Mathématique et Pédagogie

Sommaire

- *G. Noël, Editorial* 2
- *C. rédaction, Activités de la CAPP* 4
- *G. Haesbroeck, Un indicateur dans l'étude de la répartition des revenus : l'indice de GINI* 29
- *M. Parker, Pas bêtes, ces Américains !* 41
- *J. Bair et F. Sart , Propriétés mathématiques de la fonction de Cobb-Douglas et leurs interprétations économiques* 45
- *D. French, 2 et un rien* 57
- *J. Bair, Bibliographie* 65
- *C. Festraets, Olympiades* 67
- *M. Fremal, Revue des revues* 78
- *C. Festraets, Des problèmes et des jeux* 84

N° 104 *Oct. – Nov. – Déc. 1995*

Editorial

G. Noël,

La modification des grilles horaires des cours de mathématique survenue en 1993 n'a pas fini de faire couler de l'encre et de la salive. En particulier, la disparition des deux niveaux de cours (à 4h et à 6h) au second degré est très mal acceptée par les enseignants. Nombreux sont les collègues qui font remarquer que les élèves *sont* différenciés dès la troisième année. Que les maintenir à un même niveau de formation se fait au détriment des plus motivés d'entre eux. Et que le passage automatique de première en seconde année n'arrange pas les choses !

Rappeler d'abord que dès février 1993, le Conseil d'Administration de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* s'était prononcé pour le maintien des anciennes grilles horaires au moins en quatrième année. Et que le 24 avril 1993, une assemblée générale avait précisé cette demande en souhaitant, si les nouvelles grilles étaient mises en application, qu'au deuxième degré on continue d'organiser des classes de deux niveaux différents recevant des programmes également différents, et cela tant en troisième qu'en quatrième années.

Le 6 mai 1993, une délégation de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* était reçue au cabinet du Ministre, où elle défendait en vain le point de vue précédent : le ministre avait décidé que la certification devait se faire sur base d'un niveau unique. Il acceptait néanmoins de préciser que ≪ quel que soit le nombre d'heures, la pratique de la pédagogie différenciée impose

1) que des moyens adéquats soient mis en œuvre pour assurer à tous les élèves une approche réfléchie de la mathématique, ce qui nécessite des méthodologies différentes selon les groupes, voire au sein d'un même groupe ;

2) qu'un niveau d'excellence soit atteint chaque fois que c'est possible et que des indications à cette fin figurent dans le programme

3) que les éventuels compléments assurés à travers les activités au choix, [...] amènent les élèves les plus motivés à développer leur formation globale à travers les mathématiques. ≫ (Note du Ministre di Rupo à l'Inspecteur Général Ravez en date du 6 mai 1993.)

Ainsi, des méthodologies différentes sont possibles, des indications doivent figurer dans les programmes concernant la façon d'atteindre un niveau d'excellence. Ces recommandations sont floues mais accordent à la commission des programmes une marge de manœuvre non négligeable. La *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* insistera pour qu'il en soit tenu compte à l'occasion de l'élaboration des nouveau programmes du deuxième degré. Cela ne l'empêchera pas de continuer de réclamer pour que l'on rétablisse dans ce degré deux niveaux différents d'enseignement des mathématiques, correspondant à des programmes différents et de préférence selon des grilles horaires différentes. Un jour, le message passera ...

Activités de la CAPP

C. rédaction,

Le 25 mars, la Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs avait organisé une conférence-débat sur l'évolution de l'enseignement dans les vingt prochaines années. Y participaient notamment MM. J. Leroy et E. Florkin, respectivement Président du Comité de Concertation de l'Enseignement non-confessionnel et Président du Comité de Concertation de l'Enseignement confessionnel.

On trouvera ci-dessous :

1) un résumé des discussions, rédigé par Jean Fraipont, Président de PROBID.
2) les questions qui avaient été posées aux intervenants.

Transcription de la conférence-débat : "*Perspectives de l'enseignement pour les 20 prochaines années*"

par Messieurs E. FLORKIN et J. LEROY

Bruxelles, Bibliothèque Royale Albert I - 25 mars 1995

C'est en octobre 93 que dix associations de professeurs se sont rassemblées en Coordination des Associations Pluralistes des Professeurs (la CAPP) en vue de mieux définir et se mettre d'accord sur le type de formation à donner au secondaire, réfléchir et prendre conscience de la complémentarité des formations données par les différentes disciplines afin que chacun apporte sa pierre à l'édifice, promouvoir l'interdisciplinarité et développer des aspects pédagogiques et méthodologiques généraux. L'esprit et les buts de la CAPP appellent aussi des réalisations concrètes : c'est à l'une de ces activités que nous vous invitons à participer aujourd'hui, à une conférence-débat sur les "Perspectives de l'enseignement pour les 20 prochaines années".

Il est vrai que les objectifs généraux de l'enseignement, débattus en Agora dans nombre d'établissements et associations, préoccupent tous les acteurs de l'enseignement. La réalisation de ces objectifs implique une réflexion à tous les niveaux : réflexion sur le système éducatif en général, sur le fonctionnement de l'enseignement secondaire en particulier et, bien sûr, sur la formation des enseignants. Car c'est bien grâce aux enseignants que *les réformes envisagées pourront prendre corps et que les jeunes pourront préparer leur avenir et non subir notre passé.*

L'enjeu est donc de taille. Pour répondre à vos questions, nous avons invité deux orateurs, dont les noms, et peut-être les visages, ne vous sont sans doute pas étrangers : ***Monsieur FLORKIN, Secrétaire général de la Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique est aussi Président du Comité de Concertation de l'Enseignement confessionnel. Monsieur LEROY, est Préfet de l'Athénée Royal de Quiévrain et Président du Comité de Concertation de l'Enseignement non-confessionnel.***

S'ils sont relativement peu connus du public, ces Comités de Concertation, apolitiques, jouent pourtant un rôle important dans le monde de l'enseignement, non pas un rôle de décision mais un rôle de proposition en regroupant les avis émis par des gens de l'enseignement.

Ce sont donc des acteurs de l'enseignement, des personnes qui connaissent bien les problèmes du terrain qui répondront à vos questions. Merci, messieurs, d'avoir répondu à notre invitation et de bien vouloir nous faire part de vos expériences. Chers collègues, les questions que vous nous avez fait parvenir par courrier ont été transmises aux orateurs afin que ceux-ci puissent y répondre et les commenter. Si vous le désirez, à la fin de la conférence, vous pourrez prendre la parole pour poser d'autres questions.

Intervention de Monsieur LEROY : Je voudrais vous dire d'abord que le titre de la conférence "*Perspectives de l'enseignement pour les 20 prochaines années*", a quelque chose d'un peu effrayant. Que dire sur les 20 prochaines années ? Chacune des questions transmises pour le débat d'aujourd'hui pourrait être le sujet d'un colloque. On y parle d'un tas de choses : des réseaux, de la citoyenneté... Il y a matière à une dizaine de colloques ! Je voudrais vous proposer quelques réflexions, sans nous prendre trop au sérieux. Je crois que l'on peut parler de choses très sérieuses sans se prendre soi-même au sérieux et pontifier. Voici les sept points que je vous propose. Dans un premier point, je voudrais vous parler de l'école laïque, publique, républicaine et poser la question "*Est-ce le bon cheminement lorsqu'on veut aller au nord de partir vers le sud ?*". Dans un second point j'aborderai la citoyenneté. C'est très à la mode : en France, on parle de président-citoyen et chez nous, on va, paraît-il, redécouvrir la citoyenneté grâce aux Agora. Tout cela me laisse un peu perplexe. En troisième point, je vous parlerai de l'erreur d'étymologie du Professeur JACQUARD, erreur bienheureuse, puisqu'il pense , à tort, que "éduquer" vient d'educere et non pas d'educare. Mais c'est une erreur intéressante. En quatrième point, je parlerai des mythes identitaires. Pour vous provoquer un peu, je dirais volontiers que nous avons ici dix associations fondées sur des mythes identitaires. En cinquième point, je parlerai de la résistance au changement. En sixième, je voudrais vous dire que je tiens la fourmi comme très supérieure au puzzle et en septième point je vous parlerai de la roue et des quatre mousquetaires.

1. L'école laïque, publique, républicaine. En abordant la question des réseaux, je rêve d'une école qui serait ouverte à tous, qui serait intégrante, qui serait laïque en ce sens qu'elle serait respectueuse de toutes les convictions. Je crois que cette école devrait avoir un contrat social qui ne peut se nouer dans une société démocratique qu'avec les représentants politiques, c'est-à-dire avec le parlement qui doit inspirer les grandes orientations. Je crois que cette école devrait être dotée dans son fonctionnement d'une autonomie locale importante mais en organisant des concertations avec les autres écoles proches et avec l'ensemble des écoles de la Communauté française : concertations zonale et communautaire. A cette école unique, laïque, publique, le politique ne donnerait que les grandes orientations qui fondent le contrat social et ne la gérerait pas de façon clientéliste, ce que l'on appelle parfois la politisation. Je pense aussi que cette école ne pourrait pas être gérée à travers des circulaires administratives, que les impulsions dans le cadre général donné par la puissance publique, c'est-à-dire les grands axes de ce que l'on veut, viendraient de cette gestion zonale, de cette gestion autonome. On peut considérer que c'est un rêve mais qu'ont fait ceux qui défendent ce rêve depuis 50 ans ? Je pense que nous sommes partis vers le nord alors que l'on voulait gagner le sud : c'est-à-dire que pour défendre cette école publique unique, on a considéré que la cause de tous nos malheurs était "le libre". Et l'on a développé pendant toutes ces années fort peu de choses en matière de concertation. C'est à l'opposé de ce que l'on veut. Il faut faire le contraire : je suis un partisan acharné de la concertation, d'abord au sein du caractère – le Comité de Concertation que je préside reprend l'ensemble de l'enseignement de caractère non-confessionnel, c'est-à-dire l'enseignement officiel et les écoles libres non-confessionnelles – ensuite concertation inter-caractères qui est le meilleur garant de cette école réellement au service de toute la population.

2. Au sujet de la citoyenneté, l'un de vous me pose comme question : "*Ne pensez-vous pas que le système éducatif actuel forme des individus plutôt que des citoyens ?*" Former des individus, ce serait déjà bien ! Ce serait déjà mieux que de former des saucissons constitués de rondelles de

mathématique, de biologie, de latin,... Evidemment, la question veut dire qu'il faudrait que l'école donne le sens social. Mais qu'est-ce que la citoyenneté ? Etre wallon ? Etre citoyen francophone de Belgique ? Etre citoyen européen ? Est-ce avoir conscience que les problèmes se posent de manière mondiale ? Est-ce l'idée qu'il suffit de se réunir en Agora pour dire automatiquement le vrai ? Est-ce l'idée que c'est dans la rue, parce qu'on y est nombreux, que l'on définit les grandes orientations de l'enseignement ? Tout cela me laisse très perplexe et je pense qu'un certain nombre de problèmes sont aussi très techniques, qu'il faut certainement éclairer les choix mais qu'il faut aussi cesser de se gargariser de cette histoire de citoyenneté. Je la reprendrais à un niveau tout à fait minime : il me semble que, historiquement, un des premiers rôles de la Cité est la justice, c'est-à-dire régler les conflits. On admet alors que quelqu'un d'autre gère le conflit que l'on a avec un autre citoyen : on admet l'altérité de la décision de justice. Dans une école, l'élève fait-il vraiment l'apprentissage de la citoyenneté ? Apprend-il que les conflits qu'il peut avoir vont être gérés par quelqu'un d'autre ? Très souvent dans les écoles, il y a le professeur, le juge qui attribue la sanction même si le chef d'établissement peut jouer le rôle d'arbitre : il n'y a pas tellement d'altérité dans cette affaire-là. Je crois beaucoup plus à l'acquisition des réflexes de citoyenneté à travers des pratiques dans les écoles, en creusant ce que sont réellement les conditions de la citoyenneté et de la démocratie, au coup par coup, qu'à des grandes déclarations, qu'elles s'appellent Assises ou Agora.

3. Educere = conduire, educare = nourrir. A. JACQUARD dit qu'éduquer vient d'*educere* et non d'*educare*. Les latinistes savent qu'hélas c'est le contraire. C'est une autre question que vous avez posée : "*est-ce que l'on peut encore éduquer à notre époque* ?" L'élève ne peut apprendre qu'en faisant confiance : apprendre, c'est prendre des risques. On le voit quand, adultes, nous avons un accident qui fait que nous ne savons plus marcher : nous avons alors un mal fou à réapprendre à marcher parce que nous n'osons plus, parce que nous avons peur de tomber. Heureusement, les enfants sont beaucoup plus audacieux car s'ils attendaient d'être sûrs de leurs jambes pour marcher, je crois qu'ils attendraient très longtemps. A tout moment, les élèves prennent le risque d'apprendre. Beaucoup d'élèves ont un comportement négatif, de refus, parce qu'ils préfèrent encore faire ce qu'ils savent faire, être le pitre, le cancre... S'ils se mettent à apprendre, peut-être vont-ils se tromper, ressentir les effets négatifs de l'apprentissage et qu'ils en seront d'autant moins incités à prendre ce risque. Il faut que le "disciple" admette d'être le disciple d'un "maître". Il faut qu'il fasse confiance, il faut qu'il prenne tel chemin parce que le maître l'a décidé et que le maître sait où il va.

Quand le maître accepte d'être le maître de quelqu'un, il prend une responsabilité énorme. La seule responsabilité légitime à prendre, c'est d'éduquer cet enfant en ayant toute son attention centrée sur lui. La seule chose qui compte, c'est l'évolution de l'enfant. Tout le travail des compétences transversales et des compétences disciplinaires au premier degré et l'ensemble des réformes visent à cela : à centrer les choses sur l'élève. Il ne s'agit certainement pas à travers les compétences transversales d'avoir un cours de compétences transversales, ce serait une absurdité absolue, c'est à travers toutes les disciplines que l'on doit viser aux compétences transversales. Je regrette beaucoup que dans le bulletin de la Communauté française il y ait à part des cotes, issues de moyennes, de compétences transversales. Etablir des moyennes de compétences transversales est un non-sens absolu ! On pourrait très bien avoir un projet d'école non démocratique, on pourrait très bien concevoir un projet politique de type élitiste, et défendre que l'école formerait des élites : grâce à ce que feront ces élites les autres auront des miettes dont ils pourront vivre. Ce n'est pas mon projet. Mais si l'on a un projet politique de type égalitaire, un projet de promotion de tout le monde – et c'est très dur de croire, dans la pratique quotidienne, aux vertus de cette égalité – il faut éduquer, centrer l'attention sur l'élève.

4. D'une manière provocatrice, je vous avais dit qu'il y avait ici sans doute dix associations identitaires. Depuis les années 55, 60, et cela se marque très fort dans la législation en 69 avec la spécificité des titres, il y a eu l'idée que le professeur était d'abord le porteur d'une discipline. Nous avons donc dans la législation, comme titre requis, le professeur avec sa discipline : spécificité du titre. Comment donc pourrait-on enseigner quelque chose que l'on n'a pas appris ? Parmi vous il y en a qui ont dit "*nous devons défendre notre discipline*" . L'identité de l'enseignant devient non pas enseignant mais mathématicien, biologiste, physicien, classique,... Le goût d'un jeune professeur est d'abord pour sa discipline : mais de là à être professeur, il y a une distance parce que enseigner demande un changement complet de perspective. La discipline n'est qu'un outil. Le recentrage sur l'élève amène le professeur à être d'abord professeur, ensuite dans une discipline. Evidemment à travers une discipline, pas du tout professeur de compétences transversales.

5. Ces mythes identitaires jouent un grand rôle dans la résistance au changement. Le fait de dire que mon devoir c'est d'abord de défendre ma discipline ne permet pas de voir réellement l'élève qui est en face. Dans la relation pédagogique, il ne se produit quelque chose que si un disciple accepte d'être le disciple d'un maître. Il ne s'agit donc pas d'être copains et

de faire du laxisme. Une seconde résistance au changement, bien plus forte sans doute, est le "*y a qu'à*". "Y a qu'à" refinancer l'enseignement, "y a qu'à" mettre des sous,... Il faut oser avoir des analyses lucides de ce qui se passe. Au delà de cette lucidité d'ensemble, il faut oser tirer les conclusions rationnelles – dans "rationalisation", il y a "rationnel" – il faut oser tirer les conséquences de ce que l'on pose comme analyse. Un exemple : il y avait au niveau du secondaire 6 000 cours et options avec moins de 5 élèves. Il était lucide de le voir et de tirer les conclusions jusqu'au bout. Au moment de tirer les conclusions, ceux qui étaient d'accord au départ ont souvent des difficultés à accepter ces conclusions lorsqu'elles les touchent au niveau de leur lobby. Je crois profondément à la nécessité de la lucidité, de la rationalité. Dans les prochaines semaines et mois, dans ces questions de l'enseignement, l'enseignement secondaire va de nouveau être ce baudet d'où vient tout le mal. Le supérieur a besoin de plus (il accueille plus d'élèves) et le fondamental est... fondamental. Ce fut un de mes rares points de désaccord avec le Ministre Di Rupo : il mettait beaucoup trop le fondamental sur un piédestal en disant que tout y allait bien. Le fondamental est bien sûr un enseignement capital mais il n'est pas vrai que les problèmes se posent uniquement au secondaire, loin de là ! L'université c'est la recherche ! Il n'est pas question de s'attaquer aux malheureux en touchant au spécial ! Il reste donc le secondaire. En osant être lucide et rationnel – accessoirement, il y a quand même 2 milliards d'économies qui ont été faites – l'enseignement secondaire est confronté à des difficultés importantes à savoir scolariser pratiquement toute une classe d'âge et les conduire à aborder l'enseignement supérieur pour les uns, la vie pour les autres. Le rôle qui était dévolu à l'enseignement fondamental, la scolarisation de tous les enfants, avec des objectifs plus restreints, est maintenant celui du secondaire et ce défi demande un certain nombre de moyens. Par exemple, les moyens consacrés à la formation en cours de carrière sont indispensables et ne doivent pas faire l'objet d'économies.

6. Les réformes qui ont conduit à l'enseignement rénové avaient un côté très systématique et structuré. Tout était pensé et on s'attaquait aux structures. Les réformes récentes pouvaient donner l'impression qu'elles étaient peu structurées : après coup, on voyait apparaître des cohérences. Pierre BOUILLON, dans Le Soir, a dit plusieurs fois qu'il y avait là des plans machiavéliques, que tout était conçu avant. Je crois à la fourmi plutôt qu'au puzzle. Dans un puzzle, toutes les pièces sont présentes à l'avance : elles n'ont qu'une place et il faut trouver la bonne. La fourmi, elle, se déplace tout le temps : elle ne fait pas grand-chose ou si peu que cela semble insignifiant. Ce sont pourtant ces petites choses qui font bouger l'enseignement :

une petite action ici peut entraîner une série de conséquences. La cohérence doit être réajustée à chaque coup.

7. Dans la formation en cours de carrière, je ne pense pas qu'il faut reproduire la formation initiale et certainement pas la formation pyramidale universitaire. Je vole une formule de Monsieur FLORKIN et il me le pardonnera : "*Je crois autant à la formation par les pairs qu'à la formation par les experts*". Ce qui est bien, c'est de mettre les gens ensemble, d'amener un regard extérieur qui leur permet de travailler mais de rester le plus possible dans une formation où les formés sont aussi leurs propres formateurs. Ce qui est prioritaire dans la formation en cours de carrière pour ces prochains mois voire ces prochaines années est d'abord de fournir aux enseignants des outils concrets, des documents utilisables, disponibles sur support informatique parce qu'un travail sur papier est moins facilement modifiable, digérable. Il est inutile que chaque professeur dans son coin réinvente la roue, travaille à des recherches de documents, de statistiques,... que d'autres ont déjà effectuées. C'est le premier volet, de ce que j'appelle le premier mousquetaire.

Mon deuxième mousquetaire, la deuxième priorité, est qu'il faut une méthodologie pour les outils (le "livre du maître").

Troisièmement, il faut une analyse épistémologique de ces outils. Très régulièrement, on fait des choses sans vraiment réfléchir à la démarche. Si l'on voit, dans des exercices de cours programmés, une démarche de type behavioriste, il est intéressant de le savoir. Pour savoir qu'en utilisant ces exercices, on se situe dans telle démarche de pensée. On amènerait en faisant cela une plus grande professionnalisation de notre métier. Nous sommes encore beaucoup trop "amateurs" et nous le resterons aussi longtemps que nous réinventerons la roue chacun dans notre coin.

Les trois mousquetaires étaient quatre, on s'en souvient. Mon quatrième mousquetaire, le plus important, c'est la formation. Les enseignants doivent impérativement entrer dans des processus de formation et ils y viendront bien plus facilement s'ils reçoivent quelque chose. Les associations que vous représentez ici ont un rôle capital et nos structures de gestion de la formation doivent essentiellement être des coordinations des actions de très nombreuses fourmis.

Intervention de Monsieur FLORKIN : Dans l'enseignement confessionnel, nous nous inscrivons tout à fait – et c'est cohérent avec notre projet éducatif chrétien identifié – dans le projet politique d'une école démocratique qui promet chacun au maximum de ses potentialités, dans le projet d'une école qui a du sens et qui fait réussir les élèves. Ce que Monsieur LEROY a explicité au niveau du projet politique d'une école qui ne vise pas à produire de la sélection, même si nous savons bien que dans tous les réseaux il y a encore un tas d'îlots de sélection, de relégation, d'exclusion... – nous travaillons de manière extrêmement convergente à essayer d'éliminer ces îlots – est bien un projet politique commun, le projet politique de la Communauté française en Belgique francophone. Je vais essayer de vous parler de quatre choses. Je vous parlerai d'abord des réseaux, ensuite je ferai un certain nombre de réflexions sur ce que deviennent les disciplines et les savoirs et comment peut-on se situer à travers certaines contradictions que l'on peut rencontrer dans ce débat. Puis, je vous dirai un mot de la formation des enseignants et de leur métier. Enfin, je conclurai en regardant quelle école on essaye de produire par le travail que l'on effectue, à la manière des fourmis sans doute, mais en n'oubliant pas que les fourmis ont certainement, et les biologistes le confirmeront, un plan d'organisation de leur propre société. La fourmi n'est pas toujours aussi innocente qu'elle le croit ! Nous voulons bien être des fourmis, mais pas tout à fait innocentes !

