

Mathématique et Pédagogie

Sommaire

- *G. Noël, Éditorial* 2
- *G. Noël, Suggestions concernant l'enseignement de la mathématique aux deuxième et troisième degrés de l'enseignement secondaire* 4
- *C. Villers, La créativité en mathématique ! Est-ce possible ?* 28
- *H. Dujacquier, Réflexions sur les propriétés des racines d'une fonction polynôme à partir des dérivées* 44
- *D. Justens, Approche polynomiale de la fonction coût total de production* 50
- *J. Bair et G. Haesbroeck, Variations autour de la définition des fonctions convexes - 1ère partie* 56
- *G. Hansen, La base de la fonction exponentielle* 71
- *C. Festraets, Des problèmes et des jeux* 74
- *C. Festraets, Olympiades* 83
- *M. Fremal, Revue des revues* 90

Éditorial

G. Noël,

EDITORIAL

Interdisciplinarité

Il n'est pas trop tard pour revenir sur le congrès tout à fait exceptionnel que la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* a tenu en 1995. Exceptionnel, il l'était *a priori* puisqu'il s'agissait d'un congrès conjoint avec le Congrès des Sciences, sur le thème de l'interdisciplinarité. Trois associations, la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*, l'ABPPC, (association des professeurs de physique et de chimie, et PROBIO, association des professeurs de biologie) avaient décidé de conjuguer leurs efforts pour réfléchir ensemble sur un thème d'intérêt commun.

Malgré les craintes que pouvait susciter la perspective d'une "cohabitation" entre associations ayant des habitudes différentes, tout s'est passé pour le mieux grâce à la bonne volonté de tous. Mieux encore, de nombreux participants au congrès ont exprimé le souhait que des contacts soient maintenus entre les associations, même s'ils ne prennent pas chaque année la forme d'un congrès conjoint. La réflexion entamée en août 1995 doit se poursuivre et s'approfondir. On me pardonnera, j'espère, de livrer ci-dessous quelques remarques très (trop) succinctes, que le manque de place d'un éditorial ne permet pas de développer.

Pratiquer l'interdisciplinarité, ce n'est pas seulement coordonner les programmes des diverses disciplines. Cette coordination est largement insuffisante à l'heure actuelle, elle peut être améliorée à peu de frais, mais elle ne débouche pas nécessairement sur l'interdisciplinarité.

Pratiquer l'interdisciplinarité, pour l'élève, c'est se comporter comme un chercheur qui débroussaille un terrain inconnu. Il s'agit pour lui de récolter des données, de se poser des problèmes à leur sujet, de faire des hypothèses, d'élaborer un modèle mathématique, de l'étudier, d'en tirer les conclusions, de déterminer les limites de validité du modèle. Eventuellement, le travail doit être répété et affiné plusieurs fois.

Pour le professeur de mathématique, pratiquer l'interdisciplinarité, ce n'est pas montrer qu'une théorie mathématique toute faite peut être plaquée sur une situation extérieure aux mathématiques, c'est plutôt faire surgir la théorie mathématique de la modélisation de la situation extérieure.

Certaines difficultés, certains inconvénients de l'interdisciplinarité sont visibles à l'œil nu. Beaucoup sont dûs à l'absence de pratique actuelle de cette méthode. Ils peuvent disparaître grâce à la réflexion des enseignants et à des activités de formation continuée. Il est des difficultés plus fondamentales, dues au caractère cloisonné des enseignements, au cadre scolaire qui apparaît souvent quelque peu étriqué. Un véritable enseignement interdisciplinaire sciences-mathématique ne peut être donné ni par le professeur de sciences, ni par le professeur de mathématique. Il doit être conçu et réalisé en équipe par les deux intéressés. Il doit avoir un objectif global, former les élèves à la méthode scientifique,

mais il ne peut pas pour autant négliger les objectifs particuliers de chaque discipline. En plus de sa compétence spécifique, chacun des enseignants doit apporter la sensibilité et la façon de voir les choses qui sont propres à son domaine.

Actuellement, les problèmes de gestion de l'enseignement détournent l'attention des problèmes pédagogiques. Ceux-ci n'en perdent pour autant ni leur intérêt, ni leur importance. A chacun d'y réfléchir. Et, dans l'immédiat, que cela ne m'empêche pas de vous présenter à tous et à toutes mes meilleurs vœux pour l'année 1996 !

G. Noël

Suggestions concernant l'enseignement de la mathématique aux deuxième et troisième degrés de l'enseignement secondaire

G. Noël,

A la suite des modifications aux grilles horaires, de nouveaux programmes sont en cours d'élaboration pour les deuxième et troisième degrés de l'enseignement secondaire de transition. Le Conseil d'Administration de la SBPMef a tenu à contribuer aux discussions en cours en émettant un certain nombre de suggestions reproduites ci-dessous. Il convient de préciser que ce texte n'est pas un projet de programme. Ainsi la structure en modules utilisée pour le second degré n'est qu'un outil technique destinée à susciter une approche globale du problème, mais ne devrait pas se retrouver dans les textes définitifs. Par ailleurs ni pour le second, ni pour le troisième degré, la matière n'a été répartie entre les deux années du degré.

La critique la plus importante qui a déjà été formulée à l'encontre de nos suggestions est que nous prévoyions un trop grand volume de matières. Cette critique serait peut-être justifiée si notre texte était un projet de programme, ce qui n'est pas le cas. La Commission inter-réseaux des programmes décidera si des choix — c'est-à-dire des sacrifices — doivent être faits. Souhaitons toutefois qu'on ne procède à des coupures qu'après une réflexion approfondie associant l'ensemble de la communauté mathématique. Les finalités des différents cours doivent être précisées. (La SBPMef a par avance contribué à ce débat avec son document sur la Philosophie de l'Enseignement des Mathématiques). Une expérimentation sérieuse doit être réalisée.

L'enseignement des mathématiques est en pleine évolution en Communauté Française de Belgique. Plusieurs éléments doivent être pris en considération. A la demande du Ministère, le CREM a élaboré un "cadre global" dont les suggestions doivent être prises en considération. Par ailleurs, l'utilisation des technologies nouvelles, la disponibilité de moyens de calcul puissants et de faible coût peuvent modifier considérablement tant l'importance relative des différents sujets que leur méthodologie. Sous peine d'une nouvelle refonte totale des programmes dans quelques années, prenons le temps nécessaire à faire réussir celle-ci.

G. Noël

1. Degré d'orientation : classes de troisième et quatrième

Alors que le premier degré, première et deuxième année, peut facilement et peut-être même avantageusement être conçu comme un tout centré sur une formation commune à tous les élèves, la situation, du moins dans l'état actuel de l'organisation des études au second degré général ou technique, se présente tout différemment :

1° les horaires attribués à l'enseignement mathématique sont malheureusement diversifiés dans les différents réseaux et à l'intérieur de certains, d'une école à l'autre

2° les enseignants normalement en fonction en troisième et en quatrième ont reçu des formations différentes

3° les comportements des élèves en troisième et en quatrième présentent généralement une forte évolution due à leurs développements physiologiques et psychologiques.

Il est donc difficile et sans doute peu souhaitable d'envisager un second degré qui ne comporterait pas une séparation assez nette dans son organisation en troisième et en quatrième.

Ceci étant, essayons de déterminer ce qui, dans les conditions actuelles, pourrait constituer une base commune de la formation et en particulier de la formation mathématique à ces niveaux.

A. L'acquis du premier degré

En principe, les élèves qui commenceront ce degré en 1996 auront tous été formés au premier degré selon les nouveaux programmes et en tenant compte des tendances actuelles concernant les socles de compétences. Nous devrions donc pouvoir compter sur un certain niveau d'acquisition des compétences transversales et une dominance, si pas une maîtrise, des sujets mathématiques repris dans les noyaux au premier degré. D'après le dernier document de travail du 12/12/94 les contenus du noyau seraient

NOMBRES

1. Nombres naturels : Addition, soustraction, multiplication et division, Diviseurs et multiples d'un nombre naturel, usage de la formule $a = bc$, Di-

visibilité, Nombres premiers, Factorisation des nombres naturels, Ensemble des diviseurs d'un nombre, Puissances à exposants naturels (définition et utilisation). Ensemble des multiples d'un nombre, Division euclidienne : relation fondamentale $a = bq + r$ avec $r < b$, Nombres premiers entre eux, PGCD et PPCM de deux nombres.

2. Nombres entiers : Notion de nombre entier, Représentation sur une droite graduée, Comparaisons des nombres entiers, Valeur absolue et opposé d'un nombre, Somme, différence et produit de deux nombres entiers. Opposé d'une somme et produit d'une somme par un nombre, Conventions d'écriture et hiérarchie des opérations, Quotient de deux nombres entiers, Puissances à exposants naturels.

3. Nombres décimaux et fractions : Notion de fraction, Comparaison de nombres décimaux positifs, de fractions usuelles, de fractions et de décimaux, Fractions à termes entiers. Simplification des fractions, Comparaison des fractions. Représentation sur la droite graduée. Somme et différence de fractions ; fractions opposées. Produit et quotient de fractions ; fractions inverses, Calcul d'expressions numériques comportant des fractions. Valeur approchée d'une fraction à une unité décimale près, Encadrements décimaux d'une fraction.

4. Expressions littérales : Usage de formules littérales pour calculer le périmètre, l'aire, le volume de figures et de solides, Expression en français de formules littérales, Expression littérale des propriétés des opérations, Développement, mise en évidence dans des expressions littérales simples de la forme $a(b + c)$ ou $ab + ac$. Elaboration et interprétation d'expressions littérales, de formules, Propriétés fondamentales de l'égalité, Equations du premier degré à une inconnue à coefficients numériques. Expression littérale des propriétés des puissances des nombres non nuls. Extension de la hiérarchie des opérations, Transformations d'expressions littérales qui utilisent la distributivité, la réduction des termes semblables, la mise en évidence. Egalités remarquables relatives au carré d'une somme, d'une différence et au produit de deux binômes conjugués.

GEOMETRIE

1. Transformations du plan : Construction aux instruments de l'image de figures par une translation, une symétrie par rapport à une droite, une symétrie par rapport à un point. Constructions aux instruments de l'image d'une figure par une rotation dont l'angle est un multiple entier de 30° ou de 45° . Recherche des points fixes et des droites

invariantes (globalement ou point par point) pour les symétries et les translations. Effet de quelques transformations sur les coordonnées.

2. Plans, droites, points, angles et distances : Plan, droite, segment de droite, point. Positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un point dans le plan. Distance de deux points. Cercle, Amplitude des angles. Usage du rapporteur. Angles adjacents. Somme d'angles. Angles complémentaires et supplémentaires. Inégalité triangulaire et position de deux cercles, Distance d'un point à une droite, Distance de deux droites parallèles.
3. Classement de quelques figures du plan - Propriétés liées aux transformations : Triangles isocèle, équilatéral, rectangle, Quadrilatères : Trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré. Propriétés des figures liées à leurs symétries. Propriétés : de la médiatrice d'un segment, de la corde commune à deux cercles sécants, de la bissectrice d'un angle, des tangentes à un cercle issues d'un point extérieur, du diamètre perpendiculaire à une corde, des angles opposés par le sommet, des angles alternes-internes. Somme des angles d'un triangle. Propriétés relatives aux angles de polygones convexes, Cercle inscrit et cercle circonscrit à un triangle.

Le travail, au second degré, devrait donc théoriquement pouvoir démarrer sur ces bases compte tenu du niveau de dominance précisé pour chacun de ces intitulés par les commentaires. Il n'en sera certainement pas ainsi pour certains des élèves qui entreprendront une troisième année, même si c'est une troisième année d'un enseignement de transition. Toutefois nous insistons pour que la reprise d'un même thème se fasse dans des contextes nouveaux et suivant des modalités différentes si l'on veut espérer surmonter les difficultés rencontrées par ces élèves précédemment. Un enseignement différencié s'avérerait bien utile mais est-il envisageable dans le contexte social et économique actuel ?

B. Les compétences

La troisième année est normalement fréquentée par des jeunes de 13-14 ans, auxquels il importe de donner l'occasion de choisir, à bon escient, leurs orientations. Il y a donc lieu, à ce niveau, non seulement de développer les compétences transversales déjà citées au premier degré, mais aussi de repérer les aptitudes des élèves à développer des compétences spécifiques que nous classerions en

-
-
- compétences littéraires,
 - compétences linguistiques,
 - compétences scientifiques,
 - compétences techniques,
 - compétences manuelles,
 - compétences sociales.

...

Il est, en particulier, souhaitable de combattre des habitudes qui consistent à envisager certaines sections de l'enseignement secondaire comme pouvant accueillir tout élève considéré comme inapte à poursuivre l'enseignement général. Nous pensons que demander aux élèves un acquis de compétences liées aux études qu'ils poursuivront réhabiliterait ces sections aux yeux du public et en particulier des élèves.

Il nous paraît donc souhaitable que, dans chaque domaine, des personnes qualifiées mettent en évidence des compétences nécessaires pour y poursuivre des études avec un minimum d'intérêt et des chances de réussite. Il est bien évident que les compétences sollicitées par les différentes disciplines ne forment pas des ensembles disjoints et que certaines de ces compétences pourront acquérir le statut de compétence transversale. Ceci est l'occasion de rappeler que tous les enseignants, les professeurs de mathématiques en particulier, participent à la formation générale de leurs élèves.

Essayons, quant à nous, de dresser une liste non exhaustive de compétences qui nous semblent nécessaires pour tirer profit d'une formation scientifique dans sa partie mathématique :

- *distinguer vérification et démonstration, à la lecture d'un texte ou dans un travail personnel,*
- *décrypter un énoncé de problème, y distinguer les éléments connus et les éléments à découvrir ainsi que des liens qui unissent les uns aux autres,*
- *observer, percevoir, abstraire, schématiser une situation en fonction d'un objectif déterminé,*
- *rechercher parmi ses acquis ceux qui peuvent être utiles pour résoudre un problème,*
- *imaginer des approches de résolution d'un problème, les tester et ne pas se décourager au cas où il apparaît qu'on s'est engagé dans une impasse,*
- *approcher un problème difficile, considérer d'abord des situations particulières où ce problème se simplifie,*

-
-
- rédiger de manière claire et concise une solution d'un problème,
 - être conscient de la nécessité de vérifier des résultats et détecter les causes d'erreurs éventuelles,
 - reconnaître des structures similaires dans des contextes distincts,
 - exprimer par des schémas (graphes, diagrammes, ...) des relations entre objets et déchiffrer de tels schémas,
 - critiquer des argumentations.
 - comprendre et respecter des règles de calcul dans un ensemble d'objets (nombres, fonctions, vecteurs, ensembles, ...) et les appliquer correctement, manuellement ou en utilisant des calculatrices,
 - réaliser des constructions géométriques sur papier ou sur ordinateur en justifiant leur bien fondé.

Sur base des niveaux acquis dans les différentes compétences, une fiche conseil d'orientation pourrait être distribuée aux élèves en fin de troisième année. Suivant le choix qu'ils auraient effectué, des programmes de cours distincts seraient prévus, en mathématique, pour la quatrième année. Il pourrait également en être de même pour d'autres disciplines. Ceci permettrait aux élèves, après un essai d'une année de réajuster, en connaissance de cause, leurs options avant d'aborder le degré terminal de l'enseignement secondaire.

C. Les contenus des cours de mathématique

Pour déterminer la liste des sujets mathématiques à rencontrer au deuxième degré, plusieurs pistes pourraient être exploitées :

- au premier degré des sujets ont été abordés dans les activités qui n'ont pas été synthétisés dans le noyau. Parmi ces sujets, quels sont ceux qui sont à retravailler en troisième ou en quatrième, en vue de les intégrer au noyau des connaissances de base ?

- un autre travail préparatoire au choix des sujets à traiter au deuxième degré nous semble être la mise en évidence des thèmes qui ont été présents depuis le début de ce siècle et conservés lors des différents changements de programmes qui ont eu lieu. Le chapitre faisant une analyse comparée des programmes paru dans le "livre blanc" de la SBPMef, en 1992, nous permet de le faire assez rapidement ;

- un troisième élément de réflexion est lié au développement des moyens techniques d'aides au traitement de sujets mathématiques qui peuvent entraîner des modifications dans les difficultés d'approche de certaines notions, voire une évolution de l'importance relative des différents sujets ;

- une quatrième piste est de s'intéresser aux notions mathématiques qui sont exploitées, durant ce degré, dans d'autres cours et en particulier dans les cours de sciences afin de promouvoir efficacement des enseignements interdisciplinaires.

Un premier examen de ces différents points nous conduit à penser que, sans distinction dans cette première approche entre noyau et activités, les contenus à approcher, voir ou approfondir durant les cours du deuxième degré pourraient se regrouper en "modules de matière" organisés de façon à répondre aux recommandations du rapport "Danblon " (point 3.3) :

... nous proposons que l'on s'oriente dorénavant vers des programmes pensés globalement à partir d'un unique noyau de base. Cette solution ... consiste à prévoir pour chaque citoyen, de la maternelle jusqu'au terme de la scolarité obligatoire, un ensemble commun de connaissances et de capacités mathématiques fondamentales. Le contenu de ce noyau de base devrait faire l'objet d'une étude attentive qui prendrait un certain temps. Selon les filières d'enseignement, ces notions fondamentales seraient soit naturellement intégrées dans un programme plus vaste, soit complétées par l'adjonction de matières plus générales et d'applications plus poussées, soit enfin enseignées comme telles. Dans les filières où elles apparaîtraient comme particulièrement difficiles à atteindre, elles devraient demeurer comme un objectif dont on se rapproche le plus possible.

Pour qu'une telle proposition soit bien comprise, il faut la préciser sur deux points importants. D'abord, l'existence dans le programme d'un ensemble de matières communes n'entraîne pas que les élèves de toutes les options se retrouveraient ensemble pour un certain nombre d'heures de cours de base, et qu'ensuite certains suivraient des heures supplémentaires. Une telle solution - pourtant remarquablement pratiquée par certains - apparaît comme difficile à généraliser. Ensuite - et cette remarque répond à l'objection éventuelle d'un nivellement par le bas - le noyau de base serait enseigné d'une manière adaptée à chaque classe, en tenant compte des connaissances antérieures et des

capacités déjà acquises par les élèves qui s'y trouvent. Chaque élève a droit à recevoir un enseignement à sa mesure et l'adaptation de l'enseignement à l'auditoire est un principe essentiel.

La structuration en modules ne devrait donc pas se retrouver dans les programmes. Les différents modules constituant un programme seraient intégrés en un texte unique énumérant les sujets dans un ordre adéquat. Les programmes seraient donc présentés sous la forme usuelle avec des commentaires méthodologiques adaptés aux élèves concernés. En particulier, le temps consacré aux différents sujets et l'approche, plus ou moins conceptuelle, de la matière doivent être adaptés au niveau des élèves.

Les cinq modules présentés ci-dessous pourraient de cette façon donner naissance aux cinq programmes suivants :

- Programme de base (Certaines sections de l'enseignement professionnel ou de qualification) : module I.
- Programme de base étendu en géométrie (Sections construction, menuiserie, ... de l'enseignement professionnel ou de qualification) : modules I et IIa.
- Programme de base étendu en algèbre (Sections emplois de bureau, ... de l'enseignement professionnel ou de qualification) : modules I et IIb.
- Programme A de l'enseignement de transition : modules I, IIa, IIb et III.
- Programme B de l'enseignement de transition : modules I, IIa, IIb, III et IV.

