Mathématique et Pédagogie

Périodique bimestriel publié par la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*

Sommaire

N^{o} 107 **Mai – Juin 1996**

Éditorial

G. Noël,

On trouvera dans ce numéro un texte – assez long – adopté par le Conseil d'Administration de la *SBPMef* à la suite de la publication par Mme la Ministre-Présidente Onkelinx de ses Quarantes propositions pour l'enseignement obligatoire, à la rencontre du désirable et du possible.

Bien que les questions relatives à l'emploi aient – de façon compréhensible – focalisé l'attention et entraîné les mouvements sociaux que l'on connaît, la *SBPMef* a estimé ne pouvoir être absente du débat. Les autres associations d'enseignants, membres de la CAPP (Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs) ont réagi de la même manière. C'est que les mesures envisagées n'ont pas que des implications sur l'emploi. Elles auront aussi des conséquences pédagogiques dont nous ne sommes pas sûrs qu'elles aient été évaluées avec précision.

Il n'est certainement pas indifférent à la *SBPMef* que l'on parle de recentrer l'enseignement secondaire sur les apprentissages fondamentaux, en particulier sur les mathématiques. Encore faut-il savoir ce que cela veut dire. Force nous est alors de constater que les Quarantes propositions sont particulièrement floues à cet égard. Au point que des interprétations divergentes, voire opposées, ont pu circuler sans démenti. Au moment où j'écris ces lignes, nous n'avons encore que des bruits de couloir sur ce que seront les grilles horaires du troisième degré. L'hypothèse qui revient le plus souvent est que le cours à 6 périodes par semaine serait inchangé, mais que les cours à 2 et 4 périodes seraient remplacés par un seul cours à 3 périodes. Si une telle mesure était mise en application, comment les élèves se répartiraient-ils entre les deux cours à 3 et 6 périodes ? N'y a-t-il pas un risque d'assister à une (nouvelle) baisse du niveau des cours forts sans que cela soit compensé par une hausse du niveau des cours faibles ? Est-ce vraiment cela un recentrage sur les mathématiques ?

Attirons également l'attention sur le risque sinon de disparition, au moins de raréfaction, du cours (2 périodes par semaine) de Préparation aux études supérieures. Les élèves qui choisissaient ce cours pouvaient avoir une grille horaire de 34 périodes au lieu de 32. Or on parle de supprimer cette possibilité... Quand on constate, dans les premières candidatures universitaires à vocation scientifique, que les étudiants qui ont suivi ce cours à 2 périodes ont des résultats en moyenne nettement supérieurs aux autres, on doit exprimer son inquiétude.

Pourquoi les frettes sont-elles plus serrées, dans les aigus, sur une guitare ?

Ch. Félix,

1. Introduction

Suite à la lecture d'un article de Ian Stewart paru dans la revue *Pour la Science*, n°151 de mai 1990, et intitulé : "Calculs bien tempérés", j'ai voulu mettre mes élèves en situation-problème sur un sujet utilisant conjointement mathématiques, musique, histoire, culture, ... Ces expériences, mes réflexions et les recherches associées ont servi de matières-support à un exposé que j'ai fait lors du congrès de Binche en août 1994. Voici un article reprenant une partie de cet exposé.

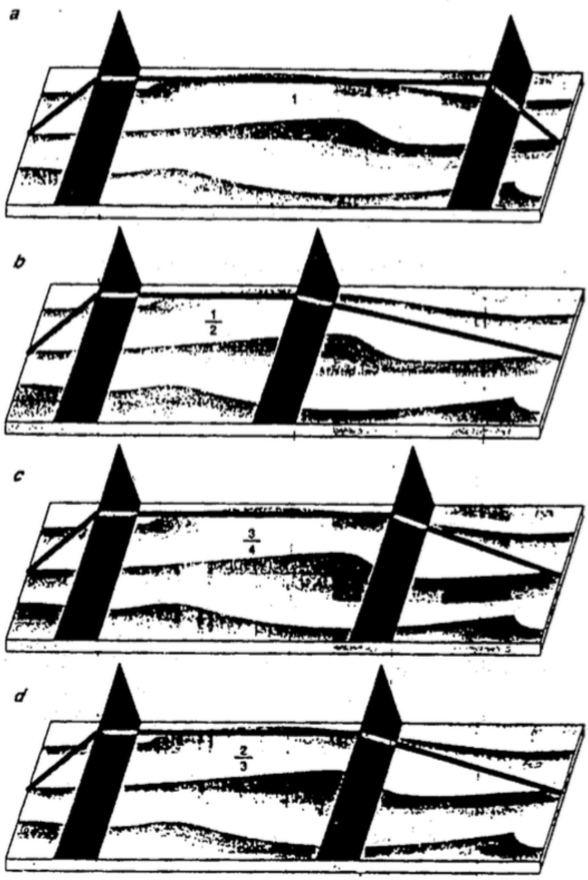
2. Préambules musicaux

2.1. Les notes pythagoriciennes

Claude Ptolémée (150 après J.C., Alexandrie) présente, dans son traité des *Harmoniques*, le système pythagoricien selon lequel les notes doivent être représentées par des rapports de nombres entiers :

$$\boxed{\text{rapport} = \frac{\text{longueur de la corde pour la note de base}}{\text{longueur de la corde pour la note considérée}}}$$

Ces rapports apparaissent expérimentalement sur un monocorde (guitare).



Le monocorde permet d'étudier les rapports d'harmonie entre les notes de musique. La corde complète donne la note de base (dessin a). La corde raccourcie de moitié (rapport 2/1) forme l'octave au-dessus de la note de base (dessin b). La corde raccourcie d'un quart (rapport (4/3) forme la quarte au-dessus de la note de base (dessin c). La corde raccourcie d'un tiers (rapport 3/2) forme la quinte au-dessus de la note de base (dessin d).

Exemple : pour la quinte :

$$\text{rapport} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

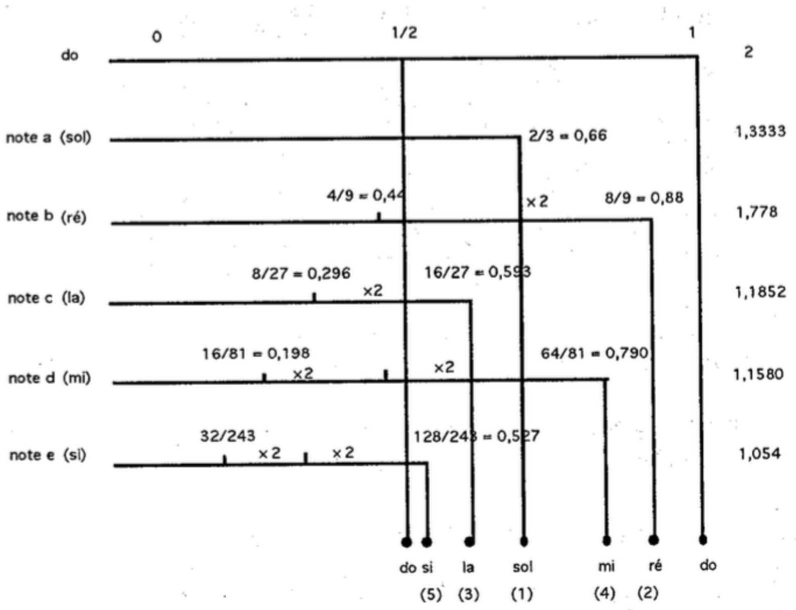
Ainsi, la longueur de la corde pour une note donnée est l'inverse du rapport (si on prend une corde de longueur 1 pour la note de base).

Idée pythagoricienne : rechercher, pour créer une échelle harmonieuse, les notes obtenues par *quintes successives*.

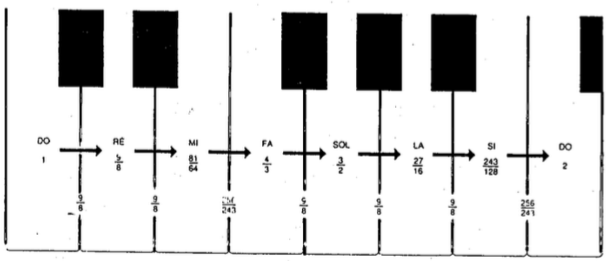
$$1 \xrightarrow{\substack{\text{rapport } \frac{3}{2}\\ \text{quinte}}} \overset{\text{note } a}{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\substack{\text{rapport } \frac{3}{2}\\ \text{quinte}}} \overset{\text{note } b}{(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}} \xrightarrow{\substack{\text{rapport } \frac{3}{2}\\ \text{quinte}}} \overset{\text{note } c}{(\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}} \xrightarrow{\substack{\text{rapport } \frac{3}{2}\\ \text{quinte}}} \overset{\text{note } d}{(\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}},$$

Remarque : chaque fois que la longueur de la corde est inférieure à $\frac{1}{2}$, on la double ; ce qui permet de garder la même note mais une octave plus bas.

Pour une corde de longueur 1, on obtient



Observons que l'écart entre mi et sol est plus grand que les autres. On supplée en ajoutant la quarte associée au rapport $\frac{4}{3}$ [on descend d'une quinte, $(\frac{2}{3})$, puis on remonte d'une octave .2 ; donc $\frac{4}{3}$].



Pour fa : descendre d'une quinte : rapport : $\frac{2}{3}$; long. de la corde $\frac{3}{2}$ puis remonter d'une octave : $\times\frac{1}{2}$.

On a donc une succession de rapports comme suit :

rapports	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
notes	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do

Les rapports consécutifs peuvent être obtenus en utilisant des facteurs réguliers.

Une gamme formée uniquement par quintes et octaves est voisine de celle qui est formée par les notes blanches du piano.

Le facteur $\frac{9}{8}$ apparaît chaque fois qu'il y a 1 ton entre 2 notes consécutives, tandis que $\frac{256}{243}$ correspond à $\frac{1}{2}$ ton.

2.2. La gamme chromatique (pythagoricienne)

Elle comporte 12 notes distantes chaque fois d'un demi-ton. On les obtient en introduisant les dièses et les bémols. Entre le do et le ré, on trouve le ré bémol un demi-ton au-dessus du do. On devrait avoir :

$$\text{do} \xrightarrow{\cdot\frac{256}{243}} \text{ré}_\flat \xrightarrow{\cdot\frac{256}{243}} \text{ré}.$$

Or, on a :

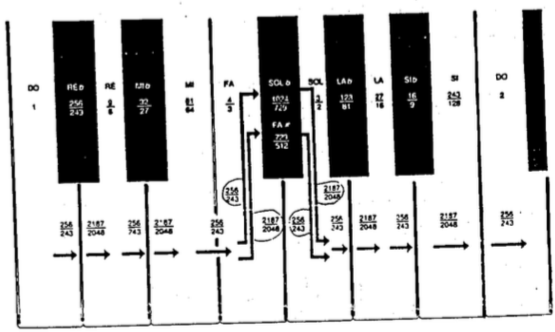
$$\left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{65536}{59049} \cong 1,110$$

alors que pour 1 ton, le facteur est $\frac{9}{8} = 1,125$.

Cette différence conduit à créer de légères irrégularités en partageant 1 ton ainsi :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{do} & \overset{+\frac{1}{2}\text{ ton}}{\longrightarrow} & & \text{ré}_\flat & & \overset{+\frac{1}{2}\text{ ton}}{\longrightarrow} & \text{ré} \\ \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ & \cdot\frac{256}{243} & & & & \cdot\frac{2187}{2048} & \\ & (1,0536) & & & & (1,0679) & \end{array} \qquad \left(\frac{256}{243}\cdot\frac{2187}{2048} = \frac{9}{8}\right)$$

D'où la gamme chromatique avec le défaut du $\overset{1,4238}{\text{fa}\ \sharp}$ et $\overset{1,4047}{\text{sol}_\flat}$ (qui devraient coïncider).



La gamme chromatique comporte 12 notes, voisines de celles que donnent les touches blanches et noires (dièses et bémols) du piano. Deux notes, fa dièse et sol bémol, ont des valeurs différentes alors qu'elles devraient être confondues.

2.3. Gamme tempérée

Il s'agit d'une gamme telle que le rapport entre 2 notes séparées d'un demi-ton soit constant ($= r$). Cette condition conduit à poser :

$$\begin{aligned} r^{12} &= 2 \\ \text{ou } : r &= \sqrt[12]{2} = 1,05946 \end{aligned}$$

Avantage : les changements de clef en cours de morceau sont possibles (utilisé par J.S. Bach).

Les pianos et les guitares (notes fixées) utilisent la gamme tempérée.

On voit que le demi-ton pythagoricien

$$\frac{256}{243} = 1,05349$$

et le demi-ton de la gamme tempérée

$$\sqrt[12]{2} = 1,05946$$

sont voisins ; on garde donc la même appellation (demi-ton).

Pour nous résumer :

Table des rapports

	Gamme chromatique (pythagoricienne)		Gamme tempérée	
			2^x $x = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{12}{12}$	
do	1	1	1	1
ré$_\flat$	$\frac{256}{243}$	$1,053$	$\sqrt[12]{2}$	$1,059$
ré	$\frac{9}{8}$	$1,125$	$(\sqrt[12]{2})^2$	$1,122$
mi$_\flat$	$\frac{32}{27}$	$1,185$	$(\sqrt[12]{12})^3$	1,189
mi	$\frac{81}{64}$	1,266	$(\sqrt[12]{2})^4$	1,260
fa	$\frac{4}{3}$	1,333	$(\sqrt[12]{2})^5$	1,335
fa$_\sharp$	$\frac{729}{512}$	1,424	$(\sqrt[12]{2})^6$	1,414
sol$_\flat$	$\frac{1024}{729}$	1,405	$(\sqrt[12]{2})^6$	1,414
sol	$\frac{3}{2}$	1,500	$(\sqrt[12]{2})^7$	1,498
la$_\flat$	$\frac{128}{81}$	1,580	$(\sqrt[12]{2})^8$	1,587
la	$\frac{27}{16}$	1,688	$(\sqrt[12]{2})^9$	1,682
si$_\flat$	$\frac{16}{9}$	1,778	$(\sqrt[12]{2})^{10}$	1,782
si	$\frac{243}{128}$	1,898	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	1,888
do	2	2	2	2

3. Pourquoi les frettes sont-elles plus serrées dans les aigus, sur une guitare ?

Propriété : si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont les termes d'une p.g. de raison q, alors $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3, \ldots$ sont aussi les termes d'une p.g. de raison q. En effet,

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{a_k - a_{k-1}} = \frac{a_1 q^k - a_1 q^{k-1}}{a_1 q^{k-1} - a_1 q^{k-2}} = \frac{a_1 q^{k-1}(q-1)}{a_1 q^{k-2}(q-1)} = q$$

Dans une gamme tempérée, les rapports correspondant aux notes de cette gamme sont en p.g. de raison $\sqrt[12]{2}$ $(= r)$.

Ainsi donc les longueurs des cordes sont en p.g. de raison

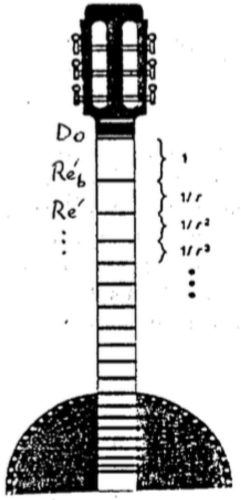
$$q = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} = 0,94387$$

Par la propriété précédente, les différences des longueurs de cordes de 2 notes consécutives sont en p.g. de raison

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\ (< 1)$$

.

Donc, plus on va dans les aigus, plus la différence des longueurs est petite, ce qui explique que les frettes d'une guitare soient de plus en plus rapprochées vers le centre.



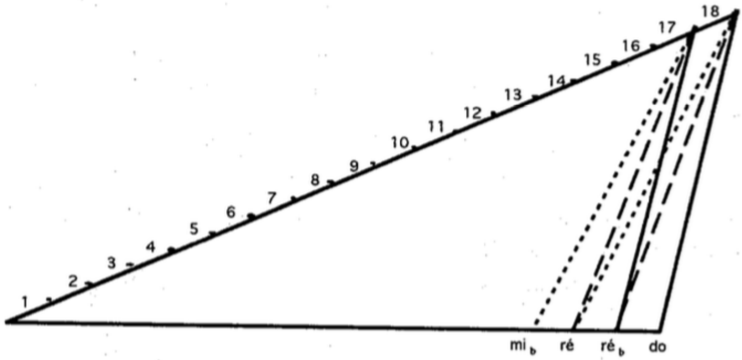
4. Construction d'une guitare, d'une viole, d'un luth

4.1. Méthode de Galilei (1581)

En 1581, Vincenzo Galilei, père du fameux Galilée, proposa d'utiliser le demi-ton représenté par le rapport

$$\frac{18}{17} \text{ soit } 1,05882 \text{ (contre } \sqrt[12]{2} = 1,05946)$$

Construction :



Remarque : si on conserve le rapport $\frac{18}{17}$ pour chaque demi-ton, et que la longueur de la note de base est 100.000, alors la longueur de corde du do supérieur devrait être égale à $100 \cdot (\frac{17}{18})^{12} = 50.363$. Elle ne se trouverait donc pas à une octave du do (note de base). Par contre, en mettant l'octave correcte, on voit que le rapport $\frac{\text{si}}{\text{do}}$ est de 1,06652 ; c'est-à-dire qu'il y a nettement plus d'un demi-ton entre le si et le do. Cette méthode n'est donc pas très satisfaisante.

Longueur de la corde

Note	Gamme tempérée	Galilei	Erreur *
do	100.000	100.000	0
ré$_\flat$	94.387	94.444	26
ré	89.090	89.198	52
mi$_\flat$	84.090	84.242	79
mi	79.370	79.562	105
fa	74.915	75.142	131
sol$_\flat$	70.711	70.967	157
sol	66.742	67.025	183
la$_\flat$	62.996	63.301	210
la	59.460	59.784	236
si$_\flat$	56.123	56.463	262
si	52.973	53.326	288
do	50.000	50.000	0

* Calcul de l'erreur :

$$\text{pour fa : } 10^5 \times \log \frac{\text{Galilei}}{\text{tempéré}} = 10^5 . \log \frac{75.142}{74.915}.$$

4.2. Méthode de Mersenne (1636)

En 1636, le moine Marin MERSENNE (connu pour les nombres de la forme $2^n - 1$), propose d'approcher

$$\sqrt[3]{2}\ (= 1,25992) \text{ par } \frac{2}{3-\sqrt{2}}\ (= 1,26120)$$

que l'on peut construire *à la règle et au compas.*

Comme $\sqrt[3]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^4$, on peut donc construire l'approximation de la longueur correspondant à la note mi.

On a ainsi partagé l'octave en deux parties : l'une contenant 4 demi-tons et l'autre 8 demi-tons. Dans la première partie, un demi-ton vaut

$$t = \sqrt[4]{\frac{2}{3-\sqrt{2}}} = 1,05973,$$

dans la deuxième partie

$$u = \sqrt[8]{2 : \frac{2}{3-\sqrt{2}}} = \sqrt[8]{3-\sqrt{2}} = 1,05933, \quad (^1)$$

t et u peuvent être construits géométriquement.

