Mathématique et Pédagogie

Périodique bimestriel publié par la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*

Sommaire

Éditorial

J. Bair,

Pour ce premier numéro de l'année 1997, permettez-moi tout d'abord, au nom de toute l'équipe qui réalise *Mathématique et Pédagogie* et de tous les membres du Conseil d'Administration de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*, de vous souhaiter une année agréable et fructueuse tant sur le plan personnel que professionnel : en particulier, puisse l'enseignement des mathématiques vous apporter de nombreuses et belles satisfactions !

En plus des “traditionnels” voeux de nouvelle année, je voudrais vous annoncer une nouvelle présentation de la brochure. En effet, depuis ce numéro 110, nous avons changé d'imprimeur... dans l'espoir d'encore mieux vous servir. Nous espérons de la sorte être plus réguliers dans les livraisons et vous offrir un travail de meilleure qualité et donc plus agréable à découvrir : la nouvelle couverture veut marquer ce changement.

Je profite de cette occasion pour vous rappeler que *Mathématique et Pédagogie* est une revue écrite par et surtout pour des professeurs de mathématiques de tout niveau. L'objectif essentiel de la revue est en effet de donner l'occasion à tout enseignant de s'exprimer, de faire connaître ses idées, ses expériences, voire ses difficultés, d'apprendre de nouvelles théories mathématiques comme de nouvelles techniques pédagogiques ; bref, la revue a pour mission première de nourrir les réflexions des professeurs de mathématiques et de les aider ainsi à mieux accomplir cette fonction si importante et si passionnante qu'est l'enseignement de la “reine et servante des sciences”.

C'est pourquoi je lance un appel à ceux qui le désirent pour qu'ils m'envoient des articles de mathématiques (de tout niveau) susceptibles d'intéresser des collègues ... car il est évident que je ne peux publier que les travaux qui me sont soumis.

D'avance, je vous remercie pour votre collaboration.

J. BAIR

La géométrie de l'espace au niveau de la 5e année du secondaire. (I)

J. Navez, *Université de Liège*

Introduction

Pour étudier les propriétés locales de l'espace dans lequel nous vivons, à échelle humaine (ni trop grande, ni trop petite), on utilise toujours comme modèle mathématique la géométrie d'EUCLIDE.

<u>L'élaboration de ce modèle</u> peut prendre diverses formes :

— **Géométrie synthétique**
Cette démarche initiée par EUCLIDE lui-même peut être qualifiée d'*axiomatico-déductive*. Elle consiste à idéaliser certains éléments dits fondamentaux et à les soumettre à des règles bien précises (axiomes et postulats) dont l'expérience nous a donné l'intuition.
Cette façon d'enseigner la géométrie dans l'espace est celle qui a eu cours dans le secondaire jusqu'à la fin des années 60.

— **Géométrie vectorielle**
Cette démarche consiste à étudier a priori certaines structures algébriques (champ des réels, espaces vectoriels, espaces affins) et à constater après coup qu'elles sont adaptées au modèle que l'on veut étudier. Cette démarche peut être qualifiée d'*algébrico-déductive.*
Inspirée par la réforme dite des "mathématiques modernes", cette démarche n'a jamais eu en géométrie dans l'espace un champ d'application aussi large que celui qui a prévalu en géométrie plane.

— **Géométrie analytique**
Cette démarche se superpose en fait aux deux premières ; elle permet grâce à des repères et des coordonnées de rendre algébriques certains problèmes géométriques.
La géométrie analytique plane a eu ses heures de gloire dans le secondaire avec l'étude des coordonnées homogènes et des coniques. Devenue actuellement beaucoup plus modeste, les programmes du secondaire comprennent depuis quelques années des éléments de géo-

métrie analytique dans l'espace ("géométrie analytique des droites et des plans de l'espace").

Quels sont les objectifs à poursuivre ?

— *Premièrement*, il faut que l'élève acquière une *perception correcte des figures dans l'espace.*
Vu la disparition des cours de dessin scientifique et des chapitres de géométrie descriptive, seul le cours de géométrie peut réaliser cet objectif.
— *Deuxièmement*, l'élève doit acquérir des *outils de découverte* lui permettant de *résoudre des problèmes* qui se posent dans l'espace. L'usage de ces outils n'étant d'ailleurs pas restreint au seul cours de mathématique.
Par exemple, le produit scalaire, les coordonnées, ...
— *Enfin*, la géométrie doit rester une école de *formation au raisonnement mathématique* en dehors de l'application programmée de formules et de recettes toutes faites.

Quels sont les problèmes rencontrés par les enseignants ?

Essentiellement ces problèmes se résument par :
manque de temps

— Les trois démarches vues classiquement demandent un temps considérable pour être exposées. Les méthodes et principes employés sont tellement différents que l'élève sera tenté de croire que ces géométries n'ont aucun lien entre elles.
Trop de théorie conduisant forcément à peu d'exercices, l'enseignant ne voit pas comment il peut atteindre les objectifs qui lui ont été fixés.
— Vu les réductions d'horaire et les problèmes que vous connaissez dans l'enseignement secondaire, la géométrie dans l'espace est souvent la *victime des restrictions* que l'on doit forcément opérer.
— Le problème d'acquérir une bonne vision dans l'espace requiert lui aussi un certain temps.

Quelles sont les pistes pour rendre cet enseignement plus rapide et plus efficace ?

A. **Utiliser des moyens modernes pour acquérir une bonne vision dans l'espace**
Les moyens *informatiques* actuels (ex. : CABRI) doivent être utilisés en appui à l'étude de la géométrie de l'espace.
Je ne m'étendrai cependant pas sur ce point qui fait l'objet d'autres articles dans cette revue.

B. **Limiter les développements théoriques**
tout en utilisant à la fois les approches synthétique, vectorielle et analytique.
Comment y parvenir ?
1) Tenter d'unifier au maximum les trois approches en utilisant partout les mêmes concepts.
Ainsi, dans les trois approches, l'usage des 1-directions et des 2-directions permet :
– en géométrie *synthétique*, de standardiser les démonstrations et de simplifier le passage de l'affin vers le métrique ;
– en géométrie *vectorielle*, de souligner l'importance du sous-vectoriel directeur (même si on ne le nomme pas expressément) ;
– en géométrie *analytique*, d'obtenir facilement les équations des plans et des droites.
2) En géométrie synthétique, il ne faut pas craindre de mettre la barre suffisamment haut en ce qui concerne les axiomes.
En effet, l'objectif *n'est pas* de voir les fondements de la géométrie.
3) En géométrie vectorielle, il n'est pas nécessaire de faire l'étude algébrique abstraite des espaces vectoriels.
Au contraire, l'étude des vecteurs de l'espace fournira un exemple solide pour une future généralisation.
4) En géométrie analytique, on peut se contenter de l'aspect euclidien.
Et bien sûr, se limiter aux repères orthonormés.

C. **Il faut adopter une pédagogie des situations axées sur des problèmes à résoudre et ayant pour but de susciter l'activité des élèves et de donner un sens aux contenus mathématiques**
On verra de la sorte que les trois approches de la géométrie sont *complémentaires* et non *concurrentes*.

Il faut privilégier des séquences pédagogiques bien conçues à l'approche traditionnelle essentiellement basée sur les contenus et qui, en définitive, ne satisfait que le mathématicien et non les apprenants.

D. **Il ne faut pas craindre d'introduire des outils nouveaux comme le produit vectoriel et le produit mixte**
– Ces outils seront très utiles dans d'autres situations comme en physique par exemple.
– Le produit mixte permet d'épauler l'étude des déterminants.
– Ces outils permettent de résoudre simplement des problèmes courants comme la perpendiculaire commune à deux droites gauches par exemple.

Avant de passer au développement de ces concepts, je tiens à remercier particulièrement les Professeurs Francis BUEKENHOUT de l'Université Libre de Bruxelles et Guy NOËL de l'Université de Mons-Hainaut qui m'ont fait bénéficier de leurs conseils éclairés.

Première partie : Géométrie affine

1. Rappels et introduction

La géométrie plane a été construite dans l'enseignement primaire et dans les 1er et 2ème degrés du secondaire.

Elle repose sur des axiomes que l'on n'a pas toujours déclarés. Ces axiomes dépendent du degré de finesse sur lequel la géométrie a été fondée ; ils peuvent se répartir dans les groupes suivants :

— les "conventions de population" du genre : il y a une infinité de points et de droites dans un plan ;
— les axiomes d'incidence : en général, on prend "deux points déterminent une et une seule droite à laquelle ils appartiennent" ;
— les axiomes de structure affine : axiomes d'EUCLIDE et de DESARGUES ;
— lex axiomes d'ordre sur la droite ;
— les axiomes de continuité sur la droite ;
— les axiomes de perpendicularité ;
— les axiomes de la bissectrice et de la rotation.

On peut aussi ajouter les conventions d'unité de mesure des angles et des distances.

La structure géométrique du plan qui résulte de tous ces axiomes s'appelle structure euclidienne du plan.

Tous ces axiomes sont-ils transférables à l'espace ? Faut-il les modifier ? Faut-il en ajouter d'autres ?

En utilisant des modèles simples en fil de fer par exemple, on peut immédiatement sensibiliser les élèves au fait que les positions relatives des éléments fondamentaux sont différentes dans l'espace par rapport à ce qu'elles étaient dans le plan. Ainsi, pour les droites, apparaît le cas des droites gauches.

Mais surtout, ce qui diffère, c'est qu'au lieu d'avoir un seul plan dans lequel on travaille, on dispose maintenant d'une infinité de plans.

2. Eléments fondamentaux et positions relatives

2.1. Eléments fondamentaux

Les éléments fondamentaux non définis sont les points, les droites, les plans et l'espace.

L'espace est un ensemble dont les éléments sont les points et nous supposons que cet ensemble a des sous-ensembles propres qui sont les droites et les plans.

2.2. Conventions de population

A ce niveau, des conventions de population minimalistes n'offrent aucun intérêt pour l'apprenant ; il faut au contraire supposer d'emblée qu'il y a une infinité de points dans une droite ou dans un plan, une infinité de droites dans un plan, une infinité de droites et de plans dans l'espace et que par tout point de l'espace passent une infinité de droites et de plans.

Vous pouvez trouver dans "Introduction à la géométrie affine" ([1]) trois axiomes suffisants pour refléter exactement cette situation.

1. *Introduction axiomatique à la géométrie affine et à la géométrie métrique du plan et de l'espace*, J. NAVEZ, Séminaire de Méthodologie spéciale, Université de Liège, 1985.

Le mot “infinité” peut être compris facilement : on dit qu'un ensemble E comprend une infinité d'éléments si pour tout $N > 0$, $\sharp E > N$.

2.3. Axiome unificateur

On suppose que tous les plans de l'espace sont des plans euclidiens. C'est-à-dire que les axiomes vus en géométrie plane sont valables dans chacun des plans de l'espace et par conséquent, que les théorèmes de géométrie plane (qui sont des conséquences logiques des axiomes) sont valables dans chacun des plans de l'espace.

Au surplus, ceci permet de ne pas devoir revenir sur les notions d'ordre et de continuité qui sont le passage délicat aussi bien pour la géométrie plane que pour la construction des réels.

2.4. Axiomes d'incidence

A l'axiome vu dans le plan :

— **Axiome 1** : deux points distincts déterminent une et une seule droite à laquelle ils appartiennent.

il convient d'ajouter :

— **Axiome 2** : si un plan contient deux points distincts d'une droite, alors la droite est entièrement incluse dans le plan.

— **Axiome 3** : trois points distincts n'appartenant pas à une même droite déterminent un et un seul plan auquel ils appartiennent.

— **Axiome 4** : deux plans distincts ont en commun une droite ou aucun point.

Bien sûr, ces axiomes sont largement surabondants, tout comme le sont les conventions de population mais ils ne sont pas contradictoires et on peut considérer qu'ils sont conformes à la vision intuitive qu'un élève a de l'espace.

L'axiome 4 est celui qui en fait garantit que notre espace sera bien de dimension 3.

Conséquences immédiates des axiomes :

a) Une droite et un point ne lui appartenant pas déterminent un et un seul plan auquel ils appartiennent.
En effet, c'est une conséquence des axiomes 1,2 et 3.

b) Deux droites ayant un seul point commun (sécantes) déterminent un et un seul plan dans lequel elles sont incluses.

2.5. Positions relatives des deux plans

Ces deux positions découlent de l'axiome 4.

— Si deux plans distincts ont en commun une droite, on dit qu'ils sont **sécants**.
— Si deux plans distincts n'ont aucun point en commun, on dit qu'ils sont **parallèles**.
— Tout plan sera considéré comme étant **parallèle à lui-même**.

2.6. Positions relatives de deux droites

— Si deux droites distinctes sont coplanaires, la géométrie plane nous dit qu'elles peuvent avoir un ou aucun point commun ; dans le premier cas, on dit qu'elles sont **sécantes** ; dans le second cas, on dit qu'elles sont **parallèles**.
— Si deux droites distinctes **ne sont pas coplanaires**, on dit qu'elles sont **gauches**.
— Si deux droites ne sont pas distinctes, on dit qu'elles sont **parallèles et confondues**.

2.7. Positions relatives d'une droite et d'un plan

— Si une droite n'a aucun point commun avec un plan, on dit que la droite est **parallèle** au plan.
— Si une droite a un seul point commun avec un plan, on dit que la droite **perce** le plan.
— Si une droite a deux points communs avec un plan, l'axiome 2 nous assure que tous les points de cette droite sont dans le plan ; on dit que la droite est **incluse** dans le plan. Si une droite est incluse dans le plan, on dira aussi qu'elle est **parallèle** au plan.

3. Théorèmes sur les droites et plans parallèles

Nous allons maintenant donner les étapes qui permettent d'arriver aux trois résultats essentiels suivants :

— "Par un point de l'espace, on peut mener une et une seule droite parallèle à une droite donnée" (généralisation de l'axiome d'EUCLIDE) ;
— "Par un point de l'espace, on peut mener un et un seul plan parallèle à un plan donné" (autre généralisation de l'axiome d'EUCLIDE ?) ;
— "Si une droite est parallèle à un plan, toute parallèle à cette droite est parallèle à un plan parallèle au premier" (justification du développement théorique par directions et 2-directions).

Théorème 1 : *Par un point de l'espace, on peut mener une et une seule droite parallèle à une droite donnée.*

Soit P le point donné et d la droite donnée.

a) si $P \in d$, d répond à la question.

S'il existe une seconde droite d' répondant à la question, d et d' ont la même direction et un point commun, elles sont donc confondues.

b) Si $P \notin d$, on considère le plan (P, d) ; dans ce plan, l'axiome d'EUCLIDE vu en géométrie plane nous dit qu'il existe une et une seule droite d' parallèle à d et passant par P.

Soit d'' une autre droite répondant à la question, alors d' et d'' ont la même direction et un point en commun ; elles sont donc confondues.

Théorème 2 : *Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan.*

Soit d parallèle à d' et d' incluse dans le plan α.

Si d est elle-même incluse dans α, le théorème est vrai.

Si d n'est pas incluse dans α, supposons que d perce α en un point P. La parallèle à d' passant par P est unique et est incluse dans α ; comme cette parallèle ne peut être que d, on aboutit à une absurdité. Il faut donc bien que d soit parallèle à α.

Théorème 3 : *Si une droite est parallèle à un plan, tout plan passant par cette droite soit coupe le plan donné suivant une parallèle à cette droite, soit est parallèle au plan donné.*

Soit d la droite donnée et α le plan donné. Considérons un plan ϖ passant par d. Si ϖ et α sont parallèles, le théorème est démontré ; s'ils sont sécants, appelons leur intersection i (éventuellement égale à d). Comme d et i sont coplanaires et n'ont pas de point commun (ou sont confondues), alors elles sont parallèles.

Théorème 4 : *Si une droite est parallèle à un plan, toute parallèle à cette droite est parallèle au plan donné.*

Soit d une droite parallèle au plan α et d' une droite parallèle à d. Si d est incluse dans α, la conclusion vient du théorème 1.

Supposons que d n'est pas incluse dans α. Considérons le plan (d, d').

a) (d, d') est parallèle à α ; d' ne peut alors avoir de point commun avec α et elle est donc parallèle au plan ;

b) (d, d') est sécant avec α ; soit i leur droite d'intersection, i a la même direction que d et d' (théorème 3) ; si d' et α ont un point P commun, forcément ce point $P \in i$. Comme i et d' sont deux droites de même direction ayant un point commun, elles sont confondues ; si d' et α n'ont pas de point commun, alors bien sûr d' est parallèle à α.

