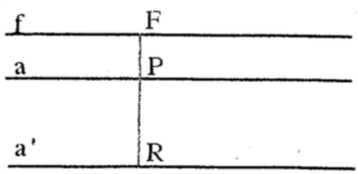


Fig.13

L'image d'un point A à partir du point F se situe à l'intersection de la droite FA et de la droite a' placée de telle façon que F appartienne à la droite f et A à la droite a (figure 14).

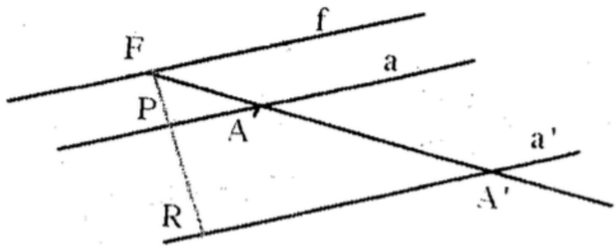


Fig.14

En effet, on sait que $\overline{FR} = 3\overline{FP}$. Par la propriété des projections parallèles $\overline{FA'} = 3\overline{FA}$.

Définition :

Toute transformation comme celle qu'on obtient à l'aide d'un pantographe ou d'une des deux constructions décrites ci-dessus porte le nom d'*homothétie de centre F et de rapport* 3.

L'image d'un point A par une homothétie de centre F et de rapport rationnel r positif quelconque se situe sur la droite FA de telle sorte que les trois points F, A et A' sont obtenus par projection parallèle de trois points alignés F, P et R tels que $\overline{FR} = r\overline{FP}$.

Propriétés d'une homothétie de rapport r positif :

1) Le point F est un point fixe.

2) Les points F, A et A' sont alignés.

3) L'image d'un segment est un segment parallèle, d'une droite est une droite parallèle. Le rapport entre le segment-image et le segment initial vaut r.

4) Les droites passant par F sont fixes.

5) Les amplitudes des angles sont conservées.

6) Les rapports entre les segments sont conservés.

Les propriétés 1 et 2 sont des conséquences immédiates de la définition. Démontrons la propriété 3.

Considérons un point fixe F et un point A dont on connaît l'image A'. Montrons que l'image d'un segment $[AB]$ est un segment $[A'B']$ parallèle à $[AB]$.

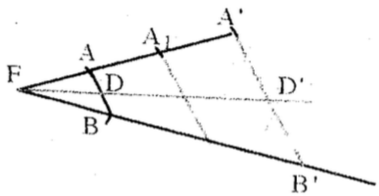


Fig.15

Le point B' se situe à l'intersection de la droite FB et de la parallèle à AB passant par A'. On peut montrer, grâce à la propriété des projections parallèles, que n'importe quel point D du segment $[AB]$ a son image D' sur $[A'B']$ (figure 15). L'image du segment $[AB]$ est donc bien le segment $[A'B']$ parallèle à $[AB]$.

Il nous reste à montrer que le rapport $\frac{A'B'}{AB} = 3$.

Si, de chacun des points de division de $[FB']$ en trois segments de même longueur, on trace des parallèles à $[FA']$, on divise $[A'B']$ en trois segments de même longueur que $[AB]$ (figure 16).

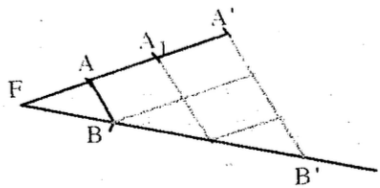


Fig.16

La conservation des amplitudes des angles (propriété 5) est une conséquence immédiate de la propriété 3. En effet, tout angle formé par deux demi-droites issues d'un même point se voit transformé en un angle formé de deux demi-droites parallèles aux premières. Il a donc même amplitude.

Fig.17

Puisque toute homothétie multiplie toutes les dimensions par le rapport tout en conservant l'amplitude des angles, l'image de tout polygone par une homothétie est un polygone semblable au premier.

5.2.

Qu'est-ce qui change à la description précédente si on considère r négatif ?

6. Des polygones semblables

6.1.

Recopier les cinq pentagones ci-dessous sur du papier calque et déterminer sans rien mesurer s'ils sont semblables. Justifier les réponses en citant les propriétés utilisées.