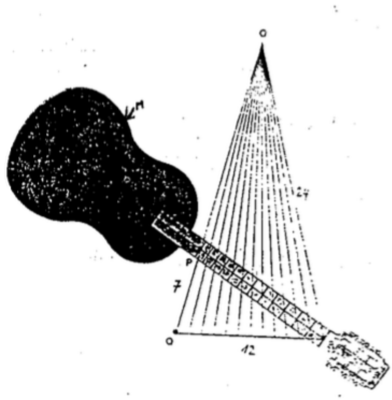
Longueur de la corde

Note	Gamme tempérée	Mersenne	Erreur
do	100.000	100.000	0
ré$\flat$	94.387	94.363	-11
ré	89.090	89.044	-22
mi$\flat$	84.090	84.025	-33
mi	79.370	$\boxed{79.289}$	-44
fa	74.915	75.849	-38
sol$\flat$	70.711	70.657	-23
sol	66.742	66.700	-27
la$\flat$	62.996	62.964	-22
la	59.460	59.438	-16
si$\flat$	56.123	56.109	-11
si	52.973	52.966	-6
do	50.000	50.000	0

1. condition : $t^4u^8 = 2$, $u = \sqrt[8]{\frac{2}{t^4}}$; rappel : $\sqrt[12]{2} = 1,05946$.

5. Construction de Strähle (1743)

On trace un segment QR de longueur 12 divisé en 12 intervalles égaux. On trace ensuite des segments OR et OQ égaux à 24. On joint O aux 11 points de partage de QR. On place P sur OQ de sorte que OP soit égal à 7. Puis on trace la droite RP et le point M tels que PM soit égal à PR. Si RM est la corde de la note de base, alors PM correspond à l'octave. Strähle propose de considérer les 11 points d'intersection de RP avec les 11 rayons issus de O, comme les positions de frettes donnant les demi-tons.



La construction de Strähle

5.1. Jacob FAGGOT calcula ($\sim$ 1776)

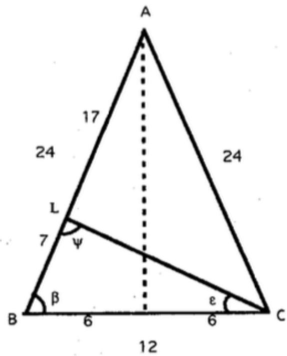
[J. Stewart, Pour la Science, n°151, mai 1990]

Malgré la percée de Mersenne, la recherche d'une méthode de constructions géométriques du demi-ton continua.

En 1743, Daniel Strähle, un artisan sans aucune connaissance mathématique, proposa une construction aussi simple qu'ingénieuse dans les Comptes Rendus de l'Académie de Suède. Je vous engage à l'examiner et même à la tester. Quelle est sa précision ? Le géomètre et économiste Jacob Faggot effectua un calcul trigonométrique pour la déterminer, et ajouta son résultat à la suite de l'article de Strähle : il concluait que l'erreur maximale était de 1,7 pour cent, soit cinq fois supérieure à ce que tolèrent les musiciens.

Faggot était un des fondateurs de l'Académie de Suède ; il en fut le secrétaire pendant trois ans et publia 18 articles dans les Comptes Rendus.

5.2. Effectuons quelques calculs (à la Faggot ...) et calculons les longueurs de corde



pour β :

$$\cos\beta = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \text{ d'où } \underline{\beta = 75,52^\circ}$$

pour ε :

$$\begin{aligned} LC^2 &= 7^2 + 12^2 - 2.12.7.\cos\beta \\ &= 49 + 144 - 2.12.7.\frac{1}{4} \\ &= 49 + 144 - 42 = 151 \text{ d'où } LC = \sqrt{151} = 12,29 \end{aligned}$$

puis :

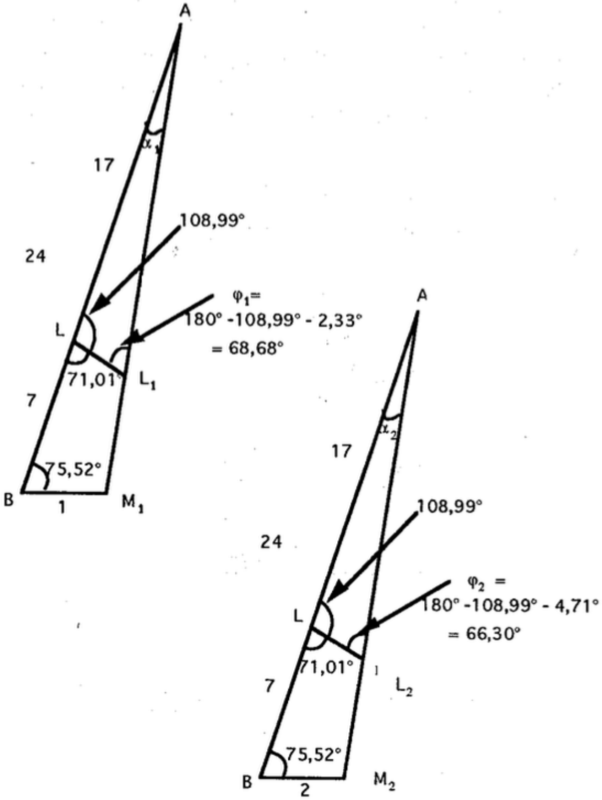
$$\frac{\sin\varepsilon}{7} = \frac{\sin 75,52^\circ}{\sqrt{151}} \Rightarrow \sin\varepsilon = \frac{7.\sin 75,52^\circ}{\sqrt{151}} = 0,5516 \text{ d'où } \underline{\varepsilon = 33,47^\circ}$$

pour ψ :

$$\underline{\psi} = 180^\circ - 75,52^\circ - 33,4^\circ = \underline{71,01^\circ}.$$

Calcul de LL_1
(distance entre les frettes do et si)

Calcul de LL_2
(distance entre les frettes do et si$_\flat$)



Les mesures des angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont aisément calculées en appliquant les théorèmes des cosinus et sinus aux triangles $ABM_1, ABM_2, \ldots$

$$LL_1 = \frac{17.\sin 2{,}33^\circ}{\sin 68{,}68^\circ} = 0{,}7434 \qquad LL_2 = \frac{17.\sin 4{,}71^\circ}{\sin 66{,}30^\circ} = 1{,}5242 \quad , \quad \text{etc.}$$

On peut bien sûr poursuivre ce cheminement et calculer les longueurs des cordes ; on trouve, en partant des valeurs ci-dessus, et pour une simple proportion : pour si : 53,025, pour si bémol : 56,025, ... C'est probablement ce que fit Faggot.

5.3. J.-M. Barbour contrôla (1957)

En 1776, J. Faggot était le “numéro quatre” de l'Académie de Suède, derrière le grand Carl Linné, le naturaliste qui donna une classification végétale et animale en genres et espèces. Autrement dit, quand Faggot déclarait une méthode peu précise, c'est qu'elle était peu précise. L'opinion de Faggot fut propagée de siècle en siècle. Le *Traité du tempérament musical* de F.W. Marpurg, publié en 1776, par exemple, présente la conclusion de Faggot sans même indiquer la méthode de Strähle. C'est seulement en 1957 que J.M. Barbour, de l'Université du Michigan, découvrit que les calculs de Faggot étaient faux !

Faggot commençait par déterminer l'angle à la base du triangle principal, soit $75°31'$ (β dans notre figure 5.2). Puis il calculait la longueur RP et l'angle PQR. Il déterminait ensuite chacun des 11 angles formés au sommet du triangle principal par les rayons issus de la base et déduisait les longueurs découpées sur la droite RPM. Or Faggot calcula que l'angle PRQ (ε dans notre dessin 5.2) était égal à $40°14'$, alors qu'il est égal à $33°32'$. Cette erreur fut fatale, car l'angle PRQ intervient dans la résolution de chacun des autres triangles, exerçant sa trompeuse influence sur tous. Notamment, l'erreur équivalait à considérer la distance PQ égale à 8,6 au lieu de 7. En réalité, l'imprécision de la méthode de Strähle est égale à 0,15 pour cent, ce qui est parfaitement acceptable.

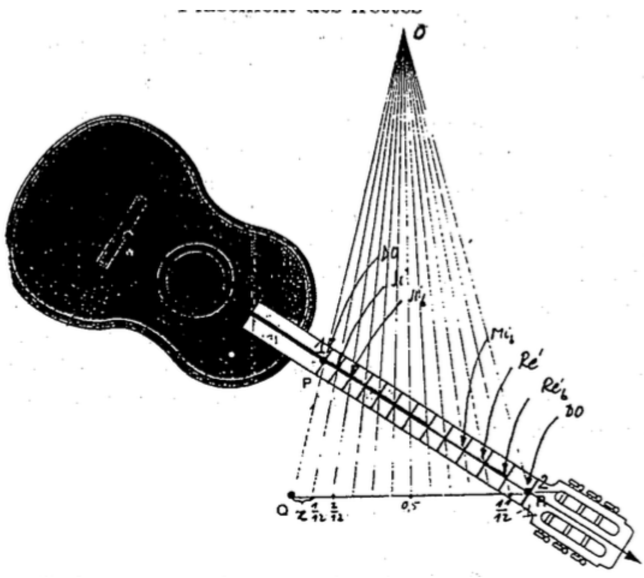
5.4. Strähle. Placement des frettes

En poursuivant les calculs commencés sous 5.2, nous obtenons le tableau ci-dessous :

Longueur de la corde

Note	Gamme tempérée	Strähle	Erreur *
do	100.000	100.000	0
ré$_\flat$	94.387	94.323	−32
ré	89.090	88.991	−49
mi$_\flat$	84.090	84.000	−46
mi	79.370	79.310	−33
fa	74.915	74.895	−9
sol$_\flat$	70.711	70.732	11
sol	66.742	66.798	38
la$_\flat$	62.996	63.077	58
la	59.460	59.551	65
si$_\flat$	56.123	56.204	60
si	52.973	53.025	38
do	50.000	50.000	0

Placement des frettes



Nous verrons dans un prochain article comment, à l'aide de la notion de projection centrale – la construction de Strähle ne nous y pousse-t-elle pas ? – il apparaîtra tout naturellement une fonction, que nous nommerons fonction de Strähle, et qui nous livrera, par un calcul élémentaire, la longueur de la corde.

Il nous sera ainsi aisé de comparer cette fonction à la fonction 2^x.

6. Comparaison des diverses approximations et des erreurs associées

Les tableaux ci-dessous nous permettent de comparer la longueur de la corde des constructions de Galilée, Mersenne et Strähle, avec celle qui correspond à la gamme tempérée.

Les courbes illustrent les erreurs associées à ces constructions et nous autorisent à les commenter et ... à choisir.

On observera aussi les ≪résultats≫ obtenus par Faggot...

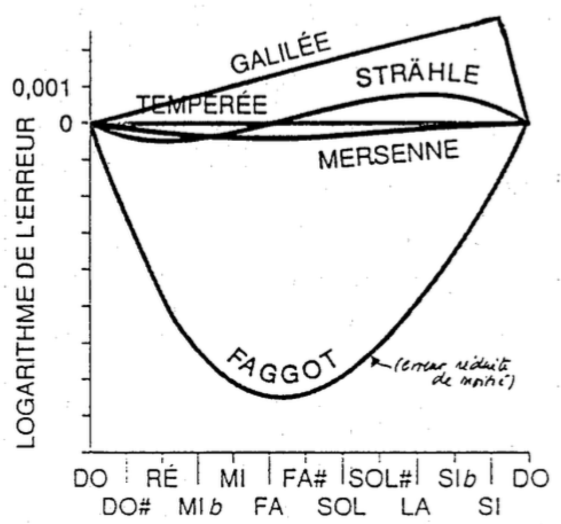
Longueur de la corde

[J.M. Barbour, American mathematical monthly, vol. 64 (1957) p. 1–9]

Table 1 Equal temperament			Table 2 Mersenne's approximation		Table 3 Galiléi's approximation	
Notes	String lengths	•	String-lengths	$10^6 \times \log$ error	String-lengths	$10^6 \times \log$ error
C	100000	2	100000	0	100000	0
C♯	94387	$2^{11/12}$	94365	−11	94444	26
D	89090	$2^{6/16}$	89405	−22	89197	52
E♭	84090	$2^{2/6}$	84028	−33	84242	79
E	79370	$2^{2/3}$	79290	−44	79562	105
F	74915	$2^{11/12}$	74850	−38	75142	131
F♯	70711	$2^{1/2}$	70658	−33	70967	157
G	66742	$2^{5/12}$	66700	−27	67024	183
G♯	62996	$2^{1/3}$	62966	−22	63301	210
A	59460	$2^{1/4}$	59349	−16	59784	236
B♭	56123	$2^{1/6}$	56110	−11	56463	262
B	52973	$2^{1/12}$	52968	−5	53326	288
C	50000	1	50000	0	50000	0

* In Table 1, the string-lengths are 50000 times the mean proportionals in the third column.

Table 4 Faggot's numerical values for Strähle's approximation		Table 5 Corrected numerical values for Strähle's approximation	
String-lengths	$10^6 \times \log$ error	String-lengths	$10^6 \times \log$ error
10000	0	10000	0
9379	−276	9432	−32
8811	−479	8899	−49
82900	−619	8400	−46
7809	−706	7931	−33
7365	−740	7490	−9
6953	−732	7073	11
6570	−683	6680	38
6213	−601	6308	58
5881	−478	5955	65
5568	−344	5620	60
5274	−192	5302	38
5000	0	5000	0



Erreurs de diverses approximations de la gamme tempérée.

Les erreurs sont exprimées par le logarithme du rapport de la valeur approchée à la valeur exacte.

Bibliographie

[1] Ian Stewart, Calculs bien tempérés, *Pour la science* n°151, mai 1990.

[2] J.M. Barbour, A geometrical approximation to the roots of numbers, *American Mathematical Monthly*, 64 (1957) pp. 1–9.

[3] Isaac Schoenberg, On the location of the frets on a guitar, *American Mathematical Monthly*, 83 (1976) pp. 550–552.

Adresse de l'auteur :

Charles FÉLIX
La Perche
2902 Fontenais
Suisse

A propos du TAEG

G. Noël, *Université de Mons-Hainaut*

J. Bair et D. Justens ont consacré récemment un article fort intéressant, [1], au calcul du taux annuel effectif global (TAEG) d'un prêt remboursable par mensualités constantes. Ce qui me paraît le plus difficile dans ce texte est d'obtenir la formule

$$N = \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{(1+x)^{\frac{k}{12}}}$$

située au bas de la page 59, ou son corollaire $N = \frac{a}{\mu}(1 - \frac{1}{(1+\mu)^n})$.

Rappelons les notations : N est le montant du capital emprunté, n est le nombre de mensualités, a est le montant d'une mensualité, x est le taux d'intérêt annuel recherché (le TAEG), μ est le taux d'intérêt mensuel.

Comme il est expliqué dans l'article, la formule ci-dessus est énoncée (sous une forme plus générale) dans un arrêté royal qui "définit le TAEG comme étant le taux à exprimer en pour-cent qui rend égales, sur une base annuelle, les valeurs actuelles de l'ensemble des engagements existants ou futurs, pris par le prêteur et par le consommateur". Ce texte est sans aucun doute parfaitement clair pour toute personne habituée à la mathématique financière, et il devrait certainement être expliqué et appliqué dans le cadre d'un cours portant sur ce sujet.

Pour le professeur qui, sans s'intéresser particulièrement à la mathématique financière, y recherche des situations lui permettant d'introduire par exemple la notion de suite géométrique, il n'est pas certain que le texte soit utilisable. La notion même de valeur actuelle d'un engagement (d'une mensualité à payer dans k mois) ne me semble pas si simple à expliquer. Il pourrait y avoir là une difficulté parasite par rapport au but purement mathématique poursuivi. S'il est souhaitable que le professeur soit au fait des principes fondamentaux de la mathématique financière, il peut essayer d'en épargner les difficultés aux élèves.

Dans le cas présent, il me semble possible d'adopter un point de vue naïf, qui permet d'obtenir la même formule.

Si le montant a d'une mensualité est constant, il peut néanmoins être considéré comme la somme de deux parties qui sont variables : un remboursement de capital et les intérêts sur le capital non encore remboursé. Bien entendu au fil du temps, la partie "remboursement de capital" augmente et la partie "intérêts" diminue.

Ecrivons donc pour tout $k = 1, \ldots, n$, $a = c_k + d_k$ où c_k représente le remboursement de capital et d_k les intérêts. Si μ est le taux d'intérêt mensuel, on a $d_1 = N\mu$, puis $d_2 = (N - c_1)\mu$, $d_3 = (N - c_1 - c_2)\mu$, $\ldots$, $d_n = (N - c_1 - c_2 - \cdots - c_{n-1})\mu$. Puisque la mensualité $c_k + d_k$ est constante, on peut écrire

$$\begin{aligned}
c_1 + N\mu &= c_2 + (N - c_1)\mu \\
c_2 + (N - c_1)\mu &= c_3 + (N - c_1 - c_2)\mu \\
&\vdots \\
c_{n-1} + (N - c_1 - \cdots - c_{n-2})\mu &= c_n + (N - c_1 - \cdots - c_{n-1})\mu
\end{aligned}$$

D'où $c_2 = c_1(1+\mu)$, $c_3 = c_2(1+\mu)$, $\ldots$, $c_n = c_{n-1}(1+\mu)$. Et finalement

$$c_k = c_1(1+\mu)^{k-1}$$

Bien entendu la somme des c_k doit valoir N :

$$N = \sum_{k=1}^{n} c_1(1+\mu)^{k-1} = c_1 \frac{(1+\mu)^n - 1}{\mu}$$

Deux inconnues subsistent : c_1 et μ. Mais $c_1 + d_1 = c_1 + N\mu = a$, donc $c_1 = a - N\mu$. En substituant cette valeur à c_1 dans la formule ci-dessus, on obtient $N = (a - N\mu)\frac{(1+\mu)^n - 1}{\mu}$, ce qui après une manipulation élémentaire nous donne

$$N = \frac{a}{\mu} \frac{(1+\mu)^n - 1}{(1+\mu)^n}$$

Nous avons bien retrouvé la formule dérivant de l'Arrêté Royal publié au Moniteur Belge du 8 septembre 1992, et cela sans aucun autre prérequis que les notions de capital et d'intérêt. Que cela ne dispense pas tous ceux qui veulent en savoir plus de se mettre au fait des principes de base de la mathématique financière !

Bibliographie

[1] Bair, J. et Justens, D., Du taux de chargement annuel réel au taux annuel effectif global, *Mathématique et Pédagogie*, n° 101, 1995, pp. 53-63.

Adresse de l'auteur :

Guy NOEL
Chemin des Fontaines 14bis
7061 Casteau

Analyse structurale de l'évaluation scolaire

P. Marlier, *Professeur à l'IESPCF - Liège*

Le lecteur qui cherche à éclairer sa lanterne sur l'évaluation scolaire sera sans doute désarçonné par les trois ou quatre premières pages de ce texte. Comme la méthode structurale et le principe de l'≪action ajustée≫ sont des éléments essentiels qui ont sous-tendu ma réflexion, il ne m'a pas semblé possible de faire autrement que d'expliquer avec quelque précision ce que j'entends par là.