Par ailleurs, le professeur devrait saisir toute occasion de susciter chez les élèves une réflexion et des questions favorisant l'ouverture d'esprit, même si le sujet est hors programme.

Module I :

Module "indispensable" pour tous les élèves, constitué des matières nécessaires à une culture générale de base et à l'insertion sociale du jeune. Son contenu doit être exploité dans toutes les sections de l'enseignement, du professionnel au général mais, chaque fois, sous une forme et dans un cadre adéquat.

1. Maniement des nombres naturels, entiers, rationnels, irrationnels d'usage courant et de leurs opérations, puissances à exposants entiers,

encadrements de nombres à unité décimale près, en se servant des aides matérielles adéquates (calculatrices, tableaux de nombres, ...).

2. Grandeurs non proportionnelles et grandeurs proportionnelles (directement ou inversement) : “règle de trois”, pourcentages, échelles, transformations d’unités,
3. Représentations et réalisations graphiques : vers le concept de fonction. Savoir que différents types de graphes sont adaptés à différentes analyses. Lecture de graphiques et de tableaux de données. Statistiques ; extraction des données les plus significatives : moyenne, mode, médiane.
4. Longueurs, aires et volumes (capacités). Angles. Masses, densité. Unités de mesures
5. Activités probabilistes et de dénombrement. Emploi de supports (arbres, schémas divers) qui introduisent les principes d’addition (événements exclusifs) et de multiplication (événements “consécutifs”).

Module IIa :

Ce module est destiné aux élèves (notamment du technique et du professionnel) qui abordent des études faisant appel à des visualisations de type géométrique. Il devrait également faire partie de la formation des élèves de l’enseignement général.

6. Théorème de Pythagore ; applications et extensions à envisager selon les cas.
7. Trigonométrie des triangles rectangles
8. Théorème de Thalès dans ses applications à l’étude de grandeurs proportionnelles : machines-outils ou robots.
9. Polyèdres.

Module IIb :

Ce module est destiné aux élèves (notamment du technique et du professionnel) qui abordent des études faisant appel à des notions algébriques. Il devrait également faire partie de la formation des élèves de l’enseignement général.

-
-
10. Résolution de problèmes à une ou deux inconnues, du premier ou du deuxième degré, inspirés par des notions vues en physique (MRU - MRUA - masse volumique - Archimède...)
 11. Expressions algébriques, en particulier étude des polynômes en une variable, des opérations dans leur ensemble, approche de la divisibilité.
 12. Calcul de la valeur numérique d'un polynôme. Notions de variable et de fonction. Fonctions polynômes (y compris de degré supérieur ou égal à 3). Analyses de graphiques. Zéros, (introduction naturelle de nombres irrationnels), recherche de zéros par dichotomie. Factorisation.

Module III :

Ce module “enseignement de transition” serait indispensable pour les élèves qui suivent ou qui veulent pouvoir suivre une orientation d'études conduisant naturellement à l'enseignement supérieur.

13. Mise en évidence des emboîtements d'ensembles de nombres, explication du “pourquoi” de leur introduction, comparaison des propriétés des opérations dans les ensembles de nombres et leurs expressions littérales.
14. Fonctions affines. Représentations graphiques. Etude du signe. Rôle des coefficients. Coordonnées de l'intersection des graphes de deux fonctions affines.
15. Fonctions du second degré. Rôle des coefficients. Lien avec les transformations du plan : étirements, translations, symétries. Décomposition d'un trinôme du second degré en somme ou différence de deux carrés. Equations et inéquations du second degré.
16. Cercle trigonométrique et fonctions trigonométriques. Equations du type $\sin ax = \alpha$, inéquations du type $\alpha \leq \sin ax \leq \beta$.
17. Vecteurs liés et vecteurs libres. Composantes d'un vecteur. Somme de deux vecteurs, produit d'un vecteur par un réel.
18. Vecteur directeur d'une droite, équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes d'une droite. Intersection de deux droites. Systèmes de deux équations linéaires en deux inconnues. Droites perpendiculaires. Produit scalaire.
19. Isométries et triangles isométriques. Autres polygones.
20. Homothéties et triangles semblables.
21. Composition de transformations géométriques.

22. Mesures angulaires : angles au centre et angles inscrits dans un cercle.

Une utilisation faite à bon escient, tout au long du degré, du langage et des notations ensemblistes devrait conduire les élèves à pouvoir opérer sur des ensembles, à mettre en évidence des relations d'ordre et d'équivalence, à exprimer algébriquement des propriétés d'opérations binaires. Elle devrait déboucher avant la fin de la quatrième année sur une synthèse permettant de fixer le langage ensembliste. On n'omettra pas non plus des activités de démonstration, tant en géométrie que dans les autres sujets.

Module IV :

Dans ce module "scientifique", les mathématiques seraient vues pour elles-mêmes, par des élèves qui recherchent une formation approfondie. L'exploitation des points ci-dessous serait intégrée aux matières du module 3.

- 23. Géométrie : démonstration formalisée de propriétés de figures
- 24. Frises et pavages.
- 25. Utilisation de transformations et de propriétés déjà rencontrées (notamment les invariants des isométries) pour rechercher des lieux géométriques et résoudre des problèmes géométriques (tant par la géométrie synthétique que par la géométrie analytique).
- 26. Equations d'un cercle et coordonnées polaires dans le plan.
- 27. A la découverte de fonctions rationnelles simples (quotients de fonctions affines et/ou du second degré) en les considérant éventuellement comme sommes, produits, quotients ou composées de fonctions plus simples et en utilisant les déplacements ou d'autres transformations du plan. Fonction valeur absolue.
- 28. Manipulations formelles d'expressions algébriques et trigonométriques.

A travers les différentes démonstrations et justifications, on dégagera quelques principes fondamentaux de logique tels que la valeur de vérité d'une proposition, les concepts de conjonction, disjonction, négation, condition nécessaire, condition suffisante, implication, équivalence. On initiera à l'usage des quantificateurs.

A l'occasion des activités, notamment de synthèse, proposées aux élèves, on ne s'interdira pas de rencontrer des domaines tels que polynômes à plusieurs variables, suites de nombres, (en particulier suites arithmétiques ou géométriques), algorithmes (en particulier l'algorithme de Horner), géométrie de l'espace, problèmes simples d'optimisation (en liaison avec les

systèmes d'équations ou d'inéquations), analyse combinatoire (en particulier permutations et factorielle d'un nombre), structures, distance (en particulier taxi-distance).

Des contacts avec les utilisateurs potentiels, actuels et futurs, de la mathématique, devraient également permettre d'envisager certaines activités dans un cadre interdisciplinaire.

2. Degré de détermination : classes de cinquième et sixième

2.1. Introduction

Au deuxième degré, nous avons proposé de regrouper les contenus de matière en quatre “modules” correspondant en fait à quatre niveaux d'enseignement différents. Les élèves se trouvant au niveau n recevraient, sous des formes et avec des présentations éventuellement différentes, les modules numéro 1 à n . De cette façon, notre proposition est valable pour tous les élèves, de l'enseignement professionnel au général. Elle tient aussi compte de ce que le deuxième degré est le degré d'orientation durant lequel l'élève effectue les choix qui conditionneront la suite de ses études et par conséquent son futur. La structure modulaire est celle qui permet le plus facilement d'éventuelles réorientations.

Au troisième degré, la situation se présente différemment. Les choix fondamentaux ont été effectués. Certains élèves ont définitivement renoncé à toute orientation théorique et fréquentent les classes de l'enseignement professionnel ou technique de qualification. Pour la plupart de ces élèves, le choix de la matière du cours de mathématique ne paraît pas déterminant. Par contre il est essentiel de leur présenter des situations, notamment liées au contenu de leur formation pratique, qui permette d'entretenir et développer les compétences, mathématiques ou non, acquises antérieurement. Ce but ne sera pas atteint par des retours à des sujets et des méthodes ayant échoué auparavant. Le professeur de ces sections doit disposer de suffisamment d'autonomie pour évaluer la situation de ses élèves et construire son enseignement de manière à pouvoir saisir toutes les occasions de motiver ses élèves et les amener à se dépasser. Il paraît d'autant plus inopportun de proposer des listes de matière pour ces élèves que leurs intérêts et leurs besoins sont très différents.

Nous nous limiterons donc dans ce document à proposer des listes de matières pour les enseignements de transition où sont prévues en mathématique trois grilles horaires différentes. Le cours de mathématique à 2h sera normalement choisi par des élèves qui, privilégiant d'autres aspects de leur formation, devront néanmoins disposer des mathématiques nécessaires à l'exercice de leur citoyenneté. Le cours à 4h sera normalement choisi par des élèves qui recherchent une formation générale en mathématique. Le cours à 6h sera normalement choisi par des élèves qui recherchent une formation approfondie en mathématique.

2.2. Les compétences

A la fin du troisième degré, les enseignants devront conseiller leurs élèves quant au choix de leurs études ultérieures. Pour évaluer leurs chances de réussite, il importe qu'ils aient eu l'occasion de leur proposer au moins dans le courant de la dernière année, des tâches non ponctuelles faisant intervenir tout à la fois esprit d'analyse, esprit de synthèse, débrouillardise, imagination, créativité et capacité de rédaction. A l'occasion de tels travaux, souvent inspirés par des problèmes interdisciplinaires, on pourra être amené à employer des outils mathématiques plus élaborés tels que pour le cours à 2h, la dérivation, des études graphiques de fonctions à l'aide de calculatrices ou d'ordinateurs, de la géométrie (utilisation de "Cabri "), de la mathématique financière, des jeux mathématiques, pour le cours à 4h, les tests d'hypothèses, les nombres complexes, ... pour le cours à 6h les vecteurs propres et valeurs propres d'une application linéaire, des équations différentielles simples, les coniques, etc.

Nous aborderons successivement dans les paragraphes qui suivent les contenus des cours à 2h, 4h, 6h.

2.3. Le contenu du cours de mathématique à 2h

2.3.1. Le profil des élèves

Nous distinguons essentiellement deux types d'élèves parmi ceux qui suivent un cours de mathématique à deux périodes par semaine.

- des élèves faibles ayant généralement effectué des choix négatifs (pas de latin, ni de mathématique forte, peu de langues modernes, etc.)

-
-
- des élèves très littéraires qui désirent faire du grec, du latin, deux langues modernes et qui n'ont pas la possibilité de choisir plus de 2 périodes hebdomadaires de mathématiques.

Ces étudiants vont se retrouver groupés malgré leur potentiel et leurs intérêts très différents.

2.3.2. Les problèmes d'organisation

Sur le terrain, la continuité nécessaire à un enseignement de mathématique est difficile à assurer. Dans le meilleur des cas, l'intervalle séparant deux cours est de 2 ou 3 jours, mais dans la pratique, à la suite d'une activité extérieure ou à un jour de congé, il n'est pas rare d'avoir 7 jours d'écart entre deux leçons. Il est dès lors illusoire de compter sur une fixation des notions, d'autant plus que certains élèves ont tendance à considérer un cours à 2h comme un "petit cours" qui ne doit pas occuper trop de temps en dehors de l'école.

Les suggestions que nous présentons ci-dessous tiennent compte des difficultés qui viennent d'être mentionnées. Elles ont pour objet de donner des pistes de développement du cours et non de proposer un programme. Il nous semble que le programme doit être très flou, dépendre du profil des élèves que le professeur a réellement devant lui, des circonstances de la vie de la classe et des événements extérieurs.

L'important pour ces élèves, qui auront besoin de mathématique en tant que citoyens, est de ne pas perdre le contact avec le raisonnement mathématique, de développer leur esprit critique par la discussion de résultats, de les familiariser avec les statistiques et les probabilités, sans en faire des spécialistes.

2.3.3. Articulation du cours

Nous proposons que le cours s'articule selon deux axes.

- La partie la plus importante du cours serait consacrée à une matière qui ne nécessite pas trop de théorie mais qui va doter rapidement les élèves de compétences exploitables.

Le choix des statistiques et probabilités nous paraît particulièrement adapté à cette situation : l'inférence statistique et les probabilités sont reconnues comme des instruments de gestion ou de recherche dans la plupart des disciplines, certaines lois de la nature sont probabilistes,

les arguments de type statistique ont envahi nos journaux. Il n'est pas inutile non plus d'attirer l'attention des jeunes sur certaines pratiques qui consistent à utiliser malhonnêtement les nombres pour étayer et défendre une prise de position, sous prétexte que les nombres ne mentent pas.

Enfin, il est important de mettre l'accent sur la différence existant entre vérité logique et vérité statistique.

Le cours de statistiques et probabilités du troisième degré devra naturellement s'appuyer sur les notions rencontrées au deuxième degré (voir le document relatif à ce degré).

- La seconde partie du cours serait consacrée à des sujets nécessitant relativement peu de prérequis et choisis par le professeur en fonction des circonstances.

2.3.4. Suggestions pour le déroulement d'un cours de statistiques et probabilités

1. Expériences statistiques : jets de pièces de monnaie, de dés, mesures et sondages parmi les élèves (âge, pouls, taille, poids, nombre d'enfants par famille, etc.)

- Des expériences statistiques dans une classe de 25 élèves ou plus sont faciles à réaliser, avec une possibilité sérieuse d'introduire la notion de régularité statistique. Alors que le jet d'une pièce effectué 25 fois peut donner une proportion de "pile" assez lointaine de $1/2$, si chaque élève lance une pièce 50 fois, le résultat global est excellent. L'importance des grands nombres se dégage par l'examen des résultats. On recommencera avec des jets de dés, par exemple, pour s'écarter du cas où la probabilité vaut $1/2$. Les jeux de cartes peuvent également servir de départ à l'étude statistique. En lançant 10 pièces de monnaie (par exemple) un grand nombre de fois, on arrivera à la notion de variable aléatoire, à la distribution binomiale, son espérance mathématique, sa variance et son écart-type. Des mesures de phénomènes continus comme la taille ou le poids, qui nécessitent le groupement en classes, amènent d'autres représentations.

- On pourrait objecter que ces expériences prennent beaucoup de temps, mais elles ne doivent pas toutes être faites en classe. Par ailleurs, l'utilisation d'outils informatiques (tableurs, calculatrices programmables,...) permet la réalisation d'exercices pratiques et initie les élèves à un outil très répandu. L'exploitation d'un générateur

de nombres aléatoires va pouvoir faire réaliser des simulations par les élèves.

2. Etude de quelques jeux : tiercé, lotto, joker, roulette

L'étude de quelques jeux nous introduit aux méthodes de dénombrement, aux permutations, arrangements, combinaisons avec ou sans répétitions. La probabilité de gain s'en déduit, sans besoin d'autres connaissances.

Le concept d'événements indépendants, de probabilité conditionnelle et bien d'autres points de l'étude des probabilités peuvent naître de cette étude, mais il ne faut sans doute pas vouloir en faire trop.

Un peu d'histoire des jeux, depuis Pascal, enrichira le cours d'un élément culturel indispensable.

3. Génétique : loi de Mendel et ses conséquences sur une population

La génétique est un des cours qui passionnent le plus les élèves. Un développement mathématique des lois de Mendel est facile à faire et amène directement à la loi binomiale.

La loi normale, vue comme loi qui régit les phénomènes sujets à de multiples petites variations aléatoires, rend compte de l'allure de la courbe des tailles, des poids et autres mesures faites sur une population homogène.

4. Liaisons entre expériences statistiques et évaluation de la probabilité.

On systématisera les notions vues en commençant par introduire la probabilité d'un événement élémentaire. La régularité statistique observée permet de considérer la probabilité d'un événement comme un modèle de la fréquence relative de cet événement lors d'un très grand nombre d'expériences.

Les connaissances intuitives rendent les définitions et propriétés fondamentales des probabilités très acceptables par les élèves. Partant de là et des conclusions des activités antérieures, on poussera l'étude théorique selon le temps dont on dispose et l'intérêt des élèves.

Les éléments de statistique rencontrés jusqu'à présent se sont mêlés à des calculs de probabilité tout naturellement parfois sans même qu'on le remarque. En reprenant les séries statistiques observées, on les comparera au calcul correspondant des probabilités. On verra les divergences et on cherchera si elles sont significatives et à quel niveau. On évoquera donc les notions d'intervalle de confiance et de test d'hypothèse.

Un problème intéressant est celui de la corrélation entre deux variables telles que le poids et la taille, par exemple, ou encore le temps

et l'espace parcouru le long d'un plan incliné. La corrélation et la régression peuvent faire l'objet d'une étude à partir de graphiques, de manière plus ou moins intuitive. L'important est l'idée de minimiser les écarts entre une courbe et un nuage de points expérimentaux et non la méthode de calcul pour y arriver.

2.3.5. Suggestions pour la seconde partie du cours

Dans cette partie, l'enseignant pourrait aborder librement des sujets tels que les polyèdres platoniciens, les sections coniques, les constructions géométriques, l'histoire des mathématiques, les représentations graphiques de fonctions, la mathématique financière, les jeux mathématiques,

2.4. Le contenu du cours de mathématique à 4h

L'ordre des matières proposé ci-dessous n'a rien d'absolu, y compris à l'intérieur d'un même sujet principal (par exemple l'analyse, l'algèbre ou la géométrie).

2.4.1. Combinatoire

Combinaisons, binôme de Newton.

2.4.2. Statistiques et probabilités

Tout comme dans le cas du cours à 2h, le cours de statistique et probabilité destiné aux élèves ayant choisi 4h par semaine doit s'appuyer sur les notions rencontrées au deuxième degré. Par ailleurs, les activités que nous suggérons pour le cours à 2h peuvent être reprises et adaptées par l'enseignant responsable du cours à 4h.

Statistique descriptive

Transformation linéaire des données, variables centrées et/ou réduites. Paramètres de dispersion. Corrélations, différences significatives.

Espaces probabilisés finis et infinis dénombrables

Loi des grands nombres.

Dégager la définition d'une probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable à partir d'exemples concrets.

Evénements dépendants ou indépendants, probabilités conditionnelles.

Variables aléatoires

Distributions binomiale, normale réduite et normale.

2.4.3. Analyse

La liste des matières ci-dessous peut être rencontrée de diverses manières. On en trouvera en annexe une approche pédagogique nouvelle.

- Calcul des radicaux, puissances à exposants rationnels.
- Suites et limites de suites.
- Suites arithmétique et géométrique.
- Fonctions numériques (introduction des fonctions trigonométriques directes et inverses), domaine, parité, période, graphique de fonctions usuelles simples.
- Formules trigonométriques usuelles.
- Limites de fonctions.
- Fonctions exponentielles et logarithmes.
- Fonction dérivée (croissance et décroissance).
- Recherche des zéros d'une fonction.
- Primitives.
- Intégrale de fonctions simples (y compris intégration numérique).

2.4.4. Algèbre et Géométrie

- Polyèdres platoniciens.
- Parallélisme et perpendicularité de droites et de plans, sections planes dans les polyèdres. Utilisation de la perspective cavalière (ombres au soleil) et de la perspective centrale (ombres à la lampe).
- Systèmes d'équations linéaires, interprétations vectorielles et matricielles, équations de la droite et du plan, incidence, parallélisme.
- Produit scalaire dans l'espace. Angles dièdres et distances, projections orthogonales.