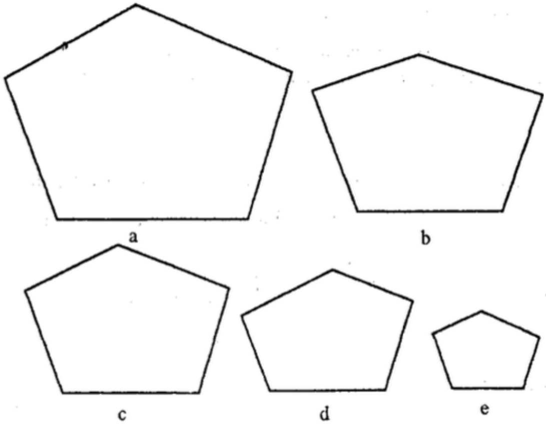


Fig.18

Recherchons, parmi ces pentagones, ceux qui sont images l'un de l'autre par une homothétie.

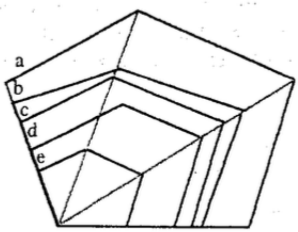


Fig.19

Acquis théorique :

Comment vérifier uniquement géométriquement que deux polygones sont semblables ?

Si on peut trouver une homothétie qui envoit un des polygones sur l'autre, alors les deux polygones sont semblables.

Pour cela, on superpose les deux polygones de façon à faire coïncider un point commun (sommet, milieu d'un côté,...) ainsi que les segments issus de ce point.

Si de plus,

- les côtés correspondants des deux polygones sont parallèles,

- les sommets correspondants sont alignés avec le point commun,

alors les deux polygones sont semblables.

Ainsi les polygones a, c et e sont semblables entre eux.

7. Conclusion

La séquence nous a amenés à être en possession de critères géométriques et numériques pour reconnaître ou construire des polygones semblables. Nous n'avons fait aucune recherche des conditions nécessaires et suffisantes qui autorisent à conclure à la similitude.

Avec l'homothétie, on a en mains un outil puissant qui va permettre de donner une définition générale de figures semblables : *deux figures sont semblables si on peut les placer l'une par rapport à l'autre de telle sorte que l'une soit l'image de l'autre par une homothétie.*

Une fois cette définition mise en place, il devient aisé de développer les cas de similitude des triangles et de vérifier le caractère nécessaire ou suffisant de certaines propriétés des figures semblables.

Adresse de l'auteur :

Anne Chevalier
Rue de l'Eau Vive 15
1420 Braine l'Alleud

Une journée de géométrie

R. Graas,

La Cellule Didactique de la Société Mathématique de Belgique organisait le 25 mars 1995 une journée d'études consacrée à la question : "Quelle géométrie enseigne-t-on à l'Université pour nos futurs enseignants ?" Sans doute, mérite-t-elle de retenir l'attention vu l'effort méritoire consenti et ... un public trop restreint qu'il convient d'élargir, si possible, par une brève information qui sensibilise aux textes des exposés s'ils peuvent être publiés. Cela se passait à l'U.L.B.

Le Professeur Francis BORCEUX (U.C.L.), dans une leçon brillante par sa clarté, sa pédagogie et ses "révélations", parla d'abord des prolongements absolument extraordinaires de la notion de "projection" étendue à des espaces de points et de fonctions. Il faisait ainsi retrouver les polynômes de LEGENDRE, les séries de FOURIER et les moindres carrés. Non sans avoir insisté sur la nécessité d'une préalable bonne "vision spatiale". De quoi faire se souvenir des hyperplans et des hypersphères si souvent utilisés par le statisticien anglais FISHER...

Ensuite, il parla de géométrie appliquée : courbure et pendule cycloïdal de HUYGENS mais aussi des enveloppes avec une bien curieuse situation de "Bang" non acoustique retrouvée en physique nucléaire (la lumière est freinée dans la paraffine). On peut sentir à quel point la curiosité se trouvait piquée...

Ensuite le professeur Wim MIELANTS (R.U.G) fit un double exposé. D'une part, il montra avec quelle sagacité les divers cours en candidatures à GAND se trouvent imbriqués, la géométrie illustrant et éclairant Analyse et Algèbre. Un schéma serait bien utile ici vu la répartition des matières sur les deux années. La collaboration paraît donc strictement organisée (la Mécanique ayant aussi sa part, il va de soi).

La deuxième partie de sa conférence donnait une idée d'un programme intégré, inspiré de ce qui précède, pour le secondaire. Plus encore ici, il faudrait un organigramme. L'impression – peut-être fausse – d'une "filiation" du "système PAPY" pourrait y rendre allergique... Trop de matières – pour la grosse partie des étudiants du secondaire – se ressentent durement d'un point de vue théorique rigoureux, suscitant l'horrible question : "A quoi ça sert ?" qui appelle des applications concrètes. Sans tomber dans un pragmatisme non formateur parce que dépourvu de base suffisante, on devrait s'inspirer de tant de manuels anglo-saxons ou russes remplis d'illustrations pratiques.