Corollaire. *Si une droite est parallèle à un plan, toute parallèle à cette droite contenant un point du plan est incluse dans ce plan.*

Théorème 5 : *Si une droite est parallèle à un plan, elle est parallèle à tout plan parallèle au premier.*

Soit d une droite parallèle au plan α et α' un plan parallèle à α. Si α et α' sont confondus, le théorème est trivial.

Supposons donc les deux plans distincts.

a) Si d et α' ont un point P commun, par un point Q quelconque de α, on peut mener une parallèle e à d ; elle est incluse dans α (corollaire). La parallèle e' à e menée par P est, de la même façon, incluse dans α'. Comme d et e' ont la même direction et un point commun, elles doivent être confondues et par suite, d est parallèle à α'.

b) Si d et α' n'ont pas de point commun, alors d est parallèle à α'.

Théorème 6 : *Par un point de l'espace, on peut mener un et un seul plan parallèle à deux droites non parallèles données.*

Soit P le point donné, a et b les droites données. Par P, on mène a' parallèle à a et b' parallèle à b. Les deux droites a' et b' étant sécantes, elles déterminent une plan ϖ. En vertu du théorème 4, ce plan est parallèle à a et à b.

S'il existait un autre plan ϖ' parallèle à la fois à a et à b, on verrait que a' et b' devraient être incluses dans ϖ' en vertu du corollaire et il en résulterait que $\varpi = \varpi'$.

Théorème 7 : *Par un point de l'espace, on peut mener un et un seul plan parallèle à un plan donné.*

Soit ϖ le plan et P le point donné. On peut toujours trouver deux droites sécantes dans ϖ, il suffit alors d'appliquer le théorème précédent.

Théorème 8 : *Si deux plans sécants sont parallèles à une même droite, alors leur intersection est parallèle à cette droite.*

Supposons que les plans α et β se coupent suivant une droite i et que d est une droite à la fois parallèle à α et β. Considérons maintenant une droite d' parallèle à d et passant par un point de i, d' est incluse dans α et incluse dans β en vertu du corollaire ; elle doit donc être confondue avec i.

4. Les 1-directions et les 2-directions

La relation "être parallèle à" dans l'ensemble des plans de l'espace est évidemment réflexive et symétrique ; nous la supposerons de plus transitive. Une classe d'équivalence pour cette relation s'appellera **2-direction**.

Si deux plans sont parallèles, on peut dire qu'ils ont la même 2-direction.

Si deux plans ont un point en commun et la même 2-direction, ils sont confondus.

La relation "être parallèle à" dans l'ensemble des droites de l'espace est évidemment réflexive et symétrique. Nous la supposerons de plus transitive. Une classe d'équivalence pour cette relation s'appelle **1-direction** ou **direction**.

De deux droites parallèles dans l'espace, on peut donc dire, comme en géométrie plane, qu'elles ont la même direction.

Si deux droites ont un point commun et la même direction, elles sont confondues.

Si une droite est parallèle à un plan, on dira que la 1-direction de la droite est incluse dans la 2-direction du plan.

Ceci peut paraître difficile, mais une représentation des 1-directions et des 2-directions peut être faite.

Considérons une droite d et un plan α quelconques dans l'espace. Appelons δ la 1-direction de d et Δ la 2-direction de α.

Si on fixe un point O dans l'espace, on peut alors construire la droite d_0 qui est parallèle à d et qui passe par O ; de même, on peut construire le plan α_0 qui est parallèle à α et qui passe par O. Nous pouvons dire que d_0 est un représentant de δ et que α_0 est un représentant de Δ. Par abus de langage, on pourrait aussi dire que d_0 est "la" direction de d et que α_0 est "la" 2-direction de α.

Si la droite d est parallèle au plan α, alors la droite d_0 sera aussi parallèle au plan α_0 mais, ayant un point commun avec ce plan, elle y sera incluse.

Par extension de langage, on dira que si une droite est parallèle à un plan, alors sa 1-direction est incluse dans la 2-direction du plan.

Réciproquement, si la 1-direction d'une droite est incluse dans la 2-direction d'un plan, les théorèmes précédents nous montrent que la droite sera parallèle au plan.

Critère 1 : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit parallèle à un plan est que sa* 1*-direction soit incluse dans la* 2*-direction du plan.*

Notamment, toute droite incluse dans un plan est parallèle à ce plan par définition, sa 1-direction est donc incluse dans la 2-direction du plan.

Sous-critère 1 : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit parallèle à un plan est qu'elle soit parallèle à une droite de ce plan.*

Tout comme le plan α_0 est entièrement déterminé par deux droites sécantes en O, on peut convenir qu'une 2-direction est entièrement déterminée par deux 1-directions distinctes. D'ailleurs, c'est aussi une conséquence du théorème 7.

Réciproquement, si on considère deux plans distincts passant par O, leur intersection est une droite passant par O. On peut alors convenir que deux 2-directions distinctes ont en commun une 1-direction. D'ailleurs, c'est une conséquence du théorème 8.

Deux 1-directions déterminent une et une seule 2-direction qui les contient.

Deux 2-directions ont en commun une et une seule 1-direction.

Nous pouvons compléter an ajoutant des critères évidents.

Critère 2 : *La condition nécessaire et suffisante pour que deux droites soient parallèles est qu'elles aient la même* 1*-direction.*

Critère 3 : *La condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient parallèles est qu'ils aient la même* 2*-direction.*

5. Suite des propriétés des droites et plans parallèles

Droites

a) *Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre.*

Si un plan coupe une des deux droites, sa 2-direction ne contient pas la 1-direction de la droite, donc il coupe toutes les autres droites parallèles à la première.

b) *Si deux droites parallèles sont respectivement incluses dans deux plans sécants, elles sont aussi parallèles à l'intersection des deux plans.*

Les deux plans sécants ont deux 2-directions distinctes qui déterminent une seule 1-direction qui ne peut être que celle des droites parallèles.

Plans

a) *Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un, coupe l'autre.*

Si deux plans sont parallèles, ils ont la même 2-direction et deux plans ayant des 2-directions différentes sont sécants.

b) *Si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.*

Si une droite coupe un plan, sa 1-direction n'est pas contenue dans la 2-direction du plan et inversement.

c) *Les intersections de deux plans parallèles par un même troisième sont parallèles.*

Deux 2-directions distinctes ont en commun une et une seule 1-direction.

6. Prélude à la géométrie analytique

Plan : un plan est complètement déterminé par la donnée de :
— 3 points non alignés
— 2 droites sécantes
— 1 point et deux 1-directions distinctes
— 1 point et une 2-direction
Droite : une droite est complètement déterminée par la donnée de :
— 2 points distincts
— 1 point et une 1-direction
— 2 plans sécants

7. Problèmes classiques de construction

Nous avons tout le matériel nécessaire pour pouvoir résoudre les problèmes classiques de construction tels que : "construire une droite parallèle à une droite donnée et s'appuyant sur deux droites gauches données".

Ces problèmes seront traités comme des exercices.

8. Les bipoints

Un bipoint est un couple de points de l'espace. Le premier élément s'appelle "origine" du bipoint et le second élément s'appelle "extrémité" du bipoint. La définition et les propriétés de l'équipollence des bipoints vus en géométrie plane s'étendent naturellement au cas de l'espace.

Deux bipoints sont dits parallèles si les droites supports de ces bipoints sont parallèles. Par convention, un bipoint dont l'origine est confondue avec l'extrémité sera parallèle à tous les autres bipoints.

Une justification théorique s'impose cependant ; il s'agit de la généralisation de l'axiome de DESARGUES.

Théorème : *L'équipollence est transitive.*

Ceci étant assuré par l'axiome de DESARGUES dans tout plan de l'espace, il reste à faire la démonstration dans le cas général où les droites supports des bipoints ne sont pas toutes coplanaires.

Supposons que $(A, B) \sim (A', B')$ et $(A', B') \sim (A'', B'')$, les droites supports respectives d, d' et d'' n'étant pas coplanaires.

Comme d et d' ont la même direction, et comme d' et d'' ont aussi la même direction, on en tire que d est parallèle à d''. De plus, les plans $AA'A''$ et $BB'B''$ sont parallèles, car ils sont définis par les deux mêmes 1-directions. On en déduit que AA'' et BB'' sont coplanaires (dans le plan (d, d'')), mais ne peuvent pas être sécantes ; elles sont donc parallèles. La figure formée par AB et $A''B''$ est bien un parallélogramme et $(A, B) \sim (A'', B'')$.

En géométrie plane, on a affecté un nombre appelé "mesure algébrique" à un bipoint en le comparant à un bipoint de référence porté par la même droite ou par une droite de même direction :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\ \overrightarrow{PQ}$$

On a établi aussi le fait que le rapport des mesures algébriques de deux bipoints parallèles ne dépend pas du bipoint de référence choisi.

Nous admettrons que tous ces résultats restent valables dans l'espace.

9. Les projections

9.1. Projection centrale

On appelle projection de centre O sur un plan α ne passant pas par O la transformation qui, à un point quelconque $P \neq O$ de l'espace, fait correspondre le point P' qui est le point de percée de la droite OP dans le plan α.

On démontre aisément les propriétés suivantes :

a) *la projection d'une droite passant par O et non parallèle à α est un point de α.*

b) *la projection d'une droite ne passant pas par O est une droite de α coplanaire avec la première.*

c) *la projection d'un plan passant par O et non parallèle à α est une droite de α.*

d) *la projection d'un plan ne passant pas par O est α.*

9.2. Projection oblique sur un plan

Considérons un plan α et une direction δ non incluse dans la 2-direction du plan. La projection d'un point P sur α parallèlement à la direction δ est le point de percée dans α de la droite passant par P et ayant la direction δ.

On démontre aisément les propriétés suivantes :

a) *la projection oblique d'une droite ayant la direction δ est un point.*

b) *la projection oblique d'une droite n'ayant pas la direction δ est une droite de α.*

c) *la projection oblique d'un plan dont la 2-direction contient δ est une droite de α.*

d) *la projection oblique d'un plan dont la 2-direction ne contient pas δ est le plan α.*

9.3. Projection oblique sur une droite

Considérons une droite a et une 2-direction Δ ne contenant pas la direction de la droite. La projection d'un point P sur a parallèlement à la 2-direction Δ est le point de percée de a dans le plan passant par P et ayant la 2-direction Δ.

On démontrera aisément les propriétés suivantes :

a) *la projection oblique sur a d'une droite dont la direction est incluse dans Δ est un point.*

b) *la projection oblique sur a d'une droite dont la direction n'est pas incluse dans Δ est a.*

c) *la projection oblique sur a d'un plan dont la 2-direction est Δ est un point.*

d) *la projection oblique sur a d'un plan dont la 2-direction n'est pas Δ est a.*

10. Le théorème de THALES

Théorème : *Des plans parallèles déterminent dans l'ordre sur deux droites qui les coupent des bipoints dont le rapport des mesures algébriques est constant.*

Démontrons-le pour trois plans α, β, γ et deux droites d et d' ; l'extension au cas général est immédiate. Si les deux droites sont coplanaires, nous sommes ramenés au théorème de THALES dans le plan. Si les deux droites sont gauches, appelons A et A' leurs intersections avec α, B et B' leurs intersections avec β, C et C' leurs intersections avec γ ; menons par A' la parallèle d'' à d ; le plan (d, d'') coupe les deux plans β et γ suivant deux parallèles BB'' et CC'' qui sont elles-mêmes parallèles à AA'. Nous avons ainsi

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{B''C''}}$$

et de même, le plan (d', d'') coupe β et γ suivant deux parallèles $B'B''$ et $C'C''$, si bien que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{B''C''}}$$

et, en combinant les deux,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème de THALES permet aussi d'affirmer que la projection parallèle d'une droite sur une autre droite conserve le rapport des mesures algébriques des segments.

On pourrait alors démontrer (admettre ?) que la projection parallèle sur une droite conserve l'équipollence.

11. Les dilatations de l'espace

11.1. Translation

Soit (A, B) un bipoint , l'image P' d'un point P quelconque de l'espace par une translation d'amplitude (A, B) est définie comme suit : les bipoints (A, B) et (P, P') sont équipollents.

Autrement dit, on passe de P à P' en appliquant une ou deux fois la règle du parallélogramme dans le plan ABP ou dans tout plan passant par ABP s'ils sont alignés.

Si (A, B) est un bipoint tel que $A = B$, en vertu de la définition de l'équipollence, la translation qui lui correspond est une transformation identique.

Propriétés

a) *L'image d'une droite par une translation est une droite de même direction que la première.*
Soient P, Q, R trois points d'une droite d et leurs images P', Q' et R'. Le bipoint (P', Q') est équipollent à (P, Q) et (Q', R') est équipollent à (Q, R). Comme $PQ//QR$, on a que $P'Q'//Q'R'$ et il s'ensuit qu'à des points alignés correspondent bien des points alignés et que l'image d'une droite est une droite parallèle à la première.

b) *L'image d'un plan par une translation est un plan de même* 2-*direction que le premier.*
Soient P, Q, R trois points non alignés d'un plan α et P', Q', R' leurs images ; aux droites PQ et QR correspondent les droites $P'Q'$ et $Q'R'$ respectivement parallèles à PQ et QR. Si M est un point quelconque de α, aux droites PM, QM, RM correspondent des droites $P'M', Q'M', R'M'$ qui leur seront parallèles et on voit que M' sera un point du plan déterminé par P', Q', R'. En se servant du critère de parallélisme de deux plans, on établit que le plan image est bien parallèle à α.

c) *La translation est une permutation de l'espace.*

d) *La translation conserve l'équipollence.*

11.2. Homothétie

Soit r un nombre réel non nul et O un point fixé dans l'espace. Alors, à tout point P de l'espace, on associe le point P' tel que :

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = r \text{ si } P \neq O \text{ et } P' = O \text{ si } P = O.$$

On dira qu'on effectue une homothétie de centre O et de rapport r.

Si $r = 1$, l'homothétie est une transformation identique.

L'homothétique d'une droite ou d'un plan passant par O est cette droite ou ce plan.

Propriétés

a) *L'homothétique d'une droite est une droite de même direction.*
Si la droite passe par O, son image est elle-même. Sinon, prenons trois points P, Q, R sur cette droite et considérons leurs images P', Q', R' ; il est évident que P', Q', R' appartiennent au plan $OPQR$. On utilise alors les propriétés de l'homothétie plane et on sait que P', Q', R' seront alignés sur une droite du plan $OPQR$, droite qui sera parallèle à la droite de départ.

b) *L'homothétique d'un plan est un plan de même 2-direction.*
Soient P, Q, R trois points non alignés ; ils déterminent un plan α. Si α contient O, son image est lui-même ; sinon désignons par P', Q', R' les images des points. Aux droites PQ et PR de α, correspondent des droites $P'Q'$ et $P'R'$ qui leur sont respectivement parallèles, donc le plan α' contenant P', Q' et R' est parallèle à α. En refaisant la même démonstration que ci-dessus, on prouve qu'à tout point de α correspond un point de α' et la propriété est alors établie.

c) *L'homothétie est une permutation de l'espace.*

d) *L'homothétie conserve l'équipollence.*

11.3. Symétries centrales

On appelle symétrie de centre O l'homothétie de centre O et de rapport $r = -1$.

12. Figures remarquables dans l'espace

En plus des éléments fondamentaux eux-mêmes, certaines associations d'éléments fondamentaux dans l'espace méritent une attention particulière.

12.1. Figures non limitées

1/2 espace

Si on considère un plan dans l'espace, il partage l'espace en deux régions, appelées chacune 1/2 espace.

On peut distinguer 1/2 espace fermé et 1/2 espace ouvert selon que l'on considère que le plan appartient ou non à la région donnée. Dans la suite, nous supposerons, sauf indication contraire, que les 1/2 espaces sont fermés.

Le plan s'appelle frontière du 1/2 espace.

Dièdre

On appelle dièdre la figure formée par l'intersection de deux 1/2 espaces limités par des plans sécants.

La droite commune aux deux plans s'appelle *arête* du dièdre ; les 1/2 plans appartenant aux frontières des 1/2 espaces et situés dans leur intersection s'appellent les *faces* du dièdre.

Trièdre

On appelle trièdre la figure formée par l'intersection de trois 1/2 espaces limités par des plans ayant un point en commun.