2.5. Le contenu du cours de mathématique à 6h

Pour déterminer la liste des sujets mathématiques à rencontrer dans ce cours nous nous basons d'abord sur le document de la SBPMef intitulé "*Quelle philosophie pour l'enseignement des mathématiques au secondaire?*", lequel fait l'inventaire des théories les plus utiles pour les applications et les propose comme "théories terminales". Un choix devra être effectué dans la liste des matières ci-dessous.

2.5.1. Algèbre linéaire et géométrie

Les enseignements d'algèbre linéaire et de géométrie seront conçus de manière intégrée. On fera ainsi reposer les notions d'algèbre linéaire sur l'intuition géométrique, et on disposera de l'outil algébrique pour étudier les problèmes géométriques. Le choix du point de vue synthétique, vectoriel ou analytique, sera effectué en fonction du problème à traiter. Dans le cas d'un traitement de type algébrique, on accordera l'importance requise à l'interprétation géométrique des résultats.

Par ailleurs, on ne limitera pas l'utilisation des outils algébriques à l'étude de situations géométriques, mais on cherchera d'autres situations dans d'autres domaines (probabilité, physique, chimie, économie,...) A cette occasion, on ne devra pas se limiter strictement aux dimensions 2 ou 3, sans aller jusqu'à une généralisation théorique à la dimension n . La présence de moyens de calcul puissants permet de traiter complètement des situations réalistes.

- Plan pointé, espace pointé, repères du plan et de l'espace, coordonnées.
- Parallélisme de droites et plans.
- Equations vectorielles et paramétriques de droites et plans.
- Equations cartésiennes de plans et droites.
- Projections affines et centrales, invariants. Homothéties.
- Sections dans les polyèdres.
- Systèmes de n équations linéaires en 3 inconnues.
- Perpendicularité de droites et plans. Produit scalaire, repère orthonormé, distances, angles.
- Equations de droites et plans perpendiculaires.
- Projections orthogonales.
- Sections coniques.
- Equations de coniques, lieux géométriques.

-
-
- Rotations, symétries par rapport à un point ou un plan.
 - Applications linéaires de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, du point de vue algébrique, matrices.
 - Applications linéaires de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, du point de vue géométrique.
 - Sommes et composées d'applications linéaires.
 - Isomorphismes particuliers.
 - Nombres complexes.
 - Dépendance et indépendance linéaire, base et dimension.
 - Rang d'une matrice.
 - Systèmes paramétriques, déterminants.
 - Synthèse sur les espaces vectoriels, isomorphisme.

2.5.2. Combinatoire

Permutations, combinaisons, binôme de Newton

2.5.3. Analyse

- Suites et limites de suites.
- Suites arithmétiques et géométriques.
- Caractère complet du corps des réels, sous la forme "Toute suite croissante, majorée est convergente".
- Ensemble des rationnels et ensemble des irrationnels, densité dans $\mathbf{R}$, développements décimaux périodiques.
- Calcul d'une racine carrée, irrationalité des racines k -èmes d'un nombre naturel qui n'est pas une puissance k -ème d'un entier.
- Exposants rationnels et irrationnels.
- Formes indéterminées pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.
- Mesure d'un arc de cercle, nombre π .
- Fonctions trigonométriques, formules principales.
- Manipulation d'inégalités.
- Limites de fonctions.
- Puissances à exposants réels, nombre e .
- Domaine d'une fonction, parité, périodicité.
- Croissance et décroissance, dérivée.
- Logarithmes.
- Formules des accroissements finis et de Mac Laurin.

-
-
- Recherche de zéros (point de vue algorithmique).
 - Primitivations élémentaires.
 - Intégration de fonctions simples, y compris numériquement. Applications.

2.5.4. Probabilités et statistiques

- Probabilités et fréquences limites.
- Probabilités discrètes.
- Principe d'addition, événements exclusifs.
- Principe de multiplication, probabilités conditionnelles.
- Événement indépendant d'une partition.
- Probabilités composées.
- Variable aléatoire, espérance mathématique, loi d'une variable aléatoire.
- Espérance conditionnelle.
- Probabilités continues, loi normale.
- Analyse et comparaison de données, paramètres d'une distribution statistique.
- Test d'ajustement d'une distribution expérimentale à une distribution théorique (χ_2).

2.6. Annexe

Le cours d'analyse est peut-être celui où une approche inductive bouleverse le plus l'ordre traditionnel d'apprentissage. Il est donc utile de préciser quelques traits caractéristiques d'une démarche possible.

Le matériel de départ est formé à la fois des nombres et des fonctions **directement accessibles au calcul**, c'est-à-dire les nombres et les fonctions algébriques "élémentaires".

Dans un premier temps, il s'agit d'approfondir le maniement et les propriétés de ces objets, à partir de techniques simples et suffisamment riches en **prolongements ultérieurs**.

Premier exemple : l'approximation rationnelle des nombres algébriques.

Second exemple : le calcul différentiel pour les fonctions algébriques.

Dans un second temps, il s'agit d'explorer **expérimentalement** la notion de nombre réel, d'en maîtriser les aspects **paradoxaux** et d'en

déduire une **nouvelle notion de fonction**, avec le bestiaire qui s'y rattache.

Premier exemple : aspects du dénombrement des nombres réels.

Second exemple : le calcul sur les nombres réels : égalité et inégalités.

Troisième exemple : le développement en série formelle.

Quatrième exemple : la construction des fonctions associées à la mesure d'une longueur ou d'une aire : le cas du cercle.

Cinquième exemple : la construction des fonctions transcendantes élémentaires.

Sixième exemple : les fonctions monstreuises.

Dans un troisième temps, il s'agit d'adapter les résultats du calcul différentiel déjà obtenus pour les fonctions algébriques aux nouvelles fonctions.

Premier exemple : le calcul approché des valeurs d'une fonction (non algébrique) : limites et continuité.

Second exemple : le calcul différentiel pour les fonctions associées à la mesure d'une aire ; le calcul intégral.

Troisième exemple : le calcul différentiel et intégral des fonctions transcendantes élémentaires.

Quatrième exemple : le calcul différentiel et intégral des développements en série formelle : l'analyse "à la Newton "

La présentation suivante de la liste des matières est adaptée aux idées qui viennent d'être développées.

— Notion de nombre réel.

Nombres irrationnels algébriques : existence, approximation rationnelle, calcul algébrique.

Nombres réels : comment calculer avec une infinité de décimales, combien y a-t-il de nombres réels, suites arithmétiques et géométriques, limites de suites, nombres remarquables.

— Fonctions algébriques élémentaires.

Fonctions polynômiales du troisième degré, fonctions rationnelles, fonctions irrationnelles, dérivée algébrique, tangentes et asymptotes, développements en séries formelles.

— Notion de fonction.

Propriétés générales (domaine, parité, période, graphes, etc...), construction des fonctions transcendantes “élémentaires” et développements en séries formelles, fonctions monstreuues, limites et continuité, fonctions de deux variables.

— Notion de dérivée.

Croissance, décroissance, étude locale.

— Intégrale.

Une grande synthèse (séries, limites, dérivées et intégrales), l’intégration numérique, le calcul des aires et des volumes, l’intégration des mouvements et des équations différentielles.

Le premier temps étant le moins classique, voici très brièvement, et sur deux situations simples, comment il peut se construire.

Premier exemple : l’approximation rationnelle des nombres algébriques

Il s’agit de calculer une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$.

On sait que $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ et $0 \leq \sqrt{2} - 1 \leq 1$, d’où par exemple :

$$0 \leq (\sqrt{2} - 1)^{16} \leq \frac{1}{2^{16}}.$$

Or on calcule sans peine :

$$(\sqrt{2} - 1)^{16} \leq 665857 - 470832\sqrt{2}$$

ce qui implique :

$$0 \leq \frac{665857}{470832} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{16}470832}.$$

On en déduit que l’écriture décimale de $\sqrt{2}$ et celle de $\frac{665857}{470832}$ coïncident quant aux 9 premières décimales.

Le processus est manifestement **infini**. Il se généralise sans modification à l’approximation rationnelle de **n’importe quel** nombre algébrique réel.

Second exemple : le calcul différentiel pour les fonctions algébriques

Il s’agit de déterminer les extremums de la fonction

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}.$$

Notons a ($\neq 0$) l'abscisse d'un point où $f(x)$ présente un extremum. On calcule facilement le quotient (différentiel) de $f(x)$ en a , noté $Q_a f(x)$ et défini par les conditions :

$$\begin{cases} f(x) - f(a) = (x - a)Q_a f(x) \\ a \in \text{dom} Q_a f(x) \end{cases}$$

On trouve :

$$Q_a f(x) = \frac{a^2 x^2 - (3a + 1)x - a}{a^2 x^2}.$$

Or, par **définition** même d'extremum, il faut que le quotient $Q_a f(x)$ **change de signe** en $x = a$, et comme le dit quotient ne contient que des **facteurs au plus du second degré** en x , ce changement de signe n'est possible que si le quotient admet $x = a$ comme racine, c'est-à-dire si

$$Q_a f(a) = \frac{a^2 a^2 - (3a + 1)a - a}{a^2 a^2} = \frac{a^4 - 3a^2 - 2a}{a^4} = 0$$

d'où $a = -1$ ou $+2$. L'étude du signe de $Q_{-1} f(x)$ et de $Q_{+2} f(x)$ permet d'analyser le comportement de $f(x)$ au voisinage de $a = -1$ et $+2$.

La dérivée des fonctions algébriques est ainsi introduite rigoureusement, **sans** que la notion de limite soit le moins du monde nécessaire.

La créativité en mathématique ! Est-ce possible ?

C. Villers, *Athénée Royal de Mons*

“Le plus beau sentiment qu’on puisse éprouver, c’est le sens du mystère. C’est la source de tout art véritable, de toute vraie science”.

A. Einstein

1. Introduction

En cette fin de vingtième siècle, les performances de la technologie et de la recherche scientifique ne peuvent laisser personne indifférent et certainement pas les enseignants dont une des missions essentielles est de développer chez leurs élèves des capacités à gérer ces progrès dans un avenir relativement proche.

La vérité scientifique n’est pas une notion figée. Elle a ses limites et génère parfois des illusions. Ce qui est considéré comme vrai aujourd’hui sera probablement dépassé demain. Nous vivons dans un monde en perpétuel changement. C’est ce qu’on peut appeler la relativité du progrès par rapport au temps.

Le domaine de l’informatique en est un exemple d’actualité. Acquérir aujourd’hui un ordinateur personnel, c’est s’équiper d’un matériel probablement obsolète demain.

La science laisse donc planer des doutes au sujet de l’avenir. De quoi demain sera-t-il fait ? Mais si le passé appartient au domaine du révolu, l’avenir lui est surprise.

Nous devons préparer nos élèves, dès le plus jeune âge, à aborder cet avenir. Si une façon d’y parvenir est, sans conteste, de leur donner des informations, il est au moins aussi important de leur faire acquérir des comportements et des états d’esprit.

Parmi ceux-ci, il convient – j’en suis intimement persuadé – d’inclure le développement de la créativité qui est, en fait, un corollaire de l’esprit critique. Ce dernier ne peut d’ailleurs qu’être stérile s’il ne s’accompagne pas de propositions alternatives étudiées sur le sujet remis en question.

2. Qu'est-ce donc que la créativité ?

Le terme “créativité” est, la plupart du temps, utilisé à propos de travaux et de productions touchant au monde littéraire ou à celui de l’art, en général. Ce n’est pas dénier ces talents de création que de dire que le domaine créatif n’est pas un domaine réservé à certains et inaccessible à d’autres.

Je pense que l’imagination créative n’est pas un don de quelques privilégiés mais est plutôt un état d’esprit, disponible chez chacun, et qui peut se développer par une sorte d’entraînement.

En tout cas c’est un moyen puissant, si pas universel, de résolution de problèmes.

C’est en incitant les plus jeunes élèves à être créatifs à l’occasion des notions élémentaires rencontrées dans les premières années, que nous leur apprendrons à l’être plus tard dans d’autres circonstances.

Citons dès lors, sans que ce soit exhaustif, quelques compétences en relation de cause ou d’effet avec la créativité et qui peuvent être développées dans l’environnement scolaire en général et mathématique en particulier.

- capacité d’analyse
- capacité de jugement
- capacité de généralisation
- capacité d’invention
- capacité d’imagination
- capacité de changement
- capacité d’adaptation
- capacité d’acharnement
- développement de la responsabilité
- développement de chemins de pensée
- développement du savoir
- développement du savoir-faire
- développement de l’activité
- développement de la volonté

recherche du sens dans ses actes
sens de la prise en charge
sens du travail
sens de la collectivité
sens de la solidarité
bonheur de la découverte
installation de la motivation
exploitation des idées
etc...

Il est admis que le terme “créativité” a été introduit dans le langage scientifique par Guilfort (?) en 1950 à l’occasion d’un colloque de psychologie aux USA.

Il existe, chez les spécialistes de la notion, différentes définitions de la créativité. Celle de Albric (1984) correspond bien à l’idée personnelle que j’ai de la création par les jeunes élèves.

“La créativité est un processus par lequel un individu ou un groupe, placé dans une situation donnée, élabore un produit nouveau ou original adapté aux contraintes et aux finalités de la situation”.

Faut-il ajouter que, très souvent, le produit ainsi élaboré au cours de l’activité pédagogique, ne revêt pas nécessairement un grand caractère d’originalité. Mais est-ce bien important en regard de l’énorme satisfaction, donc de la motivation, que peuvent en retirer les acteurs (aussi bien enseignant qu’élèves) ?

Il est important et même nécessaire de développer cette faculté d’audace qu’est la démarche créative, en proposant des situations pour lesquelles la marche à suivre n’est pas immédiate.

C’est donc peut-être dommage que, comme dans la plupart des manuels, on expose une théorie, on propose des exercices d’application immédiate, puis on abandonne la notion pour recommencer le processus avec une autre.

C’est probablement confortable car sans grande surprise, mais est-ce ainsi que les élèves sont mis en position de recherche ?

Heureusement, il y a l’enseignant dans la classe. Sa présence est irremplaçable et elle le place dans une position privilégiée. Il peut et doit organiser l’enseignement de telle façon qu’un souffle de liberté règne dans le groupe. C’est donc plus qu’un droit, c’est un devoir.

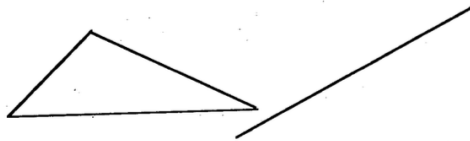
3. Quelques exemples (sans prétention)

1ère proposition d'activité

D'un seul coup de ciseau rectiligne, découper un triangle en deux figures semblables.

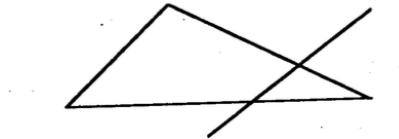
Il faut donc situer une droite par rapport à un triangle et en tirer progressivement des constatations et des conclusions. Il faut construire un savoir.

1er essai : La droite n'a pas de point commun avec le triangle.



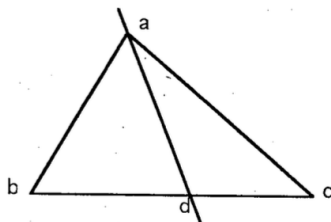
Cette situation est peu fructueuse et doit donc évoluer.

2ème essai : La droite coupe deux côtés du triangle.



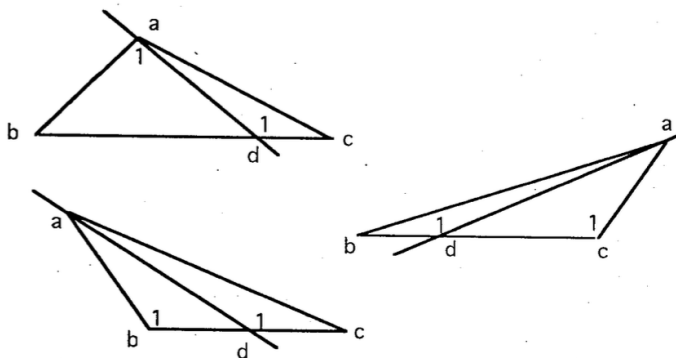
On obtient ainsi un triangle et un quadrilatère. Cela ne répond pas à l'objectif fixé. Une contrainte apparaît : il faut que la droite cherchée comprenne un sommet.

3ème essai : La droite comprend un sommet et est oblique par rapport au côté opposé. Soit, par exemple, un triangle quelconque abc et ad la droite candidate.



On obtient un triangle obtusangle (ici adc). L'autre (abd) devrait donc l'être aussi. Le triangle abc initial doit donc être obtusangle.

L'étude de différents cas de figure montre que ce n'est pas réalisable.

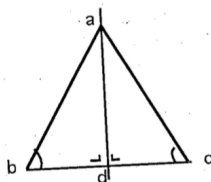


En effet, $\widehat{d1} = \widehat{a1}$ ou $\widehat{d1} = \widehat{b1}$ ou $\widehat{d1} = \widehat{c1}$ implique le parallélisme de deux côtés du triangle initial.

4ème essai : La droite comprend un sommet du triangle et est perpendiculaire au côté opposé.

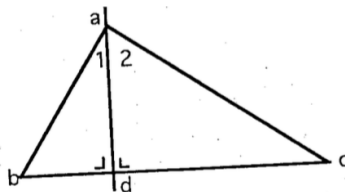
Comme les triangles adb et acd doivent être semblables, il faut une autre égalité d'angles.

Si c'est $\hat{b} = \hat{c}$, alors le triangle abc est isocèle de sommet principal a . Dans ce cas la droite cherchée est donc la hauteur relative à la base du triangle isocèle.



Si c'est $\widehat{b} = \widehat{a2}$, alors on a aussi $\widehat{c} = \widehat{a1}$ donc $\widehat{b} + \widehat{c} = \widehat{a2} + \widehat{a1}$ et par conséquent $\widehat{a12}$ est un angle droit.

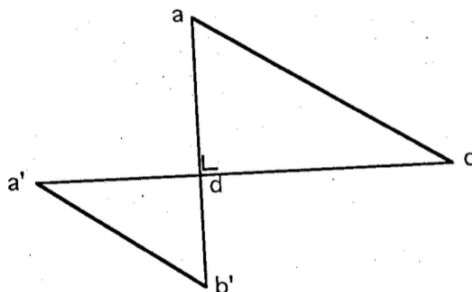
La hauteur relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle répond donc à la contrainte imposée.



Observation particulière de ce dernier cas.

Si on souhaite utiliser des triangles à côtés parallèles, alors il faut déplacer un des deux triangles adb ou adc . Il est naturel ici de songer à une rotation de centre d et d'amplitude $\widehat{90^\circ}$ ou $-\widehat{90^\circ}$.

Appliquons la rotation $r(d, \widehat{90^\circ})$ au triangle adb .



Et puisque adb a tourné d'un angle droit, alors $db' = r(db)$ s'aligne avec ad , $da' = r(da)$ s'aligne avec dc et $a'b' = r(ab)$ est perpendiculaire à ab et est donc parallèle à ac .

En allant un peu plus loin dans l'exploitation de la figure ainsi obtenue, on perçoit la possibilité d'appliquer le théorème de Thalès.

Dès lors, on reçoit "en prime" une des relations métriques dans le triangle rectangle.

$$\frac{|da|}{|db'|} = \frac{|dc|}{|da'|} \longrightarrow |da|^2 = |dc| \cdot |db|$$

2ème proposition d'activité

Un angle et “sa” bissectrice.

1ère étape :

Observer un angle et sa bissectrice.

Que peut-on dire ?