1. *La multiplicité des réseaux* n'est absolument pas de nécessité dans une société démocratique, et ce n'est en tout cas pas un dogme. Mais c'est le fruit d'une histoire, qui aurait pu être écrite autrement. C'est aussi l'expression de la liberté d'enseigner, et de la liberté de choisir un enseignement cohérent avec ses visées éducatives. C'est enfin, en ce qui concerne l'école catholique, une des manières – pas la seule – que les chrétiens ont trouvé de se mettre à leur façon au service des hommes de ce temps, et d'apporter ainsi une collaboration efficace au service public d'éducation. Nous avons véritablement la conscience – et comment en serait-il autrement quand on scolarise la moitié des enfants – d'apporter une part non négligeable au service public d'éducation et à la politique d'éducation en Communauté française.

Nous sommes attachés à la pluralité des initiatives en matière d'enseignement parce que cela nous paraît sain, comme la pluralité des partis, comme la pluralité des associations. Dans un régime démocratique, c'est évidemment important : les idées circulent, les créativités et les différences peuvent s'exprimer et de surcroît, jusqu'à preuve du contraire, cela coûte moins cher à la Communauté.

La collaboration, que nous voulons d'une loyauté et d'une transparence totales avec les autres réseaux et les pouvoirs publics pour la mise en oeuvre d'une politique d'éducation concertée, est pour nous, la meilleure garantie contre l'émergence -que l'on peut craindre – d'un réseau privé payant qui lui ne serait pas démocratique. Si on ne tient pas ensemble à un certain nombre de concertations, si on ne fait pas ensemble, avec toutes les forces vives qui sont dans la Communauté, une politique démocratique, une école démocratique qui favorise le développement des personnes, la formation des citoyens, et qui noue et entretient le lien social contre tous les égoïsmes de classes ou individuels, alors nous accroîtrons cette dualisation sociale dont nous constatons tous les jours les débordements.

La question de l'unification des réseaux n'est pas à l'ordre du jour. La pluralité a été inscrite dans la Constitution. Si un jour une majorité des deux tiers des citoyens estimait qu'il faut revoir le pacte constitutionnel, alors il faudrait le faire. Mais alors, s'il fallait explorer un modèle intégrateur, je voudrais qu'on explore le modèle québécois. Au fond, l'articulation entre le rôle des pouvoirs publics en matière d'enseignement pour la définition de la grande politique, des grands axes, et le rôle des citoyens de la base, des organisateurs d'enseignement qui s'inscrivent dans un projet éventuellement identifié, doit être reprécisée et je pense que c'est cela la voie des années 2050. Mais il ne serait pas tolérable pour nous qu'un enseignement unique, et ce n'est pas de l'agressivité, soit l'enseignement organisé par la Communauté française pour tous. Cela ne marche pas et ce n'est pas démocratique.

2. *Que deviennent les disciplines*? La coordination de vos associations montre bien qu'il y a une interpellation mutuelle entre les disciplines. On éprouve le besoin de déplacer les frontières. La volonté de décloisonner dans une série de démarches qui se font dans et entre les disciplines montre qu'il y a renvoi à une interrogation sur le savoir. Cette interrogation revient à l'ordre du jour aujourd'hui de façon plus importante que ces trente ou quarante dernières années. Un livre de Catherine CLEMENT sur Philippe SOLLERS indique que ce dernier demi-siècle a vu se déplacer les mondes intellectuels de l'existentialisme – avec les engagements des philosophes dans des causes que leur existence prenant sens commandait, avec toutes les dérives partisanes que cela pouvait entraîner – vers le courant structuraliste dans les années 60, qui a encore beaucoup d'importance dans nos disciplines et qui témoignait, après ce déplacement de la philosophie vers la politique, d'une volonté de remettre de l'ordre et d'identifier un certain nombre de paradigmes qui architectureraient le savoir des différentes disciplines, avec comme dérive non plus la politique mais le formalisme dans lequel on finit par perdre le sens. Dans les années 70, les nouveaux philosophes se sont attachés à balayer le stalinisme en politique, dans l'intelligence et à éliminer tout ce qui peut empêcher une incarnation éthique dans une réflexion qui correspond aux grandes questions de l'Homme dans le monde. Et puis le vide

dans les années 80. C'est le moment où les intellectuels que nous sommes doivent réinterroger le savoir, son statut, les conditions dans lesquelles il se produit et sortir des modèles hérités des étroitesses disciplinaires construites essentiellement avant-guerre. Le mouvement maintenant est de retrouver une articulation qui respecte les spécificités.

2.1. Cette interrogation de base, les enseignants et les facultés qui préparent les enseignants, doivent la porter pour arriver à répondre à cette question pleinement d'actualité : *que faut-il encore enseigne*r ? On sent bien que ce n'est pas un savoir académique, même décanté, qu'il faut enseigner. On sait bien qu'on ne peut que contribuer à une formation générale et pas former des spécialistes avant l'heure. On sait bien que le savoir académique doit être didactiquement transposé. Mais toute cette conscience ne répond pas vraiment à la question de fond, à laquelle personne n'a répondu jusqu'ici : est-ce que les disciplines classiques que nous connaissons, enfermées dans un régime de titres et de fonctions, dans des agrégations, doivent être encore enseignées comme telles à perpétuité ? C'est une question qui, à l'aube du troisième millénaire, doit être posée. On sent bien qu'il y a quelques grands axes incontournables. Quelques exemples : la maîtrise du français pour nous est un outil d'autonomie sociale, humaine, par rapport à la potentielle dictature de ceux qui savent. Le deuxième axe est certainement la capacité à décoder le monde techno-scientifique. Et décoder, ça ne veut pas forcément dire enseigner toujours la physique, la chimie, la biologie, et les mathématiques. Un troisième élément, incontournable à mes yeux dans une société démocratique, est l'entretien d'une mémoire critique à travers notamment l'enseignement de l'histoire. L'histoire n'est pas seulement un outil de formation intellectuelle ; enseigner l'histoire c'est aussi éviter que l'histoire ne se reproduise, c'est entretenir la mémoire. Au niveau du secondaire, ceci est tout à fait fondamental. Et puis sans doute faut-il, quatrième élément, une certaine capacité à découvrir le monde tel qu'il s'organise socialement, économiquement, dans les rapports entre les hommes, dans les cultures, dans l'inter-cultures, pour sortir du ghetto de son petit monde égoïste et pouvoir être en phase avec la mondialisation de tous les événements. En dernier lieu, il faut acquérir les éléments de connaissance de soi, de connaissance de l'Homme – dans laquelle j'inclus la biologie, l'éthique, la philosophie –, tout ce qui permet à l'Homme de découvrir son identité, de choisir des valeurs et d'exister pour accéder à une véritable altérité. Avec tout cela, on peut recréer le paysage, les grilles-horaires, le régime des titres, le régime des fonctions, mais ceci n'est que l'épiphénomène. C'est une page qui mettra peut-être dix ou quinze ans à être écrite mais qu'on ne pourra pas ne pas écrire. Il faut vraiment qu'il y ait chez les chercheurs que vous êtes, que nous sommes, une réflexion plus profonde pour qu'un contrat social s'établisse sur ce qui est à enseigner.

2.2. Cela se fera dans *des tensions* qu'il faudra bien gérer, c'est-à-dire d'abord accepter et intégrer. Je voudrais en identifier quatre en me situant dans la mouvance de Michel DEVELAY et de Philippe MEIRIEU.

2.2.1. La première est celle qui existe entre une *vision fonctionnelle de l'enseignement* et une vision culturelle. Le bon modèle ici serait l'école primaire française du XIXe siècle où à la fois, on apprenait par coeur, on lisait Victor Hugo, La Fontaine, Molière,... mais aussi on apprenait des savoirs relatifs à la vie quotidienne : peser des choux, mesurer un champ, lire l'affichage municipal,... A travers cela se forgeait une culture commune, celle de l'école républicaine, qui donnait des éléments de lien social, des références communes et d'autre part des savoir-faire dont on avait besoin dans la vie quotidienne. Depuis les années 70, on a peut-être eu tendance à déséquilibrer l'école de façon excessive dans le sens de la fonctionnalité. Il faudrait alors revenir à un meilleur équilibre car il est clair que l'école ne peut pas abandonner le pôle culturel. L'école a une fonction irremplaçable de transmission de l'héritage. Je suis pour des gens qui ne sont pas des déracinés, qui plongent dans leur passé pour trouver des axes de référence. Si on ne parle pas de Descartes ou de Newton à l'école, où va-t'on en parler ? C'est une part de la culture de pouvoir se comprendre à demi-mots et qu'une simple allusion soit évocatrice... ; cela, nous ne pouvons pas le perdre.

2.2.2. Deuxième tension : entre *concepts-clefs et connaissances.* Partons du concret d'un cours d'histoire. On se rend bien compte qu'il n'est pas indispensable, en termes de connaissances, que l'élève apprenne toutes les formes de monarchie absolue et qu'il voie dans tous les pays comment elles sont venues. Ce qui importe, c'est que l'élève maîtrise le concept de monarchie absolue pour être capable de dire si la monarchie de Pierre le Grand, celle de Louis XIV, de Marie-Thérèse d'Autriche et de Léopold II de Belgique sont ou pas des monarchies absolues. Même chose à propos du concept de colonialisation pour l'acquisition duquel il n'est pas nécessaire d'avoir étudié tous les phénomènes de colonialisation depuis les grecs sur la Sicile, les égyptiens sur le Soudan jusqu'aux espagnols sur l'Amérique latine. Mais à force de ne voir que les concepts-clefs, on risque – surtout pour des jeunes en formation – de ne plus voir le sens et d'être noyé dans une abstraction siccative. Il est évidemment utile de connaître des faits, des événements, il est utile que l'on rencontre des exemples – non pas que la connaissance de ces faits soit indispensable en soi – pour mettre tout cela en perspective, pour donner un substrat à la réflexion, faire émerger un sens et accéder enfin au concept dont la maîtrise en définitive est la seule chose qui nous importe. Il y a un va-et-vient nécessaire entre connaissances et concepts-clefs et cela renvoie fatalement à la question de choisir ce qui, dans ce contexte, est important d'enseigner. Il faut repérer les événements factuels qui vont donner une épaisseur à la réalité et produire le sens. Pour faire ces choix de ce qu'il faut enseigner – et c'est une question à laquelle aucun enseignant ne peut échapper – il faut se demander ce qui structure une discipline ? Qu'est-ce qui l'organise ? Quels sont les noyaux conceptuels, les concepts-clefs par lesquels il faut absolument passer. Mais aussi, et il ne faut pas les négliger, quelles sont les connaissances en termes de savoirs, en termes de savoir-faire qu'il faut aborder. Parce qu'il convient tout de même que les gens de notre société n'aient pas tous entendu parler de choses différentes. C'est cela aussi qui tisse le lien social, ce sont ces choix qui ont un rôle unificateur dans le système d'enseignement et dans la société et qui permettent de déboucher sur une culture commune. Nous sommes donc appelés à une nouvelle définition des disciplines et de leurs contenus et à opérer comme une rupture entre la discipline didactisée au secondaire et la discipline du savoir universitaire tel qu'il se construit à l'université. Il y a bien sûr un rapport entre les deux, mais il y a surtout à recomposer le paysage, dans un objectif de formation démocratique.

2.2.3. Une troisième tension, que l'on sent bien à travers ce que l'on fait notamment au premier degré, existe entre *contenus disciplinaires* et *compétences transversales*. Au fond, les compétences transversales sont des compétences sociales qui permettent de se débrouiller dans la vie, d'être soi et d'apprendre à apprendre. A travers nos enseignements, nous devons nous interroger davantage sur ce qui aide l'intelligence à se structurer. Dans l'enseignement général, mais aussi dans l'enseignement technique et professionnel où l'on a à affronter une encéphalisation des qualifications et des compétences qui sont nécessaires pour occuper un emploi demain. Nous devons aussi nous intéresser davantage à ce qui forge les capacités d'apprendre par soi-même (analyse, compréhension, synthèse,...), à tout ce qui ouvre à des capacités de mise en oeuvre de savoirs nouveaux, parce qu'on sait bien que l'école, à cause de l'explosion des savoirs, devra toujours accepter cette pauvreté de n'être pas capable de mettre en contact avec un savoir à la Pic de la Mirandole dont plus personne aujourd'hui ne peut avoir la maîtrise. Ces capacités d'apprendre, ces façons de structurer l'intelligence, on a cru dans le passé que cela venait tout seul. On doit postuler aujourd'hui que cela ne vient pas tout seul et qu'on doit intégrer cela à un travail à partir des disciplines. Et, bien entendu, il n'y a pas de cours de compétences transversales. C'est en travaillant à partir des connaissances disciplinaires que l'on pourra acquérir la maîtrise de ces compétences transversales. L'accent mis sur les compétences transversales dans les socles de compétences et ce qui est apparu comme nouveau aux yeux de nos collègues du premier degré, fait que là aussi, pour découvrir ce domaine peu exploré, on a peut-être oublié qu'on ne faisait pas des exercices sans avoir du matériau. Pas d'enseignement déconnecté de contenus disciplinaires mais pas d'enseignement enfermé dans les contenus disciplinaires : il y a là une tension qu'il faut aussi gérer, c'est une des conditions d'autonomie.

2.2.4. La dernière tension, qui nous éloigne un peu des disciplines mais qui montre la relativité de ce que l'on entreprend dans le domaine de la formation, est une tension entre *instruction et socialisation.* Vouloir instruire sans socialiser, s'enfermer dans sa qualité d'intellectuel, est intenable aujourd'hui. C'est une illusion et cela génère l'exclusion. Les professeurs sentent bien qu'il n'est pas possible de faire du travail intelligent quand les élèves n'ont pas intériorisé les règles de la vie ensemble, et par exemple l'interdit de la violence, le fait que lorsqu'on a un conflit, on le négocie par la médiation d'une institution... Une attitude de pur esprit drapé dans son savoir et qui laisse les problèmes aux surveillants-éducateurs n'est plus tenable dans une classe aujourd'hui. Les élèves ne peuvent pas apprendre tout court ni apprendre la démocratie si nous n'incluons pas dans le travail d'instruction un travail de socialisation. Il faut que les jeunes apprennent d'abord à respecter la parole de l'autre – et c'est important dans un cours actif – apprennent à respecter l'intégrité physique et psychologique de chacun pour être capables d'entendre les différences, permettre à chacun d'exprimer sa différence et finalement bâtir avec les autres une cité fraternelle. Cela ne veut pas dire qu'on transforme les professeurs en assistants sociaux : et c'est à gérer, et c'est plus ou moins confortable, et on n'y est pas préparé et on doit s'y préparer !

3. La *formation des enseignants* est présente dans vos questions : on demande pourquoi on n'a pas d'abord modifié la formation initiale des maîtres avant d'introduire les réformes ? C'est simple : on ne peut attendre trente ans que le corps professoral soit prêt, formé dans une école supérieure pédagogique revisitée. Même s'il faut s'occuper de la formation initiale, il faut d'abord s'intéresser à la formation continuée. Insistons d'abord sur le fait qu'il y a une unité de la fonction enseignante : de la maternelle au secondaire supérieur on ne fait pas un métier différent. Il n'y a pas de raison majeure -sauf des raisons de durée d'études, et encore- de payer les gens différemment. On n'a pas les moyens de le faire mais c'est le même métier, avec des accents différents. Je suis très tenté dans ce contexte par le plan DE

LANDSHEERE qui n'a qu'un défaut : il n'est pas réaliste budgétairement. Il faudra le remettre un jour sur le métier, j'en suis convaincu, parce qu'on doit former tous les enseignants, que ce soit à travers la formation initiale ou la formation continue, à un nouveau métier qui est décentré de leur discipline même s'il reste ancré dans leur discipline, qui est centré sur l'élève, qui est un métier de formateur, d'éducateur, à inscrire dans la mission sociale de l'école. Les enseignants doivent apprendre à être des acteurs sociaux ; ils sont des acteurs importants de la société, à la fois comme transmetteurs d'héritage et comme inducteurs de capacités de modification de la société pour qu'elle soit plus juste. Le maître de demain est davantage un organisateur de situations où l'élève apprend que quelqu'un transmet son savoir. C'est un rôle différent, qu'il faut apprendre et, manifestement, comme dans bien d'autres métiers -mais on ne l'a pas encore découvert dans le monde enseignant et on n'en n'a pas les conditions- le métier est plus collectif qu'avant. Ce n'est plus un métier que l'on fait seul, dans le secret de son bureau, c'est un métier que l'on effectue collectivement. Tout cela invite d'ailleurs à une redéfinition de la charge des enseignants : il faut trouver un nouvel équilibre entre ce qui reste indispensable comme travail personnel et la part de travail qu'il est nécessaire de "socialiser" (et qui n'est pas seulement le travail face à l'élève).

4. *En conclusion*, ce que l'on cherche à construire, ce n'est pas une école qui trie, une école qui continue à générer une cascade de relégations, qui exclut, mais une école démocratique où chacun a sa place et peut s'exprimer. On doit travailler comme des fourmis, avec un plan, à éradiquer tous les germes d'exclusion que le système d'enseignement porte en soi. Je ne crois pas que nous arriverons complètement à bouleverser notre système des filières hiérarchisées (c'est trop lourd et l'école ne peut pas prétendre s'écarter résolument des modèles organisateurs de la société : l'école est toujours le reflet de la société) mais dans toute l'organisation de l'école, il faut viser à ce qu'on n'oriente plus les élèves vers le technique et le professionnel quand cela ne marche pas dans le général. L'orientation doit devenir positive et non résulter d'une cascade d'échecs et empêcher que personne ne soit enfermé dans une voie qu'il n'a pas choisie.

L'école que l'on veut construire doit être une école qui a du sens, où l'activité scolaire insère le jeune dans un projet pour aujourd'hui et pas seulement un projet à long terme. Il faut que ce que l'on fait aujourd'hui prenne sens, qu'on sache pourquoi on est engagé dans telle démarche. Cela renvoie à la question épistémologique, à l'histoire des sciences pour les scientifiques, aux grandes questions que l'Homme essaye de résoudre à travers la conquête du savoir notamment. Il faut aussi restaurer une dimension culturelle et un plaisir d'apprendre, de découvrir et de chercher, plaisir un peu perdu surtout dans les grandes classes.

L'école que l'on veut construire doit enfin être une école de la réussite. Quand on voit le coût psychologique, pédagogique, social de l'échec, quand on voit la vanité de l'utilisation du redoublement comme moyen de gérer les difficultés de l'apprentissage, on a vraiment intérêt à développer des pédagogies de réussite qui aident les jeunes à être mieux dans leur peau, à être plus solides et mieux formés. En faisant tout cela, on travaille au bonheur des gens qui vivent à l'école, au bonheur des élèves et au bonheur des professeurs. Quand les gens qui vivent dans un lieu sont plus heureux parce qu'ils ont plus de plaisir à faire ce qu'ils font, la société s'en ressent positivement et on n'aura pas perdu notre temps.

Question 1 : *L'enseignement rénové n'a-t-il pas accentué la relégation en envoyant dans le professionnel les élèves du général qui n'avaient pas réussi ? La réforme du premier degré du secondaire ne va-t-elle pas aussi accentuer cette relégation, puisque peu d'enfants iront directement du primaire au professionnel ? Si les lois poussent les gens à inscrire leurs enfants dans le général – quitte à les envoyer dans le professionnel plus tard si cela ne va pas – on ne résout rien, alors que certains élèves apprendraient mieux à partir du concret, en formation professionnelle.*

J. LEROY : Ce qu'on a fait au premier degré, n'est qu'un pas pour améliorer l'accès à l'enseignement technique et professionnel. S'il y a des effets pervers, il faudra évidemment apporter des corrections. Dans les faits, le rénové (puisqu'on a vu des instituts techniques créer des sections générales et des instituts d'enseignement général créer un peu de technique à travers les lycées), a estompé les distinctions général-technique, au moins dans la lisibilité par le public. Depuis une dizaine d'années surtout, les parents angoissés choisissent "la bonne école" entre guillemets et j'insiste sur les guillemets, c'est-à-dire l'école d'enseignement général (si possible, l'ancien athénée qui a bien le titre d'athénée). On a donc vu se vider les premiers degrés des écoles techniques. Cela se serait peut-être produit malgré tout sans la réforme du rénové, on ne peut répondre à cette question. Quand on travaille en professionnel, les difficultés surviennent surtout en 3P. Non pas avec les élèves de 15-16 ans qui progressent même s'ils sont difficiles. Les vrais problèmes surviennent avec les élèves de 18-19 ans, qui déstructurent les autres et que l'on peut comprendre de ne plus faire l'effort d'apprendre, de ne plus prendre le risque d'apprendre. L'accumulation des échecs fait qu'ils peuvent de moins en moins apprendre et que la relégation est de plus en plus forte. En même temps, la structure du professionnel pâtit de cela.

De plus, les professeurs enseignent en fonction du professeur qui va suivre : il n'est donc pas question d'envoyer à son collègue de la classe suivante des élèves “mal préparés” qui laisseraient penser qu'on a mal travaillé. Le professeur enseigne donc en pensant au profil que doit avoir l'élève pour réussir le général et il oublie que le premier degré est un degré commun. Si les professeurs des écoles “où tout le monde met ses enfants” ne peuvent pas aider un petit nombre d'élèves, ceux qui ne sont pas spécialement accrochés par l'abstrait par exemple, au moins qu'ils ne les détruisent pas ! Au moins, que ces professeurs ne rendent pas le travail des collègues de 3P plus difficile encore. En empêchant de ”buser” au premier degré, on empêche au moins cela. Comme on ne peut pas faire le degré en plus de trois ans, on ne peut pas traîner là trop longtemps. Les élèves qui arriveront alors en 3P seront plus jeunes et on met alors les collègues de 3P dans une meilleure situation pour qu'ils puissent gérer les situations.