L'après-midi, on entendit d'abord le professeur Daniel LEHMANN (MONTPELLIER) ressusciter une géométrie projective que l'on pouvait croire disparue avec nos anciens “compléments” dont on percevait d'ailleurs ainsi l'intérêt (toujours de mise) et ... le décousu : birapport, quadrilatère complet, DESARGUES et PASCAL (avec son hexagone)... On se serait cru revenu au cours si passionnant de projective du Professeur Gustave VERRIEST à l'U.C.L. dans les années 40. Une incursion même dans le champ complexe a fait resurgir les “sorcières” – comme disait le Professeur BOUCKAERT – avec les droites isotropes. Tout ceci pourrait être l'objet d'un thème (libre ?) dans les classes terminales fortes à qui ce flash donnerait une révélation plus cohérente que nos anciens “compléments”. ([1]) Il resterait en suspens le problème de l'inversion si féconde...

Pour terminer, les Professeurs Nicolas ROUCHE (U.C.L.) et Alfred WARRINIER (K.U.L.) parlèrent du “Curriculum standards for School Mathematics” ([2]) élaboré par une énorme commission aux U.S.A.

Cela n'allait pas sans rappeler le “Mammouth” hollandais d'il y a quelques années. Document touffu mais équilibré avec des pistes utiles notamment pour ce qui resterait facultatif. Inspirera-t-il une nouvelle réforme des programmes ou tout au moins une autre pédagogie ? Les rapporteurs en parleraient, à coup sûr, bien mieux.

Une journée remplie, sans excès, qui stimulera et encouragera.

1. Une très intéressante approche de ce type a été donnée par le Professeur LIBOIS (U.L.B.) dans l'une de ses expositions annuelles. On y voyait des modèles de maisons projective, affine et euclidienne.

2. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Reston (Virginia) 1989.
Adresse : NCTM Inc.
1906 Association Drive
Reston, Virginia 22091, USA

Revue des revues

C. rédaction,

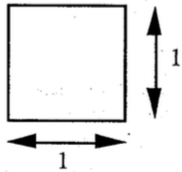
Mathematical Spectrum Volume 25 $N°3$

Une apparition inattendue de π

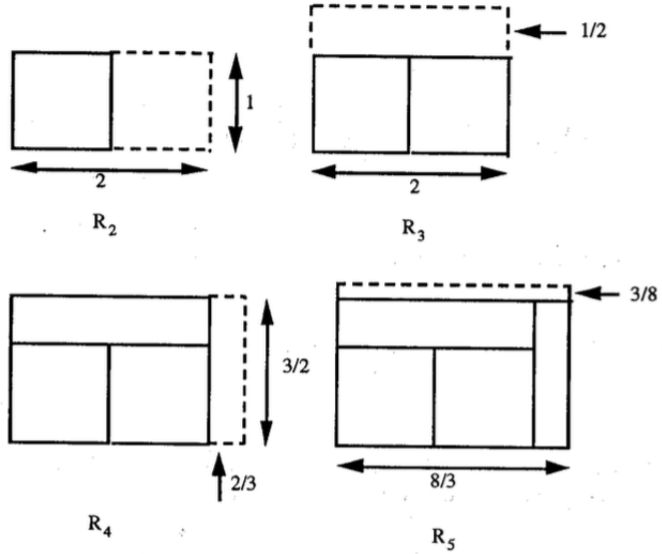
par L. Short et J.P. Melville

Le Docteur Melville s'intéresse à la physique solaire, et le Docteur Short à la meilleure manière d'enseigner les idées mathématiques.

- Ils posent le problème géométrique suivant : Construisons une suite R_i de rectangles tels que R_1 est un carré d'aire 1

  Les R_i s'obtiennent en juxtaposant successivement à doite, puis au-dessus, des rectangles d'aire 1.



Le problème est d'étudier la convergence de la suite des rapports C_k, où $C_k = \dfrac{\text{longueur de } R_k}{\text{hauteur de } R_k} = \frac{\ell_k}{h_k}$.

Notons que $\ell_k \times h_k = k$.

- On constate que la suite C_k semble converger lentement (c'est-à-dire après plus de 100 termes) vers $\frac{\pi}{2}$.