Il y a des angles de même amplitude ! $\widehat{a1} = \widehat{a2}$.

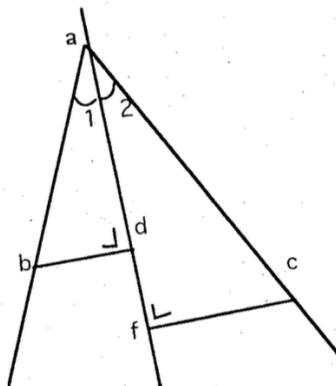
Il y a peut-être des distances égales !

Plaçons un point b sur un des côtés de l'angle et un point c sur l'autre.

Faisons apparaître les distances $|bd|$ et $|cf|$ à la bissectrice.

Nous n'avons pas (nécessairement) $|bd| = |cf|$.

Si on accepte d'exploiter la situation, nous pouvons voir des triangles semblables. Dès lors, on peut écrire



$$\frac{|bd|}{|cf|} = \frac{|ab|}{|ac|} = \frac{|ad|}{|af|} = s.$$

Les longueurs des côtés homologues de deux triangles semblables étant, par obligation, dans un même rapport (rapport de similitude).

Sans s'arrêter en bon chemin, on a

$$S_{abd} = \frac{1}{2} \cdot |bd| \cdot |ad|$$

et

$$S_{acf} = \frac{1}{2} \cdot |cf| \cdot |af|$$

donc aussi

$$\frac{S_{abd}}{S_{acf}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |bd| \cdot |ad|}{\frac{1}{2} \cdot |cf| \cdot |af|} = s^2.$$

Le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport de similitude.

2ème étape

Pour poursuivre l'investigation, on trace bc .

On voit ainsi apparaître deux nouveaux triangles bdg et cfg semblables eux aussi. D'où :

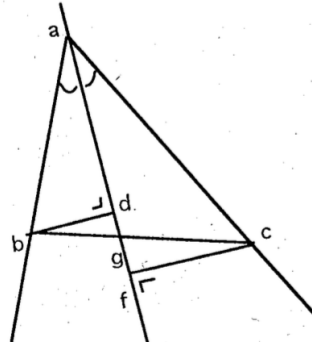
$$\frac{|bd|}{|cf|} = \frac{|bg|}{|cg|} = s.$$

Dès lors, le cadeau est :

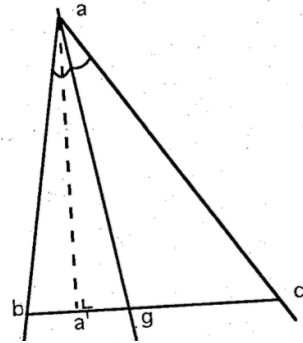
$$\frac{|bg|}{|cg|} = \frac{|ab|}{|ac|}.$$

C'est le *théorème de la bissectrice intérieure*.

Ce théorème peut aussi surgir à l'occasion d'une autre vision de la situation.



$$\frac{S_{abg}}{S_{agc}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |bg| \cdot |aa'|}{\frac{1}{2} \cdot |gc| \cdot |aa'|} = \frac{|bg|}{|gc|} \quad (1)$$

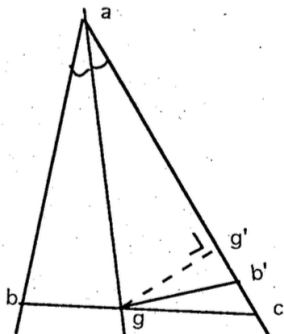


Et si b' est l'image de b par la symétrie d'axe ag (bissectrice), on a encore :

$$\frac{Sab'g}{Sagc} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |ab'| \cdot |g'g|}{\frac{1}{2} \cdot |ac| \cdot |g'g|} = \frac{|ab'|}{|ac|} = \frac{|ab|}{|ac|} \quad (2)$$

et comme $Sab'g = Sabg$ (1) et (2) entraînent

$$\frac{|bg|}{|gc|} = \frac{|ab|}{|ac|}.$$

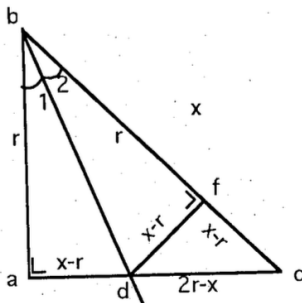


3ème étape

Voir ce que donne l'application du théorème de la bissectrice dans le cas d'un triangle très particulier : un triangle rectangle isocèle.

Soit $|ba| = |ac| = r$ et $|bc| = x$,
alors $|bf| = r$ et $|fc| = x - r$
donc aussi $|fd| = |ad| = x - r$
par conséquent

$$|dc| = r - (x - r) = r - x + r = 2r - x$$



Le théorème de la bissectrice (ou la similitude des triangles bac et dfc) permet d'écrire

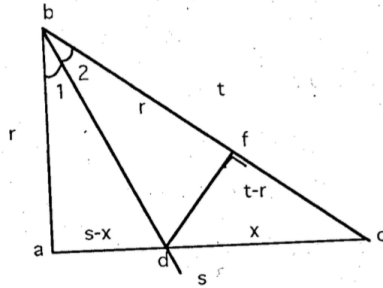
$$\frac{x}{r} = \frac{2r - x}{x - r}$$

donc $x^2 - rx = 2r^2 - rx$ d'où $x^2 = 2r^2$, donc $x = r\sqrt{2}$.

4ème étape

Et si le triangle rectangle n'est pas isocèle? Appliquons la même procédure et voyons ce qu'il se passe.

Soit $|ba| = r$, $|ac| = s$,
 $|bc| = t$.
 On a tout de suite
 $|bf| = r$, donc $|fc| = t - r$
 et puis ?



Si x désigne $|dc|$, alors $|ad| = s - x$ et le théorème de la bissectrice permet d'écrire :

$$\frac{r}{t} = \frac{s-x}{x}$$

donc $rx = ts - tx$ ou encore, $x(r+t) = st$

$$x = \frac{st}{r+t}. \quad (3)$$

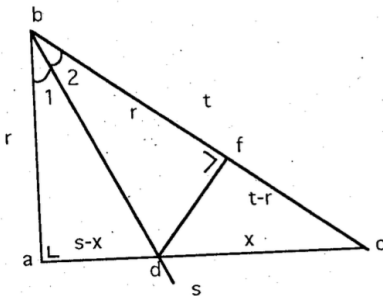
De son côté, la similitude des triangles dfc et bac fournit :

$$\frac{x}{t-r} = \frac{t}{s} \text{ donc } x = \frac{t(t-r)}{s}. \quad (4)$$

(3) et (4) apportent le cadeau

$$\frac{st}{r+t} = \frac{t^2 - rt}{s}$$

donc
 $s^2t = t^2r + t^3 - tr^2 - t^2r$
 ou encore : $s^2t + r^2t = t^3$
 donc : $s^2 + r^2 = t^2$



Voilà donc *Pythagore!!!*

5ème étape

Appliquons ce que nous venons d'apprendre au cas du triangle rectangle isocèle.

Soit $|ab| = |ac| = 1$,

alors $|bc| = \sqrt{2}$.

Il vient successivement

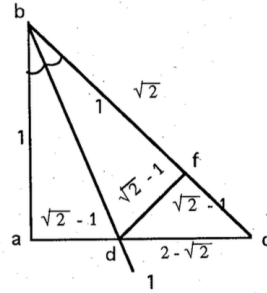
$$|bf| = 1,$$

$$|fc| = \sqrt{2} - 1,$$

$$|df| = \sqrt{2} - 1,$$

$$|ad| = \sqrt{2} - 1,$$

$$|cd| = 2 - \sqrt{2}.$$



Le théorème de la bissectrice (ou la similitude des triangles bac et dfc) fournit :

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

Comme les termes de cette proportion expriment des longueurs de segments, on en déduit : $2 - \sqrt{2} \geq 0$ donc $\sqrt{2} \leq 2$ et $\sqrt{2} - 1 \geq 0$ donc $1 \leq \sqrt{2}$, soit un encadrement de $\sqrt{2} : 1 \leq \sqrt{2} \leq 2$.

De plus, le travail effectué sur le triangle initial bac peut être appliqué au triangle $cf d$, ce qui permet de traiter de lois de formation de termes. Ici, on aura donc :

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{3 - 2\sqrt{2}},$$

d'où l'on tire $4/3 \leq \sqrt{2} \leq 3/2$ ou $1,333... \leq \sqrt{2} \leq 1,5$, puis

$$\frac{3\sqrt{2} - 4}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{10 - 7\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 7},$$

d'où l'on tire $7/5 \leq \sqrt{2} \leq 10/7$ ou $1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,43$, et encore

$$\frac{10 - 7\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 7} = \frac{17\sqrt{2} - 24}{17 - 12\sqrt{2}},$$

d'où l'on tire $24/17 \leq \sqrt{2} \leq 17/12$ ou $1,411 \leq \sqrt{2} \leq 1,417$, etc...

Note : Equation de Pell-Fermat.

Une équation de Pell-Fermat est une équation Diophantienne (à solutions entières) de la forme $x^2 - ay^2 = 1$ ou encore

$$x^2 = ay^2 + 1 \tag{1}$$

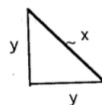
(a n'est pas un carré).

Rechercher x et y vérifiant (1), c'est rechercher un rationnel qui approche $\sqrt{a}$ car on a alors

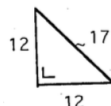
$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = a + \frac{1}{y^2} \quad (2)$$

et $\frac{x}{y}$ tend vers $\sqrt{a}$ lorsque y devient de plus en plus grand.

Mais $x^2 = 2y^2 + 1$ peut s'écrire $x^2 = y^2 + y^2 + 1$, ce qui nous incite à associer à cette expression le tracé d'un triangle rectangle de côtés d'angle droit de longueur y et d'hypoténuse de longueur $\sim x$.



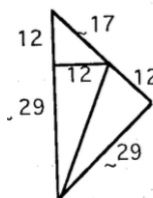
Par exemple, on peut prendre $y = 12$ et $x = 17$ car $2 \times (12)^2 + 1 = 2 \times 144 + 1 = 289 = (17)^2$, d'où une première approximation de $\sqrt{2}$ par la fraction $17/12$.



Mais, comme il convient que y devienne plus grand, il est préférable d'appliquer la transformation du triangle utilisée plus avant, vers l'“extérieur” plutôt que vers l'“intérieur”.

Ainsi, au triangle rectangle ($\sim 17, 12, 12$), nous pouvons associer le triple $(17, 12, 12)$ que nous appellerons “triple de Pell-Fermat”. Ce triple donne, après une première application de cette transformation t , le triple $(41, 29, 29)$ qui n'est pas de Pell-Fermat, car on a :

$(41)^2 = 2(29)^2 - 1$ et non $(41)^2 = 2(29)^2 + 1$. Mais on peut constater qu'en appliquant à nouveau la transformation t à ce dernier triple, on obtient ensuite le triple $(99, 70, 70)$ qui lui est de Pell Fermat.



Démonstration

Soit (x, y, y) un triple de Pell-Fermat. Alors,

$$\begin{array}{ccccc} \overset{(x,y,y)}{\text{Pell-Fermat}} & \xrightarrow{t} & \overset{(x+2y,x+y,x+y)}{\text{pas Pell-Fermat}} & \xrightarrow{t} & \overset{(3x+4y,2x+3y,2x+3y)}{\text{Pell-Fermat}} \\ (1) & & (2) & & (3) \end{array}$$

(1) par hypothèse, on a : $x^2 - 2y^2 = 1$.

(2) On a

$$\begin{aligned} (x+2y)^2 - 2(x+y)^2 &= x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x^2 - 4xy - 2y^2 \\ &= -x^2 + 2y^2 \\ &= -1. \end{aligned}$$

(3) on a :

$$\begin{aligned} (3x+4y)^2 - 2(2x+3y)^2 &= 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 8x^2 - 24xy - 18y^2 \\ &= x^2 - 2y^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Itérons $t^2 : (x, y, y) \rightarrow (3x+4y, 2x+3y, 2x+3y)$ en partant de $(17, 12, 12)$.

On obtient successivement

$$t^2(17, 12, 12) = (99, 70, 70) \text{ et } \sqrt{2} \approx \left(\frac{99}{70}\right) = 1,414285...$$

$$t^2(99, 70, 70) = (577, 408, 408) \text{ et } \sqrt{2} \approx \left(\frac{577}{408}\right) = 1,414215,, ,$$

$$t^2(577, 408, 408) = (3363, 2378, 2378) \text{ et } \sqrt{2} \approx \left(\frac{3363}{2378}\right) = 1,414213...$$

etc...

Addenda

(i) Les approximations de $\sqrt{2}$ que sont $17/12$ et $577/408$ sont connues comme approximations de BAUDHAYAMA.

(ii) On sait, selon BHASKHARA (12ème siècle) que si (x, y) est solution de l'équation $x^2 = ay^2 + 1$, alors $(ay^2 + x^2, 2xy)$ l'est aussi. Dans le cas de

$x^2 = 2y^2 + 1$, a vaut donc 2. Dès lors, $(17, 12)$ solution de $x^2 = 2y^2 + 1$ fournit une autre solution qui est : $(2(12)^2 + (17)^2, 2 \times 17 \times 12)$ soit $(577, 408)$ ainsi retrouvée.

(iii) La transformation t définie ci-avant permet d'obtenir alternativement des approximations de $\sqrt{2}$ par défaut et par excès (encore une notion pouvant être introduite).

En effet, grâce à (2) et si $X = x + 2y$ et $Y = x + y$, alors on a

$$X^2 - 2Y^2 = -1$$

donc

$$X^2 = 2Y^2 - 1$$

ou

$$\frac{X^2}{Y^2} = 2 - \frac{1}{Y^2}$$

ou

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^2 = 2 - \frac{1}{Y^2}$$

ce qui exprime que $\frac{X}{Y}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut.

Voici un tableau qui résume quelques-unes de ces valeurs obtenues par application de t au départ de $x = 17$ et $y = 12$.

x	y	Approximation de $\sqrt{2}$ par x/y	Nature de l'appr.
17	12	$17/12 = 1,416666666...$	Excès
41	29	$41/29 = 1,413793102...$	Défaut
99	70	$99/70 = 1,414285714...$	Excès
239	169	$239/169 = 1,414201182...$	Défaut
577	408	$577/408 = 1,414215686...$	Excès
1393	985	$1393/985 = 1,414213197...$	Défaut
3363	2378	$3363/2378 = 1,414213624...$	Excès

Une autre question qui peut surgir est de savoir si l'on peut remonter dans le tableau, car il n'y a rien qui oblige à commencer par $x = 17$ et $y = 12$.

C'est l'occasion d'introduire ou de traiter d'équations simultanées.

Il faut en effet résoudre le système d'inconnues x et y

$$\begin{cases} x + 2y = X & (1) \\ x + y = Y & (2) \end{cases}$$

De façon immédiate, on a : $(1) - (2) \rightarrow y = X - Y$ et $(2) \rightarrow x = -X + 2Y$, d'où le prédicat de $t^{-1} : (x, y, y) \rightarrow (-x + 2y, x - y, x - y)$.

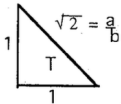
Le tableau se complète alors comme suit :

x	y	Approximation de $\sqrt{2}$ par x/y	Nature de l'appr.
17	12	$17/12 = 1,416666666...$	Excès
7	5	$7/5 = 1,4$	Défaut
3	2	$3/2 = 1,5$	Excès
1	1	$1/1 = 1$	Défaut
1	0	$1/0 = ???$ (l'infini ???)	Excès

Il faut noter par ailleurs que la dernière ligne de ce tableau suggère une justification de ce que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

En effet, $\sqrt{2}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle T dont les côtés de l'angle droit sont de longueur 1.

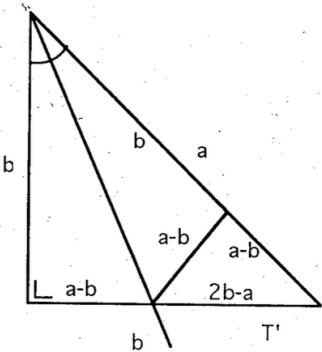
Si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors on a $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a, b naturels non nuls.



Il existe alors un (au moins) triangle rectangle T' homothétique de T par une homothétie de rapport b , dont les côtés de l'angle droit et l'hypoténuse ont pour longueurs respectives b, b et a .

t appliquée de manière itérative au triangle T' , donc à (a, b, b) nous amène à la contradiction citée plus avant.

$\sqrt{2}$ n'est donc pas de la forme a/b avec a, b naturels non nuls.



Références :

A. BACUS, C. ROMAIN, *Développez votre créativité*, Collection Marabout service.

L. E. DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, Vol. I et II, Chelsea Publishing Company, New-York 1952.

J.L. CHABERT, E. BARBIN, M. GUILLEMOT, A. MICHEL-PAJUS,
J. BOROWCZYK, A. DJEBBAR, J.-C. MARTZLOFF, *Histoire d'algori-
thmes*, Collection Regards sur la Science - Belin.

Adresse de l'auteur :

Claude Villers

Rue Piérard 29

B-7022 Hyon

Réflexions sur les propriétés des racines d'une fonction polynôme à partir des dérivées

H. Dujacquier, *Ecole Normale de Braine-le-Comte*

Les propriétés des racines d'une fonction polynôme font appel à la fois à l'Algèbre et à l'Analyse. Le but de cet article est de donner une belle application du calcul des dérivées, ce qui conduit à une généralisation de propriétés bien connues (notamment par les élèves de 4ème) sur les racines du trinôme du second degré. Les résultats généraux seront illustrés par un exemple.

1. Propriétés des racines d'un polynôme

1.1. Multiplicité d'une racine

Soit une fonction polynôme

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Rappelons que α est racine (ou zéro) de multiplicité k de p si et seulement si

$$p(x) \begin{cases} \text{est divisible par } (x - \alpha)^k \\ \text{n'est pas divisible par } (x - \alpha)^{k+1} \end{cases}$$

La dérivée k -ième (où $1 \leq k \leq n$) de $p(x)$ est

$$p^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^n \frac{i!}{(i-k)!} a_i x^{i-k}.$$

En exploitant la formule de Taylor (et en remarquant que la dérivée $(n+1)$ -ième de p s'annule), on peut écrire que

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

où $c \in \mathbb{R}$.

Dès lors, on peut en déduire la propriété importante suivante :

Si, $\forall h$ tel que $0 \leq h < k$, on a $p^{(h)}(\alpha) = 0$ et $p^{(k)}_{(\alpha)} \neq 0$, alors α est une racine de multiplicité k de p .

Illustrons cette propriété par un exemple : soit

$$p(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x + 8.$$

Puisque $p(2) = 0$, 2 est racine de p . Recherchons sa multiplicité :

$$\begin{aligned} p^{(1)}(x) &= 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 + 4x - 8 & p^{(1)}(2) &= 0 \\ p^{(2)}(x) &= 20x^3 - 48x^2 + 24x - 4 & p^{(2)}(2) &= 20 \neq 0 \end{aligned}$$

donc le réel 2 est racine de multiplicité 2 de p .

Signalons que cette propriété reste valable pour une fonction polynôme $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, c'est-à-dire une fonction polynôme, à une variable complexe et à coefficients complexes.

1.2. Relations entre les coefficients et racines

Soit

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n \left(\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{a_n} x^i \right),$$

où $a_i \in \mathbb{R}$, ($a_n \neq 0$).