1. La méthode structurale

Le postulat fondamental de cette méthode due au suisse Greimas est que tout *récit* peut se structurer selon six rôles ou fonctions :
– le *destinateur* (ou commanditaire),
– le *destinataire* (ou bénéficiaire),
– l'*acteur* (ou sujet de l'action),
– l'*objet* de l'action,
– les *alliés*,
– les *opposants.*

Le mot “récit” doit s'entendre dans une acception très large : c'est bien sûr la narration d'une histoire ou d'un événement, mais c'est aussi un programme d'action, la description du fonctionnement d'une institution,. . .

Plusieurs rôles ont été écrits au singulier et les mots qui les désignent sont des noms personnels. Il est cependant possible que ces rôles soient tenus par des collectifs ou par des abstractions. Quand quelqu'un dit par exemple qu'il agit au nom du “droit des gens à ...”, cela se traduit, dans ce contexte, par le fait que le destinateur de l'action est “le droit des gens à ...”.

Certaines fonctions sont faciles à identifier, d'autres moins. Voyons cela sur des exemples.

Récit 1 : *Un militant entreprend une grève de la faim pour obtenir la libération d'un détenu.*

Le sujet de l'action, c'est bien sûr le militant. L'action, c'est la grève de la faim. Le destinataire est le détenu à libérer. Les alliés (non mentionnés dans ce mini-récit) sont ceux qui soutiennent le gréviste de la faim, les medias qui donnent de la publicité à son action,... Les opposants (non mentionnés) sont les medias qui l'ignorent, les autorités qui lui refusent audience, ...

Le destinateur est ce qui inspire le militant. Etant donné le peu de renseignements fournis par le récit, on ne peut guère que suggérer quelques hypothèses : par exemple, le sens inné de la justice de ce militant ou l'amitié qui le lie au détenu, ou encore la volonté de "contrer le régime",... Ce destinateur peut avoir une sorte d'incarnation dans le parti politique ou le mouvement social auquel appartient le militant.

Récit 2 : *Le roi songe à marier son fils, le prince héritier. Un meunier, dont la fille est fort belle, enjoint à celle-ci de se parer de ses plus beaux atours. Il entreprend d'aller la présenter au roi.*

Le sujet est le meunier ; l'action est la présentation de la jeune fille au roi. Parmi les alliés, la beauté de la jeune fille et les atours qui la mettent en évidence. Ce récit ne nous dit rien des opposants ; selon d'autres contes bâtis sur ce canevas, on peut imaginer des rivales et leur famille, une belle-mère marâtre,... La destinataire sera le plus souvent identifiée comme étant la jeune fille dont on suppose que, conformément à l'idéologie habituelle de ce genre de récit, elle n'a d'autre idée en tête que de faire le bonheur d'un prince (charmant) dans les liens du mariage. Mais si on lit le récit dans une optique macho-paternaliste, on dira peut-être que le destinataire est le meunier lui-même qui s'est mis en règle avec sa conscience paternelle en "casant" sa fille au mieux.

Parmi les destinateurs, on peut imaginer : l'amour paternel, le sens du devoir paternel, le souci du meunier-citoyen d'offrir au prince la meilleure épouse possible,... Dans un récit plus développé, on trouverait des indices qui permettraient de mieux identifier le destinateur.

Récit 3 : Certains estiment que l'histoire chrétienne du salut est le récit prototype de tout récit :

Dieu (destinateur) veut procurer le salut aux hommes (destinataires). Pour ce faire, il envoie son Fils Jésus-Christ (acteur) qui va réaliser l'oeuvre du salut (objet du récit ou de l'action). Dans cette entreprise, il bénéficie de l'aide d'alliés et se heurte à l'action des opposants.

Récit 4 : L'amour de l'humanité et le sens de la justice (destinateurs) inspirent à des gens (acteurs) de se grouper en syndicats ou partis "de gauche" qui, au bénéfice de la classe ouvrière (destinataires), vont promouvoir l'instauration d'une législation sociale qui assure une meilleure protection des individus (action).

Récit 5A : Un professeur de mathématique (acteur), au nom des bonnes idées pédagogiques qu'il pense avoir (destinateur) rédige un manuel (action) destiné aux élèves habituellement en difficulté (destinataires).

Récit 5B : Le même (acteur) écrit aussi un article dans "*Mathématique et pédagogie*" (action) pour que ses collègues (destinataires) puissent améliorer leur enseignement en profitant de ses idées.

On voit, par cette variation sur le cas précédent, que si la même personne peut être à la fois acteur et destinateur, il est cependant raisonnable de faire la distinction entre l'une et l'autre : l'acteur est le sujet de l'action, le destinateur est à chercher au niveau de ce qui l'inspire.

Récit 5C : Le même, ayant investi dans la publication de manuels souhaite rentabiliser son investissement en temps et en argent. Pour y arriver, il entreprend diverses actions de promotions auprès de ses collègues et des inspecteurs pour faire connaître son produit. Les destinataires sont les collègues et les inspecteurs. L'auteur du manuel est l'acteur de la promotion (l'action). En tant que soucieux du "return" de son investissement, il est aussi le destinateur.

Les exemples montrent à suffisance que dans l'analyse d'une donnée factuelle, la description matérielle des faits ne suffira jamais à en faire saisir la *signification*. La recherche du destinateur en particulier implique le plus souvent, pour ne pas dire toujours, un "procès d'intention". Bien sûr, en poussant plus loin les analyses qui ne sont ici que sommairement esquissées, on y verrait sans doute plus clair dans le sens des événements décrits. Mais, c'est en tout cas la conviction de l'auteur de ce texte, l'utilisation systématique de grilles de lecture comme celle qu'on vient de présenter éclaire, et souvent plus qu'un peu, les engagements et actions dans lesquels on est impliqué ; de telles grilles mettent toujours en évidence un niveau "philosophique" dans lequel se nouent des faits observés.

2. L'action cybernétique

On parlait beaucoup de robots dans les années soixante. Bien sûr, il existait depuis longtemps des objets mécaniques autorégulés, admirablement conçus et réalisés, mais le développement de l'électronique et surtout sa miniaturisation grâce au transistor offraient des possibilités de systèmes autorégulés bien plus variés que ce que pouvait permettre la mécanique.

L'objet-type auquel il était souvent fait référence et qu'on pouvait admirer dans certaines foires ou expositions était une "tortue" (ne pas confondre avec celle du LOGO) qui se déplaçait dans un espace donné, évitant des obstacles disposés de manière quelconque et allant spontanément recharger ses accus à une prise de courant qu'elle pouvait identifier quand elle commençait à "se sentir un peu faible".

L'objet "grand public" qui est sans doute un des meilleurs exemples d'autorégulation d'un système est le thermostat de salon qui "asservit" le système de chauffage pour lui faire produire une température à peu près constante dans le local où il se trouve.

Les systèmes de freinage ABS sur les véhicules en sont un autre bon exemple.

Le principe en est fort simple : un agent (la chaudière) produit un certain effet (de l'eau chaude qui est envoyée dans les radiateurs) ; il reçoit en retour ("feed-back") de l'information sur l'efficacité de l'action produite et ajuste son action en fonction de l'information reçue.

Ce principe de l'*action ajustée* est appliqué depuis longtemps, parfois sans grand appareillage, dans de multiples domaines : un artilleur vise une cible et tire ; un observateur le renseigne sur l'impact réel de son action ; en fonction de ce renseignement, il "ajuste le tir".

Dans les années soixante, le contexte de développement de la cybernétique aidant, le principe de l'*action ajustée* a été souvent présenté dans des formations continuées de cadres comme le modèle même de l'action rationnelle et donc éminemment intelligente et humaine : un acteur (souvent socio-économique dans le contexte) se fixe (ou se voit fixer) des objectifs : il élabore une stratégie pour les atteindre et des moyens d'évaluation des résultats ; selon l'information reçue quand le système fonctionne, il ajuste les moyens (ou les objectifs) pour que l'action connaisse le succès.

On remarquera que cette description déjà plus fine que le modèle élémentaire précise qu'il y a fixation d'objectifs, mais on ne sait pas par qui ni en fonction de quoi, c'est-à-dire, dans les termes de l'analyse structurale, qu'il n'y a pas d'identification du destinateur ; corrélativement, dans l'évaluation, il n'y a pas de jugement moral sur la qualité du résultat ; l'appréciation porte uniquement sur le fait que le but visé est entièrement, partiellement ou pas atteint. Par contre, cette évaluation peut révéler que le but n'est pas accessible avec les moyens disponibles. Dans ce cas, la décision de changer d'objectif, éventuellement de renoncer, ou de mettre en oeuvre des moyens nouveaux, ne dépend pas en principe de l'acteur, sauf s'il est aussi destinateur.

Il est par contre essentiel à la méthode que l'acteur, s'il est humain, soit d'entière bonne volonté et épouse fidèlement le point de vue du commanditaire de l'action.

D'ailleurs, si la méthode de l'*action ajustée* peut apparaître comme très humaniste par l'appel qui est fait à l'"intelligence" de l'acteur qui utilise le plus ingénieusement possible les moyens disponibles en fonction de la fin poursuivie, elle est tout à fait compatible avec sa mise en oeuvre par des acteurs mécaniques ou électroniques non intelligents. Selon un scénario pessimiste (réaliste ?), les acteurs humains continuent et continueront d'avoir un rôle dans tous les cas où l'analyse de la situation et les moyens de la traiter ne sont pas encore suffisamment développés pour permettre de remplacer les acteurs "intelligents" par des acteurs automatisés. Le moins que l'on puisse dire est qu'on peut produire sans grande difficulté nombre d'exemples importants qui montrent clairement que l'évolution va dans ce sens. Qu'on songe par exemple qu'à la bourse de New York, ce sont les logiciels qui "décident" dans une large mesure de l'urgence d'acheter ou de vendre.

Il n'est sans doute pas innocent de constater que là où les tenants obstinés de l'humanisme parlent d'acteurs responsables (et donc libres), les spécialistes de l'automation parlent d'asservissement des systèmes.

Pourquoi parler d'*action cybernétique* plutôt que d'*action ajustée* ? En raison d'abord du contexte dans lequel se sont développées les réflexions ici résumées. Pour mettre en lumière leur aspect technocratique ensuite. Enfin, puisque ces réflexions sont menées dans un contexte pédagogique, on peut se rappeler que le mot "cybernétique" vient du grec *kubernètès* qui signifie pilote et qu'un baron de la pédagogie nationale et internationale plaide volontiers pour un "pilotage" du système scolaire.

3. Les évaluations scolaires

Quand on parle d'évaluations scolaires, il faut en parler au pluriel parce que, sous peine de tout confondre et d'argumenter abusivement dans tous les sens, il faut au moins distinguer évaluation certificative et évaluation formative, les deux étant souvent imbriquées dans la pratique, ce qui n'aide pas à y voir plus clair.

3.1. L'évaluation certificative

La société protège ses membres des charlatans et autres incapables en déterminant des "accès à la profession" pour ceux et celles qui, à titre individuel ou par l'intermédiaire de sociétés, offrent au public des services rendus à titre onéreux pour les bénéficiaires. Dans nombre de cas, il s'agit, en partie du moins, de diplômes scolaires ou académiques.

Chaque fois que je prends l'avion, disait quelqu'un, je le fais dans la confiance que le pilote est passé par une formation qui non seulement lui a appris son métier, mais a aussi écarté de la profession tous ceux qui, selon le jugement prudent et compétent des examinateurs, ne présentaient pas les signes suffisants de fiabilité dans l'exercice de la profession.

On peut éclairer de commentaires analogues ce qui se passe quand on reprend sa voiture au garage après vérification ou réparation des freins, quand on s'adresse à un avocat, un médecin ou un architecte, quand on achète un meuble d'époque chez un antiquaire, ...

C'est assurément une des missions de l'école, dans ses filières de qualification en tout cas, que de fournir à la société des gens dont la compétence est certifiée par un diplôme, de manière que le public puisse avoir recours à leurs services en toute confiance. Ceci implique que l'école assume aussi la responsabilité d'exclure, fût-ce provisoirement, ceux qu'on estime insuffisamment compétents.

Malheureusement, l'attention explicite de beaucoup (enseignants, parents, élèves, ensemble de la société) s'est portée trop exclusivement sur ce rôle très particulier, en négligeant d'autres aspects et en extrapolant abusivement vers toutes les situations scolaires ce qui n'est qu'une caractéristique des filières de qualification, éventuellement aussi des filières de transition dans la mesure où il faut occasionnellement certifier que l'apprenant pourra, selon toute vraisemblance, suivre avec fruit l'étape ultérieure du curriculum.

3.2. L'évaluation formative

Mais l'école a d'autres fonctions, plus fondamentales. En particulier, elle doit amener chaque individu à une maîtrise au moins minimale de ce qui est indispensable à une vie autonome dans la société très organisée qui est la nôtre : langue véhiculaire, lecture, écriture, calcul, organisation de la vie publique, droits et devoirs essentiels de la vie civique et de la vie privée, connaissance du milieu (histoire, géographie, science,...), hygiène, code de la route et sécurité rougière,...

Dans la poursuite de ces objectifs, vu qu'il s'agit de minima vitaux, le principe de l'exclusion des incapables est tout simplement à rejeter : sauf les cas extrêmes de handicaps graves – qu'il faudra d'ailleurs traiter aussi, mais autrement – le système scolaire ne peut se fixer qu'un seul but : amener tout le monde à une maîtrise suffisante.

Ceci ne signifie pas qu'il n'y ait aucune forme d'évaluation dans ces systèmes d'apprentissage des capacités fondamentales. Bien au contraire ! Vu qu'il s'agit de l'indispensable, il faut savoir si on (le système) réussit ou pas, et en cas d'insuccès, il faut en diagnostiquer les causes et y apporter le remède adéquat.

Dans le paragraphe suivant, on essaiera d'éclairer les évaluations certificative et formative au moyen de l'analyse structurale. Il est clair dès à présent que si toute évaluation a pour but de savoir où on en est, les objectifs de l'une et de l'autre sont fort différents. Pas question dans l'évaluation formative d'informer la société sur les capacités de l'apprenant. On veut par contre l'informer, lui et ceux qui ont une responsabilité à son égard, de ses progrès dans les apprentissages, avec pour but de l'encourager en lui faisant savoir que le processus évolue bien, ou au contraire pour le stimuler en lui révélant qu'au rythme où il va, il est loin d'arriver à ses fins.

Mais l'évaluation formative n'a pas pour seul but de savoir où on en est ; elle vise à ce que les erreurs ou insuccès soient eux aussi positifs dans l'apprentissage. Une tentative non réussie doit apporter son lot d'information de manière que la tentative suivante ne soit pas identique à celle qui vient d'avoir lieu. On reconnaît dans cette façon de voir les choses une application du principe de l'*action cybernétique* selon lequel même les actions manquées ou imparfaitement réussies ont un intérêt dans la poursuite de l'objectif qui est ici la formation de l'apprenant.

Les acteurs du système éducatif de base autres que l'apprenant lui-même, c'est-à-dire ses professeurs, la direction de l'école, les autorités du système d'éducation, se poseront aussi des questions pour savoir s'ils atteignent ou non leur objectif qui est d'amener les apprenants au niveau de capacité souhaité en utilisant au mieux les moyens disponibles. Ici encore, on retrouve le principe de l'action cybernétique.

3.3. Oui mais...

Ce texte est écrit par un homme de terrain qui, tout au long de sa carrière, a pratiqué l'évaluation sous de multiples formes dans l'enseignement secondaire général de transition. Il sait aussi bien que personne que si les distinctions typologiques peuvent être éclairantes au niveau de la réflexion et inspirer des pratiques, sur le terrain les choses sont souvent plus mêlées : une interrogation cotée dont les points vont intervenir dans la détermination de la "cote du mois" relève évidemment de l'évaluation certificative. Mais, dans la mesure où elle est corrigée en classe, commentée, interprétée,... elle relève tout autant de l'évaluation formative.

D'ailleurs, même en s'en tenant à un point de vue plus formel, les choses ne sont jamais tout à fait claires.

Y compris dans des situations d'apprentissage très spécialisé, songeons par exemple aux écoles de pilotage d'avions, le but premier du processus est d'amener les candidats à la maîtrise des techniques et savoirs concernés, ce qui relève bien de la formation. Même si l'exclusion des incapables ou supposés tels fait partie du contrat avec la société, ce n'est que la face négative d'une réalité dont la face principale est la prestation du service de formation.

D'un autre côté, dans les formations qui visent les apprentissages de base indispensables et dont l'évaluation formative est un outil de référence, on ne peut évacuer le fait qu'en fin de parcours, ceux qui n'auront pas atteint les standards minimaux seront des moins-que-rien, des handicapés socioculturels. Ceci relève évidemment d'un jugement de type certificatif en fonction duquel on leur déconseillera, voire on leur interdira, l'accès à certaines formations ultérieures.

Ces remarques, importantes, ayant été faites, continuons la considération de situations typées.

4. Analyse structurale de l'évaluation

4.1. L'évaluation certificative

Si l'on s'en tient, comme on vient de le dire, à des situations typées, l'analyse structurale de l'évaluation certificative apparaît assez simple.

Le *destinateur*, ce sont les pouvoirs publics au plus haut niveau, qui, au nom du droit qu'ont les gens de recevoir des produits et services de qualité en échange de l'argent qu'ils les paient, chargent leur département de l'enseignement ou de la formation d'organiser des épreuves qui permettront de qualifier, c'est-à-dire de déclarer fiables dans les limites de leur compétence ceux et celles qui réussiront.

Les *destinataires* sont les consommateurs et utilisateurs de services, publics ou privés, individuels ou collectifs, qui auront recours à la compétence de ces produits du systèmes que sont les diplômés.

Les *acteurs* sont le système scolaire, depuis les pouvoirs organisateurs ou subsidiants jusqu'aux plus humbles agents en passant bien sûr par les professeurs qui, agissant en spécialistes, vont produire ces sortes de rapports d'expertise que sont les copies d'examens dûment corrigées, en fonction desquelles les jurys décideront du succès ou de l'échec, c'est-à-dire de la reconnaissance sociale de l'individu concerné. Celui-ci sera déclaré agent valable dans un secteur donné d'activité (enseignement de qualification) ou candidat autorisé à la poursuite d'études ultérieures (enseignement de transition).

L'*action*, c'est l'ensemble de ce qui est organisé pour s'achever dans l'octroi ou le refus de la reconnaissance sociale qu'est un diplôme ou certificat.

Et les apprenants là-dedans ? Dans la mesure où les choses se passent entre l'Etat et ses membres, ils ne sont pas acteurs dans cette entreprise, mais ils sont la matière sur laquelle le procédé opère ; ils en sont le produit (ou le rebut). Tout au plus peut-on dire qu'étant des produits non passifs, ils sont des *alliés* du système dans la mesure où, intéressés eux-mêmes par le succès de l'entreprise, ils vont collaborer de toutes leurs forces à ce qu'ils soient un succès de l'école. Ils en sont éventuellement des *opposants* dans la mesure où, par une attitude non coopérante, ils perturbent le bon déroulement des classes et donc la qualité du "produit" qu'on y prépare ; en particulier, ils perturbent l'action entreprise par le système scolaire pour faire d'eux des gens qualifiés.

Ces réflexions peuvent paraître bien "inhumaines", surtout si on songe aux efforts consentis par les étudiants pour préparer et présenter une session d'examens. Elles le seraient surtout si on prétendait que ceci résume tout ce qu'il y a à dire sur l'enseignement ou suffit à expliquer ce qui se passe dans les classes.