  On obtient une convergence plus rapide vers $\frac{\pi}{2}$ en remplaçant la suite C_k par celle des moyennes de deux termes consécutifs :

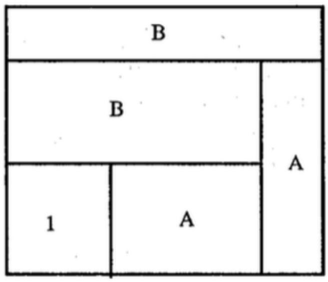
$$C'_k = \frac{1}{2}(C_k + C_{k+1}).$$

- Les auteurs démontrent alors que la suite C_k converge vers le nombre $\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots$ appelé *produit de Wallis* et qui est effectivement égal à $\frac{\pi}{2}$.
- Ils font remarquer que le problème géométrique posé ne laissait en rien présager que la limite serait $\frac{\pi}{2}$. Ils montrent que, si on construit la suite C_k en ajoutant non plus des rectangles d'aire 1, mais :

  à droite, des rectangles d'aire A,

  au-dessus, des rectangles d'aire B,

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \begin{cases} 0 & si \quad A < B \\ \infty & si \quad A > B \\ L_A & si \quad A = B \\ & \text{où } L_A \text{ est un nombre fini et positif,} \\ & \text{dépendant de } A. \end{cases}$$



Remarque : Selon moi, il y a une erreur dans l'article dans la numérotation des rectangles.

DAVID HILBERT

par B.H. Neumann

David Hilbert (1862 - 1943) est l'un des mathématiciens les plus remarquables des temps modernes. Il a donné son nom à une série impressionnante de problèmes.

D. Hilbert naquit à Königsberg, capitale de l'Est de la Prusse, dans une famille de la haute bourgeoisie. Alors qu'il était enfant, la Prusse devint membre, puis leader, de l'Allemagne récemment unifiée. D. Hilbert sortit à 23 ans de l'université de Königsberg avec le grade de docteur en philosophie.

Il voyagea ensuite à travers l'Europe et étudia avec les plus grands esprits de l'époque parmi lesquels Gordan.

Longtemps auparavant, Gordan avait posé le problème des bases finies dans la théorie des invariants. Celui-ci restant non résolu, quoique Gordan en ait ébauché une solution, mais seulement dans un cas très particulier. De retour à Königsberg, D. Hilbert trouva une solution par une méthode complètement nouvelle. Mais, celle-ci n'étant pas constructive, paru suspecte à ses contemporains. Cependant, quand quelques années plus tard, à 30 ans, il utilisa sa méthode pour effectivement construire ces bases finies, il devint rapidement célèbre.

Dans les années qui suivirent, Hilbert donna notamment des démonstrations simplifiées de la transcendance de e et de π (démontrées précédemment respectivement par Hermite et Lindemann), et travailla à divers aspects de la théorie des nombres.

Avec Minkowski, il élabora un rapport sur la situation des connaissances de l'époque en cette matière, "le Zahlbericht", et ce traité, devenu un classique, contribua à établir sa réputation.

Dans le même temps, il accepta l'invitation de F. Klein à tenir une chaire à Göttingen, haut lieu des mathématiques allemandes depuis Gauss.

Après la publication du Zahlbericht, Hilbert se tourna vers les fondements de la géométrie et son livre à ce propos obtint rapidement un grand succès.

L'événement le plus important des années suivantes fut le 2ième congrès de mathématiques qui eût lieu à Paris en 1900 (le premier s'était tenu à Chicago, en 1897). Au cours de celui-ci, Hilbert fit un exposé dans lequel il présenta 23 problèmes qui, pensait-il, étaient d'une grande importance et propres à orienter les recherches en mathématiques au cours du 20ième siècle. C'est effectivement vrai encore aujourd'hui.

Les premiers problèmes traitent des fondements logiques des mathématiques. Hilbert était un optimiste invétéré et était persuadé que chaque problème mathématique a une solution qui est donc susceptible d'être trouvée. C'est pourquoi ce fut un grand choc pour lui (et pour bien d'autres) quand Kurt Gödel (1906 - 1978) montra que dans un système axiomatique arithmétique consistant (c'est-à-dire ne conduisant pas à une contradiction), il y a toujours une proposition qui ne peut être ni démontrée, ni infirmée, à l'intérieur du système.

Dans la suite, Hilbert travailla à une foule de sujets touchant tous les domaines mathématiques, y compris les fondements de la physique mathématique et de la génétique mathématique.

Les dernières années de Hilbert virent Hitler et les nazis, qui détruisirent la gloire mathématique de Göttingen et de ses hôtes.