Les demi-droites situées sur l'intersection des plans 2 à 2 et appartenant au trièdre s'appellent *arêtes* du trièdre (il y en a 3) ; les portions de plans appartenant aux frontières des 1/2 espaces et situés dans le trièdre s'appellent *faces* du trièdre et le point commun aux trois plans s'appelle *sommet* du trièdre.

12.2. Figures solides

Tétraèdre

On appelle tétraèdre la figure formée par l'intersection de quatre 1/2 espaces à condition que les frontières des 1/2 espaces ne soient pas concourantes et que chaque 1/2 espace contienne le trièdre qui doit être formé par les trois autres.

On peut également concevoir un tétraèdre de la manière suivante : soit ABC un triangle et D un point de l'espace n'appartenant pas au plan du triangle. Le tétraèdre est le solide limité par les 4 faces triangulaires ABC, ABD, ACD, BCD.

Les surfaces triangulaires s'appellent *faces* (il y en a 4) ; les droites d'intersection des faces 2 à 2 s'appellent *arêtes* (il y en a 6) et les points d'intersection des arêtes s'appellent *sommets* (il y en a 4).

Prisme

On considère un n-latère dans un plan α et les plans ϖ_i projetant ce n-latère dans une direction non incluse dans la 2-direction du plan α ; on considère aussi un plan β parallèle à α. On appelle prisme le solide limité par les plans ϖ_i, α et β.

Le n-latère dans α et le n-latère projection dans β sont appelés *bases* du prisme ; les quadrilatères obtenus en considérant un côté du n-latère et sa projection dans β déterminent les *faces latérales* du prisme. Les côtés des n-latères dans α et β sont des *arêtes* du prisme ; les sommets des n-latères sont les *sommets* du prisme.

Cas particuliers :
1) si le n-latère de base est un trilatère, on parle de prisme à base triangulaire
2) si le n-latère de base est un parallélogramme, le prisme s'appelle *parallélépipède*.

Pyramide

On considère un n-latère dans un plan α et les plans ϖ_i projetant ce n-latère à partir d'un point n'appartenant pas au plan α. On appelle pyramide le solide limité par les plans ϖ_i et α.

Le point à partir duquel on projette s'appelle *sommet* de la pyramide. Le n-latère dans α est appelé *base* de la pyramide ; les triangles obtenus en projetant chacun des côtes du n-latère à partir du sommet s'appellent *faces latérales* de la pyramide ; les côtés du n-latère et les droites projetant les sommets du n-latère sont les *arêtes* de la pyramide.

Cas particulier : un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire, chacune des faces du tétraèdre pouvent être considérée comme base.

Octaèdre

On appelle octaèdre la figure formée par deux pyramides ayant même base quadrangulaire et situées dans des 1/2 espaces différents par rapport au plan de cette base.

13. Les vecteurs de l'espace

13.1. Vecteurs liés

Choisissons un point O dans l'espace que nous avons étudié ci-dessus. En distinguant ce point parmi les autres, on dit que l'espace est muni d'une origine ou encore que l'espace est pointé.

Définition

Un vecteur lié est un bipoint ayant O pour origine et un point quelconque de l'espace pour extrémité.

Par convention, le vecteur lié ayant O pour origine et O pour extrémité est appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$.

La donnée d'un point quelconque P de l'espace entraîne la connaissance d'un et d'un seul vecteur lié que l'on notera $\overrightarrow{OP}$; inversement, la donnée d'un vecteur lié entraîne la connaissance d'un et d'un seul point de l'espace.

L'ensemble des vecteurs liés dans l'espace muni d'une origine est noté E_0.

— Deux vecteurs liés de E_0 sont parallèles lorsque leurs extrémités et O sont alignés : $\overrightarrow{OP}$ // $\overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow O, P, Q$ alignés. Une conséquence de cette définition est que le vecteur nul est parallèle à tout autre vecteur de E_0.

— Deux vecteurs liés de E_0 sont opposés si l'image de l'extrémité de l'un dans la symétrie centrale de centre O est l'extrémité de l'autre. Suite à la convention, l'opposé du vecteur nul est lui-même. Deux vecteurs opposés sont évidemment parallèles. L'existence et l'unicité d'un tel opposé sont garanties par les propriétés de la symétrie centrale. L'opposé de l'opposé est le vecteur de départ. Si $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ sont opposés, on écrit $\overrightarrow{OP}= - \overrightarrow{OQ}$.

— Deux vecteurs liés parallèles sont dits de même sens si leurs extrémités appartiennent à la même demi-droite d'origine O et ils sont dits de sens contraires dans l'autre cas.

— Trois vecteurs liés de E_0 sont coplanaires si leurs extrémités et O appartiennent à un même plan : $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ coplanaires $\Leftrightarrow O, P, Q, R$ coplanaires. Une conséquence de cette définition est que trois vecteurs, dont deux au moins sont parallèles, sont toujours coplanaires.

Opérations sur les vecteurs liés de E_0

Addition

Soient $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs liés de E_0, leur somme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est par définition le vecteur lié $\overrightarrow{OC}$ défini par la règle du parallélogramme dans le plan des deux vecteurs ou dans tout plan passant par OAB si les deux vecteurs sont parallèles.

Propriétés de l'addition : On vérifiera que :

— *la somme de deux vecteurs liés de E_0 est un vecteur lié de E_0 ;*

— *l'addition de deux vecteurs liés est commutative :* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$;

— *l'addition de deux vecteurs liés est associative :* $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})+ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA} +(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$;

— *le vecteur nul est un élément neutre pour l'addition :* $\overrightarrow{OA} + \vec{0} =\overrightarrow{OA}$;

— *l'inverse pour l'addition d'un vecteur lié est son opposé :* $\overrightarrow{OA} +(- \overrightarrow{OA}) = \vec{0}$.

Différence

La différence de deux vecteurs liés vaut la somme du premier et de l'opposé du second : $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA} +(- \overrightarrow{OB})$.

Multiplication par un scalaire

Soient $\overrightarrow{OA}$ un vecteur lié de E_0 et r un nombre réel. Par définition, le vecteur $r\ \overrightarrow{OA}$ vaut $\vec{0}$ si $r = 0$ et est le vecteur lié dont l'extrémité est le point image de A dans l'homothétie de centre O et de rapport r si $r \neq 0$.

Le vecteur $r\ \overrightarrow{OA}$ est naturellement parallèle au vecteur $\overrightarrow{OA}$; si r est positif, $\overrightarrow{OA}$ et $r\ \overrightarrow{OA}$ ont le même sens ; si r est négatif, $\overrightarrow{OA}$ et $r\ \overrightarrow{OA}$ sont de sens contraires.

Propriétés de la multiplication par un scalaire :

— *la multiplication d'un vecteur lié de E_0 par un réel fournit un vecteur lié de E_0 ;*

— *la multiplication est associative mixte : $r(s\ \overrightarrow{OA}) = (rs)\ \overrightarrow{OA}$;*

— *la multiplication est distributive par rapport à l'addition des réels et à l'addition des vecteurs :*
$(r+s)\ \overrightarrow{OA} = r\ \overrightarrow{OA} + s\ \overrightarrow{OA}$, $r(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = r\ \overrightarrow{OA} + r\ \overrightarrow{OB}$;

— *le réel 1 est un élément unité pour la multiplication : $1\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$.*

L'ensemble des vecteurs liés de E_0 muni des opérations addition et multiplication par un scalaire, jouissant des propriétés ci-dessus, constitue, comme on le verra plus tard, un **espace vectoriel réel**, noté E_0.

On peut ainsi introduire les principales notions attachées à la structure d'espace vectoriel, il est bon de faire quelques exercices et, en prélude à la géométrie analytique, il faut découvrir comment sont les bases de E_0.

13.2. Vecteurs libres

Deux bipoints sont équipollents si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par un ou deux parallélogrammes selon qu'ils sont colinéaires ou non.

La relation d'équipollence entre bipoints est une relation d'équivalence et nous appellerons **vecteur libre** de E une classe d'équivalence pour la relation d'équipollence dans l'ensemble des bipoints de E.

On peut montrer qu'il y a bijection entre l'ensemble des vecteurs libres de E et l'ensemble des vecteurs liés de E_0.

Nous pouvons ainsi définir sur l'ensemble des vecteurs libres de E les mêmes opérations que sur l'ensemble des vecteurs liés de E_0 ; elles jouiront des mêmes propriétés que celles que nous avons répertoriées ci-dessus (espaces vectoriels isomorphes).

L'ensemble des vecteurs libres de E muni des opérations addition et multiplication par un scalaire, jouissant des propriétés analogues à celles vues ci-dessus, constituera lui aussi un **espace vectoriel réel** noté L.

14. Géométrie analytique

On pourrait faire à partir d'ici la géométrie analytique affine dans l'espace.

Une 1-direction est complètement déterminée si on connaît une droite passant par l'origine, ce qui revient à se donner un vecteur non nul ; une 2-direction est complètement déterminée si on connaît un plan passant par l'origine ou encore, deux vecteurs linéairement indépendants. Une droite est ainsi déterminée par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul (vecteur-direction) et un plan est déterminé par la donnée d'un point et de deux vecteurs linéairement indépendants.

Ceci nous permet d'obtenir les équations paramétriques d'une droite dans l'espace et l'équation cartésienne d'un plan dans l'espace. Ceci nous permet également d'obtenir les conditions analytiques de parallélisme.

Il est pourtant assez improbable que les élèves aient à ce niveau une connaissance étendue des systèmes linéaires, connaissance indispensable pour pouvoir établir correctement toutes les propriétés affines.

Nous nous contenterons donc de voir les équations des plans et des droites et les conditions de parallélisme dans la deuxième partie, c'est-à-dire dans l'espace euclidien et dans des repères orthonormés.

Adresse de l'auteur :

Jacques NAVEZ, Institut de Mathématique
Avenue des Tilleuls 15, 4000 Liège

Rencontre simple, rencontre double, quelle différence !

J. Paris, *Institut de Statistique, UCL.*

Dans le numéro 105 de la revue, C. VAN HOOSTE a proposé une solution constructive du problème de la rencontre simple, qui ne fait pas appel aux méthodes probabilistes. Quand on utilise celles-ci, on peut déduire rapidement les résultats intéressants et résoudre de manière similaire le problème de la rencontre double.

1. La rencontre simple

De manière générale, on peut formuler le problème sous la forme suivante : on répartit au hasard n boules identiques, numérotées de 1 à n, entre n urnes numérotées de 1 à n de manière telle que chaque urne contienne une et une seule boule. On suppose que les $n!$ répartitions possibles sont équiprobables et on appelle rencontre au numéro i le fait que la boule portant le numéro i tombe dans l'urne numéro i. On demande de trouver la loi de probabilité, la moyenne et la variance de la variable aléatoire X qui représente le nombre de rencontres. On voit de suite que les valeurs possibles de X sont les entiers $0, 1, 2, \cdots, n-1, n$. Il reste donc à chercher les probabilités

$$p_k^{(n)} = P(X = k) \tag{1}$$

Pour ce faire, définissons les événements suivants :

1) A_i est l'événement qui est réalisé quand il y a rencontre au numéro i.
2) $B_1^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est l'événement qui est réalisé quand il y a une rencontre au moins.
3) $B_0^{(n)} = \overline{B_1^{(n)}}$ est le complémentaire de $B_1^{(n)}$ et n'est réalisé que s'il n'y a aucune rencontre dans la répartition des n boules.

Nous avons de suite

$$P\left(B_0^{(n)}\right) + P\left(B_1^{(n)}\right) = 1 \tag{2}$$

et il suffit donc de connaître une des deux probabilités pour trouver l'autre.

Comme le nombre total de situations possibles est $n!$, le nombre de situations favorables à $B_0^{(n)}$ est $n!\ P\left(B_0^{(n)}\right)$. Il en résulte que la probabilité $p_k^{(n)}$ cherchée doit satisfaire la relation

$$n!\ p_k^{(n)} = C_n^k \cdot (n-k)!\ P\left(B_0^{(n-k)}\right) \tag{3}$$

car pour avoir k rencontres exactement dans la répartition des n boules, on doit d'abord choisir, sans remise et sans ordre, les k urnes où il y aura rencontre et avoir zéro rencontre dans les $(n-k)$ urnes non choisies. Il en résulte que

$$p_k^{(n)} = \frac{1}{k!}\ P\left(B_0^{(n-k)}\right) \tag{4}$$

Pour trouver $P\left(B_1^{(n)}\right) = P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$, il suffit d'appliquer la formule de Poincaré, à savoir :

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i\neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i\neq j\neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &- \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned} \tag{5}$$

Comme on a :

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, n \\ P(A_i \cap A_j) &= \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \qquad i \neq j \end{aligned} \tag{6}$$

et ainsi de suite, on en déduit, puisque tous les termes de chacune des sommes sont égaux, que

$$\begin{aligned} P\left(B_1^{(n)}\right) &= P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} C_n^i \frac{(n-i)!}{n!} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i!} \end{aligned} \tag{7}$$

Dès lors, nous trouvons

$$P\left(B_0^{(n)}\right) = 1 - P\left(B_1^{(n)}\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \tag{8}$$

et finalement

$$p_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!} \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

On notera en particulier que

$$\begin{aligned} &1) \quad p_{n-1}^{(n)} = 0 \\ &2) \quad \lim_{n \to +\infty} p_k^{(n)} = e^{-1} \frac{1}{k!} \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{10}$$

soit le terme général de la probabilité liée à une variable aléatoire de Poisson de moyenne 1 et de variance 1. Cette constatation s'explique aisément si on remarque que l'on a toujours, quel que soit n,

$$EX = \text{ var } X = 1$$

On peut obtenir ce résultat à partir des définitions de moyenne et variance mais il est de loin plus instructif de remarquer que la variable aléatoire X peut s'écrire sous la forme d'une somme de variables aléatoires indicatrices non indépendantes

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \tag{11}$$

où Y_i est l'indicatrice de l'urne i qui prend la valeur 1 lorsqu'il y a rencontre en i et la valeur 0 sinon. On a donc

$$P(Y_i = 1) = P(A_i) = \frac{1}{n} \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{12}$$

$$EY_i = \frac{1}{n} \tag{13}$$

$$EX = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \tag{14}$$

De même, on a :

$$\text{var } Y_i = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n}) \tag{15}$$

$$\text{cov } (Y_i, Y_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2(n-1)} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\text{var } X &= \sum_{i=1}^{n} \text{var } Y_i + 2\sum_{i\neq j} \text{cov }(Y_i, Y_j) \qquad (17)\\ &= n \cdot \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n}) + 2C_n^2 \frac{1}{n^2(n-1)} = 1\end{aligned}$$

Remarque :

A titre d'exercice, on pourra vérifier les probabilités conditionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}&P(A_i|A_j) = P(A_j|A_i) = \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} = P(A_i)\\ &P(A_i^c|A_j) = \frac{n-2}{n-1}\\ &P(A_i|A_j^c) = \frac{n-2}{(n-1)^2} < \frac{1}{n} = P(A_i) \qquad (18)\\ &P(A_i^c|A_j^c) = \frac{n^2-3n+3}{(n-1)^2}\end{aligned}$$

2. La rencontre double

On répartit au hasard une première série de n boules identiques, numérotées de 1 à n, entre n urnes numérotées de 1 à n de manière telle que chaque urne contienne une et une seule boule. On fait de même pour une deuxième série de boules du même type. On suppose que les $(n!)^2$ répartitions possibles sont équiprobables et on appelle rencontre double au numéro i le fait que les deux boules portant le numéro i tombent dans l'urne numéro i. On demande de trouver la loi de probabilité, la moyenne et la variance de la variable aléatoire X qui représente le nombre de rencontres doubles.

On voit de suite que les valeurs possibles de X sont encore les entiers $0, 1, 2, \cdots, n-1, n$. Il reste donc à chercher les probabilités

$$\bar{p}_k^{(n)} = P(X = k) \qquad (19)$$

On définit les mêmes événements que ci-dessus en remplaçant le mot rencontre par rencontre double. Comme

$$P(A_i) = \left(\frac{(n-1)!}{n!}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{20}$$

$$P(A_i \cap A_j) = \left(\frac{(n-2)!}{n!}\right)^2 = \frac{1}{n^2(n-1)^2} \qquad \begin{array}{l} i, j = 1, 2, \cdots, n \\ i \neq j \end{array} \tag{21}$$

et ainsi de suite, on voit que

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} C_n^i \left(\frac{(n-i)!}{n!}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{(n-i)!}{i!} \end{aligned} \tag{22}$$

$$P\left(B_0^{(n)}\right) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(n-i)!}{i!} \tag{23}$$

Comme plus haut, la relation (3) devient

$$(n!)^2 \, \bar{p}_k^{(n)} = C_n^k \left[(n-k)!\right]^2 P\left(B_0^{(n-k)}\right) \tag{24}$$

et permet de trouver

$$\bar{p}_k^{(n)} = \frac{1}{n!k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{(n-k-i)!}{i!} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{25}$$

En particulier, on vérifiera que, comme dans le premier problème, on a bien $\bar{p}_{n-1}^{(n)} = 0$.