Mais vouloir oblitérer le fait que, en fin d'année scolaire ou de cycle, le professeur va évaluer l'élève et "certifier" qu'il peut ou non accéder à une étape ultérieure, supposer en outre que cela n'intervient pas au quotidien dans les relations professeurs-élèves, professeurs-parents,..., c'est tricher avec la réalité et refuser de chercher des réponses adéquates à de vraies questions.

La seule manière d'éviter que l'évaluation certificative n'envahisse tout le système scolaire et le biaise, c'est de la prendre pour ce qu'elle est et lui délimiter son champ d'application.

4.2. L'évaluation formative

Abandonnons le point de vue de l'enseignement prestataire de diplômés au bénéfice de la société pour nous concentrer sur l'enseignement formatif, de base ou spécialisé.

Ici, c'est l'apprenant qui est au coeur du processus ; c'est lui l'*acteur*. Toute formation est autoformation. Piaget ne nous contredira certainement pas : l'apprenant construit son savoir, l'enrichit, l'organise et le réorganise, à son propre bénéfice. Il est donc aussi le *destinataire*.

Ses *alliés* sont ses parents, ses professeurs et tout l'encadrement qui lui est favorable. En sont aussi les pouvoirs publics qui organisent ou subsidient le système d'enseignement, ...

Ses *opposants* sont les difficultés intérieures ou extérieures qu'il peut rencontrer : une santé défaillante, des moyens intellectuels limités, un milieu familial ou de vie qui ne l'aide guère, sa propre paresse, des "mauvais compagnons", des professeurs pas à la hauteur ou "qui lui en veulent", ...

L'*action*, c'est tout ce qu'il fait pour assurer sa formation : inscription dans une école, participation active aux cours, travaux à domicile, ...

Reste à identifier le *destinateur*.

On peut dire d'une part que c'est l'apprenant lui-même dans la mesure où il s'est forgé et se forge l'idée de son destin, de sa personnalité, du projet d'existence dont, comme acteur, il entreprend la mise en oeuvre.

Si l'enfant est petit, on peut citer l'énergie vitale qui est en lui et le pousse à grandir, à devenir lui-même. Ce dynamisme est relayé par ses parents qui, outre le fait qu'ils l'ont fait exister, lui ont appris tant de choses (marcher, parler,...), l'encouragent, et l'on inscrit dans un cursus scolaire.

Mais il faut citer aussi la société tout entière qui se fixe comme objectif d'épanouir tous ses enfants et charge l'Etat de le réaliser. Ceci peut recevoir une interprétation très humaniste – on veut conduire chacun au plein épanouissement de ses potentialités – ou beaucoup plus utilitariste – c'est l'intérêt de tout le monde que chacun s'épanouisse tant positivement par la contribution supérieure qu'apporte à la société un sujet cultivé (et rentable), que négativement par le fait qu'un sujet non intégré et éventuellement délinquant non seulement n'apporte rien mais dérange et coûte. On se souvient de la phrase de Victor Hugo : une école qu'on ouvre est une prison qu'on ferme.

4.3. Et pourtant, ça ne tourne pas

A lire ce qui précède, on pourrait se dire que "tout baigne" à l'école. Il suffit pourtant d'évoquer le décrochage scolaire pour qu'on suspende sa réflexion et qu'on se demande si tout ceci a quelque rapport avec la réalité.

Il est clair que pour tous les élèves qui achèvent une scolarité heureuse à l'âge "normal", de même que pour tous ceux qu'un redoublement a remis en piste (il y en a, quoi qu'en disent les pédagogues), même pour nombre de ceux pour qui le processus scolaire a été laborieux, souvent périlleux, le schéma décrit ci-dessus s'applique, avec, cela va de soi, des nuances d'un individu à l'autre.

Qu'est-ce donc alors qui produit l'échec massif du système scolaire ?

On a vu dans les exemples d'introduction de l'analyse structurale que la désignation ou l'identification du destinateur est ce qui donne un sens aux faits et est donc le révélateur de la réalité profonde. Par ailleurs, pour que le "récit" se déroule bien, il est indispensable que l'acteur soit de bonne volonté et en accord avec les vues du destinateur. Dans l'exemple-prototype du récit chrétien du salut, ceci est très clairement réalisé : "Le Père et moi, nous sommes un". Dans les récits où l'exécutant est une machine, sauf panne, c'est le cas aussi.

Au point précédent de ce paragraphe, on a mis en évidence que l'acteur-apprenant a des destinateurs multiples qui, quand les choses marchent bien, sont en accord, mais qui peuvent être aussi en désaccord. Un sujet apprenant pourrait par déception de sa situation se fixer pour objectif d'apprendre à tirer un parti maximum de la sécurité sociale alors que le "système" vise à en faire un individu rentable.

Par ailleurs, si l'acteur principal est l'apprenant, les autres intervenants sont aussi des acteurs qui ont leurs destinateurs, et ceux-ci tentent de leur imposer des comportements. Un être humain n'étant jamais complètement subordonné aux autres, il est impensable qu'aucun de ces intervenants se soumette totalement aux impératifs d'un destinateur de l'acteur principal. De nombreuses contradictions vont donc apparaître ; en voici quelques-unes à titre d'exemples.

Il se peut qu'il y ait accord des parents avec l'esprit de l'école qu'ils ont choisie et avec le corps professoral dans son ensemble, mais que l'élève n'aime pas cet esprit-là.

Des professeurs peuvent ne pas aimer du tout la mentalité des élèves et des parents de l'école dans laquelle ils travaillent, ou l'esprit de nouvelles méthodes pédagogiques. Mais la nécessité de gagner le pain quotidien et l'impossibilité pratique de se recaser ailleurs les obligent pratiquement à se taire.

Un professeur de mathématique peut souhaiter "former ses élèves en profondeur" et vouloir les forcer à produire un travail intelligent et réfléchi. Mais des élèves peu intéressés par cette discipline peuvent souhaiter que le cours se limite à la mise en place de savoir-faire bien circonscrits.

Les exemples qui précèdent peuvent sûrement expliquer un certain nombre de cas individuels, mais pas le décrochage massif que l'on observe. Il faut donc chercher plus loin.

Il y a probablement des contradictions importantes entre les destinateurs. L'idéologie scolaire véhicule certainement l'image de jeunes gens et jeunes filles sérieux, même si un peu espiègles, travailleurs, de bonne volonté, courageux, généreux,... même si ayant leurs faiblesses. Mais branchez votre téléviseur sur n'importe quelle chaîne, vous verrez des jeunes gens et des jeunes femmes, tous Appolon ou Vénus, vanter des produits-miracles grâce à quoi tout réussit, et sans effort.

Mais il y a plus grave. Les jeunes ont, comme tout le monde, une image très positive d'eux-mêmes. Mais dans son rôle de protection de la société par élimination des incapables, l'école a dit à nombre d'entre eux, de manière répétée, qu'ils ne sont pas ce qu'il conviendrait qu'ils soient. Comment espérer, dans ces conditions, qu'ils soient les acteurs enthousiastes d'une (auto)formation dont on les a convaincus, de manière hélas très efficace, qu'elle leur était inaccessible. Tant qu'ils étaient petits, ils l'ont encaissé ; devenus plus grands, ils se rebiffent. Violemment, s'il échet.

5. Une affaire d'Etat ?

Assurément, la société triche quand elle déclare vouloir épanouir tout le monde et conduire tout un chacun au plein épanouissement de ses potentialités.

Très certainement, elle ne souhaite pas voir grandir les petits Hitler ou Staline qu'elle pourrait porter dans son sein. Ni les Al Capone ou Jacques Mesrine, les violeurs d'enfants, assassins ou autres "malfaiteurs" pour qui elle prévoit la peine de mort – même si non appliquée –, les travaux forcés ou la réclusion "à perpétuité", c'est-à-dire la mise à l'écart définitive ou suffisamment longue pourqu'il soit raisonnable de penser que les individus en question sont venus à resipiscence ou ... tellement amortis qu'ils ne sont plus dangereux.

On trouvera peut-être qu'il faut vraiment être mathématicien pour enfoncer de telles portes ouvertes. En réalité, le but de ce discours est de montrer que les propos généreux sont toujours beaucoup plus limités qu'il n'y paraît. La société ne tolérera pas sans mesure de payer les études de jeunes militants d'extrême droite, ou de "fieffés paresseux" ou de marginaux sociaux de tout poil qui, selon les cadres de référence communément admis, ne lui apporteront probablement guère de "plus", ou pire pourraient oeuvrer à sa destruction.

Tout ce qui se targue aujourd'hui d'analyse de problèmes de société se doit de souligner le désintérêt de tant de gens, des jeunes en particulier, pour la politique, mais bien peu sont capables d'en donner des raisons. Dans sa contribution à l'émission *Arguments* du 24 décembre 1994, Marcel Gauchet expliquait que l'Etat-Providence a contribué à créer un type de personnalités qui ne peut certes vivre que grâce à un Etat-Providence mais qui, curieusement, se désintéresse complètement de sa survie.

Dans les célébrations du cinquantième anniversaire du débarquement de Normandie ou de la libération, on a souvent entendu les hommes politiques ou autres autorités sociales rappeler la dette de reconnaissance que nous avons à l'égard de ceux qui ont risqué ou donné leur vie pour que renaisse en Europe le genre de vie auquel nous nous disons attachés. Mais quels sont ceux qui en ont tiré exemple ou argument pour proposer à nos populations, en particulier à nos jeunes, de nouveaux horizons à conquérir ? Pratiquement, tout le discours s'est résumé à dire qu'il fallait éviter que cela ne recommence. Quel jeune (de 7 à 77 ans) pourra lire dans de tels propos l'invitation d'un destinateur à être l'acteur d'un monde nouveau ?

Pour mieux saisir le déficit d'idéal, qu'on se rappelle les réactions de la jeunesse américaine du début des années soixante, quand le président Kennedy lui a tenu des propos qui ressemblaient à ceci : nous avons décidé de conquérir la lune, et nous avons besoin de vous pour le réaliser.

Aujourd'hui, non seulement on trouve obsolètes de tels propos, mais tout le monde sait bien que quand on dit à la jeunesse de vivre son présent, c'est pour taire d'autant mieux que, pour la suite, il y aura surtout le chômage, les petits boulots,... bref un horizon bouché.

Ce qu'il semble qu'on puisse retenir de cette analyse structurale de l'enseignement qui révèle que le problème se trouve du côté du ou des destinateurs, c'est que ce n'est pas l'école qui résoudra les problèmes de la société en lui fournissant des jeunes "bien formés", mais que c'est au contraire la société qui résoudra les problèmes de l'école en ouvrant des horizons en fonction desquels on pourra savoir ce que c'est qu'un jeune bien formé.

6. Bonjour l'artiste !

Quoi qu'en disent des Cassandre, l'école ne va pas imploser. En tout cas, au sens ordinaire du terme. Après l'implosion d'un tube cathodique, il n'y a plus de tube cathodique. Or demain, et après-demain, et les jours suivants, il y aura toujours des écoles.

Professeurs, élèves, et tant d'autres, continueront de s'y rencontrer et, paradoxe, ils y collaboreront à une tâche commune dont certaines modalités sont et seront définies, mais dont les finalités sont et seront mal cernées.

L'Etat, pour sa part, continuera d'y investir des sommes qui, même si certains les jugent insuffisantes, resteront considérables. On peut prévoir en certains endroits et à certains moments des difficultés importantes, mais l'institution scolaire ne va pas disparaître de si tôt.

Il est par ailleurs illusoire d'imaginer que les travaux du Conseil de l'Education et de la Formation ou les Assises de l'Enseignement vont par enchantement et grâce à un peu de bonne volonté trouver des solutions-miracles.

Que pourront alors y faire ceux dont c'est le métier d'y être acteurs en tant qu'enseignants ?

Il semble clair qu'ils ne pourront, au pire "sauver leur peau", au mieux y être heureux, qu'en identifiant clairement leur propre destinateur pour témoigner qu'au nom de ses valeurs, il y a moyen de faire face aux difficultés auxquelles on est confronté. Un enseignant de la société déboussolée dans laquelle nous sommes, ne pourra tenir le cap que s'il a des repères personnels solides et s'il sait les manifester. Par des discours, occasionnellement et selon son talent, par son attitude, habituellement. Ceci implique bien sûr que les valeurs personnelles de l'enseignant incluent une bonne dose d'ouverture et de tolérance.

Car, à la différence de ce qui a pu être le cas dans des systèmes scolaires très militants comme l'école primaire laïque et républicaine de Jules Ferry ou les petits séminaires catholiques, il n'est guère possible aujourd'hui d'être enseignant, dans quelque réseau que ce soit, en se contentant de faire sienne l'idéologie qui est supposée fonder l'institution dans laquelle on travaille. Et ce, pour la bonne raison que même s'il existe pour l'école ou le réseau concernés, un document appelé “projet pédagogique”, celui-ci est généralement rédigé en termes tellement généraux qu'il peut au mieux rallier des consensus mous, certainement pas inspirer de véritables engagements.

A chaque enseignant donc de se créer un univers dans lequel ses propres références personnelles, celles de l'institution dans laquelle il travaille, celles de ses collègues, de ses élèves,... forment un tout suffisamment harmonieux, où chacun peut apporter aux autres des éléments d'enrichissement.

Mais créer un univers, c'est du travail d'artiste.

Décidément, le métier d'enseignant, c'est bien autre chose que d'être transmetteur de connaissances. Bonjour l'artiste !

Adresse de l'auteur :
Pierre MARLIER
Rue de Plainevaux 185/15
4100 Seraing

La suite de Fibonacci

J. Finoulst, *Prof. d'Athénée hon.*

1. Rappelons la définition de cette suite (u_n)

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \ (n > 2), \ u_1 = 1 \text{ et } u_2 = 1.$$

On pourrait y ajouter $u_0 = 0$.

Le terme général peut s'écrire (formule de Binet[1)]) :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \right].$$

Le but de cet article est de déduire une autre expression du terme général.

Nous ferons un usage fréquent de la notation

$$[n, p] = 2 \cos \frac{p\pi}{n}.$$

2. Calculons d'abord $[5, 1]$ et $[5, 3]$.

Tenant compte des formules $[n, a]\,[n, b] = [n, a+b] + [n, a-b]$, $[n, p] = -\,[n, n-p] = [n, 2n-p]$ et $[n, a]^2 = 2 + [n, 2a]$, on obtient

$$[5, 1]\,[5, 3] = [5, 4] + [5, 2]$$

ou

$$[5, 1]\,[5, 3] = -\,[5, 1] - [5, 3]\,, \qquad (1)$$

$$[5, 1]^2 + [5, 3]^2 = 4 + [5, 2] + [5, 6] = 4 - [5, 3] - [5, 1]$$

ou $\{[5, 1] + [5, 3]\}^2 - 2\,[5, 1]\,[5, 3] = 4 - [5, 1] - [5, 3]$.

A l'aide de (1), on a

$$[5, 1]^2\,[5, 3]^2 - 3\,[5, 1]\,[5, 3] - 4 = 0.$$

Dans la suite, nous écrirons brièvement

$$\alpha = [5, 1]\,, \ \beta = [5, 3]\,.$$

L'égalité précédente s'écrit

$$(\alpha\beta)^2 - 3\alpha\beta - 4 = 0.$$

Comme $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, on trouve

$\alpha\beta = -1$, et selon (1) : $\alpha + \beta = 1$.

α et β sont les racines de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0 :$$

$$\alpha = [5,1] = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = [5,3] = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

et

$$\alpha - \beta = [5,1] - [5,3] = \sqrt{5}.$$

3. L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ donne aussi $x^2 = x + 1$.

On s'aperçoit facilement que toute puissance entière x^k peut s'écrire comme fonction linéaire de x à coefficients entiers. On trouve ainsi

$$x^0 = 0x + 1,\ x = 1x + 0,\ x^2 = x + 1,\ x^3 = 2x + 1,\ x^4 = 3x + 2, \ldots$$

Supposons $x^k = a_k x + b_k$.

On en déduit

$$x^{k+1} = a_k(x+1) + b_k x$$

ou

$$x^{k+1} = (a_k + b_k)x + a_k.$$

Par hypothèse de récurrence, on a aussi

$$x^{k+1} = a_{k+1}x + b_{k+1}.$$

Identifiant les seconds membres des deux expressions de x^{k+1} :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + b_k \\ b_{k+1} &= a_k. \end{aligned}$$

De ces égalités, on déduit

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k \quad \text{et} \quad b_{k+2} = b_{k+1} + b_k.$$

Ces relations de récurrence entre les coefficients de x et les termes indépendants sont les mêmes que celle qui définit la suite de Fibonacci, à savoir

$$y_{k+2} = y_{k+1} + y_k \tag{2}$$

4. La théorie du calcul des différences donne comme solution générale de (2)

$$y_k = c_1 \left[5,1\right]^k + c_2 \left[5,3\right]^k \quad \text{ou} \quad y_k = c_1\alpha^k + c_2\beta^k.$$

Pour le calcul de $y_k = a_k$, il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\alpha + c_2\beta = 1 \end{cases}$$

Comme $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, on trouve

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k - \beta^k) \tag{3}$$

En particulier : $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = 1,$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta) = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta = 2, \ldots$$

Le terme a_k est donc bien le terme général u_k de la suite de Fibonacci.

(3) est la formule de Binet !

Pour calculer $y_k = b_k$, on a le système

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\alpha + c_2\beta = 0 \end{cases}$$

Tenant compte de $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ et $\alpha\beta = -1$, on trouve

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}).$$

Maintenant

$$b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1,\ b_4 = 2, \ldots\ .$$

Le terme b_k correspond au terme u_{k-1} de la suite de Fibonacci.

5. Pour transformer la formule de Binet, nous démontrons d'abord le lemme :

$$(2\cos\ x)^k = \sum_{s=0}^{k} C_k^s \cos(k-2s)x.$$

La formule est exacte pour $k = 1$.

Par induction complète : si la formule est exacte pour k, elle le sera aussi pour $k+1$.

En effet,

$$\begin{aligned}
(2\cos x)^{k+1} &= 2\cos x . \sum_{s=0}^{k} C_k^s \cos(k-2s)x \\
&= \sum_{s=0}^{k} C_k^s \left[\cos(k+1-2s)x + \cos(k-1-2s)x\right] \\
&= \sum_{s=0}^{k} C_k^s \cos(k+1-2s)x + \sum_{s=1}^{k+1} C_k^{s-1} \cos(k+1-2s)x \\
&= \cos(k+1)x + \sum_{s=1}^{k} (C_k^s + C_k^{s-1}) \cos(k+1-2s)x \\
&\quad + \cos(k+1)x \\
&= \sum_{s=0}^{k+1} C_{k+1}^s \cos(k+1-2s)x.
\end{aligned}$$

Ceci démontre la formule.