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les n racines de p , certaines pouvant être confondues et non réelles :

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i).$$

En développant et en identifiant les coefficients, on obtient les *relations de Viète* suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n-1}}{a_n} &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\
 \frac{a_{n-2}}{a_n} &= (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n) \\
 \frac{a_{n-3}}{a_n} &= -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) \\
 &\vdots \\
 \frac{a_0}{a_n} &= (-1)^n \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}\alpha_n
 \end{aligned}$$

Ces égalités permettent bien entendu d'obtenir des indications sur le signe des racines (à condition, bien sûr, que l'on sache que les racines sont réelles).

Montrons ces relations sur un exemple : soit

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a_3x^2 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\
 &= a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a[x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2](x - \alpha_3) \\
 &= a[x^3 - \alpha_3x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3x) + \alpha_1\alpha_2x + \alpha_1\alpha_2\alpha_3] \\
 &= a[x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3].
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
 \frac{a_3}{a_3} &= \frac{a}{a} = \underbrace{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}_{\text{opposé de la somme des racines}} \\
 \frac{a_2}{a_3} &= \frac{a_2}{a} = \underbrace{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3}_{\text{somme des produits des racines prises 2 à 2}} \\
 \frac{a_1}{a_3} &= \frac{a_1}{a} = \underbrace{-\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{(-1)^3 \cdot \text{produit des racines}}
 \end{aligned}$$

Ces relations ont un intérêt car elles permettent d'effectuer du calcul algébrique sur les racines d'un polynôme sans connaître les valeurs des racines ; ainsi, envisageons le problème suivant [1] : soit

$$p(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$$

et notons x_1, x_2, x_3 ses racines. On demande de calculer

$$S = \frac{1}{2 - x_1} + \frac{1}{2 - x_2} + \frac{1}{2 - x_3}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{(2 - x_2)(2 - x_3) + (2 - x_1)(2 - x_3) + (2 - x_1)(2 - x_2)}{(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3)} \\ &= \frac{4 - 2x_3 - 2x_2 + x_2x_3 + 4 - 2x_3 - 2x_1 + x_1x_3 + 4 - 2x_2 - 2x_1 + x_1x_2}{8 - x_1 - 4x_2 + 2x_1x_2 - 4x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 - x_1x_2x_3} \\ &= \frac{12 - 4(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{8 - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = -3 \\ a_0 = -1 \\ n = 3 \end{cases}$$

donc,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{0}{1} = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{-3}{1} = -3 \\ x_1x_2x_3 = (-1)\frac{(-1)}{1} = 1 \end{cases}$$

et dès lors,

$$S = \frac{12 - 3}{8 - 6 - 1} = 9.$$

N.B. Ces relations s'appliquent aussi pour $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : x \rightarrow p(x)$ et permettent parfois la recherche rapide de certaines racines.

2. Une propriété intéressante

Si

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines, distinctes ou confondues, de p , λ est un réel distinct de x_i , où $1 \leq i \leq n$, $p^{(1)}(x) = p'(x)$ est la dérivée première de p , alors

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda - x_i} = \frac{p^{(1)}(\lambda)}{p(\lambda)}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad \text{où } a \neq 0 \\ p^{(1)}(x) &= p'(x) \\ &= a[(x - x_2) \dots (x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n) \\ &\quad + \dots + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})] \\ &= \frac{p(x)}{x - x_1} + \frac{p(x)}{x - x_2} + \dots + \frac{p(x)}{x - x_n} \end{aligned}$$

donc,

$$\frac{p^{(1)}(x)}{p(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}.$$

En prenant $x = \lambda$, on obtient bien

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda - x_i} = \frac{p^{(1)}(\lambda)}{p(\lambda)}.$$

Application :

Reprenons le problème [1]

$$S = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2 - x_i} = \frac{p^{(1)}(2)}{p(2)}$$

or : $p(x) = x^3 - 3x - 1$, donc $p(2) = 1$ et $p^{(1)}(2) = 9$ et, dès lors,

$$S = \frac{9}{1} = 9.$$

Adresse de l'auteur :

Hector Dujacquier

Chaussée d'Enghien 165

7060 Soignies

Approche polynomiale de la fonction coût total de production

D. Justens, Institut Cooremans-Bruxelles

1. Introduction

Depuis plusieurs années notre cheval de bataille a été de manière systématique la réhabilitation de la mathématique dite “utile”. Nous pensons que le manque d’intérêt des mathématiciens pour toute forme de pragmatisme, d’application, d’utilitarisme est à la base du rejet de notre art par les non initiés. Les polynômes sont présentés de façon généralement purement théorique dans le secondaire. Nous montrons ici qu’une approche réaliste est possible et même, pensons-nous, souhaitable. Nous suivrons la présentation de J. Bair dans [2], en inversant l’ordre des préférences : au lieu d’interpréter une fonction préexistante dans un contexte économique, nous allons en construire une de façon progressive, en respectant certaines exigences réalistes et légitimes.

Considérons un secteur économique spécialisé dans la production d’un seul bien. On appelle *fonction coût total* la somme de toutes les dépenses engagées pour la production d’une certaine quantité de ce bien particulier. Cette fonction dépend de manière explicite de choix décisionnels antérieurs à la mise en place de l’unité de production : il convient en particulier de fixer l’ordre de grandeur de sa densité de production moyenne (production par unité de temps) qui dépendra de l’espérance de la demande effective pour le bien envisagé. Nous notons q^* l’ordre de grandeur de la densité de production correspondant à l’importance et à la structure de la chaîne de production mise en place.

Le coût total est réparti en coûts fixes et coûts variables. Les premiers dépendent explicitement de q^* , les seconds sont fonction de la demande réellement observée q . On peut donc écrire pour un certain horizon $[0, T]$:

$$C(q) = CF(q^*) + CV(q)$$

où $q \in [0, q^* + \epsilon]$, une certaine marge de manoeuvre étant prévue.

Dans ce qui suit nous allons considérer $CF(q^*)$ comme constant et donner à $CV(q)$ des formes polynomiales successivement des premier, deuxième

et troisième degrés, en montrant que le passage à un degré supérieur se justifie par un accroissement de réalisme et un prolongement de l'intervalle de validité de la fonction étudiée.

2. Modélisation linéaire

Nous supposons que la fonction coût total est de la forme :

$$C(q) = cq + d$$

dans laquelle d représente les coûts fixes : $d \geq 0$.

On constate immédiatement que pour la description linéaire, les coûts marginaux théorique et réel coïncident :

$$C'(q) = c = C(q+1) - C(q).$$

$$c > 0.$$

Cette mise en équation est réaliste pour la production des premières pièces. Lorsque la production devient plus importante on constate généralement des effets d'apprentissage (learning effects) qui font de la fonction *coût marginal* une fonction décroissante dans un certain intervalle. On vérifie néanmoins que la fonction *coût unitaire* décroît paraboliquement vers la constante c :

$$CU(q) = \frac{C(q)}{q} = c + \frac{d}{q}.$$

Il faut introduire une correction du second degré pour rendre compte de la décroissance du coût marginal en tenant compte du fait que cette correction doit être négligeable dans un certain voisinage à droite de 0.

3. Modélisation quadratique

Considérons à présent la fonction

$$C(q) = bq^2 + cq + d$$

dans laquelle, comme plus haut, d représente les coûts fixes.

Etudions les fonctions coût marginal théorique et coût marginal réel. Ces fonctions sont différentes mais doivent être du même ordre de grandeur. On calcule successivement

$$\begin{aligned}C'(a) &= 2bq + c \\ C(q+1) - C(q) &= 2bq + b + c.\end{aligned}$$

Ces fonctions étant décroissantes par hypothèse, b doit être négatif.

On introduit ici un seuil de sensibilité à l'effet d'apprentissage : $q^\sim$. On considère un certain niveau de production à partir duquel le coût unitaire marginal descend d'une unité monétaire (définition implicite de l'unité monétaire du problème considéré). On vérifie que l'ordre de grandeur de b est proportionnel à $1/q^\sim$.

$$b = -\frac{1}{2q^\sim} \quad b = -\frac{1}{2q^\sim + 1}$$

selon le coût marginal (réel ou théorique) choisi.

Pour illustrer la différence d'ordre de grandeur des coefficients b et c , considérons le cas d'une production au coût unitaire variable égal à 100 pour les première pièces et qui se réduit à 99 lorsque l'on produit plus de 100 pièces. On en déduit :

$$\begin{aligned}C'(0) &= c = 100 \\ C'(100) &= 2b * 100 + 100 = 99\end{aligned}$$

dont on tire $b = -0.005$. Le coût marginal réel pour la 500ème pièce vaut ici 98.995. On constate que l'ordre de grandeur de l'erreur est très raisonnable.

Cette première correction accroît de manière considérable le domaine de validité de la variable q . On vérifie cependant aisément que la fonction quadratique $C(q)$ ne peut de manière réaliste être définie sur $\mathbb{R}^+$. En effet lorsque q se rapproche de q^* , la fonction *coût marginal théorique* $C'(q)$ devrait tendre vers un minimum local, ce qui, évidemment, n'est pas le cas dans notre modèle. Supposons dans le cadre du même exemple que la diminution de coût marginal se poursuive jusqu'au troisième millier de pièces produites. $C(3000)$ vaut alors 70 : cette valeur est probablement trop basse. On constate en effet (par exemple) que le coût marginal minimum est de l'ordre de 80. Le modèle quadratique ne peut être utilisé jusqu'à q^* . Remarquons que le modèle linéaire a un domaine d'utilisation plus étroit encore.

Nous vérifierons dans l'exemple proposé que le modèle linéaire s'utilise pour des productions inférieures à 1000, que le quadratique s'avère performant jusqu'à deux mille pièces.

Au delà du seuil q^* , la capacité de l'unicité de production est dépassée, il faut faire appel à de la sous-traitance, ou réinvestir dans une nouvelle unité de production, ce qui accroît le coût marginal. A ce stade, une correction du troisième degré s'avère nécessaire pour rendre compte de l'effet de saturation de la capacité de production de la chaîne.

Etudions encore la fonction coût unitaire moyen :

$$CU(q) = bq + c + \frac{d}{q}.$$

Cette dernière a une asymptote oblique de pente négative, ce qui montre l'absurdité du modèle au delà d'un certain seuil.

4. Modélisation cubique

On considère à présent la fonction :

$$C(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d \quad \begin{array}{l} b < 0 \\ c > 0, d \leq 0 \text{ comme plus haut} \end{array}$$

Le terme ajouté doit jouer un rôle au delà du seuil observé au point précédent, mais être négligeable en deçà de celui-ci. Etudions le coût marginal théorique :

$$C'(q) = 3aq^2 + 2bq + c.$$

$C''(q) > 0$ entraîne obligatoirement $a > 0$ et $b^2 < 3ac$. Nous verrons que cette dernière condition est toujours vérifiée.

L'existence d'un minimum local au voisinage de q^* nous donne :

$$C'''(q^*) = 0.$$

Ce minimum est empiriquement déterminable. Soit $c_{\min}$ le coût marginal minimum associé à une chaîne de production. Dans un contexte réaliste,

$c_{\min}$ est fonction de q^* et dépend de d : une installation plus imposante, plus coûteuse permet généralement de produire moins cher. On a donc

$$C'(q^*) = c_{\min}.$$

Notons $\Delta c = c - c_{\min}$ ($\Delta c > 0$ par hypothèse). Ces deux équations nous permettent aisément d'arriver à :

$$b = -\frac{\Delta c}{q^*} \quad a = \frac{\Delta c}{3q^{*2}}.$$

On notera avec intérêt l'ordre de grandeur des coefficients intervenant dans les deux corrections successives.

Il convient de vérifier que les coûts marginaux réel et théorique sont voisins. On calcule :

$$C(q+1) - C(q) - C'(q) = 3aq + a + b$$

qui est *négligeable* (à définir) dans l'intervalle $[0, q^* + \epsilon]$ qui nous intéresse.

On vérifie que la condition $b^2 < 3ac$ devient ici $c > \Delta c$, qui est une évidence.

On redéfinit enfin le seuil de sensibilité $q^\sim$ qui obéit à l'équation :

$$C'(q^\sim) = c - 1.$$

On trouve

$$q^\sim = \left[1 - \sqrt{1 - 1/\Delta c} \right] q^*.$$

5. Comparaison des modèles

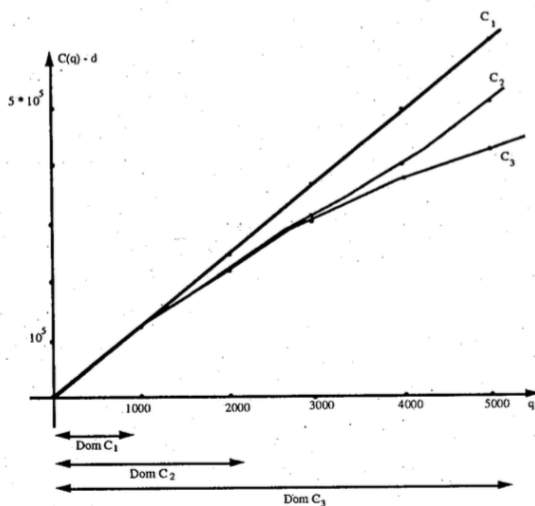
Etudions à présent les trois modèles présentés dans le cadre du même exemple. Un graphique nous illustrera l'accroissement de réalisme que constitue l'ajout d'un terme de degré plus élevé dans la description étudiée. Il convient de comparer :

$$\begin{aligned} C_1(q) &= 100q + d \\ C_2(q) &= -0.005q^2 + 100q + d \\ C_3(q) &= \frac{20}{27}10^{-6}q^3 - \frac{2}{3}10^{-2}q^2 + 100q + d \end{aligned}$$

On obtient le tableau de valeurs :

q	1000	2000	3000	4000	5000
$C_1 - d$	100 000	200 000	300 000	400 000	500 000
$C_2 - d$	95 000	180 000	255 000	320 000	375 000
$C_3 - d$	94 074	179 259	260 000	340 741	425 926

Graphiquement, on illustre l'accroissement du domaine de validité des trois modèles :



Bibliographie

- [1] BAIR, J., Mathématiques générales, De Boeck-Université. 3e édition, 1993.
- [2] BAIR, J., HINNION, R., JUSTENS, D., Applications économiques au service de la mathématique, SBPM, 1989.

Variations autour de la définition des fonctions convexes - 1^{ère} partie

J. Bair et G. Haesbroeck, Université de Liège

La théorie des fonctions convexes s'est fortement développée ces derniers temps, au point qu'elle est devenue une discipline mathématique "à part entière" et baptisée *analyse convexe*.

Le grand intérêt porté à cette matière s'explique assurément par le fait que les fonctions convexes jouissent de propriétés remarquables, notamment dans le domaine de l'optimisation : elles sont dès lors très souvent exploitées dans des problèmes concrets rencontrés notamment par des ingénieurs et des économistes.

Il nous a semblé opportun de présenter en détail les fonctions convexes d'une seule variable ⁽¹⁾. En effet, l'analyse convexe, qui est fort riche d'un point de vue théorique, est généralement assez mal connue ; le plus souvent, on ne fait appel qu'à des propriétés locales de convexité pour caractériser le graphique des fonctions considérées : par exemple, on se contente de constater que si une fonction f est deux fois dérivable au voisinage d'un point a tel que $f''(a) \geq 0$, alors f est localement convexe en a (ou, comme on a souvent l'habitude de le dire, f tourne sa concavité vers le haut en a). Quand, par hasard, est évoquée la convexité globale d'une fonction, c'est-à-dire la convexité sur un ensemble (qui doit être un intervalle, borné ou non, ouvert ou non), c'est principalement pour des fonctions dont les graphes sont bien "lisses", alors que des fonctions convexes non dérivables sont rencontrées dans de nombreux problèmes réels ; nous nous proposons de montrer que la convexité peut être introduite de différentes façons, sans nécessairement faire appel à des hypothèses additionnelles. Par ailleurs, les applications concrètes des fonctions convexes sont souvent ignorées des mathématiciens ; d'un autre côté, les praticiens qui se servent effectivement de fonctions convexes, le font parfois avec peu de rigueur.

Ces raisons nous ont incités à nous intéresser d'assez près à cette question ; nous suivons ainsi l'avis de J.L. Jensen, un des fondateurs de la convexité, qui écrivait : *it seems to me that the notion of convex function is just as fundamental as positive function or increasing function. If*

1. Le fait de n'étudier que des fonctions d'une seule variable n'est guère restrictif, puisqu'il est possible de démontrer que la convexité d'une fonction de plusieurs variables équivaut à la convexité de fonctions d'une seule variable. [9, p.91].

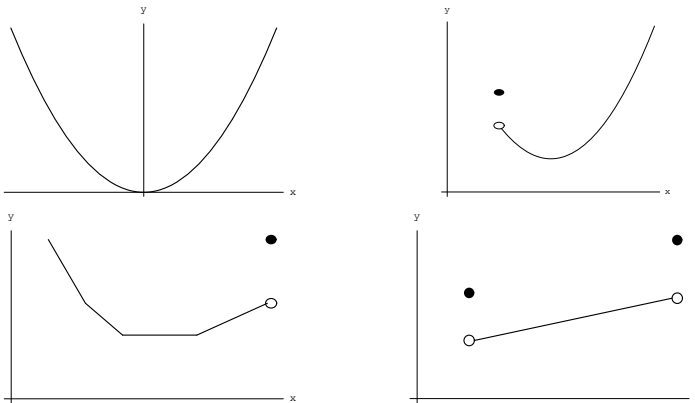
I am not mistaken in this, the notion ought to find its place in elementary expositions of the theory of real functions. Vu l'ampleur de la matière, nous allons, dans cette note, présenter différentes façons équivalentes d'introduire les fonctions convexes, toutes ces versions ayant leurs avantages et se révélant exploitables dans la pratique.

Fixons le cadre de cette étude. Nous ne considérerons dans ce travail que des fonctions réelles d'une variable réelle définies sur un intervalle (borné ou non, fermé ou non). Nous adopterons une terminologie et des notations relativement classiques (voir, par exemple, [3] et [14]). La notation I sera réservée à un intervalle non nécessairement borné, mais *vrai*, c'est-à-dire non réduit à un point ou à l'ensemble vide ; l'intérieur de I sera noté $\overset{\circ}{I}$. La fin d'une démonstration sera indiquée par le symbole ■.

1. Définition géométrique : position du graphe par rapport aux cordes

Par définition, une fonction f définie sur I est dite *convexe* sur I lorsque le segment reliant deux points arbitraires du graphe de f ne passe nulle part sous celui-ci. Or, le segment reliant deux points A et B du graphe sera nommé *corde* et désigné simplement par AB . Dans ces conditions, f est donc convexe lorsque toutes les cordes sont situées au-dessus ou sur la courbe représentant la fonction.

Ainsi, on contrôlera intuitivement la convexité des fonctions représentées par les graphes suivants :



De même, on contrôlera géométriquement, en en traçant le graphique, que toute fonction exponentielle a^x (avec $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$) est convexe sur $\mathbb{R}$.

Ces exemples montrent qu'une fonction peut être convexe sur un intervalle borné ou non, fermé ou non, qu'elle n'est pas nécessairement continue, ni dérivable ; observons toutefois que les seuls points de discontinuité que l'on peut trouver sont situés aux extrémités de l'intervalle considéré (on peut en effet démontrer qu'une fonction convexe sur I est continue sur l'intérieur de I), tandis que les éventuels points de non dérivabilité intérieurs à l'intervalle sont assez exceptionnels (il est possible de prouver qu'ils forment effectivement un ensemble dénombrable). Par ailleurs, remarquons que le graphe d'une fonction convexe peut ou non comporter des portions rectilignes.

