

Mathématique et Pédagogie

Périodique bimestriel publié par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Sommaire

- **G. Noël**, *Éditorial* 2
- **C. Félix**, *Le Corbusier* 3
- **J. Bair et G. Haesbroeck**, *La dérivée schwarziennne* 27
- **F. Buekenhout et S. Trompler**, *La mathématique des dinosaures* 37
- **P. Dupont**, *Une caractérisation des fonctions convexes sur un intervalle ouvert* 43
- **J.-L. Marichal**, *Les chaînes magiques* 49
- **S. Courtois et F. Denis**, *Fonctions, extremums et Cabri II* 52
- **G. Noël**, *Des programmes et des problèmes, en France et ailleurs* 67
- **Y. Noël**, *Dans nos classes* 73
- **C. Festraets**, *Olympiades* 78
- **C. Festraets**, *Des problèmes et des jeux* 87
- **J. Navez**, *Bibliographie* 96

Éditorial

G. Noël,

Avec la rentrée de septembre 1996, un nouveau programme devrait être mis en application en troisième année. Une délégation de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* a rencontré à ce sujet une délégation de la Commission inter-réseaux des programmes à deux reprises.

En ces occasions, nous avons d'abord présenté les suggestions élaborées par notre commission pédagogique, et approuvées par le conseil d'administration. Nous avons en particulier insisté sur les difficultés rencontrées par les professeurs du deuxième degré du fait de l'organisation d'un seul niveau d'enseignement, et plaidé pour que deux programmes différents soient mis au point, même si tous les élèves ont le même nombre d'heures par semaine. Nous avons également demandé qu'une phase d'expérimentation du nouveau programme soit prévue dans un nombre limité de classes et que des séances de formation continuée soient organisées à l'intention des enseignants dans le but de les informer en détail des modifications.

Sur tous ces points, nous n'avons reçu que des réponses négatives : d'une part il n'est pas dans la compétence de la commission des programmes d'organiser deux niveaux d'enseignement, d'autre part le nouveau programme devrait impérativement entrer en vigueur dans toutes les classes dès maintenant.

Tant en ce qui concerne la forme que le contenu du nouveau programme, nous avons relevé et regretté le manque de continuité avec le programme du premier degré : la distinction entre noyau et applications est disparue, la géométrie de l'espace est quasi-absente, l'arithmétique et les activités de dénombrement sont inexistantes . . . Les réponses qui nous ont été faites mettent en évidence la difficulté d'élaborer un programme pour une population d'élèves très hétérogène. Notre revendication de deux niveaux d'enseignement est donc bien justifiée.

Ajoutons encore que la philosophie interne du document nous échappe parfois : par exemple pourquoi les homothéties ne sont-elles pas associées aux figures semblables alors que les isométries sont associées aux figures isométriques ? D'après les déclarations de nos interlocuteurs, les homothéties ne seraient plus rencontrées avant la cinquième année !

Les conditions de mise en œuvre du nouveau programme de troisième, ainsi que sa présentation et son contenu ne peuvent que nous inquiéter. Il est cependant difficile de se forger une opinion définitive avant d'avoir connaissance des textes concernant la quatrième année. En attendant, nous restons vigilants.

G. Noël

Le Corbusier

C. Félix, professeur de mathématique au Lycée cantonal de Porrentruy
et lecteur à l'Université de Berne

Le Modulor (1)

Le Modulor est un outil de mesure issu de la stature humaine et de la mathématique. Un homme-le-bas-levé fournit aux points déterminants de l'occupation de l'espace – le pied, le plexus solaire, la tête, l'extrémité des doigts, le bras étant levé – trois intervalles qui engendrent une section d'or, dite de Fibonacci.



L'art est la manière de faire.

Le Corbusier

Les repères

Charles-Edouard Jeanneret est né le 6 octobre 1887 à la Chaux-de-Fonds. Dès l'âge de treize ans, il suit les cours de gravure de l'Ecole d'art ; il y rencontre un maître exceptionnel, Charles l'Eplattenier, peintre naturaliste proche du mouvement de l'Art Nouveau. Charles-Edouard est attiré par la peinture, mais l'Eplattenier l'en dissuade et l'invite à s'inscrire à la section d'art et décoration qu'il a créée lui-même en 1905 pour y dispenser des cours d'architecture. Le jeune étudiant participe à un premier projet architectural commandé par Louis Fallet, graveur et membre de la commission de l'Ecole d'art.

1. LE CORBUSIER, *Le Modulor. Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*, Denoël-Gonthier, 2e éd., Paris, 1951, pp. 56–57.

En 1907, Charles-Edouard Jeanneret entreprend son premier grand voyage : la Toscane, Florence, Pise, Sienne ; avant Ravenne, Bologne, Vérone, Venise ; avant Budapest, Vienne, Munich et Paris. Comme il le fera systématiquement au cours de tous ses futurs déplacements, il accumule les notes, les croquis, les dessins, s'adonne à l'aquarelle, observe les édifices, les mesures et cherche à en dégager l'architecture secrète, à *en comprendre les proportions et les équilibres*.

A Paris, il effectue un stage chez les frères Perret et découvre les possibilités offertes par le fer, le verre et un matériau nouveau : le béton armé.

Après avoir réalisé avec René Chapallaz les villas Jacquemet et Stotzer à la Chaux-de-Fonds, puis effectué un séjour en Allemagne où il étudie les conditions de la production industrielle, il entreprend "le voyage d'Orient" (1911) – le grand voyage – qui le marquera profondément : en parcourant la Serbie, la Roumanie, la Grèce, la Turquie, il photographie, écrit, mesure, analyse, compare, dessine : *on dessine afin de pousser à l'intérieur, dans sa propre histoire, les choses vues. Une fois les choses entrées par le travail du crayon, elles restent dedans pour la vie, elles sont écrites, elles sont inscrites*.

Ce voyage provoque en lui un choc, une révélation, un éblouissement :

"L'Acropole représente le point d'intensité majeure du voyage. Le futur Le Corbusier se laisse envahir, des journées entières, par *les marbres rectilignes, les colonnes verticales et les entablements parallèles à la ligne des mers*. Au-delà du *jeu savant, correct et magnifique des volumes sous la lumière*, il recherche la force active de l'architecture. Pour lui, la beauté et la puissance du Parthénon, *pure création de l'esprit [...] machine à émouvoir*, ne sont pas seulement d'essence plastique mais surtout d'ordre spirituel. Au Mont Athos, il s'arrête huit jours durant, subjugué tout autant par la vie monacale que par la beauté du site et de l'architecture. En Turquie, il découvre les mosquées. Il est fasciné par les formes simples, éclatantes de blancheur, des architectures méditerranéennes : il est ébloui par la lumière". (2)

2. JENGER Jean, *Le Corbusier : L'architecte pour émouvoir*, Découvertes Gallimard, n° 179, 1993, p. 25.



De retour à la Chaux-de-Fonds, Charles-Edouard Jeanneret construit près d'une forêt au-dessus de la ville la maison de ses parents, appelée "la villa blanche", puis la villa Favre-Jacot au Locle et la villa Schwob dite "la villa turque". Dans ces constructions, *le plan commande l'organisation de la façade ; l'extérieur est le résultat d'un intérieur.*

Au centre de la maison de ses parents, il y a quatre poteaux qui structurent le salon de musique dédié au piano de sa mère ; ce salon paraît commander toute l'organisation orthogonale des pièces à sa périphérie. A l'ouest, dans l'axe principal de la villa, la salle à manger s'inscrit dans une sorte d'abside. Revêtu d'un enduit dont l'éclat est peu commun dans la région, la maison sera vite surnommée "la villa blanche".

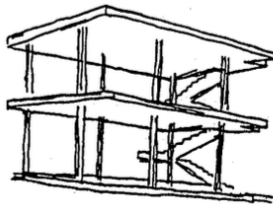


Pour la villa turque, restaurée en 1987 par la Société Ebel, *l'extérieur est aussi le résultat d'un intérieur.* C'est la première fois que l'architecte recourt à une structure en béton armé : il organise alors l'ensemble du plan – en forme de croix grecque – sur quatre groupes de quatre poteaux (les éléments porteurs sont ainsi placés à l'extérieur du volume habitable), qui définissent au centre le grand salon.

La présence d'un tracé régulateur, la rigueur et la simplicité des formes – l'angle droit, le carré, le triangle isocèle rectangle, le demi-cercle, la croix grecque – donnent à l'ensemble équilibre, cohésion et unité.



Charles-Edouard Joanneret tire profit du béton armé pour définir la *Maison Domino* dont le principe de la structure apparaîtra tout au long de son oeuvre : trois dalles, six poteaux placés à l'extérieur du volume habitable, deux volées d'escaliers : ainsi les façades sont ouvertes, le toit devient un toit-terrasse et le plan est libéré !

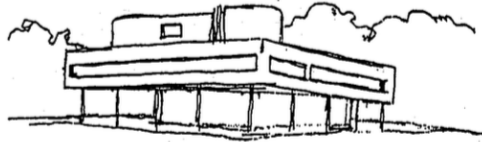


L'unité de base du système Domino.

En 1917, Charles-Edouard Jeanneret s'installe à Paris sous le pseudonyme de Le Corbusier : il peint et rencontre Amédée Ozenfant. Ensemble ils exposent et définissent une nouvelle esthétique, le purisme – pureté, simplicité, économie des moyens – et créent la revue "L'esprit nouveau" qui situe l'art et l'architecture "dans les courants de la révolution industrielle".

En publiant en 1923 "Vers une architecture", Le Corbusier prône *un retour aux formes primaires, les plus belles, les plus lisibles, par une plus grande rigueur dans le dessin par un système de tracés régulateurs ... assurance contre l'arbitraire.*

La même année, à Paris, il ouvre un bureau avec son cousin Pierre Jeanneret. Il réalise le “plan pour une ville de trois millions d’habitants”, la maison Citrohan, les logements ouvriers à Liège et Pessac et construit les villas puristes Ozenfant, Ternisien, La Roche-Jeanneret, Savoye (véritable manifeste architectural) et “la petite maison” à Corseaux, ...



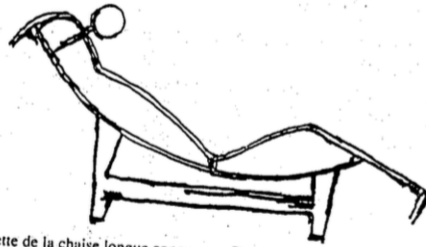
La villa Savoye.

En 1927, il dépose un projet de concours pour le palais de la Société des Nations à Genève. Classé parmi les neuf premiers ex-aequo, son travail est écarté par le jury sous prétexte que les plans sont des tirages et non des originaux. Second échec en 1931 : la modernité de son projet pour le palais des Soviets à Moscou est jugée trop audacieuse.

La cité refuge de l’Armée du Salut à Paris, le pavillon suisse de la Cité universitaire de Paris, les immeubles Molitor et Clarté, des maisons individuelles et un immeuble collectif au Weissenhof (illustration des 5 *points d’une architecture nouvelle*) sont autant de constructions qui font de Le Corbusier une figure de proue de l’architecture. Tout en continuant à voyager, à peindre et à écrire, il fonde et participe activement aux congrès internationaux de l’architecture moderne ; il rédige “La Charte d’Athènes”.

Sa conception de l’architecture se veut interdisciplinaire : elle associe le territoire, la villa, la maison et “son équipement”. A propos de “l’équipement du logis”, Le Corbusier, qui meuble souvent lui-même les villas qu’il construit, le ramène à sa fonction essentielle : fauteuils, tables, chaises, casiers de rangement. Ces meubles sont réglés sur le corps de l’homme, leur rôle est fonctionnel, leur ligne est dépouillée, le matériau utilisé simple. Et pour ce qu’il est convenu d’appeler la “décoration”, Le Corbusier, provocateur, proclame la “loi du Ripolin” : *chaque citoyen est tenu de remplacer ses tentures, ses damas, ses papiers peints, ses pochoirs, par une couche de Ripolin blanc. On fait propre chez soi ... Puis on fait propre en soi ...* (3)

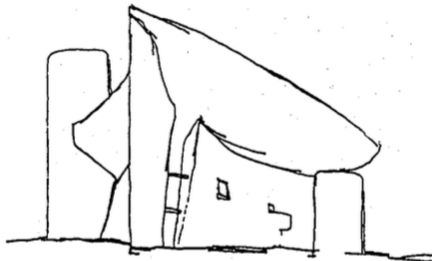
3. Ibid., p. 70.



Silhouette de la chaise longue conçue par Charlotte Pierrand et Le Corbusier.

Dans le cadre du programme d’“immeubles sans affectation individuelle” lancé par le gouvernement français à la fin de la seconde guerre mondiale, Le Corbusier construit l’“Unité d’habitation de Marseille” (ou “Cité radieuse”). Durant sept ans, il travaillera intensément à cette réalisation dans laquelle il tente une quadruple expérience : *de concept d’habitat, de réalisation technique, de recherche sociale et d’innovation urbanistique*. C’est aussi la première mise en application du Modulor.

Le Corbusier se consacre alors (1950–1955) à l’une des oeuvres majeures et parmi les plus fascinantes : la chapelle Notre-Dame du Haut à Ronchamp. En rupture avec l’architecture religieuse traditionnelle, il construit un espace sculpté, un espace de lumière et de couleurs, un lien de synthèse des arts, une oeuvre d’expression qui engendre l’émotion. Durant les dix dernières années de sa vie, il se consacrera à la sculpture, à la tapisserie, à la réalisation des grands bâtiments de Chandigahr et à celle, couronnement de son oeuvre, du couvent de la Tourette.



La chapelle Notre-Dame du Haut à Ronchamp.

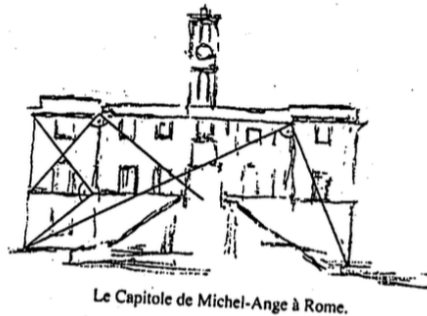
Questions et observations

Voici la question rédigée par Le Corbusier :

A vingt-trois ans, sur sa planche à dessin, notre homme a dessiné la façade d'une maison qu'il va construire. Une angoissante question se pose : "Quelle est la règle qui ordonne, qui lie toutes choses ? Je me trouve en face d'un problème de nature géométrique : je suis en plein phénomène visuel : j'assiste à la formation d'un être en soi. A la griffe on reconnaît le lion ! Où est la griffe, où est le lion ?" ... Grande inquiétude, grand trouble, grand vide. (4)

Une observation, une première certitude :

Un jour, sous la lampe à pétrole de la petite chambre à Paris, des cartes postales étaient répandues sur la table. Son oeil s'est attaché à l'image du Capitole de Michel-Ange à Rome. Sa main a retourné une autre carte, face blanche, et intuitivement en a promené l'un des angles (angle droit) sur la façade du Capitole. Subitement une vérité admissible est apparue : l'angle droit gère la composition ; des lieux (lieu de l'angle droit) commandent toute la composition. Ceci lui est une révélation, une certitude. (5)



D'autres observations et de nombreuses lectures apportent de nouvelles certitudes. Le Corbusier cite les pages qu'Auguste Choisy consacre, dans son "Histoire de l'Architecture", aux *tracés régulateurs* : "Il y a donc eu des

4. LE CORBUSIER, *Le Modulor. Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*, Denoël-Gonthier, 2e éd., Paris, 1951, op. cit., p. 22.

5. Ibid., p. 23.

tracés régulateurs pour ordonner les compositions ?” Sur ce point, citons l’architecte :

De la naissance fatale de l’architecture.

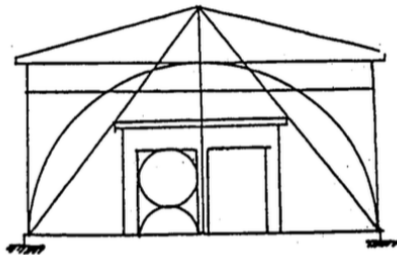
L’obligation de l’ordre. Le tracé régulateur est une assurance contre l’arbitraire. Il procure la satisfaction de l’esprit.

Le tracé régulateur est un moyen ; il n’est pas une recette. Son choix et ses modalités d’expression font partie intégrante de la création architecturale.

Un tracé régulateur est une assurance contre l’arbitraire : c’est l’opération de vérification qui approuve tout travail créé dans l’ardeur, la preuve par neuf de l’écolier, la C.Q.F.D. du mathématicien.

Le tracé régulateur est une satisfaction d’ordre spirituel qui conduit à la recherche de rapports ingénieux et de rapports harmonieux. Il confère à l’oeuvre l’eurythmie. (6)

Le Corbusier illustre par de nombreux exemples les très belles constructions où apparaissent à l’évidence des tracés régulateurs : l’Arsenal du Pirée, les grandes coupoles achéménides, Notre-Dame de Paris, Le Petit Trianon, etc.



Façade de l’Arsenal du Pirée, in: *Vers une architecture*, p. 57.

La façade de l’Arsenal du Pirée est déterminée par quelques divisions simples qui proportionnent la base à la hauteur, qui déterminent l’emplacement de la porte et sa dimension en rapport intime avec la proportion même de la façade. (7)

Convaincu de la nécessité des tracés régulateurs, Le Corbusier en fera usage dans ses constructions : angle-référence, diagonales de même direction, angle droit, section d’or, rectangles semblables, etc. Pour répondre à

6. LE CORBUSIER, *Vers une architecture*, Ed. Arthaud, nouvelle édition, 1977, p. 51 et p. 57.

7. *Ibid.*, p. 58.

ses détracteurs qui comparent ce procédé à “des formules applicables automatiquement”, il écrit : *Le tracé régulateur a été souvent assimilé à un canevas ou à un cadre, déterminé à l'avance, pour servir de base à la composition. L'idée est tout autre : le tracé régulateur n'intervient que lorsque la composition est déjà établie, pour y mettre de l'ordre et “résoudre le problème de l'unité qui est la clé de l'harmonie et de la proportion”.* (8)

A cette deuxième certitude – de la sous-jacente existence d'un tracé régulateur dans l'oeuvre harmonieuse –, Le Corbusier en ajoute une troisième : l'architecture, faite pour l'homme, doit tenir compte de la stature humaine : *Au cours des voyages, j'ai relevé dans les architectures harmonieuses, qu'elles fussent de folklore ou de haute intellectualement, la constance d'une hauteur d'environ 2,10 m à 2,20 m (7 ou 8 pieds) entre plancher et plafond : maison des Balkans, maisons turques, grecques, tyroliennes. Hauteur d'un homme-le-bras-levé, hauteur éminemment à l'échelle humaine.* (9)

Le nombre d'or ou la divine proportion : 1,618033...

Il est évidemment impossible de faire ici une étude, ne serait-ce même que superficielle, du nombre d'or, de son histoire, de son symbolisme, de ses propriétés arithmétiques.

Pour en parler, empruntons à Charles Bouleau quelques lignes de son remarquable ouvrage “La géométrie secrète des peintres” : voici ce qu'il écrit à propos du pentagone :

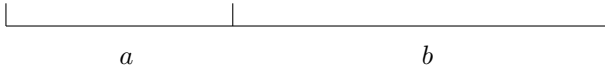
“Symbole de la quintessence platonicienne n'eut-il (le pentagone) donc pas sa place au Moyen Age ? Bien au contraire, il prit alors une importance toute particulière : c'est que ses éléments sont entre eux dans une certaine proportion que l'on considérait comme divine ; un mysticisme singulier y était attaché ; son tracé au compas, un peu compliqué, était un de ces secrets de l'art qu'on gardait jalousement dans les maîtrises et auxquels on accordait une importance souvent exagérée. Ici le mystère s'expliquait, car le tracé du pentagone était lié à la fameuse section dorée.” (10)

8. Ibid., p. 56.

9. LE CORBUSIER, *Le Modulor. Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*, Denoël-Gonthier, 2e éd., Paris, 1951, op. cit., p. 25.

10. BOULEAU Charles, *La géométrie secrète des peintres*, Ed. du Seuil, 1963, p. 64.

La section dorée est le partage d'une longueur selon la moyenne et extrême raison : les deux parties a et b sont entre elles comme la plus grande b est au tout $(a + b)$:



On a :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a + b} \quad \text{ou} \quad b^2 = a(a + b)$$

ou :

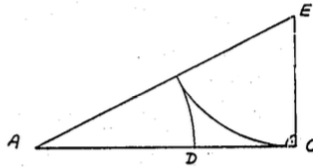
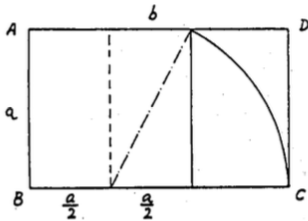
$$b^2 = a^2 + ab$$

ou, ici :

$$\frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618034.$$

C'est le nombre d'or, noté Φ .