Le noeud du coupable

par Keith Austin

Grâce à une petite intrigue policière, l'auteur introduit la notion d'invariant. Elle exploite celle-ci afin de déterminer si 2 noeuds (de corde) différents peuvent être ramenés l'un à l'autre.

Commémoration de George Green à l'Abbaye de Westminster

par Keith Austin

Suite à l'intervention de nombreux éminents professeurs, le doyen de Westminster a accepté de placer dans son abbaye une plaque commémorative célébrant George Green (1793-1841).

Celui-ci vient ainsi y rejoindre d'autres sommités scientifiques du 19ième siècle, comme Faraday, Joule, Kelvin, Maxwell, et Stokes.

George Green était un meunier, relativement peu instruit, et vivait à Nottingham. Puis à 40 ans, il partit étudier les mathématiques au Caims College, à Cambridge.

Son travail eut une grande influence (grâce essentiellement à Lord Kelvin). Actuellement, il est connu spécialement pour son théorème relatif à la géométrie vectorielle, pour le tenseur de Green (ou tenseur de Cauchy-Green) dans la théorie de l'élasticité, et surtout pour les fonctions de Green utilisées dans la résolution des équations différentielles. Cette technique et, plus récemment, a été appliquée à des problèmes de la mécanique quantique dans des domaines aussi divers que la physique nucléaire, l'électrodynamisme quantique et la supraconductivité.

Etude de convergence

par John Mooney

La convergence de suites peut être illustrée au moyen de diagrammes itératifs.

Ces diagrammes peuvent aussi suggérer des méthodes permettant d'augmenter la vitesse de convergence des séquences.

L'auteur prend pour exemple la suite $x_{n+1} = -ax_n$ avec $x_0 = 1$.

On obtient $\{1, -a, a^2, -a^3 \ldots\}$.

Les diagrammes montrent aisément

$$\begin{cases} \text{qu'elle tend vers 0 si } 0 < a < 1 \\ \text{qu'elle oscille entre 1 et } -1 \text{ si } a = 1 \\ \text{qu'elle tend (en valeur absolue) vers } \infty \text{ si } a > 1 \end{cases}$$

Le taux de convergence est linéaire car c'est le cas de $y = -ax$.

On peut utiliser le même procédé graphique pour étudier des suites dont le taux de convergence est supérieur à 1.

Envol

par Dylan Gow

En lisant "Envol" de Desmond Bagley, l'auteur se posa le problème suivant :

Un homme veut parcourir une route désertique rectiligne et revenir à son point de départ.

Il dispose d'une quantité illimitée de carburant à sa base, mais il est limité par la capacité du réservoir de son véhicule. Peut-il y parvenir ? Si oui, quelle est la solution optimale ?

On peut rapidement voir que le voyageur peut aller aussi loin qu'il veut, en déposant au préalable une réserve de carburant en différents points. La question est donc d'optimaliser la répartition de ces réserves.

L'auteur avoue ne pas connaître la réponse à cette question, mais propose néanmoins une des solutions possibles.

De plus, il pose deux questions complémentaires.

a) que se passe-t-il si on dispose d'un nombre quelconque de véhicules ?

b) que se passe-t-il si le véhicule ne doit pas retourner à sa base ?

La colonne de l'Ordinateur

par Mike Piff

L'auteur donne un algorithme permettant de colorier une zone de l'écran, préalablement définie par sa frontière. Par exemple, l'intérieur ou l'extérieur d'un cercle, d'un polygone ...

Une somme de coefficients binomiaux

par P. Glaister

En partant de $(1-x)^{-1} = \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^2$, l'auteur montre que

$$\sum_{i=0}^{r} C_{2i}^{i} C_{2(r-i)}^{r-i} = 2^{2r} (r \geqslant 0)$$

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

Toute correspondance concernant cette rubrique sera envoyée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

Dominos carrés

Il s'agit de remplir une grille $n \times n$ avec n^2 dominos carrés portant chacun quatre nombres (de 0 à 9) de sorte que deux dominos se touchant par un côté portent le même nombre de part et d'autre de ce côté.

La 1ère grille est très facile.