2. Définition analytique à l'aide d'inégalités sur les valeurs de la fonction

Pour reconnaître la convexité d'une fonction dont le graphe n'est pas donné, il convient de traduire analytiquement la définition géométrique précédente.

Si a et b sont deux points distincts de I , avec pour fixer les idées $a < b$, tout point x de $]a, b[$ peut s'écrire $x = a + \theta(b - a) = (1 - \theta)a + \theta b$, avec $0 < \theta < 1$, ou encore, de façon équivalente par l'introduction de $\lambda = 1 - \theta$, $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ avec $0 < \lambda < 1$.

Comme l'équation de la droite passant par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ du graphe de f est donnée par : $y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, le point d'abscisse $x_\lambda = \lambda a + (1 - \lambda)b$ de la corde AB possède l'ordonnée

$$y_\lambda = f(a) + (1 - \lambda)[f(b) - f(a)] = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

On exprime que f est convexe sur I en écrivant que $f(x_\lambda) \leq y_\lambda$. En termes plus précis, f est convexe sur I lorsque

$$f[\lambda a + (1 - \lambda)b] \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

pour toute paire $\{a, b\}$ de points de I et tout réel λ de $]0, 1[$ (2).

2. Certains auteurs prennent ici λ dans $[0, 1]$, car $\lambda a + (1 - \lambda)b$ se réduit respectivement à a ou b lorsque λ est égal à 1 ou 0, et l'inégalité requise de f est vérifiée trivialement dans ces cas.

Par des manipulations élémentaires d'inégalités, cette définition analytique permet de vérifier la convexité de nombreuses fonctions. Donnons quelques exemples assez classiques, dont seuls les derniers méritent quelques justifications.

Les fonctions x et $|x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$, de même que les fonctions constantes.

Si g est convexe sur I , alors $f(x) = g(ax + b)$ est également convexe sur I quels que soient les réels a et b . En conséquence, toute fonction affine $f(x) = ax + b$ est convexe sur $\mathbb{R}$, de même que $-f$ et $|f|$; il est d'ailleurs possible de démontrer que la seule fonction f qui est convexe sur $[a, b]$ en même temps que son opposée $-f$ est la fonction affine sur $[a, b]$, à savoir

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

[1, prop. 11,p.975].

Si h est convexe sur I et g est convexe et croissante sur $h(I)$, alors $f = g \circ h$ est convexe sur I ; en particulier, $f(x) = ag(x) + b$ est convexe sur I dès que g est convexe sur I et $a > 0$; plus généralement, si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions convexes sur I et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels non négatifs, alors $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)$ est convexe sur I .

Si g est une fonction croissante et intégrable sur $[a, b]$, alors la fonction $f(x) = \int_a^x g(t)dt$ est convexe sur I : en effet, si $a \leq x < z \leq y, \lambda \in]0, 1[$ et $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, alors

$$\begin{aligned} f(z) - \lambda f(x) - (1 - \lambda)f(y) &= \lambda \int_x^z g(t)dt + (\lambda - 1) \int_z^y g(t)dt \\ &\leq \lambda g(z)(z - x) + (\lambda - 1)(y - z)g(z) = 0; \end{aligned}$$

on peut même prouver cette “représentation intégrale” des fonctions convexes : une fonction f définie sur $I = [a, b]$ est convexe sur I si et seulement s'il existe une fonction g croissante ⁽³⁾ sur I et un point c de I tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt$ [12, theor. 1.13, p.9].

Si f et g sont deux fonctions non négatives, décroissantes et convexes sur I , alors $h(x) = f(x)g(x)$ est convexe sur I ; en effet, pour $x < y$,

$$[f(x) - f(y)][g(y) - g(x)] \leq 0$$

3. On peut prendre pour g la dérivée à droite f'_+ (dont l'existence et la croissance sur I peuvent être prouvées [12, p.4]).

entraîne

$$f(x)g(y) + f(y)g(x) \leq f(x)g(x) + f(y)g(y);$$

de plus, pour tout $\lambda \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} & f[\lambda x + (1 - \lambda)y]g[\lambda x + (1 - \lambda)y] \\ & \leq [\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)][\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)] \\ & = \lambda^2 f(x)g(x) + \lambda(1 - \lambda)[f(x)g(y) + f(y)g(x)] + (1 - \lambda)^2 f(y)g(y) \\ & \leq \lambda^2 f(x)g(x) + \lambda(1 - \lambda)[f(x)g(x) + f(y)g(y)] + (1 - \lambda)^2 f(y)g(y) \\ & = \lambda f(x)g(x) + (1 - \lambda)f(y)g(y). \end{aligned}$$

Enfin, si des fonctions f_n ($n \in \mathbb{N}$), convexes sur I , forment une suite convergeant (point par point) vers une fonction f définie sur I , alors f est également convexe sur I en vertu de la conservation des inégalités par passage à la limite.

3. Convexité de l'épigraphe

La notion de fonction convexe est bien entendu étroitement reliée à celle d'ensemble convexe. Si f est une fonction définie sur I , nous démontrerons que la convexité de f sur I équivaut à la convexité de son *épigraphe* qui est un sous-ensemble de l'espace $\mathbb{R}^2$ défini par

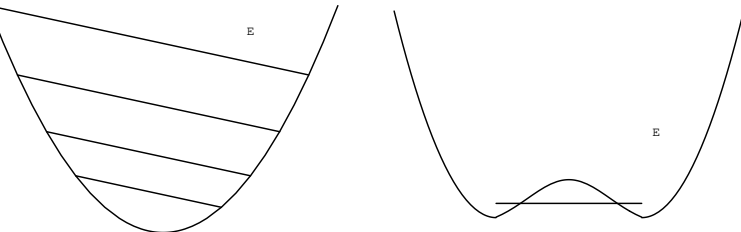
$$Epi(f) = \{(x, y) : x \in I, y \geq f(x)\}.$$

Rappelons qu'un ensemble E de $\mathbb{R}^2$ est *convexe* dès qu'il inclut tout entier le segment de droite reliant deux quelconques de ses points ; en termes plus précis, E est convexe si et seulement si

$$\forall X_1, X_2 \in E, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 \in E$$

sachant que, pour $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$,

$$\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2).$$



E convexe
(épigraphe d'une fonction
convexe)

E non convexe
(épigraphe d'une fonction
non convexe)

Proposition 3.1 *La fonction f , définie sur I , est convexe sur I si et seulement si l'ensemble $Epi(f)$ est convexe.*

Preuve

Supposons d'abord f convexe sur I . Pour montrer que $Epi(f)$ est convexe, considérons deux quelconques de ses points $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$, puis formons $X = (x, y) = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$ avec $\lambda \in]0, 1[$. On a donc $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in I$ et, puisque $X_1, X_2 \in Epi(f)$, $y_1 \geq f(x_1)$, $y_2 \geq f(x_2)$. De là, $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$. De plus, par l'hypothèse de convexité sur f , $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$. En conclusion, $y \geq f(x)$ et $X \in Epi(f)$.

Réciproquement, soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de I ; $X_1 = (x_1, f(x_1))$ et $X_2 = (x_2, f(x_2))$ sont des points de $Epi(f)$. En vertu de la convexité de cet ensemble, on a, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, $\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 \in Epi(f)$, soit

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

■

Comme application de ce résultat, on peut démontrer que le supremum f d'une famille quelconque de fonctions $f_i (i \in J)$ convexes sur I est également convexe sur I , sachant que f est définie par $f(x) = \sup_{i \in J} f_i(x)$ pour tout x de I . En effet, l'épigraphe de f coïncide avec l'intersection des épigraphes des f_i et l'intersection d'ensembles convexes est convexe.

De cette proposition 4 peut être déduite une jolie caractérisation géométrique de la convexité d'une fonction à partir de la distance de points au graphe correspondant.

Proposition 3.2 *Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$; f est convexe sur I si et seulement si, pour tout point P situé sous le graphe de f , il existe un unique point du graphe qui est le plus proche de P .*

Preuve

Pour ne pas entrer dans des détails trop techniques, contentons-nous de donner les grandes lignes de la démonstration.

L'épigraphe E de f est, dans le plan numérique $\mathbb{R}^2$, un ensemble fermé puisque f est une fonction continue sur I . Or, un théorème dû à Motzkin (qui exploite essentiellement le caractère strictement convexe d'un disque, c'est-à-dire le fait que le segment de droite reliant deux points du cercle correspondant est, aux extrémités près, tout entier situé dans l'intérieur du disque) caractérise les ensembles fermés qui sont convexes : E est convexe si et seulement si, pour tout point P de $\mathbb{R}^2$, il existe un unique point Q de E dont la distance à P est égale à la distance de P à E [11, 7-8, p. 94]. Par ailleurs, pour tout point P situé sous le graphe de f , la distance de P au graphe est égale à la distance de P à E .

On peut en déduire la thèse, via la proposition 3. ■

4. Inégalités sur les pentes des cordes

La définition géométrique de la convexité entraîne diverses conditions sur les pentes des cordes.

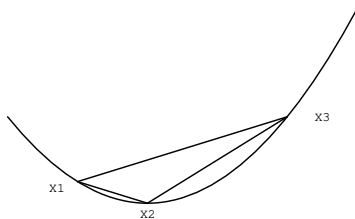
Proposition 4.1 *Soit f une fonction définie sur I ; f est convexe sur I si et seulement si, pour tous x_1, x_2, x_3 de I tels que $x_1 < x_2 < x_3$, on a*

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Interprétation géométrique. Cet énoncé exprime que pour trois points X_1, X_2 et X_3 pris sur le graphe (parcours de gauche à droite) de f convexe, on dispose de cette relation entre pentes de cordes :

$$p(X_2X_3) \geq p(X_1X_3) \geq p(X_1X_2)$$

en désignant par $p(X_iX_j)$ la pente de la corde X_iX_j où $X_i = (x_i, f(x_i))$.



Preuve

Supposons tout d'abord f convexe sur I .

Soient $x_1, x_2, x_3 \in I$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$: il existe $\lambda, \theta \in]0, 1[$ tels que

$$x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3 = x_1 + \theta(x_3 - x_1) \text{ avec } \theta = 1 - \lambda$$

Par hypothèse de convexité,

$$f(x_2) - f(x_3) \leq \lambda [f(x_1) - f(x_3)]$$

et

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \theta [f(x_3) - f(x_1)];$$

comme $x_2 - x_3 < 0$ et $x_2 - x_1 > 0$, l'on en déduit

$$\frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \geq \lambda \left[\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \right]$$

et

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \theta \left[\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right];$$

mais $x_2 - x_3 = \lambda(x_1 - x_3)$ et $x_2 - x_1 = \theta(x_3 - x_1)$, d'où la thèse.

Réciproquement, soient x_1 et x_3 quelconques dans I , avec par exemple $x_1 < x_3$, et $\lambda \in]0, 1[$; pour $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$, on a par hypothèse

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

ou

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} [f(x_3) - f(x_1)]$$

puisque $x_2 > x_1$; or $x_3 - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{1 - \lambda}$, d'où

$$f(x_2) \leq f(x_1) + (1 - \lambda) [f(x_3) - f(x_1)] = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3).$$

■

Cette proposition permet, par exemple, de vérifier la convexité de la fonction décrivant l'évolution d'un capital dans le modèle financier mixte [3] : pour un réel positif i (qui représente le taux périodique de l'intérêt), on considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (1 + i)^n(1 + hi)$, où $x = n + h$, n désignant la partie entière de x et h sa partie décimale : f admet une infinité de points de non-dérivabilité mais est convexe sur $[0, +\infty[$ en même temps que la fonction $g(x) = (1 + i)^x$.

5. Croissance de la pente des cordes

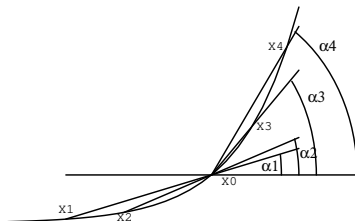
Les inégalités précédentes traduisent la croissance de la pente des cordes par rapport à un point déterminé; si x_0 est un point de I , nous considérons la fonction

$$p_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

la valeur de $p_{x_0}(x)$ représente la pente de la corde X_0X , avec $X_0 = (x_0, f(x_0))$ et $X = (x, f(x))$.

Proposition 5.1 *f est convexe sur I si et seulement si la fonction p_{x_0} , où x_0 est un point fixé de $\overset{\circ}{I}$, est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.*

Interprétation géométrique. Soit f convexe sur I . Pour cinq points x_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) de I tels que $x_1 < x_2 < x_0 < x_3 < x_4$, on a $\text{tg } \alpha_1 < \text{tg } \alpha_2 < \text{tg } \alpha_3 < \text{tg } \alpha_4$, donc $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$, où α_i désigne l'angle fait par la corde X_0X_i avec une horizontale.



Preuve

Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Si $x_1, x_2 \in I \setminus \{x_0\}$, avec $x_1 < x_2$, trois cas peuvent se présenter, à savoir $x_1 < x_0 < x_2$, $x_1 < x_2 < x_0$ ou $x_0 < x_1 < x_2$; considérons uniquement le premier de ces cas, les autres se traitant de la même manière. Par la proposition 4, on sait que

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1},$$

d'où $p_{x_0}(x_1) \leq p_{x_0}(x_2)$.

Démontrons à présent que la condition est suffisante. Pour deux points x_1, x_2 de I , tels que $x_1 < x_2$, et pour $\lambda \in]0, 1[$, prenons $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$.

Par hypothèse, $p_{x_0}(x_1) \leq p_{x_0}(x_2)$ puisque $x_1 < x_0 < x_2$. Or, $x_1 - x_0 = (1 - \lambda)(x_1 - x_2)$ et $x_2 - x_0 = \lambda(x_2 - x_1)$. D'où,

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(1 - \lambda)(x_1 - x_2)} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{\lambda(x_2 - x_1)}.$$

Comme $x_2 - x_1 > 0$, on a encore $-\frac{f(x_1) - f(x_0)}{1 - \lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{\lambda}$, soit

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

■

Comme corollaire de cet énoncé, on déduit que si f est convexe sur I , alors, pour tout x_0 fixé dans $\overset{\circ}{I}$, la fonction p_{x_0} est bornée sur $\overset{\circ}{I} \setminus \{x_0\}$. En effet, si $a, b \in \overset{\circ}{I} \setminus \{x_0\}$, avec $a < b$, $p_{x_0}(a)$ et $p_{x_0}(b)$ sont des nombres (finis) qui sont respectivement minorant et majorant de l'ensemble $\{p_{x_0}(x) : x \in [a, b] \setminus \{x_0\}\}$.

En guise d'application, considérons une fonction f définie sur $]0, +\infty[$ et la fonction g définie par $g(x) = xf(\frac{1}{x})$ sur $]0, +\infty[$; f et g sont simultanément convexes sur $]0, +\infty[$ car, pour x_0 fixé dans $]0, +\infty[$, la fonction “pente” de g , à savoir $p_{x_0}^*(x) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$, est reliée à $p_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (pour $x \neq x_0$) par l'égalité suivante :

$$p_{x_0}^*(x) = f\left(\frac{1}{x_0}\right) - \frac{1}{x_0} p_{\frac{1}{x_0}}\left(\frac{1}{x}\right);$$

la conclusion découle de la proposition 5, puisque $p_{x_0}^*$ est visiblement croissante sur $]0, +\infty[\setminus \{x_0\}$ en même temps que $p_{\frac{1}{x_0}}$.

6. Signe de déterminants construits à partir des valeurs de la variable et de la fonction

Etant donné que l'équation de la droite passant par deux points distincts $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

il est assez naturel de traduire les inégalités de la proposition 4 à l'aide de la notion de déterminant.

Proposition 6.1 *f est convexe sur I si et seulement si, pour tous $x_1, x_2, x_3 \in I$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$, on a*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Preuve

Des manipulations élémentaires sur les déterminants conduisent à ces égalités :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 0 & x_2 - x_1 & f(x_2) - f(x_1) \\ 0 & x_3 - x_1 & f(x_3) - f(x_1) \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)[f(x_3) - f(x_1)] - (x_3 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x_1 - x_3 & f(x_1) - f(x_3) \\ 0 & x_2 - x_3 & f(x_2) - f(x_3) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \\ &= (x_1 - x_3)[f(x_2) - f(x_3)] - (x_2 - x_3)[f(x_1) - f(x_3)]. \end{aligned}$$

Il en résulte que la non négativité du déterminant intervenant dans l'énoncé équivaut aux inégalités sur les pentes de la proposition 4. ■

Une façon équivalente de présenter ce dernier résultat consiste à prendre des réels arbitraires distincts x_1, x_2, x_3 dans I , sans exiger qu'ils soient dans l'ordre naturel de la droite numérique.

Proposition 6.2 *f est convexe sur I si et seulement si, pour tous points deux à deux distincts x_1, x_2, x_3 de I , on a*

$$\frac{(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} \geq 0.$$

Interprétation. Le premier membre figurant dans l'énoncé n'est rien d'autre que "la pente de la pente", à savoir de façon précise ;

$$\frac{p_{x_1}(x_2) - p_{x_1}(x_3)}{x_2 - x_3} = \frac{1}{x_2 - x_3} \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \right] ;$$

le caractère non négatif de cette expression traduit la croissance de la fonction p_{x_1} (proposition 5).

Preuve

Le numérateur de la fraction intervenant dans l'énoncé n'est rien d'autre que le déterminant de la proposition 6. Dans le cas où l'on n'a pas $x_1 < x_2 < x_3$, on effectue une permutation des indices pour pouvoir appliquer l'énoncé précédent.

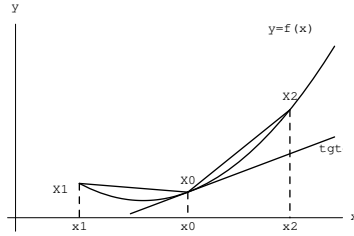
■

7. Position du graphe par rapport à la tangente pour des fonctions dérivables

Le graphe d'une fonction dérivable admet en chacun de ses points une tangente ; la convexité de la fonction considérée peut alors être caractérisée par la position du graphe par rapport aux tangentes.

Proposition 7.1 *Soit f une fonction dérivable dans l'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de I ; f est convexe sur I si et seulement si $f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ pour tous $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ et $x \in I \setminus \{x_0\}$.*

Interprétation géométrique. L'équation de la tangente (au point d'abscisse x_0) au graphe de f est donnée, en l'abscisse x , par $y(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$; l'inégalité de l'énoncé peut donc s'écrire $f(x) \geq y(x)$: elle exprime que tous les points de la courbe sont au-dessus de (ou sur) la tangente à cette courbe en l'un quelconque de ses points situés dans l'intervalle considéré



La convexité de f équivaut encore à l'existence d'inégalités entre les pentes de cordes et de la tangente. En effet, l'énoncé peut se mettre sous la forme équivalente que voici : f , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, est convexe sur I si et seulement si, pour tout $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, tout $x_1 \in \overset{\circ}{I} \cap]-\infty, x_0[$ et tout $x_2 \in \overset{\circ}{I} \cap]x_0, +\infty[$, on a

$$p(X_1X_0) \leq f'(x_0) \leq p(X_2X_0).$$

Preuve

Supposons d'abord f convexe sur I . Pour tout $\lambda \in]0, 1[$,

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)x_0] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_0)$$

ou, de façon équivalente,

$$(x - x_0) \frac{f[x_0 + \lambda(x - x_0)] - f(x_0)}{\lambda(x - x_0)} \leq f(x) - f(x_0).$$

Par passage à la limite pour λ tendant vers 0^+ , on obtient l'inégalité souhaitée.