On notera que

$$\bar{p}_0^{(n)} = P(X = 0) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(n-i)!}{i!} \tag{26}$$

diffère de la probabilité que dans chacune des deux répartitions, aucune boule ne fournisse une rencontre simple, à savoir

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{1}{i!}\right)^2 \tag{27}$$

à partir de la formule (9).

Par la même démarche que plus haut, en représentant la variable aléatoire X comme une somme d'indicatrices, on trouve

$$\begin{aligned} P(Y_i = 1) &= \frac{1}{n^2} \\ EX &= n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

et à partir de (17) et (21)

$$\begin{aligned} \text{var } X &= n\frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + 2C_n^2\left(\frac{1}{n^2(n-1)^2} - \frac{1}{n^4}\right) \\ &= \frac{n^2 - n + 1}{n^2(n-1)} \qquad\qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

On voit que moyenne et variance tendent vers zéro si $n \to +\infty$. Ceci explique le résultat suivant

$$\lim_{n \to +\infty} \bar{p}_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Remarque :

Certaines personnes prétendent avoir une capacité réelle à détecter certains phénomènes. Pour vérifier cette affirmation, en psychologie expérimentale, on procède de la façon suivante : on répartit au hasard un ensemble de n cartes, la face tournée contre la table. On donne à la personne un ensemble identique de cartes et on lui demande de placer la carte correspondante en face de chacune des cartes du premier groupe. On peut alors observer le nombre r de rencontres correctes. Pour détecter la capacité réelle de la personne, on vérifie si elle fait mieux que le hasard. Selon la méthodologie des tests d'hypothèses, on acceptera que la personne a une capacité significative de détection si le nombre r est tellement grand que la probabilité ci-dessous, calculée à partir de la formule (9), est inférieure au seuil de signification choisi, soit si

$$P(X \geq r) = \sum_{k=r}^{n} p_k^{(n)} \leq \alpha$$

où α est habituellement choisi égal à 0.01 ou 0.05.

Au contraire, on dira qu'elle n'a pas de capacité réelle et ne fait donc pas mieux que le hasard si cette probabilité est strictement supérieure au α choisi.

On voit donc que l'aptitude de la personne augmente significativement avec r.

On corse la difficulté si on recommence la même expérience en notant maintenant le nombre de rencontres doubles et en utilisant la formule (25).

Adresse de l'auteur :

José PARIS
Institut de Statistique, UCL
Voie du Roman Pays 20
1348 Louvain-La-Neuve.

Essai d'analyse des réponses aux questions de la demi-finale de l'OMB 1996

C. Festraets,

Il a paru intéressant au jury de l'Olympiade d'examiner les réponses fournies aux questions à choix multiples des demi-finales mini, midi et maxi de 1996. C'est la première année où cette olympiade comporte trois niveaux et il peut être utile à la fois pour le jury et pour les professeurs d'examiner quelles sont les questions qui ont été en général bien réussies et celles pour lesquelles une majorité d'élèves ont mal répondu ou n'ont pas répondu du tout. Il n'était guère possible de faire cette étude sur les résultats de l'éliminatoire, étant donné le trop grand nombre (25000 environ) de questionnaires à trier.

Ce qui suit concerne les élèves belges et du Grand Duché de Luxembourg. Des tableaux similaires à celui figurant ci-dessous ont été réalisés pour chacune des neuf régions (Arlon, Bruxelles, Charleroi, Famenne, Grand Duché, Louvain-la-Neuve, Mons, Namur, Tournai). Les insérer ici aurait pris beaucoup trop de place, mais toute personne intéressée peut les obtenir en écrivant à l'adresse figurant à la fin de l'article.

Dans les deux premiers tableaux mini, midi, maxi, le nombre de réponses exactes pour chacune des trente questions est encadré et en grasses. Outre les 26 questions à choix multiples pour lesquelles vous trouvez le nombre de réponses a, b, c, d, e et le nombre d'abstentions, il y a 4 questions sans réponse préformulée. Pour ces dernières, il est parfois indiqué une réponse fausse donnée par un nombre important d'élèves ; il est aussi à remarquer qu'un pourcentage non négligeable d'élèves fournissent une réponse sous forme de fraction ou de nombre décimal alors qu'il est bien précisé dans le questionnaire que la réponse correcte doit être un entier dans [0 ; 999].

Les moyennes ont été calculées sur le nombre total d'élèves pour chaque niveau. Ne vous étonnez pas si ce nombre total n'est pas exactement la somme des nombres d'élèves de chacune des deux classes (par exemple, 904 participants en mini, 392 en 1ère, 467 en 2ème) ; cela provient du fait que certains élèves oublient d'indiquer leur classe et qu'au Grand Duché, le secondaire comporte sept années, les trois premières participant au niveau mini.

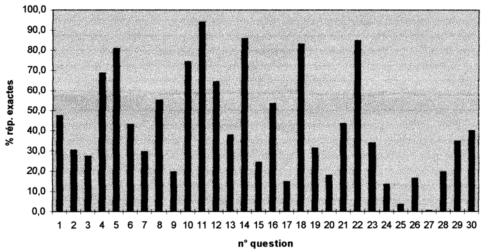
MINI (PREMIERE - DEUXIEME)

TOTAL ($B+GD$: 904)	1	2	3	4	5	6	7	8
nb de a		15	50	125	37	83	4	
nb de b		64	55	7	25	93	**268**	
nb de c		207	**250**	76	**731**	**391**	11	
nb de d		103	16	13	8	34	10	
nb de e		**276**	79	**623**	18	26	13	
nb d'abstentions	50	238	454	59	84	270	598	198
nb de 101	**427**							
nb de 97	399							
nb de 64								**501**
nb de 80								67
nb rép. décim.								62
nb de 315								
nb de 7								
nb de 1ères								
nb de 2èmes								
% rép. exactes	47, 2	30, 5	27, 6	68, 9	80, 8	43, 2	29, 6	55, 4
% abstentions	5, 5	26, 3	50, 2	6, 5	9, 2	29, 8	66, 1	21, 9

TOTAL ($B+GD$: 904)	9	10	11	12	13	14	15
nb de a	38	82	17	13	54	17	**221**
nb de b	**177**	3	2	**582**	**342**	7	6
nb de c	119	46	2	80	13	**773**	9
nb de d	211	19	5	8	50	5	51
nb de e	19	**674**	**848**	96	35	38	11
nb d'abstentions	339	80	30	125	409	58	605
nb de 101							
nb de 97							
nb de 64							
nb de 80							
nb rép. décim.							
nb de 315							
nb de 7							
nb de 1ères							
nb de 2èmes							
% rép. exactes	19, 5	74, 5	93, 8	64, 3	37, 8	85, 5	24, 4
% abstentions	37, 5	8, 8	3, 3	13, 8	45, 2	6, 4	66, 9

TOTAL ($B+GD:904$)	16	17	18	19	20	21	22	23
nb de a	23	164	3	35		378	17	7
nb de b	91	290	20	31		17	3	31
nb de c	**483**	47	48	7		16	**769**	53
nb de d	21	**132**	**753**	118		**395**	34	**308**
nb de e	26	0	11	**283**		23	15	275
nb d'abstentions	260	268	69	429	655	75	66	230
nb de 101								
nb de 97								
nb de 64								
nb de 80								
nb rép. décim.								
nb de 315					**162**			
nb de 7								
nb de 1ères								
nb de 2èmes								
% rép. exactes	$53,4$	$14,6$	$83,2$	$31,3$	$17,9$	$43,6$	$85,0$	$34,0$
% abstentions	$28,7$	$29,6$	$7,6$	$47,4$	$72,4$	$8,2$	$7,3$	$25,4$

TOTAL ($B+GD:904$)	24	25	26	27	28	29	30	
nb de a		37	60	6	52	6	2	
nb de b		**32**	77	**4**	108	5	143	
nb de c		4	38	0	101	203	**363**	
nb de d		0	44	629	**177**	**317**	65	
nb de e		171	**149**	13	13	39	34	
nb d'abstentions	742	660	536	250	453	333	297	
nb de 101								
nb de 97								
nb de 64								
nb de 80								
nb rép. décim.								
nb de 315								
nb de 7	**121**							
nb de 1ères								392
nb de 2èmes								467
% rép. exactes	$13,3$	$3,5$	$16,4$	$0,4$	$19,5$	$35,0$	$40,1$	
% abstentions	$82,0$	$73,0$	$59,2$	$27,6$	$50,1$	$36,8$	$32,8$	



1. Pourcentages de réponses correctes : moyenne et écart-type par région

	Total	1ères	2èmes	Arlon	Bxl	Char.	Fam.
moyenne	42.8	37.9	46.3	39.1	43.4	42.7	40.7
écart-type	26.0	27.2	26.5	26.6	26.6	26.9	25.5

	G.D.	Lg	L.laN.	Mons	Nam.	Tour.
moyenne	40.9	45.7	43.9	39.1	41.1	40.1
écart-type	24.6	25.2	26.7	26.4	27.9	27.1

2. Pourcentages de réponses correctes et pourcentage d'abstentions par type de question

Tout classement est toujours quelque peu arbitraire ; celui qui suit n'y échappe pas, une question portant sur un calcul d'aire pourrait être classée en “géométrie” aussi bien qu'en “grandeurs” et même éventuellement en “calcul algébrique”. Cependant, pour imparfait qu'il soit, le classement ci-dessous me semble permettre de dégager certains renseignements sur les connaissances et les compétences des élèves.

Géométrie

question n°	3	6	11	16	17	18	26	30
% rép. exactes	27.6	43.2	93.8	53.4	14.6	83.2	16.4	40.1
% abstentions	50,2	29,8	3,3	28,7	29,6	7,6	59,2	32,8

Arithmétique

question n°	1	12	14	21	24
% rép. exactes	47.2	64.3	85.5	43.6	13.3
% abstentions	5,5	13,8	6,4	8,2	82

Grandeurs (aires, volumes, vitesses)

question n°	4	9	15	27	28
% rép. exactes	68.9	19.5	24.4	0.4	19.5
% abstentions	6,5	37,5	66,9	27,6	50,1

Problèmes divers

question n°	8	13	20	23	25	29
% rép. exactes	55.4	37.8	17.9	34.0	3.5	35.0
% abstentions	21,9	45,2	72,4	25,4	73	36,8

Logique

question n°	2
% rép. exactes	30.5
% abstentions	26,3

Calcul algébrique

question n°	7
% rép. exactes	29.6
% abstentions	66,1

Graphique

question n°	5
% rép. exactes	80.8
% abstentions	9,2

Statistiques

question n°	19	22
% rép. exactes	31.3	85.0
% abstentions	47,4	7,3

Probabilités

question n°	10
% rép. exactes	74.5
% abstentions	8,8

3. Comparaison 1ères - 2èmes

Pourcentages de réponses exactes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1ères	45.0	29.5	19.5	66.4	81.9	33.3	3.8	48.3	21.3	70.7
2èmes	50.1	31.6	34.4	73.6	80.7	52.6	47.9	60.5	18.2	77.3

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1ères	94.4	57.2	32.8	83.2	21.3	32.3	9.6	81.4	30.2	14.5
2èmes	94.4	69.3	40.2	87.1	27.1	73.0	17.5	87.5	30.8	20.7

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1ères	45.5	83.7	26.2	12.4	4.5	7.6	0.0	13.7	30.2	36.1
2èmes	42.1	85.4	39.6	14.1	2.5	24.6	0.8	23.3	39.4	44.1

Pourcentages d'abstentions

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1ères	5.8	26.2	61.0	8.6	9.6	38.6	93.1	27.9	40.7	9.4
2èmes	4.9	26.5	39.6	3.4	8.1	20.3	46.8	16.2	34.9	8.3

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1ères	2.2	15.2	47.3	7.8	70.2	47.3	34.0	8.6	50.3	74.5
2èmes	2.7	12.6	45.1	5.7	64.0	10.2	24.6	4.4	45.3	70.2

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1ères	6.8	6.8	32.3	83.9	69.9	71.7	31.2	59.7	41.2	36.6
2èmes	9.4	7.9	20.9	81.3	76.0	47.5	24.1	41.7	33.1	27.8

D'une manière générale, les résultats des 2èmes sont meilleurs que ceux des 1ères (ce qui semble normal) ; la différence est très marquée pour les questions :

–3. inégalité dans le triangle,

–7. produit de deux polynômes,

–16. transformations du plan,

–17. intersection cercle et losange,

–23. engrenages,

–26. transformations du plan,

–28. vitesses moyennes.

4. Classement des questions en fonction du pourcentage de réussite

$x \geqslant 90\%$	11
$80\% \leqslant x < 90\%$	$14, 22, 18, 5$
$70\% \leqslant x < 80\%$	10
$60\% \leqslant x < 70\%$	$4, 12$
$50\% \leqslant x < 60\%$	$8, 16$
$40\% \leqslant x < 50\%$	$1, 21, 6, 30$
$30\% \leqslant x < 40\%$	$13, 29, 19, 23, 2$
$20\% \leqslant x < 30\%$	$7, 3, 15$
$10\% \leqslant x < 20\%$	$9, 28, 20, 17, 26, 24$
$0\% \leqslant x < 10\%$	$25, 27$

5. Quelques remarques générales

1) A la question 1 (nombre premier le plus proche de 100), il y a pratiquement autant de réponses “97” que de réponses “101”.

2) A la question 8 (sans réponse préformulée), 7% des réponses ne sont pas des entiers.

3) Les questions avec un fort pourcentage d'abstention sont les questions :

– 7. produit de deux polynômes,

– 15. vitesse d'un cycliste,

– 20. roues d'un wagonnet,

– 24. 2n + 3 diviseur de 6n + 43,

– 25. vente, achat, pourcentages,

– 26. demi-droites.

Pour les questions 24, 25, 26, on peut penser que c'est dû à la fatigue en fin de questionnaire, cependant les questions 29 et 30 ont obtenu respectivement 35% et 40% de bonnes réponses.

4) En géométrie, les développements d'un cube (question 11) et la classification des quadrilatères (question 18) sont particulièrement bien connus. Les élèves savent très bien lire un graphique (question 5).

5) Les questions 22 de statistique et 10 de probabilité ne semblent pas poser de problème.

6) La question 27 (vitesse moyenne d'un avion) n'a été faite par quasiment personne (4 réponses correctes sur 904), avec seulement 27% d'absten-

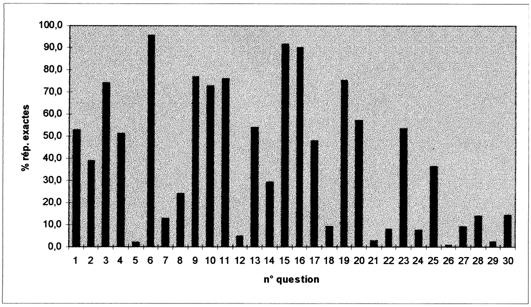
tions ; 70% des réponses correspondent au distracteur D (c'est-à-dire vitesse moyenne = moyenne arithmétique des vitesses aller et retour, au lieu de la moyenne harmonique).