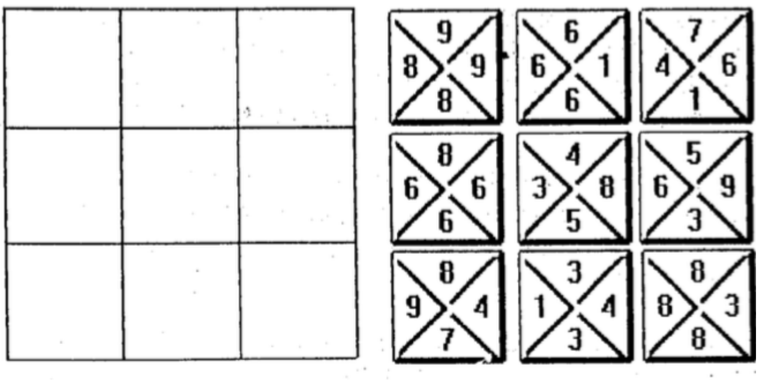


Fig. 1

La 2de est nettement plus coriace (il m'a fallu à peu près 2 heures pour en trouver la solution).

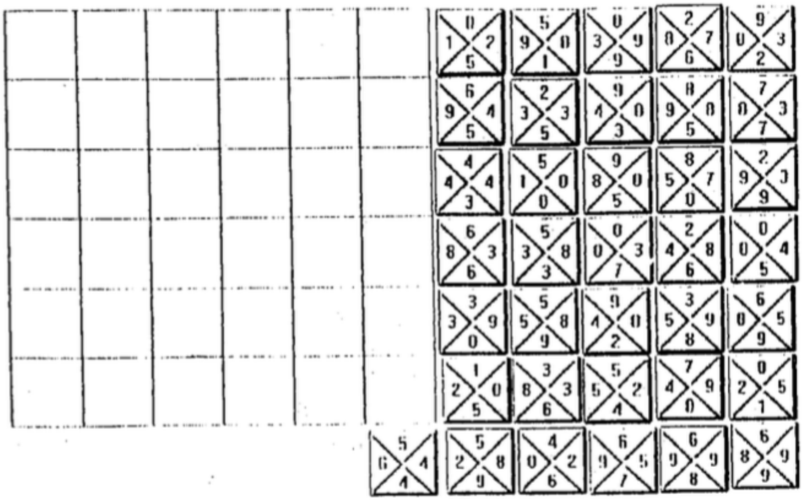


Fig. 2

Si ce jeu vous intéresse, faites-le moi savoir, je mettrai d'autres grilles dans les prochains numéros de Mathématique et Pédagogie.

$\boxed{\text{Trois, quatre, cinq, ...}}$ problème $n°$ 157 de M. et P. $n°$ 100

Démontrer que, si x, y, z sont entiers et si $x^2 + y^2 = z^2$, alors $xyz \equiv 0$ (mod 60).

Solution de J. RONDOU de Heverlee.

On peut toujours supposer x, y, z premiers entre eux et poser $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ et $z = m^2 + n^2$ (avec $m, n \in \mathbb{Z}$).

Dès lors, il faut démontrer que

$$(m^2 - n^2)2mn(m^2 + n^2) \equiv 0 \text{ (mod 60)}$$

ou encore

$$mn(m^4 - n^4) \equiv 0 \text{ (mod 30)}$$

Posons $p = mn(m^4 - n^4)$.

1er cas :

si $m \equiv 0 \pmod{30}$ ou $n \equiv 0 \pmod{30}$, alors $p \equiv 0 \pmod{30}$.

2ème cas :

si $m \equiv n \pmod{30}$, alors $p \equiv 0 \pmod{30}$.

3ème cas :

modulo 2, le problème est réglé par les deux premiers cas.

modulo 3,

si $m \equiv 2$ et $n \equiv 1$, alors $p \equiv 2.15 \equiv 0$

modulo 5,

$$\begin{array}{ll}
\text{si } m \equiv 2 \text{ et } n \equiv 1, & \text{alors } p \equiv 2.15 \equiv 0 \\
\text{si } m \equiv 3 \text{ et } n \equiv 1, & \text{alors } p \equiv 3.80 \equiv 0 \\
\text{si } m \equiv 3 \text{ et } n \equiv 2, & \text{alors } p \equiv 6.65 \equiv 0 \\
\text{si } m \equiv 4 \text{ et } n \equiv 1, & \text{alors } p \equiv 4.255 \equiv 0 \\
\text{si } m \equiv 4 \text{ et } n \equiv 2, & \text{alors } p \equiv 8.240 \equiv 0 \\
\text{si } m \equiv 4 \text{ et } n \equiv 3, & \text{alors } p \equiv 12.175 \equiv 0
\end{array}$$

(on pouvait aussi utiliser le petit théorème de Fermat, m et n n'étant pas divisibles par 5, on a $m^4 \equiv n^4 \equiv 1 \pmod 5$, d'où $m^4 - n^4 \equiv 0 \pmod 5$).