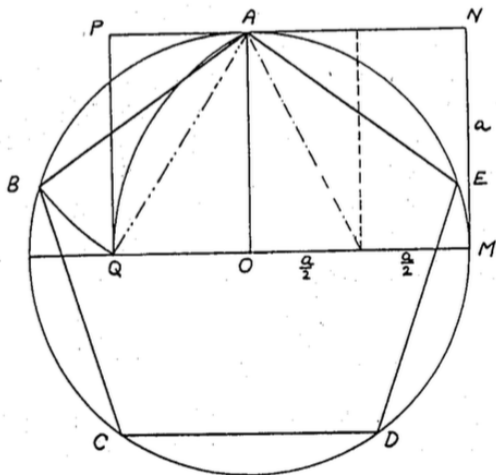
• Voici deux constructions du nombre d'or :



Dessiner le carré de côté a :
 les côtés du rectangle d'or $ABCD$
 ont pour mesure a et $b = 1,618a$

Si $EC = 1$ et $AC = 2$,
 alors
 $AD : DC = \frac{b}{a} \simeq 1,618034.$

• Voici l'une des constructions du pentagone régulier :



Construire le carré $NAOM$, puis le rectangle d'or $NPQM$ qui lui est associé; la longueur du segment AQ est alors celle du côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon OM . Dès lors, on construit aisément les sommets B, C, D et E du pentagone.

Signalons encore quelques belles propriétés du nombre d'or :

1. Considérons la célèbre suite de Fibonacci :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

où chaque terme, à partir du troisième, est égal à la somme des deux précédents.

Calculons les rapports de deux nombres qui se suivent :

$$\begin{array}{lll} 1 : 1 = 1 & 5 : 3 = 1,66\dots & 21 : 13 = 1,61538\dots \\ 2 : 1 = 2 & 8 : 5 = 1,6 & 34 : 21 = 1,61904\dots \\ 3 : 2 = 1,5 & 13 : 8 = 1,625 & 55 : 34 = 1,61464\dots \end{array}$$

... ce rapport tend vers Φ !

2. Partant de 1, Φ , puis $\Phi^2 = \Phi + 1$ (par définition de Φ)

on a, en multipliant par Φ : $\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$
 puis : $\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2$
 puis : $\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3$
 etc. ...

Les nombres $1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \dots$ sont en progression géométrique puisqu'on passe d'un nombre au suivant en multipliant par Φ ; de plus, comme on le voit, chacun d'eux, à partir de Φ^2 , est égal à la somme des deux précédents.

On peut donc énoncer : une progression géométrique de raison Φ est une suite de Fibonacci.

3. Φ peut se mettre sous la belle forme :

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

et qui donne successivement les valeurs 1 ; 1,414214 ; 1,553774 ; 1,598053 ; 1,611848 ; 1,616121 ; 1,617443 ; 1,617851 ; ...

4. Ou encore, si l'on préfère les fractions continues :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

et, dans ce cas, les valeurs successives sont : 1 ; 2 ; 1,5 ; 1,666667 ; 1,600000 ; 1,625000 ; 1,615385 ; 1,619048 ; 1,617647 ; ...

Il n'est pas concevable de présenter le nombre d'or sans évoquer la divine proportion. Cette "proportion d'or", considérée de tout temps comme l'expression de la beauté parfaite, inspire si intensément Luca Pacioli qu'il publiera en 1509 "La Divine Proportion".

Dans son oeuvre, Pacioli expose les cinq propriétés qui rendent cette proportion divine et les treize effets *toujours plus merveilleux* qui permettent de construire différentes figures simples, le pentagone et les cinq polyèdres réguliers (il fait de nombreuses références à Euclide, *notre philosophe.*).

Pacioli énonce ainsi les cinq propriétés qui méritent à cette proportion merveilleuse l'épithète de divine :

1. Comme Dieu, elle est unique.
2. Comme la Sainte Trinité est une substance en trois personnes, elle est une seule proportion en trois termes.
3. Comme Dieu ne peut se définir en paroles, elle ne se peut exprimer par nombre intelligible et par quantité rationnelle, mais est toujours occulte et secrète, et appelée par les mathématiciens irrationnelle.
4. Comme Dieu, elle est toujours semblable à elle-même.
5. Comme la vertu céleste ou quintessence a permis de créer les quatre éléments d'où est sortie toute la nature, ainsi notre sainte proportion permet de former le dodécaèdre (polyèdre régulier à 12 faces pentagonales). ⁽¹¹⁾

Consigne et constructions de M. Hanning et de Mme Maillard

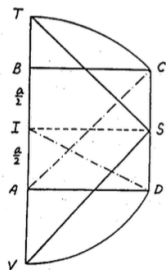
Les observations qu'a faites Le Corbusier sur la présence, dans l'oeuvre harmonieuse, de l'angle droit, de la section d'or et de la taille humaine, le poussent à imaginer qu'il y a, entre ces données, une combinaison, un lien mathématique, une "grille de proportions".

⁽¹¹⁾ Bouleau Charles, *La géométrie secrète des peintres*, Ed. du Seuil, 1963, p. 76.

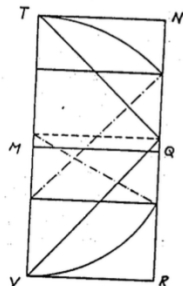
En 1943, il demande à M. Hanning, un de ses jeunes collaborateurs, de “résoudre” la consigne ainsi rédigée ⁽¹²⁾ :

Prenez l'homme-le-bras-levé, 2,20 m de haut ; installez-le dans deux carrés superposés de 1,10 m ; faites jouer à cheval sur les deux carrés, un troisième carré qui doit vous fournir une solution. Le lieu de l'angle droit doit pouvoir vous aider à situer ce troisième carré. Avec cette grille de chantier et réglée sur l'homme installé à l'intérieur, je suis persuadé que vous aboutirez à une série de mesures accordant la stature humaine (le bras levé) et la méthématique ...

- Voici la construction proposée par Hanning :



construire le carré $ABCD$
 de côté 1 ;
 placer V (tel que
 $IV = ID$)
 placer T (tel que
 $AT = AC$)
 On a : $BV = \Phi$
 mais :
 l'angle VST mesure
 $90,62^\circ$ et ...

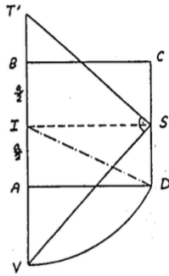


$$VT = \sqrt{2} + \Phi - 1 = 2,0322$$

Cette proposition ne donne pas satisfaction puisqu'il n'y a pas l'angle droit et que les deux carrés à placer sur VT , soit $MTNQ$ et $VMQR$, ne sont pas des carrés (VT n'est pas égal à 2!).

- Elisa Maillard, historienne d'art, propose une épure rectificative :

12. LE CORBUSIER, *Le Modulor. Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*, Denoël-Gonthier, 2e éd., Paris, 1951, op. cit., p. 35.

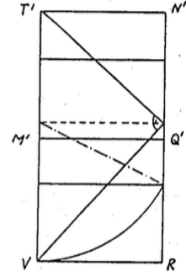


construire le carré $ABCD$
 de côté 1 ;
 placer V (tel que $IV = ID$)
 placer T' (tel que VST'
 est un angle droit)
 on a :

$$BV = \Phi$$

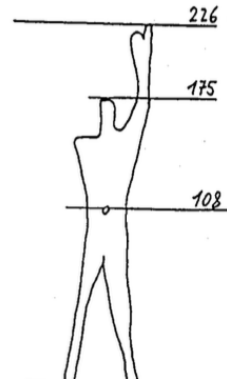
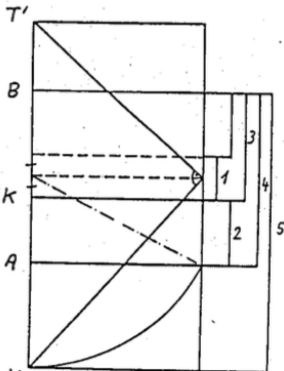
par construction, l'angle
 VST' mesure 90°
 mais :

$$VT' = \frac{9\sqrt{5}}{10} = 2,0125\dots$$



Cette construction est meilleure que celle de Hanning puisqu'on y trouve le nombre d'or et l'angle droit ; mais les deux carrés à placer sur VT' , soit $VM'Q'R$ et $M'T'N'Q'$, ne sont pas des carrés (VT' n'est pas égal à 2!).

Peu importe, Le Corbusier considère que *la grille est née, certes avec un peu d'incertitude* puisque les deux carrés (de côtés $T'K = KV$) ne sont pas exactement des carrés. Il affecte alors une valeur humaine à l'épure d'Elisa Maillard, adoptant pour la stature humaine une hauteur de 1,75 m.



La grille est ainsi dimensionnée et l'on obtient

pour "1" : 25,4
 "2" : 41,4
 "3" : 66,2
 "4" : 108,2
 "5" : 175

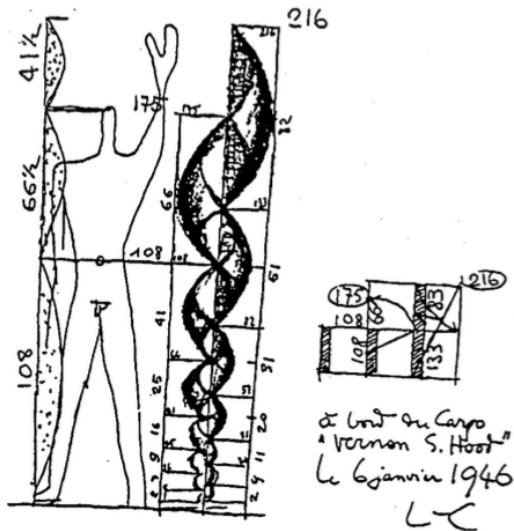
En prolongeant par Fibonacci la règle ci-dessus, Le Corbusier crée la *règle des proportions* :

2 7 9 16 25 41 66 108 175 283 ...

Puis à cette règle, qu'il baptisera la *série rouge* (établie sur l'unité 108 et le rapport Φ), il adjoindra la *série bleue* (basée sur le double de 108 : 216 et le rapport Φ) :

4 14 20 31 51 82 133 216 349 ...

Série rouge	Série bleue
9	
16	20
25	31
41	51
66	82
<u>108</u>	133
175	<u>216</u>



In: Le Corbusier, *The Modulor*, 1973, p. 51.

Fin 1945, Le Corbusier écrit : *Dès lors, tout marcha très vite, hors des brouillards. Soltan me construisit sur papier fort, verni, un magnifique ruban*

allant de zéro à 2,16 m accordé à un homme d'une stature de 1,75 m. J'avais dans ma poche le ruban gradué, enroulé dans une petite boîte en aluminium de film Kodak ; cette boîte n'a pas quitté ma poche depuis. On me voit souvent – et dans les lieux les plus inattendus – sortir de sa boîte le serpent sorcier et procéder à des vérifications. (13)

Le Modulator

Les nécessités du langage réclamaient un nom pour désigner la règle d'or. Entre plusieurs vocables, celui de MODULOR fut choisi. En même temps, “la marque de fabrique”, le label, était arrêtée, fournissant par son dessin même une explication de l'invention. L'énoncé pouvait, cette fois-ci, se faire avec une réelle simplicité : le Modulator est un outil de mesure issu de la stature humaine et de la mathématique. (14)

Toutefois, à l'expérience, les nombres de ces deux séries présentaient le défaut de mal correspondre au chiffage pied-pouce... *Or, le Modulator aura la prétention, un jour, d'unifier les fabrications en tous pays. Nécessité était donc de rechercher des valeurs entières en pied-pouce. (15)*

Voici comment Py, un collègue de Le Corbusier résolut la question :

“Les valeurs actuelles du Modulator sont déterminées par la stature d'un homme de 1,75 m. C'est là une taille plutôt française. N'avez-vous pas observé dans les romans policiers anglais que les “beaux hommes” – un policier, par exemple – ont toujours six pieds de haut ?” (16)

Or, six pieds correspondent à $6 \cdot 30,48 = 182,88$ (cm). Quelques calculs élémentaires montrent que si l'on remplace la première taille choisie (1,75 m) par celle d'un *bel homme* de six pieds (1,83 m), l'équivalence pied-pouce se fait en *chiffres pleins à tous les échelons*.

Désormais la traduction de notre Modulator sur base de 6 pieds en valeurs pleines, devient une consécration. Nous étions ravis. On dessina un nouveau ruban gradué, définitif cette fois-ci, qui remplaça l'autre dans la petite boîte d'aluminium au fond de ma poche. (17)

13. Ibid., pp. 48–49.

14. Ibid., p. 56 et p. 58.

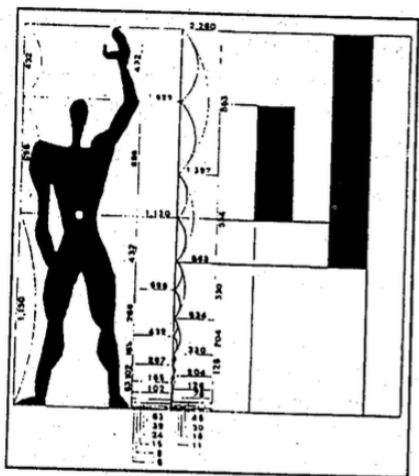
15. Ibid., p. 58.

16. Ibid., p. 58.

17. Ibid., p. 58.

Les mesures du Modulor :

<i>Série rouge</i>		<i>Série bleue</i>
⋮		⋮
4		7
6		13
10		20
16		33
27		53
43		86
70		140
<u>113</u>	→ .2 →	<u>226</u>
183		366
286		.
⋮		⋮

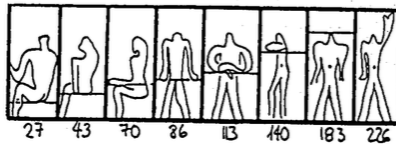


In:W. Boesiger, *Le Corbusier* 1991, p. 291.

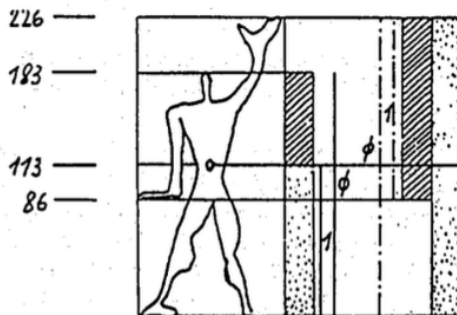
Et depuis, sur chaque table à dessiner de l'atelier de la rue de Sèvres, il y a, à côté du compas, un tableau avec deux colonnes de nombres, rouges ou bleus ; ils définissent et offrent la vue directe des *mesures*.

Pour résumer :

- Le Modulor contient les nombres 113 et 183 qui correspondent respectivement au plexus solaire et au sommet de la tête
- 113 et 183 sont dans le rapport du nombre d'or (à un millième près)
- par Fibonacci, ces deux nombres engendrent la *série rouge*, et par doublement, la *série bleue*
- 113, 183, 226 sont les mesures qui "caractérisent l'occupation de l'espace par un homme de 6 pieds", 226 correspondant à l'extrémité des doigts le bras levé
- comme le montre le croquis ci-dessous, certaines des mesures du Modulor sont liées à la stature humaine :



Valeurs essentielles du Modulor associées à l'occupation de l'espace par la figure humaine :



In: Le Corbusier, *Le Modulor*, coll. Médiations, 1977, p. 71.

- 113 : plexus solaire
- 183 : le sommet de la tête
- 226 : l'extrémité des doigts levés
- 86 : l'appui de la main

Commentaires

Pour mieux comprendre le sens et l'usage du Modulor, citons encore :

— Albert Einstein :

Einstein, parlant du Modulor, écrivait à Le Corbusier : “C’est une gamme des proportions qui rend le mal difficile et le bien facile”. Le Corbusier commentait ainsi cette appréciation : *Certains estiment que cette appréciation manque d’allure scientifique. Quant à moi, je pense qu’elle est extraordinairement clairvoyante. C’est un geste amical qu’un grand savant fait à nous autres qui ne sommes point des savants, mais des soldats sur le champ de bataille. Le savant nous dit : “Cette arme tire juste : en matière de dimensionnement, donc de proportion, elle rend votre tâche plus assurée.”* (18)

— Mougeot, ingénieur à Broadway :

“Le Modulor doit être appliqué à la mécanique au même titre qu’à l’architecture. En effet, une machine est servie par un homme, elle dépend entièrement des gestes de l’ouvrier qui l’emploie ; elle doit être par conséquent à échelle humaine.” (19)

— et Le Corbusier lui-même :

Le Modulor est une mesure organisée sur la mathématique et l’échelle humaine ; une double série de nombres la constituent, la série rouge, la série bleue.

Donc un tableau numérique pourra suffire ? - Non ! C’est ici que je désire inlassablement préciser le point de vue que j’installe à la clef même de l’invention. Le mètre n’est qu’un chiffrage sans corporalité : [...] Les chiffres du Modulor sont des mesures. Donc des faits en soi, ayant une corporalité ; elles sont l’effet d’un choix parmi l’infinité des valeurs [...] et les objets à construire dont elles fixent les dimensions sont, de toute façon, des contenants d’homme ou des prolongements d’homme. Par conséquent, le ruban du Modulor doit se trouver sur la table à dessin à côté du compas, déroulable entre les deux mains et offrant à celui qui opère, la vue directe des mesures. (20)

Le Modulor est un outil de travail, un outil précis ; disons que c’est un clavier, un piano, un piano accordé. Le piano est accordé ; il vous reste à jouer bien et c’est vous que cela rearde. Le Modulor ne donne pas de talent, et du génie encore moins ...

18. Ibid., p. 61.

19. Ibid., p. 61.

20. Ibid., pp. 62–63.

Nous ne cesserons de répéter que nous n'étudions pas le phénomène créatif, mais l'un des supports matériels de la pensée créatrice. (21)

Discussion et construction définitive

C'est sur le tracé d'Elisa Maillard qu'a été construit le Modulor. La consigne de Le Corbusier était satisfaite ou, plutôt, presque satisfaite : on se souvient en effet que les deux carrés n'étaient pas tout à fait deux carrés, mais deux rectangles puisque leurs côtés mesuraient 1,0062 au lieu de 1.

Cette approximation a longtemps troublé, voire exaspéré Le Corbusier, et il a souvent demandé que l'on reprenne les calculs.

Voici, par exemple, le commentaire que lui transmet M. Taton en 1948 :
“... donc les “carrés” construits, s'ils sont virtuellement des carrés, mathématiquement sont des rectangles voisins de la forme du carré.”

Alors, Le Corbusier, peut-être de guerre lasse, commente ainsi cette réponse (22) :

... le mathématicien ajoute : vos deux carrés de départ ne sont pas des carrés ; l'un de leurs côtés est de six millièmes plus grand que l'autre côté ... Dans la pratique de tous les jours, six millièmes d'une valeur sont ce qu'on appelle une quantité négligeable, n'entrant pas en ligne de compte ; on ne le voit pas, avec les yeux. Mais en philosophie (et je n'ai pas accès à cette science sévère), je subodore que ces six MILLIEMES de quelque chose ont une signification infiniment précieuse : ça n'est pas fermé, ça n'est pas bouché ; l'air passe ; la vie est là, faite de la répétition d'une égalité fatidique qui n'est précisément pas rigoureusement égale ... ce qui donne le mouvement.

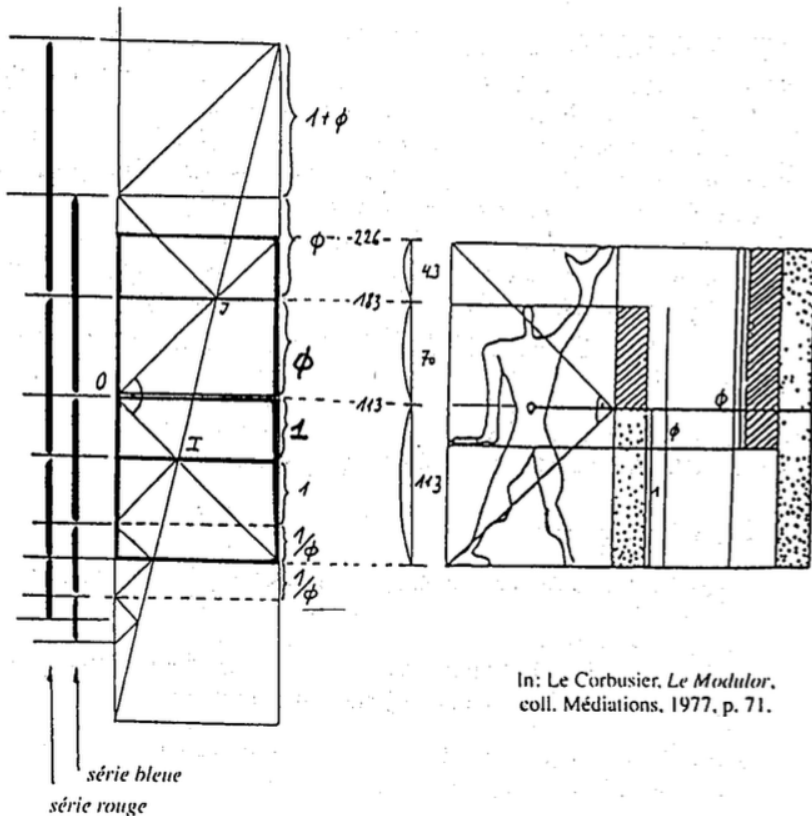
En novembre 1950, deux jeunes gens, Serralta et Maisonnier, proposent le tracé définitif du Modulor. Voici leur construction :

— placer un carré

21. GUITON, Jacques, *Le Corbusier : Textes choisis - Architecture et urbanisme*, Ed. du Moniteur, Paris, 1982, p. 65.

22. LE CORBUSIER, *Le Modulor. Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*, Denoël-Gonthier, 2e éd., Paris, 1951, op. cit., p. 216.