TOTAL ($B+GD:810$)	1	2	3	4	5	6	7	8
nb de a		14	14	10		5	24	**196**
nb de b		46	**598**	23		1	**104**	1
nb de c		93	43	**416**		1	5	9
nb de d		68	2	24		3	25	1
nb de e		**315**	19	25		**774**	68	15
nb d'abstentions	64	272	132	311	653	25	582	587
nb de 101	**428**							
nb de 97	295							
nb de 72					**17**			
nb de 64								
nb de 80								
nb rép. décim.								
nb de 72								
nb de 180								
nb de 3èmes								
nb de 4èmes								
% rép. exactes	52, 8	39, 0	73, 9	51, 3	2, 0	95, 5	12, 8	24, 1
% abstentions	7, 9	33, 5	16, 2	38, 3	80, 6	3, 0	71, 8	72, 4

TOTAL ($B+GD:810$)	9	10	11	12	13	14	15
nb de a	64		**618**		21	36	12
nb de b	3		33		8	**438**	2
nb de c	16		2		5	10	**743**
nb de d	16		32		**236**	54	21
nb de e	**623**		3		6	16	3
nb d'abstentions	86	81	121	741	533	255	21
nb de 101							
nb de 97							
nb de 72							
nb de 64		**592**					
nb de 80		56					
nb rép. décim.		28					
nb de 72				**39**			
nb de 180				14			
nb de 3èmes							
nb de 4èmes							
% rép. exactes	76, 9	73, 0	76, 2	4, 8	54, 0	29, 2	91, 7
% abstentions	10, 6	10, 0	14, 9	91, 4	65, 8	31, 4	2, 5

TOTAL ($B+GD:810$)	16	17	18	19	20	21	22	23
nb de a	10	5	35	2	4	3	176	2
nb de b	1	61	**75**	1	23	**25**	27	30
nb de c	**728**	91	2	1	27	1	8	13
nb de d	12	**390**	242	5	**464**	494	105	**433**
nb de e	17	84	24	**611**	154	8	**64**	7
nb d'abstentions	38	178	430	189	137	278	429	324
nb de 101								
nb de 97								
nb de 72								
nb de 64								
nb de 80								
nb rép. décim.								
nb de 72								
nb de 180								
nb de 3èmes								
nb de 4èmes								
% rép. exactes	$90,0$	$48,0$	$9,2$	$75,4$	$57,4$	$3,0$	$7,9$	$53,5$
% abstentions	$4,6$	$21,9$	$53,0$	$23,3$	$16,9$	$34,3$	$52,9$	$40,0$

TOTAL ($B+GD:810$)	24	25	26	27	28	29	30	
nb de a	34	34	10	42	13	9	50	
nb de b	**61**	95	**8**	**76**	23	3	30	
nb de c	11	87	37	17	48	14	254	
nb de d	1	**297**	3	11	44	1	10	
nb de e	131	5	13	34	**113**	**19**	**118**	
nb d'abstentions	570	291	738	629	568	763	347	
nb de 101								
nb de 97								
nb de 72								
nb de 64								
nb de 80								
nb rép. décim.								
nb de 72								
nb de 180								
nb de 3èmes								391
nb de 4èmes								416
% rép. exactes	$7,5$	$36,6$	$0,9$	$9,2$	$13,9$	$2,3$	$14,5$	
% abstentions	$70,3$	$35,9$	$91,1$	$77,6$	$70,1$	$94,1$	$42,8$	



1. Pourcentage de réponses correctes par région

	Total	3èmes	4èmes	Bxl	Char.	Fam.	G.D.
moyenne	39,6	37,5	41,6	41,7	38,4	38,4	44,8
écart-type	31	31	31 ,3	30,7	31	32,7	32,3

	Lg	L.laN.	Arlon	Mons	Nam.	Tour.
moyenne	39,5	38,8	35,8	39,1	34,8	34,7
écart-type	31,4	31,1	30,5	32,4	30,9	30

2. Pourcentage de réponses correctes et pourcentage d'abstentions par type de question

Géométrie

question n°	4	5	6	7	22	27	28	29
% rép. exactes	51,3	2	95,5	12,8	7,9	9,2	13,9	2,3
% abstentions	38,2	80,6	3	71,8	52,8	77,7	70,1	94,1

Arithmétique

question n°	1	12
% rép. exactes	52,8	4,8
% abstentions	7,9	91,4

Grandeurs (aires, volumes, vitesses)

question n°	3	21	25
% rép. exactes	73,9	3	36,6
% abstentions	16,1	34,1	35,9

Problèmes divers

question n°	10	14	15	18	20	24
% rép. exactes	73	29,2	91,7	9,2	57,4	7,5
% abstentions	10	31,4	2,5	53	16,7	70,3

Logique

question n°	2
% rép. exactes	39
% abstentions	33,4

Statistique

question n°	16	19
% rép. exactes	90	75,4
% abstentions	4,8	23,3

Calcul algébrique

question n°	11	17	26	30
% rép. exactes	76,2	48	0,9	14,5
% abstentions	14,9	22	91,1	42,8

Probabilités

question n°	9	23
% rép. exactes	76,9	53,5
% abstentions	10,6	39,8

Graphiques

question n°	8	13
% rép. exactes	24,1	54
% abstentions	72,3	65,6

3. Comparaison 3èmes - 4èmes

Pourcentages de réponses exactes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3èmes	54,5	37,6	73,1	50,1	1,0	95,7	8,4	14,6	76,7	69,3
4ème	51,2	40,1	74,5	52,6	3,1	95,7	16,8	33,4	77,2	76,7

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3èmes	70,1	3,3	21,2	51,4	91,8	89,3	37,3	9,7	71,4	56,5
4èmes	82,2	6,3	36,8	56,7	91,8	90,6	58,7	8,9	79,3	58,4

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
3èmes	1,5	7,7	50,1	6,4	36,3	0,3	6,6	13,6	2,8	16,4
4èmes	4,6	8,2	56,5	8,7	36,8	1,7	12	14,4	1,9	13

Pourcentages d'abstentions

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3èmes	9,0	31,2	17,9	40,4	81,1	3,8	77,2	82,6	9,5	11,0
4èmes	7,0	36,1	14,9	36,8	80,3	2,4	67,3	63,0	11,8	9,1

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3èmes	18,2	91,6	74,2	32,7	2,6	4,9	27,6	52,2	27,1	18,2
4èmes	12,0	91,8	57,9	30,5	2,6	4,6	16,8	54,1	20,0	15,6

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
3èmes	33,8	47,1	43,2	72,1	36,1	91,6	79,3	70,8	94,6	50,6
4èmes	34,9	58,7	37,3	69,0	36,1	90,9	76,4	69,7	94,0	35,6

Les résultats des 4èmes sont un peu meilleurs que ceux des 3èmes ; en moyenne, les pourcentages respectifs de réponses exactes sont de 41,6 et 37,5. Les écarts ne sont cependant pas très importants, les questions bien faites par les élèves de 4èmes le sont aussi par les élèves de 3èmes, à l'exception de la question 17 pour laquelle les pourcentages sont curieusement assez différents, cette question ne demandait pas de connaissances spéciales : il s'agissait d'inverser et de simplifier une fraction.

4. Classement des questions en fonction du pourcentage de réussite

$x \geqslant 90\%$	$6, 15, 16$
$80\% \leqslant x < 90\%$	
$70\% \leqslant x < 80\%$	$3, 9, 10, 11,\ 19$
$60\% \leqslant x < 70\%$	
$50\% \leqslant x < 60\%$	$1, 4, 13, 20, 23$
$40\% \leqslant x < 50\%$	17
$30\% \leqslant x < 40\%$	$2, 25$
$20\% \leqslant x < 30\%$	$8, 14$
$10\% \leqslant x < 20\%$	$7, 28, 30$
$0\% \leqslant x < 10\%$	$5, 12, 18, 21, 22, 24, 26, 27, 29$

5. Quelques remarques générales

1) Si 52,8% des élèves donnent 101 comme nombre premier le plus proche de 100, il y en a encore 36,4% pour qui c'est 97.

2) Les questions de statistique (16 et 19) et de probabilité (9 et 23) sont correctement résolues.

3) Les élèves se souviennent fort bien des développements du cube (question 6) et en majorité sont capables de lire un graphique (question13).

4) Les questions 5 et 7 ne sont résolues respectivement que par 17 et 104 élèves sur 810 alors qu'il suffisait d'utiliser le théorème de Pythagore.

5) Plus de 75% des élèves sont incapables de reconnaître le graphique d'une parabole (question 8) et plus de 99% connaissent mal les propriétés des racines d'une équation du second degré (question 26).

6) 91,4% des élèves s'abstiennent de répondre à la question 12 portant sur le PGCD et le PPCM et ne nécessitant qu'un calcul fort simple.

7) La question 21 (vitesse moyenne d'un avion) n'est guère mieux résolue par les 3èmes-4èmes que par les 1ères-2èmes ; ici 3% de réponses correctes seulement et 61% des élèves choisissent à nouveau le distracteur D.

8) La géométrie des transformations n'est manifestement pas bien assimilée (question 22 : 7,9% de réponses correctes et question 28, 13,9% de réponses correctes).

9) 3,5% des élèves fournissent une réponse décimale à la question 10 (sans réponse préformulée).

10) Les questions à fort pourcentage d'abstentions (plus de 70%) sont les questions :

– 5. Pythagore ;

– 7. Pythagore ;

– 8. graphique d'une parabole ;

– 12. pgcd, ppcm ;

– 24. problème de pourcentages ;

– 26. équations du second degré ;

– 27. angles inscrits dans un cercle ;

– 28. symétries, rotations ;

– 29. relations dans le triangle rectangle ;

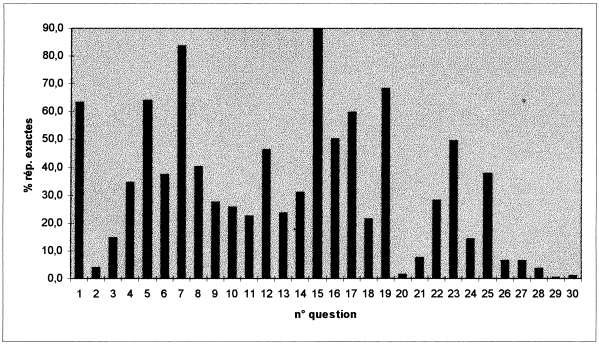
Evidemment les cinq dernières questions étaient les plus difficiles.

TOTAL ($B+GD$: 589)	1	2	3	4	5	6	7	8
nb de a	4	4		**204**		41	20	**236**
nb de b	20	2		17		11	1	8
nb de c	45	14		31		**219**	14	1
nb de d	35	**23**		6		38	8	32
nb de e	**372**	3		46		61	**492**	21
nb d'abstentions	112	543	410	285	63	219	54	288
nb de 72			**86**					
nb de 75			22					
nb de 613					**378**			
nb rép. décim.					54			
nb de 25								
nb de 15								
nb de 5								
nb de 5èmes								
nb de 6èmes								
% rép. exactes	$63,2$	$3,9$	$14,6$	$34,6$	$64,2$	$37,2$	$83,5$	$40,1$
% abstentions	$19,0$	$92,2$	$69,6$	$48,4$	$10,7$	$37,2$	$9,2$	$48,9$

TOTAL ($B+GD$: 589)	9	10	11	12	13	14	15
nb de a	2	67	30	17	71	19	2
nb de b	3	4	8	47	2	**182**	1
nb de c	10	**150**	13	**273**	0	3	3
nb de d	**161**	59	**131**	8	**139**	163	4
nb de e	38	57	9	21	7	23	**527**
nb d'abstentions	375	252	398	223	370	199	52
nb de 72							
nb de 75							
nb de 613							
nb rép. décim.							
nb de 25							
nb de 15							
nb de 5							
nb de 5èmes							
nb de 6èmes							
% rép. exactes	$27,3$	$25,5$	$22,2$	$46,3$	$23,6$	$30,9$	$89,5$
% abstentions	$63,7$	$42,8$	$67,6$	$37,9$	$62,8$	$33,8$	$8,8$

TOTAL ($B + GD : 589$)	16	17	18	19	20	21	22
nb de a		13	42	1	3	28	2
nb de b		1	25	11	1	2	**166**
nb de c		**352**	6	10	2	9	4
nb de d		18	**126**	**402**	**9**	9	25
nb de e		55	17	5	23	**45**	38
nb d'abstentions	144	150	373	160	551	496	354
nb de 72							
nb de 75							
nb de 613							
nb rép. décim.	**295**						
nb de 25							
nb de 15							
nb de 5							
nb de 5èmes							
nb de 6èmes							
% rép. exactes	$50,1$	$59,8$	$21,4$	$68,3$	$1,5$	$7,6$	$28,2$
% abstentions	$24,4$	$25,5$	$63,3$	$27,2$	$93,5$	$84,2$	$60,1$

TOTAL ($B + GD : 589$)	23	24	25	26	27	28	29	30	
nb de a	44	0	3	3	12		0	0	
nb de b	**292**	**84**	**222**	**38**	8		0	**7**	
nb de c	4	7	10	34	**37**		0	16	
nb de d	2	4	218	30	12		**3**	53	
nb de e	63	38	3	2	2		1	0	
nb d'abstentions	184	456	133	481	517	419	585	513	
nb de 72									
nb de 75									
nb de 613									
nb rép. décim.									
nb de 25						**21**			
nb de 15						73			
nb de 5									
nb de 5èmes									295
nb de 6èmes									288
% rép. exactes	$49,6$	$14,3$	$37,7$	$6,5$	$6,3$	$3,6$	$0,5$	$1,2$	
% abstentions	$31,2$	$77,4$	$22,6$	$81,7$	$87,8$	$71,1$	$99,3$	$87,1$	



1. Pourcentages de réponses correctes : moyenne et écart-type par région

	Total	5èmes	6èmes	Arlon	Bxl	Char.	Fam.
Moyenne	32,1	27,9	36,0	28,7	32,3	31,3	27,6
écart-type	24,7	25,7	25,1	24,8	24,4	25,3	23,1

	G.D.	Lg	L.laN.	Mons	Nam.	Tour.
Moyenne	43,9	35,3	33,5	28,7	31,2	33,8
écart-type	28,9	26,9	26,2	24,5	26,0	26,4

2. Pourcentages de réponses correctes et d'abstentions par type de question

Géométrie

question n°	3	17
% rép. correctes	14,6	59,8
% abstentions	69,6	25,5

Grandeurs

question n°	25	29
% rép. correctes	37,7	0,5
% abstentions	22,6	99,3

Arithmétique (calcul, valeur approchée, combinatoire, ...)

question n°	2	6	8	11	24	28	30
% rép. correctes	3,9	37,2	40,1	22,2	14,3	3,6	1,2
% abstentions	92,2	37,2	48,9	67,6	77,4	71,7	87,1

Problèmes divers

question n°	5	14	22
% rép. correctes	64,2	30,9	28,2
% abstentions	10,7	33,8	60,1

Logique

question n°	1
% rép. correctes	63,2
% abstentions	19,0

Statistiques

question n°	15	16
% rép. correctes	89,5	50,1
% abstentions	8,8	24,4

Graphique

question n°	23
% rép. correctes	49,6
% abstentions	31,2

Algèbre

question n°	9	12	20	26	27
% rép. correctes	27,3	46,3	1,5	6,5	6,3
% abstentions	63,7	37,9	93,5	81,7	87,8

Probabilités

question n°	7	19	21
% rép. correctes	83,5	68,3	7,6
% abstentions	9,2	27,2	84,2

Analyse

question n°	4	10	13	18
% rép. correctes	34,6	25,5	23,6	21,4
% abstentions	48,4	42,8	62,8	63,3

3. Comparaison 5èmes - 6èmes

Pourcentages de réponses exactes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5èmes	65,8	3,1	9,5	18,0	65,1	33,6	79,7	37,6	17,6	12,9
6èmes	60,8	4,9	19,8	52,1	63,2	41,3	87,5	43,1	37,5	38,5

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5èmes	12,9	35,6	13,9	29,5	87,8	52,2	56,3	0,0	65,4	0,3
6èmes	31,9	57,3	33,7	32,3	91,0	47,9	63,5	27,4	71,2	2,4

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
5èmes	5,1	21,4	49,2	11,2	36,3	5,4	6,1	4,1	0,0	1,4
6èmes	10,4	35,1	50,7	17,4	38,9	7,6	6,3	3,1	1,0	1,0

Pourcentages d'abstentions

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5èmes	15,3	93,2	73,9	69,5	9,5	40,7	10,2	52,2	72,5	66,1
6èmes	22,9	91,0	66,3	26,7	12,2	33,0	8,0	45,5	54,5	18,4

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5èmes	79,7	50,5	75,9	30,5	10,2	24,4	28,1	74,2	30,2	94,9
6èmes	54,9	24,7	49,3	37,5	7,6	24,7	22,9	52,1	24,0	92,4

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
5èmes	87,5	64,4	30,2	80,0	22,0	80,0	88,8	70,5	100,0	86,8
6èmes	80,9	55,6	32,3	74,7	23,3	83,0	86,8	71,9	98,6	87,2

Les résultats des 6èmes sont, en général, nettement meilleurs que ceux des 5èmes. La différence est très marquée pour les questions :

3. Pythagore
4. Fonction dérivable
9. Système d'équations
10. Graphique de f'
11. Pgcd
12. Système d'équations
13. Graphique de f
18. Asymptote
21. Probabilités
22. Engrenages.