Si $x = t\pi/n$, on obtient avec la notation $[u,v] = 2\cos\frac{v\pi}{u}$

$$[n,t]^k = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k} C_k^s \left[n, (k-2s)t\right].$$

Selon (3)

$$\begin{aligned}
u_k &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{[5,1]^k - [5,3]^k\right\} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{s=0}^{k} C_k^s \left\{[5,(k-2s)] - [5,3(k-2s)]\right\}.
\end{aligned}$$

Pour calculer la somme $\sum$, nous considérons 3 cas : (posons pour abréger $[5,(k-2s)]-[5,3(k-2s)]=U$)

1) $k-2s=5\mu$

$$U=[5,5\mu]-[5,15\mu]=[5,5\mu]-[5,5\mu]=0;$$

2) $k-2s=5\mu\pm 1$

$$\begin{aligned}U&=[5,5\mu\pm 1]-[5,15\mu\pm 3]=(-1)^{\mu}\{[5,\pm 1]-[5,\pm 3]\}\\&=(-1)^{\mu}\{[5,1]-[5,3]\}=(-1)^{\mu}\sqrt{5}.\end{aligned}$$

A cause du double signe $\pm$, U est à prendre deux fois.

3) $k-2s=5\mu\pm 3$

$$\begin{aligned}U&=[5,5\mu\pm 3]-[5,15\mu\pm 9]=(-1)^{\mu}\{[5,\pm 3]-[5,\pm 9]\}\\&=(-1)^{\mu}\{[5,3]-[5,1]\}=(-1)^{\mu+1}\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Même remarque que ci-dessus !

On trouve ainsi

$$u_k=(-1)^{\mu}\left\{\sum_{\mu}C_k^{\frac{1}{2}(k-5\mu+1)}-\sum_{\mu}C_k^{\frac{1}{2}(k-5\mu+3)}\right\}.$$

Remarquons que k et μ sont de parité différente.

Introduisons la notation : $(C_u^v)_5=\sum_{\mu}C_u^{v+5\mu}$.

On fait la somme de tous les termes dont les indices supérieurs limités à l'intervalle $[0,u]$ forment une progression arithmétique de raison 5.

Ainsi, on a

$$u_n=\left|(C_n^{\frac{1}{2}(n+1)})_5-(C_n^{\frac{1}{2}(n+3)})_5\right|$$

Si n est pair, les indices supérieurs $\frac{1}{2}(n+1)$ et $\frac{1}{2}(n+3)$ sont à remplacer respectivement par $\frac{1}{2}(n+6)$ et $\frac{1}{2}(n+8)$.

Exemples

1) $n=12$

$$u_{12}=\left|(C_{12}^{9})_5-(C_{12}^{10})_5\right|=\left|(C_{12}^{9}+C_{12}^{4})-(C_{12}^{10}+C_{12}^{5}+C_{12}^{0})\right|=144$$

2) $n = 19$

$$u_{19} = \left|(C_{19}^{10})_5 - (C_{19}^{11})_5\right| = (C_{19}^{0}+C_{19}^{5}+C_{19}^{10}+C_{19}^{15})-(C_{19}^{1}+C_{19}^{6}+C_{19}^{11}+C_{19}^{16})$$

$$= 107883 - 103702 = 4181.$$

Bibliographie

N.N. Worobjow, Die Fibonaccischen Zahlen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971, 129 pages.

Adresse de l'auteur :

Jules FINOULST
Piannesbergstraat 16
3590 Diepenbeek

Propriétés différentielles des fonctions convexes

J. Bair et G. Hansen, *Université de Liège et Université de Buenos Aires*

Après avoir présenté quelques façons équivalentes d'introduire les fonctions convexes d'une variable [2], nous allons à présent en donner les principales propriétés, concernant surtout leur continuité et leur dérivabilité. Nous reprendrons les définitions et la terminologie classiques (voir, par exemple dans [2]). Rappelons néanmoins que nous appelons *convexe* sur un intervalle I toute fonction f telle que le segment de droite reliant deux points arbitraires de son graphe ne passe nulle part sous celui-ci ; analytiquement, cette condition se traduit comme suit : pour tous points a, b de I et pour tout réel λ de $]0,1[$,

$$f[\lambda a + (1-\lambda)b] \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Il est bien connu que les fonctions convexes ne sont pas toujours continues, ni dérivables : de nombreux exemples élémentaires en témoignent [2]. Néanmoins, leur comportement est loin d'être "anarchique" dans ce domaine, car même dans le cas où elles ne sont pas dérivables, elles possèdent une certaine "régularité". En effet, dans le cas général, à chaque point x_0 où une fonction f est dérivable, on peut associer *un nombre réel* $f'(x_0)$, appelé dérivée de f en x_0 ; dans le cas des fonctions convexes, à chaque point x_0 intérieur à l'intervalle sur lequel f est convexe peut être associé *un ensemble de nombres réels*, plus précisément un *intervalle compact* de nombres réels, appelé le *sous-différentiel* de f en x_0, qui va remplacer en quelque sorte la notion de dérivée de f en x_0. Cette notion de sous-différentiel permet, par exemple, d'étendre pour des fonctions convexes non nécessairement dérivables des théorèmes classiques qui sont à la base de l'analyse, comme le lemme de Rolle ou la formule des accroissements finis.

Nous nous proposons dans cet article de recenser les propriétés les plus significatives des sous-différentiels de fonctions convexes. Nous donnerons également les principaux résultats théoriques dans le domaine de l'optimisation des fonctions convexes. Tous les énoncés présentés dans cette note sont à la fois jolis, utiles dans les applications et faciles à démontrer.

1. Dérivées à gauche et à droite

Rappelons que la limite qui intervient dans la définition de la dérivée d'une fonction f en un point x_0 est une limite "bilatérale", valable aussi bien à gauche qu'à droite. Dans certains cas, il convient d'envisager seulement les limites "latérales", à gauche ou à droite, de

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Quand elle est finie, la limite à gauche

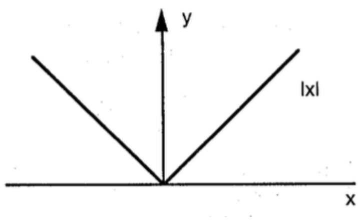
$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

est appelée la *dérivée à gauche* (de f en x_0) et est notée $f'_-(x_0)$ (ou $f'(x_0^-)$ ou encore $f'_g(x_0)$). On définit de même la *dérivée à droite*

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(ou $f'(x_0^+)$ ou encore $f'_d(x_0)$) quand cette limite est finie.

La dérivée proprement dite existe en x_0 lorsque les dérivées à gauche et à droite existent et sont égales. La dérivée à gauche (resp. à droite) est la pente d'une *demi-tangente à gauche* (resp. *à droite*) au point $X_0=(x_0,f(x_0))$ du graphe de f ; le graphe y présente un *point anguleux* (parfois appelé un "coin") lorsque les dérivées à gauche et à droite existent, mais sont différentes. Un exemple élémentaire de coin est l'origine pour le graphe de la fonction $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$, qui est convexe sur $\mathbb{R}$: on a en effet, $f'_-(0)=-1$ et $f'_+(0)=1$.

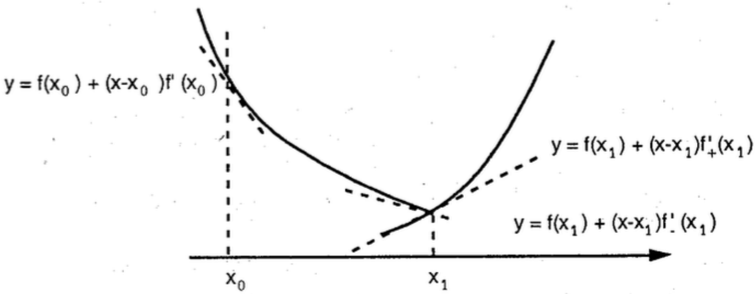


Lorsqu'une fonction convexe f sur I est dérivable en un point x_0 (de $\overset{\circ}{I}$), il est bien connu que son graphe n'est jamais situé en dessous de la tangente au point d'abscisse x_0, c'est-à-dire que, pour tout x de l'intervalle I,

$$f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \quad [2].$$

Nous prouverons maintenant que les dérivées à gauche et à droite de f existent en tout point x_0 intérieur à I, c'est-à-dire que le graphe de f est partout "lisse" ou "en coin", et, de plus, que l'inégalité antérieure s'étend aux dérivées latérales, à savoir

$$f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)f'_-(x_0)$$
$$f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)f'_+(x_0)$$



Proposition 1.1 *Soit f une fonction convexe sur I. En tout point x_0 de $\overset{\circ}{I}$, f possède des dérivées à gauche et à droite telles que*

$$\sup_{x \in I \cap]-\infty, x_0[} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0) = \inf_{x \in I \cap]x_0, +\infty[} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} ;$$

en corollaire, $f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)f'_-(x_0)$ et $f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)f'_+(x_0)$ pour tout x de I.

Preuve. Soient x et y deux points arbitraires de $\overset{\circ}{I} \cap]-\infty, x_0[$ et $\overset{\circ}{I} \cap]x_0, +\infty[$ respectivement. Comme la fonction

$$p_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$, [2], $p_{x_0}(x) \leqslant p_{x_0}(y)$. Si x tend vers x_0 par valeurs inférieures, la limite de $p_{x_0}(x)$ existe puisque la fonction p_{x_0} est croissante et bornée sur $I \setminus \{x_0\}$, [2] ; on obtient donc

$$\lim_{x \to x_0^-} p_{x_0}(x) = \sup_{x \in \overset{\circ}{I} \cap]-\infty, x_0[} p_{x_0}(x) = f'_-(x_0) \leqslant p_{x_0}(y).$$

En faisant à présent tendre y vers x_0 par valeurs supérieures, on trouve

$$f'_-(x_0) \leqslant \inf_{y \in \overset{\circ}{I} \cap]x_0, +\infty[} p_{x_0}(y) = \lim_{y \to x_0^+} p_{x_0}(y) = f'_+(x_0).$$

De plus, vu que $x - x_0 < 0$ et $y - x_0 > 0$,

$$p_{x_0}(x) \leqslant f'_-(x_0) \ \text{ entraîne } \ f(x) - f(x_0) \geqslant (x - x_0) f'_-(x_0) \text{ et}$$

$$p_{x_0}(y) \geqslant f'_+(x_0) \ \text{ entraîne } \ f(y) - f(x_0) \geqslant (y - x_0) f'_+(x_0).$$

■

Si f est convexe sur $[a, b]$, on peut calculer les limites par valeurs supérieures en a et par valeurs inférieures en b ; si ces limites existent et sont finies, alors pour tout x de $]a, b[$, on a $f(x) \geqslant f(a) + (x - a) f'_+(a)$ et $f(x) \geqslant f(b) + (x - b) f'_-(b)$; la démonstration de cette propriété se fait comme dans la preuve ci-dessus.

Notons encore que, pour une fonction f convexe sur I, l'existence de dérivées à gauche et à droite en tout point de $\overset{\circ}{I}$ se traduit encore en disant que f est *sous-dérivable sur* $\overset{\circ}{I}$: on appelle alors *sous-dérivée de* f *en* x_0 tout nombre réel r compris dans l'intervalle $[f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$, intervalle qui est baptisé le *sous-différentiel de* f *en* x_0 et noté $\partial f(x_0)$.

Proposition 1.2 *Pour* f *convexe sur* I*, les fonctions* f'_- *et* f'_+ *sont croissantes sur* $\overset{\circ}{I}$*.*

Preuve. Soient x et y deux points de $\overset{\circ}{I}$ tels que $x < y$. Par la proposition 1, on sait que

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'_-(y) \leqslant f'_+(y).$$

■

Il résulte directement de la propositon 1 qu'une fonction f convexe sur I est continue à gauche et continue à droite, donc est continue, en tout point x_0 de $\overset{\circ}{I}$ puisque $f'_-(x_0)$ et $f'_+(x_0)$ existent. On peut démontrer davantage, à savoir que f est uniformément continue, et même vérifie la condition de Lipschitz, sur tout intervalle compact J inclus dans $\overset{\circ}{I}$. Rappelons à ce propos qu'une fonction f est *uniformément continue sur* J lorsque $f(x) - f(y) \to 0$ quand x et y sont des points de J tels que $x - y \to 0$ (de façon plus précise, lorsqu'à tout $\varepsilon > 0$ peut être associé $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ dès que $x, y \in J$ et $|x - y| \leqslant \eta(\varepsilon)$) ; par ailleurs, f *vérifie la condition de Lipschitz sur* J lorsqu'il existe une constante K telle que $|f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|$ pour tous points x, y de J. Bien entendu, une fonction qui vérifie la condition de Lipschitz sur I est uniformément continue sur J, les réciproques de ces propriétés n'étant pas toujours vérifiées.

Proposition 1.3 *Une fonction f convexe sur I vérifie la condition de Lipschitz, et est donc uniformément continue, sur tout intervalle compact J inclus dans $\overset{\circ}{I}$; en conséquence, f est continue en tout point intérieur à I.*

Preuve. Posons $J = [a, b]$, avec $a \neq b$, et prenons les points x, y de J tels que $a < x < y < b$. Par les propositions 1 et 1, nous savons que

$$f'_+(a) \leqslant f'_+(x) \leqslant \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant f'_-(y) \leqslant f'_-(b).$$

Dès lors, $|f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|$, où K est le plus grand des nombres $\left|f'_+(a)\right|$ et $\left|f'_-(b)\right|$.

∎

Remarquons que l'hypothèse sur la compacité de l'intervalle J est indispensable dans le dernier énoncé, ainsi que le montre l'exemple simple de la fonction $f(x) = x^2$ qui est convexe et continue, mais non uniformément continue sur $\mathbb{R}$, puisque

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) - x = 0$$

tandis que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - x^2 = 2.$$

Par ailleurs, il résulte de cette proposition 1 que les éventuels points de discontinuité de f convexe sur $[a, b]$ sont les extrémités a, b. Observons toutefois que f est continue sur $[a,b[$ lorsque $f'_+(a)$ existe ; de même, f est continue sur $]a,b]$ dès que $f'_-(b)$ existe ; en conséquence, f est continue sur $[a,b]$ si $f'_+(a)$ et $f'_-(b)$ existent.

Proposition 1.4 *Si f est convexe sur I, f'_- est continue à gauche sur $\overset{\circ}{I}$ et f'_+ est continue à droite sur $\overset{\circ}{I}$. En corollaire, si f'_- (resp. f'_+) est continue en un point de $\overset{\circ}{I}$, alors f est dérivable en ce point.*

Preuve. Soient x, y et z trois points quelconques de $\overset{\circ}{I}$ tels que $x < z < y$. De l'inégalité

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \geqslant f'_+(z),$$

on déduit par passage à la limite pour z tendant vers x par valeurs supérieures et en tenant compte de la continuité de f en x (proposition 1) :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{z\to x^+} \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \geqslant \lim_{z\to x^+} f'_+(z).$$

En passant à la limite pour y tendant vers x par valeurs supérieures, on trouve

$$f'_+(x) \geqslant \lim_{z\to x^+} f'_+(z).$$

Par ailleurs, la croissance de f'_+ (proposition 1) entraîne

$$f'_+(x) \leqslant \lim_{z\to x^+} f'_+(z).$$

Au total, $f'_+(x) = \lim_{z\to x^+} f'_+(z)$, ce qui prouve la continuité à droite de f'_+ en x.

De plus, en vertu des propositions 1 et 1, on sait que

$$f'_+(x) \leqslant f'_-(z) \leqslant f'_+(y);$$

si f'_+ est supposée continue en z, on trouve

$$f'_+(z) = \lim_{x\to z^-} f'_+(x) = \lim_{y\to z^+} f'_+(y) = f'_-(z)$$

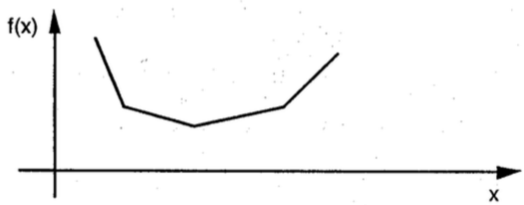
et f est dérivable en z.

Les résultats concernant f'_- se démontrent de la même manière.

■

Nous sommes à présent en mesure de donner des renseignements sur les points en lesquels une fonction convexe f peut ne pas être dérivable, c'est-à-dire les points en lesquels son graphe est en coin.

Nous avons déjà vu un exemple simple – à savoir $f(x) = |x|$ – de fonction convexe qui ne possède pas de dérivée en un point ; il est très facile d'obtenir de la même façon des fonctions convexes qui ne sont pas dérivables en un nombre fini de points



ou même en un nombre infini dénombrable de points : il suffit par exemple, de considérer la fonction $f : [0, \infty[\to R$ définie, sur chaque intervalle $[n, n+1[$ avec $n = 0, 1, 2, ...$, par $f(x) = nx - n\frac{(n+1)}{2}$.

Il est de plus facile de modifier cette définition de manière à obtenir une fonction convexe sans dérivée en tous les points d'un ensemble infini dénombrable situé dans l'intérieur d'un intervalle (borné) I. Un autre exemple, provenant de la mathématique financière, est le modèle de capitalisation mixte : la fonction $f(x) = (1+i)^n(1+hi)$, où i désigne le taux périodique de l'intérêt, n la partie entière de x et h sa partie décimale, est convexe sur $[0, +\infty[$, mais n'est pas dérivable en toute valeur entière de la variable x.

Il est donc naturel de se demander s'il est possible d'obtenir des fonctions convexes sans dérivée en tous les points d'un ensemble *arbitraire*. La proposition suivante montre que cela n'est pas possible puisque les points de non dérivabilité de f convexe restent assez “rares”, en ce sens qu'ils ne peuvent remplir entièrement aucun intervalle ouvert, si petit soit-il.

Proposition 1.5 *Soit f une fonction convexe sur I. L'ensemble des points de $\overset{\circ}{I}$ en lesquels f n'est pas dérivable est dénombrable.*

Preuve. Si f n'est pas dérivable en deux points distincts x et y de $\overset{\circ}{I}$, les propositions 1 et 1 permettent de trouver deux intervalles ouverts, non vides et disjoints, à savoir $\left]f'_-(x), f'_+(x)\right[$ et $\left]f'_-(y), f'_+(y)\right[$; comme chacun de ces intervalles contient au moins un nombre rationnel, il existe une bijection entre l'ensemble E des points de non dérivabilité de f et un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels : E est donc dénombrable.

■

2. Optimisation

Parmi toutes les propriétés des fonctions convexes, celles concernant leur optimisation sont assurément parmi les plus importantes car elles sont très souvent exploitées dans les applications.

Observons tout d'abord que la convexité d'une fonction oblige souvent celle-ci à être bornée, une fonction f étant dite *bornée* sur E s'il existe une constante C telle que $|f(x)| \leqslant C$ pour tout x de E.

Proposition 2.1 *Une fonction f convexe sur un intervalle compact $I = [a, b]$ est bornée sur I et y atteint son maximum en une des extrémités de I.*

Preuve. Désignons par M le plus grand des deux nombres $f(a)$ et $f(b)$. Pour tout x de I, il existe λ de $]0, 1[$ tel que $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Par la convexité de f,

$$f(x) \leqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \leqslant \lambda M + (1 - \lambda)M = M.$$

Donc, M est le maximum de f sur I.

Posons à présent $c = \frac{a+b}{2}$. Tout point x de I peut s'écrire sous la forme $x = c + \alpha$, avec

$$\frac{a-b}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{b-a}{2}.$$

Le point $y = c - \alpha$ fait également partie de I et l'égalité $c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ entraîne par convexité

$$f(c) \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \quad \text{ou} \quad f(x) \geqslant 2f(c) - f(y).$$

Or, on sait que $f(y) \leqslant M$, d'où $f(x) \geqslant 2f(c) - M$. La fonction f est donc bornée inférieurement sur I par $m = 2f(c) - M$.