Réciproquement, soient x_1 et x_2 deux points distincts et quelconques de I , et λ un réel de $]0, 1[$. Pour $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, ou $x_2 = x_0 - \frac{\lambda}{1 - \lambda}(x_1 - x_0)$, l'hypothèse livre

$$f(x_1) \geq f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0)$$

et

$$f(x_2) \geq f(x_0) + (x_2 - x_0)f'(x_0) = f(x_0) + \frac{-\lambda}{1 - \lambda}(x_1 - x_0)f'(x_0).$$

En multipliant par $\frac{\lambda}{1 - \lambda}$ les deux membres de la première inégalité, puis en additionnant membre à membre les deux inégalités, on trouve

$$\frac{\lambda}{1 - \lambda}f(x_1) + f(x_2) \geq \left(\frac{\lambda}{1 - \lambda} + 1\right)f(x_0)$$

d'où

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(x_0).$$

■

à suivre ...

Bibliographie

- [1] Archinard G. - Guerrien B., *Analyse mathématique pour économistes*, Economica, 3ème édition, Paris, 1988.
- [2] Avriel M. - Diewert W. - Schaible S. - Zang I., *Generalized concavity*, Plenum Press, New York, 1988.
- [3] Bair J., *Mathématiques générales à l'usage des sciences économiques, de gestion et A.E.S.*, De Boeck Université, 3ème édition, Bruxelles, 1993.
- [4] Beckenbach E.F., *Convex functions*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 54, 1948, pp. 439-460.
- [5] Hiriart-Urruty J.B. - Lemaréchal C., *Convex analysis and minimization-algorithms I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.
- [6] Janssen J., *Traité de mathématique appliquée pour l'assurance, l'économie et la finance*, tome 2 : *fonctions*, Office international de librairie, Bruxelles, 1993.
- [7] Jongmans F. - Varlet J., *Notions de mathématique à l'usage des sciences humaines*, tome 1, notes de cours, Université de Liège, 1970.
- [8] Moulin H. - Fogelman-Soulié F., *La convexité dans les mathématiques de la décision*, Hermann, Paris, 1979.
- [9] Roberts A.W. - Varberg D.E., *Convex functions*, Academic Press, New York, 1973.
- [10] Rockafellar R.T., *Convex analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1972.
- [11] Valentine F.A., *Convex sets*, Mc Graw-Hill, New York, 1965.
- [12] Van Tiel J., *Convex analysis : an introductory text*, J. Wiley and Sons, Chichester, 1984.
- [13] Vodnev V. - Naoumovitch A et N., *Dictionnaire des mathématiques*, Academia et Editions Mir de Moscou, 1993.

-
-
- [14] Wets R., *Grundlagen Konvexer Optimierung*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, n° 137, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

Adresse des auteurs :

Université de Liège
Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales
Boulevard du Rectorat 7, Bât 31
4000 Liège
Belgique

La base de la fonction exponentielle

G. Hansen, Universidad de Buenos Aires (Argentine)

Depuis longtemps, les mathématiciens sont convaincus du rôle spécial joué par le nombre e comme base de la fonction exponentielle, au point de dire *la* fonction exponentielle pour nommer la fonction exponentielle de base e : cela provient principalement du fait que la fonction e^x coïncide avec sa propre dérivée. Il est d'ailleurs possible de *prouver* que l'égalité $(a^x)' = a^x$ impose nécessairement $a = e$, mais le processus du raisonnement est long et non exempt de complications, et laisse souvent à l'élève une sensation de certitude *rationnelle* dépourvue de contenu intuitif. Nous proposons dans cette note une idée géométrique très simple qui peut aider un élève à comprendre mieux la raison pour laquelle ce mystérieux nombre e possède cette remarquable propriété. Bien entendu, le texte qui suit fait essentiellement appel à l'intuition et n'a pas la prétention de présenter une démonstration rigoureuse.

On commence par dessiner, à l'aide d'une calculatrice, des graphes de quelques fonctions exponentielles simples : 2^x , 3^x , 4^x (voir Figure 1).

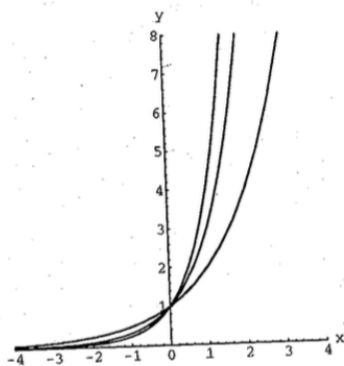
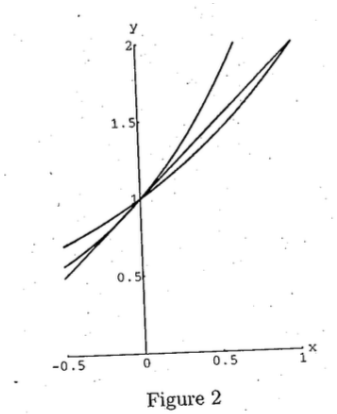


Figure 1

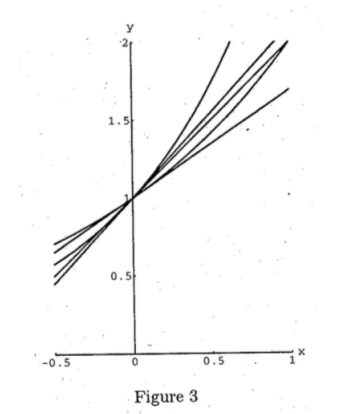
On remarque que, au fur et à mesure que la base devient de plus en plus grande, la courbe correspondante monte de plus en plus vite, ou “devient plus dressée”. Puis, on trace un graphe *soigneux* des fonctions

$$f_2(x) = 2^x \quad \text{et} \quad f_3(x) = 3^x$$

pour les valeurs de x comprises entre 0 et 1, et aussi de la fonction $y = x + 1$ (voir Figure 2).



On *dessine*, sur la même figure, les tangentes aux graphes de f_2 et f_3 au point $(0, 1)$ (Voir Figure 3).



On constate aisément que, pour des valeurs positives de x , la tangente à f_2 reste sous la droite d'équation $y = x + 1$, tandis que la tangente à f_3 reste au-dessus de cette droite. Donc, la pente de la tangente à f_2 est *inférieure* à 1, tandis que celle de la tangente à f_3 est *supérieure* à 1. Comme

les fonctions exponentielles, et donc leurs tangentes, sont de plus en plus dressées au fur et à mesure que leur base croît, l'intuition suggère l'existence d'un nombre, *compris entre 2 et 3*, pour lequel la pente de la tangente de la fonction exponentielle avec ce nombre comme base vaut exactement 1. Appelons e ce nombre et f la fonction exponentielle de base e . Il résulte de ce qui précède que la dérivée de cette fonction en $x = 0$ est égale à 1, c'est-à-dire

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

d'où

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x. \end{aligned}$$

Adresse de l'auteur :

Guillermo Hansen

Ciclo Básico Común

Universidad de Buenos Aires

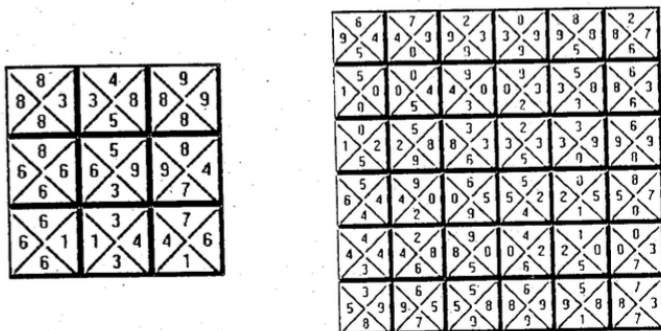
Ciudad Universitaria, Pabellón III

1428 Buenos Aires, Argentina.

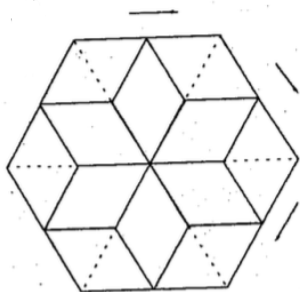
Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

En premier lieu, voici les solutions du jeu “dominos carrés” proposé dans M. et P. n° 103.



Comme je n’ai eu qu’une seule réaction à ce jeu, j’en déduis qu’il n’est sans doute pas très intéressant. Je vous soumets donc un autre sujet de réflexion. Peut-on placer les nombres entiers de 1 à 19 sur les sommets de cette grille de manière que chacune des cinq rangées dans chacune des trois directions ait la même somme ?



Pauvres élèves problème n° 163 de M. et P. n° 102

Dans une classe de n élèves, le professeur remet à l’aveuglette les interrogations aux élèves. Calculer la probabilité pour que k élèves reçoivent leur propre interrogation.

Solution de C. VAN HOOSTE de Marbais-la-tour.

Le problème posé revient à chercher le nombre de permutations de n éléments ayant exactement k points fixes.

Utilisons le symbole D_n^k pour désigner ce nombre.

1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$: $D_n^n = 1$.*

De fait, il n'existe qu'une seule permutation à n éléments dont tous les points sont fixes.

Par extension, nous poserons $D_0^0 = 1$.

2) *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$: $D_n^{n-1} = 0$.*

En effet, si une permutation à n éléments possède $(n-1)$ points fixes, alors le n -ième élément est fixe aussi. Donc, il n'existe aucune permutation à n éléments ayant exactement $(n-1)$ points fixes.

3) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n D_n^k = n!$.*

Cela résulte du fait qu'il existe $n!$ permutations à n éléments.

4) *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$: $D_n^{n-2} = C_n^2$.*

Si seuls deux éléments d'une permutation à n éléments ne sont pas fixes, alors ceux-ci sont forcément images l'un de l'autre. Le nombre de permutations est alors égal au nombre de façons de choisir les deux éléments non fixes dans l'ensemble des n éléments, soit C_n^2 .

5) *Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$: $D_n^k = C_n^k \cdot D_{n-k}^0$.*

C'est une généralisation de la propriété précédente.

Une permutation à n éléments possédant exactement k points fixes est composée de k points fixes à choisir parmi n éléments et de $(n-k)$ éléments parmi lesquels il ne peut plus y avoir de points fixes.

6) *Pour tous $k, n \in \mathbb{N}_0$ tels que $k \leq n$: $D_n^k = \frac{n}{k} D_{n-1}^{k-1}$.*

Par la propriété précédente, nous avons

$$\begin{aligned} D_n^k &= C_n^k \cdot D_{n-k}^0 \\ &= \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} \cdot D_{(n-1)-(k-1)}^0 \\ &= \frac{n}{k} D_{n-1}^{k-1} \end{aligned}$$

7) *Pour tous $n \in \mathbb{N}_0$: $\sum_{k=0}^n k D_n^k = n!$.*

En effet, nous avons

$$\sum_{k=0}^n k D_n^k = \sum_{k=1}^n k \frac{n}{k} D_{n-1}^{k-1} \quad (\text{Propriété 6})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n n D_{n-1}^{k-1} \\
&= n \sum_{k'=0}^{n-1} D_{n-1}^{k'} \quad (\text{avec } k' = k - 1) \\
&= n \cdot (n-1)! \quad (\text{Propriété 3}) \\
&= n!
\end{aligned}$$

- 8) Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$: $D_n^0 - D_n^1 = (-1)^n$.
Démontrons cette propriété par récurrence.
a) Vérifions-la pour $n = 1$:

$$D_1^0 - D_1^1 = 0 - 1 = (-1)^1$$

- b) Supposons que cette propriété est vraie pour tout $n \leq p$ et démontrons qu'alors elle reste vraie pour $n = p + 1$.

$$\begin{aligned}
D_{p+1}^0 &= (p+1)! - \sum_{k=1}^{p+1} D_{p+1}^k \\
&= (p+1)! - \sum_{k=1}^{p+1} C_{p+1}^k D_{(p+1)-k}^0 \\
&= (p+1)! - \sum_{k'=0}^p C_{p+1}^{k'} D_{k'}^0 \\
&= (p+1)! - C_{p+1}^0 D_0^0 - \sum_{k'=1}^p C_{p+1}^{k'} (D_{k'}^1 + (-1)^{k'}) \\
&= (p+1)! - 1 - \sum_{k'=1}^p C_{p+1}^{k'} k' D_{k'-1}^0 - \sum_{k'=1}^p (-1)^{k'} C_{p+1}^{k'} \\
&= (p+1)! - \sum_{k'=0}^p (-1)^{k'} C_{p+1}^{k'} - \sum_{k'=1}^p (p+1) C_p^{k'-1} D_{k'-1}^0 \\
&= (p+1)! + (-1)^{p+1} - \sum_{k'=0}^{p+1} (-1)^{k'} C_{p+1}^{k'} - (p+1) \sum_{k'=1}^p C_p^{k'-1} D_{k'-1}^0 \\
&= (p+1)! + (-1)^{p+1} - (p+1) \sum_{k''=1}^p C_p^{k''} D_{p-k''}^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p+1)! + (-1)^{p+1} - (p+1) \sum_{k''=1}^p D_p^{k''} \\
&= (p+1)! + (-1)^{p+1} - (p+1)(p! - D_p^0) \\
&= (-1)^{p+1} + (p+1)D_p^0 \\
&= (-1)^{p+1} + D_{p+1}^1
\end{aligned}$$

D'où, ce qu'il fallait démontrer,

$$D_{p+1}^0 - D_{p+1}^1 = (-1)^{p+1}.$$

9) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $D_n^0 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} A_n^k$.

Utilisons encore le principe de la démonstration par récurrence.

a) Vérifions d'abord que la propriété est vraie pour $n = 0$:

$$(-1)^0 A_0^0 = 1 = D_0^0.$$

b) Supposons que cette propriété est vraie pour $n = p$ et démontrons-la pour $n = p+1$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
D_{p+1}^0 &= D_{p+1}^1 + (-1)^{p+1} \\
&= (p+1)D_p^0 + (-1)^{p+1} \\
&= (p+1) \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} A_p^k + (-1)^{p+1} \\
&= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} A_{p+1}^{k+1} + (-1)^{p+1} \\
&= \sum_{k'=1}^{p+1} (-1)^{p+1-k'} A_{p+1}^{k'} + (-1)^{p+1} \\
&= \sum_{k'=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k'} A_{p+1}^{k'}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

10) Nous sommes maintenant en possession de propriétés suffisamment agréables, notamment les propriétés 1, 6, 8 et 9, que pour dresser

rapidement une table des valeurs de D_n^k .

k	0	1	2	3	4	5	6
n							
0	1						
1	0	1					
2	1	0	1				
3	2	3	0	1			
4	9	8	6	0	1		
5	44	45	20	10	0	1	
6	265	264	135	40	15	0	1

Voici encore une propriété du symbole D_n^k .

11) *Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$: $D_n^k D_k^0 = D_n^{n-k} D_{n-k}^0$.*

De fait, nous avons

$$\begin{aligned} D_n^k D_k^0 &= C_n^k D_{n-k}^0 D_k^0 \\ &= D_{n-k}^0 C_n^{n-k} D_k^0 \\ &= D_{n-k}^0 D_n^{n-k} \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous notons p_n^k la probabilité qu'une permutation à n éléments, choisie au hasard, possède exactement k points fixes.

12) *Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$: $p_n^k = \frac{p_{n-k}^0}{k!}$.*

En effet, en faisant usage de la propriété 5, nous avons

$$p_n^k = \frac{D_n^k}{n!} = \frac{C_n^k D_{n-k}^0}{n!} = \frac{D_{n-k}^0}{k!(n-k)!} = \frac{p_{n-k}^0}{k!}.$$

13) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n^0 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.*

En partant du résultat précédent et en utilisant la propriété 9, nous avons

$$p_n^0 = \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} A_n^k}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

On constate que p_n^0 est égal à la somme partielle d'ordre n du développement en série de Maclaurin de la fonction e^{-x} .

Les propriétés 12 et 13 permettent de calculer la probabilité demandée dans n'importe quel cas. Par exemple, la probabilité pour que 5 élèves seulement sur une classe de 12 reçoivent leur propre interrogation (lorsque les

interrogations sont distribuées au hasard) vaut

$$p_{12}^5 = \frac{p_7^0}{5!} = \frac{1}{5!} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} \right)$$

soit approximativement 0,00307.

14) La propriété précédente nous offre le résultat surprenant que voici :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n^0 = \frac{1}{e}$$

Surprenante apparition en effet du nombre e au départ d'un calcul de probabilité. Mais, n'en est-il pas ainsi pour le nombre π dans le problème de l'aiguille de Buffon ?

Dans le prochain numéro de M. et P., nous ajouterons à ce qui précède quelques commentaires fort intéressants de G. COSENTINO d'Enghien.

J'ai aussi reçu de bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek, F. GLINEUR de Quiévrain, J. JANSSEN de Lambermont et J. RONDOU de Heverlee.

Le juste milieu problème n° 164 de M. et P. n° 102

Considérons le triangle ABC et $B' \in [AC]$, $A' \in [BC]$, $C' \in [AB]$. Démontrer que si le triangle $A'B'C'$ a ses côtés parallèles à ceux de ABC , alors A' , B' et C' sont les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Remarques préliminaires de B. LOISEAU de Mouscron.

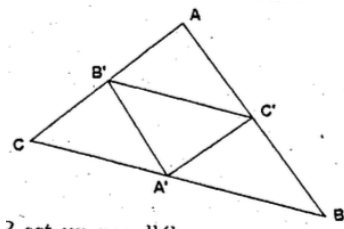
Par le "triangle $A'B'C'$ a ses côtés parallèles à ceux de ABC ", on entend $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$ et $C'A' \parallel CA$. Sinon la situation $A' = B$, $B' = C$ et $C' = A$ (par exemple) contredirait l'énoncé.

Les points A' , B' , C' (sous-entendus distincts) sont différents des sommets A , B , C du triangle.

En effet, si $A' = B$, alors comme $A'B' \parallel AB$, on a $B' = A$ et comme $C' \in [AB]$, les points A' , B' , C' sont alignés, ce qui est impossible.

On supposera dans ce qui suit $B' \in]AC[$, $A' \in]BC[$ et $C' \in]AB[$.

Solution de M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles



Le quadrilatère $A'B'C'B$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles ($B'C' \parallel A'B$ et $A'B' \parallel BC'$ par hypothèse), donc $|B'C'| = |A'B|$.

De même, le quadrilatère $A'C'B'C$ est un parallélogramme, donc $|C'B'| = |A'C|$.

On en conclut que $|BA'| = |A'C|$ et que A' est le milieu de $[BC]$.

Idem pour B' et pour C' .

Bonnes solutions (utilisant Thalès, homothéties, rapports de section, ...) de J. FINOULST de Diepenbeek, F. GLINEUR de Quiévrain, J. JANSSEN de Lambermont, B. LOISEAU de Mouscron, H.J. SEIFFERT de Berlin, C. VILLERS de Hyon.