- partager le côté vertical dans le rapport $1 : \Phi$; on détermine ainsi le point O
 - O est “le lieu de l’angle droit” : on place donc l’angle droit en O , l’horizontale passant par O jouant le rôle de bissectrice
 - les côtés de cet angle droit coupent le carré en I et J et servent de diagonales aux deux carrés superposés
 - par construction, on obtient une famille de triangles semblables au triangle OIJ et dont le rapport de similitude est le nombre d’or Φ .
- Construction de Serralta et Maisonnier (1950) :



Il est alors aisé de retrouver les deux séries rouge et bleue. En prenant 113 cm (plexus solaire) pour le côté des carrés, on obtient :

pour la *série rouge* : ..., ..., 27, 43, 70, 113, 183, 296, ...

pour la *série bleue* : ..., 33, 53, 86, 140, 226, 366, ...

Ces deux suites numériques sont des progressions géométriques de raison Φ , donc des suites de Fibonacci.

Pour conclure

Ainsi, la consigne de Le Corbusier était pleinement satisfaite... Mais si le Modulor – cette règle à l'échelle de l'homme – réalise la synthèse *de l'angle droit, de la section d'or et de la taille humaine*, il ne répond qu'en partie à *l'inquiétude, au trouble et au vide* qui habitaient le jeune architecte. Les interrogations permanentes sur *le mystère du beau* – pour ne s'en tenir qu'à cette formule – sont le centre de son oeuvre : l'oeuvre d'un architecte, d'un peintre, d'un essayiste, d'un esthète, d'un humaniste, d'un voyageur ; en fait, d'un génie.

En héritage, Le Corbusier nous laisse cette question jamais résolue – celle du beau – sur laquelle il s'est tant acharné ; parce que lorsqu'elle est en vous, elle ne vous lâche pas, elle vous oblige au travail, vous contraint à recommencer sans cesse ; elle vous pousse sur les chemins du Mont Athos, elle vous emmène au Panthéon à Rome, à la Chartreuse d'Ema. On ajouterait aujourd'hui ... à Ronchamp, à la Tourette.

Bibliographie

- [1] LE CORBUSIER, *Le Modulor. Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*.
- [2] LE CORBUSIER, *Modulor 2, 1955 : La parole est aux usagers*. Suite de *Le Modulor 1948*. Architecture d'aujourd'hui, Paris, 1983.
- [3] LE CORBUSIER, 2 vol. : ill. - Reprod. photomécanique de l'édition de Paris aux Ed. de l'architecture d'aujourd'hui, 1950–1955.
- [4] LE CORBUSIER, *Le Modulor. Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*, Denoël-Gonthier, Paris, 1977, - 221 p. : ill. -(Bibliothèque médiations ; 108). La couverture porte : *Le Modulor : contre la pollution visuelle*.

-
-
- [5] LE CORBUSIER, *Vers une architecture*, Editions Arthaud, nouvelle édition, Paris, 1977.
- [6] LE CORBUSIER, *Le voyage d'Orient*, Editions Parenthèses, 1987.
- [7] LE CORBUSIER, *Le Poème de l'angle droit*, Editions Connivences, 1989.
- [8] GUITON, Jacques, *Le Corbusier. Textes choisis, Architecture et urbanisme*, Editions du Moniteur, Paris, 1982.
- [9] BOESIGER, W., GIRSBERGER, H., *Le Corbusier 1910–1965*, Les Editions d'Architecture, 3e éd., Zurich, 1991.
- [10] BENTON, Tim, *Les villas de Le Corbusier 1920–1930*, Ph. Sers, 2e éd., Paris, 1987.
- [11] JENGER, Jean, *Le Corbusier. L'architecture pour émouvoir*, Découvertes Gallimard 179, Paris, 1993.
- [12] PAULY, Danièle, *Ronchamp. Lecture d'une architecture*, Edition Ophrys, Paris, 1987.
- [13] GHYKA, Matila C., *Le nombre d'or*, Editions Gallimard, Paris, 1959.
- [14] BORISSAVLIEVITCH, M., *Le nombre d'or et l'esthétique scientifique de l'architecture*, Paris, 1952.
- [15] BOULEAU, Charles, *La géométrie secrète des peintres*, Editions du Seuil, Paris, 1963.

Un merci spécial à Léonard Félix qui a réalisé les neuf premiers dessins servant à l'illustration de cet article.

Adresse de l'auteur :

Charles FÉLIX

La Perche

2902 Fontenais

Suisse

La dérivée schwarziennne

J. Bair et G. Haesbroeck, Université de Liège

En 1869, H.A. Schwarz a introduit un outil différentiel, appelé aujourd'hui la *dérivée schwarziennne*, dans un travail sur les représentations conformes. Cette notion joue un rôle décisif dans des problèmes variés : par exemple, en analyse complexe, dans la théorie invariante des équations différentielles et dans la caractérisation des fonctions analytiques univalentes [4]. En 1968, D. Springer a exploité pour la première fois ce concept dans la théorie des bifurcations des orbites périodiques [7] ; la dérivée schwarziennne s'avère en effet très efficace pour la compréhension des modèles dynamiques non linéaires [1, 2, 3, 6, 7, 8] : nous consacrerons ultérieurement un article à ce sujet passionnant.

1. Définition

Soit f une fonction numérique réelle qui sera toujours supposée au moins trois fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert I et de dérivée non identiquement nulle sur tout sous-intervalle ouvert de I . La *dérivée schwarziennne* de f en un point x de I où $f'(x) \neq 0$ est notée $D_s f(x)$ et définie par

$$D_s f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2 ;$$

de façon équivalente, on a encore

$$D_s f(x) = \frac{d}{dx} \gamma_f(x) - \frac{1}{2} [\gamma_f(x)]^2 = \frac{d^2}{dx^2} \ln |f'(x)| - \frac{1}{2} [\gamma_f(x)]^2 ,$$

où $\gamma_f(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)}$, cette dernière expression étant souvent exploitée, notamment par les financiers qui parlent alors d'*indice de convexité* [5], et représente l'élasticité moyenne de $f'(x)$, à savoir

$$\frac{E f'(x)}{x} \quad \text{où} \quad E f'(x) = \frac{x}{f'(x)} \frac{d}{dx} f'(x).$$

2. Petit formulaire

En guise d'exercices, on vérifiera aisément les formules suivantes (où a, b et c désignent des constantes, avec $a \neq 0$) données bien entendu sous réserve d'existence.

$f(x)$	$D_s f(x)$
$ax + b$	0
$\frac{1}{ax+b}$	0
$\ln x$	$\frac{1}{2x^2}$
e^x	$-\frac{1}{2}$
$\sin x$	$-1 - \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x$
$\cos x$	$-1 - \frac{3}{2} \operatorname{cotg}^2 x$
$ax^2 + bx + c$	$\frac{-6a^2}{(2ax+b)^2}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{-2}{(1+x^2)^2}$

3. Dérivée schwarziennne des fonctions composées

Les règles de calcul de la dérivée schwarziennne diffèrent fortement des règles habituelles de dérivation classique. Ainsi, pour une constante a non nulle, on a visiblement

$$D_s [af(x)] = D_s f(x);$$

en particulier, la dérivée schwarziennne de l'opposé d'une fonction f coïncide avec la dérivée schwarziennne de f . Plus généralement, on dispose de cette loi de dérivation schwarziennne pour les fonctions composées

$$D_s(f \circ g)(x) = [g'(x)]^2 D_s f[g(x)] + D_s g(x).$$

En effet, on obtient successivement par la règle classique de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'[g(x)] g'(x), \\(f \circ g)''(x) &= f''[g(x)] [g'(x)]^2 + f'[g(x)] g''(x), \\(f \circ g)'''(x) &= f'''[g(x)] [g'(x)]^3 + 3f''[g(x)] g''(x)g'(x) + f'[g(x)] g'''(x),\end{aligned}$$

d'où, en prenant les dérivées de f en $g(x)$ et celles de g en x :

$$\begin{aligned}D_s(f \circ g)(x) &= \frac{f'''(g')^3 + 3f''g''g' + f'g'''}{f'g'} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(g')^2 + f'g''}{f'g'} \right]^2 \\&= \frac{f'''(g')^2}{f'} + 3\frac{f''g''}{f'} + \frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2} \frac{(f'')^2(g')^4 + (f')^2(g'')^2 + 2f''g''f'(g')^2}{(f')^2(g')^2} \\&= \frac{f'''(g')^2}{f'} + \frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''}{f'} \right]^2 (g')^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{g''}{g'} \right)^2 \\&= (g')^2 D_s f [(g(x))] + D_s g.\end{aligned}$$

Ce dernier résultat admet quelques corollaires intéressants.

Ainsi, lorsque les dérivées schwarziennes de f et de g ont partout le même signe, il en va de même pour la dérivée schwarzienne de $f \circ g$. En particulier, si $D_s f < 0$ (ce qui signifie que $D_s f(x) < 0$ pour tout x tel que $f'(x) \neq 0$ et que

$$\lim_{x \rightarrow a} D_s f(x) < 0$$

si $f'(a) = 0$, la limite pouvant éventuellement être infinie, alors égale à $-\infty$), alors $D_s(f \circ f) < 0$ et, plus généralement, pour tout entier naturel n , $D_s f_n < 0$ où $f_n = f \circ f \circ \dots \circ f$, le produit de composition comprenant n facteurs.

Si f est injective, sa réciproque f^{-1} existe et donne lieu à cette formule :

$$D_s f^{-1} = -\frac{1}{(f')^2} D_s f;$$

cela se vérifie à partir de l'égalité $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, en appliquant la règle de dérivation schwarzienne pour les fonctions composées, ainsi que l'égalité $D_s(x) = 0$.

Notons au passage que les dérivées schwarziennes de f et de f^{-1} sont de signe contraire. Un examen du petit formulaire permet, par exemple, d'affirmer que

$$D_s(\text{Arcsin } x) > 0, \quad D_s(\text{Arccos } x) > 0, \quad D_s(\text{tg } x) > 0;$$

plus précisément, en utilisant la formule donnant la dérivée schwarzienne d'une fonction réciproque, on obtient les expressions suivantes

$f(x)$	$D_s f(x)$
$\text{tg } x$	2
$\text{Arcsin } x$	$\frac{2+x^2}{2(1-x^2)^2}$
$\text{Arccos } x$	$\frac{2+x^2}{2(1-x^2)^2}$

4. Fonction homographique

Parmi toutes les propriétés de la dérivée schwarzienne, une des plus importantes est assurément la caractérisation de toute fonction homographique (c'est-à-dire le quotient de deux binômes du premier degré). De fait, si

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta} + \gamma$$

pour des constantes α, β et γ adéquates, d'où, en vertu de ce qui précède, $D_s f(x) = 0$.

Ce qui est plus remarquable est le fait que la réciproque est aussi valable, d'où les fonctions de dérivée schwarzienne nulle sont exactement les fonctions homographiques.

Démontrons que si $D_s f(x) = 0$, alors on peut écrire

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Revenons à l'expression de la dérivée schwarzienne utilisant l'élasticité moyenne de f' :

$$D_s f(x) = \gamma'_f(x) - \frac{1}{2} [\gamma_f(x)]^2, \quad \text{avec } \gamma_f(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)}.$$

L'équation différentielle $D_s f(x) = 0$ peut être remplacée par l'équation différentielle de Bernoulli :

$$\gamma'_f(x) = \frac{1}{2} [\gamma_f(x)]^2.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par $[\gamma_f(x)]^2$, puis en posant $u(x) = \frac{1}{\gamma_f(x)}$, on trouve successivement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{[\gamma_f(x)]^2} \gamma'_f(x) &= \frac{1}{2} \\ u'(x) &= \frac{-1}{[\gamma_f(x)]^2} \gamma'_f(x) = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$u(x) = -\frac{x}{2} + C_1 \quad (C_1 \text{ constante})$$

soit encore

$$\gamma_f(x) = \frac{1}{-\frac{x}{2} + C_1}.$$

Or, par définition, $\gamma_f(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)}$. On se ramène dès lors à une nouvelle équation différentielle pour la fonction $f(x)$, à savoir :

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{-\frac{x}{2} + C_1}.$$

En posant cette fois $v(x) = f'(x)$, on obtient

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{1}{-\frac{x}{2} + C_1}$$

ou encore

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{-\frac{x}{2} + C_1},$$

puis, par simple primitivation,

$$\ln |v| = -2 \ln \left| C_1 - \frac{x}{2} \right| + C_2 \quad (C_2 \text{ constante})$$

ce qui est équivalent à

$$v = \frac{C_3}{\left(C_1 - \frac{x}{2} \right)^2} \quad (C_3 \text{ constante}).$$

En remplaçant v par f' , il vient, grâce à une nouvelle primitivation

$$\int f'(x)dx = \int \frac{C_3}{(C_1 - \frac{x}{2})^2} + C_4 \quad (C_4 \text{ constante})$$

soit encore

$$f(x) = \frac{2C_3}{C_1 - \frac{x}{2}} + C_4,$$

cette solution s'écrit encore sous la forme suivante, pour des constantes a, b, c et d adéquates

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

5. Propriétés de fonctions dont le signe de la dérivée schwarzienne est constant

Les lignes précédentes montrent que de nombreuses fonctions ont partout une dérivée schwarzienne de signe constant. Par exemple, la dérivée schwarzienne de la fonction quadratique $Q_c(x) = x^2 + c$ vaut

$$D_s Q_c(x) = -\frac{3}{2x^2};$$

pour la fonction logistique $L_c(x) = cx(1 - x)$, on trouve

$$D_s L_c(x) = -\frac{6}{(1 - 2x)^2}.$$

Plus généralement, $D_s P < 0$ dès que P est un polynôme dont la dérivée P' ne possède que des racines réelles. De fait, si P' est un polynôme dont les racines réelles sont a_i de multiplicité n_i pour $i = 1, \dots, p$, on a

$$P'(x) = k \prod_{i=1}^p (x - a_i)^{n_i},$$

avec k constante, d'où

$$\ln |P'(x)| = \ln |k| + \sum_{i=1}^p n_i \ln |x - a_i|;$$

par dérivation, on obtient

$$\frac{P''(x)}{P'(x)} = \sum_{i=1}^p \frac{n_i}{x - a_i}$$

puis

$$\frac{P'''(x)}{P'(x)} - \left[\frac{P''(x)}{P'(x)} \right]^2 = - \sum_{i=1}^p \frac{n_i}{(x - a_i)^2}$$

d'où

$$D_s P = - \sum_{i=1}^p \frac{n_i}{(x - a_i)^2} - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p \frac{n_i}{(x - a_i)^2} \right)^2 < 0.$$

Lorsque la dérivée schwarzienne d'une fonction ne change pas de signe sur un intervalle, des renseignements intéressants peuvent être obtenus. On dispose de ce premier résultat :

Si $D_s f$ garde un signe constant sur un intervalle I , alors $f(x)$ possède au plus un point d'inflexion dans I .

En effet, comme f' ne peut pas s'annuler dans I où elle est continue, f est injective et f^{-1} existe. Par ailleurs, on sait que $D_s f$ et $D_s f^{-1}$ sont de signe contraire. Il suffit donc de démontrer le résultat lorsque $D_s f > 0$, puisque les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant et que, dès lors, tout point d'inflexion pour f donne naissance à un point d'inflexion pour f^{-1} et réciproquement. Supposons donc que $D_s f > 0$ et procédons par l'absurde. S'il existe deux points d'inflexion a et b pour f (avec $a < b$), on a

$$f''(a) = f''(b) = 0.$$

En vertu du théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'''(c) = 0$, d'où

$$D_s f(c) = -\frac{3}{2} \left[\frac{f''(c)}{f'(c)} \right]^2 \leq 0,$$

ce qui est impossible.

Le signe constant de la dérivée schwarzienne de f est lié à la convexité (ou concavité) de la fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt{|f'(x)|}}$, puisque

$$g''(x) = -\frac{1}{2} g(x) D_s f(x).$$

En conséquence :

Si $D_s f(x) < 0$ (resp. $D_s f(x) > 0$) pour tout x de I , alors la fonction g est strictement convexe (resp. strictement concave) sur I ; de plus, $D_s f(x) \leq 0$ (resp. $D_s f(x) \geq 0$) pour tout x de I si et seulement si g est convexe (resp. concave) sur I .

6. Principe schwarzienne du min – max

La connaissance de la dérivée schwarzienne de f permet d'obtenir des renseignements utiles sur les extrema locaux éventuels de f' :

Sur un intervalle ouvert I , la fonction f' ne possède aucun minimum local si $f'(x)D_s f(x) < 0$ pour tout x de I , aucun maximum local si $f'(x)D_s f(x) > 0$ pour tout x de I .

Démontrons ce résultat par l'absurde dans le cas du minimum. S'il existe un extrémant local a pour f' , on doit avoir $f''(a) = 0$, d'où

$$D_s f(a) = \frac{f'''(a)}{f'(a)}$$

et

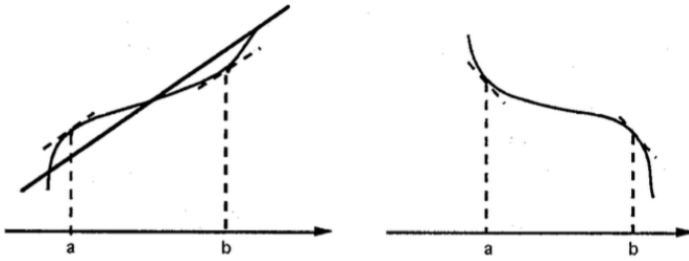
$$f'''(a) = f'(a)D_s f(a).$$

Si a est un minimant local pour f' , on doit avoir $f'''(a) \geq 0$, ce qui est impossible. Le cas du maximum se traite de la même manière.

Dans le cas fréquent où la dérivée schwarzienne est partout négative, le résultat précédent permet de formuler l'énoncé suivant, souvent appelé le *principe schwarzien du min – max* :

Si $D_s f < 0$ sur I , alors f' ne peut avoir dans I un minimum local positif, ni un maximum local négatif.

Cet énoncé donne des indications précieuses sur le genre de graphes qui ne peuvent pas correspondre à des fonctions dont les dérivées schwarziennes sont partout négatives. Ainsi, des graphes tels que ceux représentés ci-dessous sont impossibles pour des fonctions f telles que $D_s f < 0$.



En effet, sur la figure de gauche, la pente de f aux points a et b vaut 1 ; entre ces deux points, elle est inférieure à 1 sans jamais être négative. Dès lors, la dérivée de f doit admettre un minimum local positif et, en vertu du principe schwarzien du min – max, il est impossible d’avoir $D_s f < 0$.

Le graphe de droite est également impossible si $D_s f < 0$ car la pente de f vaut -1 aux points a et b et varie dans $] -1, 0[$ entre ces deux points. Partant, f' doit nécessairement admettre un maximum local négatif entre a et b .

Bibliographie

- [1] Allwright D.J., Hypergraphic functions and bifurcations in recurrence relations, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 34 n° 4, 1978, pp. 687-691.
- [2] Devaney R., *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed., Addison-Wesley Publ. Comp., 1989.
- [3] Devaney R., *A first course in chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1992.
- [4] Hille E., *Lectures on ordinary differential equations*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1968.
- [5] Roger P., *Les outils de la modélisation financière*, Presses Universitaires de France, 1991.
- [6] Sharkovsky A.N., Maistrenko Y.L. et Romanenko E.Y., *Difference equations and their applications*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [7] Springer D., Stable orbits and bifurcations of maps of the interval, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 35, n° 2, 1978, pp. 260-267.