■

L'utilité des hypothèses de cet énoncé peut être illustrée par des exemples faciles à construire. Remarquons de plus que le minimum de f convexe sur $[a,b]$ n'existe pas nécessairement, ainsi qu'en atteste, par exemple, la fonction f convexe sur $[0,1]$ et définie par $f(x) = 1 - x$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$.

Concernant la minimisation d'une fonction convexe, on dispose de ce critère.

Proposition 2.2 *Soit f une fonction convexe sur $[a,b]$. Lorsque $f'_+(a)$ (resp. $f'_-(b)$) existe, $f(a)$ (resp. $f(b)$) est le minimum de f sur $[a,b]$ si et seulement si $f'_+(a) \geqslant 0$ (resp. $f'_-(b) \leqslant 0$). Pour $c \in]a,b[$, $f(c)$ est le minimum de f sur $[a,b]$ si et seulement si $0 \in \partial f(c)$.*

Preuve. Supposons tout d'abord l'existence de $f'_+(a)$. Si $f(a)$ est le minimum de f sur $[a,b]$, alors, pour tout x de $]a,b]$, $f(x) \geqslant f(a)$ et même $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$, d'où

$$\inf_{x \in]a,b]} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) \geqslant 0.$$

Réciproquement, si $f'_+(a) \geqslant 0$, alors, pour tout x de $]a,b]$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant f'_+(a)$ entraîne $f(x) \geqslant f(a)$.

Le cas de l'autre extrémité b se traite de la même manière.

Si $c \in]a,b[$ assure le minimum de f sur $[a,b]$, alors, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant f(c)$, d'où, pour tout $x \in [a,c[$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$, ce qui entraîne $f'_-(c) \leqslant 0$ et, pour tout $x \in]c,b]$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$, ce qui entraîne $f'_+(c) \geqslant 0$. Au total, on a bien $0 \in [f'_-(c), f'_+(c)]$. La réciproque se démontre en reprenant à rebours le raisonnement ci-dessus.

■

Comme corollaire immédiat de cet énoncé, on constate que, pour f convexe sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, un point c de $]a,b[$ assure le minimum de f sur $[a,b]$ si et seulement si $0 = f'(c)$. Pour des fonctions convexes et dérivables, la détermination du minimum global se réduit donc au repérage des points stationnaires : dans ce cas en effet, la condition (nécessaire) du premier ordre obtenue en annulant la dérivée première est également suffisante pour minimiser la fonction étudiée.

La répartition des extrémants d'une fonction convexe obéit à des règles particulières ; parmi celles-ci, une d'un très grand intérêt montre que la recherche d'un minimum local fournit la réponse au problème global de minimisation.

Proposition 2.3 *Soit f une fonction convexe sur I.*

a) Tout minimant local de f situé à l'intérieur de I est minimant global de f sur I.

b) Si f admet deux minimants locaux a et b intérieurs à I, avec par exemple $a < b$, elle est constante sur $[a, b]$.

c) Si f possède un maximant intérieur à I, elle est constante sur I.

Preuve. a) Supposons que a soit un minimant local de f, avec $a \in \overset{\circ}{I}$. Si $f(b) < f(a)$ pour un point b de I, par exemple supérieur à a, tout point $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ de $]a, b[$, avec $0 < \lambda < 1$, donne $f(x) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) < f(a)$, ce qui est inadmissible pour les points voisins de a.

b) Ce qui précède montre que $f(a) = f(b)$ et que, pour tout $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ de $]a, b[$ avec $0 < \lambda < 1$, $f(x) \geqslant f(a)$; mais la convexité de f requiert $f(x) \leqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(a) = f(a)$, de sorte que $f(x) = f(a)$.

c) Si f admet le maximant x_0 intérieur à I sans être constante sur I, il existe deux points a et b de I tels que $a < x_0 < b$ et $f(a) \neq f(b)$. En écrivant x_0 sous la forme $\lambda a + (1 - \lambda)b$, avec $0 < \lambda < 1$, et en exploitant la convexité de f, on trouve $f(x_0) < f(a)$ si $f(b) < f(a)$,et $f(x_0) < f(b)$ si $f(a) < f(b)$, de toute manière une absurdité. Donc, f est constante sur I.

■

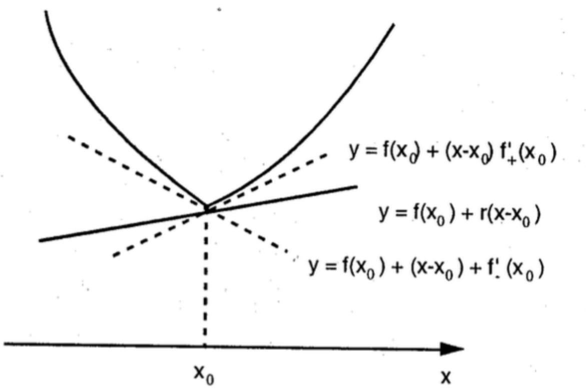
3. Quelques propriétés de la notion de sous-différentiel

Présentons en premier lieu une façon équivalente d'introduire les sous-dérivées dans le cas d'une fonction convexe. C'est d'ailleurs cette propriété qui est le plus souvent retenue pour définir la notion de sous-différentiel.

Proposition 3.1 *Soient f une fonction convexe sur I et x_0 un point de $\overset{\circ}{I}$. Un réel r est une sous-dérivée de f en x_0 si et seulement si, pour tout x de I,*

$$f(x) \geqslant f(x_0) + r(x - x_0).$$

Interprétation. Une sous-dérivée r de f en x_0 est le coefficient angulaire d'une droite passant par le point $(x_0, f(x_0))$ et qui n'est jamais située au-dessus du graphe de f (sur I).



Preuve. La condition $f(x) \geqslant f(x_0)+r(x-x_0)$ pour tout x de I équivaut à

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant r \leqslant \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

pour tout x de $I\cap]-\infty, x_0[$ et tout y de $I\cap]x_0, +\infty[$, soit encore, en passant à la limite pour x tendant vers x_0 par valeurs inférieures et pour y tendant vers x_0 par valeurs supérieures, à $r \in \left[f'_-(x_0), f'_+(x_0)\right]$.

■

Ainsi, pour f convexe sur I, toute droite passant par le point $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient angulaire r égal à une sous-dérivée de f en x_0 est une *droite-support de f en x_0*, en ce sens qu'il s'agit d'une droite d'équation $y(x) = f(x_0) + r(x - x_0)$, avec $y(x) \leqslant f(x)$ pour tout x de I. Cette notion de droite-support permet de caractériser la convexité d'une fonction et son éventuelle dérivabilité.

Proposition 3.2 *Une fonction f, définie sur $I =]a, b[$, est convexe sur I si et seulement s'il existe au moins une droite-support de f en tout x_0 de I ; dans ce cas, f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe une et une seule droite-support de f en x_0.*

Preuve. Soit $x_0 \in \,]a, b[$. Pour tout r de $\partial f(x_0)$, la droite d'équation $y(x) = f(x_0) + r(x - x_0)$ est support de f en x_0 d'après la proposition 3.

Réciproquement, considérons deux points arbitraires c, d de I et un réel λ de $]0, 1[$; posons $x_0 = \lambda c + (1 - \lambda)d$. Par hypothèse, il existe une droite-support de f en x_0, d'équation $y(x) = f(x_0)+r(x-x_0)$. Dans ces conditions, comme $y(x)$ est une fonction affine, on a

$$f(x_0) = y(x_0) = \lambda y(c) + (1 - \lambda)y(d) \leqslant \lambda f(c) + (1 - \lambda)f(d),$$

ce qui prouve la convexité de f.

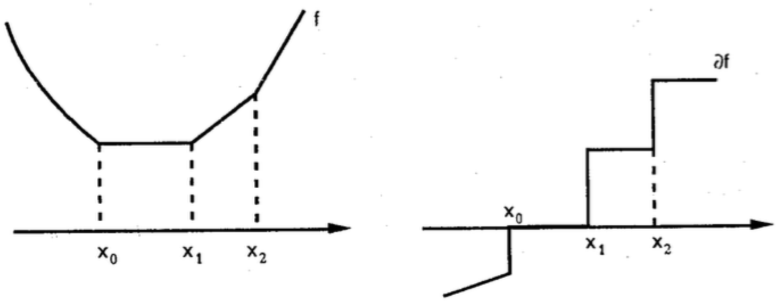
Pour démontrer la deuxième partie de l'énoncé, il suffit de constater que f est dérivable en x_0 si et seulement si $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.

■

Une autre façon de considérer le sous-différentiel consiste à le regarder comme définissant une application de $\overset{\circ}{I}$ dans l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$; on dit parfois qu'il s'agit d'une *multifonction* de $\overset{\circ}{I}$ dans $\mathbb{R}$ car chaque valeur de cette application est un ensemble de réels : de façon précise, à chaque élément x_0 de $\overset{\circ}{I}$ est associé le sous-ensemble $\partial f(x_0)$ de $\mathbb{R}$; cette multifonction est notée ∂f.

Proposition 3.3 *Soit f une fonction convexe sur I. L'application ∂f est croissante sur $\overset{\circ}{I}$ en ce sens que, pour tous x_1, x_2 de $\overset{\circ}{I}$ tels que $x_1 < x_2$, on a $r_1 \leqslant r_2$ dès que $r_1 \in \partial f(x_1)$ et $r_2 \in \partial f(x_2)$.*

Interprétation. On peut tracer le "graphe" de l'application ∂f en associant à chaque élément x_0 de $\overset{\circ}{I}$ le sous-ensemble $\partial f(x_0)$: à tout point x_0 de non-dérivabilié correspond un segment vertical, à savoir le segment $[f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$. L'énoncé signifie que, parcouru de la gauche vers la droite, ce graphe ne descend jamais. En guise d'exemple, voici le graphe d'une fonction f convexe et non dérivable, ainsi que celui de son sous-différentiel ∂f.



Preuve. En vertu de la définition du sous-différentiel et des propositions 1 et 1, on a

$$r_1 \leqslant f'_+(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'_-(x_2) \leqslant r_2.$$

■

Terminons cette note en donnant deux belles applications théoriques de la notion de sous-différentiel. Nous nous proposons en effet de donner une variante du lemme de Rolle et de la formule des accroissements finis dans le cas de fonctions convexes non nécessairement dérivables ; le rôle tenu par la dérivée dans la présentation classique est ici joué par le sous-différentiel, d'où l'égalité donnée dans la version habituelle est remplacée par une appartenance d'un nombre à un ensemble.

Proposition 3.4 *[lemme de Rolle dans le cas convexe] Soit f une fonction convexe et continue sur $[a, b]$, avec $a < b$. Si $f(a) = f(b)$, il existe c dans $]a, b[$ tel que $0 \in \partial f(c)$.*

Preuve. La courbe d'équation $y = f(x)$ étant située sous la corde AB, avec $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$, la fonction continue f présente un minimum sur le compact $[a, b]$ en un point c de $]a, b[$. D'après la proposition 2, $0 \in \partial f(c)$.

■

Proposition 3.5 ***(formule des accroissements finis dans le cas convexe)*** *Soit f une fonction convexe et continue sur $[a, b]$, avec $a < b$. Il existe c dans $]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \partial f(c).$$

Preuve. Considérons la fonction

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a);$$

elle est convexe sur $[a, b]$, en tant que somme de deux fonctions convexes, et telle que $g(a) = g(b)$. L'application du lemme de Rolle livre un élément c de $]a, b[$ tel que $0 \in \partial g(c)$.

La conclusion découle alors des égalités suivantes :

$$g'_-(c) = f'_-(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et

$$g'_+(c) = f'_+(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Bibliographie

[1] Avriel M., Diewert W., Schaible S., Zang I., *Generalized concavity*, Plenum Press, New York, 1988.

[2] Bair J., Haesbroeck G., Variations autour de la définition des fonctions convexes, à paraître.

[3] Hiriart-Urruty J.B., Lemaréchal C., *Convexe analysis and minimization algorithms* I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[4] Roberts A.W., Varberg D.E., *Convex functions*, Academic Press, New York, 1993.

[5] Rockefellar R.T., *Convex analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1972.

[6] Van Teil J., *Convex analysis : an introductory text*, J. Wiley and Sons, Chichester, 1984.

Adresse des auteurs :

Jacques Bair
Université de Liège
Faculté d'Economie de Gestion
et de Sciences Sociales
Boulevard du Rectorat 7, Bât. 31
4000 Liège - Belgique

Guilermo Hansen
Ciclo Básico Común
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria, Pabellón III
1428 Buenos Aires, Argentina.

Le saut en parachute. Un contexte cinématique qui décloisonne physique et mathématiques

D. De Bock et M. Roelens,

Dirk De Bock
Katholieke Economische Hogeschool Sint-Aloysius Brussel
Universiteit Leuven

Michel Roelens
Maria Boodschaplyceum Brussel
Katholieke Hogeschool Limburg

1. Introduction

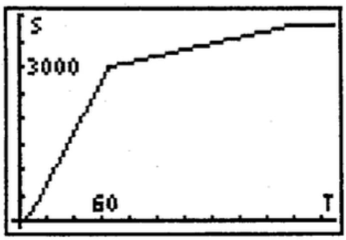
Le saut en parachute est un contexte vraiment interdisciplinaire. Le parachutisme est tout d'abord un sport (même s'il ne fait pas partie du cours d'éducation physique). L'analyse du saut en parachute fait appel à la physique (lois de Newton, chute libre, résistance de l'air) et aux mathématiques (graphe de fonction, dérivée, fonctions exponentielles, équations différentielles). Pour toute clarté, notre familiarité avec le sujet se limite aux aspects mathématiques et physiques.

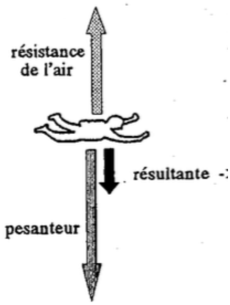
Nous aimerions présenter aux élèves le contexte du saut en parachute comme "projet" interdisciplinaire, en collaboration avec le cours de physique. Dans cet article, nous adopterons néanmoins le point de vue du cours de mathématiques (notre expérience s'arrête là). Le matériel est présenté comme un contexte qui peut surgir à plusieurs stades (très espacés) d'un cours d'analyse au secondaire. Une autre possibilité consiste à en faire un projet de synthèse *à la fin du cours d'analyse*.

Le saut en parachute comporte essentiellement deux phases : la chute libre avant l'ouverture du parachute et ensuite la chute à parachute ouvert. Il est vital d'ouvrir le parachute à temps. Pour connaître l'altitude à tout moment, le parachutiste porte un *altimètre* autour du poignet ou du ventre. Selon les consignes de sécurité, le parachute doit être ouvert à une altitude d'au moins 600 mètres au-dessus du sol. Cela ne veut pas dire qu'il soit impossible de survivre à un saut d'une altitude de moins de 600 mètres ; les paracommandos s'entraînent à sauter de basse altitude (jusqu'à 100 mètres). Certains parachutistes effectuent, pendant la chute libre, toutes sortes d'acrobaties ou de figures symétriques en groupe (encore un lien avec les mathématiques ?). Il y a des records à battre à ce sujet, et puis pas mal de folklore (un mariage célébré pendant la chute, etc.).

2. Le graphe (1)

Le contexte du saut en parachute peut surgir en classe une première fois *après* l'introduction des concepts de dérivée et de dérivée seconde (vitesse et accélération), mais *avant* les règles de calcul qui permettent de dériver des fonctions plus sophistiquées que, par exemple, les fonctions polynomiales. Nous présentons aux élèves le graphe du déplacement vertical s d'un parachutiste (en mètres) en fonction du temps t (en secondes). On peut leur donner ce graphe sur papier ou sur calculatrice graphique (on leur passe l'information par le fil qui peut relier les calculatrices).





Le parachutiste est descendu d'un hélicoptère à une altitude d'environ 3800 mètres. On discerne facilement les deux phases : la chute libre et, environ 65 secondes après avoir quitté l'hélicoptère, la chute à parachute ouvert. Il est essentiel de ne pas confondre la chute libre d'un parachutiste avec la chute libre au sens de Galilée, où la résistance de l'air est négligée et où la vitesse augmente proportionnellement au temps de chute. Ici, deux forces agissent sur le parachutiste : la force de gravité (sa pesanteur) et la résistance de l'air qui augmente avec la vitesse. Très vite, ces deux forces s'équilibrent de sorte que le mouvement devienne uniforme. Après l'ouverture du parachute, la résistance de l'air est devenue beaucoup plus grande. Elle provoque une décélération jusqu'à ce que s'installe un nouvel équilibre, et donc un nouveau mouvement uniforme à une vitesse beaucoup plus pe-

1. Pour l'exposé au congrès de la S.B.P.M. (Mons, août 1995), dont cet article est le compte-rendu, nous avons utilisé la TI-82 de *Texas Instruments*. Les illustrations qui accompagnent cet article sont produites par le logiciel TI-GRAPH LINK qui relie la calculatrice à un ordinateur. Signalons encore que ce texte paraîtra également dans la revue des collègues physiciens et chimistes.

tite. C'est à cette vitesse que le parachutiste atterrit, après 200 secondes environ.

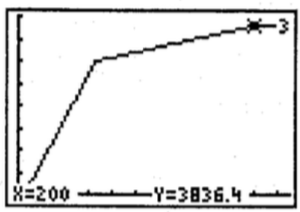
Après une petite discussion en classe sur l'interprétation globale du graphe, on peut poser aux élèves les questions suivantes :

1. Quelle est la vitesse moyenne ?
2. Quelle est la vitesse maximale ? Et la vitesse avec laquelle le parachutiste atterrit ?
3. Attteint-il, à un moment donné, exactement sa vitesse moyenne ?
4. Esquisser le graphe de la vitesse ainsi que celui de l'accélération.

On attend des élèves des réponses approximatives mais accompagnées de raisonnements graphiques corrects. Il s'agit de petits problèmes graphiques que les élèves peuvent résoudre, dans le cas de la calculatrice, en utilisant les possibilités de l'appareil : “se promener” le long du graphe, agrandir à leur guise une partie du graphe, etc. Dans le cas du graphe donné sur papier (par exemple réalisé à l'aide du logiciel DERIVE), la résolution de l'image est meilleure mais on ne peut évidemment pas “manipuler” le graphe. Pour bien assimiler les notions de dérivée, d'intégrale, …, il faut suffisamment d'activités graphiques de ce genre *avant* le “calculus” analytique, sinon c'est l'enseignement “mécanique” (au sens de Treffers, voir par exemple [7]) qui risque de s'installer.

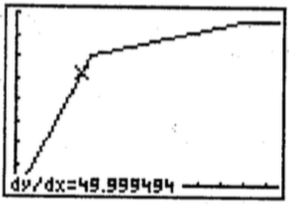
Survolons les réponses.

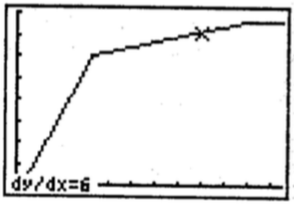
1.