Un autre élément introduit est l'éducation par la technologie. C'est l'idée de pouvoir observer les gens, non pas à travers du bricolage mais à travers des activités de type technique où l'on enseigne aussi des compétences transversales. Dans le non-confessionnel, on fait une formation de huit jours pour les professeurs qui donneront ce cours d'éducation par la technologie et nous avons à ce jour 19 groupes de 12 personnes en cours de formation qui échangent des outils en donnant du sens à ce qu'ils font.

Il faut également, pour que la qualification des élèves soit valable, que le matériel soit compétent. En Hainaut, on développe des programmes de formation : des professeurs sont en stage en entreprise. Ne nous abusons pas non plus sur le discours des entreprises : quand elles ont besoin de personnel, elles viendraient retirer des élèves des 5e et quand elles n'ont plus besoin de personnel, c'est l'école qui est responsable du chômage. Il reste très préoccupant de conseiller quelles sections il faut créer dans le professionnel : pour les garçons, en dehors de la construction, il reste peu de secteurs massivement porteurs d'emplois. Il est faux de dire que l'industrie va absorber beaucoup de main-d'oeuvre. On découvre alors que l'enseignement professionnel joue un rôle de formation, comme l'enseignement général. Un exemple bien connu est celui de l'habillement où des jeunes filles issues de l'immigration (Liège et Schaerbeek) suivent ces cours – qui ne vont sans doute pas leur donner d'emploi assuré dans les industries textiles – et sont formées à travers eux comme d'autres élèves sont formés à travers le latin...

E. FLORKIN : Cette question que vous nous posez est une question qui nous hante. Au premier degré professionnel, on trouve trois sortes d'élèves : ceux qui ne savent pas lire ni écrire parce que leur problème n'a pas été traité à temps dans le fondamental, ceux qui sont dans une spirale d'échecs depuis le début du fondamental notamment parce que leur culture, leurs références, ne sont pas celles de l'école et enfin ceux qui ont envie de s'inscrire dans un projet plus concret. Il est très difficile de marier ces trois publics et on sent bien qu'il y a un devoir vis-à-vis des jeunes de leur assurer le SMiG, le savoir minimum garanti, c'est-à-dire les compétences que tout jeune de 14 ans (et c'est l'idée des socles de compétence) doit maîtriser non seulement pour continuer des études, mais aussi tout simplement pour pouvoir se débrouiller dans la vie, pour ne pas être un analphabète fonctionnel. Ces compétences, il faut reconnaître qu'aujourd'hui elles sont devenues si complexes, que l'enseignement primaire ne suffit plus à les donner à tout le monde et que donc le premier degré acquiert une nouvelle fonction. L'orientation vers une filière technique professionnelle ou d'enseignement de transition est reportée à 14 ans. Il faut à tout prix faire son deuil d'une école technique et professionnelle qui commence à 12 ans. Mais il est clair que dans le souci de diversifier les formes d'excellence, on doit absolument prendre appui sur les centres d'intérêt des jeunes et les compétences où ils se réalisent davantage. Pour certains, c'est à partir du "faire" qu'ils vont structurer leur intelligence. Il y a là quelque chose de très fécond et on doit faire une place beaucoup plus grande qu'on ne l'a fait – timidement mais avec réalisme – à l'éducation par la technologie. Comme pôle de formation, comme point d'appui de centre d'intérêt, nous postulons que cela doit être fait dès la fin de l'école primaire. Pour aller davantage dans le sens d'un premier degré commun, nous rêvons – même si structurellement c'est inimaginable pour certains – d'un "612" c'est-à-dire d'un petit "collège" comme on dirait en France, qui rassemble les élèves de 6e primaire, de 1e et 2e secondaires et précède un "lycée" (on pourrait prendre un terme à chacun des réseaux !). Ce petit collège assurerait encore cette formation de base à tous et ce lycée où l'on s'inscrirait – anticipativement et parfois par une projection purement imaginaire – dans un choix de vie et de profession. Mais pas avant 14 ans : on ne peut plus se permettre de le faire plus tôt aujourd'hui. L'objectif est donc de donner à tous, non seulement des clefs pour découvrir l'univers technologique (cela fait partie de la culture de tous les hommes de ce temps, y compris des universitaires de demain) mais en plus de permettre à ceux qui sont motivés par cette dimension, à ceux qui trouvent un intérêt dans un contact avec la matière, avec l'univers technique, d'exprimer leurs potentialités et de choisir une orientation en connaissance de cause et de façon assistée. Casser la hiérarchie des filières, qui fut l'inspiration (qui n'a pas assez réussi) du rénové, pourra enfin se faire si on a le courage d'aller jusqu'au bout des logiques. L'orientation large devrait pouvoir se faire dans un “collège” relié au “lycée”, mais doté d'une certaine autonomie. L'idée du DOA n'était pas mauvaise mais il faut y ajouter la sixième primaire car après la cinquième primaire, pratiquement tous les apprentissages premiers sont faits. En sixième, on répète et on prépare l'examen cantonal ou interdiocésain et les jeunes, à cet âge, ont envie de faire des choses nouvelles, du latin, de la technique, de l'anglais,..., de s'inscrire dans un univers social plus large. Je rêve qu'on puisse un jour inventer un petit collège suivi par un lycée bien articulé. Il faut donner au petit collège une certaine autonomie pour éviter le mouvement universel vers l'enseignement général parce que seule cette formation a l'air sérieuse. Le mythe de l'université comme destination finale par excellence doit aussi être cassé. L'université convient à une certaine approche intellectuelle qui n'est pas celle de tous. C'est cela diversifier les formes d'excellence, c'est cela essayer de travailler – et ce n'est pas simple – à reconnaître une égale dignité des formes d'excellence.

Question 2 : *Je voudrais revenir un peu sur ce qui a été dit. Parler de l'enseignement professionnel, c'est aussi parler des objectifs généraux de l'enseignement et notamment de l'échec. Il est vrai qu'il est difficile d'aller à l'encontre des idées courantes car il y a des préjugés, des mythes, et des contraintes qui pèsent sur l'enseignement. Je voudrais indiquer des pistes résultant de réflexions avec des collègues. D'une part, si l'on ne veut pas remettre aux calendes grecques la revalorisation de ces filières techniques et professionnelles, il faudrait faire une distinction – et c'est peut être un paradoxe – entre l'enseignement technique et l'enseignement professionnel. Une distinction pour qu'à long terme nous ayons plus d'unification, pour répondre à des contraintes actuelles. Car actuellement, avec l'effet du rénové, on a associé technique et professionnel à des filières qualifiantes pour des métiers bien définis, pour des gens qui ne savent pas faire du général. Cette distinction est une nécessité si l'on veut que dans l'enseignement on arrive à un choix positif d'études. Il faut que l'image de l'école où l'élève va aller soit valorisante : ceci sera plus facile si on mène des expériences de revalorisation de certaines écoles techniques dans des domaines bien définis, où les élèves n'auront pas uniquement accès à une qualification, mais à une formation. En 6e technique, on peut très bien être qualifié et ne pas avoir son CESS : c'est une aberration. Il faut que l'école technique prépare à une qualification mais donne aussi l'accès à des études supérieures. A partir du premier degré, il faut donner la possibilité de choisir des filières plus techniques. Pour ceux qui ne sont pas prêts à rentrer dans une structure sco-*

laire, il faut rentrer, en gardant l'esprit de transversalité, dans une pédagogie qui leur est spécifique qui est différente de celle des humanités techniques comme on les appelaient avant. Dans le professionnel, il faut avoir un projet différent de celui de l'enseignement technique qui doit être un choix positif pour des gens qui sont prêts à rentrer dans une structure scolaire normale.

J. LEROY : Le débat deviendrait très lourd si nous prétendions répondre à chaque fois et ce que vous avez dit n'appelle pas de réaction de notre part.

Question 3 : *Nous aimerions comme vous ne pas devoir attendre trente ans. Quelle méthode, quelle stratégie proposez-vous, pour arriver à faire changer les choses avant trente an ?*

J. LEROY : Vos associations peuvent jouer sur cette tension entre la discipline et les compétences transversales, sur la formation. Je pense qu'on fera changer les choses sur le terrain si l'on aide les enseignants en leur donnant des outils concrets, que chacun adapte car il faut évidemment éviter que les enseignants ne fassent plus rien ou fassent des choses qui n'ont aucun sens. Il faut ensuite découvrir une méthodologie mais aussi découvrir une analyse épistémologique pour pouvoir se situer. Les enseignants doivent entrer dans ces processus de formation à travers le travail en équipe. Vos associations oeuvrent déjà en ce sens et pour la formation en cours de carrière, nous pouvons vous aider au niveau financier. Ce sont ces actions qui en entraîneront d'autres. On ne l'a pas encore fait – bien qu'on ait réalisé pas mal de choses en peu de temps –, mais notre réforme du premier degré implique en outre une rediscussion, une réorganisation de la notion d'orientation et de la guidance. La plupart du temps, les PMS ne jouent pas leur rôle en cette matière. Ils sont à la fois trop proches des écoles, parce qu'il y en a beaucoup trop et qu'ils seraient plus efficaces regroupés par zone, et trop lointains parce qu'ils ne travaillent pas en symbiose avec les conseils de classe. Ce besoin d'orientation et de guidance arrive à travers cette réforme du premier degré et si on propose des solutions concertées entre réseaux aux responsables politiques, ces solutions peuvent être adoptées.

E. FLORKIN : Tout changement de l'importance de celui qui est amorcé trouve sa clef dans les professeurs qui vont *se* changer. Se changer parce qu'ils auront la conscience qu'ils seront alors plus heureux dans leur métier. On voit actuellement un certain nombre de professeurs qui sont heureux de se remettre à créer, à inventer. Cela ne se fait pas sans difficultés, il reste pas mal de morosité, mais il est rassurant de constater, après les grèves de 90, que le feu n'est pas mort. C'est collectivement que les professeurs vont se changer. C'est vrai que les moyens consacrés à la formation continuée sont dérisoires (5 000 francs par professeur de la Communauté) et devraient représenter 1% de la masse salariale. Il s'agit d'un objectif politique qu'on pourra poursuivre au prix de réallocations à l'intérieur de nos propres ressources. Ce n'est pas simple par exemple de toucher aux grilles-horaires : les égoïsmes corporatistes rendent les choses difficiles. Pourtant si nous voulons amorcer une politique de changement, il faut pouvoir accepter que certaines choses soient modifiées, et qu'à l'intérieur d'une masse dont on peut espérer qu'elle restera constante, on puisse faire des déplacements d'allocations de moyens. Il est à craindre que nous n'aurons pas de refinancement externe. Si nous voulons de la formation continuée, il faudra peut être accepter qu'il y ait encore moins de classes à trois élèves. Heureusement, on a des mécanismes de protection sociale importants et intéressants que l'on doit encore approfondir et assouplir. On doit accepter que cela puisse bouger dans les structurations de l'emploi tel qu'il se présente aujourd'hui. Cela ne veut pas dire diminuer l'emploi, mais créer peut-être de nouvelles fonctions de formateur de formateurs, par des pairs et non par des experts. Il y a un besoin de coordinateurs dans les écoles et d'autres choses, mais tout cela, on ne nous le donnera pas en plus. On les trouvera en changeant la façon dont on organise l'enseignement et la façon dont on accepte de travailler dans les écoles. Nous ne sommes pas au bout de nos peines.

J. LEROY : ... et d'exiger le même effort de lucidité à tous les niveaux et partout. On peut discuter stratégie mais je pense que nous avons eu raison de penser nous-même des mesures qui montraient que nous étions conscients, et de ne pas laisser prendre des mesures aveugles qui elles, pourraient détruire l'outil. Dire "on trouvera l'argent, on se débrouillera" est faux. A titre personnel, je suis sidéré qu'il n'y ait aucune mesure de restriction de l'encadrement dans l'enseignement supérieur à la prochaine rentrée : l'augmentation de ce budget coûtera plus d'un milliard, ce n'est pas normal.

Un exemple d'une petite chose qui peut avoir des effets importants a été réalisée en discrimination positive. Pour une série d'écoles où vraiment la situation est très dure, on a reçu 55 millions – c'est dérisoire – qui ont été distribués dans des projets. Cette somme n'a pas été saupoudrée en faisant d'abord la répartition par réseau mais en se préoccupant de la réalité des besoins des écoles tout en veillant à ce que la distribution ne soit pas trop déséquilibrée. Les écoles se sont senties reconnues dans leurs difficultés propres. Ce qu'elles ont réalisé assez souvent, ce sont des lieux pour les élèves (médiathèque, bibliothèque,...). Peut-être que ces lieux seront abîmés dans quelques années par d'autres élèves mais ces petites choses, pour autant qu'elles soient envisagées dans un projet global, peuvent changer les situations.

Question 4 : *Un problème que l'on n'a pas abordé est celui du statut des enseignants. Il y a peut-être quelque chose à faire à ce niveau : je vois souvent des professeurs que j'appellerai des "fonctionnaires" nommés à vie et qui ne bougent pas. Ceux-là handicapent le travail potentiel d'équipe et ont des compétences qui diminuent. Il me semble que les compétences devraient davantage être prises en considération que l'ancienneté.*

J. LEROY : Il y a eu un débat au Conseil de la Communauté, lors de la discussion de l'article 7 concernant la certification de la formation en cours de carrière, où cette question a été posée. C'est le problème de la motivation, de la carrière plane,... mais on n'a pas bougé sur ce sujet.

E. FLORKIN : Il faut encadrer les professeurs et les former. Paradoxalement, c'est lorsqu'ils sortent des universités ou des écoles normales qu'il y a un travail important d'accompagnement à faire. Toute cette question renvoie à la question du pilotage de l'enseignement et de l'évaluation de son efficacité. Ceci ne fait absolument pas partie de la culture de l'enseignement en Belgique. Chacun vit son métier comme une profession libérale et on n'a pas envie que le système soit interrogé dans son efficacité. C'est pourtant une question qui devra aussi être traitée. Elle ne renvoie pas nécessairement à l'évaluation individuelle des enseignants mais il faut collectivement qu'une école sache ce qu'elle produit. Ceci n'est pas réductionniste mais nous devons arriver à une évaluation du résultat de l'enseignement qui n'est pas seulement le nombre d'élèves qui réussissent, ce qui ne veut rien dire. Une évaluation qui a un côté externe, non pas contraignant – il n'est pas question d'en faire un baccalauréat –, mais qui puisse situer par rapport à des populations de référence, par rapport à des objectifs annoncés. Nous sommes un des pays au monde qui évalue le plus, donc qui fait échouer le plus. On évalue beaucoup trop, mal, toujours les élèves et jamais l'enseignement. Je ne parle pas de la personne des enseignants mais de l'enseignement et des enseignants comme producteurs d'un savoir avec les élèves. C'est un des points soulevé par l'OCDE dans son dernier rapport sur l'examen du système d'enseignement en Belgique. Cela vient probablement des guerres scolaires et de la protection à tout prix de la liberté pédagogique qu'il convient de mieux comprendre. Le rôle du politique n'est pas de fermer le dernier bouton de guêtre mais de donner des grands axes et de fixer des grands objectifs : c'est sa responsabilité et chaque citoyen doit le reconnaître. Mais cette responsabilité n'implique pas qu'on énerve la liberté pédagogique et on peut regarder plus sereinement ce débat maintenant qu'il y a cinq ans encore.

Question 5 : *Je relève quelques contradictions qui me gênent vraiment beaucoup. Je perçois bien qu'il faut opérer certains changements. On a reconnu tout à l'heure le droit d'avoir de "bons athénées" et de "bons collèges" et je ne comprends pas pourquoi on ne peut pas avoir de "bonnes écoles techniques". Deuxième contradiction : puisqu'une école unique ne semble pas démocratique, il n'est peut être pas démocratique non plus de mettre tout le monde dans un degré commun au premier degré. Troisièmement, il me semble que les penseurs de l'enseignement sont déconnectés des réalités : vous parliez de professeurs heureux, c'est un beau rêve, mais si vous veniez dans les écoles vous verriez que les professeurs ne sont pas heureux, notamment à cause d'un harcèlement pédagogique qui commence à peser.*

E. FLORKIN : C'est clair qu'il faut une "bonne école technique" et on y travaille.

Pour le premier degré, c'est un mouvement général dans tout le monde développé de retarder le choix d'une orientation dans une filière transitive ou qualifiante et je ne reviendrai pas sur les arguments de ce long débat.

Je rencontre tous les jours des directeurs d'école, des enseignants, des formateurs, je rencontre des corps professoraux dans des écoles, ce qui permet de revenir à la source tout en devant prendre des distances pour voir les courants transversaux.

Quant au harcèlement pédagogique, cela correspond au sentiment profond d'un certain nombre d'enseignants. Les propositions qui sont faites, et qui apparaissent à certains comme un harcèlement, ne sont en réalité que l'approfondissement de démarches en chemin depuis vingt ou trente ans mais qui sont vues comme nouvelles aujourd'hui. Dans ce harcèlement pédagogique, une question extrêmement importante dont nous n'avons pas parlé est celle du pouvoir. Notamment du pouvoir en termes de décision de délibération en fin de première : voilà quelque chose qui ne passe pas et il y a là un approfondissement à faire avec les enseignants. Quand on pose les choses en terme de pouvoir, on ne peut pas vraiment sortir du débat.

J. LEROY : On doit toujours se méfier de l'ironie car lorsque nous parlions des "bons collèges" ou des "bons athénées", nous parlions de ce qui se passe dans l'esprit des gens. Les gens ne mettent pas leurs enfants dans les premiers degrés des écoles techniques, même s'il y a de très bonnes écoles techniques. En formation en cours de carrière en Hainaut, plus de la moitié des moyens vont aux écoles techniques et je n'accepte pas votre critique sur le fait que nous ne considérons pas l'école technique. J'ai simplement utilisé cette image qui est dans le public.

Vous dites que les professeurs sont malheureux. Ce n'est pas ce que je vois, tous les jours, dans mon école.

Je trouve que l'ensemble des réformes pédagogiques qui sont faites, nos manières de fonctionner c'est-à-dire de relayer les initiatives aussitôt que quelqu'un en avance une, sont profondément démocratiques et cela permet à tous de construire un ensemble, bien sûr toujours susceptible d'être modifié, d'être amélioré.

Questions soumises aux orateurs

Système éducatif en général

1. Quelles sont les possibilités d'envisager enfin un réseau unique d'enseignement, fondé sur les compétences et non sur les appartenances politiques ou philosophiques ?

   Quels sont les moyens à mettre en oeuvre pour assurer à un maximum d'élèves un enseignement de qualité ?

2. Comment va-t-on concilier à l'avenir les exigences de formation du marché de l'emploi avec le climat de la société de loisirs, de consommation, de chômage et de prépension pour beaucoup d'adultes ayant encore des enfants en âge d'école ?

3. Etes-vous d'accord pour dire que le système éducatif actuel forme des individus plutôt que des citoyens, c'est-à-dire des personnes qui ne se sentent redevables d'aucune dette civique ?

   Etes-vous d'accord pour dire que l'entreprise éducative actuelle échoue en partie parce qu'elle se bute aux valeurs de rebellion que prône le mouvement social des jeunes, ce qui entraîne un manque d'adaptation des jeunes au système de travail actuel ?

   Dans ces conditions et devant les dangers qui menacent, que peut faire l'enseignement pour réduire le fossé culturel qui se creuse entre le système éducatif et la vie active ?

Enseignement secondaire

1. Deux des reproches majeurs souvent adressés à l'Ecole, particulièrement au niveau secondaire, est que celle-ci ne permet pas d'apprendre

démocratiquement ce qu'elle se propose d'enseigner et qu'elle n'enseigne pas ce qui vaut vraiment la peine d'être appris. Dans cette dernière perspective, j'aimerais savoir comment les orateurs conçoivent, à partir d'un foyer éthique central, l'articulation et l'intégration des disciplines scolaires (existantes ou à créer) selon deux axes prioritaires :

Celui des **fonctions** complémentaires qui constituent la personne humaine :

- communicative (entrer en dialogue avec les autres par les langages),
- expressive (exprimer ce qu'on ressent),
- réflexive (maîtriser la pensée formelle),
- pragmatique (agir efficacement à partir de choix responsables).

Celui des **visées** qui orientent ces fonctions :

- vers soi-même (la gestion de soi dans toutes ses dimensions : en somme, une "égologie")
- vers les autres (de la "tolérance" démocratique à des conditions d'édification d'une société plus juste, en somme une "éthologie"),
- vers le milieu (en somme, une "écologie").

2. En quoi une approche interdisciplinaire se distingue-t-elle d'une approche pluridisciplinaire ?
   - Les compétences transversales sont-elles bien transposables d'une discipline à l'autre ? (voir "microcompétences" de Meirieux.)
   - Quels sont les avantages de l'interdisciplinarité ? (cohérence ?) Quels en sont les inconvénients ? (amateurisme ? flou ?)
3. Un enseignement qui ne donne pas une maîrise de la langue maternelle (voir les guidances et autres systèmes mis en place même au niveau supérieur) est-il crédible ?
   - Le nivellement par le bas, quoi qu'on en dise, qu'on a fait subir aux enseignements primaire et secondaire, censé ouvrir l'école à un public plus large, n'a-t-il pas l'effet inverse et pervers suivant : l'établissement d'un enseignement privé à côté d'une école publique dévalorisée et insuffisante ?
   - Ne joue-t-on pas le jeu de l'audimat en adaptant la formation (en la déforçant ?) en fonction de la demande ?
4. A quand un véritable "contrôle de qualité" appliqué à l'enseignement secondaire ?
5. Va-t-on généraliser le passage par degré dans l'ensignement primaire et secondaire ?