Bonnes solutions aussi de J. FINOULST de Diepenbeek, J. GOLDSTEINAS de Bruxelles (qui, je le rappelle, avait proposé cet énoncé), J. JANSSEN de Lambertmont, A. LAFORT de Montignies s/Sambre, M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre, B. LOISEAU de Mouscron, H.-J. SEIFFERT de Berlin, F. GLINEUR de Quiévrain.

$\boxed{\text{Egaux, peut-être ?}}$ problème $n°$ 158 de M. et P. $n°$ 100

n étant un entier positif, lequel des deux nombres $99^n + 100^n$ et 101^n est le plus grand ?

Solution :

La plupart des lecteurs qui m'ont envoyé une solution ont utilisé soit une table de logarithmes, soit une calculatrice, soit encore un ordinateur pour aboutir à une conclusion. Reproche m'en a été fait par Madame J. RONDOU qui, avec raison, n'aime pas ce genre de calcul. En fait, j'attendais une solution purement algébrique. Seul Monsieur M. LARDINOIS en a trouvé une ; j'ai cependant modifié la 4ème partie de sa démonstration qui me paraissait un peu longue.

(a) si $99^n+100^n<101^n$, alors $99^{n+1}+100^{n+1}<101^{n+1}$.

Preuve :

$$\begin{aligned}99^{n+1}+100^{n+1} &= 99.99^n+100.100^n<100(99^n+100^n)\\ &<100.101^n<101^{n+1}.\end{aligned}$$

(b) si $99^n+100^n>101^n$, alors $99^{n-1}+100^{n-1}>101^{n-1}$.

Preuve :

$$\begin{aligned}99^{n-1}+100^{n-1} &= \frac{99^n}{99}+\frac{100^n}{100}>\frac{1}{100}(99^n+100^n)\\ &>\frac{1}{100}\cdot 101^n>101^{n-1}.\end{aligned}$$

(c) $99^{49}+100^{49}<101^{49}$.

Preuve :

$$\begin{aligned}&101^{49}-99^{49}\\ &= (100+1)^{49}-(100-1)^{49}\\ &= \sum_{k=0}^{49}\binom{49}{k}100^{49-k}-\sum_{k=0}^{49}\binom{49}{k}100^{49-k}\cdot(-1)^k\\ &= 2\left[\binom{49}{1}100^{48}+\binom{49}{3}100^{46}+\binom{49}{5}100^{44}+\cdots\right]\\ &\quad>2\left[\binom{49}{1}100^{48}+\binom{49}{3}100^{46}\right]\\ &\quad>100^{46}(2.49.100^2+2.49.8.47)=100^{46}.1016848\\ &\quad>101^{49}\end{aligned}$$

(d) $99^{48}+100^{48}>101^{48}$.

Preuve :

$$\begin{aligned}&101^{48}-99^{48}\\ &= 2\left[\binom{48}{1}100^{47}+\binom{48}{3}100^{45}+\binom{48}{5}100^{43}+\cdots\right]\\ &= 2\left[48.100^{47}+\frac{48.47.46}{3!}100^{45}+\frac{48.47.46.45.44}{5!}100^{43}+\cdots\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< 2.100^{48}\left[\frac{48}{100}+\frac{48^3}{3!100^3}+\frac{48^5}{5!100^5}+\cdots\right]\\
&< 2.100^{48}\left[\frac{48}{100}+\frac{1}{6}\frac{48^3}{100^3}+\frac{1}{6^2}\frac{48^5}{100^5}+\cdots\right]\\
&\text{car } (2n+1)! = 1.(2.3).(4.5)\ldots(2n(2n+1)) > (2.3)^n = 6^n\\
&< 100^{48}.2.\frac{48}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}(\frac{48}{100})^2}\right) = 100^{48}.\frac{0,96}{0,9616}\\
&< 100^{48}.
\end{aligned}
$$

Conclusion :

de (a) et (c), il vient

$$n \geqslant 49 \Rightarrow 99^n + 100^n < 101^n$$

de (b) et (d), il vient

$$n \leqslant 48 \Rightarrow 99^n + 100^n > 101^n.$$

Monsieur GOLDSTEINAS propose la conjecture suivante :

“si a est pair et $n \geqslant \frac{a}{2}$, alors $(a+1)^n > a^n + (a-1)^n$”.

Il est aisé de montrer qu'elle est correcte.

(1) si $(a+1)^n > a^n + (a-1)^n$, alors $(a+1)^{n+1} > a^{n+1} + (a-1)^{n+1}$.