-
-
- [8] Wathieu V. *Etude de la stabilité par des équations récurrentes non linéaires : applications économiques*, travail de fin d'étude, Université de Liège, 1995.

Adresse des auteurs

Jacques BAIR

Faculté d'Economie, de Gestion
et de Sciences Sociales
Boulevard du Rectorat 7 (Bât. 31)
4000 LIEGE

Gentiane HAESBROECK

Institut de Mathématique
Avenue des Tilleuls 14
4000 LIEGE

La mathématique des dinosaures

F. Buekenhout et S. Trompler, *Congrès de la SBPM*
23–8–1995

Ce sujet nous a attirés pour diverses raisons : la notoriété et le succès des dinosaures auprès des jeunes, l'intérêt actuel pour le sens des mathématiques, son caractère interdisciplinaire (paléontologie–biologie–logique–physique–math.).

En paléontologie, une démarche proche des mathématiques s'impose. On ne peut espérer tout apprendre des animaux par une patiente observation de leur comportement.

A partir de données substantielles mais réduites (empreintes et squelettes), il faut reconstituer le reste par imagination et induction.

McNeil Alexander s'est intéressé à l'allure de déplacement des dinosaures. Il s'est demandé si leurs membres étaient suffisamment puissants pour leur permettre une locomotion analogue à celle des éléphants ou s'ils devaient vivre dans des lacs, portés par l'eau. Il est évidemment impossible d'avoir une réponse directe à cette question.

Alexander a étudié pendant plusieurs années (vers 1970) les mécanismes de la course et du saut chez les grenouilles, les chiens, les kangourous et d'autres animaux. Il a ainsi été amené à chercher une relation entre leur taille et leur mode de locomotion.

En s'intéressant surtout à la course, il a constamment retrouvé l'expression $v^2/g\ell$ où v est la vitesse, g l'accélération de la pesanteur, ℓ la longueur des membres. Il ne dit pas d'où lui est venue cette idée. Mais il s'est rendu compte plus tard qu'il s'agit là du carré du nombre de Froude, un architecte naval du 19ème siècle.

Pour y voir clair, il s'est inspiré de résultats de mécanique des fluides.

Lorsque des navires doivent être construits, il est indispensable de prévoir leur comportement dans diverses situations. Une simulation permettra ces prévisions. Mais, comment donner à une maquette les caractéristiques voulues pour qu'elle reproduise le plus exactement possible la réalité du véritable navire ? La réduction en volume doit s'accompagner d'une réduction de la vitesse et tenir compte du changement de fluidité de l'eau. Il existe un principe de similitude physique, utilisé notamment en hydraulique.

Deux processus physiques sont dits semblables lorsqu'ils obéissent aux mêmes lois physiques et que toutes les quantités x'_i caractérisant l'un d'eux peuvent être obtenues en multipliant les quantités analogues x''_i caractérisant l'autre processus par des constantes c_i . Donc $x'_i = c_i x''_i$.

Un prototype et son modèle hydraulique doivent aussi présenter une *similitude géométrique*, donc les rapports de toutes les longueurs correspondantes doivent être égaux. Mais il faut atteindre une *similitude cinématique*. Elle sera atteinte si les chemins des particules homologues en mouvement sont géométriquement semblables et si les rapports de leurs vitesses sont égaux.

On doit avoir :

$$\text{Vitesse : } \frac{V_m}{V_p} = \frac{\frac{L_m}{T_m}}{\frac{L_p}{T_p}} = \frac{\frac{L_m}{L_p}}{\frac{T_m}{T_p}} = \frac{L_r}{T_r}$$

où L_r et T_r sont les rapports de similitude de longueur et de temps entre la maquette et le prototype.

La *similitude dynamique*, toute aussi nécessaire, demande que les rapports entre les forces homologues soient égaux. Prenons le rapport entre la force d'inertie et la pesanteur

$$\frac{M_m a_m}{M_m g} = \frac{M_p a_p}{M_p g} = \frac{\rho L^3 \frac{V}{T}}{\rho L^3 g} = \frac{L^2 \frac{L}{T} V}{L^3 g} = \frac{V^2}{Lg}$$

où ρ est la densité des matériaux.

La racine carrée de ce rapport est le nombre de Froude.

Pour illustrer l'application du principe de similitude physique entre un prototype et son modèle, voici un problème emprunté à la "Mécanique des fluides et Hydraulique" de la série Schaum :

Un navire dont la longueur de la quille est de 140 m doit se déplacer à 7,50 m/s.

- a) Calculer le nombre de Froude.
- b) Pour obtenir la similitude dynamique, à quelle vitesse doit-on haler dans l'eau un modèle à l'échelle 1/30?

a) $N_F = \frac{V}{\sqrt{gL}} = \frac{7,50}{\sqrt{9,8 \times 140}} = 0,203.$

b) Quand deux configurations d'écoulement ne sont soumises qu'à l'influence des forces d'inertie et du poids, c'est la constante du nombre de Froude

qui exprime la similitude dynamique. Donc :

$$\frac{V}{\sqrt{gL}} = \frac{V'}{\sqrt{gL'}}$$

et, de là,

$$\frac{V}{\sqrt{L}} = \frac{V'}{\sqrt{L'}}$$
$$\frac{7,5}{\sqrt{140}} = \frac{V'}{\sqrt{140/30}}$$

$$V' = 1,37 \text{ m/s pour le modèle.}$$

Alexander s'attaque au problème de trouver la vitesse d'un animal à partir de ses empreintes. Il a conscience des limites de ses calculs et des sources d'erreurs possibles. Ses conclusions sont très prudentes.

Les paramètres suivants sont utilisés (fig. 1) :

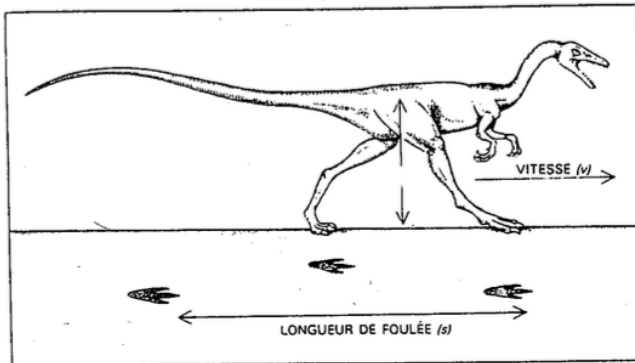


Fig. 1 : LA LONGUEUR DE FOULÉE est la distance entre deux empreintes successives du même pied. Le dinosaure représenté ici est *Compsognathus*, un carnivore de la taille d'un poulet.

-
-
- LF : longueur de la foulée
 LP : longueur d’empreinte
 g : accélération de la pesanteur
 h : hauteur de la hanche au-dessus du sol
 v : vitesse de l’animal ayant laissé les empreintes dont on dispose.

Il a soin d’exprimer ces grandeurs en unités cohérentes.

En 1976, Alexander a comparé les mesures de ces paramètres pour un nombre élevé d’espèces différentes de vertébrés bipèdes et quadrupèdes dont les empreintes (appuis) se situent sous le corps.

Il a eu l’idée d’introduire la longueur de foulée relative $\frac{LF}{h}$. Il a montré que les animaux terrestres connus passent de la marche au trot quand $\frac{LF}{h}$ atteint à peu près 2. Il a suggéré que cette observation s’applique aux dinosaures.

Divers auteurs ont précisé trois allures sur base de l’observations des vertébrés suivants :

Marche	Trot	Galop
$\frac{LF}{h} < 2$	$2 < \frac{LF}{h} < 2.9$	$2.9 < \frac{LF}{h}$

Alexander dit qu’il a relevé la présence persistante du carré du nombre de Froude.

Un raisonnement plausible qu’il cite est de considérer le rapport des énergies cinétiques et potentielles :

$$\frac{m \frac{V^2}{2}}{mgh} = \frac{V^2}{2gh}.$$

Les animaux de taille différente auraient un mouvement dynamique semblable lorsque leurs nombres de Froude sont égaux.

C’est une idée de similitude mathématiquement sympathique !

A partir du graphe expérimental (fig. 2) qui étudie la longueur relative de foulée en fonction du carré du nombre de Froude, et qui passe aux logarithmes pour linéariser la courbe, Thulborn propose la loi obtenue par

Alexander :

$$\frac{LF}{h} = 2,3 \left(\frac{V}{gh} \right)^{0,3} .$$

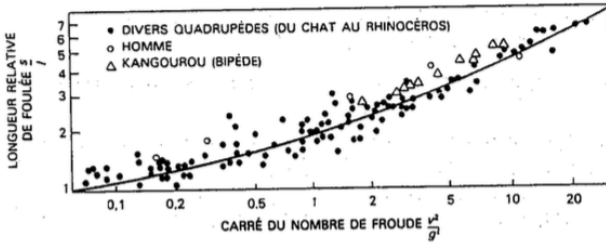


Fig. 2 : LES NOMBRES DE FROUDE des kangourous, des êtres humains et de quadrupèdes, comme les rhinocéros sont représentés en fonction de la longueur des foulées. On a utilisé une échelle logarithmique afin de représenter des nombres de Froude compris entre 0,01 et 5.

Cette loi serait largement applicable aux animaux, qu'ils soient petits ou grands, oiseaux ou mammifères, bipèdes ou quadrupèdes.

En explicitant V par rapport à LF , g et h , Alexander a transformé cette formule en

$$V = 0,25g^{1/2}LF^{5/3}h^{-7/6} . \quad (1)$$

En 1977, Alexander a donné une loi quelque peu différente, qui convient mieux au galop :

$$\frac{LF}{h} = 1,8 \left(\frac{V^2}{gh} \right)^{0,39} .$$

Elle se transforme en

$$V = 0,47(LF)^{1,28}h^{-0,78}g^{0,5} . \quad (2)$$

Et pour le trot ?

On utilise la moyenne entre (1) et (2).

Mais comment évaluer h ?

Diverses méthodes ont été proposées par différents auteurs. La plus simple est celle d'Alexander

$$h = 4LF.$$

Elle lui est inspirée par des mesures faites sur des animaux actuels. Si on en croit Thulborn, elle semble assez satisfaisante.

Une autre méthode lie h à la longueur du métatarse. Les vitesses ainsi calculées se situent de 3,8 à 12,7 km/h.

Plus tard, on a relevé quelques cas de dinosaures atteignant 40 km/h.

Voici comment l'interaction d'observations relevant des sciences naturelles et de notions mathématiques du niveau de l'école secondaire ont permis d'obtenir des réponses plausibles à des questions dont l'accès est exclu par l'observation seule.

Bibliographie

R. McNeill Alexander La course des dinosaures. (Pour la Science 164, 1991).

Mechanics of posture and gait of some large dinosaurs. (Zoological Journal of Linnean Society, 1985).

Dynamics of dinosaurs and other extinct animals. (Columbia U.P., 1989).

R. Thulborn The gait of dinosaurs in "Dinosaur tracks and traces". (Cambridge U.P., 1988).

T. Thulborn Dinosaurs tracks. (Chapman and Hall, 1990).

Ranald V. Giles Mécanique des fluides et Hydraulique. (Série Schaum).

B. Yavorsky et A. Detlat Handbook of Physics. (Mir Publishers of Moscow, 1972).

M. Frédérick et M. Parker Graphiques logarithmiques et semi-logarithmiques. (Cahiers du CeDoP, UREM, ULB).

Adresse des auteurs :

Francis BUEKENHOUT
CP 216 - Université Libre de Bruxelles
Boulevard du Triomphe
1050 Bruxelles

Simone TROMPLER
Drève du Sénéchal 42
1180 Bruxelles

Une caractérisation des fonctions convexes sur un intervalle ouvert

P. Dupont, *Faculté Universitaire des Sciences Agronomiques de Gembloux*

Soit I un intervalle de \mathbb{R} ; rappelons qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *convexe* si

$$(\forall x, y \in I) (\forall \lambda \in]0; 1[) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Lorsque λ parcourt $]0; 1[$, $\lambda x + (1 - \lambda)y$ parcourt $]x; y[$; la signification géométrique de cette condition est que chaque arc du graphe de f est situé en dessous (au sens large !) de la corde correspondante : voir la figure ???. Remarquons au passage que définir une fonction convexe comme une fonction dont la dérivée est croissante est inutilement restrictif et masque l'essentiel. Une longue et intéressante discussion de la définition des fonctions convexes se trouve dans [1].

Il est assez surprenant de constater que les fonctions convexes sur un intervalle *ouvert* peuvent être caractérisées de la manière suivante. J'ignore si la Proposition que voici est bien connue; elle m'a été inspirée par la lecture de [3], que je recommande assez chaleureusement.

Proposition. *Soit un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ces conditions, f est convexe si et seulement si*

- (1) f est continue sur I ;
- (2) $(\forall x, y \in I) (\exists \lambda \in]0; 1[) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

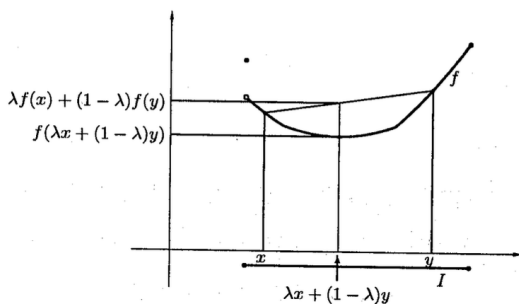


Figure 1 : Définition de la convexité

DÉMONSTRATION.

a) La condition est nécessaire.

Supposons f convexe ; $]0; 1[$ étant non vide, il est clair que la condition (2) est satisfaite. Soit ensuite $y \in I$; montrons que f est continue en y . Comme I est ouvert, il existe $x, z \in I$ tels que $x < y < z$.

— Soit pour commencer $t \in]y; z[$.

◦ Posons d'abord $\lambda = \frac{t-y}{t-x} \in]0; 1[$; alors, $1 - \lambda = \frac{y-x}{t-x}$ et $\lambda x + (1 - \lambda)t = y$; donc,

$$f(y) \leq \frac{t-y}{t-x}f(x) + \frac{y-x}{t-x}f(t),$$

d'où

$$\begin{aligned} f(t) &\geq \frac{t-x}{y-x} \left[f(y) - \frac{t-y}{t-x}f(x) \right] \\ &= \frac{yf(x) - xf(y) + t[f(y) - f(x)]}{y-x}. \end{aligned}$$

◦ Posons ensuite $\lambda = \frac{z-t}{z-y} \in]0; 1[$; alors, $1 - \lambda = \frac{t-y}{z-y}$ et $\lambda y + (1 - \lambda)z = t$; donc,

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \frac{z-t}{z-y}f(y) + \frac{t-y}{z-y}f(z) \\ &= \frac{zf(y) - yf(z) + t[f(z) - f(y)]}{z-y}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\frac{yf(x) - xf(y) + t[f(y) - f(x)]}{y-x} \\ &\leq f(t) \leq \frac{zf(y) - yf(z) + t[f(z) - f(y)]}{z-y}, \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow y} \frac{yf(x) - xf(y) + t[f(y) - f(x)]}{y-x} \\ &= \lim_{t \rightarrow y} \frac{zf(y) - yf(z) + t[f(z) - f(y)]}{z-y} = f(y), \end{aligned}$$

le Théorème de l'étau entraîne que $\lim_{y^+} f = f(y)$, et f est continue à droite en y .

— Soit maintenant $t \in]x; y[$. De manière parfaitement analogue, on montre que

$$\frac{zf(y) - yf(z) + t[f(z) - f(y)]}{z - y} \leq f(t) \leq \frac{yf(x) - xf(y) + t[f(y) - f(x)]}{y - x},$$

d'où suit, à nouveau par le Théorème de l'étau, que $\lim_{y^-} f = f(y)$, et que f est continue à gauche en y .

Ces inégalités signifient que, pour les abscisses comprises entre x et z , le graphe de f se trouve dans les secteurs non ombrés de la figure ??, limités par les droites déterminées l'une par $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ et l'autre par $(y, f(y))$ et $(z, f(z))$.

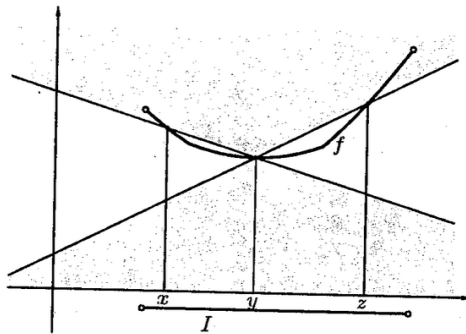


Figure 2 : Inégalités utilisées pour la CN

b) La condition est suffisante.

Procédons par l'absurde : supposons qu'il existe $x, y \in I$ ($x < y$) et $\lambda \in]0; 1[$ tels que $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Soit

$$\mu = \sup\{l \in]0; \lambda[: f(lx + (1 - l)y) \leq lf(x) + (1 - l)f(y)\}$$

et $u = \mu x + (1 - \mu)y$; alors, $f(u) = f(\mu x + (1 - \mu)y) = \mu f(x) + (1 - \mu)f(y)$, car $f(\mu x + (1 - \mu)y) \leq \mu f(x) + (1 - \mu)f(y)$ par conservation des inégalités par passage au suprémum, et si on avait $f(\mu x + (1 - \mu)y) < \mu f(x) + (1 - \mu)f(y)$, la continuité de f entraînerait que $f(lx + (1 - l)y) < lf(x) + (1 - l)f(y)$ pour tout l dans un voisinage de μ , et ce dernier ne serait pas suprémum.

Le même argument montre que $\mu < \lambda$. De la même façon, si

$$\nu = \inf\{l \in]0; \lambda[1 : f(lx + (1-l)y) \leq lf(x) + (1-l)f(y)\}$$

et $v = \nu x + (1-\nu)y$, on a, comme ci-dessus, $\nu > \lambda$ et $f(v) = \nu f(x) + (1-\nu)f(y)$. Dans ces conditions, $f(lx + (1-l)y) > lf(x) + (1-l)f(y)$ pour tout $l \in]\mu; \nu[$.

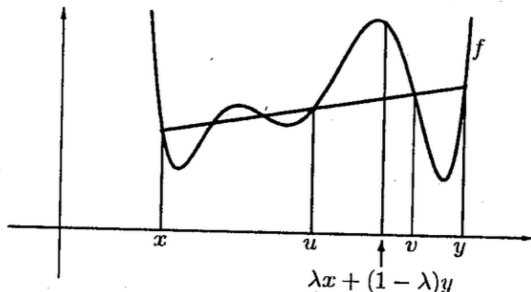


Figure 3 : Démonstration par l'absurde de la CS

Or, par hypothèse, il existe $\lambda^* \in]0; 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(\lambda^* u + (1-\lambda^*)v) &\leq \lambda^* f(u) + (1-\lambda^*)f(v) \\ &= \lambda^*(\mu f(x) + (1-\mu)f(y)) + (1-\lambda^*)(\nu f(x) + (1-\nu)f(y)) \\ &= \Lambda f(x) + (1-\Lambda)f(y) \end{aligned}$$

si $\Lambda = \lambda^* \mu + (1-\lambda^*)\nu$; mais

$$\begin{aligned} \lambda^* u + (1-\lambda^*)v &= \lambda^*(\mu x + (1-\mu)y) + (1-\lambda^*)(\nu x + (1-\nu)y) = \Lambda x + (1-\Lambda)y ; \end{aligned}$$

comme $\Lambda \in]\mu; \nu[$, ceci contredit la conclusion du dernier alinéa. ■

REMARQUES :

1. En fait, on peut montrer sans difficulté qu'une fonction convexe sur un intervalle ouvert bénéficie de propriétés meilleures que la continuité : elle possède en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite. En revanche, sur un intervalle fermé (ou semi-fermé), même

la continuité n'est pas assurée, comme le montre l'exemple de la figure ???. On (re)lira, à ce sujet, les récents articles [1] et [2]. Il nous a cependant semblé que démontrer directement la continuité d'une fonction convexe sur un intervalle ouvert, plutôt que de la déduire comme sous-produit de sa dérivabilité à gauche et à droite, n'était pas dénué d'intérêt.

2. La condition (2) de la Proposition est une version affaiblie de la J -convexité de f sur I , puisque par un simple jeu sur les quantificateurs,

$$\begin{aligned}
 (\forall x, y \in I) f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) &\leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \\
 \Rightarrow (\exists \lambda \in]0; 1[) (\forall x, y \in I) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
 &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\
 \Rightarrow (\forall x, y \in I) (\exists \lambda \in]0; 1[) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
 &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).
 \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Jacques BAIR, Gentiane HAESBROECK, *Variations autour de la définition des fonctions convexes*, Mathématique et Pédagogie **105** (1996), 57–70 et **106** (1996), 27–41.
- [2] Jacques BAIR, Guillermo HANSEN, *Propriétés différentielles des fonctions convexes*, Mathématique et Pédagogie **167** (1996), 47–60.
- [3] Jacques DOUCHET, Bruno ZWAHLEN, *Calcul différentiel et intégral, 1 — Fonctions d'une variable réelle*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1983.