6. Comment établir des critères “objectifs” de passage par degré ? Quelle forme d’évaluation faut-il privilégier ? Les enseignants sont-ils prêts à modifier leurs critères d’évaluation ?

Formation des maîtres

1. Quand aurons-nous une réforme de la formation des maîtres en Belgique ?
   – Le système français (UFM) est-il envisageable chez nous ?
2. Ne pensez-vous pas qu’il faille développer de manière large et continue une politique scolaire, pédagogique dans le domaine de la formation initiale : il faut développer le discours suivant à savoir que choisir le métier d’enseignant-éducateur ne devrait pas être en aucun cas un choix négatif pris suite à un échec ailleurs.
3. Avant de mettre en place des réformes pédagogiques et de dire ensuite aux enseignants “à vous de vous débrouiller” (comme pour l’enseignement Rénové), ne serait-il pas préférable de commencer par modifier la formation initiale ?
4. A quand une formation non seulement de spécialistes de matières (nécessaire !) mais aussi une formation au métier d’enseignant qu’on vous apprend toujours “sur le tas” ?

Un indicateur dans l'étude de la répartition des revenus : l'indice de GINI

G. Haesbroeck, *Université de Liège*

Dans toute société, il y a toujours eu des riches et des pauvres. Peut-on mesurer le "fossé" existant entre eux ? Une méthode utilisée actuellement par les économistes consiste à étudier la répartition des revenus dans l'ensemble des déclarations fiscales d'une région, d'un état, d'un groupe d'états.

Ces revenus sont-ils bien répartis entre tous les déclarants ? La plus grande partie est-elle entre les mains de quelques-uns ? Un indicateur, qui donne une idée de la concentration ou de la dispersion des revenus, permet de répondre à ces questions : c'est l'indice de GINI.

La répartition des revenus est décrite à l'aide de la courbe de LORENZ, qui permet alors de définir cet indice. Différents exemples appliquée au cas de la distribution des revenus de la Belgique illustreront la théorie.

1. La courbe de LORENZ

1.1. Description

Dès 1905, le statisticien Max Otto Lorenz imagina de décrire la distribution des richesses en associant les fréquences cumulées des nombres de possédants, classés selon la fortune croissante, aux fréquences cumulées des richesses possédées. Des économistes se sont inspirés de cette méthode pour étudier la répartition des revenus, plutôt que de la fortune. Par exemple, dans le monde entier, pour l'année 1989, ils ont estimé que les 20 premiers pour cent (respectivement : 40 ; 60 ; 80 ; 100) des déclarants, rangés par ordre des revenus croissants, jouissaient de 1,4% (respectivement : 3,3% ; 5,6% ; 17,3% ; 100%) du revenu total. Comme Lorenz, ils ont traduit ces données en graphique, avec en abscisses les fréquences cumulées des nombres de déclarants et en ordonnées, les fréquences cumulées des revenus. La ligne polygonale obtenue en reliant l'origine et tous ces points est une description de la distribution des revenus. On obtient la courbe de Lorenz en ajustant la ligne pour définir une courbe lisse.

Notations

Dans les statistiques officielles, les revenus, classés par valeurs croissantes, sont répartis en k classes.

Nous noterons :
n_i le nombre de déclarants de la i-ème classe ;

$$i = 1, 2, \ldots, k, \sum_{i=1}^{k} n_i = n \ ;$$

m_i le total des revenus de la i-ème classe ;

$$i = 1, 2, \ldots, , k, \sum_{i=1}^{k} m_i = m \ ;$$

p_i les fréquences cumulées des n_i, soit

$$p_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{n_j}{n} \ ;$$

q_i les fréquences cumulées des m_i, soit

$$q_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{m_j}{m}.$$

L'interprétation de ces nombres est la suivante : la somme des revenus des $(100 \times p_i)\%$ des contribuables les moins riches représente $(100 \times q_i)\%$ de la somme totale des revenus. La courbe de Lorenz est tracée à partir du point (0,0) et des points (p_i, q_i), en sachant que (p_k, q_k) est évidemment (1,1).

Exemple

Comme illustration, voici la distribution des contribuables belges selon les revenus déclarés en 1990 (Annuaire Statistique de la Belgique).

Classe des revenus ($\times$ 1000 F)	Nombre de déclarations	Revenus totaux nets imposables ($\times$ 1 000 000 F)
0 à 100	200 339	8 579,4
100 à 200	177 255	27 047,6
200 à 500	1 346 699	506 270,6
500 à 1000	1 641 892	1 157 745,8
1000 et plus	729 170	1 128 507,0
total	4 095 355	2 828 150,4

A partir de statistiques plus détaillées où les revenus sont partitionnés en 25 catégories au lieu de 5, on obtient la courbe de Lorenz suivante :

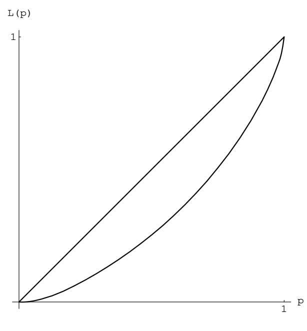


Figure 1 : Répartition des revenus en Belgique en1990

1.2. Développements théoriques

Supposons à présent une distribution des revenus suivant une fonction de densité $f(x)$ continue sur $[0, +\infty[$. Pour une population de taille n, le nombre d'individus ayant un revenu dans l'intervalle acceptable $[a, b]$ est $n \int_a^b f(x)dx$.

1. Alors, $F(x) = \int_0^x f(r)dr$ représente le pourcentage de la population dont le revenu ne dépasse pas x.

$F(x)$ que l'on appelle fonction de distribution cumulée, possède les propriétés suivantes :

— $F'(x) = f(x)$;
— $F(x)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ puisque $f(x) > 0$;
— $F(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ si on suppose naturellement que tout individu a un revenu positif mais fini ;
— $F(x)$ est injective.

2. Ces propriétés permettent de définir une fonction réciproque R :

$$p = F(x) \Leftrightarrow x = R(p)$$

Interprétation :
$\forall p \in [0, 1]$, $R(p)$ est le niveau de revenu pour lequel le pourcentage p de la population possède un revenu $x \leqslant R(p)$. Par exemple, si $p = 1/2$, $R(1/2)$ est la médiane de la distribution des revenus.
Propriétés :

— $\forall p \in]0, 1[$, $R'(p) = \dfrac{1}{F'(x)} = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f[R(p)]}$ par le théorème de dérivation des fonctions réciproques.
— $n \int_0^{R(p)} rf(r)dr$ est le revenu total du pourcentage p le plus pauvre de la population.
  Remarquons alors que :
  — $m = n \int_0^{+\infty} rf(r)dr$ est le revenu total de la population.
  — $\bar{m} = \frac{m}{n} = \int_0^{+\infty} rf(r)dr$ est le revenu moyen.
— $L(p) = \frac{n}{m} \int_0^{R(p)} rf(r)dr$ est le pourcentage du revenu total perçu par le pourcentage p le plus pauvre de la population.

3. La courbe de Lorenz est le graphe de la fonction

$$L : [0, 1] \to [0, 1] : p \to L(p) = \frac{1}{\bar{m}} \int_0^{R(p)} rf(r)dr.$$

Le domaine de variation est $[0, 1]$ puisque

$$0 \leqslant \int_0^{R(p)} rf(r)dr \leqslant \int_0^{+\infty} rf(r)dr.$$

En utilisant la règle de Leibniz relative à la dérivée d'une intégrale paramétrique, on a

$$\begin{aligned} L'(p) &= \frac{1}{\bar{m}} R(p) f[R(p)] R'(p) = \frac{R(p)}{\bar{m}} \\ L''(p) &= \frac{R'(p)}{\bar{m}} = \frac{1}{\bar{m} f[R(p)]} \end{aligned}$$

avec $L'(p) > 0$, $L''(p) > 0$, $\forall p \in]0,1[$.

On déduit les propriétés suivantes pour L :

— $L(p)$ est strictement croissante et strictement convexe sur $[0,1]$ avec $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$.

— $L(p) \leqslant p$, $\forall p \in [0,1]$.

— $L'(p)$ est également strictement croissante sur $[0,1]$ avec $L'(0) = 0$ et $\lim\limits_{p \to 1} L'(p) = +\infty$.

— $L'(p) = 1 \Leftrightarrow R(p) = \bar{m} \Leftrightarrow p = F(\bar{m})$;
$L'(p) < 1 \Leftrightarrow 0 < p < F(\bar{m})$;
$L'(p) > 1 \Leftrightarrow F(\bar{m}) < p < 1$.

De ces considérations, nous concluons que la courbe de Lorenz est strictement croissante de (0,0) à (1,1), qu'elle croît au départ plus lentement et à l'arrivée plus vite que la bissectrice du premier quadrant en dessous de laquelle elle est située.

1.3. Exemples théoriques et classiques de courbes de Lorenz

1) *Equirépartition*

Dans le cas où chaque contribuable déclare le même revenu, 10% des individus déclarent 10% de la masse totale des revenus, 20% des personnes déclarent 20% de cette masse, ... ; plus généralement, on a $L(p) = p$ pour tout $p \in [0,1]$. La courbe de Lorenz correspondante est la portion de la bissectrice du premier quadrant comprise entre les abscisses 0 et 1 : il s'agit du *segment d'équirépartition.*

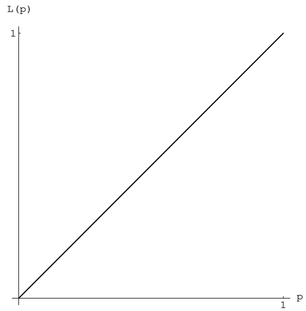


Figure 2 : Courbe de Lorenz en cas d'équirépartition.

2) *Concentration absolue*

L'autre cas extrême est celui où tout le revenu est perçu par un seul contribuable. Il est décrit par la fonction L définie par $L(p) = 0$ pour tout $p \in [0, 1[$ et $L(1) = 1$.

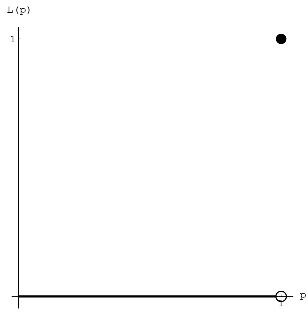


Figure 3 : Courbe de Lorenz en cas de concentration absolue.

3) *Approche par les fonctions exponentielles*

— Les fonctions $L(p) = p^a$, pour $a \geqslant 1$, possèdent les propriétés voulues pour décrire une courbe de Lorenz. Plus l'exposant a est grand, plus forte est la concentration ou, graphiquement, plus la courbe de Lorenz s'éloigne du segment d'équirépartition.

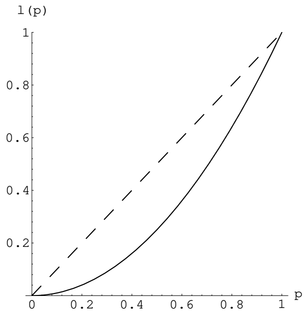


Figure 4.1 :
faible concentration ($a = 2$)

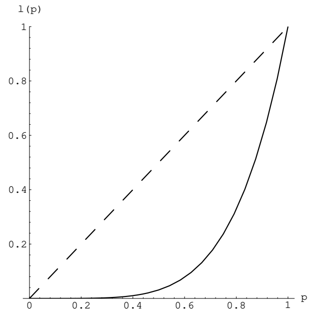


Figure 4.2 :
forte concentration ($a = 5$)

— Les fonctions $L(p) = (1-a)p + ap^b$, avec $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $b > 1$, peuvent également définir des courbes de Lorenz dont la concentration augmente en même temps que a et b.

2. Indice de GINI

En 1912, le statisticien italien Corrado Gini a introduit un indice permettant en quelque sorte de “mesurer” l’inégalité dans la distribution des richesses. Cet indice G, appelé l’indice (de concentration) de GINI, “mesure” aujourd’hui l’inégalité des revenus dont la distribution est décrite par une fonction de densité continue $f(x)$. Il est défini comme suit :

$$G = \frac{1}{2\bar{m}} \underbrace{\iint_{\mathbb{R}_+^2} |x-y|\, f(x)f(y)dxdy}_{\Delta},$$

où $\bar{m}$ désigne le revenu moyen, à savoir

$$\bar{m} = \int_0^{+\infty} xf(x)dx$$

et $\mathbb{R}_+^2$ est le quadrant positif, soit

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

Cette définition montre bien que l’indice de GINI mesure une inégalité relative puisqu’il est le rapport d’une mesure de dispersion, la différence moyenne Δ, sur une valeur moyenne $\bar{m}$.

En exprimant le domaine d'intégration comme la réunion $D_1 \cup D_2$, où $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : y \leqslant x\}$ et $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : y > x\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
2\bar{m}G &= \iint_{D_1} (x-y)f(x)f(y)dxdy + \iint_{D_2} (y-x)f(x)f(y)dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x (x-y)f(x)f(y)dy \right) dx \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y (y-x)f(x)f(y)dx \right) dy \\
\Leftrightarrow \bar{m}G &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x (x-y)f(x)f(y)dy \right) dx \\
\Leftrightarrow \bar{m}G &= \int_0^{+\infty} \left(xf(x) \int_0^x f(y)dy - f(x) \int_0^x yf(y)dy \right) dx.
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^x f(y)dy = F(x)$,

$$\begin{aligned}
\bar{m}G &= \int_0^{+\infty} xf(x)F(x)dx - \int_0^{+\infty} f(x) \left(\int_0^x yf(y)dy \right) dx \\
&= I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

Pour la première intégrale I_1, effectuons la substitution

$$\begin{aligned}
F(x) &= p \\
F'(x)dx &= f(x)dx = dp \\
F(0) &= 0, \\
\lim_{x \to +\infty} F(x) &= 1.
\end{aligned}$$

Il vient

$$I_1 = \int_0^1 pR(p)dp.$$

Or

$$L'(p) = \frac{R(p)}{\bar{m}},$$

d'où

$$I_1 = \bar{m} \int_0^1 pL'(p)dp.$$

Une intégration par parties donne finalement

$$I_1 = \bar{m}\left([pL(p)]_0^1 - \int_0^1 L(p)dp\right)$$

ou encore

$$I_1 = \bar{m}\left(1 - \int_0^1 L(p)dp\right)$$

puisque $L(1) = 1$, $L(0) = 0$.

Pour la deuxième intégrale I_2, effectuons la substitution

$$\begin{aligned} x &= R(p) \\ dx &= R'(p)dp = \frac{1}{f[R'p)]}\,dp \\ R(0) &= 0, \\ R(1) &= 1. \end{aligned}$$

Il vient

$$I_2 = \int_0^1 f[R(p)]\left(\int_0^{R(p)} yf(y)dy\right)\frac{1}{f[R(p)]}\,dp.$$

Or, par définition, $\bar{m}L(p) = \int_0^{R(p)} yf(y)dy$, d'où

$$I_2 = \bar{m}\int_0^1 L(p)dp.$$

Dès lors,

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 L(p)dp\right).$$

En raison de sa simplicité, cette dernière formule est souvent adoptée pour définir l'indice de GINI.

Exercices

On vérifie sans peine que

— pour $L(p) = p^a$, avec $a > 1$,

$$G = \frac{a-1}{a+1}\ ;$$

— pour $L(p) = (1-a)p + ap^b$, avec $0 < a < 1$ et $b > 1$,

$$G = a\frac{b-1}{b+1}.$$

L'indice de GINI admet une interprétation géométrique simple. En effet, $\int_0^1 L(p)dp$ mesure l'aire de la région située entre la courbe de Lorenz et l'axe des abscisses (pour des abscisses variant entre 0 et 1) ; par ailleurs, $1/2$ est la mesure de l'aire de la moitié du carré $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, soit l'aire de la portion de C située sous le segment d'équirépartition. En conséquence, G est le double de la mesure de l'aire comprise entre le segment d'équirépartition et la courbe de Lorenz. Il est dès lors facile de vérifier que G varie de 0 à 1.

Si $G = 0$, la courbe de Lorenz se confond avec le segment d'équirépartition. Si $G = 1$, elle se compose du segment de droite $[(0,0),(1,0)[$ et du point (1,1) : il s'agit du cas de concentration absolue. De façon générale, plus l'indice G est élevé, plus grande est l'inégalité des revenus.

Rappelons que lorsque les revenus sont répartis en k classes, la courbe de Lorenz est approchée à partir de la ligne polygonale reliant les point (p_i, q_i) pour $i = 0, 1, \ldots$ avec $(p_0, q_0) = (0,0)$ et $(p_k, q_k) = (1,1)$, p_i étant le pourcentage des contribuables déclarant $(100 \times q_i)\%$ des revenus (rangés par valeurs croissantes). Par la méthode des trapèzes, par exemple, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 L(p)dp &\approx (p_1 - p_0)\left(\frac{q_0 + q_1}{2}\right) + (p_2 - p_1)\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right) \\
&\quad + \cdots + (p_k - p_{k-1})\left(\frac{q_{k-1} + q_k}{2}\right) \\
\Rightarrow 2\int_0^1 L(p)dp &\approx 1 + p_2 q_1 + p_3 q_2 + \cdots + p_k q_{k-1} \\
&\quad -(p_1 q_2 + p_2 q_3 + \cdots + p_{k-1} q_k),
\end{aligned}$$

d'où

$$G \approx \sum_{i=1}^{k-1} (p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i).$$

Disposition pratique

Considérons la matrice de k lignes et 2 colonnes construites à partir des fréquences cumulées des nombres de déclarants et des revenus de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \\ \vdots & \vdots \\ p_{k-1} & q_{k-1} \\ p_k & q_k \end{pmatrix}$$

l'expression de l'indice de GINI obtenue par la méthode des trapèzes coïncide avec la somme des déterminants des sous-matrices carrées constituées des lignes ℓ_i et ℓ_{i+1} avec i variant de 1 à $k-1$.

Illustration

L'indice de GINI relatif aux revenus des contribuables belges en 1989 vaut $G = 0,368$, tandis que pour cette même année 1989, l'indice de GINI pour le monde entier est égal à $G = 0,68$. Cette différence apparaît clairement à partir des courbes de Lorenz correspondantes.

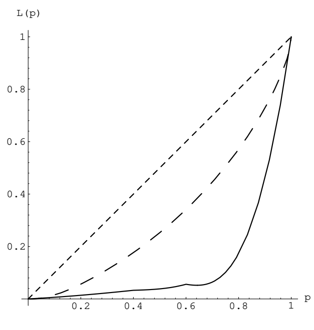


Figure 5 : Courbes de Lorenz
de la Belgique (- - -) et du monde (-) en 1989.

Remarquons qu'un indice de GINI égal à 0,68 pour le monde entier en 1989 est à relativiser. Il est fort probable que l'indice de GINI réel dépasse cet indice obtenu à partir du recensement des revenus dans le monde entier car, en 1989, certains pays n'ont sûrement pas participé à l'étude statistique considérée.

On peut même supposer que ce sont les pays les moins favorisés qui par leur absence ont empêché l'observation d'une inégalité encore plus nette dans la répartition des revenus.

En général, nous constatons peu de différence sensible entre les courbes de Lorenz et indices de GINI lorsque les états comparés sont industrialisés ou lorsque les époques sont récentes. La différence devient significative dès que l'on aborde les pays en voie de développement, a fortiori le monde entier.

L'étude de l'évolution au cours du temps de l'indice de GINI ne peut malheureusement pas être entreprise avec les données statistiques à notre disposition. En effet, les modifications au régime de taxation appliqué ou dans la législation fiscale limitent la comparabilité dans le temps.

Bibliographie

[1] Guy Quaden, *Politique Economique*, Collection Economie 2000, Editions Labor, 1985.

[2] Knut Sydsaeter, Peter J. Hammond, *Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall International Editions, 1995.

[3] André Yandl, *Introduction to Mathematical Analysis for Business and Economics*, Brooks/Cole Publishing Company, 1991.

[4] *Bulletin de Statistiques Financières*, INSS, 1989, 1990.

[5] *Annuaire Statistique de la Belgique*, 1990.

[6] Joseph L. Gastwirth, *The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index*, Review of Economics and Statistics, 54 (1972) 306–316.

Adresse de l'auteur :

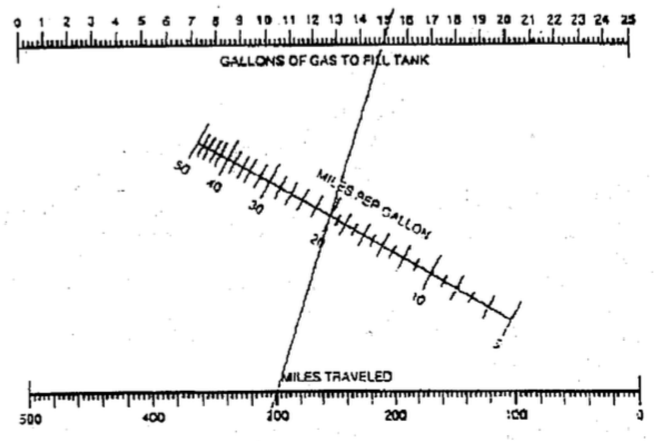
Gentiane HAESBROECK
Université de Liège
Institut de Mathématique - D1
Avenue des Tilleuls 15
4000 Liège

Pas bêtes, ces Américains !

M. Parker, *Université Libre de Bruxelles*
Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Au verso d'un plan de la ville de New York, distribué dans les stations d'essence, on peut voir l'encadré que voici :

Miles per gallon computer
Follow these simple steps : **A** Determine total miles traveled and amount of gas to refill tank. **B** Line up both figures with straight edge on computer scale. **C** The intersecting point on the center diagonal line will give you miles per gallon.