4. Classement des questions en fonction du pourcentage de réussite

$x \geqslant 90\%$	
$80\% \leqslant x < 90\%$	$7, 15$
$70\% \leqslant x < 80\%$	
$60\% \leqslant x < 70\%$	$1, 5, 19$
$50\% \leqslant x < 60\%$	$16, 17$
$40\% \leqslant x < 50\%$	$8, 12, 23$
$30\% \leqslant x < 40\%$	$4, 6, 14, 25$
$20\% \leqslant x < 30\%$	$9, 10, 11, 13, 18, 22$
$10\% \leqslant x < 20\%$	$3, 24$
$0\% \leqslant x < 10\%$	$2, 20, 21, 26, 27, 28, 29, 30$

Quelques remarques générales

1) Si on peut, à la rigueur, comprendre que les 5èmes ignorent quel est le nombre de parties d'un ensemble de 40 éléments (question 2), c'est plus étonnant pour les 6èmes qui ont un cours d'analyse combinatoire.

2) Les réponses en probabilité (questions 7 et 19) et en statistique (question 15) sont en grande majorité correctes et ce aussi bien en 5ème qu'en 6ème.

3) La question 1 (négation d'une proposition) est en général bien faite (alors que cette même question posée en 3ème-4ème n'a obtenu que 39% de réponses exactes).

4) Les transformations du plan (question 17) semblent connues de manière satisfaisante.

5) Aucune question d'analyse n'est résolue par une majorité d'élèves.

6) La question 25 (vitesse moyenne) reçoit une réponse correcte de la part de 222 élèves sur 589, ce qui est nettement mieux qu'en mini ou en midi ; cependant, il y a encore 218 élèves qui choisissent le distracteur D (vitesse moyenne = moyenne arithmétique des vitesses).

7) 9% des élèves fournissent une réponse décimale à la question 5 (sans réponse préformulée).

8) Le pgcd de deux nombres (question 11) est à peine mieux calculé en 6ème qu'en 5ème.

9) Les questions ayant recueilli un fort pourcentage d'abstentions (plus de 70%) sont les questions :

2. nombre de parties d'un ensemble,

20. équation irrationnelle,

21. probabilités,

24. suite géométrique,

26. racines d'une équation polynôme,

27. inégalité,

28. combinatoire,

29. aire,

30. combinatoire.

COMPARAISON MINI, MIDI, MAXI

1. Questions communes

Les numéros figurant en tête de colonne correspondent aux questionnaires mini, midi, maxi dans cet ordre ; une barre oblique indique que la question ne figure pas dans le questionnaire correspondant. Ces tableaux reprennent le pourcentage de réponses correctes. D'une manière générale, les résultats sont d'autant meilleurs que les élèves sont plus âgés, ce qui est assez réconfortant. On remarquera cependant que la question 23-20-22 (engrenages) est mieux faite par les "mini" et surtout par les "midi" que par les "maxi".

question n°	1-1-/	2-2-1	/-5-3	11-6-/	8-10-5	10-9-7	13-14-/	22-16-/
mini	47,2	30,5		93,8	55,4	74,5	37,8	85,0
midi	58,2	39,0	2,1	95,5	73,0	76,9	29,2	90,0
maxi		63,2	14,6		64,2	83,5		

question n°	/-18-14	/-19-15	23-20-22	25-24-/	27-21-/	28-25-/	/-23-19
mini			34,0	3,5	0,4	19,5	
midi	9,2	75,4	57,4	7,5	3,0	36,6	53,5
maxi	30,9	89,5	28,2				68,3

2. Le pourcentage moyen de réponses correctes est :

– 42,8% en mini,

– 39,6% en midi,

– 32,1% en maxi.

Le pourcentage moyen d'abstentions est :

– 32,9% en mini,

– 39,6% en midi,

– 53,0% en maxi.

Les "mini" s'abstiennent donc moins que les autres, ce qui ne semblent pas les pénaliser puisque globalement leurs résultats sont meilleurs.

Etant donné que le niveau des questionnaires maxi est rodé depuis de longues années et que les résultats sont en moyenne meilleurs pour les deux autres catégories, on peut conclure que les questionnaires mini et midi de cette demi-finale 1996 ont été élaborés de manière satisfaisante. Cependant, le jury essaye de classer les questions par ordre croissant de difficulté et on ne peut pas vraiment dire qu'il y ait réussi, les histogrammes sont assez parlant à cet égard.

Adresse de l'auteur :

Claudine FESTRAETS-HAMOIR
rue J.B. Vandercammen 36
1160 Bruxelles

Olympiades

C. Festraets,

Si vous avez examiné les problèmes posés à l'Olympiade Internationale et dont les énoncés ont été publiés dans le n° 109 de M. et P., vous avez pu vous rendre compte de leur difficulté.

Voici les solutions des trois premiers problèmes.

La première et la troisième sont d'Eric VANDENBUSSCHE de l'Athénée d'Uccle 1 et la deuxième est due à Grégory SOYEZ du Collège de Kain.

1. *$ABCD$ est un tableau rectangulaire dans lequel $AB = 20$ et $BC = 12$. Ce tableau est subdivisé en 20×12 carrés unité. On se donne un entier strictement positif r.*

Un jeton peut se déplacer d'un carré à un autre si et seulement si la distance des centres de ces deux carrés est exactement $\sqrt{r}$.

Le but est de trouver une suite de déplacements amenant le jeton du carré ayant pour sommet A au carré ayant pour sommet B.

(a) Montrer que ceci ne peut pas être réalisé si r est divisible par 2 ou par 3.

(b) Montrer que ceci peut être réalisé si $r = 73$.

(c) Ceci peut-il être réalisé si $r = 97$?

Solution

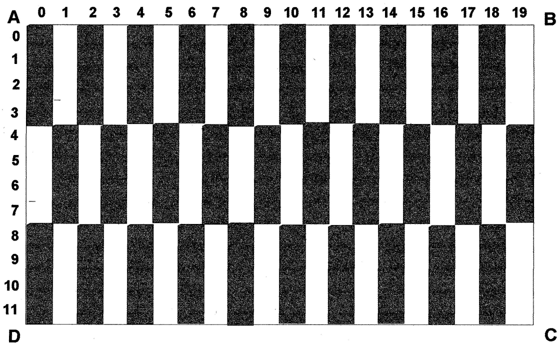
Numérotons les case de $(0, 0)$ à $(19, 11)$ (voir figure ci-après).

Un mouvement du jeton permettant de passer de la case $(0, 0)$ à la case (a, b) peut être réalisé si et seulement si $a^2 + b^2 = r$.

a) Si r est pair, alors $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 2$, donc $a + b \equiv 0 \pmod 2$.
Pour être accessible depuis la case $(0, 0)$, la case (i, j) doit être telle que $i + j \equiv 0 \pmod 2$. D'où $(19, 0)$ est inaccessible.
Si r est multiple de 3, alors $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$.
Or, tout carré d'un entier est congru soit à 0, soit à 1 modulo 3. Donc, on a $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$ et la case $(19, 0)$ est inaccessible puisque 19 n'est pas multiple de 3.

b) $r = 73 = 8^2 + 3^2$.
Les déplacements possibles sont $(\pm 8, \pm 3)$ et $(\pm 3, \pm 8)$.
Voici une suite de déplacements du jeton de la case $(0, 0)$ jusqu'à la case $(19, 0)$:
$(0,0), (8,3), (16,6), (8,9), (11,1), (3,4), (11,7), (19,10), (16,2), (8,5), (16,8), (19,0)$.

c) $r = 97 = 9^2 + 4^2$.
C'est l'unique décomposition de 97 en une somme de deux carrés, dont les seuls déplacements possibles sont $(\pm 9, \pm 4)$ et $(\pm 4, \pm 3)$.
Colorions en noir les cases (a, b) telles que :
– a pair et ($b \in [0, 3]$ ou $b \in [8, 11]$),
– a impair et $b \in [4, 7]$.



En partant d'une case noire, tout déplacement aboutit à une case noire. Or, $(0, 0)$ est noire et $(19, 0)$ est blanche. Il est donc impossible d'atteindre $(19, 0)$.

2. *P est un point à l'intérieur du triangle ABC tel que*

$$\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}.$$

Soient D et E les centres des cercles inscrits respectivement dans les triangles APB et APC. Montrer que les droites AP, BD et CE sont concourantes.

Solution

Soient X, Y, Z les projections de P sur BC, AB, AC respectivement.

$$\begin{aligned}
\widehat{YXZ} &= \widehat{YXP} + \widehat{PXZ} \\
&= \widehat{YBP} + \widehat{PCZ} \\
&= (180^\circ - \widehat{BPA} - \widehat{PAB}) + (180^\circ - \widehat{APC} - \widehat{CAP}) \\
&= (360^\circ - \widehat{BPA} - \widehat{APC}) - (\widehat{CAP} + \widehat{PAB}) \\
&= \widehat{BPC} - \widehat{BAC}.
\end{aligned}$$

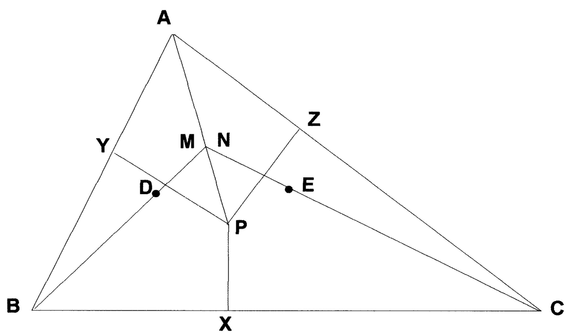
De même,

$$\widehat{XYZ} = \widehat{APB} - \widehat{ACB} \text{ et } \widehat{YZX} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}$$

donc, en vertu de l'hypothèse

$$\widehat{XYZ} = \widehat{YZX},$$

le triangle YZX est isocèle et $|XY| = |XZ|$.



Soit M le point d'intersection de BD et AP et soit N le point d'intersection de CE et AP.

BM étant bissectrice de l'angle $\widehat{ABP}$, on a

$$\frac{AM}{PM} = \frac{BA}{BP}.$$

CN étant bissectrice de l'angle $\widehat{ACP}$, on a

$$\frac{AN}{PN} = \frac{CA}{CP}.$$

Les droites AP, BD, CE sont concourantes si et seulement si $M = N$. Il s'agit donc de démontrer que $\dfrac{BA}{BP} = \dfrac{CA}{CP}$.

Dans le quadrilatère inscriptible $BXPY$, BP est un diamètre, donc $XY = BP \sin \widehat{B}$.

Dans le quadrilatère inscriptible $CXPZ$, CP est un diamètre, donc $XZ = CP \sin \widehat{C}$.

Comme $XY = XZ$, il vient $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{\sin \widehat{C}}{\sin \widehat{B}}$.

Or, dans le triangle ABC, on a $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin \widehat{C}}{\sin \widehat{B}}$.

D'où finalement, $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{AB}{AC}$.

3. *Soit $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Trouver toutes les applications f de S telles que :*

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

pour tout m et n de S.

Solution

Pour $m = n = 0$, on obtient $f(0) = 0$.

Pour $m = 0$, on obtient $f(f(n)) = f(n)$.

Les deux fonctions telles que $f(n) = 0$ et $f(n) = n$, pour tout n de S, conviennent. Cherchons les autres.

Soit I l'ensemble image.

On a : $\forall i \in I : \begin{array}{ll} f(i) & = i \\ f(2i) & = f(i + f(i)) = f(i) + f(i) = 2i \end{array}$

et par récurrence,

$$\forall i \in I, \forall x \in S : f(xi) = xi.$$

Soit k le plus petit élément non nul de I. Démontrons que

$$I = \{kx : x \in S\}.$$

Soit $l \in I$ et posons $l = kx + l'$ avec $1 \leqslant l' \leqslant k - 1$.

On a $$\begin{aligned} kx + l' &= f(kx + l') = f(l' + f(kx)) = f(l') + f(kx) \\ &= f(l') + kx. \end{aligned}$$
d'où $l' = f(l')$, ce qui est contraire à la définition de k.

Les seules fonctions susceptibles de convenir sont déterminées par :

– le choix de k $(k \neq 0)$;

– le choix de $f(\alpha)$ pour $\alpha \in [1, k-1]$;

– $f(kx + \alpha) = kx + f(\alpha)$.

Prouvons que toutes ces fonctions conviennent

$$\begin{array}{llll} \forall m \in S, & \exists x \in S, & \exists m' \in [0, k-1] & : m = kx + m' \\ \forall n \in S, & \exists y \in S, & \exists n' \in [0, k-1] & : n = ky + n' \end{array}$$

et on a :

$$\begin{aligned} f(m + f(n)) &= f(kx + m' + f(ky + n')) \\ &= f(kx + m' + f(n') + ky) \\ &= f(m' + f(n') + k(x + y)) \\ &= f(m' + f(n')) + k(x + y) \\ &= f(m') + f(n') + kx + ky \\ &= f(m') + kx + f(n') + ky \\ &= f(m' + kx) + f(n' + ky) \\ &= f(m) + f(n) \\ &= f(f(m)) + f(n). \end{aligned}$$

La mathématique : une approximation locale du réel.

D. Justens, *Université de Liège - Institut Cooremans Bruxelles*

1. Mathématiques nobles et mathématiques serviles

La mathématique, lieu prétendu de la *pureté* et de la rigueur, joue trop souvent dans notre société un rôle de légitimation. Elle sert de justification, et aussi d'instrument de sélection dans l'enseignement. Elle donne une pseudo garantie de sérieux et d'objectivité aux discours les plus divers, pourvu qu'ils fassent appel à elle. Bien plus grave encore, elle impressionne au point que l'expression *être fort en math* est tenue par beaucoup pour synonyme d'être intelligent. Les mathématiciens portent une part de responsabilité dans cet état de fait regrettable d'un point de vue humaniste. Leur quête avouée d'une forme d'*universalité*, la publication de résultats sous la forme exclusive de *papiers* coulés dans un moule toujours identique et inaccessibles aux *profanes*, l'utilisation volontaire d'un jargon parfois obscur (ou psychologiquement significatif : voir [8]), tout cela traduit (consciemment ou non) une soumission à un ordre établi, accepté, que l'on cautionne en s'y intégrant, et simultanément une certaine prétention, fondée sur la croyance de la possession d'une part de *vérité*, à l'appartenance à l'*élite*. Même dans un domaine d'apparence aussi neutre que la mathématique, accepter un consensus, c'est aider l'ordre établi à se perpétuer. Alors, la mathématique génératrice d'exclusion ? Reprenons les propos de J. Dieudonné (voir [4]) pour nous en convaincre : "*Quels sont les critères sur lesquels on peut juger un travail mathématique ? Comme on ne tient pas compte des critères utilitaires, il ne reste plus que des critètres esthétiques. (...) Puisqu'il s'agit d'esthétique, nous dirons qu'il y a des mathématiques nobles et des mathématiques serviles. Comment classer ? Il n'y a pas de vote. Les mathématiques c'est une question d'aristocratie*". Mais Dieudonné va plus loin : "*Les bonnes mathématiques sont faites par peu de gens. (...) Il y a une poignée de leaders. Les bonnes orientations sont données par ces gens-là. (...) L'opinion des autres est sans importance. (...) Ceux qui suivent ont un rôle non négligeable : ils jouent le rôle de caisses de résonance*". Nous résistons depuis longtemps à cette volonté de hiérarchisation de la mathématique. Dans *La mathématique pure n'existe pas*, Didier Nordon ([8])

s'insurge contre la pseudo universalité, contre la soi-disant pureté de certaines branches de la mathématique. "*Pourquoi une société qui n'a pourtant pas l'habitude de faire des cadeaux payerait-elle, et pas si mal que cela* (sic), *des gens à faire des choses qui ne servent à rien ? En réalité, une production, fût-elle inutile sur le plan technique, peut fort bien être très utile sur le plan idéologique : élitisme, mythe de l'expert, glorification de l'abstrait, du "pur", primauté de l'intellectuel sur le manuel, sans oublier la sélection qui est le but matériel et non plus idéologique de tout cela.* Sa critique se prolonge dans le sens que nous désirons donner à cet article : "*Certains livres ne présentent pas les mathématiques comme des réponses plus ou moins adaptées, plus ou moins satisfaisantes, toujours inachevées, à des problèmes que certaines circonstances peuvent amener à se poser. A vrai dire, il n'y a guère de problèmes dans ces livres : tout au plus des exercices pour vérifier que l'élève sait reproduire les méthodes qu'on lui a inculquées. Ces livres déroulent le discours le plus parfait possible en ayant comme idéal le discours le plus abstrait possible, celui que sont censés pratiquer les mathématiciens les plus prestigieux.*

Nous pensons quant à nous que la mathématique est une simplification du réel (proposition indécidable), une création (et une réaction) du filtre de notre structure cérébrale incapable de se représenter l'univers dans sa complexité. A ce titre seul, déjà, elle justifie pleinement notre étude et notre attention. Toute recherche, si pure soit-elle, trouve son origine profonde dans le concret. Les premiers balbutiements de toute théorie se fondent sur notre intuition, notre perception du monde. L'axiomatique et la volonté de rigueur ne viennent qu'après. Sont-elles pour autant *supérieures* ? L'art abstrait est né de l'étude et de la simplification du réel, une idéalisation qui n'est possible que par la compréhension de la réalité sous-jacente (voir par exemple l'œuvre de Piet Mondrian -1872/1944-). Qui prouvera qu'il n'en est pas de même de la mathématique ? En se détachant de toute connexion avec le concret, les mathématiciens risquent de tarir la source de leur inspiration.