Adresse de l'auteur :

Pascal DUPONT,
 Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux,
 U.E.R. de Mathématique,
 Passage des Déportés 2

5030 Gembloux

Courrier électronique : dupont@fsagx.ac.be

Les chaînes magiques

J.-L. Marichal, Université de Liège

1. Position du problème

Voici un problème que je propose :

Inscrire dans chacune des n cases du tableau ci-dessous un nombre entier positif de telle sorte que le nombre figurant dans la case qui porte le numéro '0' représente la quantité totale de nombres '0' inscrits dans le tableau, le nombre figurant dans la case qui porte le numéro '1' représente la quantité totale de nombres '1', et ainsi de suite jusqu'à la dernière case.

0	1	2	$n - 1$

Ainsi par exemple, si $n = 8$, une solution possible s'écrira

0	1	2	3	4	5	6	7
4	2	1	0	1	0	0	0

En effet, dans ce tableau, il y a 4 fois le nombre '0', 2 fois le nombre '1', une fois le '2', pas de '3', une fois le '4', pas de '5', pas de '6' et pas de '7'.

2. Résolution

Soient $n \in N_0$ et $I_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Supposons que le n -uplet $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ représente une solution du problème, x_k ($k \in I_n$) désignant le nombre contenu dans la case qui porte le numéro 'k'.

D'une part, il est clair que

$$x_k \in I_n \quad \forall k \in I_n. \tag{1}$$

On voit alors aisément qu'aucune solution ne peut être obtenue pour $n = 1, 2$ ou 3. Nous supposons donc, dans la suite, que $n \geq 4$.

D'autre part, puisque, pour tout $k \in I_n$, x_k représente le nombre de ' k ' inscrits dans le tableau, on peut immédiatement constater que la somme des x_k représente le nombre total de cases :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = n. \quad (2)$$

De plus, la somme des nombres inscrits dans le tableau peut s'obtenir en additionnant d'abord tous les ' 0 ' (il y en a x_0), puis tous les ' 1 ' (il y en a x_1), et ainsi de suite jusqu'aux ' $n - 1$ '. On obtient alors

$$x_0 * 0 + x_1 * 1 + \cdots + x_{n-1} * (n - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} kx_k,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n-1} kx_k = n. \quad (3)$$

Dès lors, de (2) et (3), on déduit

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n-1} (k - 1)x_k, \quad (4)$$

et nous pouvons alors nous intéresser aux valeurs que peut prendre x_0 .

De (1) et de la définition de x_0 , on déduit immédiatement $x_0 \geq 1$. Supposons alors $x_0 = p$ ($p \geq 1$). Par définition de x_p , on a $x_p \geq 1$. Dès lors, de (4), on déduit

$$p \geq (p - 1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n-1} (k - 1)x_k$$

ou encore

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n-1} (k - 1)x_k \leq 1. \quad (5)$$

Vu (1), ceci implique

$$x_k = 0 \quad \forall k \in I_n \setminus \{0, 1, 2, p\}. \quad (6)$$

Trois cas sont alors à envisager :

-
-
- Si $p = 1$ alors on a un seul zéro dans le tableau et, vu (6), on a nécessairement $n = 4$. De (4), on tire $x_2 = 1$, et de (3), $x_1 = 2$. D'où la solution $(1,2,1,0)$.
 - Si $p = 2$ alors on a deux zéros dans le tableau et, vu (6), on a nécessairement $4 \leq n \leq 5$. De (4), on tire $x_2 = 2$, et x_1 est alors donné par (3). D'où les solutions $(2,0,2,0)$ et $(2,1,2,0,0)$.
 - Si $p \geq 3$ alors, vu (6), il y a au moins $(n - 4)$ zéros dans le tableau et donc $p = x_0 \geq n - 4$. Si on avait $x_p \geq 2$, alors, de (4), on aurait

$$p = x_2 + (p - 1)x_p \geq x_2 + 2p - 2$$

impliquant $2 \geq x_2 + p \geq x_2 + 3$, une contradiction.

On a donc $x_p = 1$ et, de (4), on tire $x_2 = 1$. Par définition de x_1 , on a alors $x_1 \geq 2$. Mais si on avait $x_1 \geq 3$ alors, de (2), on aurait

$$n = p + x_1 + 2 \geq (n - 4) + 5 = n + 1,$$

ce qui est impossible. On a donc $x_1 = 2$ et, de (2), on a $n = p + 4 \geq 7$. D'où la solution $(n - 4, 2, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0)$ pour chaque $n \geq 7$.

La résolution complète du problème se résume donc comme suit :

- $n = 1, 2, 3$: pas de solution ;
- $n = 4$: deux solutions $(1,2,1,0)$ et $(2,0,2,0)$;
- $n = 5$: une solution $(2,1,2,0,0)$;
- $n = 6$: pas de solution ;
- $n \geq 7$: une solution $(n - 4, 2, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0)$.

* * *

Adresse de l'auteur :

Jean-Luc MARICHAL

Ecole d'Administration des Affaires,

Université de Liège,

Boulevard du Rectorat 7 - B31,

B-4000 Liège, Belgique.

Fonctions, extremums et Cabri II

S. Courtois et F. Denis, *Inspecteurs honoraires*

Introduction

Cet article illustre l'idée de faire précéder l'étude de notions théoriques par des exemples :

a) Graphiques de paraboles et d'hyperboles

Un choix judicieux de transformations géométriques ponctuelles (dans un repère fixe) : homothéties, affinités (étirements), translations appliquent le graphique de $y = x^2$ (respectivement $y = 1/x$) sur celui de $y = ax^2 + bx + c$ ($y = (ax + b)/(cx + d)$).

On exprime aussi les effets de ces transformations sur les coordonnées des points.

Il s'en dégage l'intérêt des affinités.

b) Problèmes d'extremums à caractère géométrique.

Le logiciel

Les graphiques sont tracés par le logiciel géométrique CABRI II, mais l'article peut se lire sans y recourir.

"Cabri II" construit ici les graphiques point par point, comme lieu géométrique, en utilisant l'article "lieu" du menu ou une macro.

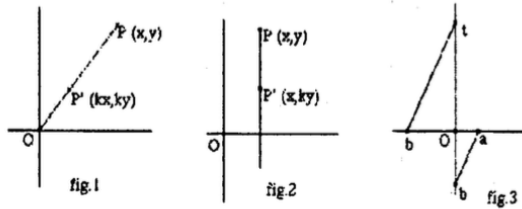
Certaines des constructions qui figurent ci-dessous ont été traitées avec Cabri géomètre depuis plusieurs années mais Cabri II en facilite beaucoup la réalisation et s'avère un outil nettement plus performant.

La transformation utilisée avec le logiciel est essentiellement l'homothétie. Elle apparaît sous divers aspects :

- l'homothétie classique du plan, centrée en O (fig. 1) ;
- l'homothétie d'une droite. Elle permet de construire l'affinité du plan d'axe Ox , de direction Oy et de rapport k (étirement) sur chaque droite parallèle à Oy (fig. 2).

La proportionnalité liée à la configuration de Thalès présente sous forme d'une troisième proportionnelle et d'une quatrième proportionnelle. La troisième proportionnelle t aux nombres a et b s'obtient à partir de :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{t} \text{ soit } t = \frac{b^2}{a} \quad (\text{fig. 3})$$



1. Parabole d'équation $y = x^2$

x étant l'abscisse d'un point M mobile sur l'axe Ox (commande "point sur objet").

Soit P le point de coordonnées (x, x^2) , on peut déterminer l'ordonnée y de ce point en appliquant la construction d'une troisième proportionnelle.

En effet : $y = x^2$ équivaut à $\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{x}{y} & \text{lorsque } x \neq 0 \\ y = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

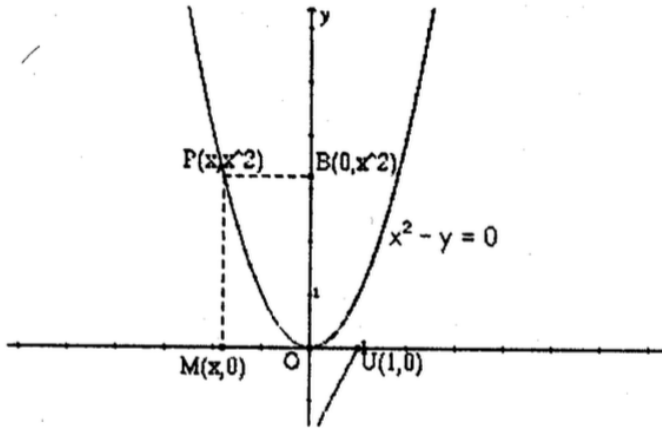


fig. 4

A est le symétrique du point $M(x, 0)$ par rapport à $y = x$,
 $|OA| = |x|$, $|OB| = x^2$.

Lorsque M varie sur Ox , le lieu de P est la parabole d'équation $y = x^2$
(fig. 4).

2. Paraboles d'équation $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

On peut, par exemple, construire $y = 0.25x^2$ selon le modèle ci-dessus
à partir de

$$\frac{1}{0.5x} = \frac{0.5x}{y}.$$

Mais on peut aussi l'obtenir comme transformée de la parabole $y = x^2$
par :

- l'homothétie de centre 0 et de rapport 4,
- l'étirement d'axe Ox , de direction Oy et de rapport 0.25,
- l'étirement d'axe Oy , de direction Ox et de rapport 4.

On étudie les deux premières, qui présentent plus d'intérêt ici.

a) Par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 4$, la parabole d'équation $y = x^2$ a comme image (G') d'équation $y = 0.25x^2$ (fig. 5).

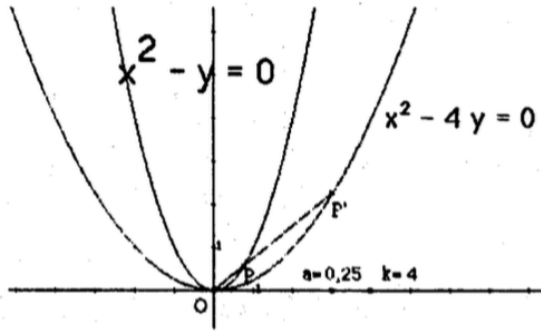


fig.5

Après cet exemple, démontrons que G' d'équation $y = ax^2$ (a non nul) est homothétique à la parabole d'équation $y = x^2$.

$y = mx$, droite quelconque issue de O , coupe $y = x^2$ en P de coordonnées (m, m^2) .

$y = mx$ coupe $y = ax^2$ en P' de coordonnées $\left(\frac{m}{a}, \frac{m^2}{a}\right) = \frac{1}{a}(m, m^2)$.

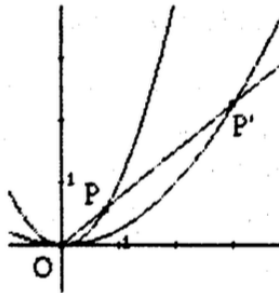


fig.6

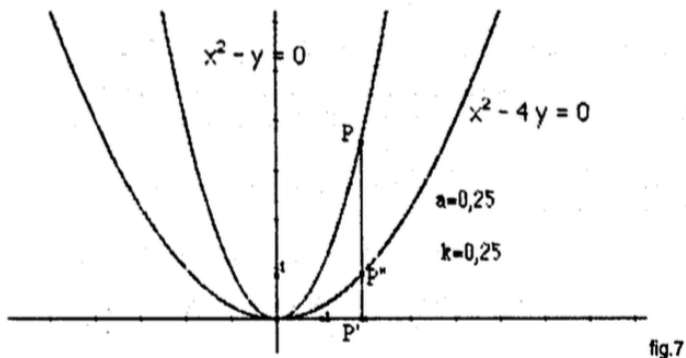
Ce qui montre que $y = ax^2$ est une parabole homothétique (semblable) à la parabole d'équation $y = x^2$ dans le rapport $1/a$.

b) Par l'affinité (étirement) d'axe Ox , de direction Oy et de rapport 0.25.

P est un point de la parabole d'équation $y = x^2$ et P' sa projection sur Ox , parallèlement à Oy .

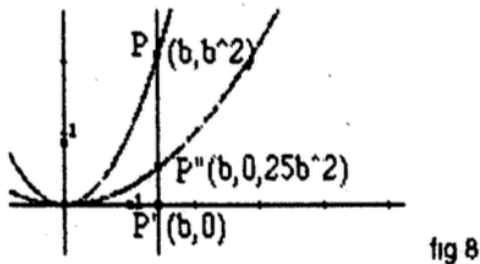
P'' est l'image de P par l'homothétie de centre P' et de rapport 0.25 (cette homothétie de la droite PP' est la restriction à cette droite de l'étirement considéré - voir fig.2, page 1).

L'image de la parabole d'équation $y = x^2$ s'obtient comme lieu géométrique du point P'' quand P décrit cette parabole et PP' la direction de droites parallèles à Oy .



L'homothétie et l'affinité appliquent $y = x^2$ globalement sur la même image $y = ax^2$, mais elle le font de deux manières différentes.

En effet, dans le cas de l'étirement, la droite d'équation $x = b$ coupe $y = x^2$ en $P(b, b^2)$ et coupe $y = 0.25x^2$ en $P''(b, 0.25b^2)$.



3. Parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$

La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la composée d'une translation et d'une homothétie ou d'une translation et d'un étirement.

Montrons-le sur un exemple. Soit $y = 5x^2 + 34x + 60$.

Cette équation peut s'écrire $y - 2.2 = 5(x + 3.4)^2$.

En effet : $y = 5x^2 + 34x + 60$ équivaut à $y = 5\left(x^2 + \frac{34}{5}x + \frac{60}{5}\right)$
ou $y = 5\left(x + \frac{17}{5}\right)^2 + \frac{11}{5}$
ou $y - \frac{11}{5} = 5\left(x + \frac{17}{5}\right)^2$

Traisons d'abord cet exemple avec Cabri II.

A $y = x^2$, appliquons successivement la translation de vecteur $(-3.4; 2.2)$ et l'étirement d'axe $y = 2.2$, de direction Oy et de rapport 5.

Le logiciel fournit le graphique ci-contre et l'équation attendue $y = 5x^2 + 34x + 60$.

Il fournit aussi les coordonnées des images du point P :

$$P(1.24; 1.53) \rightarrow P'(-2.16; 3.73) \rightarrow P''(-2.16; 9.86).$$

En appliquant d'abord l'étirement d'axe $y = 0$ et puis la translation $(-3.4; 2.2)$; le logiciel fournit encore l'équation attendue ainsi que les coordonnées :

$$P(1.24; 1.53) \rightarrow P1(1.24; 7.66) \rightarrow P''(-2.16; 9.86).$$

Notons que les coordonnées de P'' correspondent à $(1.24 - 3.4; 5 \times 1.53 + 2.2)$.

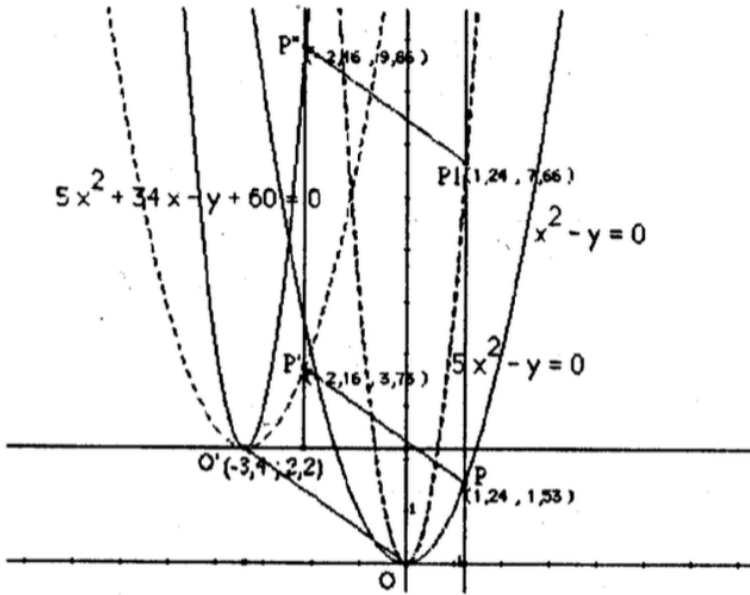
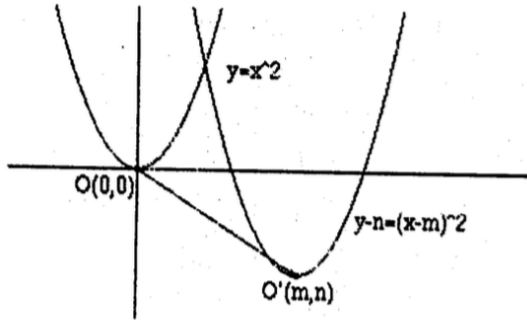


fig.9

Etudions l'effet d'une translation sur la parabole d'équation $y = x^2$.

Quels que soient les paramètres m et n , l'image d'un point $P(x, x^2)$ de cette parabole par la translation de vecteur (m, n) est le point $P'(x + m, y + n)$ et l'équation de la parabole image de $y = x^2$ est $y - n = (x - m)^2$.



Voyons ensuite l'effet de la composée de la translation de vecteur $(-3.4; 2.2)$ et de l'étirement d'axe $y - 2.2 = 0$, de direction $x = 0$ et de rapport 5.

Le translaté P' d'un point $P(x, x^2)$ de la parabole d'équation $y = x^2$ a pour coordonnées

$$(x - 3.4; x^2 + 2.2) = (x - 3.4; [(x - 3.4) + 3.4]^2 + 2.2)$$

et l'image de P' par l'étirement est le point P'' de coordonnées

$$(x - 3.4; 5x^2 + 2.2) = (x - 3.4; 5[(x^2 + 2.2) - 2.2] + 2.2).$$

Les points P' appartiennent à la parabole d'équation $y - 2.2 = (x + 3.4)^2$ et les points P'' à la parabole d'équation $y - 2.2 = 5(x + 3.4)^2$.

On peut aussi composer l'étirement d'axe $y = 0$, de direction $x = 0$, de rapport 5 et la translation de vecteur $(-3.4; 2.2)$.

$P(x, x^2)$ a pour image $P_1(x, 5x^2)$ par l'étirement et P_1 a pour image $P''(x - 3.4; 5x^2 + 2.2)$ par la translation.

Les équations des paraboles correspondantes sont $y = 5x^2$ et $y - 2.2 = 5(x + 3.4)^2$.

Ces résultats correspondent à ceux fournis par Cabri II.

On notera qu'il est plus simple d'appliquer l'affinité d'abord et puis la translation.

Généralisons ce dernier cas : par l'étirement d'axe $y = 0$, de direction $x = 0$ et de rapport a suivi de la translation de vecteur (m, n) , $P(x, x^2)$ a successivement pour image $P1(x, ax^2)$ et $P''(x + m, ax^2 + n)$.

Les équations des paraboles images correspondantes sont :

$$y = ax^2 \text{ et } y - n = a(x - m)^2.$$

4. Hyperbole d'équation $xy = 1$

On peut construire le graphique avec Cabri II de la manière suivante :

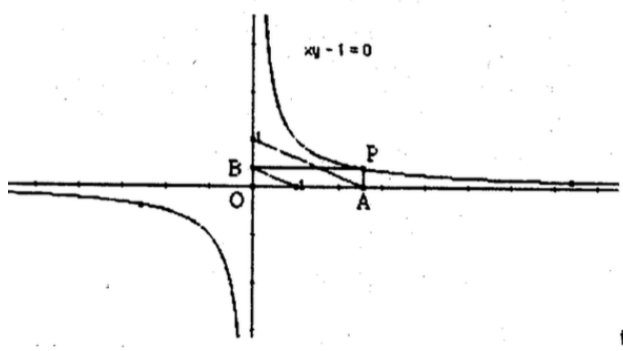


fig.10

x étant l'abscisse du point A , l'ordonnée de B est égale à $1 : x$.

Le lieu de P lorsque le point A décrit Ox est l'hyperbole d'équation $xy = 1$.

5. Hyperbole d'équation $xy = a$ ($a \neq 0$)

5.1. Lorsque a est strictement positif, l'hyperbole d'équation $xy = a$ peut être considérée comme l'image de l'hyperbole d'équation $xy = 1$ par l'homothétie de centre 0 et de rapport $k = \sqrt{a}$.

Exemple : hyperbole d'équation $xy = 4$.