En français :

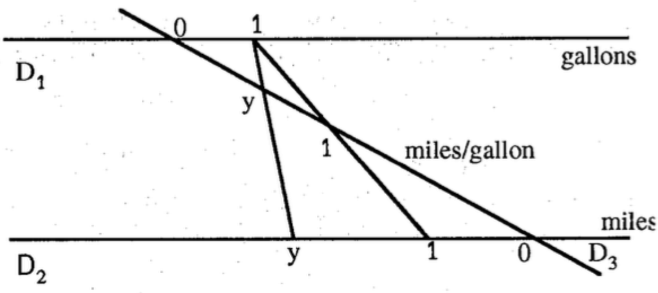
Calculateur de miles par gallon

Suivez ces instructions simples : A. Déterminez le nombre total de miles parcourus et la quantité d'essence nécessaire pour refaire le plein. B. Joignez ces deux nombres par un trait rectiligne sur le diagramme. C. Le point d'intersection sur la diagonale centrale vous donnera le nombre de miles par gallon.

Jules et Jim se regardent perplexes. Quelle graduation bizarre sur la droite oblique ! Jules, toujours rapide, s'exclame bientôt :
"Si on prolonge le segment de droite oblique, il passe par les zéros des droites horizontales" et ajoute :
"Pour obtenir la graduation de la droite oblique, il suffit de joindre le point 1 de la droite supérieure aux points de la graduation sur la droite inférieure".

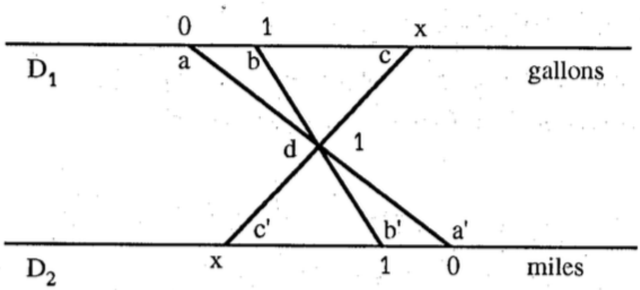
Jim, entretemps, a terminé quelques petits graphiques. Après un long silence, il se décide :
"Si on joint le point x de la droite supérieure au point 1 de la droite oblique, on doit retrouver le point x de la droite inférieure".
Tout cela semble bien vrai, mais n'explique pas encore comment ce gadget fonctionne (en admettant qu'il fonctionne !). Les deux amis décident donc d'être systématiques.

1°) Proposition de Jules pour définir la graduation de la droite oblique :



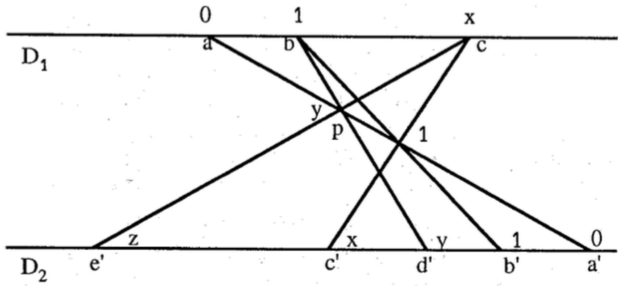
la graduation de D_3 s'obtient en joignant le point d'abscisse y de D_2 au point d'abscisse 1 de D_1

2°) Remarque de Jim : si on joint le point d'abscisse x de D_1 au point marqué 1 sur D_3, on retrouve bien le point d'abscisse x de D_2



En effet, les triangles adc et $a'dc'$ sont semblables, donc $\dfrac{ac}{a'c'} = \dfrac{ad}{a'd}$. D'autre part, les triangles adb et $a'db'$ sont semblables, donc $\dfrac{ab}{a'b'} = \dfrac{ad}{a'd}$. Par conséquent $\dfrac{a'c'}{a'b'} = \dfrac{ac}{ab}$.

3°) Mode d'emploi du calculateur : en joignant le point d'abscisse x de D_1 au point d'abscisse z de D_2, on obtient sur D_3 un point marqué y tel que $xy = z$.



En vertu du 1°) on sait que l'abscisse de d' sur D_2 est y et en vertu du 2°) on sait que l'abscisse de c' sur D_2 est x. Il suffit donc de vérifier que $z = xy$ sur D_2, c'est-à-dire que

$$\frac{a'e'}{a'b'} = \frac{a'c'}{a'b'} \times \frac{a'd'}{a'b'}$$

ou encore

$$\frac{a'e'}{a'd'} = \frac{a'c'}{a'b'}$$

On sait déjà (2°)) que $\dfrac{a'c'}{a'b'} = \dfrac{ac}{ab}$.

D'autre part, les triangles $a'pe'$ et apc étant semblables, on a $\dfrac{a'e'}{a'p} = \dfrac{ac}{ap}$.

Les triangles $a'pd'$ et apb étant aussi semblables on a

$$\frac{a'p}{a'd'} = \frac{ap}{ab}$$

ce qui achève la démonstration.

Adresse de l'auteur :

Monique PARKER
Université Libre de Bruxelles
Campus Plaine C.P.218
Boulevard du Triomphe
1050 Bruxelles

Propriétés mathématiques de la fonction de Cobb-Douglas et leurs interprétations économiques

J. Bair et F. Sart , *Université de Liège*

Paul Douglas, un économiste de l'Université de Chicago qui fut sénateur des Etats-Unis, et Charles Cobb, un mathématicien du Amberst College, ont introduit une fonction, dite de Cobb-Douglas, qui joue un rôle important en microéconomie : elle permet aussi bien d'étudier le comportement de la production d'une firme que d'analyser la satisfaction (ou "utilité") d'un consommateur qui achète plusieurs biens.

Nous nous proposons de recenser, pour ce type de fonction, quelques propriétés mathématiques remarquables qui seront ensuite interprétées géométriquement, puis économiquement.

Précisons le cadre de cette étude.

Nous analyserons la *fonction de Cobb-Douglas* définie par $f(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ et la *fonction de Cobb-Douglas généralisée* $g(x, y) = Ax^\beta y^\gamma$, où A, α, β et γ désignent des constantes positives, avec de plus $\alpha < 1$. A cause de leurs interprétations économiques, ces fonctions ne nous seront utiles que pour des valeurs non négatives des variables ; comme, de plus, elles s'annulent en même temps que l'une des variables, nous les étudierons exclusivement sur l'ouvert $\Omega = \oint 0, +\infty \times \oint 0, +\infty$ en tout point duquel elles sont indéfiniment continûment dérivables et à valeurs strictement positives.

Nous nous pencherons sur les courbes de niveau de f (resp. de g) définies implicitement par $f(x, y) = k$ (resp. $g(x, y) = C$), où k (resp. C) désigne une constante positive. Notons à ce propos que toute courbe de niveau de g figure parmi les courbes de niveau de f ; en effet, l'égalité $Ax^\beta y^\gamma = C$ entraîne

$$x^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} y^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} = \left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{\beta+\gamma}},$$

d'où $x^\alpha y^{1-\alpha} = k$ si l'on pose

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad k = \left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{\beta+\gamma}};$$

cette remarque nous permettra de traiter essentiellement les courbes de niveau de f : elles peuvent également être définies explicitement, puisqu'elles représentent le graphique de la fonction

$$h(x) = \sqrt[1-\alpha]{\frac{k}{x^\alpha}}.$$

1. Propriétés mathématiques

Tous les résultats que nous allons énoncer sont valables en tout point de Ω ; certains peuvent être trouvés dans la littérature spécialisée (par exemple, [1, 2, 3]) et tous sont très faciles à démontrer : c'est pourquoi, nous nous permettrons de citer les énoncés sans les preuves.

1.1. Les dérivées partielles premières de f et de g sont positives et vérifient ces égalités :

$$f'_x = \frac{\alpha f}{x}, \quad f'_y = \frac{(1-\alpha)f}{y}, \quad g'_x = \frac{\beta g}{x}, \quad g'_y = \frac{\gamma g}{y}.$$

1.2. Les dérivées partielles secondes f''_{xx} et f''_{yy} sont négatives. La matrice hessienne de g, à savoir

$$\mathcal{H}g = \begin{pmatrix} g''_{xx} & g''_{xy} \\ g''_{yx} & g''_{yy} \end{pmatrix},$$

est de classe semi-définie négative si et seulement si $\beta + \gamma \leqslant 1$; le hessien bordé de g, c'est-à-dire le déterminant

$$Hg = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & g'_{xx} & g''_{xy} \\ g'_y & g''_{yx} & g''_{yy} \end{vmatrix},$$

est positif. En conséquence, sur le convexe Ω, g est concave si et seulement si $\beta+\gamma \leqslant 1$, et en particulier f est concave, mais g est toujours quasi-concave.

1.3. Les dérivées première et seconde de la fonction h sont données par

$$h' = -\frac{f'_x}{f'_y} \quad \text{et} \quad h'' = \frac{Hf}{(f'_y)^3}$$

et sont respectivement négative et positive.

1.4. La fonction f est solution de l'équation aux dérivées partielles $(1-\alpha)xf'_x = \alpha y f'_y$ qui est équivalente à

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\alpha y}{(1-\alpha)x}.$$

1.5. La fonction h est solution de cette équation différentielle :

$$\frac{y''}{y'} = \frac{x}{y}\frac{xy'-y}{x^2},$$

qui peut encore s'écrire sous la forme équivalente

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{d\bar{y}}{\bar{y}}, \text{ avec } \bar{y} = \frac{y}{x}.$$

1.6. Soit $P_1 = (x_1, y_1)$ un point fixé de $\Omega \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ex > y\}$; $f'_x(P_1)$ définit une fonction croissante en la variable α. De même, si $P_2 = (x_2, y_2)$ est situé dans $\Omega \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ey > x\}$, $f'_y(P_2)$ est une fonction décroissante en α.

1.7. La fonction g est homogène de degré $\beta + \gamma$, d'où f est linéairement homogène. En vertu du théorème d'Euler, on a donc

$$xf'_x + yf'_y = f \text{ et } xg'_x + yg'_y = (\beta+\gamma)g.$$

1.8. Le maximum de g sous la contrainte $ax + by = c$ (où a, b, c sont des constantes positives) est atteint lorsque

$$\frac{g'_x}{g'_y} = \frac{a}{b},$$

c'est-à-dire au point

$$\left(\frac{c\beta}{a(\beta+\gamma)}, \frac{c\gamma}{b(\beta+\gamma)}\right).$$

En corollaire, si β, γ, a et b restent constants mais si c varie, le maximum de g sous la contrainte $ax+by = c$ est atteint en des points dont les coordonnées sont toujours dans un même rapport.

2. Interprétation géométrique

2.1. Le graphique de g, donc celui de f, est une surface dans l'espace à trois dimensions (cf. figure 1). Son intersection avec un plan vertical parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées est une courbe croissante. De plus, d'un point quelconque P d'une telle courbe, traçons la tangente (resp. la droite passant par l'origine) et appelons Θ (resp. Φ) l'angle formé par cette droite avec l'axe des coordonnées : le nombre $\frac{\operatorname{tg}\Theta}{\operatorname{tg}\Phi}$ est toujours le même et vaut l'exposant de la variable restante. Par exemple, la figure 2 montre la section du graphique de $f(x,y) = x^{0,5}y^{0,5}$ par le plan d'équation $y = 1$: dans ces conditions, $\operatorname{tg}\Theta = f'_x$ et $\operatorname{tg}\Phi = \frac{f}{x}$, d'où

$$\frac{\operatorname{tg}\Theta}{\operatorname{tg}\Phi} = 0,5.$$

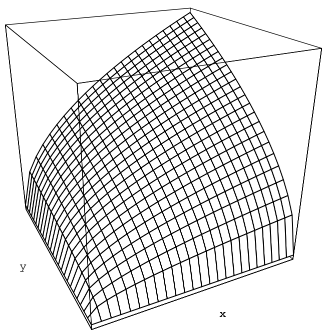


Figure 1
Graphique de la fonction $x^{0,5}y^{0,5}$

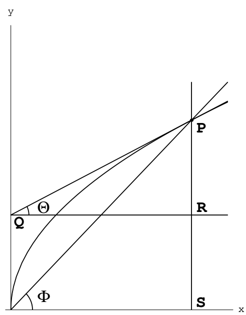


Figure 2
Courbe d'équation $y = x^{0,5}$

2.2. L'intersection du graphique de f par un plan vertical parallèle à l'un des axes de coordonnées est une courbe dont la croissance diminue au fur et à mesure que l'autre variable grandit : cette courbe tourne donc sa concavité vers le bas (figure 2).

Si l'on prend deux points arbitraires P_1 et P_2 du graphique de f ou de celui de g lorsque $\beta + \gamma \leqslant 1$, la corde $[P_1 : P_2]$ reliant ces deux points est située entièrement sous le graphique ; dans ce cas, cela revient à dire que le graphique est toujours situé sous tout plan tangent à la surface. Cette propriété n'est plus vraie lorsque $\beta + \gamma > 1$ (figure 3) ; néanmoins, même dans ce cas, le graphique de g ne descend pas en-dessous du plus bas des deux points P_1 et P_2.

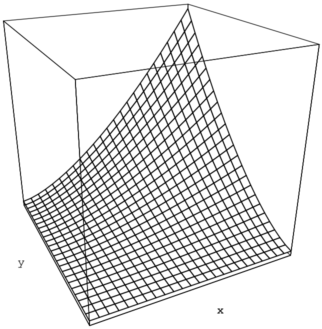
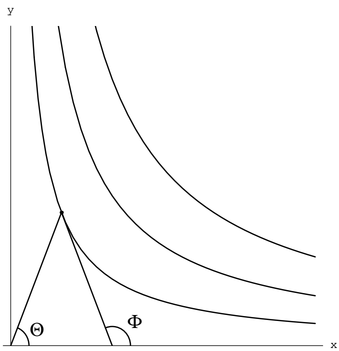


Figure 3
graphique de $x^{1,5}y^{1,5}$

2.3. Les courbes de niveau de f sont décroissantes et convexes.



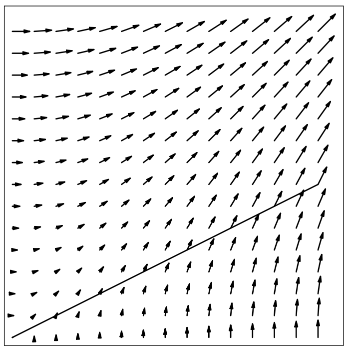


Figure 4
courbe de niveau de $x^{0,5}y^{0,5}$

Figure 5
Gradients de xy

2.4. Soit D une demi-droite arbitraire du plan xOy issue de l'origine. En chaque point de D, les gradients de y ont la même direction ; de façon équivalente, les tangentes aux courbes de niveau de g aux points de D sont parallèles entre elles. (cf. figure 5)

2.5. D'un point P d'une courbe de niveau, traçons la tangente (resp. la droite passant par l'origine) et désignons par Θ (resp. Φ) l'angle formé par cette droite avec l'axe horizontal. Si le point P se déplace de façon infinitésimale le long de la courbe, les variations relatives de $\operatorname{tg}\Theta$ et de $\operatorname{tg}\Phi$

coïncident, soit en formule :

$$\frac{\Delta \operatorname{tg} \Theta}{\operatorname{tg} \Theta} = \frac{\Delta \operatorname{tg} \Phi}{\operatorname{tg} \Phi}$$

(voir figure 4). De fait, on a $y' = \operatorname{tg} \Theta$ et $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \Phi$ d'où, en différentiant le long de la courbe, on trouve

$$\frac{d \operatorname{tg} \Theta}{\operatorname{tg} \Theta} = \frac{d \operatorname{tg} \Phi}{\operatorname{tg} \Phi}.$$

2.6. Plus α grandit, plus les courbes de niveau de f se "ressèrent" près de l'axe horizontal pour les abscisses élevées ; dans le même temps, ces courbes ont tendance à s'éloigner les unes des autres lorsque les ordonnées sont grandes (voir les figures 6 et 7).

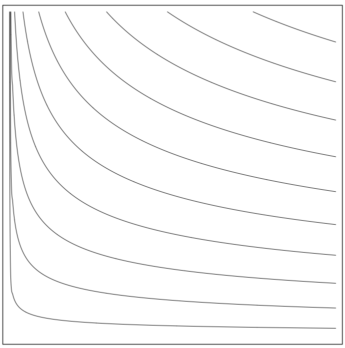


Figure 6
courbes de niveau de $x^{0,25}y^{0,75}$

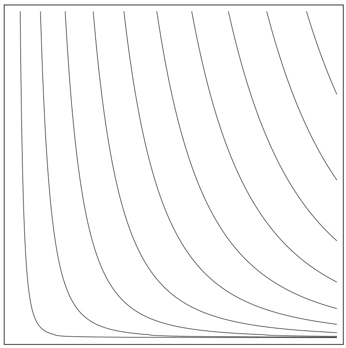


Figure 7
courbes de niveau de $x^{0,75}y^{0,25}$

L'intersection de la surface $z = g(x, y)$ avec le plan vertical $x = y$ est une courbe qui tourne sa concavité vers le bas si $\beta + \gamma < 1$ (figure 8a) ; si $\beta + \gamma = 1$, cette intersection est une ligne droite (figure 8b) ; si $\beta + \gamma > 1$, c'est une courbe qui tourne sa concavité vers le haut (figure 8c).

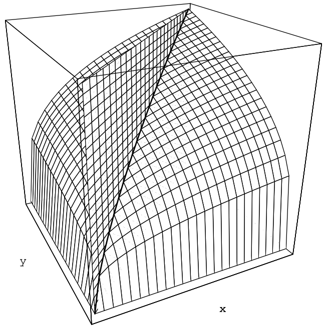


Figure 8a

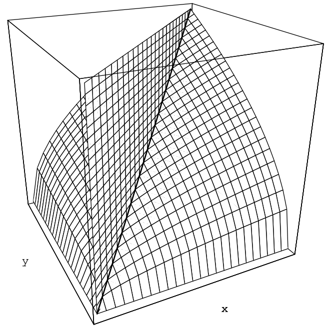


Figure 8b

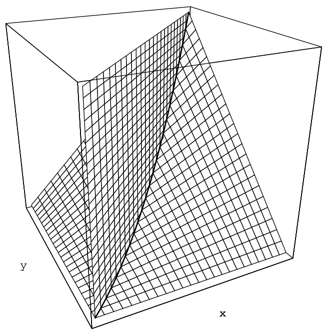


Figure 8c

2.7. Traçons le graphique de f en l'unique variable x (y est supposé constant). D'un point arbitraire P sur cette courbe, considérons la tangente à celle-ci et la verticale passant par P. Elles rencontrent respectivement l'axe vertical et l'axe horizontal aux points Q et S. Soit R, le point d'intersection de la droite PS avec l'horizontale passant par Q. Le segment de droite PS est composé de deux parties PR et RS qui mesurent respectivement les expressions xf'_x et yf'_y calculés au point P (voir figure 2).

2.8. Le maximum de g sur la droite d'équation $ax + by = c$ est atteint en un point où une courbe de niveau est tangente à cette droite (au point P^* sur la figure 9)

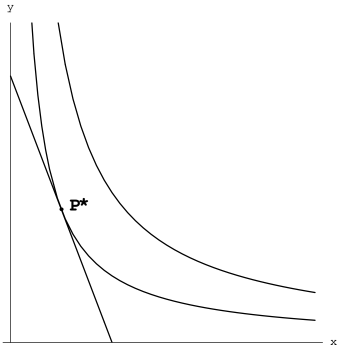


Figure 9
Le maximum de g sur la droite
est atteint en P^*

Si c varie, et toutes choses restant égales par ailleurs, la droite de contrainte se déplace parallèlement à elle-même ; les points qui assurent le maximum de f sur ces droites parallèles décrivent une droite passant par l'origine

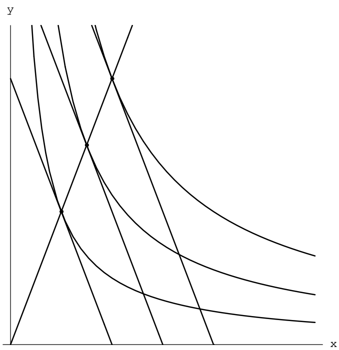


Figure 10
Points de tangence de courbes de niveau
et de droites parallèles

3. Interprétation économique

Bien que l'on puisse interpréter la plupart des résultats en adoptant le point de vue du consommateur, nous allons uniquement envisager la théorie du producteur, la fonction de Cobb-Douglas ayant d'ailleurs été initialement introduite dans ce cadre.

3.1. Les valeurs des fonctions f et g représentent la quantité (maximale) d'un produit P (appelé *output*) que l'on peut fabriquer avec les quantités x et y de deux facteurs de productions (ou *inputs*) ; très souvent, x et y désignent les quantités des inputs agrégés que sont respectivement le capital C et le travail (ou la main-d'oeuvre) T. La constante A qui intervient dans la fonction g détermine en quelque sorte l'échelle de production, puisqu'elle vaut la quantité d'output obtenue en utilisant une unité de chaque input.

Les dérivées partielles premières de f et g définissent les *produits marginaux* des facteurs de production : f'_x et g'_x (resp. f'_y et g'_y) valent approximativement la variation d'output pour une augmentation d'une unité de capital (resp. de travail). Leur caractère positif rend les fonctions f et g "croissantes", en ce sens que la quantité d'output obtenu augmente dès qu'on accroît la quantité d'un seul input.

Les exposants α, $1-\alpha$, β et γ mesurent l'impact sur la quantité d'output d'une variation des inputs puisqu'ils sont égaux aux élasticités partielles de la fonction de production. De façon précise, pour la *technologie de Cobb-Douglas* définie par la fonction de production de g, une variation de 1% de C (resp. de T) entraîne une variation de β% (resp. γ%) de P.

Le calcul des constantes A, β et γ peut se faire, dans la pratique, de la manière suivante : on observe la quantité q_i de P fabriquée à l'aide de quantités connues x_i et y_i de C et de T dans n cas (pour $i = 1, 2, \ldots, n$). Un passage au logarithme népérien conduit alors au système linéaire, à n équations, en les trois inconnues $\ln A$, β et γ, à savoir :
$\ln q_i = \ln A + \beta \ln x_i + \gamma \ln y_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On résout ce système ou, s'il n'est pas résoluble, on en cherche la meilleure solution approchée au sens des moindres carrés [4, p. 95].