Coloriage problème n° 165 de M. et P. n° 102

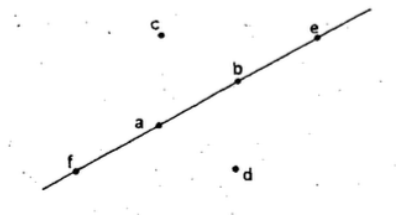
Chaque point du plan est colorié en blanc ou noir de manière arbitraire. Démontrer qu'il existe un triangle équilatéral de côté de longueur 1 ou $\sqrt{3}$ et dont les trois sommets sont de même couleur.

Solution de F. GLINEUR de Quiévrain.

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un coloriage du plan tel qu'aucun triangle équilatéral de côtés de longueur 1 ou $\sqrt{3}$ n'ait ses trois sommets de même couleur.

Lemme : *Tout cercle de rayon 2 a tous ses points de même couleur que son centre.*

Soit a un point noir, D une droite quelconque issue de a et b, c, d, e, f disposés de la manière indiquée par la figure



$$|ab| = |ac| = |ad| = |af| \\ = |bc| = |bd| = |be| = 1$$

1) si b est noir,

alors c est blanc (sinon le triangle abc est noir)

d est blanc (sinon le triangle abd est noir)

e est noir (sinon le triangle cde de côté $\sqrt{3}$ est blanc)

f est noir (sinon le triangle cdf de côté $\sqrt{3}$ est blanc)

2) si b est blanc

dans ce cas, si e était aussi blanc, un raisonnement analogue au précédent montrerait que a est blanc, ce qui est faux, donc e est noir.

Dans tous les cas, si a est noir, tout point e situé à une distance 2 de a est noir.

De même, si a est blanc, tout point e situé à une distance 2 de a est blanc.

Ce qui démontre le lemme.

Démonstration

Soit h un point noir et i un point à la distance 1 de h .

Le cercle de centre h et de rayon 2 a tous ses points noirs et le cercle de centre i et de rayon 2 a tous ses points de la même couleur que i .

Or, ces deux cercles sont sécants, donc ils sont tous deux de la même couleur, ce qui entraîne que i est noir.

Donc, tout point à la distance 1 de h est noir et il existe des triangles équilatéraux de sommet h , de côté 1 et dont les 3 sommets sont noirs. D'où contradiction.

Solution analogue (bien que rédigée différemment) de J. JANSSEN de Lambermont. Un autre lecteur m'a envoyé une solution incomplète, un cas a été oublié.

172. Pas tout à fait Fermat !

Démontrer que, x, y, z, n étant des naturels et $n \geq z$, l'égalité $x^n + y^n = z^n$ est fausse.

173. Triangles particuliers

Trouver tous les triangles dont les côtés sont de longueurs entières et dont le cercle inscrit a comme rayon 1.

174. Equation et triangle

En supposant que les racines de l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

sont toutes réelles et positives, trouver une relation entre p, q, r qui exprime une condition nécessaire pour que ces racines soient les cosinus des angles d'un triangle.

Olympiades

C. Festraets,

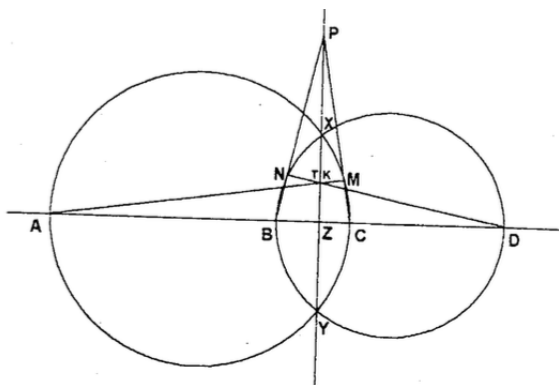
Voici des solutions aux trois premiers problèmes proposés à l'Olympiade Internationale de Mathématique 1995.

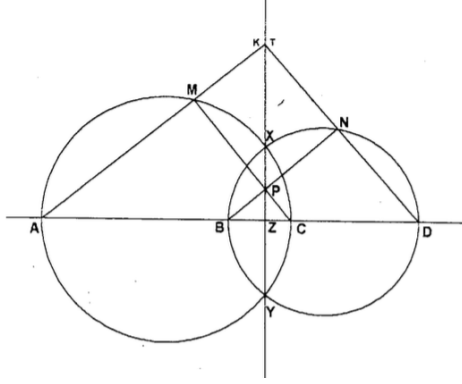
1. A, B, C et D sont, dans cet ordre, quatre points distincts d'une même droite. Les cercles de diamètres AC et BD se coupent aux points X et Y . La droite XY rencontre la droite BC au point Z . Soit P un point de la droite XY , distinct de Z . La droite CP rencontre le cercle de diamètre AC aux points C et M et la droite BP rencontre le cercle de diamètre BD aux points B et N .

Montrer que les droites AM , DN et XY sont concourantes.

Solution.

C'est évident lorsque P est en X ou Y . Supposons donc que P soit différent de X et Y .





Soit K le point d'intersection de AM et XY et soit T le point d'intersection de DN et XY . Montrons que $K = T$. XY est l'axe radical des deux cercles, dont P est d'égale puissance par rapport à ces deux cercles :

$$PM.PC = PN.PB \quad (1)$$

Le quadrilatère $KMCZ$ est inscriptible car la somme de deux de ses angles opposés vaut 180° ($\widehat{KMC} = 90^\circ$ car $AM \perp MC$ et $\widehat{KZC} = 90^\circ$ car $KZ \perp AD$), donc

$$PM.PC = PK.PZ \quad (2)$$

De même, le quadrilatère $TNBZ$ est inscriptible, donc

$$PN.PB = PT.PZ \quad (3)$$

Des égalités (1), (2) et (3), il vient

$$PK.PZ = PT.PZ$$

d'où $K = T$.

2. Soient a, b, c des nombres réels positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Solution.

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{b^2c^2}{b+c} + \frac{c^2a^2}{c+a} + \frac{a^2b^2}{a+b}$$

car

$$a^2 = \frac{1}{b^2c^2}, \quad b^2 = \frac{1}{c^2a^2} \quad \text{et} \quad c^2 = \frac{1}{a^2b^2}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$((b+c) + (c+a) + (a+b)) \left(\frac{b^2c^2}{b+c} + \frac{c^2a^2}{c+a} + \frac{a^2b^2}{a+b} \right) \geq (bc + ca + ab)^2$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{b^2c^2}{b+c} + \frac{c^2a^2}{c+a} + \frac{a^2b^2}{a+b} &\geq \frac{(bc + ca + ab)^2}{2bc + 2ca + 2ab} \\ &\geq \frac{1}{2} (bc + ca + ab) \\ &\geq \frac{1}{2} 3\sqrt[3]{bccaab} \quad (m.a \geq m.g) \\ &\geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

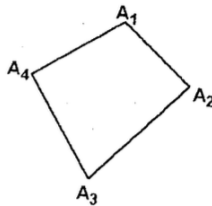
3. Trouver tous les entiers n , strictement supérieurs à 3, pour lesquels il existe n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ du plan et des nombres réels $r_1, r_2, \dots, r_n$ vérifiant les deux conditions :

- (i) trois quelconques des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ ne sont pas alignés ;
- (ii) pour tout triplet i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) l'aire du triangle $A_i A_j A_k$ a pour valeur $r_i + r_j + r_k$.

Solution.

Nous désignerons l'aire du triangle $A_i A_j A_k$ par $[ijk]$.

1°) Pour $n = 4$, on a
soit



$$[1\ 2\ 3] + [1\ 3\ 4] = [1\ 2\ 4] + [1\ 4\ 3]$$

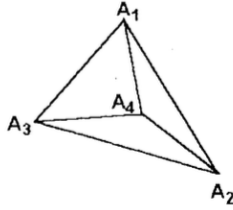
$$r_1 + r_2 + r_3 + r_1 + r_3 + r_4 = r_1 + r_2 + r_4 + r_1 + r_4 + r_3$$

d'où

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4 \quad (1)$$

ce qui est vérifié, par exemple, par les sommets d'un carré d'aire 1 et $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{6}$;

soit



$$[1\ 2\ 3] = [1\ 2\ 4] + [2\ 3\ 4] + [3\ 1\ 4]$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_1 + r_2 + r_4 + r_2 + r_3 + r_4 + r_3 + r_1 + r_4$$

d'où

$$r_1 + r_2 + r_3 + 3r_4 = 0 \quad (2)$$

ce qui est vérifié, par exemple, par les sommets et l'orthocentre d'un triangle équilatéral d'aire 1 et $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{3}$, $r_4 = -\frac{1}{3}$.

2°) Pour $n = 5$, montrons que $\forall i, j : r_i \neq r_j$.

Supposons $r_1 = r_2$. On a dans ce cas

$$r_1 + r_3 + r_4 = r_2 + r_3 + r_4$$

et

$$r_1 + r_3 + r_5 = r_2 + r_3 + r_5$$

donc

$$[1\ 3\ 4] = [2\ 3\ 4]$$

et

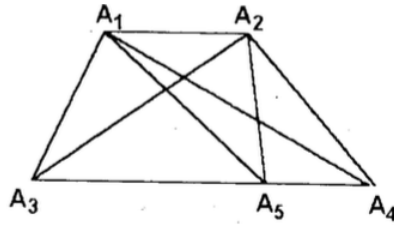
$$[1\ 3\ 5] = [2\ 3\ 5]$$

mais alors

$$A_3A_4 // A_1A_2$$

et

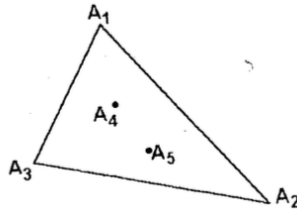
$$A_3A_5 // A_1A_2$$



ce qui entraîne A_3, A_4 et A_5 alignés et est contraire à l'hypothèse.

Trois cas sont à envisager : la fermeture convexe du pentagone $A_1A_2A_3A_4A_5$ est

– un triangle

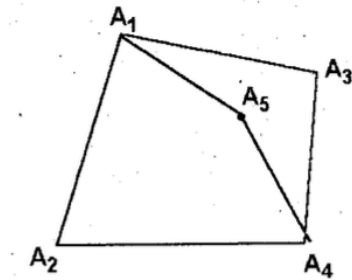


de (2), on a $r_1 + r_2 + r_3 + 3r_4 = 0$

$$r_1 + r_2 + r_3 + 3r_5 = 0$$

d'où $r_4 = r_5$: impossible.

– un quadrilatère



pour le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, de (1) on a

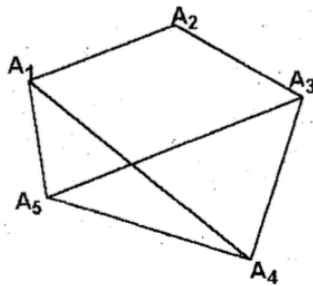
$$r_1 + r_4 = r_2 + r_3$$

A_5 n'est pas aligné avec A_1 et A_4 ; supposons qu'il soit intérieur au triangle $A_1A_3A_4$. Pour le quadrilatère $A_1A_5A_4A_2$, de (1) on a

$$r_1 + r_4 = r_2 + r_5$$

d'où $r_3 = r_5$: impossible.

– un pentagone



pour le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, de (1) on a

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4$$

pour le quadrilatère $A_1A_2A_3A_5$, de (1) on a

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_5$$

d'où $r_4 = r_5$: impossible.

Dans tous les cas, le problème est impossible pour $n = 5$. Il l'est donc aussi pour $n > 5$.

La seule valeur de n vérifiant les conditions imposées est $n = 4$.

Revue des revues

M. Fremal,

Math-Ecole (revue suisse), n° 164- septembre 1994.

Au sommaire :

- **Michel Chastellain**, *Formation coordonnée : un espoir !*
- **François Jaquet**, *Le nombre en première année*

Cet article comprend trois parties :

1. le nombre avant les réformes de l'enseignement des mathématiques,
 2. les apports de la réforme de 1970,
 3. les propositions actuelles.
- **Condorcet**, *Moyen d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*
Les éditions ACL ont réédité le dernier ouvrage, posthume, du marquis de Condorcet. Ce manuel d'arithmétique élémentaire, accompagné de notes méthodologiques, comprend douze leçons qui abordent la numération et les quatre opérations de l'auteur, sur les aspects didactiques et pédagogiques de ce traité, sur les moyens d'enseignement de l'époque accompagnant ce manuel. L'article publie la première leçon et le début de la deuxième.
 - **Francis Perret**, *Cahier magique*
Un bricolage, simple à construire et fort intrigant.
 - **Luc-Olivier Pochon**, *Le jeu de GO*
Présentation d'un jeu aux règles simples, pouvant se jouer à des niveaux de complexité différents, faisant intervenir la logique et l'intuition.
 - **Jean-Luc Ferrari**, *Vous aimez les suites logiques ?*
L'utilisation d'un tableur peut aider à la résolution du problème suivant : "Jeannot est né un 3 avril, le dimanche de Pâques. En 1983, 1988 et 1994, son anniversaire est tombé le dimanche de Pâques. En quelle année, les deux événements arriveront-ils de nouveau simultanément ? En 1994, Jeannot fêtait pour la quatrième fois son anniversaire pour le jour de Pâques, y compris le jour de sa naissance ; quel est l'âge de Jeannot ?"
 - *La revue des revues*
Les Cahiers Clairaut, bulletin trimestriel du CLEA (Comité de Liaison Enseignants et Astronomes). Présentation d'une fiche

pédagogique des Cahiers Clairaut : la course du Soleil pendant une journée (niveau école élémentaire).

- *Informations*

Echos de la rencontre CIEAMEN 46 dont le thème était "Graphiques et représentations symboliques en mathématiques".

- *Nouvelles brèves*

- *Notes de lecture*

Deledicq, A., Casiro, F., Mathématiques du Kangourou, Paris, ACL-Editions Vuibert, 1994.

- *Paradoxes*

- *Réponses aux problèmes posés dans les numéros 162, 163 et 164.*

Math-Ecole (revue suisse), n°165- novembre 1994.

Au sommaire :

- **François Jaquet**, *Editorial : L'heure de vérité*

- *Troisième Rallye mathématique romand*

Le principe de ce rallye, destiné à des enfants de l'école primaire, est une compétition par classes entières. Les classes de troisième, quatrième et cinquième primaire sont réparties selon ces trois catégories. Ce rallye se déroule en quatre étapes : une épreuve d'entraînement, deux épreuves et une finale. Lors de chaque épreuve, la classe reçoit une dizaine de problèmes à résoudre en un temps limite. Les élèves doivent s'organiser pour résoudre les problèmes et produire une solution unique pour chacun d'eux. Chaque enfant, même le plus faible, y trouve son compte. La classe entière est responsable de la solution. Il est tenu compte de la clarté des explications fournies et de la rigueur de la démarche. L'article reprend les énoncés de dix-huit problèmes tirés des différentes épreuves de 1994.

- **Maurizio Bertoni et Jean-Daniel Monod**, *Evaluation d'activités de recherche*

Compte rendu d'un atelier présenté en juillet 1993 dans le cadre de la 45ème rencontre de la CIEAMEN dont le thème était : "L'évaluation centrée sur l'élève".

En Suisse romande et dans le Canton de Vaud, la note a une grande importance. Les autorités scolaires mettent l'accent sur le goût de la recherche. Comment dépasser cette contradiction ?

Les auteurs ont décidé de noter les travaux de recherche des élèves. Un contrat pédagogique a été passé avec les élèves ; en voici le contenu :

1. toute recherche donne lieu à un travail écrit,

2. les élèves d'un même groupe reçoivent la même note,
3. si le groupe s'est impliqué dans le problème, il reçoit au moins la moyenne,
4. cette note peut être améliorée si le travail vérifie les critères annoncés avec la donnée du travail de recherche (les élèves peuvent contester cette note),
5. des points sont réservés à "l'impression du maître" (les élèves ne peuvent contester ces points),
6. les notes sont intégrées dans la moyenne avec les notes obtenues aux différents tests.

Les auteurs présentent deux grilles de critères. Certaines activités de recherche des élèves ont été filmées ; des renseignements sur les processus utilisés par les élèves ont ainsi pu être obtenus.

Pour les auteurs, il est possible d'évaluer le travail de recherche à l'aide d'une note.

- *Quarto : problèmes*

Blaise Müller, inventeur de Quarto, a rédigé un fascicule de "problèmes" sur ce jeu.

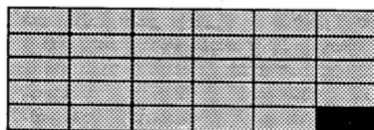
Deux de ces problèmes sont proposés.

- **Michel Chastellain**, *Evaluation d'une situation mathématique ; peut-on, faut-il et comment mettre une note ?*

L'auteur décrit une démarche d'évaluation sommative d'une activité de recherche. La feuille de consigne comprenait l'énoncé du problème et les critères d'évaluation :

- "qualité de la présentation du compte rendu,
- clarté des explications,
- pertinence des remarques,
- stratégie développée,
- appréciation personnelle."

Enoncé du problème : "Prenez une plaque de chocolat et peignez un des quatre carrés d'angles, en vert, pour lui donner un goût et un aspect repoussants.



Les joueurs prennent la plaque à tour de rôle et en détachent une partie en la coupant suivant une seule ligne du quadrillage. Ils mangent

le morceau qu'ils ont détaché.

Celui qui mange le carré vert a perdu !

Comment allez-vous jouer pour ne pas devoir manger le carré vert ?”

Chaque groupe disposait de trente petits cubes pouvant être facilement manipulés.

Quatre comptes rendus de recherche sont présentés.

Les options prises par les enseignants sont :

1. afin de clarifier le contrat didactique une consigne est toujours accompagnée d'une liste de critères d'évaluation. Le choix de ces critères varie en fonction des objectifs poursuivis et des activités,
2. un groupe qui s'est impliqué dans le problème obtient la moyenne de six. Il arrive qu'un groupe reçoive la moyenne bien que la somme des points attribués à chaque critère est inférieure à la moyenne,
3. des points sont réservés à l'impression personnelle du professeur, celle-ci se fonde sur la collaboration dans le groupe, l'organisation du travail et le degré d'autonomie.

Le maître évalue les comptes rendus de recherche. La cote chiffrée attribuée à chaque critère est accompagnée d'un commentaire.

Les évaluations des quatre comptes rendus sont présentées.

Parallèlement à cette évaluation sommative, une méthode d'évaluation formative est mise en place. Plusieurs pistes sont proposées :

- affichage des productions des différents groupes,
- présentation du travail devant la classe,
- échange de rapports entre classes et formulation de remarques.

Conclusion : toutes les activités de recherche font l'objet d'une évaluation formative, seulement deux à trois sont notées par semestre.

Ces notes interviennent dans la moyenne.

- **Bernard Furrer et Eric Laydu**, *Une clepsydre en fonction ou de l'utilité des fonctions*

L'article présente une activité interdisciplinaire mathématiques-physique qui s'est déroulée avec des élèves de 16 à 17 ans (7 heures de mathématiques et 9 heures de physique dont 8 de travaux pratiques par demi-classe). La notion de transfert de la notion de mathématique de fonction à celle de fonction dans le cadre d'un modèle physique est étudiée. Les élèves ont construit une clepsydre telle que la vitesse de descente de l'eau soit constante.

- **Jean Delacrétaz et Jean-Daniel Monod**, *Impressions de congrès*

Impressions des journées APMEP 94.

- *Notes de lecture*

Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce, Chabert J.L. et all., Ed.
Belin, Coll. regards sur la science.

- *La revue des revues*

Mady FREMAL