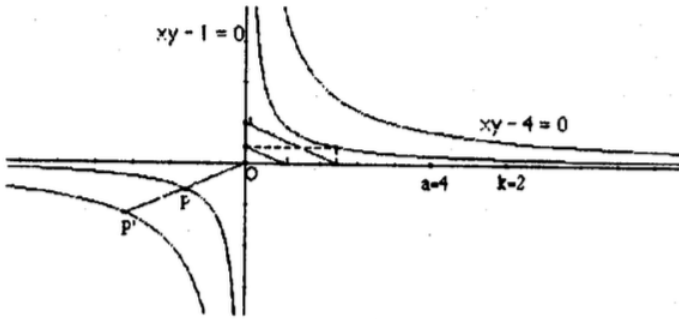


fig.11

L'hyperbole d'équation $xy = 4$ est l'image de l'hyperbole d'équation $xy = 1$ par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2$.

5.2. Lorsque a est strictement négatif, il faut chercher l'image de $xy = 1$ par la composée de l'homothétie de centre O et de rapport $k = \sqrt{|a|}$ avec la symétrie orthogonale d'axe Ox (ou Oy) pour obtenir l'hyperbole d'équation $xy = a$.

Exemple : hyperbole d'équation $xy = -5$ (fig. 12).

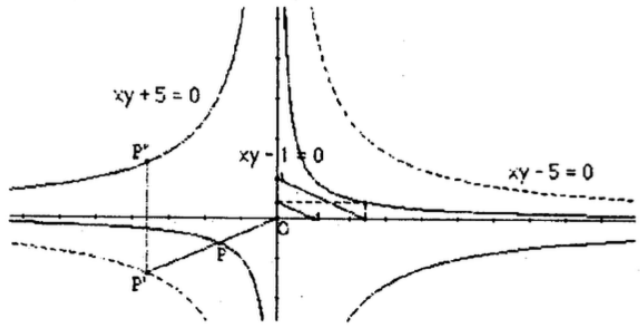


fig.12

P'' est l'image de P par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{5}$ et P'' est l'image de P' par la symétrie orthogonale d'axe Ox .

5.3. Par contre, si on cherche l'image de l'hyperbole d'équation $xy = 1$ par l'étirement d'axe Ox , de direction Oy et de rapport $k = a$, on obtient l'hyperbole d'équation $xy = a$ quel que soit $a \neq 0$. **Il est donc judicieux de privilégier l'utilisation d'affinités**, d'autant plus que toutes les hyperboles ne sont pas semblables alors que les paraboles le sont.

Exemple : hyperbole d'équation $xy = -3$.

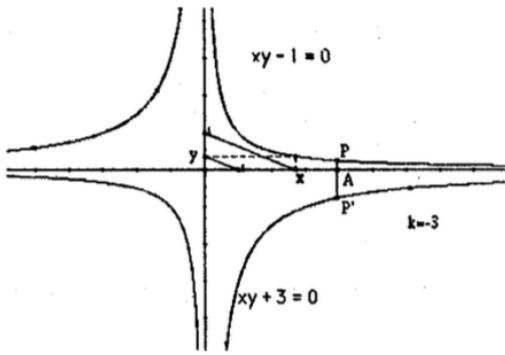


fig.13

6. Hyperbole d'équation $2xy + 5x + 3y - 1 = 0$

Cette équation peut s'écrire :

$$y + \frac{5}{2} = \frac{\frac{17}{4}}{x + \frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{3}{2}\right) \left(y + \frac{5}{2}\right) = \frac{17}{4}.$$

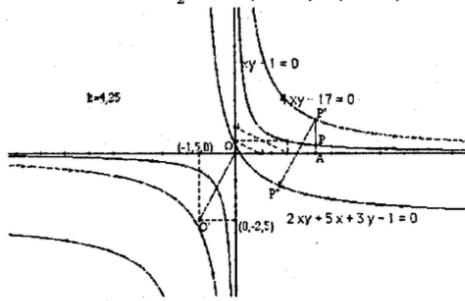


fig.14

L'hyperbole d'équation $2xy + 5x + 3y - 1 = 0$ est l'image de l'hyperbole d'équation $xy = 1$ par la composée de l'étirement d'axe $y = 0$, de direction $x = 0$, de rapport $\frac{17}{4}$ et de la translation de vecteur $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$.

Aux sections 3 et 6, on a écrit l'équation de la courbe sous la forme

$$y - c = af(x - b).$$

Pour tracer cette courbe, on a appliqué à la courbe d'équation $y = f(x)$, l'affinité d'axe $y = 0$, de direction $x = 0$, de rapport a suivie de la translation de vecteur (b, c) **ou** la translation de vecteur (b, c) suivie de l'affinité d'axe $y - c = 0$, de direction $x - b = 0$ et de rapport a .

7. Exemples de recherche d'extremums

7.1. Le périmètre d'un triangle ABC est de 14 cm. L'un des côtés mesure 6 cm. Déterminer la longueur des deux autres côtés pour que la surface soit maximale.

Le point A est l'origine des axes et B , le point d'abscisse 6.

D étant le point d'abscisse 8 (somme des mesures des côtés $[AC]$ et $[BC]$) et X un point du segment $[AD]$, on considère que $|AX| = |AC|$ et que $|XD| = |BC|$.

A chaque position du point X tel que $|AX|$, $|XD|$ et $|AB|$ satisfont aux inégalités triangulaires, correspond un point C , sommet du triangle ABC .

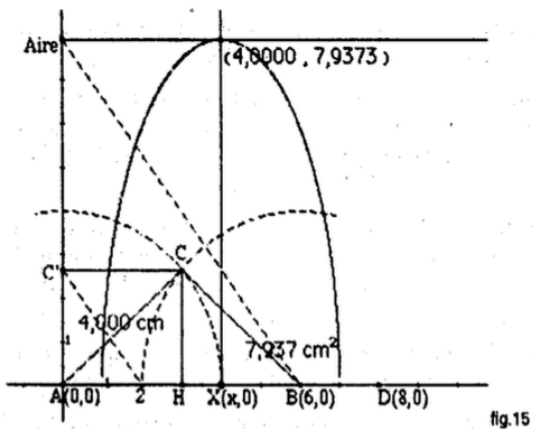
Ce point C est un des points d'intersection du cercle de centre A et de rayon $|AX| = |AC|$ et du cercle de centre B et de rayon $|XD| = |BC|$.

Soit $|CH|$ la hauteur relative au côté AB du triangle ABC .

L'aire de ce triangle est égale à $0.5 |AB| |CH|$ ce qui peut s'écrire :

$$\frac{2}{|CH|} = \frac{|AB|}{\text{Aire}}$$

Une construction de quatrième proportionnelle permet donc de visualiser les variations de l'aire et de déterminer la position du point X sur $[AD]$ qui rend cette aire maximale.



On constate que l'aire est maximale lorsque le triangle ACB est isocèle, ce qui correspond au résultat que donne l'application de la formule de HERON :

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{7(x-1)(7-x)1}$$

où $x = |AC|$, maximum pour $x = 4$.

7.2. Aux quatre coins d'un carton rectangulaire de dimensions $6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$, on découpe des carrés isométriques de côté x , par pliage, on obtient ainsi une boîte sans couvercle. Déterminer x de telle manière que le volume de la boîte soit maximum.

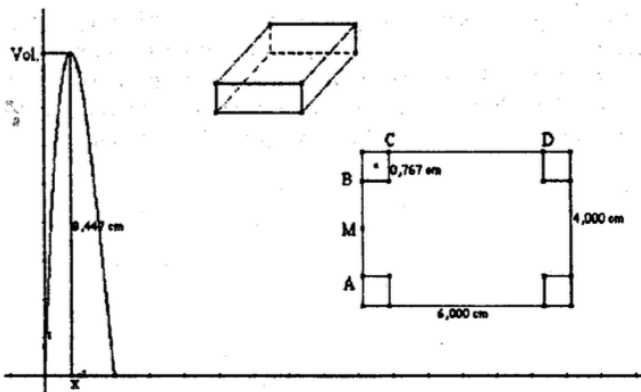


fig.16

B est le point dont le déplacement va déterminer le tracé des carrés et la position du point d'abscisse x sur l'axe Ox .

Etant donné que le volume de la boîte est égal au produit $x|AB||CD|$, l'ordonnée correspondant au point d'abscisse x s'obtient en construisant successivement z quatrième proportionnelle à 1, x et $|AB|$ puis y quatrième proportionnelle à 1, z et $|CD|$.

Par le calcul, on obtient 8.45 comme volume maximum correspondant à une valeur de x égale à 0.785. Les résultats obtenus graphiquement sont très proches, la différence étant liée aux pixels qui conduisent à passer de 0.767 à 0.8.

Remarque : la représentation de la boîte en perspective correspond à la position du point B et varie avec celle-ci lorsqu'on utilise le logiciel.

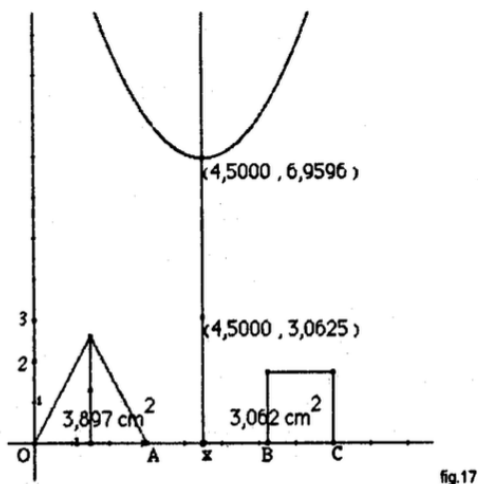
7.3. La somme des périmètres d'un triangle équilatéral et d'un carré est donnée. Déterminer les mesures des côtés pour que la somme des aires soit minimale.

Remarque : cet exercice est traité avec Cabri II en envisageant que la somme des périmètres est 16 mais les constructions résistent aux modifications de cette somme.

C est le point d'abscisse 8 (8 est la demi-somme des périmètres). On considère un point d'abscisse x appartenant à $[OC]$ et on détermine le point A de Ox tel que $|OA| = \frac{2}{3}x$ et le point B de Ox tel que $|BC| = 0.5(8 - x)$.

Le triangle équilatéral de côté $[OA]$ et le carré de côté $[BC]$ sont tels que la somme de leurs périmètres est égale à 16.

Il suffit de déterminer l'ordonnée du point d'abscisse x qui correspond à la somme des aires de ces deux figures en utilisant la même technique que celle qui a été utilisée lors de la résolution des exercices précédents et de chercher le lieu du point (x, y) lorsque x varie pour pouvoir déterminer graphiquement une valeur de x qui correspond à un minimum de y .



Par le calcul, on trouve $x = 4.52076$ et $y = 6.9594$. La précision est donc satisfaisante, bien qu'elle soit, de nouveau, limitée par le nombre de pixels.

En fait, il faut que le rapport des côtés du triangle équilatéral et du carré soit égal à $\sqrt{3}$.

Adresse des auteurs :

Francis DENIS
rue Duchêne 9
4120 NEUPRE

Sylvain COURTOIS
rue de Racour 83
3400 LANDEN

Des programmes et des problèmes, en France et ailleurs

G. Noël,

C'était en 1984. L'APMEP (Association Française des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) publiait un document intitulé "Dix problématiques", [1], consacré aux programmes du premier cycle ⁽¹⁾, et le présentait comme suit :

En matière de programmes du premier cycle, nous refusons de faire seulement une liste de contenus, ou seulement une liste d'objectifs généraux et spécifiques, ou deux listes sans liens entre elles. Nous avons donc essayé de composer ces deux volets, en les associant à travers un ensemble de problématiques.

Elles cherchent à intégrer, sans intention planificatrice, à la fois :

- l'essentiel des objectifs de toute nature (connaissances, démarches, processus, comportements, habileté technique) ;*
- des contenus mathématiques susceptibles d'atteindre ces objectifs à travers des activités.*

[...] il n'existe pas de correspondance bijective entre une liste d'objectifs et une liste de contenus. On voit ainsi la distance que nous prenons par rapport à la suite des notions figurant dans les programmes traditionnels et le découpage par classe.

[...]

Le document énumérait alors les dix problématiques retenues :

- 1. Repérage dans le plan et sur la sphère*
- 2. Traçage et étude de certaines configurations planes ou spatiales. Utilisation des instruments de traçage et de mesurage.*
- 3. Etude de certaines transformations applicables à des configurations. Examen de leurs invariants : anticipation de leurs effets.*
- 4. Equations et inéquations. Résolution de problèmes.*
- 5. Techniques calculatoires.*
- 6. Passage d'un langage à un autre.*

1. Rappelons que le premier cycle français, le collège, comporte 4 ans, de la 6^{ième} à la 3^{ième}. Le second cycle, le lycée, comprend 3 années : seconde, première et terminale. La 6^{ième} correspond à la sixième primaire belge.

-
-
7. *Familiarisation avec des outils de communication et de traitement de l'information du monde contemporain.*
 8. *Traitement et représentation de données statistiques.*
 9. *Choix optimal des outils et des méthodes.*
 10. *Conjectures et démonstrations.*

Enfin, le document poursuivait :

Il n'est pas possible d'isoler les problématiques les unes des autres, ni de traiter chacune pour elle-même.

Pour chaque problématique, nous proposons :

1. *Des objectifs spécifiques.*
2. *Un choix d'activités [...] ni contraignant, ni exhaustif. [...]*
3. *Un "noyau" de savoirs et de savoir-faire minimaux [...]*
4. *Les "contenus" correspondant aux activités et au noyau. [...]*
5. *Quelques commentaires.*

On aura remarqué dans ce qui précède une caractéristique des nouveaux programmes belges-francophones du premier degré : la distinction entre noyau et activités. La nature du noyau est ici très claire : il est constitué des savoirs et savoir-faire minimaux que tout élève devrait avoir acquis solidement et durablement. Le rôle des activités n'est pas défini explicitement, mais on comprend sans peine qu'elles servent à ... rendre l'élève actif. Elles sont généralement liées au noyau, en introduisant, en illustrant ou en renforçant un sujet. Mais le choix proposé n'est *ni contraignant, ni exhaustif*. Dans l'esprit des auteurs du texte, l'enseignant conserve donc une grande liberté.

Dans ce texte de 1984, l'APMEP demandait aussi que tout changement de programme soit, avant d'être promulgué, soumis à une expérimentation d'au moins deux années scolaires, menée avec rigueur et prise en compte quant aux modifications qu'elle suggérerait.

En 1995, l'APMEP a récidivé, publiant un second document, [2], consacré principalement au second cycle, mais précisant aussi la philosophie sous-jacente à la mise en place de problématiques. Les auteurs, se référant d'abord au document de 1984, notent que

les programmes actuels du collège s'en sont largement inspirés, en introduisant davantage de cohérence entre les contenus et les

méthodes, en clarifiant les objectifs et en donnant plus de sens aux notions étudiées. Les pratiques pédagogiques ont évolué, les échecs ont diminué, enfin l'image des mathématiques a été revvalorisée.

Se basant sur ces constatations, ils ont voulu, comme au premier cycle, approcher les contenus d'enseignement du lycée par des problématiques. Leurs réflexions les ont amenés à en dresser pour le second cycle une liste qui se révèle identique à celle du premier (à quelques détails près). Cela ne veut pas dire que ce sont les mêmes problèmes que l'on rencontrera, ni que la méthodologie sera identique. Il est clair, par exemple, que l'on ne traitera pas des données statistiques de la même façon à 12 ans ou à 17 ans. Mais nous ne pouvons ici rentrer dans les détails. Intéressons-nous plutôt à la philosophie sous-jacente, indépendante du cycle d'études. Le mieux est de reproduire quelques extraits — que l'on espère représentatifs — de [2] :

Il ne paraît pas illégitime de se poser la question sur la façon dont les programmes de mathématiques sont construits, commentés, traduits et opérationnalisés. Une approche traditionnelle, essentiellement centrée sur les contenus, peut satisfaire l'enseignant mathématicien, [...]. La linéarisation de leur écriture traduit l'idéologie et l'utopie d'une discipline autonome et unitaire, ainsi que le mythe d'une théorie de l'apprentissage comme processus cumulatif. La cohérence des programmes puise sa légitimité dans l'organisation rationnelle des contenus, organisation conduite selon des critères épistémologiques du mathématicien et non de ses "apprentis". Ce ne sont pas, alors, les commentaires visant à expliciter cette légitimité, qui suffiront à conférer à ces programmes la signification qui leur manque. Ce ne sont pas non plus les "modes d'emploi", les conseils méthodologiques artificiellement adjoints, comme ceux dont nous gratifions les "donneurs de leçons", qui y parviendront. Ce ne sont pas les exhortations à comprendre les mathématiques, les adjurations à reconnaître leur fonction première dans le développement de l'esprit scientifique, leur nécessité incontournable à l'octroi d'une certaine scientificité aux autres disciplines, qui permettront de donner aux contenus enseignés la puissance qui les rend opératoires. Ce ne sont pas ces gesticulations qui feront de l'activité mathématique autre chose qu'une agitation verbale [...].

Les difficultés, voire les échecs, dans le cadre et la contrainte d'une pédagogie de masse, nécessitent une approche différente.

Les auteurs évoquent alors l'évolution postérieure à 1984 des programmes du premier cycle :

[...] [A la suite du travail de l'APMEP sur les problématiques depuis 1982], il semble qu'une nouvelle cohérence ait été introduite dans l'énoncé des programmes [du premier cycle], cohérence qui prendrait en compte, non seulement les contenus et les méthodes, mais aussi

- les objectifs spécifiques des mathématiques pour des élèves de 11 à 15 ans, objectifs induits par les attentes et les besoins pluridisciplinaires, professionnels, quotidiens, se conciliant avec les finalités culturelles de l'école (contribuer à la formation triple : l'homme, le citoyen, le travailleur) ;
- le sens que ces besoins et ces attentes entretiennent entre eux relativement aux notions enseignées, aux démarches, aux conduites développées, sens que les élèves sont susceptibles de leur attribuer ;
- la fonction épistémologique des notions et des démarches que celles-ci doivent assurer, en particulier dans le développement de l'esprit scientifique et la fourniture de modèles ;
- des activités à travers des situations qui favorisent la mise en cohérence dans des contextes variés.

La brochure de l'APMEP analyse ensuite la question du **sens** que doivent acquérir les contenus mathématiques, estimant que ce sens n'est alimenté et activé qu'à la faveur de questions que se posent ou peuvent se poser les élèves à partir de problèmes reconnus authentiques par eux, ni évidents, ni trop complexes.

C'est dans un champ de contraintes et de nécessités que la construction d'une connaissance, comme solution d'un problème, peut apparaître justifiée et intégrable.

- la résolution d'une inéquation, voire d'un système d'inéquations, prend son sens et sa fonction dans le cadre de la recherche de valeurs conduisant à l'optimisation d'une relation entre différentes variables numériques ;
- des limites d'incertitude sur des valeurs d'une grandeur à partir de la donnée de l'incertitude sur une autre (ou plusieurs) qui la détermine(nt) permettent de donner du sens à la continuité ;

-
-
- l'observation de régularités dans des situations aléatoires conduit à la notion de probabilité;

...

Les auteurs exposent aussi quelles composantes didactiques doivent constituer les situations–problèmes :

- partir du questionnement d'une situation, en inscrivant son sens avec une perspective théorique, conjecturer une réponse, la formuler sous forme d'hypothèse [...];
- modéliser [...];
- traiter la situation formelle, éventuellement changer de cadre de résolution ou de registre d'expression, mettre en place de nouveaux outils;
- interpréter les réponses et résultats obtenus et donc restituer du sens; éventuellement réfuter une hypothèse, revenir sur la modélisation et la formalisation choisies;
- participer à leur institutionnalisation [au sein de la classe] ⁽²⁾
- expliquer, généraliser, anticiper, prévoir dans des situations comparables et donc élargir le sens du questionnement initial;

Pour résumer le point de vue développé dans [2], citons encore la phrase suivante :

L'approche par les problématiques va consister à identifier les grandes classes de situations–problèmes susceptibles de conduire à la génération des contenus plus ou moins traditionnels.

On aura trouvé dans ce qui précède de nombreux points communs avec des points de vue développés par la SBPMef. Celle-ci s'est prononcée depuis longtemps en faveur d'une pédagogie des situations qui a pour but de susciter l'activité des élèves et de donner du sens aux contenus mathématiques enseignés. La description des composantes des situations–problèmes reproduite ci-dessus correspond à ce que la SBPMef a appelé la *méthode axiomatique* dans son document consacré à la philosophie de l'enseignement des mathématiques, [3].

Mais les documents publiés par l'APMEP vont plus loin en mettant plus radicalement en cause la conception des programmes en termes de contenus. Ils constituent un important élément de réflexion, parmi d'autres, sur la façon de concevoir un programme de mathématique et de l'opérationnaliser,

2. c'est-à-dire fixer les résultats sous une forme acceptée par l'ensemble de la classe de façon à permettre leur utilisation ultérieure

c'est-à-dire d'en organiser l'enseignement. Parmi les documents récents, nous pourrions également citer les *Standards* publié par notre association-soeur américaine, le *National Council of Teachers of Mathematics*, [4]. Le *Cadre global pour l'enseignement des mathématiques* publié par le CREM, [5], mérite également d'être lu, ou relu, dans la même optique.