3.2. Les courbes de niveau de la fonction de production sont appelées des *isoquantes* : c'est l'ensemble de toutes les combinaisons de capital et de travail donnant un niveau fixé d'output. Lorsque la distance de l'isoquante à l'origine grandit, la quantité correspondante d'output augmente.

Lorsque f est la fonction de production, les produits marginaux sont décroissants : de fait, lorsqu'un seul des facteurs augmente, la quantité de P croît mais de moins en moins vite.

Si deux combinaisons (x_1, y_1) et (x_2, y_2) des deux facteurs permettent de fabriquer la même quantité q_0 de P, alors leur moyenne pondérée, du type (x_3, y_3) avec $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $y_3 = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ et $\lambda \in \oint 0, 1$, conduit à une quantité q_1 d'output supérieure à q_0 (voir figure 9).

3.3. La pente de l'isoquante mesure le *taux de substitution technique* TST. Si le capital augmente de Δx, il faut diminuer le travail de Δy pour garder la même quantité q_0 de P (figure 11) : le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ donne, à la limite pour Δx tendant vers 0, le TST au signe près

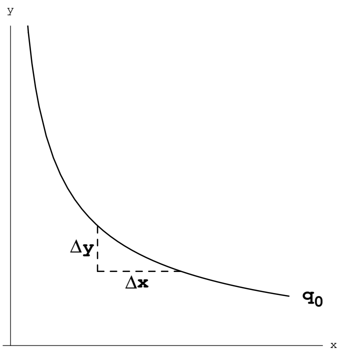


Figure 11
La courbe de niveau pour laquelle
la production est égale à q_0

3.4. Le TST ne change pas si les deux inputs sont multipliés par un même facteur non nul.

3.5. Si l'on substitue du capital à du travail sur une même isoquante, le TST et le rapport $\frac{y}{x}$ des inputs sont décroissants. Le taux de la substitution est mesuré par l'*élasticité de substitution* σ définie comme étant le rapport de la variation relative du rapport des inputs à la variation relative du TST. Dans une technologie de Cobb-Douglas, le nombre σ est toujours égal à 1.

3.6. Lorsque f est la fonction de production, si α est grand et le capital (resp. le travail) est élevé (resp. bas), alors la quantité de P croît vite pour une petite augmentation de main-d'oeuvre. Cette situation se rencontre pour tout *secteur capitalistique* pour lequel le capital est "plus important” que le travail : le pétrole en est un exemple concret et peut être illustré par la figure 7.

Des conclusions similaires peuvent être tirées en permutant les rôles joués par C et T : on est alors dans le cas d'un *secteur laboristique* correspondant à une faible valeur de α (voir, par exemple, la figure 6) : l'industrie textile en est une illustration classique.

3.7. Le caractère homogène de la fonction de production est lié à la notion de *rendement d'échelle*. Par exemple, lorsque la fonction est linéairement homogène, le fait de multiplier la quantité de chaque input par un même facteur t conduit à une quantité d'output également multipliée par ce même facteur t : on parle alors de rendements d'échelle *constants*.

Lorsque le degré d'homogénéité $\beta + \gamma$ de g est supérieur (resp. inférieur) à l'unité, on est dans le cas de rendements d'échelle *croissants* (resp. *décroissants*), car si l'on multiplie les quantités x et y par t, alors la quantité de P est multipliée par le facteur $t^{\beta+\gamma}$ qui est supérieur (resp. inférieur) à t. Un exemple classique de rendements croissants est donné par la fabrication d'un oléoduc : si l'on double le rayon de cet oléoduc, la section est multipliée par 4, de sorte que l'on pourra transporter plus du double de pétrole dans ce nouvel oléoduc [6, p. 330].

La formule d'Euler “ $xf'_x + yf'_y = f$ ” peut être interprétée comme suit : si l'entrepreneur paie les offreurs d'inputs suivant leur produit marginal, la totalité est ainsi épuisée.

3.8. Si a et b désignent les coûts unitaires de deux inputs C et T respectivement et si c vaut la somme totale qui peut être consacrée à l'acquisition des inputs, l'entrepreneur cherche à maximiser le produit total tout en respectant sa contrainte de coût. La solution optimale est atteinte lorsque le TST coïncide avec le rapport $\frac{a}{b}$ des prix.

Lorsque le coût total c varie, et toutes choses restant égales par ailleurs, les solutions optimales décrivent le *chemin d'expansion* de la firme. Dans le cas d'une technologie de Cobb-Douglas, il s'agit d'une droite passant par l'origine : un entrepreneur rationnel ne choisira que des combinaisons d'inputs se trouvant sur cette droite, les quantités utilisées des deux inputs étant dès lors toujours dans un rapport constant.

Bibliographie

[1] Bair J., *Mathématiques générales à l'usage des sciences économiques, de gestion et AES*, De Boeck Université, Bruxelles, 1993.

[2] Bair J., Hinnion R., Justens D., *Applications économiques au service de la mathématique*, Ed. de la Soc. Math. de Belgique, 1989.

[3] Chiang A.C., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3rd Ed., New York, NY[etc] :McGraw Hill, (Collection Economic Series), 1984, 788 p.

[4] Dhrymes P.J., *Mathematics for Econometrics*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.

[5] Henderson J.M., Quandt R.E., *Microéconomie, formulation mathématique élémentaire*, Dunod, Paris, 1982.

[6] Varian H.R., *Introduction à la microéconomie*, De Boeck Université, Bruxelles 1992.

Adresse des auteurs :

Jacques Bair et **Frédéric Sart**
Université de Liège
Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales
Boulevard du Rectorat 7, Bât. B31
4000 Liège, Belgique

2 et un rien

D. French, ([1])

Les idées que vous trouverez dans cet article résultent de trois préoccupations différentes présentes simultanément dans le problème que je vais décrire.

La première est de fournir des contextes dans lesquels des savoir-faire arithmétiques élémentaires, dans ce cas l'addition de fractions, peuvent être pratiqués de manière fortuite en explorant une situation intéressante. La deuxième est la réflexion au sujet de savoir-faire algébriques, dans ce cas des opérations sur des fractions algébriques, nécessaires aux futurs étudiants de niveau A mais si souvent présentés sous forme d'exercices routiniers ennuyeux. La troisième est l'utilisation d'un traceur de courbes ou d'une calculatrice graphique de manière créative afin d'amener les étudiants ... une compréhension des graphiques qui leur permette à la fois d'esquisser rapidement à la main le graphique d'une fonction simple et aussi d'interpréter un graphique donné, de suggérer le genre de fonction qu'il peut représenter. Le lien entre cette dernière préoccupation et les deux premières réside dans la représentation graphique de fonctions rationnelles.

Considérons une fraction dont le numérateur et le dénominateur diffèrent de 1 et essayons de l'ajouter à son inverse. Pour clarifier l'énoncé, traitons un exemple :

$$\frac{4}{5}+\frac{5}{4}=\frac{16}{20}+\frac{25}{20}=\frac{41}{20}=2+\frac{1}{20}$$

Voyons maintenant quelques exemples supplémentaires :

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=2+\frac{1}{12} \qquad\qquad \frac{7}{8}+\frac{8}{7}=2+\frac{1}{56}$$

Cela ressemble à ≪deux et un rien≫. Est-ce pareil avec des grands nombres ?

$$\frac{99}{100}+\frac{100}{99}=2+\frac{1}{9900} \qquad\qquad \frac{332}{333}+\frac{333}{332}=2+\frac{1}{110556}$$

Quel est le rien ? Par la pratique, nous voyons que le dénominateur est le produit des dénominateurs des fractions originales. L'observation des

1. *Cet article est paru sous le titre "2 and a bit" dans Mathematics in School, Vol.24 n° 2, mars 1995. Il a été traduit par Yolande Noël*

exemples nous pousse à la généralisation suivante :

$$\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n(n+1)}$$

Est-ce toujours vrai ? Voici le lien avec mon deuxième sujet : les fractions algébriques. Nous disposons d'une conjecture intéressante et nous cherchons maintenant à la prouver, ce qui nous amène à pratiquer, ou peut-être dans le cas de nos étudiants, à apprendre pour la première fois la manipulation de fractions algébriques, mais ils le font dans un contexte où cela paraît utile !

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n} &= \frac{n^2}{n(n+1)} + \frac{(n+1)^2}{n(n+1)} \\
&= \frac{n^2 + n^2 + 2n + 1}{n(n+1)} \\
&= \frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)} \\
&= \frac{2n(n+1) + 1}{n(n+1)} \\
&= 2 + \frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Les étapes de ce calcul prendront beaucoup plus de sens aux yeux de l'étudiant moyen si elles sont développées parallèlement aux calculs correspondants sur les cas particuliers dont il est censé expliquer les résultats.

Le développement algébrique ci-dessus semble être le moyen ≪évident≫ d'arriver au résultat, mais, de manière très intéressante, une de mes étudiantes a récemment proposé une autre approche qui conduit à des prolongements intéressants. En considérant que les fractions de départ valent un petit peu moins que 1,

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} \qquad \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8} \qquad \frac{99}{100} = 1 - \frac{1}{100}$$

elle dit que

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

égalité que nous pouvons justifier de la manière usuelle en écrivant

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

De manière analogue et plus simplement,

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

En rassemblant les deux égalités, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n} &= (1 - \frac{1}{n+1}) + (1 + \frac{1}{n}) \\
&= 2 + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\
&= 2 + \frac{n+1-n}{n(n+1)} \\
&= 2 + \frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

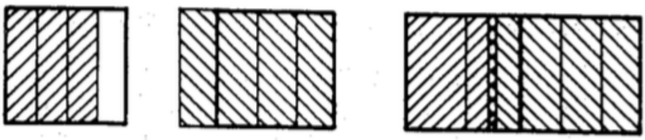
Ceci montre de façon particulièrement claire d'où vient le ≪2≫ et comment se produit un comportement de passage à la limite du ≪rien≫ lorsque les numérateur et dénominateur grandissent. Nous sommes en présence de deux suites de fractions convergeant toutes les deux vers 1, une formée de nombres inférieurs à 1, l'autre de nombres supérieurs à 1.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \ldots \qquad \longrightarrow 1, \qquad \text{par valeurs inférieures}$$

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \ldots \qquad \longrightarrow 1, \qquad \text{par valeurs supérieures}$$

Ainsi, il paraît très vraisemblable que la suite formée des sommes des termes correspondants tende vers 2.

De plus, cette façon d'expliquer la somme de telles fractions et de leurs inverses peut être très clairement illustrée en représentant les deux fractions à partir de deux carrés unités et en superposant les diagrammes. Dans le cas de $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$, la zone de superposition est clairement $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{12}$.



$$\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=2\,\frac{1}{12}$$

Fig. 1

Un des exercices auquel j'ai demandé à mes étudiants de PGCE ([2]) de réfléchir ces dernières années consiste à utiliser un traceur de courbes pour examiner les fonctions rationnelles. Je commence par leur demander de rechercher l'effet de translations et d'étirements sur la courbe d'équation $y=\frac{1}{x}$. Ils remarquent, par exemple, que la translation de deux unités dans la direction de l'axe des ordonnées donne la courbe d'équation $y=\frac{1}{x}+2$ avec la droite d'équation $y=2$ comme asymptote horizontale, tandis que la translation de 3 unités dans la direction de l'axe des abscisses donne la courbe d'équation $y=\frac{1}{x-3}$ avec la droite d'équation $x=3$ comme asymptote verticale.

Une autre question les invite à regarder les courbes d'équations

$$y=\frac{x-a}{x-b}$$

pour différentes valeurs de a et b. Ceci donne naissance à des questions beaucoup plus intéressantes en liaison avec le contenu de cet article. Lorsque $a=0$ et $b=-1$, nous avons $y=\frac{x}{x+1}$ qui a la même forme qu'une des deux fractions intervenant dans la première partie du texte bien que là, les valeurs de x soient uniquement des entiers positifs. En utilisant un traceur de courbes, mes étudiants observent un graphique du type

2. Post-Graduate Certificate of Education : qualification qu'un licencié doit acquérir pour pouvoir enseigner au niveau secondaire

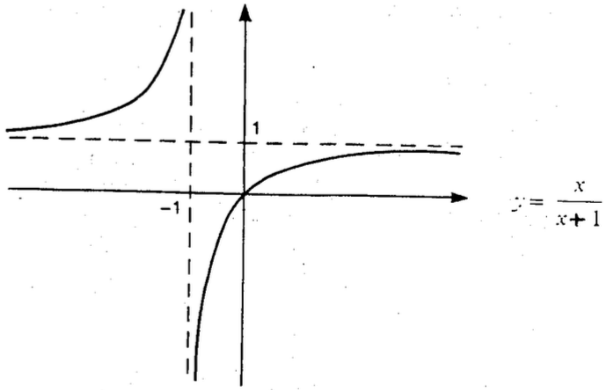


Fig. 2

Deux propriétés sont immédiatement évidentes et faciles à justifier : la courbe passe par $(0, 0)$ et la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote. Deux conjectures supplémentaires peuvent être faites : la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ et ressemble à celle d'équation $y = \frac{1}{x}$. L'asymptote horizontale peut être masquée par le choix de l'échelle sur l'écran graphique. Le fait que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale devient plausible en ajustant l'échelle de manière adéquate, mais peut-on être sûr qu'il en est bien ainsi ?

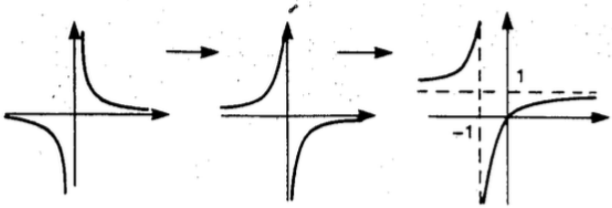
Nous avons vu plus tôt, avec nos fractions, que

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Le comportement pour des valeurs positives et négatives de x, grandes en valeur absolue, explique l'asymptote horizontale.

En ce qui concerne le lien avec la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, nous pouvons trouver une suite de transformations pour appliquer cette courbe sur la courbe d'équation $y = \frac{x}{x+1}$:

Symétrie d'axe X $\qquad$ Translation $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$y = \frac{1}{x} \qquad y = -\frac{1}{x} \qquad y = -\frac{1}{x+1} + 1$

$= 1 - \frac{1}{x+1}$

Fig. 3

Notre conjecture est de nouveau correcte et nous avons gagné un aperçu supplémentaire sur l'asymptote horizontale.

La fraction inverse utilisée dans la partie consacrée aux fractions conduit à la fonction $y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$. Ceci est plus immédiat et donc moins intéressant. Cependant, pour compléter le lien avec le résultat ≪2 et un rien≫, la courbe obtenue pour la fonction somme des deux précédentes devrait admettre la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote. Dans la représentation qui suit, les deux fonctions ayant la droite d'équation $y = 1$ sont dessinées en pointillés ainsi que la fonction devenue familière et obtenue en les additionnant :

$$y = 2 + \frac{1}{x(x+1)}$$

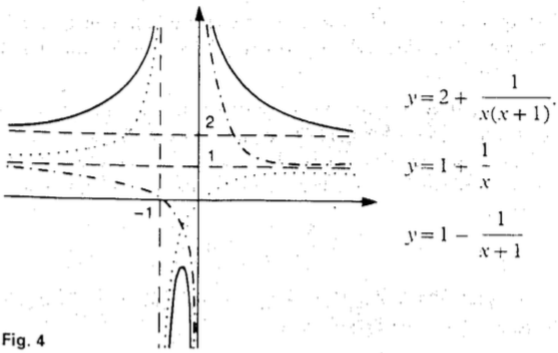


Fig. 4

En considérant les fractions nous avons naturellement, au moins dans un premier temps, regardé uniquement des numérateurs et dénominateurs entiers positifs. Les graphiques impliquent que nous considérons maintenant x sur l'ensemble des réels et nous devons nous rappeler que les fonctions ne sont pas définies lorsque x vaut 0 ou -1.

Si nous considérons $\frac{x}{x+1}$ comme une ≪fraction≫ dont le numérateur et le dénominateur diffèrent de 1, alors nous avons vu algébriquement que la somme d'une telle fraction et de son inverse vaut ≪2 et un rien≫ :

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x(x+1)}$$

La figure 4 illustre bien ce phénomène : la courbe d'équation $y = 2 + \frac{1}{x(x+1)}$ tend asymptotiquement vers la droite d'équation $y = 2$ en restant au-dessus de cette droite pour les valeurs positives et négatives de x, grandes en valeur absolue mais l'idée de ≪2 et un rien≫ est manifestement fausse dans l'intervalle $[-1 \quad 0]$. En fait, le rien peut être très grand en valeur absolue et peut être négatif. $\frac{1}{x(x+1)}$ ressemble intuitivement à une petite fraction par analogie avec des fractions numériques, mais, si x est réel, $x(x+1)$ peut être très petit et peut aussi être négatif, conduisant à un ≪grand rien≫ éventuellement négatif.

Par exemple, si $x = -0,8$

$$\frac{-0,8}{0,2} + \frac{0,2}{-0,8} = -4 + (-0,25) = 2 + (-6,25) = 2 + \frac{1}{-0,16}$$

et, bien sûr, $x(x+1) = -0,8 \times 0,2 = -0,16$.

Bien qu'il soit «évident» qu'un tel exemple numérique «fonctionne», il est rassurant de voir qu'il fonctionne réellement ! Il doit en être de même pour nos étudiants.

Le champ d'investigations supplémentaires à différents niveaux à propos d'un ou de tous les aspects numérique, algébrique et graphique est large. Une généralisation particulièrement intéressante consiste à regarder les fractions dont le numérateur et le dénominateur diffèrent de plus de 1. Par exemple

$$\frac{3}{7} + \frac{7}{3} = 2 + \frac{16}{21}$$

Est-ce que l'idée de «2 et un rien» fonctionne ? Je laisse la question aux lecteurs et à leurs étudiants !

Malheureusement, beaucoup de temps est consacré dans beaucoup de classes de tous niveaux à résoudre des exemples routiniers en dehors de tout contexte. Le contenu de cet article fournit des occasions de pratiquer de la technique routinière, mais dans un contexte, et gr$f$ce à cela la possibilité de le faire avec une motivation plus grande. De plus une chance existe de voir des liens entre différents aspects des mathématiques et, par dessus tout, l'opportunité d'expliquer et de prouver, ce qui constitue le coeur des mathématiques.

Bibliographie

J. Bair,

Méthodologie de l'enseignement des mathématiques – un cas d'école : les primitives – analyse mathématique, par S. HAMER, Editions De Boeck Université, 1995, 120 pages

Des professeurs de l'enseignement secondaire et universitaire, ainsi que des inspecteurs de l'enseignement secondaire, se réunissent régulièrement, sous le nom collectif S. HAMER, pour réfléchir sur l'enseignement de la mathématique, principalement de l'analyse, et pour confronter leurs expériences personnelles.

Ce livre est le résultat d'un séminaire dont le sujet était l'enseignement des primitives. Il n'a pas été construit comme un manuel classique d'analyse ; il présente différentes approches, parfois même contradictoires, ces points de vue dépendant notamment du public auquel chaque co-auteur a l'habitude de s'adresser.

Le thème choisi pour cet ouvrage est un sujet assez mal assimilé dans l'enseignement secondaire car l'accent est trop souvent mis principalement sur l'acquisition de techniques de calcul. Le texte contient de nombreuses indications d'ordre pédagogique, l'exposé de matières et aussi des problèmes et exercices peu classiques. De nombreuses idées exprimées à propos des primitives peuvent être transposées pour d'autres chapitres du cours de mathématique.

Le premier chapitre est consacré à différentes mises en situation : motivation, le problème inverse de la dérivation, des problèmes d'horizon divers (une motivation cinématique, la notion de taux, la théorie élémentaire d'un pont suspendu, la chute d'une météorite), le calcul de l'aire.

Le choix de définitions et notations fait l'objet d'un deuxième chapitre.

Le chapitre 3 traite du théorème de structure qui montre que si on possède une primitive d'une fonction, on les possèdes toutes. Après une vue intuitive sur ce théorème, l'énoncé et la démonstration sont donnés (en insistant notamment sur un problème de rédaction) ; diverses extensions et des exercices de réflexion sont encore donnés.

Dans le chapitre 4, on caractérise les fonctions primitivables.

Le chapitre 5 constitue une mise au point d'un outil : le calcul des primitives.

Le dernier chapitre est consacré à la place des exercices, avec de nombreux énoncés pour lesquels les solutions sont données en annexe.

Une courte bibliographie termine ce livre qui devrait enrichir personnellement tout professeur de mathématique, en l'invitant à réfléchir sur la pédagogie et en lui fournissant de nombreuses pistes qu'il pourra ensuite adopter pour son propre enseignement.

Olympiades

C. Festraets,

Toute correspondance concernant cette rubrique sera envoyée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

Voici les solutions des problèmes proposés à la finale de l'Olympiade Mathématique Belge 1995.

Mini 1

Déterminer tous les nombres naturels de quatre chiffres distincts (en écriture décimale) possédant les trois propriétés suivantes :

(a) La somme du nombre et du nombre "renversé" (par exemple, 123 *"renversé" donne* 321*) est* 7216*.*

(b) La somme des chiffres est 17*.*

(c) Le premier et le quatrième chiffre diffèrent de 4 *au plus.*

Solution.

Soient a, b, c, d les quatre chiffres du nombre.

$$\begin{aligned} \overline{abcd} &= 1000a + 100b + 10c + d \\ \overline{dcba} &= 1000d + 100c + 10b + a \\ \overline{abcd} + \overline{dbca} &= 1001a + 1001d + 110b + 110c \\ &= 11(91(a+d) + 10(b+c)) \\ &= 7216 \end{aligned}$$

d'où

$$91(a+d) + 10(b+c) = 656. \tag{1}$$

D'autre part, $a + b + c + d = 17$

$$b + c = 17 - (a+d). \tag{2}$$

De (1) et (2), il vient

$$91(a+d) + 170 - 10(a+d) = 656$$

et on obtient $a + d = 6$ et $b + c = 11$.