Même démonstration qu'en (a) ci-dessus.

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{(a+1)^n-(a-1)^n}{a^n} &= \frac{1}{a^n}.2.\left[\binom{n}{1}a^{n-1}+\binom{n}{3}a^{n-3}+\cdots\right]\\
&= \frac{2n}{a}+\frac{2n(n-1)(n-2)}{3!a^3}+\cdots\\
&\quad > 1 \text{ pour } n \geqslant \frac{a}{2}.
\end{aligned}
$$

Autres lecteurs ayant une conclusion correcte : J. FINOULST de Diepenbeek, F. GLINEUR de Quiévrain, J. JANSSEN de Lambertmont, A. LAFORT de Montignies s/Sambre, B. LOISEAU de Mouscron, J. RONDOU de Heverlee.

$\boxed{\text{Un peu de géométrie}}$ problème n° 159 de M. et P. n° 100

Un triangle ABC et un point D de son plan satisfont la relation

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CA}{BD} = \frac{AB}{CD} = \sqrt{3}.$$

Démontrer que ABC est un triangle équilatéral et que D est son centre.

Solution de F. GLINEUR de Quiévrain.

Posons $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et soit G le centre de gravité de ABC.

Pour tout point D, on a

$$\begin{aligned} & AD^2 + BD^2 + CD^2 \\ = \ & (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD})^2 + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD})^2 + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GD})^2 \\ = \ & 3GD^2 + 2\,\overrightarrow{GD}\,(\underbrace{\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}}_{\vec{0}}) + AG^2 + BG^2 + CG^2. \end{aligned}$$

Or, $AG = \frac{2}{3}AA'$ (A' étant le milieu de $[BC]$) et

$$2AA^{'2} + \frac{BC^2}{2} = AB^2 + AC^2$$

donc

$$AG^2 = \frac{4}{9}AA^{'2} = \frac{4}{9}\left(\frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right).$$

De même, BG^2 et CG^2. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} & AD^2 + BD^2 + CD^2 \\ = \ & 3.GD^2 + \frac{4}{9}\left(\frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) \\ = \ & 3.GD^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (1) \end{aligned}$$

Mais l'énoncé implique

$$AD = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad , \quad BD = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad , \quad CD = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

donc

$$AD^2 + BD^2 + CD^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (2)$$

De (1) et (2), on a $3GD^2 = 0$, d'où $D = G$.

On peut toujours supposer $a \geqslant b \geqslant c$.

On a d'une part

$$AD^2 = \frac{a^2}{3},$$

d'autre part,

$$AD^2 = AG^2 = \frac{4}{9}AA'^2 = \frac{2}{9}(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{9}$$

d'où

$$\frac{a^2}{3} = \frac{2}{9}(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{9}$$

et, après simplification : $2a^2 = b^2 + c^2$.

Compte tenu de l'hypothèse $a \geqslant b$, $a \geqslant c$, cette égalité n'est possible que si $a = b$ et $a = c$.

Le triangle est donc équilatéral et $D = G$ est son centre.

Solution similaire de J. FINOULST de Diepenbeek et bonne (mais longue) solution de B. LOISEAU de Mouscron.

166. Reste

Soit $g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Quel est le reste de la division de $g(x^{12})$ par $g(x)$?

167. Intersection

Soit $K = \{a, b, c, d, e\}$ et F un ensemble comprenant 16 sous-ensembles de K tels que trois quelconques d'entre eux ont une intersection non vide. Démontrer que tous les éléments de F ont au moins un élément en commun.

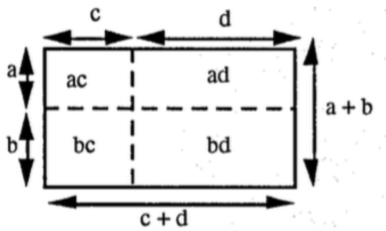
168. Fonction élémentaire

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies pour tout réel x et telles que

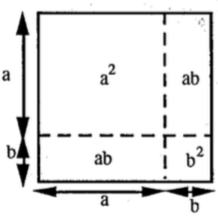
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x^2 - y^2) = f^2(x) - f^2(y).$$

Figures suggestives

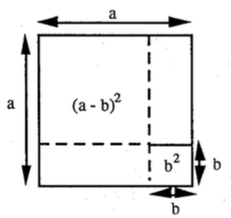
C. rédaction,



$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)^2 + 2(a-b)b \\ &= (a-b)(a-b+2b) \\ &= (a-b)(a+b) \end{aligned}$$