Beaucoup de travail reste à réaliser. Constituer une banque de situations-problèmes valables ne sera pas facile. Apprendre à s'en servir (ou à ne pas s'en servir), modifier les méthodologies usuelles, ne le seront pas plus. Au delà des difficultés, et quelle que soit l'évolution future des programmes, nous pouvons dès à présent affirmer qu'un changement fondamental a débuté. Nous passons progressivement d'une situation où l'attention était concentrée sur l'enseignement d'une matière par le professeur à une situation où l'attention sera braquée sur l'apprentissage de cette matière par l'élève.

Bibliographie

- [1] *Dix problématiques*, Supplément n°1 au Bulletin n°345 de l'APMEP, 12 pages, Paris, 1984.
- [2] *Une approche des contenus d'enseignement par des problématiques pour le second cycle*, Supplément au Bulletin n°401 de l'APMEP, 32 pages, Paris, 1995.
- [3] *Quelle philosophie pour l'enseignement des mathématiques au secondaire*, Mathématique et Pédagogie, n°102, pp. 5–28, 1995.
- [4] *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Ed. NCTM, 258 pages, Reston, 1989.
- [5] *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Ed. CREM, 324 pages, Nivelles, 1996.

Adresse de l'auteur :

G. NÖEL

Chemin des Fontaines 14bis
7061 Casteau

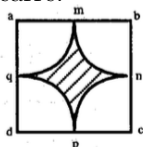
Dans nos classes

Y. Noël,

Les cinq situations qui suivent sont inspirées de numéro de la revue *Mathematics Teacher* publiée en février 1966 (vol. 89, n° 2).

1. Quelques situations

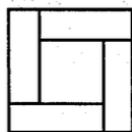
1. $abcd$ est un carré d'aire A , m, n, p et q sont les milieux des côtés du carré et les courbes sont des arcs de cercles dont les centres sont les sommets du carré.



- a) Sans effectuer aucun calcul, peux-tu “deviner” des valeurs de x et y pour lesquels

$$\frac{A}{x} < \text{aire hachurée} < \frac{A}{y}.$$

- b) Calcule l'aire hachurée (H). Avais-tu choisi des valeurs correctes pour x et y ? Avais-tu choisi le meilleur encadrement possible?
2. Les six faces d'un cube sont peintes, chaque face avec une couleur différente. On veut marquer ces faces en utilisant les nombres de 1 à 6, en plaçant 1 et 6, 2 et 5, 3 et 4 sur des faces opposées. En respectant ces règles, chaque élève peut-il apposer les six chiffres de manière à trouver un résultat différent de celui de tous ses camarades? ... Combien de cubes colorés et marqués différents peut-on obtenir à partir du même cube coloré?



3. Comment interpréter ce dessin pour illustrer la proposition.
 « Quels que soient les nombres positifs a et b , on a

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2 \gg$$

4. On fait tourner un carré autour d'une de ses diagonales. Calcule le volume du solide engendré.

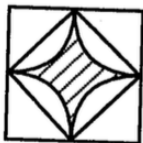
5. Range, dans l'ordre croissant, les cinq sommes

$$\sum_{k=1}^{1000} (-1)^k \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \sum_{k=1}^{20} k^2 \quad \sum_{k=1}^{100} k \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

2. Quelques commentaires

Je n'ai eu l'occasion de tester aucune de ces situations avec des élèves. Elles m'ont paru susceptibles de provoquer une activité de classe fort riche à des niveaux très divers. Je donne ci-dessous des éclairages très laconiques et reposant sur des choix très arbitraires. Si vous exploitez l'un et/ou l'autre de ces problèmes, faites-nous profiter de votre expérience ! D'avance merci.

1. Les formules de calcul d'aire d'un carré et d'un cercle sont les seuls prérequis.



Si le niveau de la classe est suffisant pour comprendre la forme littérale du (a) dans la question, cette première partie est partiellement résolue en recourant au support visuel :
le dessin « montre bien » que $H < \frac{A}{4}$.

Mais nous ne savons pas si nous aurions pu majorer mieux, ni comment minorer H ! Les élèves éprouvent sans doute des difficultés pour savoir ce que cela signifie et il est intéressant d'accumuler des propositions sans clôturer la discussion. Ce ne sera possible qu'après l'exécution des calculs demandés en (b).

- Selon le niveau des élèves, les calculs commencent par un cas numérique ou abordent directement le cas général.

- Si nous supposons que les côtés du carré mesurent 20 cm, les calculs donnent $H \approx 400 \text{ cm}^2 - 314 \text{ cm}^2 = 86 \text{ cm}^2$ et la comparaison systématique de 86 avec $\frac{400}{2}, \frac{400}{3}, \frac{400}{4}, \frac{400}{5}, \dots$ conduit à $\frac{A}{5} < H < \frac{A}{4}$. Les propositions engrangées au (a) peuvent maintenant être analysées avec profit.
- Plus généralement, si ℓ désigne la longueur du côté du carré,

$$A = \ell^2 \quad \text{et} \quad H = \ell^2 - 4 \times \pi \times \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} \approx \ell^2 - 0.79\ell^2 = 0.21\ell^2.$$

Comme $0.2\ell^2 = \frac{\ell^2}{5} < 0.21\ell^2$, le résultat géométrique obtenu en (a) peut donc être complété :

$$\frac{\ell^2}{5} < H < \frac{\ell^2}{4}.$$

... de plus, ce résultat montre que cet encadrement est le plus précis qui peut être donné en respectant les consignes de l'énoncé.

2. Aucun prérequis de matière n'intervient. Par contre, il est souhaitable de disposer d'un grand cube dont les faces sont peintes de six couleurs différentes, de manière à ce que les conditions de l'énoncé soient bien assimilées.

L'imagination est sollicitée, chacun travaillant sur un cube imaginaire, réplique exacte du cube peint. Les tâtonnements dans une classe d'une vingtaine d'élèves ne sont pas négligeables pour bien comprendre ce que sont des « solutions différentes » et pour organiser la recherche. Le calcul peut être finalement explicité sur un support (un diagramme en arbre par exemple) qui fait comprendre le calcul $6 \times 4 \times 2$ pour obtenir 48 possibilités.

3. La situation peut être d'abord exploitée numériquement pour assimiler la signification du schéma, avec des données différentes. Le support littéral prend alors toute sa valeur comme support commun des diverses illustrations. Pour des élèves qui ont compris l'usage des lettres dans le calcul, l'exploitation est directe.
4. Ce petit problème met en oeuvre le calcul du volume d'un cône et le théorème de Pythagore.
 - La première difficulté consiste à percevoir le volume engendré comme la réunion de deux cônes de même base et à reconnaître, dans le carré donné, les longueurs utiles à la résolution de la question.
 - Il reste à évaluer le rayon de la base et la hauteur des cônes, c'est-à-dire la demi-diagonale du carré donné. Selon le niveau souhaité, le volume est alors calculé, soit à partir d'une longueur choisie pour le côté du carré, soit à partir d'une donnée littérale.
5. Bien sûr, le signe de sommation n'intervient pas dans les programmes avant le dernier degré de l'enseignement secondaire. Il peut disparaître de l'énoncé ... ou être rencontré une première fois de manière un peu ludique ... ?

(a) La parité est une clé élémentaire pour trouver 0 en calculant

$$\underbrace{\bar{1} + 1 + \bar{1} + 1 + \bar{1} + 1 + \bar{1} + \dots}_{1000 \text{ termes}}$$

(b) La perception et le calcul de

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

sont plus ardues puisque cette somme comprend une infinité de termes. De plus, les débutants ne s'attendent pas à ce qu'une série comme celle-ci, avec des termes rapidement \ll très petits \gg soit divergente ! Il suffit de l'éliminer si la difficulté dépasse le niveau auquel on s'adresse ... mais on se prive de l'intérêt lié à la surprise ? Comment amener les élèves aux comparaisons

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

...

La somme est donc infinie puisque supérieure à

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots}_{\text{infinité de termes}}$$

(c) La somme des vingt premiers carrés

$$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 400$$

peut être programmée sur calculatrice et/ou évaluée classiquement :

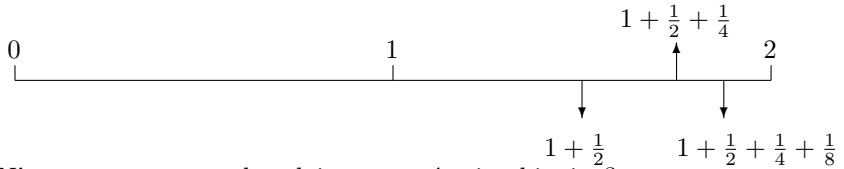
$$\frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 2870.$$

(d) La somme des naturels de 1 à 100 conduit, de manière analogue, à 5050. (Petite surprise pour le classement de (c) et (d) ?).

(e) Et revoici une somme d'un nombre infini de termes ... mais qui conduit à une somme finie!

$$2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots .$$

Un support géométrique permet d'appréhender simplement ce résultat :



N'est-ce pas encore plus clair en numération binaire?



... ou encore $1,111\dots = 10$

Si vous souhaitez vous compliquer la vie en préférant des calculs au dessin, il est bon de remarquer que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right).$$

Ainsi, en posant $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$, on a $s = \frac{1}{2}(1 + s)$, donc $s = 1$ et la somme cherchée est 2.

Les cinq sommes se classent donc comme suit

$$(a) < (e) < (c) < (d) < (b).$$

Adresse de l'auteur :

Yolande NOEL
rue des Fontaines 14bis
7061 Casteau

Olympiades

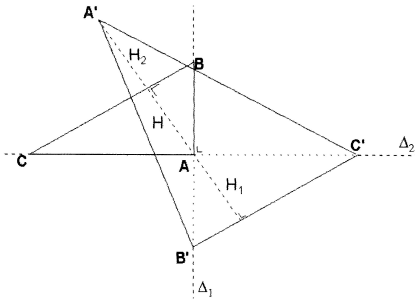
C. Festraets,

Les énoncés et solutions (officielles) des problèmes de la finale de l'Olympiade Mathématique Belge 1996 ont été publiés dans Math-Jeunes n° 75. J'ai pensé qu'il pourrait être intéressant pour le lecteur de trouver ici des solutions fournies par des élèves participant à la finale. J'ai transcrit ces solutions sans rien y modifier, avec leurs éventuelles maladroresses ou imprécisions et en choisissant de préférence des méthodes différentes de celles proposées dans Math-Jeunes. Leur lecture ne peut que nous laisser remplis d'admiration pour l'imagination et le talent mathématique de ces élèves.

MINI

Problème 1 - Solution de G. BAATZ, 2ème année, Lycée de garçons de Luxembourg.

Soit ABC un triangle, rectangle en A , dont l'aire vaut 1. Si A' , B' et C' sont les symétriques de A , B et C , respectivement, par rapport aux côtés opposés, que vaut l'aire du triangle $A'B'C'$. ?



Voilà mon
triangle
 ABC .

Si on prend $[BC]$ pour base, H est la hauteur. $B' = s_{CA}(B)$; la ligne Δ_1 que j'avais utilisée pour construire B' passe par A , donc $B' = s_A(B)$.

De même pour C' . $C' = s_{AB}(C)$; Δ_2 passe par A , donc $C' = s_A(C)$.

A est le point invariant de s_A , donc $A = s_A(A)$. On peut donc dire : $AB'C' = s_A(ABC)$. A cause de la conservation des distances : $B'C' = BC$ et $H_1 = H$.

$A' = s_{BC}(A)$; par définition de la symétrie orthogonale, $H_2 = H$.

L'aire de ABC se calcule : $\frac{CB \cdot H}{2} = 1$.

L'aire de $A'B'C'$ se calcule : $\frac{C'B' \cdot (H+H_1+H_2)}{2}$.

Puisque $H = H_1 = H_2$ et $C'B' = CB$, on peut dire que l'aire de $A'B'C'$
 $= \frac{CB \cdot 3H}{2} = 3 \cdot \frac{CB \cdot H}{2} = 3 \cdot 1 = 3$.

Problème 2 - Solution de N. FRANCO, 1ère année, Institut Saint Joseph à Ciney.

Les touches de la calculatrice de Mathieu sont disposées de façon classique :

7	8	9
4	5	6
1	2	3
0		

Toutes ces touches étant détachées de leurs alvéoles, Mathieu les replace comme suit :

3	6	9
2	5	8
1	4	7
0		

En calculant le produit de deux nombres naturels, il obtient 1996, alors qu'il s'attendait à obtenir un nombre de 3 chiffres. Quel est ce nombre ?

La décomposition en facteurs premiers de 1996 donne

$$\begin{array}{r|l} 1996 & 2 \\ 998 & 2 \\ 499 & 499 \\ 1 & \end{array}$$

1996 peut être le produit de : 1 et 1996,

2 et 998,

4 et 499.

2×998 ne peut être écrit qu'en tapant 4×996 .

$$4 \times 996 = 3984.$$

3984 contient plus de 3 chiffres.

1×1996 ne peut être écrit qu'en tapant 1×1998 .

$$1 \times 1998 = 1998.$$

1998 contient plus de 3 chiffres.

Il ne reste que 4×499 qui ne peut être écrit qu'en tapant 2×299 .

$$2 \times 299 = 598.$$

598 contient 3 chiffres.

Le nombre qu'il s'attendait à obtenir était 598.

Problème 3 - Solution de P. GRAMME, 2ème année, Collège Saint François-Xavier à Verviers.

On sait que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Est-il possible de trouver une décomposition de 1 en somme de fractions différentes, dont le numérateur est 1 et dont le dénominateur est un entier naturel non nul

- (a) si cette somme compte 2 termes ?
- (b) si cette somme compte 4 termes ?
- (c) si cette somme compte 10 termes ?

(a) $x, n, y \in \mathbb{N}_0$.

C'est impossible car

– si le dénominateur est pair, on a une fraction du type $\frac{1}{2x}$ et $\frac{1}{2x} + \frac{2x-1}{2x} = 1$ avec la condition que les numérateurs valent 1 et donc $2x - 1 = 1$.

Dans ce cas, $2x = 2$, ce qui nous permet d'écrire l'égalité $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Ça ne va pas puisque les deux fractions sont les mêmes.

– si le dénominateur est impair, on a une fraction du type $\frac{1}{2x+1}$ et $\frac{1}{2x+1} + \frac{2x}{2x+1} = 1$, ce qui impose le deuxième numérateur pair et donc différent de 1. Ça ne va pas non plus.

(si la somme de deux fractions vaut 1, quand on les réduit au même dénominateur, on obtient l'égalité $\frac{x}{y} + \frac{y-x}{y} = 1$.)

(b) C'est possible : en décomposant par exemple la fraction $\frac{1}{6}$ de l'exemple. Si on la multiplie une fois par $\frac{2}{3}$, une autre fois par $\frac{1}{3}$, on obtiendra

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$$

ce qui vaut 1. D'autre part, les quatre fractions sont différentes.

(c) On peut répéter le système du (b) infiniment à toutes les fractions dont le dénominateur est pair. Voici le début pour nous

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} &= 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} &= 1 \\ - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{54} \cdot \frac{1}{3} &= 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{162} &= 1 \\ - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{162} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{162} \cdot \frac{1}{3} &= 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{486} &= 1 \end{aligned}$$

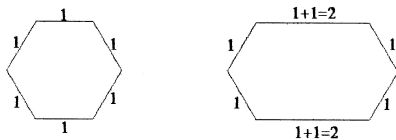
etc. jusqu'à avoir dix termes ou même plus.

Problème 4 - Solution de G. BAATZ, 2ème année, Lycée de garçons de Luxembourg.

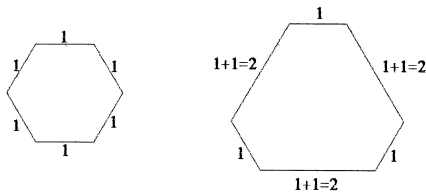
Existe-t-il un hexagone dont les côtés sont de longueurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6 et dont les six angles internes sont égaux ?

Quand tous les six angles d'un hexagone sont égaux, ils ont 120° .

Quand j'ai un hexagone à angles égaux, je peux ajouter à la longueur de deux côtés opposés un nombre quelconque sans changer les angles (1).

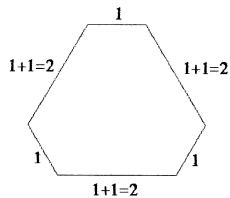


Quand j'ai un hexagone à angles égaux, je peux ajouter à la longueur de 3 côtés non consécutifs un nombre quelconque sans changer les angles (2).

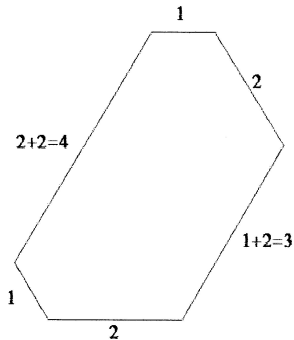


Je pars d'un hexagone à angles de 120° et à côtés de 1.

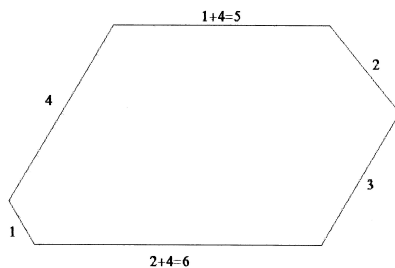
Par (2) :



Par (1) :



Par
(1) :



Voilà l'hexagone demandé.

Oui, il existe.

MIDI

Problème 1 - Solution de A. VIGIER, 4ème année, Lycée Français J. Monet de Bruxelles.

Si x, y et z sont trois nombres réels tels que

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

que vaut $x^4 + y^4 + z^4$?

D'après $x + y + z = 0$, nous tirons

$$\begin{aligned}x &= -(y + z) \\x^2 &= (y + z)^2 = y^2 + z^2 + 2yz\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}x^4 &= (y^2 + z^2 + 2yz)^2 = y^4 + z^4 + 6y^2z^2 + 4y^3z + 4yz^3 \\x^4 + y^4 + z^4 &= 2(y^4 + z^4 + 3y^2z^2 + 2y^3z + 2yz^3)\end{aligned}\tag{2}$$

D'après $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, nous tirons

$$x^2 = 4 - (y^2 + z^2).$$

Ainsi

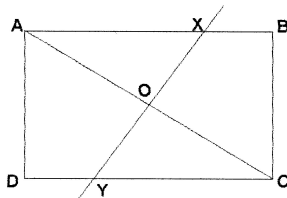
$$\begin{aligned}4 - (y^2 + z^2) &= y^2 + z^2 + 2yz \quad (\text{d'après 1}) \\2y^2 + 2z^2 + 2yz &= 4 \\y^2 + z^2 + yz &= 2 \\(y^2 + z^2 + yz)^2 &= 4 \\y^4 + z^4 + 3y^2z^2 + 2y^3z + 2yz^3 &= 4\end{aligned}\tag{3}$$

Finalement, du (2) et du (3), on obtient :

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2 \times 4 = 8.$$

Problème 2 - Solution de Z. HAN, 3ème année, Institut Saint Boniface-Parnasse à Bruxelles.

Une feuille de papier rectangulaire a pour longueur 5 cm. Lorsqu'elle est pliée de manière que deux sommets opposés soient appliqués l'un sur l'autre, la longueur du pli est de $\sqrt{6}$ cm. Quelle est la largeur de cette feuille ?



Soit le rectangle $ABCD$. Construisons la médiatrice de la diagonale AC , soit XY dont le point d'intersection avec AC est O .

On a

$$\begin{aligned} XY &\perp AC \\ \overline{AO} &= \overline{OC} \end{aligned}$$

donc XY est l'axe de symétrie de A et C .

$s_{XY}(A) = C$, donc XY est le pli qui applique A sur C et $\overline{XY} = \sqrt{6}$.

Prenons le triangle AOX et le triangle ABC .

$$\begin{aligned} \widehat{OAX} &= \widehat{BAC} \\ \widehat{AOX}^\circ &= 90^\circ = \widehat{ABC}^\circ. \end{aligned}$$

donc le triangle AOX est semblable au triangle ABC .

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{BC}}. \tag{1}$$

Désignons la longueur \overline{BC} par ℓ ; on sait que

$$\begin{aligned} \overline{AO} &= \frac{\sqrt{25 + \ell^2}}{2} \\ \overline{OX} &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

donc, dans (1), on a

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sqrt{25 + \ell^2}}{2}}{5} &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\ell} \\ \frac{25 + \ell^2}{100} &= \frac{6}{4\ell^2} \\ \ell^4 + 25\ell^2 - 150 &= 0 \\ \ell^2 &= 5 \\ \ell &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

donc la largeur du rectangle est $\sqrt{5}$.