Les quatre chiffres a, b, c, d sont différents et $|a-d| \leqslant 4$.

Si $a=5$, alors $d=1$, et on a les possibilités

$$\begin{array}{lll} b=2 \text{ et } c=9 & \text{ou} & b=9 \text{ et } c=2 \\ b=3 \text{ et } c=8 & \text{ou} & b=8 \text{ et } c=3 \\ b=4 \text{ et } c=7 & \text{ou} & b=7 \text{ et } c=4. \end{array}$$

De même pour $a=1$ et $d=5$.

Si $a=4$, alors $d=2$, et on a les possibilités

$$\begin{array}{lll} b=3 \text{ et } c=8 & \text{ou} & b=8 \text{ et } c=3 \\ b=5 \text{ et } c=6 & \text{ou} & b=6 \text{ et } c=5. \end{array}$$

De même pour $a=2$ et $d=4$.

D'où les nombres :
5291, 5921, 5381, 5831, 5471, 5741, 1295, 1925, 1385, 1835, 1475, 1745, 4382, 4832, 4562, 4652, 2384, 2834, 2564, 2654.

Mini 2 (a) et Maxi 1 (a) et (b)

(a) Sur un cercle, ont été coloriés, de manière quelconque, 1995 points bleus et 1994 points rouges. Soit b le nombre de paires de points bleus voisins et r le nombre de paires de points rouges voisins. La différence $b-r$ a-t-elle toujours la même valeur, quelle que soit la disposition des points coloriés ? Si oui, quelle est cette valeur ?

(b) Généraliser au cas de B points bleus et R points rouges.

Solution.

(a) Dans les petits dessins qui suivent, les points bleus et rouges sont représentés respectivement par un point et par une croix.

Parcourons le cercle dans le sens horlogique en partant d'un point donné et faisons un tour complet. Puisqu'il y a 1995 points bleus, on rencontre 1995 arcs de type $\bullet\frown\bullet$ ou de type $\bullet\frown\times$. Or il y a b arcs de type $\bullet\frown\bullet$ par hypothèse, donc il y a $1995-b$ arcs de type $\bullet\frown\times$.

Parcourons le cercle dans le sens anti-horlogique. Il y a 1994 points rouges et on rencontre r arcs de type $\times\frown\times$ et donc $1994-r$ arcs de type $\times\frown\bullet$.

Le nombre d'arcs $\bullet\frown\times$ (sens horlogique) est évidemment le même que le nombre d'arcs $\times\frown\bullet$ (sens anti-horlogique), d'où

$$1995-b=1994-r$$

et

$$b - r = 1.$$

(b) Dans le cas où il y a B points bleus et R points rouges, le même raisonnement nous donne

$$B - b = R - r$$

et

$$b - r = B - R.$$

Mini 3

Un carreleur dispose de dalles ayant la forme d'un trapèze qui est la moitié d'un hexagone régulier de 1*m de côté. En utilisant de telles dalles, non retaillées, est-il possible de paver sans lacune ni chevauchement*

(a) un hall hexagonal régulier de 4*m de côté ?*

(b) une place hexagonale régulière de 100*m de côté ?*

(c) une place hexagonale régulière dont le côté mesure un nombre entier quelconque de mètres ?

Maxi 3

A l'aide de trapèzes qui sont des moitiés d'hexagones réguliers de côté 1*, est-il possible de payer (c'est-à-dire de recouvrir, sans lacune ni chevauchement)*

(a) un triangle équilatéral de côté entier ?

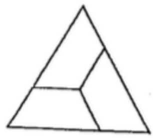
(b) un hexagone régulier de côté entier ?

Solution.

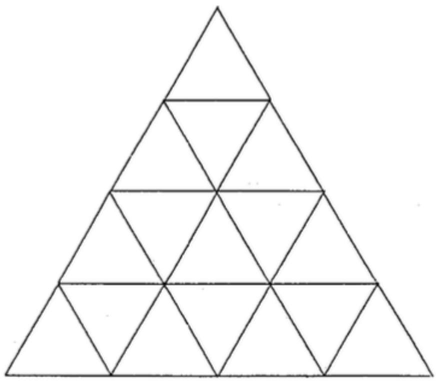
Nous désignerons les trapèzes, moitiés d'hexagones réguliers de côté 1, par T.

(a) Prenons l'aire du triangle équilatéral de côté 1 comme unité d'aire. L'aire de T est 3 et l'aire d'un triangle équilatéral de côté n est n^2. Donc, pour que ce triangle puisse être pavé par T, il faut que n^2 soit multiple de 3, donc que n soit multiple de 3.

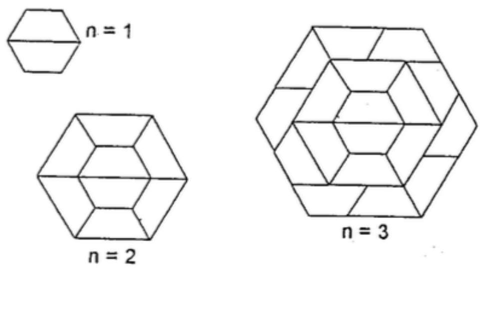
Le triangle équilatéral de côté 3 peut être pavé par T :



et tout triangle équilatéral de côté $3n$ peut être pavé par n triangles équilatéraux de côté 3, donc par $3n$ trapèzes T :

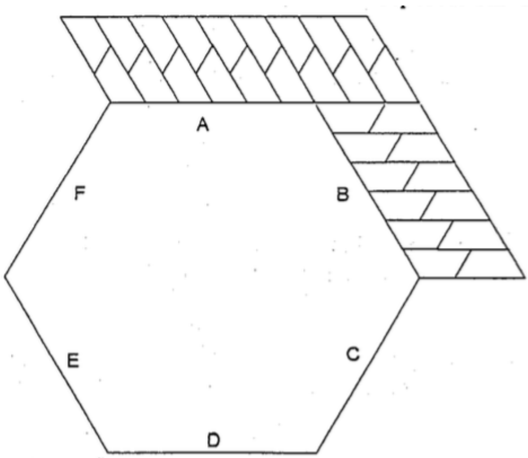


(b) Les hexagones de côté 1, 2 ou 3 peuvent être pavés par T

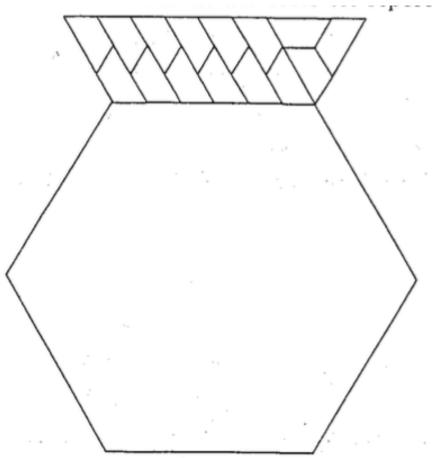


Si un hexagone de côté n peut être pavé, alors un hexagone de côté $n+3$ peut être pavé par T. Voici deux manières de procéder (il y en a bien d'autres)

1) la figure pavée construite sur les côtés A et B est reportée sur C et D et sur E et F.



2) La figure pavée construire sur un des côtés est reportée sur chacun des autres côtés.

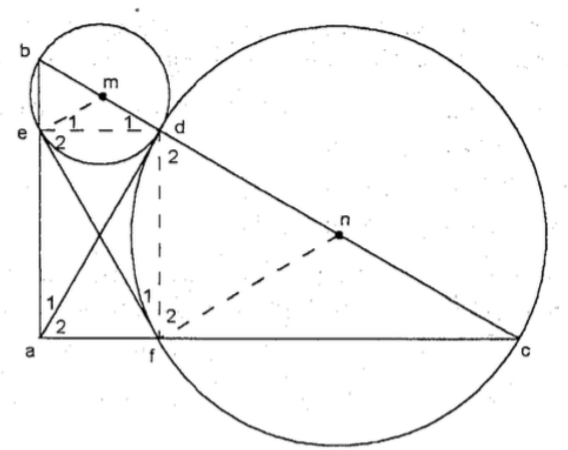


On peut conclure que tout hexagone peut être pavé au moyen de trapèzes T.

Mini 4

Dans un triangle abc, rectangle en a, soit d le pied de la hauteur perpendiculaire à l'hypoténuse $[bc]$. *On trace le cercle de diamètre* $[bd]$, *qui recoupe* *[ab] en e, et le cercle de diamètre [cd], qui recoupe [ac] en f. Démontrer que la droite ef est tangente à ces deux cercles.*

Solution.



$\widehat{bed}$ et $\widehat{dfc}$ sont des angles droits car inscrits chacun dans un demi-cercle.

Tous les angles marqués “1” sur la figure sont égaux à $\hat{c}$:
$\hat{d}_1 = \hat{c}$ car les triangles rectangles *bed* et *bac* sont semblables.
$\hat{d}_1 = \hat{e}_1$ car le triangle *emd* est isocèle.
$\hat{a}_1 = \hat{c}$ car les triangles rectangles *bda* et *bac* sont semblables.
$\hat{a}_1 = \hat{f}_1$ car *aedf* est un rectangle.

De même, tous les angles marqués “2” sont égaux à $\hat{b}$. D'où

$$\hat{e}_1 + \hat{e}_2 = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 = \hat{c} + \hat{b} = 90°$$

ef est perpendiculaire au rayon em du cercle de centre m et au rayon fn du cercle de centre n, donc ef est une tangente commune aux deux cercles.

Maxi 2

On considère l'ensemble de neuf chiffres $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Pour un choix de quatre chiffres distincts parmi ceux-ci, on considère la somme S des nombres obtenus en permutant ces quatre chiffres de toutes les manières possibles. Soit M le nombre de choix de quatre chiffres distincts pour lesquelles* *la somme S n'est divisible par aucun carré autre que 1, et N le nombre total de choix de quatre chiffres distincts. Que vaut le rapport M/N ?*

Solution.

Soient a, b, c, d les quatre chiffres choisis.

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$$

Il y a 24 permutations de (a, b, c, d) et chacun des 4 chiffres y figure 6 fois à la même place, donc la somme de ces 24 nombres est égale à

$$\begin{aligned} S &= 6000(a+b+c+d) + 600(a+b+c+d) + 60(a+b+c+d) \\ &\quad +6(a+b+c+d) \\ &= 6666(a+b+c+d) \\ &= 2.3.11.101(a+b+c+d) \end{aligned}$$

S ne peut être multiple d'aucun carré autre que 1, donc $a+b+c+d$ ne peut être un carré, ni être multiple de 2, de 3, de 11 ou de 101.

De plus,

$$1+2+3+4 = 10 \leqslant a+b+c+d \leqslant 6+7+8+9 = 30.$$

Dès lors, $a+b+c+d \in \{13, 17, 19, 23, 29\}$

$$\begin{aligned} 13 &= 1+2+3+7 \\ &= 1+2+4+6 \\ &= 1+3+4+5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 17 &= 1+2+5+9 \\ &= 1+2+6+8 \\ &= 1+3+4+9 \\ &= 1+3+5+8 \\ &= 1+3+6+7 \\ &= 1+4+5+7 \\ &= 2+3+4+8 \\ &= 2+3+5+7 \\ &= 2+4+5+6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
19 &= 1+2+7+9 & 23 &= 1+5+8+9 \\
&= 1+3+6+9 & &= 1+6+7+9 \\
&= 1+3+7+8 & &= 2+4+8+9 \\
&= 1+4+5+9 & &= 2+5+7+9 \\
&= 1+4+6+8 & &= 2+6+7+8 \\
&= 1+5+6+7 & &= 3+4+7+9 \\
&= 2+3+5+9 & &= 3+5+6+9 \\
&= 2+3+6+8 & &= 3+5+7+8 \\
&= 2+4+5+8 & &= 4+5+6+8 \\
&= 2+4+6+7 & & \\
&= 3+4+5+7 & 29 &= 5+7+8+9
\end{aligned}$$

D'où $N = 3+9+11+9+1 = 33$.

Le nombre total de choix de 4 chiffres distincts est

$$M = \binom{9}{4} = 126,$$

ce qui donne

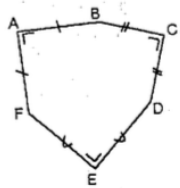
$$\frac{M}{N} = \frac{33}{126} = \frac{11}{42}.$$

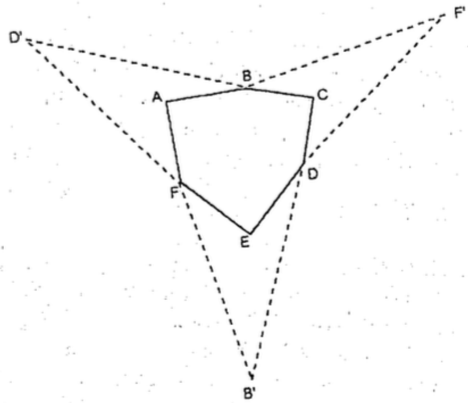
Maxi 4

Blaise a d'abord construit un hexagone convexe qui possède trois angles droits non adjacents, les deux côtés adjacents à chacun de ces angles droits étant de même longueur. Il construit ensuite un second hexagone en remplaçant chaque sommet d'angle droit par le symétrique, par rapport à ce sommet d'angle droit, du sommet opposé de l'hexagone ; les trois autres sommets sont inchangés. Blaise constate que les côtés de son hexagone sont deux à deux perpendiculaires. Est-ce un hasard ?

Solution.

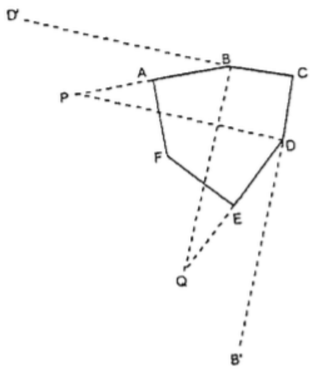
Soit $ABCDEF$ le premier pentagone et $BF'DB'FD'$ le second où B', D', F' sont respectivement les symétriques de B par rapport à E, de D par rapport à A et de F par rapport à C





Démontrons d'abord que $BD' \perp DB'$.

La rotation de centre A et d'angle 180° applique B sur P et D' sur D ; BD' est parallèle à son image PD. La rotation de centre E et d'angle 180° applique D sur Q et B' sur B ; DB' est parallèle à son image QB



Il suffit alors de démontrer que $PD \perp BQ$. PFB est un triangle rectangle en F car $FA \perp PB$ et $|PA| = |AB| = |AF|$. De même, DFE est un triangle rectangle en F. La rotation de centre F et d'angle $+90°$ applique P sur B et D sur Q, donc PD est appliqué sur BQ et on a bien $PD \perp BQ$.

On démontre de même que $BF' \perp B'F$ et que $FD' \perp F'D$.

* * *

Vous avez pu lire quelques échos de l'Olympiade Mathématique Internationale 95 dans le SBPM-Infor du mois d'octobre. Voici les questions qui ont été proposées aux candidats. Celles du premier jour ne m'ont pas semblé trop difficiles, par contre, j'ai trouvé le problème 6 plutôt coriace. Je vous laisse au plaisir de la réflexion et de la recherche.

<u>Premier jour : 19 juillet 1995</u>

1. A, B, C et D sont, dans cet ordre, quatre points distincts d'une même droite. Les cercles de diamètre AC et BD se coupent aux points X et Y. La droite XY rencontre la droite BC au point Z. Soit P un point de la droite XY, distinct de Z. La droite CP rencontre le cercle de diamètre AC aux points C et M et la droite BP rencontre le cercle de diamètre BD aux points B et N. Montrer que les droites AM, DN et XY sont concourantes.
2. Soient a, b et c des nombres réels positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer :
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$
3. Trouver tous les entiers n, strictement supérieurs à 3, pour lesquels il existe n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ du plan et des nombres réels $r_1, r_2, \ldots, r_n$ vérifiant les deux conditions :
(i) trois quelconques des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ne sont pas alignés ;
(ii) pour tout triplet i, j, k $(1 \leqslant i < j < k \leqslant n)$ l'aire du triangle $A_iA_jA_k$ a pour valeur $r_i + r_j + r_k$.

<u>Deuxième jour : 20 juillet 1995</u>

4. Trouver la plus grande valeur de x_0 pour laquelle il existe une suite $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ de nombres réels strictement positifs vérifiant les deux conditions :
(i) $x_0 = x_{1995}$;
(ii) pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant 1995$: $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$.

5. Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que :

$$\begin{aligned} AB &= BC = CD, \\ DE &= EF = FA, \\ \widehat{BCD} &= \widehat{EFA} = 60^\circ. \end{aligned}$$

   et
   soient G et H deux points intérieurs à l'hexagone tels que $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^\circ$. Montrer que :

$$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF.$$

6. Soit p un nombre premier impair. Trouver le nombre de sous-ensembles A de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ tels que :
   (i) A contient exactement p éléments ;
   (ii) la somme de tous les éléments de A est divisible par p.

Revue des revues

M. Fremal,

Bulletin de l'APMEP (France) *N*°397 février 1995.

Au sommaire, nous relevons

- L'éditorial de J.F. Noël.
- Des comptes rendus de conférences données lors des journées Nationales 1994 à Brest et à Loctudy dont le texte de la conférence donnée par Nicolas Rouche et sous-titrée "Du savoir à l'élève ou de l'élève au savoir" ! ainsi qu'un texte sur la démonstration, avec la question "aura-t-elle encore une place dans l'enseignement des mathématiques !" On y trouve des interventions de E. Barbin, M. Chomette, J. Houdebine et R. Duval.
- Un texte sur le théorème de Robbins sur la forte-connexité pour Peter Greenberg et Martin Loebl.
- Deux exemples de travaux pratiques pour les premières et terminales scientifiques, l'un portant sur le cercle des huit points d'un quadrilatère à diagonales perpendiculaires et l'autre sur les circuits logiques, par Danièle Duverney.
- Un texte sur l'utilisation parfois (souvent ?) abusive de si et seulement si par Etienne Gille.
- Un exposé d'un projet Stimul dans un lycée par Mme Masson et Mr Grand.
  Les objectifs de ce projet sont
  a) d'aider l'élève à surmonter ses difficultés en évitant de le laisser se décourager
  b) de pratiquer une pédagogie de l'erreur
  c) de faire prendre des habitudes de travail
  d) de rendre les connaissances plus solides.
- Des considérations sur les activités mathématiques périscolaires par Dominique Roux dans lequel l'auteur montre l'intérêt que peuvent revêtir les clubs, revues et compétitions se situant à la périphérie de l'enseignement.
  Cette livraison du bulletin comporte en outre les rubriques habituelles
  - Mots flous
  - Matériaux pour une documentation
  - Nouvelles brèves
  - Avis de recherche

- Les problèmes de l'APMEP
- La vie de l'association

Claude Villers.

Bulletin de l'APMEP (France) *N*°398 avril-mai 1995.

Au sommaire :

— L'*Editorial* du Président Jean-François Noël qui y plaide pour une dotation horaire suffisante pour les cours de Mathématiques car aussi nécessaire pour pouvoir apprendre aux élèves à devenir imaginatifs, créatifs et critiques.
Inutile de dire que ces soucis de nos Collègues de France sont aussi les nôtres en Belgique francophone.

— Une présentation des temps forts des prochaines journées de l'APMEP, à Grenoble, fin octobre 1995.

— *Une approche dynamique de la biologie marine* par Alain Ménesguen. Ce texte d'un exposé aux journées de Loctudy en 1994, a pour objectif de montrer, à travers différents exemples, quelques-uns des outils mathématiques utilisés actuellement par les biologistes océanographes (25 pages A5).

— *Quelques problèmes pédagogiques posés par l'utilisation des outils informatiques* par J.P. Sorribas.
L'auteur y aborde (11 pages A5) quelques problèmes suscités par l'utilisation pédagogique des calculatrices et ordinateurs. Il y dresse un état des lieux succinct, la nature des outils et y aborde quelques-uns des principaux problèmes comme la spécificité des calculatrices, l'intégration de l'outil dans la démarche pédagogique (moyen d'exploitation, moyen de contrôle), la validité des informations obtenues. (Tout cela étant accompagné d'exemples).

— La rubique *Examens et concours* avec
  — Un court article de Philippe Bardy : “Passe par le Bac d'abord”.
  — “Une autre version” par Inès Ladirez.
  — Une analyse des sujets du Baccalauréat 1994 par Jean Caprasse. Une fois de plus, je dois regretter l'absence des énoncés qui rend totalement incompréhensibles les jugements portés à leur sujet.

Les rubriques habituelles

— *Histoire des mathématiques*, rubrique dans laquelle 4 auteurs écrivent de façon assez critique au sujet du livre “Histoire Universelle des Chiffres” de Georges Ifrah.

— *Matériaux pour une documentation.*

— *Avis de recherche*, rubrique dans laquelle les lecteurs peuvent poser des questions de tout ordre.
— *Nouvelles brèves.*
— *Les problèmes de l'APMEP.*
— *La vie de l'Association.*

Bulletin de l'APMEP (France) *N*°399 juin 1995.

Cette livraison comporte
— L'*Editorial* de Jean-François Noël (Président) qui, inlassablement et à très juste titre, plaide pour le rôle capital joué par les mathématiques dans la formation de l'homme et du citoyen.
— Une présentation détaillée des Journées Nationales 1995 à Grenoble (46 pages A5).
— Un article sur la réforme des classes préparatoires aux Grandes Ecoles (11 pages A5).
— Deux articles au sujet des Examens et Concours, qui portent tous les deux sur l'"Agrégation interne".