La vitesse moyenne est de $\dfrac{3836,4 \text{ m}}{200 \text{ s}} = 19,182 \text{ m/s} \approx 69 \text{ km/h}.$

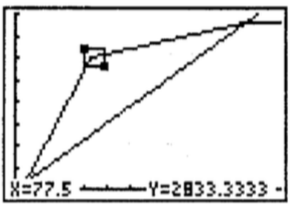
2.

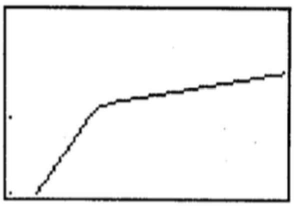




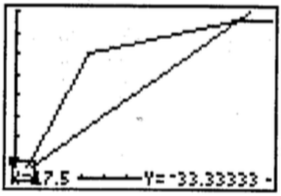
La vitesse maximale est la vitesse apparemment constante avant l'ouverture du parachute : environ 50 m/s = 180 km/h. La vitesse avant l'atterrissage est d'environ 6 m/s $\approx$ 22 km/h. L'ouverture du parachute réduit donc la vitesse à environ 10% de sa valeur initiale. Au lieu d'utiliser la dérivation pré-programmée (dy/dx), les élèves peuvent également mesurer les "pentes" sur le graphe (en tenant compte des unités).

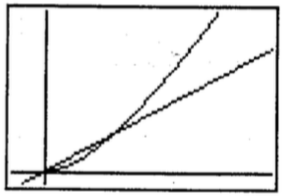
3. Cette question concerne la "version physique" du théorème de Lagrange (voir aussi [8]). Pour se convaincre de l'existence d'une tangente parallèle à droite $y = 19,182x$, les élèves vérifient que "l'angle" du graphe est "arrondi".

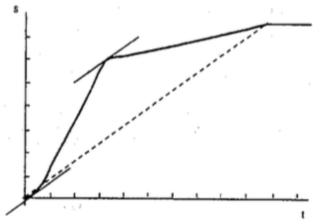




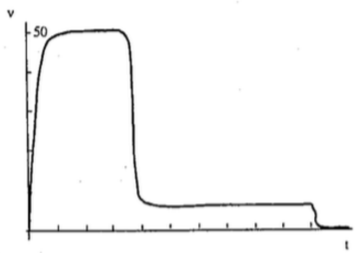
Ce qui étonne certains élèves, c'est qu'il y a un autre moment où la vitesse moyenne est atteinte.

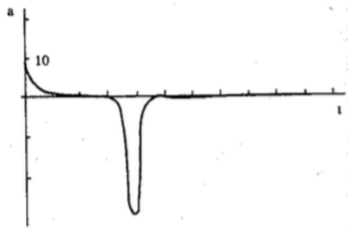






4. Pour les graphes de la vitesse et de l'accélération, on peut s'attendre à des croquis approximatifs comme ci-dessous.



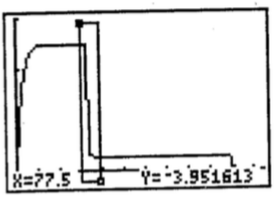


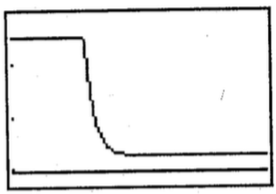
3. La formule

Les mêmes questions peuvent revenir quand les élèves ont un peu plus de connaissances de "calculus". On leur donne la formule suivante :

$$s(t) = \begin{cases} 50(t - 5e^{-\frac{t}{5}}) & (0 \leqslant t < 65) \\ 6t + 2636,4 - 26,4e^{\frac{5}{3}(65-t)} & (65 \leqslant t < 200) \\ 3836,4 & (200 \leqslant t) \end{cases}$$

Les élèves peuvent retrouver de façon analytique les réponses aux questions du paragraphe précédent. De plus, la formule révèle des choses que le graphe ne montre pas. Les parties droites ne sont pas vraiment droites mais sont des asymptotes que le graphe suit de très près. (Le concept d'asymptote n'a-t-il donc pas seulement à voir avec le comportement "à l'infini" ?) On peut vérifier que les deux formules ont la même valeur et la même dérivée en $t = 65$. La fonction obtenue est donc continue et dérivable en 65. La vitesse est toujours continue mais n'est plus dérivable en $t = 65$; l'accélération n'y est plus continue. Tout ceci peut aussi être vérifié de façon graphique, en agrandissant horizontalement une partie du graphe aux environs de $t = 65$ (cf. [3]). Le graphe ci-dessous est celui de la vitesse.





La discontinuité de l'accélération correspond à la non-dérivabilité de la vitesse ! L'instant où ceci se produit, c'est le passage d'un modèle physique à l'autre : sans parachute puis avec parachute. Le parachutiste ressent en effet une secousse très brusque à ce moment-là.

Dans le paragraphe 2, le graphe était donné et faisait figure de "boîte noire" (on ne savait pas comment il avait été obtenu). Dans ce paragraphe 3, c'est la formule qui est la boîte noire. On comprend qu'elle donne lieu à tel graphe, mais on ne comprend pas d'où elle vient.

1. graphe donné

$$\underbrace{\boxed{? \longrightarrow \text{graphe}}}_{\text{boîte noire}} \longrightarrow \text{contexte}$$

2. formule donnée

$$\underbrace{\boxed{? \longrightarrow \text{formule}}}_{\text{boîte noire}} \longrightarrow \text{graphe} \longrightarrow \text{contexte}$$

4. L'équation différentielle

Peut-on ouvrir cette boîte noire pour les élèves ? Pour cela il faut faire appel à la physique. La formule est solution d'une équation différentielle donnée par des lois physiques (Newton, la résistance de l'air).

3. modèle physique donné

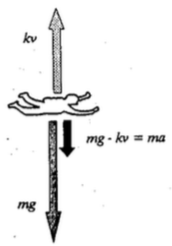
$$\text{équation différentielle} \longrightarrow \text{formule} \longrightarrow \text{graphe} \longrightarrow \text{contexte}$$

modèle physique

En Flandre, depuis quelques années, la mécanique est enseignée au cours de physique de la sixième année du secondaire, mais les équations différentielles ne figurent pas au programme des cours de mathématiques. Il est pourtant essentiel, à notre avis, que les élèves comprennent que la deuxième loi de Newton est une équation différentielle et qu'elle *détermine* le mouvement (étant données certaines valeurs initiales). Pour cela, il faut qu'ils comprennent *ce qu'est* une équation différentielle. Ceci ne signifie pas du tout qu'il faille leur apprendre une batterie de techniques pour résoudre des équations différentielles (qui, dans la pratique, se résolvent d'ailleurs le plus souvent par ordinateur). L'idée d'une équation différentielle peut être introduite au cours de mathématique, quand on traite les propriétés des fonctions de base comme a^x ou $\sin x$, ainsi qu'au cours de physique à propos des lois de Newton.

En supposant la résistance de l'air proportionnelle à la vitesse ([2]), la deuxième loi de Newton nous procure l'équation différentielle suivante :

$ma = mg - kv$



La constante k n'est, en réalité, pas si constante que ça. Nous avons supposé que la résistance de l'air dépend uniquement de la vitesse, mais en fait elle dépend aussi de la température (qui influence la viscosité de l'air), et de la forme de l'objet qui tombe. Des expériences démontrent qu'elle est proportionnelle à l'aire de la plus grande section horizontale de l'objet. Nous supposons donc que le parachutiste maintient une position fixe pendant la chute libre (p.e. la position "bloc", les coudes en angles droits et les mains à côté de la tête). Une fois le parachute ouvert, évidemment, on a une tout autre valeur de k, et donc une autre équation différentielle.

La constante k peut être déterminée si on connaît la vitesse d'équilibre v_e. En effet, à l'équilibre, les forces de pesanteur et de résistance de l'air s'annulent et donc $mg = kv_e$. On a donc

$$a = g\left(1 - \frac{v}{v_e}\right). \qquad (1)$$

2. En fait, la résistance de l'air serait plutôt proportionnelle au *carré* de la vitesse pour des vitesses élevées comme celle de la chute libre d'un parachutiste. Ceci a été démontré par des expériences où la chute d'un objet dans l'air était remplacée par du vent (de vitesse réglable) dont on mesurait l'effet (la force) sur un objet tenu immobile. On verra au paragraphe 5 que cela ne change pas grand chose au graphe.

Pour la phase de la chute libre en position “bloc” ($v_e = 50$ m/s) on obtient, en prenant $g = 10$ m/s^2 pour simplifier les choses :

$$a = 10 - 0,2v. \tag{2}$$

Comment passer, avec les élèves, de l'équation différentielle à la formule ou au graphe ? Selon le niveau de la classe, nous voyons quatre possibilités dont aucune ne nécessite l'introduction d'un chapitre supplémentaire sur la résolution des équations différentielles.

Une première chose qu'on peut faire aisément, c'est *contrôler* que la fonction vérifie cette équation différentielle. C'est mieux que rien, mais la provenance de la formule reste cachée dans la boîte noire.

Une deuxième approche consiste à réfléchir de façon *qualitative*. Au départ, la vitesse est nulle et l'accélération est g, disons 10 m/s^2. L'accélération décroît quand la vitesse augmente ; d'une valeur de 10 m/s^2 pour $v = 0$, elle retombe à 0 m/s^2 pour $v = 50$. On peut donc s'imaginer que la vitesse augmente (à cause de l'accélération positive), mais qu'elle augmente de moins en moins et tend vers 50... Ce genre de raisonnement, que l'on peut répéter pour la phase à parachute ouvert, donne une première idée du graphe mais ne nous amène évidemment pas à la formule.

La troisième approche est de nature *numérique*. Montrons comment on peut faire pour la chute libre (équation (2)) ; en changeant la valeur de la constante k et les valeurs initiales, on peut faire de même pour l'équation différentielle qui représente la chute à parachute ouvert.

En partant des conditions initiales ($t = 0$, $s = 0$, $v = 0$ et $a = 10$), on avance dans le temps par petits pas de Δt (par exemple un dixième de seconde) et on calcule à chaque pas la valeur de s, v et a en utilisant les valeurs qu'elles avaient au pas précédent et en faisant comme si elles étaient restées constantes entre les deux pas. On commence un tableau “à la main” avec les élèves pour qu'ils voient comment fonctionne la méthode.

t	$s_{n+1} = s_n + \Delta t \cdot v_n$	$v_{n+1} = v_n + \Delta t \cdot a_n$	$a_{n+1} = 10 - 0,2 \cdot v_n$
0	0	0	10
$0,1$	0	1	10
$0,2$	$0,1$	2	$9,8$
$0,3$	$0,3$	$2,98$	$9,6$
$0,4$	$0,598$	$3,92$	$9,404$
$0,5$	$0,99$	$4,8604$	$9,02792$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Cet algorithme simple est appelé la méthode d'Euler. Il y a des méthodes plus performantes comme la méthode d'Euler "améliorée" et la méthode de Runge-Kutta ([3]). Avec un petit programme, demandons à la calculatrice de prendre la relève et de n'afficher les résultats que toutes les 5 secondes.

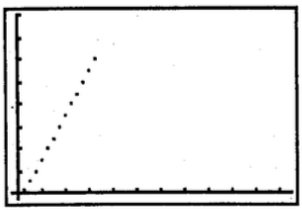
```
PROGRAM: PARACH
:.1→E:0→S:0→V:10→A
:For(N,0,int (65/E))
:NE/5+1→M
:If fPart (M)≠0:Goto 1
:NE→L1(M):S→L2(M):V→L3(M):A→L4(M)
:Lbl 1:S+EV→S:V→W:V+EA→V:10-.2*W→A
:End
```

L_1	L_2	L_3
0	0	0
5	92.344	32.167
10	286.14	43.642
15	516.1	47.734
20	758.96	49.192
25	1006.4	49.712
30	1255.5	49.897

L3(7)=49.897304...

La liste L_1 contient les temps, L_2 les distances parcourues, L_3 les vitesses et L_4 (hors écran) les accélérations.

On peut comparer les points (t, s) obtenus avec la partie "chute libre" du graphe rencontré au paragraphe 2.



3. La méthode d'Euler est basée sur l'intégration numérique par petits rectangles, celle d'Euler "améliorée" sur la règle des trapèzes et celle de Runge-Kutta sur la règle de Simpson.

Finalement, il y a l'approche *analytique*, la seule qui nous fournira la formule à partir de l'équation différentielle.

L'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{v'}{1-\frac{v}{v_e}} = g.$$

En intégrant les deux membres, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{v'(t)}{1-\frac{v(t)}{v_e}}\,dt &= \int g dt \\ -v_e \ln\left|1-\frac{v(t)}{v_e}\right| &= gt + c. \qquad (3)\end{aligned}$$

Pour la phase de chute libre ($v_e = 50$; $v < v_e$; $v = 0$ quand $t = 0$), on trouve

$$v = 50(1 - e^{-\frac{t}{5}}),$$

et donc, en intégrant,

$$s = 50(t - 5 + 5e^{-\frac{t}{5}}).$$

De la même façon, on trouve pour la phase à parachute ouvert ($v_e = 6$; $v > v_e$; $v = 50$ quand $t = 65$)

$$s = 6t + 2636,4 - 26,4e^{\frac{5}{3}(65-t)}.$$

5. Evaluation du modèle et variation des paramètres

Le modèle ne couvre certainement pas la réalité et il est important que les élèves s'en rendent compte. La réalité "ne se laisse pas faire" : il y a le mouvement horizontal du parachutiste que nous avons brutalement négligé, l'influence du vent, de la température, de la position du parachutiste qui n'est pas constante du tout (surtout s'il fait des pirouettes),... De plus, il y a des doutes sur les modèles physiques eux-mêmes : nous avons supposé que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse, tandis que selon la physique elle serait plutôt proportionnelle au carré de la vitesse.

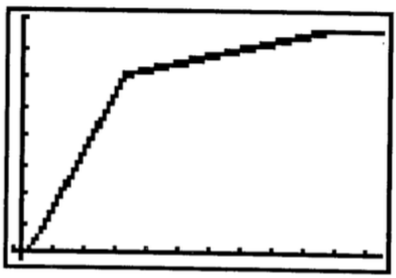
On peut refaire les calculs (numériques ou analytiques) avec le carré de la vitesse pour voir ce que ça change. Les calculs analytiques sont un peu plus compliqués car ils font appel à la décomposition en fractions partielles et aux fonctions hyperboliques. On trouve pour la phase de la chute libre

$$s = 250 \ln \cosh \frac{t}{5}$$

et pour la phase à parachute ouvert (en supposant que le parachute s'ouvre au même moment $t = 65$ que dans l'autre modèle)

$$s = 3,6 \ln \sinh \left(\frac{5}{3} t - 108,2 \right) + 3083,9.$$

Le graphe est presque identique à celui des paragraphes précédents ; la seule différence est que la vitesse d'équilibre est atteinte plus vite (la force de résistance annule plus vite la pesanteur).



Le "nouveau graphe" se situe juste au-dessus de l'ancien.

Nous avons travaillé avec des données fixes. L'équation différentielle permet de varier les paramètres et de construire des modèles de sauts "sur mesure". On peut considérer des autres positions que la position "bloc" pendant la phase de la chute libre, par exemple la "flèche" (bras collés contre le corps et jambes jointes). Cette position donne lieu à une plus petite valeur de k et donc à une plus grande vitesse (car $v_e = \frac{mg}{k}$), qui peut atteindre jusqu'à 400 km/h.

Un parachutiste entraîné est capable de régler sa vitesse en adaptant sa position. Si deux parachutistes se positionnent l'un sur l'autre pendant la chute libre, k ne change pas (la plus grande section horizontale n'a pas changé, du moins si l'on considère des parachutistes de même taille) mais la masse est environ multipliée par 2 ; ils atteindront une vitesse double. Les élèves peuvent produire des graphes sur calculatrice graphique pour ce genre de situations (par la méthode numérique, en adaptant le petit programme fourni par le professeur, ou par la méthode analytique). Ils peuvent résoudre des problèmes comme celui, assez macabre, de déterminer la vitesse de l'atterrissage fatal à Moorsele le 19 août 1995, quand un parachute s'est embrouillé et "refermé" à une hauteur de 15 mètres au-dessus du sol.

6. Mini-conclusion

Les applications physiques, économiques, ... dans le cours de maths peuvent contribuer à donner du *sens* aux mathématiques étudiées. Mais pour donner vraiment du sens *à l'application* sans "parachuter" du ciel des modèles-boîtes-noires, on sort bien vite du domaine de la propre discipline pour en rencontrer d'autres (par exemple, la physique). Une collaboration interdisciplinaire s'impose-t-elle ?

Bibliographie

[1] Cleve M., De Bock, D., Roelens M., De grafische rekenmachine in de wiskundeles, *Uitwiskeling*, 1993, 9/4, 15–50.

[2] De Bock D., Janssens D., Roelens M., Roels J., *Afgeleiden en integralen*, Leuven, Acco, 1994, 169 pages.

[3] De Bock D., Roelens M., Un accès graphique aux concepts de l'analyse, *Mathématique et Pédagogie*, 1994, 97, 41–53.

[4] Demana F., Waits B., *Graphing calculator laboratory manual for calculus (preliminary edition)*, Reading MA, Addison-Wesley Publishing Company, 1993, 321 pages.

[5] Doorman L.M., Drijvers P., Kindt M., *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs*, Utrecht, CD β press, 1994, 136 pages.

[6] Finney R., Thomas G., Demana F., Waits B., *Calculus : graphical, numerical, algebraic*, Reading MA, Addison-Wesley Publishing Company, 1994, 962 pages.

[7] Freudenthal H., *Revisiting mathematics education (China lectures)*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1991, 216 pages.

[8] Jadin B. e.a., *Mathématiques en mouvements : premiers pas vers la dérivée et l'intégrale (Proposition 15 du GEM)*, Louvain-La-Neuve, Ciaco, 1988, 46 pages.

[9] Kindt M., de Lange J., *Differentiëren 1*, Culemborg, Educaboek, 1984, 62 pages.

[10] Kindt M., de Lange J., *Differentiëren 2*, Culemborg, Educaboek, 1985, 62 pages.

[11] Kindt M., de Lange J., *Differentiëren 3*, Culemborg, Educaboek, 1986, 46 pages.

[12] The School Mathematics Project, *Modelling with differential equations*, Cambridge, University Press, 1993, 138 pages.

Adresses des auteurs :

Dirk De Bock
Vriesenhol 21 bus 1
3000 Leuven

Michel Roelens
Blijde Inkomststraat 49
3000 Leuven

Revue des revues

C. Villers,

APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public-France), Bulletin $n°$401-décembre1995.