2. Construction de la distribution binomiale

Le calcul des probabilités semble ancré dans le concret. Néanmoins, nous avons constaté déjà une prédilection de la part de certains mathématiciens pour des exemples (voir [6]) éloignés du réel. Le jeu de pile ou face, par exemple, est trop souvent utilisé. Certes, il permet la construction de la distribution binomiale mais on consentira difficilement à passer (et à perdre) plusieurs heures à y jouer pour vérifier une hypothèse sans intérêt véritable. Ainsi, on admet généralement que la symétrie de la pièce induit l'équiprobabilité des événements pile et face. Rien n'est moins sûr et Emile Borel ([1]) nuance cette position : "*La symétrie absolue entraînerait l'indiscernabilité des deux côtés et par conséquent l'impossibilité du jeu*". Pourquoi alors privilégier une situation particulière et ne se prêtant à aucun contexte réaliste ? Et pourquoi, lorsque deux événements diffèrent, leur donner mêmes probabilités ? Montrons que cette simplification du réel peut être améliorée.

Considérons un exemple réel pour lequel les difficultés d'expérimentation disparaissent : le sexe des enfants à naître. On observe approximativement 120 000 naissances par an en Belgique et les données numériques sont publiées régulièrement. Chaque naissance d'enfant vivant constitue une expérience à deux issues possibles : garçon ou fille (nous laissons au lecteur le soin de définir ce qui est *échec* ou *réussite* pour reprendre une terminologie usuelle). L'observation des naissances au sein de la population belge pendant une durée déterminée constitue la répétition de n expériences identiques et indépendantes (impossible à démontrer, mais plus commode à justifier que pour le jet d'un dé). En notant p la probabilité associée à la naissance d'un individu de sexe mâle, on construit la distribution binomiale de façon classique (mais cette fois dans un contexte réaliste). Un problème apparaît : lorsque n est de l'ordre de 10^5 et que les k qui nous intéressent sont de l'ordre de grandeur de $\frac{n}{2}$, il devient impossible d'utiliser la relation théorique (indétermination : $\infty * 0$). Avant de poursuivre, précisons les notations. Pour une binomiale $B(n,p)$, nous optons pour la formulation

$$p_k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} * p^k(1-p)^{n-k}$$

sans utilisation systématique des factorielles. Une distribution approchée s'avère indispensable. Nous connaissons tous le théorème de Moivre-Laplace. Doit-il être considéré comme un résultat *pur* ? N'est-il qu'une grossière approximation ? Ne concilie-t-il pas plutôt la beauté du raisonnement théorique à l'intérêt du résultat utilisable ? En approchant la binomiale par une distribution normale, on peut tester l'hypothèse d'équiprobabilité (ce qui raisonnablement n'est pas possible avec le jet d'une pièce). En effet la variable proportion est d'espérance $\frac{1}{2}$ et d'écart-type $\frac{1}{2*\sqrt{n}}$ et l'intervalle bilatéral de probabilité 95% associé à la variable "proportion observée" est donné par :

$$\left[\frac{1}{2} - 1.96 * \frac{1}{2*\sqrt{n}}; \frac{1}{2} + 1.96 * \frac{1}{2*\sqrt{n}}\right]$$

Pour $n = 120\ 000$, on arrive à :

$$[0.4972; 0.5028]$$

Observons la population belge. Voici les données publiées dans l'*annuaire de statistiques régionales.*

Années	Nombre de naissances	Pourcentage observé de garçons
1986	117 271	0.5165
1987	117 448	0.5146
1988	118 764	0.5136
1989	120 550	0.5124
1990	123 554	0.5124
1991	125 412	0.5121

On vérifie sans peine que l'hypothèse d'équiprobabilité est rejetée à tous les niveaux de probabilité. Des événements aussi différents que la naissance d'un garçon ou d'une fille ne sont pas équiprobables !

3. Modélisation de la survenance d'accidents

3.1. Construction de la distribution de Poisson

La justification de son activité mathématique embarrasse parfois le mathématicien. Ceci n'est pas neuf : en 1902, déjà, Poincaré notait ([9]) : "*Il existe de nombreuses sociétés d'assurances qui appliquent les règles du calcul des probabilités et qui distribuent à leurs actionnaires des dividendes dont la réalité objective ne saurait être contestée.* Emile Borel ([1]) abonde dans le même sens : "*On peut donner de la justesse du calcul des probabilités d'excellentes preuves financières : une compagnie d'assurance bien gérée fait toujours des bénéfices et la roulette n'a jamais ruiné son gérant*". Le contexte actuariel semble donc privilégié pour illustrer notre thèse. On vérifie que la mathématique esthétique est insuffisante et qu'elle ne permet pas de description satisfaisante du réel. Considérons à titre d'exemple la modélisation de la survenance d'accidents d'auto (le même raisonnement peut être fait pour toute modélisation de survenance d'événements pas trop fréquents : incendies, accidents du travail, ...). L'observation d'un assuré pendant une durée déterminée T peut se diviser en une succession de n durées d'observation égales $\Delta t = \frac{T}{n}$. Lorsque les accidents sont "rares" (à définir), on peut choisir n suffisamment grand pour qu'il soit *impossible* d'observer plus d'un accident pendant un intervalle de temps Δt. Le passage au langage mathématique nous dégage de l'apparente imprécision du langage usuel. En notant λ le nombre moyen d'accidents observés par unité de temps, on estime (linéairement, comme souvent) les probabilités suivantes :

$$P\left[\text{observer un seul accident sur}[t, t+\Delta t[\right] = \lambda\Delta t$$

$$P\left[\text{n'observer aucun accident sur}[t, t+\Delta t[\right] = 1 - \lambda\Delta t$$

$$P\left[\text{observer plus d'un accident sur}[t, t+\Delta t[\right] = 0$$

à un o(Δt) près. (Ce qui précisément constitue la définition de la notion d'événement "rare"). Sous ces hypothèses, l'observation d'un assuré pendant une durée T a tout du schéma de Bernoulli et l'on peut calculer la probabilité d'observer k accidents pendant la durée T au moyen d'une distribution binomiale $B(n, \lambda\Delta t)$. On a en première approximation :

$$p_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} * (\lambda\Delta t)^k (1-\lambda\Delta t)^{n-k}$$

Le passage à la limite pour n tendant vers l'infini peut être vu comme un accroissement de validité du modèle puisqu'il élimine l'approximation faite sur le calcul des probabilités élémentaires p et q. On arrive aisément à :

$$\lim_{\Delta t \to 0} p_k = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

Hélas ! L'hypothèse d'indépendance qui sous-tend l'établissement de la formule est inacceptable. A mesure que des accidents sont observés, l'assureur ajuste le λ propre de chaque automobiliste et le considère progressivement comme constituant un risque plus grand (ou moins grand en cas de non observation d'accidents) en le tarifant en fonction de son passé (dépendance). Cette attitude se traduit par le système de tarification a posteriori mis en place dans plusieurs pays d'Europe que l'on connaît sous le nom de "bonus-malus". La non-validité de la distribution de Poisson se vérifie empiriquement. Considérons les résultats observés à partir des 106 974 assurés de l'ex PS (actuellement Prévoyance en Voorzicht) et publiés dans [7]. L'ajustement à la distribution de Poisson se fait sur base de l'identité des moyennes (méthode des moments) :

k	n_k	f_k	p_k	np_k
0	96 978	0.906557	0.903860	96 689.6
1	9 240	0.086376	0.091363	9 773.5
2	704	0.006581	0.004617	493.9
3	43	0.000402	0.000156	16.6
4	9	0.000084	0.000004	0.4

Les conclusions de cet ajustement apparaissent intuitivement : si les hypothèses conduisant au modèle étaient correctes, il y aurait plus d'assurés déclarant un seul sinistre et nettement moins en déclarant deux, trois ou quatre. Cette interprétation est confirmée par le calcul du χ^2 observé ($\chi^2_{\text{observé}} = 191.41 > \chi^2_{2;0.95} = 5.991$).

Nous avons procédé au regroupement des lignes correspondant à trois et quatre accidents, ce qui explique le degré de liberté de la distribution (4-1-1).

Certains assurés représentent un risque plus grand que d'autres. L'assureur adapte sa description du risque au fur et à mesure de l'observation de chaque client. Dès lors, la tarification adoptée tient compte d'un λ variable. Le système du bonus-malus va progressivement modifier le taux de prime de chaque assuré de façon à approcher le risque véritablement couvert. Le système appliqué est loin d'être idéal en la matière (voir [2] et [3]), même si les modifications récemment mises en place devraient augmenter légèrement l'efficacité du modèle. Plusieurs études théoriques ont corrigé la distribution de Poisson (voir [5] et [7]). Nous reprenons ici quelques résultats élémentaires intéressants.

3.2. Construction de la distribution géométrique

Nous partons de l'hypothèse d'hétérogénéité du portefeuille. La distribution du nombre de sinistres est une distribution de Poisson dont le paramètre associé λ a une certaine distribution de probabilité $U(\lambda)$. Dans ces conditions, on pose :

$$p_k = \int_0^\infty p_k(\lambda) dU(\lambda)$$

La première hypothèse que nous retenons pour la distribution U est celle de l'exponentielle négative de paramètre a. Cette hypothèse revient à postuler que les "bons conducteurs" sont les plus nombreux et que la majorité des assurés constituent un risque propre proche de zéro (mode). Nous verrons que cette hypothèse est irréaliste : tout conducteur doit se voir attribuer un risque strictement (et significativement) positif. Le mode de la distribution ne peut être nul. Un résultat intermédiaire du calcul intégral élémentaire est nécessaire à ce stade (excellent exercice : si la démonstration du résultat est élémentaire, son obtention directe demande un peu de réflexion).

Lemme

$$\int x^k e^{-x(a+1)}dx = -e^{-x(a+1)}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{\frac{k!}{(k-j)!}x^{k-j}}{(a+1)^{j+1}}\right] \qquad \forall k \in N$$

La démonstration se fait par intégrations par parties successives.

On calcule alors :

$$p_k = \frac{a}{k!}\int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda(a+1)}d\lambda = \frac{a}{(a+1)^{k+1}}$$

On peut donc interpréter la distribution géométrique comme une distribution de Poisson de paramètre λ suivant une distribution exponentielle négative de paramètre a. Cette interprétation autorisant la variabilité de λ devrait conduire à une distribution mieux ajustée au niveau des accidents. On vérifie que c'est bien le cas (ajustement par la méthode des moments : $a = \frac{1}{\bar{x}}$). On a le tableau :

k	n_k	f_k	p_k	np_k
0	96 978	0.906557	0.9081828	97 151.9
1	9 240	0.086376	0.0833868	8 920.2
2	704	0.006581	0.0076563	819.0
3	43	0.000402	0.0007029	75.2
4	9	0.000084	0.0000645	6.9

Le regroupement des deux dernières lignes conduit à une valeur $\chi^2_{\text{calculé}} =$ 38.9, à rejeter mais néanmoins meilleure que celle obtenue dans les mêmes conditions au moyen de la distribution de Poisson.

3.3. Prise en considération d'un risque significativement positif pour tous

En modifiant quelque peu la distribution exponentielle négative, on peut introduire une distribution à valeurs dans les réels positifs de mode strictement positif. On choisit de travailler avec un *pic de risque* correspondant au conducteur moyen et avec l'hypothèse de l'existence de quelques très mauvais conducteurs (asymétrie de la distribution). Nous proposons d'utiliser la distribution :

$$f(\lambda) = a^2\lambda e^{-\lambda a} \qquad a > 0$$

qui possède un mode en $\frac{1}{a}$ et dont la moyenne vaut $m = \frac{2}{a}$. (Excellent exercice : calculer la variance et les moments centrés). Sa forte asymétrie traduit la présence dans le portefeuille de quelques conducteurs à haut risque qui influencent et biaisent significativement la moyenne. On calcule :

$$p_k = \int_0^\infty \frac{\lambda^t}{k!} e^{-\lambda} a^2 \lambda e^{-\lambda a} d\lambda = \frac{(k+1)a^2}{(a+1)^{k+2}}$$

en utilisant le même lemme que précédemment. On vérifie que la moyenne des p_k est égale à $\frac{2}{a}$ qui correspond à la moyenne de la distribution de λ. Nous proposons un ajustement basé sur $a = \frac{2}{\bar{x}}$.

k	n_k	f_k	p_k	np_k
0	96 978	0.906557	0.906096	96 929
1	9 240	0.086376	0.087182	9 326
2	704	0.006581	0.006291	673
3	43	0.000402	0.0004036	43
4	9	0.000084	0.0000243	3

Le $\chi^2_{\text{calculé}}$ vaut 3.028 et conduit à une acceptation du modèle.

L'hypothèse d'une population hétérogène de risque strictement positif comportant quelques conducteurs dangereux semble confirmée par les résultats observés. On peut regretter le manque d'esthétique de la distribution mais la réalité “est” et nous devons nous en contenter.

Bibliographie

[1] BOREL, E. Le hasard, *Nouvelle collection scientifique, Librairie Félix Alcan*, 1914

[2] DE PRIL, N. Optimal claim decision for a bonus-malus system : a continuous approach, *Instituut voor Actuariële Wetenschappen*, KUL, 1978.

[3] DE PRIL, N. Bijdrage tot de actuariële studie van het bonus-malus systeem *OAB Dienst voor Assurancies in België*, 1979.

[4] DIEUDONNÉ, J. Orientation générale des mathématiques pures en 1973. *Gazette des Mathématiciens*, 1974.

[5] JUSTENS, D. Construction interprétée de distributions de probabilité à valeurs dans les naturels. *Publication du groupe GEMME 9603*, 1996.

[6] JUSTENS, D. La recherche d'applications concrètes en calcul des probabilités, *Mathématique et Pédagogie*, 102, 1995.

[7] LEMAIRE J. Critique du tarif automobile responsabilité civile belge, *Bulletin de l'Association des Actuaires Belges*, 72, 1977.

[8] NORDON, Didier, Les mathématiques pures n'existent pas !, *Actes Sud*,1981.

[9] POINCARÉ, La science et l'hypothèse, 1902.

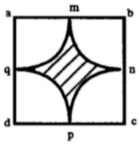
Adresse de l'auteur :

Daniel JUSTENS
Rue du Jardinage 39
1080 Bruxelles

Dans nos classes, compléments

Y. Noël,

Complément à la rubrique “Dans nos classes” publiée dans Mathématique et Pédagogie n° 108 – pp. 79–83

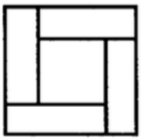


H désigne l'aire hachurée
A désigne l'aire du carré

Le premier énoncé de la rubrique proposait la recherche d'encadrements du type

$$\frac{A}{x} < H < \frac{A}{y} \quad (x \text{ et } y \text{ étant des naturels}).$$

Un lecteur attentif (je le remercie !) m'a fait remarquer que le dessin



“montre bien” que $H < \frac{A}{2}$

Ce même lecteur ajoutait :

$\frac{A}{9} < H$

J'ai dès lors affiné quelque peu le sous-quadrillage ci-dessus. Ainsi, en utilisant un carré de 9 cm de côté sur un papier quadrillé ordinaire, donc avec une subdivision du carré initial en 18 × 18 “petits carrés”, et en comptant assez grossièrement des “petits carrés”, j'obtiens

$$\frac{A}{6} < \frac{14}{81}A < H < \frac{20}{81}A < \frac{A}{4}.$$

Ce procédé amène d'ailleurs l'usage des médianes du carré initial comme axes de symétrie pour réaliser un comptage économique et la comparaison en situation de quelques rationnels.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

$\boxed{\text{Euh ?}}$ problème n° 178 de M. et P. n° 108.

a, b, c, d, e sont des réels tels que

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e &= 8 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 &= 16. \end{aligned}$$

Quelle est la valeur maximale de e ?