Les rubriques habituelles sont
— *Histoire des Mathématiques* dans laquelle deux auteurs complètent les appréciations critiques du livre de G. Ifrah.
— *Nouvelles brèves.*
— *Matériaux pour une documentation.*
— *Avis de recherche.*
— *Les problèmes de l'APMEP.*
— *La vie de l'Association.*

Claude VILLERS

Math-Ecole (revue suisse), *n*°163- juin 1994.

Au sommaire :
- **François Jaquet**, *Editorial : les maths modernes à nouveau à la une.*
- *Mathématiques 93 - Rapport final*
  Cet article présente de larges extraits du rapport final du Colloque romand Mathématiques 93 qui s'est tenu à La Chaux-de-Fonds les 18 et 19 novembre 1993.
  a) *les travaux de groupes*
  La commission des colloques avait défini huit thèmes :
  - l'appréciation du travail des élèves en situation ouverte,
  - le rôle du maître en situation de recherche,

- des chiffres et des lettres ou déchiffrer des lettres,
- "une fonction dans tous ses états...découverte par une classe... dans tous ses états",
- l'erreur, témoignage d'une ignorance OU d'un savoir ?
- différenciation de l'enseignement : un essai de pratique immédiate en calcul littéral,
- activités en laboratoire de mathématiques,
- la résolution de problèmes.

Chaque groupe a travaillé sur un de ces thèmes. Avant le colloque, les participants avaient conduit des activités dans leurs classes, ces pratiques communes ont été discutées dans le cadre de la réflexion scientifique actuelle sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

b) *les ateliers*

c) *la conférence interactive de Marc Legrand*

Plusieurs questions ont été posées à l'occasion de cette conférence :

1. qu'est-ce qu'un savoir scientifique ?
2. pourquoi subit-il une perte de sens lors de sa transposition en savoir scolaire ?
3. qu'est-il vraiment important d'enseigner ?

d) *les différents thèmes :*

1. la place de l'enseignement des mathématiques dans l'école obligatoire, programmes et objectifs,
2. l'évaluation des connaissances et des aptitudes de l'élève,
3. la problématique des moyens d'enseignement en Suisse romande pour le secondaire I,
4. la formation des maîtres, contenus et modalités,
5. la cohérence et la continuité du primaire au secondaire I, puis au secondaire II,
6. la différenciation dans l'enseignement des mathématiques, inventaire des pratiques cantonales et perspectives d'avenir,
7. la place de la recherche en didactique en Suisse romande.

e) *la table ronde*

Les trois questions suivantes ont été débattues :

1. pourquoi les situations-problèmes ont-elles tant de peine à faire leur place dans l'enseignement des mathématiques ? Comment vaincre les obstacles ?

2. la formation des maîtres de mathématiques est-elle suffisante ? La réflexion sur la didactique des mathématiques peut-elle faire l'économie d'un approfondissement de la discipline ?

3. le maître de mathématiques est-il victime ou complice de l'institution ?

Parallèlement au Colloque, une semaine de "portes ouvertes" était organisée, elle avait pour objectif de changer l'image des mathématiques et de leur enseignement.
Les grandes problématiques de l'avenir apparues au cours de ce colloque sont : la formation des maîtres, l'évaluation, la création de moyens d'enseignement, l'application des plans d'études, l'harmonisation des structures scolaires, l'animation et la valorisation des activités.

- **Michel Brêchet,** *La résolution de problèmes, compte rendu des travaux d'un groupe du Colloque romand Mathématiques 93*
  L'activité de résolution de problèmes est porteuse de sens pour les élèves. "...En résolvant des problèmes, les élèves mobilisent et forgent les connaissances dont ils ont réellement besoin, inventent des stratégies et organisent leurs recherches ; toutes proportions gardées, ils se placent dans la position du chercheur en mathématiques. ..."
  Avant le colloque, les élèves avaient résolu des problèmes et rédigé un compte rendu de leur démarche. Les enseignants ont observé les élèves. Pendant le colloque, les travaux des élèves ont été analysés selon deux axes :

  1. étudier le comportement des élèves en résolution de prolèmes,

  2. développer chez les élèves l'aptitude à résoudre des problèmes.

  L'auteur présente une synthèse des travaux des élèves à propos de deux problèmes, le premier proposé à des élèves de quatorze ans, le second soumis à des élèves de douze à treize ans.
  L'analyse des travaux des élèves, l'observation des élèves en situation de résolution de problèmes permettent à l'enseignant :
  - "de mieux percevoir leurs conceptions à propos de certaines notions mathématiques ;
  - d'adapter ses méthodes d'enseignement ;
  - de mettre en place des activités de remédiation réellement efficaces."
- *Neuvième Championnat international de France des jeux mathématiques et logiques*

L'article propose les énoncés des problèmes posés à la demi-finale du 19 mars 1994 (catégories CM - C1 - C2).

- **Dominique Huguenin et Yves Chédel,** *Le Grec*
  Le Grec est un jeu aux règles simples et aux parties courtes. Il se joue à deux sur un damier de seize cases avec sept pions blancs et sept pions noirs. L'auteur propose un exemple de partie.
- La revue des revues
- Notes de lecture
  Se former pour enseigner les mathématiques, Dubois C., Fenichel M., Pauvert M., Collection Formation des enseignants, Armand Colin, Paris, 1993.
  Les ouvrages de la Commission romande de mathématique.
  Méthodes numériques, Bachmann M.-Y., Cattin H., Epiney P., Haeberli F., Jenny G., Editions du Tricorne, Genève, 1992.
- *Réponses aux problèmes du numéro 161*

Des problèmes et des jeux

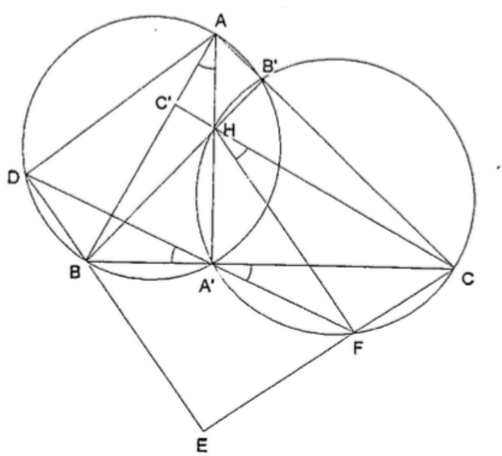
C. Festraets,

Toute correspondance concernant cette rubrique sera envoyée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

$\boxed{\text{Points alignés}}$ problème $n°$ 160 de M. et P. $n°$ 101

Si, par les sommets B et C d'un triangle ABC, on mène deux droites rectangulaires quelconques, qu'on abaisse du sommet A une perpendiculaire sur une de ces droites, de l'orthocentre H une perpendiculaire sur l'autre, les pieds de ces deux perpendiculaires sont en ligne droite avec le pied de la hauteur issue de A.

Solution de A. LAFORT de Montignies-sur-Sambre



1°) Cas particuliers qui rendent la proposition évidente.

Si $\hat{B}$ est droit : $H = B$, $A' = B$, $F = E$.

Si $\hat{C}$ est droit : $H = C$, $A' = C$, $F = C$.

Si $\hat{A}$ est droit et $DE//AC$: $H = A$, $D = B$, $F = C$.

2°) Autres cas

Traçons le cercle de diamètre AB. Il passe par D, par A' et par B' car $\widehat{ADB} = \widehat{AA'B} = \widehat{AB'B} = 90°$ (B' peut être confondu avec A si $\hat{A}$ est droit).

On observe que $\widehat{DA'B} = \widehat{DAB}$ comme angles inscrits interceptant le même arc.

Traçons le cercle de diamètre HC. Il passe par A', par F et par B' car $\widehat{HA'C} = \widehat{HFC} = \widehat{HB'C} = 90°$ (B' peut être confondu avec H si $\hat{A}$ est droit).

On observe que $\widehat{CA'F} = \widehat{CHF}$ comme angles inscrits interceptant le même arc.

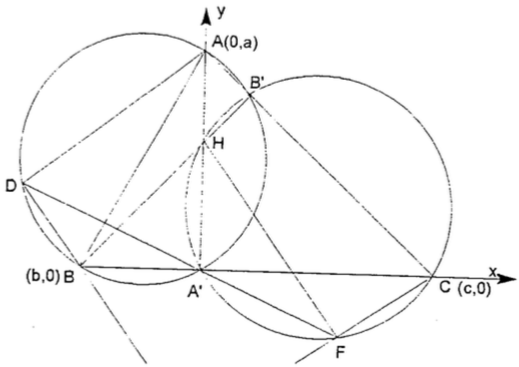
D'autre part, $\widehat{DAB} = \widehat{FHC}$ comme angles à côtés perpendiculaires.

Donc $\widehat{DA'B} = \widehat{DAB} = \widehat{CHF} = \widehat{CA'F}$ et $\widehat{DA'B}$ étant égal à $\widehat{CA'F}$, D, A' et F sont alignés puisque B, A' et C le sont.

Commentaire :

Comme le fait très justement remarquer B. LOISEAU de Mouscron (qui m'envoye trois démonstrations différentes dont une similaire à celle figurant ci-dessus), cette démonstration n'est pas pleinement satisfaisante car elle n'est valable que dans certains cas de figures. Ici, A' est entre D et F ; dès que l'ordre des trois points D, A', F est modifié (par exemple lorsque B est obtus, lorsque E est dans l'autre demi-plan déterminé par $BC, \ldots$), les angles cités ci-dessus ne sont pas nécessairement égaux, certains peuvent être supplémentaires. Pour être complet, il faudrait refaire une démonstration (analogue sans doute) dans chacun des cas.

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek.



Référons la figure à un système d'axes rectangulaires. Les équations des hauteurs AA' et BB' sont respectivement $x = 0$ et $y = \frac{c}{a}(x - b)$.

L'orthocentre H a donc la coordonnée $(0, \frac{-bc}{a})$.

Soit μ et $\frac{-1}{\mu}$ les coefficients angulaires des deux droites rectangulaires issues respectivement de B et de C.

Le système

$$\begin{cases} y = \mu(x - b) \\ y - a = -\frac{1}{\mu}x \end{cases}$$

nous fournit la coordonnée $(\frac{\mu(a+b\mu)}{1+\mu^2}, \frac{\mu(a\mu-b)}{1+\mu^2})$ du point D.

Le système

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{\mu}(x - c) \\ y + \frac{bc}{a} = \mu x \end{cases}$$

nous fournit la coordonnée $(\frac{c(a+b\mu)}{a(1+\mu^2)}, \frac{c(a\mu-b)}{a(1+\mu^2)})$ du point F.

Les points D, F et A' sont alignés si le déterminant suivant s'annule

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mu(a+b\mu)}{1+\mu^2} & \dfrac{\mu(a\mu-b)}{1+\mu^2} & 1 \\ \\ \dfrac{c(a+b\mu)}{a(1+\mu^2)} & \dfrac{c(a\mu-b)}{a(1+\mu^2)} & 1 \\ \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ce qui se vérifie très facilement.

Solution de G. ROBERT de Namur (qui a proposé ce problème)

1. Lemme : *toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle passent par l'orthocentre.*

Les coefficients de l'équation d'une hyperbole équilatère passant par 4 points donnés résultent d'un système de quatre équations linéaires. Si ce système est déterminé, il y a une solution ; s'il ne l'est pas, il y en a une infinité.

Or, chaque côté du triangle joint à la hauteur correspondante constitue une hyperbole équilatère dégénérée passant par les trois sommets et l'orthocentre. Par suite, en vertu de la remarque précédente, il y aura une infinité d'hyperboles équilatères passant par ces quatre points.

2. Il ressort de ce théorème que les trois sommets d'un triangle, l'orthocentre et les points à l'infini dans deux directions rectangulaires quelconques sont six points d'une même conique.

Numérotons ces points de 1 à 6 :

$$\begin{aligned}
1 &= B\\
2 &= C\\
3 &= \text{point à l'infini de } CE\\
4 &= A\\
5 &= H\\
6 &= \text{point à l'infini de } BE.
\end{aligned}$$

Les droites 12 et 45 se coupent en A', les droites 23 et 56 se coupent en F, les droites 34 et 61 se coupent en D et, en vertu du théorème de Pascal, les points A', F et D sont alignés.

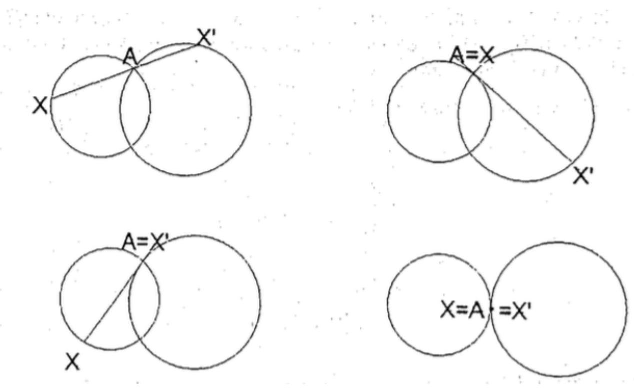
Solution de B. LOISEAU de Mouscron

Définissons d'abord les notions utilisées dans cette démonstration.

Soit C et C' deux cercles avec un point commun A. On appelle "perspectivité" de centre A appliquant C sur C' la fonction $p_A : C \to C' : X \mapsto X'$

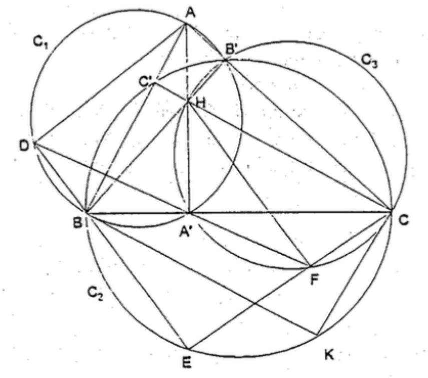
telle que

$$\begin{cases} X' \text{ est la 2de intersection de } C' \text{ avec } XA \text{ si } X \neq A \\ \qquad \text{et } XA \text{ non tangente à } C' \,; \\ X' = A \text{ si } XA \text{ est tangente à } C' \,; \\ X' \text{ est la 2de intersection de } C' \text{ avec la tangente à } C \text{ en } A \\ \qquad \text{si } X = A \text{ et si } C \text{ et } C' \text{ ne sont pas tangents}\,; \\ X' = A \text{ si } X = A \text{ et si } C \text{ et } C' \text{ sont tangents en } A. \end{cases}$$



Toute composée de telles perspectivités sera appelée “projectivité d’un cercle sur un autre”.

On démontre facilement que
1) toute perspectivité est bijective
2) toute projectivité est déterminée par trois couples distincts (cette démonstration, tout-à-fait classique, utilise le fait qu’une projectivité conserve le rapport anharmonique de quatre points d’un cercle).



La tangente en B à C_1 est perpendiculaire à AB et la tangente en C à C_3 est perpendiculaire à HC. Or $AB \perp HC$, donc ces deux tangentes sont perpendiculaires et, comme [BC] est un diamètre de C_2, ces deux tangentes se coupent sur C_2 en K.

La perspectivité $p_B : C_1 \to C_2$ applique

$$\begin{array}{lll} D & \text{sur} & E \\ A & \text{sur} & C' \\ B' & \text{sur} & B' \\ B & \text{sur} & K \text{ (car } BK \text{ est tangente à } C_1). \end{array}$$

La perspectivité $p_B : C_2 \to C_3$ applique

$$\begin{array}{rll} E & \text{sur} & F \\ C' & \text{sur} & H \\ B' & \text{sur} & B' \\ K & \text{sur} & C \text{ (car } KC \text{ est tangente à } C_3). \end{array}$$

Donc la projectivité $p_C \circ p_B$ applique

$$\begin{array}{rll} D & \text{sur} & F \\ A & \text{sur} & H \\ B' & \text{sur} & B' \\ B & \text{sur} & C. \end{array}$$

D'autre part, la perspectivité $p_A : C_1 \to C_3$ applique aussi

$$\begin{array}{ccc} A & sur & H \\ B' & sur & B' \\ B & sur & C. \end{array}$$

$p_C \circ p_B$ et p_A ont trois couples communs, donc $p_C \circ p_B = p_A$ et p_A applique D sur F, ce qui signifie que les points A, D, F sont alignés.

J. JANSSEN de Lambermont, M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles et C. VILLERS ont également envoyé des solutions de ce problème.

$\boxed{\text{Des cosinus (bis)}}$ problème $n°161$ de M. et P. $n°$ 101

Soient α, β, γ les angles d'un triangle acutangle. Démontrer que

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{2} + \sqrt{2}.$$

Solution de H.-J. SEIFFERT de Berlin

Fixons β, $\beta \in [\circ, \frac{\pi}{2}]$
et considérons la fonction $f : [\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

En dérivant deux fois successivement, on obtient

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= -\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ &\quad -\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) \\ f''(\alpha) &= \frac{1}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin(\alpha + \frac{\beta}{2}) \\ &= -\frac{1}{4}\left[\cos\frac{\beta}{2}(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}) + \sin(\alpha + \frac{\beta}{2})\right] \end{aligned}$$

Dans l'intervalle considéré, $f''(\alpha) < 0$, ce qui prouve que f est strictement concave. De sorte que

$$f(\alpha) \geqslant \min\left(f\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \tag{1}$$

pour $\frac{\pi}{2}-\beta \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$,
et on a l'inégalité stricte pour $\frac{\pi}{2}-\beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

En utilisant des identités trigonométriques bien connues, on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)+\cos\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

et comme $-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}-\beta \leqslant \frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{8} \leqslant \frac{\pi}{8}-\frac{\beta}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$, il vient

$$f\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \geqslant \cos\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\frac{1+\sqrt{2}/2}{2} = \frac{1}{2}+\sqrt{2} \tag{2}$$

avec égalité ssi $\beta \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$.

De manière similaire, on montre que

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}+\sqrt{2} \tag{3}$$

avec égalité ssi $\beta \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$.

De (1), (2) et (3), nous obtenons $f(\alpha) \geqslant \frac{1}{2}+\sqrt{2}$. En remplaçant $\alpha+\beta$ par $\pi-\gamma$ et en utilisant l'hypothèse que les angles α, β, γ sont aigus, on obtient bien

$$\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{2}+\sqrt{2}.$$

Bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek, A. LAFORT de Montignies-sur-Sambre et B. LOISEAU de Mouscron.

$\boxed{\text{Un cube et deux carrés}}$ problème n° 162 de M. et P. n° 101

x, y, z étant des entiers strictement positifs, résoudre l'équation $x^2+y^3=z^2$.

Solutions (inspirées par celles) de B. LOISEAU de Mouscron.

Solution 1

$$\begin{cases} x = \frac{m-n}{2} \\ y = k \\ z = \frac{m+n}{2} \\ \text{avec } k, m, n > 0, m.n = k^3, m > n, m \text{ et } n \text{ de même parité.} \end{cases}$$

En effet,

1) en remplaçant x, y, z par ces valeurs dans l'équation

$$y^3 = (z+x)(z-x) \tag{1}$$

on obtient

$$\begin{aligned} k^3 &= \frac{1}{2}(m+n+m-n)\frac{1}{2}(m+n-m+n) \\ &= mn \end{aligned}$$

2) si (x, k, z) est une solution de l'équation (1), on a

$$k^3 = (z+x)(z-x)$$

et en posant

$$\begin{cases} z + x = m \\ z - x = n \end{cases}$$

on trouve bien $z = \frac{1}{2}(m+n)$ et $x = \frac{1}{2}(m-n)$.

Les conditions sur k, m, n garantissent que x, y, z sont des entiers positifs non nuls.

Solution 2

$$\begin{cases} x = cd\frac{a^3c-b^3d}{2} \\ y = abcd \\ z = cd\frac{a^3c+b^3d}{2} \\ \text{avec } a, b, c, d > 0,\ a^3c > b^3d,\ a^3c \text{ et } b^3d \text{ de même parité} \end{cases}$$

En effet,

1) en remplaçant dans l'équation (1), on a

$$(abcd)^3 = cd\left(\frac{a^3c+b^3d}{2} + \frac{a^3c-b^3d}{2}\right) cd\left(\frac{a^3c+b^3d}{2} - \frac{a^3c-b^3d}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= cda^3ccdb^3d \\
&= a^3b^3c^3d^3.
\end{aligned}
$$

2) si (x, y, z) est une solution de léquation (1), alors tout diviseur premier de y divise $z+x$ ou/et $z-x$ et tout diviseur premier de $z+x$ (ou de $z-x$) divise y. On peut décomposer y en un produit de quatre facteurs a, b, c, d tels que
a divise $z+x$ mais pas $z-x$, donc a^3 divise $z+x$
b divise $z-x$ mais pas $z+x$, donc b^3 divise $z-x$
c et d divisent à la fois $z+x$ et $z-x$

c^2 divise $z+x$ mais pas $z-x$
d^2 divise $z-x$ mais pas $z+x$

Ceci donne

$$
\begin{cases} z+x = a^3c^2d \\ z-x = b^3cd^2 \end{cases}
$$

d'où $x = \frac{1}{2}cd(a^3c - b^3d)$ et $z = \frac{1}{2}cd(a^3c + b^3d)$.

J'ai reçu de bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek et de A. LAFORT de Montignies-sur-Sambre, une solution très fouillée mais pas tout à fait complète de J. JANSSEN de Lambermont et des solutions partielles de A. PATERNOTTRE de Boussu, J. RONDOU de Heverlee, M. VERHEYLEWGHEN de Bruxelles qui obtiennent un ensemble particulier de solutions.

169. $\boxed{\text{Quels calculs !}}$

Trouver la somme des 50èmes puissances de tous les côtés et toutes les diagonales d'un 100-gone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.

170. $\boxed{\text{Pas le premier venu}}$

Déterminer tous les nombres premiers p tels que la somme de tous les diviseurs (entiers, positifs) de p^4 soit un carré parfait.

171. $\boxed{\text{Hauteurs ?}}$

Dans un triangle ABC, les céviennes AD, BE, CF se coupent en O. On sait que les points F, B, C, E sont concycliques et que les points A, F, D, C sont concycliques. Démontrer que O est l'orthocentre du triangle ABC.