Problème 3 - Solution de B. GENET, 3ème année, Athénée Royal de Waterloo.

Un après-midi, Xavier, Yves et Zoé jouent au tennis de table. Après chaque partie, le perdant cède sa place à celui qui ne jouait pas. Le soir, Xavier a joué 10 parties, Yves 15 et Zoé 17.

(a) *Combien de parties ont été jouées en tout ?*

(b) *Qui a perdu la deuxième partie ?*

(a) 21, car en additionnant le nombre de parties que Xavier, Yves et Zoé ont faites, on obtient 42 et comme une partie se joue à deux, 21 parties ont été jouées.

(b) Xavier n'a jamais gagné car il a joué moins de la moitié des parties. Son rôle était simplement de remplacer le perdant de la partie à laquelle il ne jouait pas, il jouait donc une partie sur deux.

S'il avait joué la 1ère partie, il aurait fait 11 parties car il aurait joué la 1ère, la 3ème, la 5ème, la 7ème, la 9ème, la 11ème, la 13ème, la 15ème, la 17ème, la 19ème, la 21ème.

Or, il a joué 10 parties, donc il a fait la 2ème, la 4ème, la 6ème, ...

Xavier a joué la 2ème partie et comme il n'a jamais gagné, il a perdu cette 2ème partie.

Problème 4 - Solution de J. LEVIE, 4ème année, Institut Notre-Dame de Loverval.

Soit n nombres $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, chacun égal soit à 1 soit à -1 . Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles la somme

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1$$

peut être nulle ? Justifier.

1) Prouvons que n doit être pair.

Remarquons que les termes de l'expression peuvent valoir soit 1, soit -1 .

Pour que la somme soit nulle, il faut qu'il y ait autant de termes de valeur -1 que de termes de valeur 1.

Donc le nombre de termes doit être pair.

Mais comme il y a toujours n termes dans l'expression, il faut que n soit pair pour que l'expression soit nulle.

2) Parmi la suite de nombres a_1, a_2, \dots, a_n , chaque nombre valant -1 et étant isolé (précédé et suivi de nombres différents) génère dans l'expression $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ deux termes valant -1 chacun.

Chaque suite de nombres valant -1 génère dans la somme en question une suite de termes positifs et uniquement deux termes négatifs (aux extrémités de celle-ci).

Mais un " -1 " n'est pas isolé, il fait nécessairement partie d'une suite. Il n'est donc pas possible d'avoir un nombre de termes négatifs (valant -1) impair.

Comme il y a autant de termes négatifs que de termes positifs, n vaut le double du nombre de termes négatifs.

Mais le double d'un nombre pair est nécessairement divisible par 4. n est donc divisible par 4.

3) Prouvons que la somme peut valoir 0 pour tout n multiple de 4.

Il suffit en effet de répéter autant de fois qu'il le faut une de ces suites de quatre nombres qui, elles, génèrent chacune une somme nulle :

1, -1, -1, 1;
1, 1, -1, 1;
-1, 1, 1, -1;
-1, -1, -1, 1;
etc ...

Les problèmes MAXI paraîtront dans le prochain numéro de M. et P.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

Quels calculs! problème n° 169 de M. et P. n° 104.

Trouver la somme des 50èmes puissances de tous les côtés et de toutes les diagonales d'un 100-gone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.

Solution de J.-C. ANDRIEUX de Beaune, France.

Le problème porte bien son nom ... Démontrons la propriété suivante :

“La somme des puissances de tous les côtés et de toutes les diagonales d'un $4n$ -gone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est : $S_{4n} = 8n^2 c_{2n}^n$.”

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On peut, sans restreindre la généralité du problème, supposer qu'un des sommets a pour affixe 1. Les $4n - 1$ autres sommets ont alors pour affixes $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{4n}}$, $k \in \{1, 2, \dots, (4n - 1)\}$.

Pour ce sommet, la somme à calculer est :

$$\sum_{k=1}^{4n-1} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{4n}} \right|^{2n}.$$

Pour d'évidentes raisons de symétrie, la somme S_{4n} cherchée est :

$$S = \frac{4n}{2} \sum_{k=1}^{4n-1} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{4n}} \right|^{2n} = 2n \sum_{k=1}^{4n-1} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{4n}} \right|^{2n}.$$

On a :

$$\begin{aligned} & \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{4n}} \right| \\ &= \left| e^{\frac{ik\pi}{4n}} \left| e^{-\frac{ik\pi}{4n}} - e^{\frac{ik\pi}{4n}} \right| \right| \\ &= 1 \times \left| 2i \sin \left(\frac{k\pi}{4n} \right) \right| \\ &= 2 \sin \left(\frac{k\pi}{4n} \right) \quad \text{pour } k \in \{1, 2, \dots, (4n - 1)\} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } S = 2n \sum_{k=1}^{4n-1} \left(2 \sin \left(\frac{k\pi}{4n} \right) \right)^{2n}.$$

Or

$$\begin{aligned}
& \left(2 \sin \left(\frac{k\pi}{4n} \right) \right)^{2n} \\
&= \left(\frac{e^{\frac{ik\pi}{4n}} - e^{-\frac{ik\pi}{4n}}}{i} \right)^{2n} \\
&= (-1)^n \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p C_{2n}^p e^{\frac{ipk\pi}{4n}} e^{-\frac{i(2n-p)k\pi}{4n}} \\
&= (-1)^n \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p C_{2n}^p e^{\frac{i(2p-2n)k\pi}{4n}} \\
&= (-1)^n \left\{ \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p C_{2n}^p e^{\frac{i(2p-2n)k\pi}{4n}} + (-1)^n C_{2n}^n \right. \\
&\quad \left. + \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^{2n-q} C_{2n}^{2n-q} e^{-\frac{i(2q-2n)k\pi}{4n}} \right\} \\
&= (-1)^n \left\{ \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p C_{2n}^p e^{\frac{i(2p-2n)k\pi}{4n}} + (-1)^n C_{2n}^n \right. \\
&\quad \left. + \sum_{p=n+1}^{2n} (-1)^p C_{2n}^p e^{\frac{i(2p-2n)k\pi}{4n}} \right\} \quad (\text{avec } q = 2n - p) \\
&= C_{2n}^n + (-1)^n \left\{ \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p C_{2n}^p \left(e^{\frac{i(2p-2n)k\pi}{4n}} + e^{-\frac{i(2p-2n)k\pi}{4n}} \right) \right\} \\
&= C_{2n}^n + 2(-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p C_{2n}^p \cos \left(\frac{(2p-2n)k\pi}{4n} \right).
\end{aligned}$$

On a donc obtenu

$$\begin{aligned}
 S &= 2n \sum_{k=1}^{4n-1} \left\{ C_{2n}^m + 2(-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p C_{2n}^p \cos \left((2p-2n) \frac{k\pi}{4n} \right) \right\} \\
 &= 2n \left[(4n-1)C_{2n}^m + 2 \sum_{p=0}^{n-1} \left((-1)^{n+p} C_{2n}^p \sum_{k=1}^{4n-1} \cos \left((2p-2n) \frac{k\pi}{4n} \right) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Evaluons alors $\sum_{k=1}^{4n-1} \cos \left(\frac{k\pi}{4n} \alpha \right)$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{4n-1} \cos \left(\frac{k\pi}{4n} \alpha \right) &= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{4n-1} e^{ik \frac{\pi\alpha}{4n}} \right] = \operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi\alpha}{4n}} \frac{1 - (e^{i \frac{\pi\alpha}{4n}})^{4n-1}}{1 - e^{i \frac{\pi\alpha}{4n}}} \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi\alpha}{4n}} \frac{e^{i \frac{(4n-1)\pi\alpha}{8n}} \left(e^{-i \frac{(4n-1)\pi\alpha}{8n}} - e^{i \frac{(4n-1)\pi\alpha}{8n}} \right)}{e^{i \frac{\pi\alpha}{8n}} \left(e^{-i \frac{\pi\alpha}{8n}} - e^{i \frac{\pi\alpha}{8n}} \right)} \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi\alpha}{2}} \frac{-2i \sin \left(\frac{(4n-1)}{8n} \pi \alpha \right)}{-2i \sin \left(\frac{\pi\alpha}{8n} \right)} \right] \\
 &= \cos \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{(4n-1)}{8n} \pi \alpha \right)}{\sin \left(\frac{\pi\alpha}{8n} \right)} \\
 &= \cos \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi\alpha}{8n} \right)}{\sin \left(\frac{\pi\alpha}{8n} \right)} \text{ avec } \alpha = 2p - 2n, \\
 &\quad \text{on obtient} \\
 &= \cos((p-n)\pi) \frac{\sin \left((p-n)\pi - \frac{\pi\alpha}{8n} \right)}{\sin \left(\frac{\pi\alpha}{8n} \right)} \\
 &= (-1)^{p-n} (-1)^{p-n} \frac{-\sin \left(\frac{\pi\alpha}{8n} \right)}{\sin \left(\frac{\pi\alpha}{8n} \right)} = -1
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 S &= 2n \left[(4n-1)C_{2n}^n - 2 \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{n+p} C_{2n}^p \right] \\
 &= 2n \left[(4n-1) - \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{n+p} C_{2n}^p - \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{n+p} C_{2n}^p \right] \\
 &= 2n \left[(4n-1)C_{2n}^n - \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{n+p} C_{2n}^p - \sum_{q=n+1}^{2n} (-1)^{n+q} C_{2n}^{2n-q} \right] \\
 &= 2n \left[4nC_{2n}^n - \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{n+p} C_{2n}^p - (-1)^{n+1} C_{2n}^n - \sum_{p=n+1}^{2n} (-1)^{n+p} C_{2n}^p \right] \\
 &= 2n \left[4nC_{2n}^n + (-1)^n \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p C_{2n}^p \right] \\
 &= 2n [4nC_{2n}^n + (-1)^n (1-1)^{2n}] \\
 &= 8n^2 C_{2n}^n \dots\dots\dots \text{CQFD!}
 \end{aligned}$$

Il est temps maintenant de répondre au problème 169 ; pour $4n = 100$ c'est-à-dire $n = 25$, la somme des puissances 50èmes de tous les côtés et de toutes les diagonales d'un 100-gone régulier est

$$S = 5000C_{50}^{25}.$$

Soit $S = 632053032188760000$ (dixit Maple V).

Pas le premier venu problème n° 170 de M. et P. n° 104.

Déterminer tous les nombres premiers p tels que la somme de tous les diviseurs (entiers, positifs) de p^4 soit un carré parfait.

Solution de M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre.

L'ensemble des diviseurs de p^4 est $\{1, p, p^2, p^3, p^4\}$.

La résolution du problème est donc équivalente à celle de l'équation diophantienne $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = c^2$, où p est premier et c naturel.

Si $p = 2$, alors $c^2 = 31$ et c n'est pas naturel.

Supposons donc p impair ; alors $p \geq 3$, $\frac{p-1}{2}$ et $\frac{p+1}{2}$ sont des naturels.

J'affirme que

$$p^2 + \frac{p-1}{2} < c \leq p^2 + \frac{p+1}{2}.$$

D'une part, l'inégalité de gauche équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \left(p^2 + \frac{p-1}{2}\right)^2 &< c^2 \\ p^4 + p^2(p-1) + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 &< 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 \\ p^2 + p + 1 + p^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 &> 0 \\ 7p^2 + 6p + 3 &> 0 \end{aligned}$$

qui est évidemment correcte.

D'autre part, l'inégalité de droite équivaut successivement à

$$\begin{aligned} c^2 &\leq \left(p^2 + \frac{p+1}{2}\right)^2 \\ 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 &\leq p^4 + p^2(p+1) + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \\ p^2 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - p^2 - p - 1 &\geq 0 \\ p^2 - 2p - 3 &\geq 0 \\ (p-3)(p-1) &\geq 0 \end{aligned}$$

qui est correcte. Il y a égalité ssi $p = 3$.

On a donc

$$p^2 + \frac{p-1}{2} < c \leq p^2 + \frac{p+1}{2}$$

avec égalité ssi $p = 3$.

Or c est entier et les bornes de l'inégalité sont deux entiers consécutifs. On a donc nécessairement l'égalité et $p = 3$.

Dans ce cas, $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = 121$ et $c = 11$.

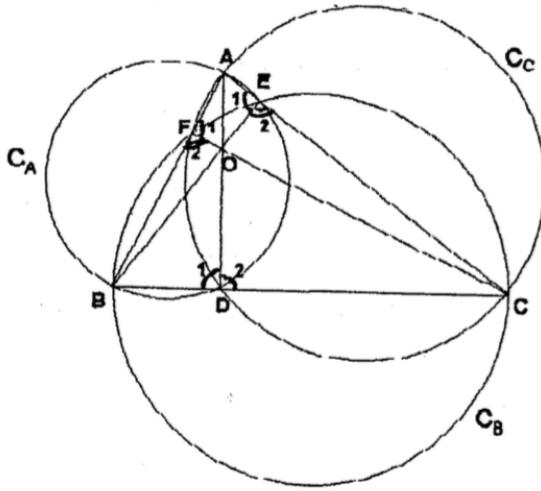
Pas le premier venu ..., oui, mais le deuxième! (le deuxième premier, bien entendu)

Bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek, B. LOISEAU de Mouscron et H.-J. SEIFFERT de Berlin.

Hauteurs ? problème n° 171 de M. et P. n° 104.

Dans un triangle ABC , les céviennes AD, BE, CF se coupent en O . On sait que les points F, B, C, E sont concycliques et que les points A, F, D, C sont concycliques. Démontrer que O est l'orthocentre du triangle ABC .

Solution de C. VILLERS de Hyon.



$[AD] \cap [BE] \cap [CF] = \{O\}$ par hypothèse.

Si F, B, C, E sont concycliques (cercle C_B), alors $\vec{OB} \cdot \vec{OE} = \vec{OF} \cdot \vec{OC}$ (puissance de O par rapport à C_B).

Si A, F, D, C sont concycliques (cercle C_C), alors $\vec{OF} \cdot \vec{OC} = \vec{OA} \cdot \vec{OD}$ (puissance de O par rapport à C_C).

Donc $\vec{OB} \cdot \vec{OE} = \vec{OA} \cdot \vec{OD}$ et B, D, E, A sont concycliques (cercle C_A).

$\hat{E}_2 = \hat{F}_2$: inscrits dans C_B et interceptant le même arc, d'où

$$\begin{aligned} \hat{E}_1 &= 180^\circ - \hat{E}_2 = 180^\circ - \hat{F}_2 \\ &= \hat{F}_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$\hat{D}_2 = \hat{F}_1$: inscrits dans C_C et interceptant le même arc.

$\hat{E}_1 = \hat{D}_1$: inscrits dans C_A et interceptant le même arc.

d'où

$$\hat{E}_1 = \hat{D}_1 = 180^\circ - \hat{D}_2 = 180^\circ - \hat{F}_1. \quad (2)$$

De (1) et (2) : $\hat{E}_1 = 180^\circ - \hat{E}_1$; d'où $\hat{E}_1 = 90^\circ$.

Dès lors $\hat{E}_1 = \hat{D}_1 = \hat{F}_1 = 90^\circ$ et AD, BE, CF sont les hauteurs dans le triangle ABC . O est bien l'orthocentre de ce triangle.

La démonstration est similaire si le triangle ABC est obtusangle et si les céviennes AD, BE et CF se coupent en un point O extérieur au triangle.

B. LOISEAU de Mouscron me fait à propos de ce problème deux remarques pertinentes :

1) il faut ajouter à l'énoncé une hypothèse supplémentaire : D, E, F sont distincts de A, B, C .

Si, par exemple, D est confondu avec B , alors F est aussi en B et il n'y a aucune raison que l'intersection des céviennes soit l'orthocentre ; l'énoncé est alors faux.

2) dans le cas d'un triangle rectangle, les hypothèses

$$\left\{ \begin{array}{l} D, E, F \text{ sont distincts de } A, B, C, \\ B, C, E, F \text{ sont concycliques,} \\ A, C, D, F \text{ sont concycliques,} \\ AD, BE, DF \text{ sont concourantes} \end{array} \right.$$

sont impossibles à réaliser simultanément.

Bonnes solutions aussi de J. FINOULST de Diepenbeek, J. JANSSEN de Lambermont et M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles.

Pauvres élèves problème n° 163 de M. et P. n° 102.

Dans une classe de n élèves, le professeur remet à l'aveuglette les interrogations aux élèves. Calculer la probabilité pour que k élèves reçoivent leur propre interrogation.

La solution de ce problème a été publiée dans le n° 105 de M. et P. Rappelons que la probabilité cherchée est notée p_n^k et que l'on a

$$p_n^k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Voici quelques commentaires de G. COSENTINO d'Enghien.

k élèves ayant reçu leur propre copie, si $D(n-k)$ désigne le nombre de façons de distribuer les $n-k$ copies restantes (aux $n-k$ élèves restants) de manière qu'aucune ne le soit correctement, on a

$$p_n^k = \frac{C_n^k \cdot D(n-k)}{n!} = \frac{D(n-k)}{k!(n-k)!}$$

et $D(n - k) = (n - k)! \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$.

- 1) Le rapport $\frac{n!}{D(n)}$ tend vers $e = 2,718\dots$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
En effet,

$$D(n) = n! \cdot \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$$

et le second facteur est le développement limité de Taylor de $\frac{1}{e}$.

- 2) La conséquence de ceci est que la loi de probabilité p_n^k tend vers une loi de Poisson de moyenne $\lambda = 1$ lorsque $n - k$ tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire $n \rightarrow \infty$ et $k \ll n$).

En effet,

$$D(n - k) \rightarrow \frac{(n - k)!}{e}$$

et donc

$$p_n^k = \frac{D(n - k)}{k!(n - k)!}$$

tend vers

$$\frac{1}{k!e} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad \text{avec } \lambda = 1.$$

Le fait que p_n^k tende vers $\frac{1}{k!e}$ signifie que lorsque n augmente, la probabilité devient indépendante de n et ne dépend plus que de k .

- 3) Quel que soit n , on vérifie (par récurrence) que l'espérance mathématique de k est toujours 1 (on aura donc toujours une copie en moyenne qui sera correctement distribuée).

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^n p_n^k \cdot k = 1 \quad (\forall n \geq 1)$$

(ceci est conforme avec le 2) où on avait $\lambda = 1$).

Note de la rédaction

Le problème de déterminer le nombre de permutations de n éléments n'ayant aucun point fixe a été en premier lieu examiné par Nicolas Bernoulli (neveu de Jean et Jacques Bernoulli). Il a été ultérieurement repris par Euler sous le titre "quaestio curiosa ex doctrina combinationis" et résolu d'une façon différente de celle de Bernoulli.

178. Euh ?

a, b, c, d, e sont des réels tels que

$$\begin{aligned}a + b + c + d + e &= 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &= 16\end{aligned}$$

Quelle est la valeur maximale de e ?

179. Sommes de fractions

On considère la suite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ où $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.

De combien de manières peut-on écrire la fraction $\frac{1}{1980}$ comme somme d'un nombre fini de termes consécutifs de cette suite ?

180. Polygone et triangles

Dans le plan, on donne un 1996-gone convexe. On considère tous les triangles qui ont leurs sommets aux sommets de ce polygone et un point P intérieur au polygone et n'appartenant à aucune des côtés des triangles.

Démontrer que le nombre de triangles pour lesquels P est un point intérieur est pair.

Bibliographie

J. Navez,

Enseigner la géométrie dans l'espace au collège et au lycée par Bernard DESTAINVILLE. Publications de l'APMEP, n°99, 1995. 204 pages.

Cet ouvrage présente une approche de la géométrie dans l'espace du collège aux Baccalauréats en insistant particulièrement sur le cursus des classes de seconde et première dans l'enseignement secondaire français.

Le chapitre I : "Découvrir les propriétés de l'espace" présente rapidement les propriétés des droites et plans parallèles et des droites et plans perpendiculaires.

Le chapitre II : "Apprendre à représenter l'espace" étudie les systèmes de représentation et en particulier les projections cylindriques et coniques.

Le chapitre III : "Une familiarisation avec le vectoriel de l'espace" donne les conditions vectorielles de colinéarité et de coplanarité et insiste sur l'utilisation des produits scalaire et vectoriel.

Le chapitre IV : "Sections planes des polyèdres ; réaliser des tronçons" traite des problèmes de section plane des tétraèdres, des prismes et des pyramides.

Le chapitre V : "Pour un élargissement des réflexions" détaille quelques problèmes d'aires et de volumes, donne les propriétés des tétraèdres orthocentriques, du $\frac{1}{2}$ octaèdre, de l'antiprisme à base carrée et présente quelques problèmes sur les corps ronds.

En résumé, il s'agit d'un ouvrage donnant un panorama assez complet des problèmes que l'on peut aborder en géométrie dans l'espace pour des élèves du secondaire.

J. NAVEZ