Au sommaire de cette livraison, nous relevons

- L'*Editorial de* Jean-Paul Bardoulat - Président de l'APMEP dans lequel l'auteur rappelle que l'Association n'est pas seulement l'affaire de ceux qui travaillent dans les Comités mais est plutôt celle des affiliés qui doivent y trouver un lieu d'échange, de réflexion et de débats.
- *Souci d'exactitude* par Yves Baelde
  Dans cet article, l'auteur plaide pour un regard critique à l'égard des résultats affichés par les machines et défend le maintien du calcul avec des fractions. Des exemples accompagnent le texte.
- *La réforme des "Prépas"* par Henri Bareil et Christiane Zehen
  Ce texte analyse des textes concernant une nouvelle organisation et de nouveaux programmes pour les classes préparatives aux Grandes Ecoles et plus particulièrement en souligne les lignes de force qui concernent plus spécifiquement les mathématiques.
- *Quel(s) rôle(s) attribué(s) aux instruments informatiques dans l'enseignement des mathématiques* par Eric Bruillard
  L'intégration de l'outil informatique dans l'enseignement des diverses disciplines est officialisée chez nos collègues français.
  L'auteur expose ses remarques au sujet de la place réservée à l'informatique en tant qu'outil et plus nécessairement comme "partenaire" d'un enseignement assisté et encore moins comme support de programme.
  Il montre que cette restriction au seul usage utilitaire est en fait réductrice des possibilités offertes.
- *Place de l'Informatique dans l'enseignement des mathématiques* par Francis Slawny
  L'auteur traite des visions diverses données par des brochures (3) publiées par une instance officielle chargée des Innovations Pédagogiques.
  Il affirme que ces visions n'envisagent que d'une manière marginale, l'utilistion de l'ordinateur dans la classe.

Il donne ensuite une autre vision possible en montrant que l'existence de logiciels actuels peut remettre en cause les contenus enseignés ainsi que les méthodes d'enseignement.
Il ouvre enfin une porte (question) au sujet de la formation initiale des professeurs (de Mathématiques)
- *Dérive et la programmation fonctionnelle*
  Texte en forme de Questions-Réponses au sujet de ce logiciel de calcul formel.
- *Calcul Symbolique et Formel* par Jacqueline Zizi
  On y trouve un certain nombre de réponses à des questions au sujet des systèmes de calcul symbolique.
- *La recherche universitaire en Calcul Formel* par Marie-France Roy
  Cette livraison contient, en sus, les rubriques habituelles (mais non moins intéressantes) que sont :
  - Les Problèmes de l'APMEP
  - Des avis de recherche
    Cette rubrique permet aux lecteurs de poser des questions de tout ordre (demande d'une référence, recherche d'une démonstration, résolution d'un problème, ...)
  - Matériaux pour une documentation qui donne des compte-rendus de publications diverses.

Claude Villers

Bibliographie

G. Noël,

Courbes mathématiques, Numéro spécial 45 de la *Revue du Palais de la Découverte*, 168 pages, 1995 (Voir les Publications de l'APMEP)

Qui ne s'est émerveillé devant les arabesques de certaines courbes mathématiques dont certaines remontent à 2000 ans ! Le Palais de la Découverte de Paris a eu l'heureuse idée de rééditer sous forme d'albums une série de cartes postales réalisées en 1937. On y trouvera 150 courbes, classées en trois catégories : courbes algébriques, transcendantes ou ornementales. Chacune d'entre elles est accompagnée de son équation et de quelques indications relativement à sa définition et sa construction. A ne pas manquer par tous ceux qui apprécient la beauté des formes mathématiques !

G. Noël

Jeux 4, Brochure n° 97 de l'APMEP, 163 pages, 1995,

Fichier Evariste, Brochure n° 98 de l'APMEP, 240 fiches, 1996

Avec ces deux publications, l'APMEP apporte une contribution importante à la documentation déjà disponible sur les Olympiades et Concours mathématiques destinés aux élèves.

Jeux 4 présente 129 problèmes extraits de diverses compétitions mathématiques organisées en France depuis la fin des années 80. Mais Jeux 4 ne se limite pas à proposer des énoncés. Plusieurs articles décrivent le comportement des élèves confrontés à ces problèmes, ou abordent des sujets tels que *L'intérêt des épreuves collectives ou par équipes, Communiquer . . . s'expliquer, L'enseignant et le jeu mathématique dans la classe, Des problèmes pour quoi faire ?, Comment met-on au point des problèmes ?, Comment un énoncé peut en susciter d'autres, Des problèmes d'allures voisines, mais de traitements bien différents, Dégageons quelques méthodes.* Bref un ouvrage indispensable non seulement à tous ceux qui s'intéressent aux problèmes mathématiques, mais surtout à tous ceux qui souhaitent les utiliser dans leurs classes.

Fichier Evariste est un recueil de 120 problèmes, niveau Benjamins (11–12 ans) et de 120 problèmes, niveau Cadets, (13–14 ans) tirés de différents tournois et rallyes mathématiques et présentés sous forme de fiches. A raison de 4 fiches par page A4, on trouve au recto les énoncés et au verso des indications à l'intention de l'enseignant parmi lesquelles les prérequis et les compétences (en Belgique, on dirait les compétences transversales) développées par ces fiches. Notons les explications données par les auteurs du recueil à ce sujet : *Nous avons tenté de définir ici des compétences ou qualités générales liées à l'activité mathématique, que le problème permet de développer. Les quatre types de compétence que nous avons retenus : lire – traduire – induire – déduire – constituent, dans cet ordre, des champs de compétences "emboîtés" et de plus en plus vastes. [...] Les qualités d'ordre et de méthode, de créativité et d'invention complètent et enrichissent les compétences précédentes. Cette rubrique nous paraît essentielle. Mais nous sommes conscients, vu les difficultés que nous avons rencontrées qu'elle est loin d'être parfaite.* Voilà une documentation qui devrait intéresser les enseignants des deux premiers degrés confrontés aux "socles de compétences".

G. Noël

A propos des “Quarante propositions pour l’enseignement obligatoire, à la rencontre du désirable et du possible”

C. rédaction,

Texte de la motion par le Conseil d’Administration de la SBPMef lors de la réunion du 3 avril 1996.

La SBPMef qui a toujours accepté les invitations à réfléchir aux réformes de l’enseignement, se veut partie prenante cette fois aussi. Bien que, compte tenu du délai dont elle dispose, de l’importance des sujets abordés, et du caractère flou de bien des points du document, il lui soit difficile d’élaborer un texte détaillé, elle souhaite réagir au contenu des “*Quarante propositions pour l’enseignement obligatoire, à la rencontre du désirable et du possible.*”

1. Une réaction d’ordre général

La SBPMef souscrit pleinement aux conclusions des Assises de l’Enseignement et des travaux du Conseil de l’Education et de la Formation. Elle ne peut que souscrire également aux objectifs généraux décrits dans les Propositions 1 et 2 ([1]), notamment amener les jeunes à être des citoyens responsables, via une initiation au fonctionnement de la Société. Au surplus, ces objectifs ont tojours figuré parmi les préoccupations des enseignants.

Mais la SBPMef désire mettre en évidence l’incohérence globale de ces “40 propositions” par rapport au contexte actuel. Elles se présentent en effet comme une lecture *modeste* mais *colletée* aux contraintes budgétaires (cfr préambule) des conclusions des Assises de l’Enseignement et des travaux du Conseil de l’Education et de la Formation. Or, la lecture proposée n’est pas modeste : elle détaille une énorme panoplie de réformes profondes et complexes. En même temps, à l’exception de la proposition 17, la lecture proposée ne détaille **aucun** des moyens budgétaires qui seront dégagés en vue de réaliser ces réformes.

1. Rappelons que, pour ce qui est des apprentissages proprement dits, la SBPMef a toujours préconisé les méthodes qui conduisent les jeunes à s’approprier des savoirs en les construisant.

De plus, à part ce qui concerne les grilles horaires, aucun calendrier n'est fixé, toutes les mesures concrètes sont simplement énoncées au futur. Comme le signalent les commentaires de la proposition 6, plusieurs des mesures proposées ont déjà été envisagées dans les années antérieures, notamment lors de la mise en place du rénové. Ces intentions généreuses n'ont été qu'imparfaitement réalisées. Tout citoyen est alors en droit de se demander **quand** et **comment** un ensemble de propositions aussi ambitieuses pourra commencer à avoir un début de réalisation concréte.

2. Réactions spécifiques à l'enseignement de la mathématique

— Le préambule parle de recentrer l'enseignement sur l'essentiel. Cette notion n'est guère explicitée dans le corps des "40 propositions". Tout au plus trouve-t-on dans la proposition 4 que le premier degré du secondaire doit conduire prioritairement à une maîtrise réelle de la langue française et des outils de base de la mathématique, tandis que dans la proposition 6, le mot "recentrage" n'est appliqué qu'aux grilles horaires du troisième degré.

— La SBPMef s'est prononcée à plusieurs reprises contre la certification unique en mathématique au deuxième degré. Les enseignants de ce degré estiment généralement que la population actuelle des classes concernées est trop hétérogène du point de vue des aptitudes mathématiques pour qu'il soit raisonnable de poursuivre les mêmes objectifs avec tous les élèves. La SBPMef demande en conséquence que soient rétablis les deux niveaux de cours qui existaient précédemment, à 4h et 6h.

— Le rencentrage de l'enseignement devrait être l'occasion de définir les finalités de l'enseignement de la mathématique dans les différentes filières, de façon à guider les travaux des commissions qui rédigent les programmes d'études ([2]). Ces finalités devraient permettre à tout él'eve d'accéder au niveau de connaissance et de compétence mathématiques nécessaires à son insertion sociale, ainsi qu'à un niveau d'excellence en mathématique chaque fois que c'est possible.

— La diminution d'une heure de tous les cours de mathématique du troisième degré, intervenue en 1993, va à l'encontre de l'intention

2. Rappelons que la SBPMef a pris position sur ce point particulièrement délicat.

déclarée de recentrage sur les mathématiques. Nous préconisons en conséquence le retour aux anciennes grilles horaires de 3h, 5h et 7h.

— Alors que chacun s'accorde pour estimer que la maîtrise de la langue maternelle est une condition indispensable à la réussite dans les autres cours, le document envisage *l'enseignement d'une discipline dans une langue étrangère.* Faut-il vraiment ajouter aux difficultés intrinsèques d'une discipline les limitations de vocabulaire, de syntaxe, de références, ... qui accompagnent l'apprentissage d'une langue étrangère ? En ce qui conerne les mathématiques, la SBPMef affirme que la langue maternelle est la base de toute compréhension significative des concepts. Ceci n'exclut pas le recours à des moyens didactiques en langue étrangère.

— Lors d'une assemblée générale antérieure, la SBPMef a estimé que les mathématiques devaient être enseignées par des personnes spécialisées dans cette branche. Ceci n'exclut nullement les titulaires d'un diplôme pédagogique dans une autre discipline qui auraient acquis par eux-mêmes la formation approfondie nécessaire. Il n'est cependant guère possible d'envisager une polyvalence automatique.

3. Autres réactions

De très nombreuses contradictions et imprécisions sont présentes dans le détail des “40 propositions”. Elles ôtent beaucoup de crédibilité aux propositions et font douter de leur réalisabilité. En voici quelques exemples.

— Comment définit-on les apprentissages de base, qui *se terminent au premier degré de l'enseignement secondaire* ? Comment définit-on, de façon précise, objective et opérationnelle les socles de compétences qui seront les éléments-clefs de la certification ? Qui définit ces socles ? Seront-ils conçus de façon à permettre à l'élève de suivre avec fruit *n'importe laquelle* des quatre formes du deuxième degré, et non *une* de ces quatre formes comme il est dit dans la proposition 5 ? Si ce n'est pas le cas quelle est la signification des socles de compétences ? Par ailleurs, lorsque le conseil de classe décidera, à la fin de la deuxième année, de la réussite ou de l'échec d'un élève, exigera-t-il que les “socles” soient atteints à 100 % ? Si un score plus faible est suffisant, les socles ne perdent-ils par leur sens, et ne revient-on pas à la situation antérieure où le niveau de réussite déterminait finalement le choix de la forme d'enseignement au deuxième degré ? Ou faut-il comprendre la proposition 5 comme signifiant que le conseil de classe décidera de façon contraignante de l'orientation des élèves, ce qui contredirait la proposition 1 ?

— De façon concrète, a-t-on mesuré les moyens que nécessiterait de rendre tout élève capable de suivre avec fruit n'importe laquelle des quatre formes d'enseignement organisées au deuxième degré ? Les activités de remédiation et de soutien pédagogique qui existent devraient sans aucun doute être considérablement amplifiées. L'intention est évidemment louable, mais rien dans la politique actuellement menée, ni dans les "40 propositions" n 'indique la moindre orientation budgétaire en ce sens.

— La proposition 7 parle de "l'expression forte d'un consensus entre le monde de l'entreprise et celui de l'éducation et de la formation". Devant les crises financières récurrentes et les fermetures d'entreprises ou les délocalisations qui n'en finissent pas de provoquer des remous sociaux, on peut se demander si le monde de l'entreprise n'est pas un partenaire fragile peu fiable en matière d'éducation. Il pourrait être intéressant de savoir sur base de quels incitants (fiscaux ou autres) les régions et les entreprises pourraient être intéressées à une participation aux "formations qualifiantes".

— Il est proposé de *corriger les déséquilibres entre les dépenses de personnel et les dépenses d'équipement*, et d'*oser des collaborations nouvelles : les technopôles.* Une fois de plus, les besoins matériels ainsi définis ne font l'objet d'aucun plan d'équipement, d'aucune évaluation chiffrée.

L'enseignement se fait d'abord et avant tout avec des enseignants. Si l'on veut passer du *stade de la massification* à celui de la *démocratisation*, si l'on veut éviter la *dualisation de la société*, si l'on veut fonder *la conviction que la culture est aussi ce qui relie les citoyens, ce qui ouvre à un véritable humanisme*, il faut comprendre qu'il n'est pas possible de diminuer le nombre d'enseignants.

De même, si l'on veut personnaliser, individualiser l'enseignement, centrer l'apprentissage sur l'élève, promouvoir le recours à des méthodes actives, à la recherche personnelle, si l'on veut créer les conditions permettant à l'enseignant de pratiquer une "pédagogie différenciée", pédagogie que les "40 propositions" estiment indispensable à la réalisation d'une "école de la réussite", il faut des enseignants motivés, qui exercent leur métier dans la sérénité, avec le maximum de liberté et de stabililté leur permettant d'exprimer leur créativité et leur esprit de recherche. Pour atteindre ces objectifs, il faut aussi généraliser l'accès des enseignants à la formation en cours de carrière, intégrer cette formation dans les horaires des enseignants, l'organiser dans les écoles et sans perturber les activités des élèves. Où sont les moyens budgétaires ?

— La proposition 1 parle entre autres choses de l'apprentissage de l'élève par interaction avec d'autres. Cette idée ne doit pas masquer le fait que la réussite scolaire dépend également de la quantité de travail personnel fourni.
— La proposition 16 prévoit des dispositions particulières pour les sportifs de haut niveau. La SBPMef ne formule aucune objection à cet égard. Elle se demande pourquoi des dispositions analogues ne pourraient être prises en faveur des artistes de haut niveau, des scientifiques de haut niveau, ... De façon plus précise, si l'école veut *promouvoir la confiance en soi et le développement de la personne de chacun des élèves*, ne doit-elle pas consacrer autant d'attention aux jeunes les plus doués qu'à ceux qui ont des difficultés scolaires ? A côté d'activités de remédiation destinées à ces derniers, ne serait-il pas opportun qu'elle organise des activités de dépassement à l'intention des premiers ?

4. Conclusions

La SBPMef réaffirme une fois de plus qu'elle souscrit pleinement aux conclusions des Assises de l'Enseignement et des travaux du Conseil de l'Education et de la Formation. Elle prend note de ce que *le texte soumis ici est l'ébauche d'un projet de décret*. Mais elle considère que ces "40 propositions" sont en contradiction avec la politique menée actuellement. La provocation s'ajoute à l'incohérence quand ces "40 propositions", en essayant de faire croire à la **volonté politique d'une école nouvelle**, enrichie d'une dimension humaine redéfinie et amplifiée, voient le jour en même temps que **disparaissent 3000 enseignants**, qui étaient **actifs** dans les écoles d'aujourd'hui. En conséquence, ces propositions ne sauraient rencontrer son approbation qu'accompagnées de prévisions budgétaires et d'un calendrier de réalisation.

Enfin, la SBPMef rappelle qu'elle est profondément attachée à toutes les formes constructives de dialogue. Les actions qu'elle mène depuis des années dans tous les domaines où elle est compétente sont là pour en témoigner. Elle revendique de participer, en collaboration avec les autres associations de professeurs, membres de la Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs (CAPP), à toutes les assemblées ou réunions de toute espèce où sont abordés les problèmes pédagogiques.

Ludovic et le “6^{e}livre”

R. Graas,

Ludovic, étudiant consciencieux de qui l'organisation vacille parfois un peu, se trouve aux prises avec les sections planes dans les solides à face planes. Heureux de s'en tirer dans les exercices proposés par son excellente professeur (sur le cube notamment où les cas vicieux ne manquent pas), il cale sur la démonstration assurant l'alignement des points.

Pourtant la figure de son cours est un tétraèdre quelconque $SABC$... On ne cherche pas trop loin !

Mais voilà ! Si le plan de section coupe la base ABC, cela va encore. S'il coupe la face SAB suivant une parallèle à AB ou, pire, s'il est parallèle à ABC, Ludovic voit les points s'évanouir (il ne pense pas à l'infini).

Le salut lui arrive grâce au théorème de Cramer (mille regrets pour ceux qui le honnissent !). Si un système linéaire $n \times n$ a un déterminant non nul, il existe une solution unique. Dans le cas contraire, il y a impossibilité ou indétermination.

Souvent les étudiants mêlent les deux cas. Bien sûr, il n'y a pas de zone grise intermédiaire. C'est l'un ou l'autre *exclusivement.*

Il en va de même pour la démonstration susdite où la séparation *nette* entre le cas vraiment général et les cas particuliers est à respecter de façon absolue. Le flou résulte d'une confusion ou d'un mélange des cas. C'est peut-être ce qui contribue à une certaine raideur mathématique.

Pour finir, quand Ludovic a su qu'un faisceau de droites concourantes pouvait devenir un faisceau de parallèles ”ayant un point commun à l'infini”, ça été une révélation. Il n'avait jamais pensé à cela...

Plus tard, il réalisera peut-être, qu'au fond, les mêmes choses apparaissent différemment.

Robert GRAAS
inspecteur honoraire

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$$

Et alors ?

Robert Graas

Quatre étudiants de 6e professionnelle - deux de menuiserie-ébénisterie et deux de boulangerie-pâtisserie - sont venus (les deux paires séparèment) demander qu'on les aide à appliquer cette formule. Leur consciencieux professeur, à coup sûr, ne fait qu'appliquer le programme (qui ne comporte pas que cela, heureusement : il y a aussi le graphique de droites, de paraboles "verticales" et d'hyperboles équilatères entre autres).

En mettant dans p et q tout ce qu'on peut imaginer, on applique la formule gauche-droite.

Que cela peut-il bien leur amener comme profit de formation ? Un peut de maniemement algèbrique et de raisonnement, tout au plus.

N'empêche ! Comment ne pas se poser la question : pourquoi ne pas les faire réfléchir et calculer sur des problèmes pratiques ? Le prix d'un meuble ou d'un gâteau ne semble pas de la dernière simplicité pour ne prendre que les exemples les plus immédiats car on y monterait aisément en niveau (algèbre, géométrie, informatique).

Il faut souhaiter que les vaillants pionniers qui expérimentent dans ce secteur, puissent obtenir les ajustements absolument indispensables dans les matières et les méthodes destinées à ce genre d'étudiants.

Robert GRAAS
inspecteur honoraire