Solution de H.-J. SEIFFERT de Berlin

Si a, b, c, d, e sont des réels satisfaisant les équations considérées, alors de

$$\begin{aligned} e^2 &\leqslant \left(a-\frac{6}{5}\right)^2+\left(b-\frac{6}{5}\right)^2+\left(c-\frac{6}{5}\right)^2+\left(d-\frac{6}{5}\right)^2+e^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-\frac{12}{5}(a+b+c+d+e)+\frac{144}{25} \\ &= 16-\frac{12}{5}(8-e)+\frac{144}{25} \\ &= \frac{64}{25}+\frac{12}{5}\,e \end{aligned}$$

il vient

$$\left(e-\frac{6}{5}\right)^2 \leqslant \frac{100}{25}$$

ce qui conduit à $e \leqslant \frac{16}{5}$.

Puisque les deux équations sont vérifiées par $a=b=c=d=\frac{6}{5}$ et $e=\frac{16}{5}$, nous pouvons conclure que $\frac{16}{5}$ est la valeur maximale de e.

Solution de P. DUPONT de Grez-Doiceau

Commençons par généraliser. Nous allons traiter le problème suivant :

Soit $n \in N$, $p, q \in R$. Quel est le maximum du réel x_n s'il existe $x_1, \ldots, x_{n-1} \in R$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} = p \ \text{ et} \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = q^2? \tag{2}$$

Dans R^n, (1) est l'équation de l'hyperplan P admettant $v = (1, 1, \ldots, 1)$ pour vecteur normal et passant par $c = (p/n,\ p/n, \ldots, p/n)$. La distance de P à l'origine est $d = \sqrt{n \cdot (p/n)^2} = p/\sqrt{n}$.

Par ailleurs, (2) est l'équation de l'hypersphère S de centre O et de rayon q. Si $p \leqslant q$, P et S se coupent selon la sphère $(n-2)$-dimensionnelle T, contenue dans P, centrée en c et de rayon $r = \sqrt{q^2 - p^2/n}$.

Un réel x_n pour lequel il existe $x_1, \ldots, x_{n-1}$ tels que (1) et (2) est l'"hypercote" d'un point x de T. Or, l'hypercote de x sera maximale si et seulement si le rayon (orienté, en fait) $[cx]$ de T fait avec l'axe Ox_n un angle minimal, et le plus petit angle que puisse faire Ox_n un tel rayon, contenu dans P, est l'angle α de P et Ox_n, dont le complémentaire est l'angle β entre v et $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Il vient de suite $\cos\beta = 1/\sqrt{n}$ et, de là, $\cos\alpha = \sqrt{(n-1)/n}$.

Donc,

$$\begin{aligned} m &= \max\{x_n | x \in T\} = c_n + r \cdot \cos\alpha = \frac{p}{n} + \sqrt{q^2 - \frac{p^2}{n}}\sqrt{\frac{n-1}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\left(p + \sqrt{(n-1)(nq^2 - p^2)}\right). \end{aligned}$$

Dans le cas d'espèce proposé, $n = 5$, $p = 8$ et $q^2 = 16$, de sorte que

$$m = \frac{1}{5}\left(8 + \sqrt{5 \times 16 - 64)}\right) = \frac{16}{5}.$$

Bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek et de B. LOISEAU de Mouscron dont la démonstration procède d'une idée similaire à celle de P. DUPONT.

$\boxed{\text{Sommes de fractions}}$ problème n° 179 de M. et P. n° 108.

On considère la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ \ldots$ *où* $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}_0$.

De combien de manières peut-on écrire la fraction $\frac{1}{1980}$ *comme somme d'un nombre fini de termes consécutifs de cette suite.*

Solution de M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned} a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{g-1} &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{g-1}} - \frac{1}{a_g}\right) \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{g}. \end{aligned}$$

On est donc amené à résoudre l'équation diophantienne

$$\frac{1}{1980} = \frac{1}{p} - \frac{1}{g} \quad \text{où} \quad 1 \leqslant p < g.$$

Cette équation s'écrit successivement

$pg = 1980g - 1980p$

$pg - 1980g + 1980p = 0$

$(p - 1980)(g + 1980) = -1980^2$

$(1980 + g)(1980 - p) = 1980^2$ (1)

Soit P l'ensemble des diviseurs naturels de 1980^2 inférieurs à 1980 et soit G l'ensemble des diviseurs naturels de 1980^2 supérieurs à 1980.

A chaque valeur de $1980 - p$ appartenant à P correspond une valeur de $1980 + g$ appartenant à G et satisfaisant l'équation (1).

Or,

$$1980^2 = 2^4 \times 3^4 \times 5^2 \times 11^2;$$

ce nombre admet $5 \times 5 \times 3 \times 3 = 225$ diviseurs.

Puisque div $1980^2 = P \cup G \cup \{1980\}$ et que $\sharp P = \sharp G$, on a finalement $\frac{1}{2}(225 - 1) = 112$ possibilités.

Bonnes solutions de J. JANSSEN de Lambermont et de B. LOISEAU de Mouscron.

$\boxed{\text{Polygones et triangles}}$ problème n° 180 de M. et P. n° 108.

Dans le plan, on donne un 1996*-gone convexe. On considère tous les triangles qui ont leurs sommets aux sommets de ce polygone et un point P intérieur au polygone et n'appartenant à aucun des côtés des triangles.*

Démontrer que le nombre de triangles pour lesquels P est un point intérieur est pair.

Solution de B. LOISEAU de Mouscron

1996 étant un nombre pair, il suffit de montrer que

– si on se donne un n-gone convexe, avec n pair, et si on considère tous les triangles ayant leurs sommets aux sommets de ce polygone,

– si on considère un point P n'appartenant à aucun des côtés de ces triangles (c'est-à-dire n'appartenant à aucun des segments reliant deux des sommets du polygone)

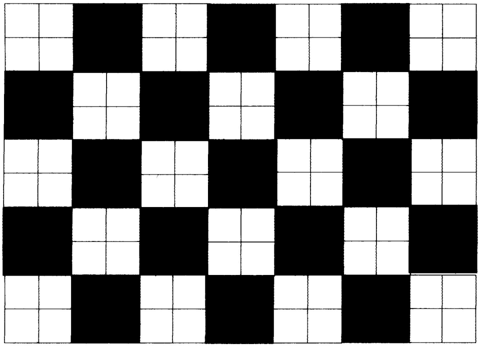
alors, le nombre de triangles considérés auxquels P est intérieur est pair.

N.B. : J'omets l'hypothèse que P est intérieur au polygone. Ce n'est évidemment pas une généralisation : si P n'est pas intérieur au polygone, il n'est intérieur à aucun des triangles considérés (parce que le polygone est convexe), et bien sûr, 0 est pair... C'est juste une astuce technique qui me permet d'éviter une discussion par cas dans la preuve du pas récurrent de ma démonstration. Toutefois, cela permet aussi de laisser entrevoir que le résultat est vrai aussi pour un point non intérieur dans le cas d'un polygone non convexe ; ce qui, cette fois, est une vraie généralisation.

On démontre le résultat par récurrence sur $n \geqslant 4$ (et pair).

$n = 4$: Soit P_1, P_2, P_3, P_4 formant dans cet ordre un quadrilatère convexe, et P sur aucun des P_i, P_j. Si P est extérieur au quadrilatère, la thèse est triviale ; considérons maintenant le cas où il est intérieur au quadrilatère. Comme le quadrilatère est convexe, le point d'intersection des diagonales $E = P_1P_3 \cap P_2P_4$ (existe et) est intérieur au quadrilatère, et tout point intérieur au quadrilatère (et non sur les diagonales) est intérieur à EP_1P_2, EP_2P_3, EP_3P_4 ou EP_4P_1.

Par symétrie, il suffit de considérer le cas où P est intérieur à EP_1P_2. Dans ce cas, P est intérieur à un nombre pair de triangles considérés : $P_1P_2P_3$ et $P_1P_2P_4$.



Par récurrent : Supposons la thèse vraie pour n pair, montrons qu'elle est vraie pour $n+2$.

Soit $P_1P_2P_3\ldots P_nP_{n+1}P_{n+2}$ un polygone convexe et P un point quelconque, sont sur les $[P_iP_j]$. Alors, le polygone $P_1P_2P_3\ldots P_n$ est également convexe, et par hypothèse de récurrence, P est intérieur à un nombre pair de triangles dont les sommets sont parmi $P_1P_2P_3\ldots P_n$. Il reste donc à montrer que P est intérieur à un nombre pair de triangles dont les sommets sont parmi $P_1P_2P_3\ldots P_nP_{n+1}P_{n+2}$, **et dont un sommet au moins est P_{n+1} ou P_{n+2}**.

Pour chaque paire $\{i,j\}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, on a un quadrilatère convexe $P_iP_jP_{n+1}P_{n+2}$. Par le point initial, P est intérieur à un nombre pair $k_{\{i,j\}}$ de triangles dont les sommets figurent parmi ces quatre points.

Si on considère cela pour toutes les paires $\{i,j\}$, on va compter tous les triangles contenant P, de sommets sont parmi $P_1P_2P_3\ldots P_nP_{n+1}P_{n+2}$, et dont un sommet au moins est P_{n+1} ou P_{n+2}, et ces triangles seulement.

Mais leur nombre n'est pas $\sum_{\{i,j\}} k_{\{i,j\}}$, car certains triangles ont été comptés plusieurs fois. Lesquels ? Combien de fois ?

– Si $P \in Int(P_iP_jP_{n+1})$ (ou $P_iP_jP_{n+2}$), ce triangle n'a été compté qu'une seule fois : lorsqu'on a considéré la paire $\{i,j\}$.

– Si $P \in Int(P_iP_{n+1}P_{n+2})$, ce triangle a été compté $n-1$ fois : chaque fois qu'on a considéré une paire $\{i,j\}$, avec j différent de i (aussi bien supérieur qu'inférieur).

Bref, chaque triangle a été compté un nombre impair de fois (1 ou -1) et par conséquent, ces éventuelles redondances ne changent rien du point de vue de la parité : le nombre de triangles a même parité que le nombre $\sum_{\{i,j\}} k_{\{i,j\}}$, et est donc pair puisque chaque $k_{\{i,j\}}$ l'est.

■

Remarque : Dans le pas récurrent, l'hypothèse de convexité n'a servi à rien, si ce n'est à montrer que des sous-polygones du polygone donné étaient convexes, afin de pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence et le pas initial. Par conséquent, on peut parfaitement bien se passer de cette hypothèse, à condition d'élargir le nombre de cas du pas initial (admettre que le quadrilatère puisse ne pas être convexe). On peut même élargir les cas en admettant que des points puissent être alignés trois à trois dans le polygone, auquel cas il faut admettre dans le pas initial des cas dégénérés. Tous ces cas sont immédiats.

Solution de C. FESTRAETS

Considérons d'une part, tous les triangles ayant leurs sommets aux sommets du 1996-gone et ayant P comme point intérieur, d'autre part, tous les quadrilatères ayant les mêmes propriétés.

Désignons par t et q respectivement le nombre de tels triangles et de tels quadrilatères.

A tout triangle contenant P, on peut faire correspondre $1996 - 3 = 1993$ quadrilatères contenant P.

$Fig.1$

A tout quadrilatère contenant P, on peut faire correspondre 2 triangles contenant P.

$Fig.2$

D'où $1993t = 2q$ et puisque 1993 est impair, t est pair.

Bonne solution de J. JANSSEN de Lambermont.

187. La clé du chiffre

Un nombre entier a est tel que le chiffre des dizaines de son carré est 7.

Quel peut être le chiffre des unités de a^2 ?

188. Ils étaient quatre ...

Déterminer tous les quadruples (a, b, c, d) d'entiers positifs ou nuls tels que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 b^2 c^2.$$

189. Bissection

Dans un tétraèdre $ABCD$, soient K et L les milieux respectifs des arêtes AB et CD.

Démontrer que tout plan contenant KL divise le tétraèdre en deux parties d'égal volume.

Revue des revues

C. Villers,

Bulletin de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public-France), *n*°405-juin-juillet 1996.

Ce numéro comporte de très nombreux articles et rubriques parmi lesquels nous relevons plus spécialement

— L'*Editorial* du nouveau Président de l'Association, Jean-Pierre Richeton, intitulé "A quoi servent les maths ?".
Au-delà du rôle de simple outil (mais pas nécessairement outil simple), les mathématiques contribuent au développement intellectuel de l'individu. C'est sur la base de cette affirmation que l'auteur plaide pour une image des mathématiques qui mette en évidence la créativité et l'esprit d'initiative.

— Trois textes concernant la notion de limite

— *Limites de suites et calculatrices* par G. Clément décrit une activité s'adressant à des élèves de classes scientifiques (Terminale).

— *Suite et fin* par Alain Mercier et Suzanne, qui présente un texte d'une élève de Premières S sur les suites.

— *Limite en Première et Terminale* par Jean Cordier et Christiane Jeanjean.

— *Faisons bouger les centres* par Jean Fages.
Dans cet article, l'auteur considère un triangle ABC dont les sommets B et C sont fixes et dont le sommet A décrit une courbe donnée. Il s'intéresse alors aux déplacements des points classiques O, G, H et I et obtient des courbes intéressantes.

— *Comment tracer un segment avec une règle trop courte ?* par M. Rousselet.
L'idée de ce problème est venue de la lecture de l'ouvrage d'Henri Lebesgue, "Constructions à la règle et au compas".
Si les connaissances nécessaires à la démarche-solution sont assez élémentaires, la démarche elle-même est complexe.
Le texte est accompagné d'un texte "Comment tracer un segment $[AB]$ avec une règle de longueur ℓ et un compas d'empan maximum e ?" par Jean-François Canet.

— *La magie des puissances de 2* par Mauricette Osicki.

Il s'agit de la description d'un jeu de fiches permettant de deviner un nombre. Le "truc" basé sur la numération de base 2 a déjà été exposé par votre serviteur dans la revue Math.-Jeunes.

— *A propos de raisonnement par l'absurde* par Philippe Lombard.
  L'auteur traite du raisonnement par l'absurde et du raisonnement par contraposition.
— *Qui de π ou de la circonférence a fait l'oeuf ?* par Jean-Pierre Truong.
  L'auteur débat sur la (les) manière(s) de définir π.
— *Latitude et longitude, deux soeurs ?* par Philippe Jacquemier.
  L'auteur recherche jusqu'où va la parenté entre latitude et longitude en partant du problème du plus court chemin entre deux points de même latitude.
— *Nul en math ?* par Jacqueline Fourastié.
  L'auteur défend la thèse (généreuse ?) qu'il n'y a pas de nuls en math. mais qu'il n'y a que de mauvais départ.

Cette livraison comporte en plus les rubriques habituelles

- Avis de recherche.
- Nouvelles brèves.
- Matériaux pour une documentation.
- Tribune libre.
- La vie de l'association

ainsi que la présentation d'une nouvelle brochure APMEP "Enseigner la géométrie dans l'espace au Collègue et au Lycée" de Bernard Dertainville.

C. VILLERS

Bibliographie

D. Justens,

Des images aux figures géométriques (Cinq fascicules 1a à 1e,) par Honclaire - Van Dieren - Van Troye. CREM.

Trois fascicules ont été publiés par le CREM sous ce titre. Nous avons déjà présenté les fascicules 1a et 1b dans Mathématique et Pédagogie, n° 109, pp....

Fascicule 1c : **Calques, quadrillages et rotations**.

Comme les fascicules précédents, celui-ci s'adresse aux enseignants du premier degré de l'enseignement secondaire.

En utilisant un matériel élémentaire (papier transparent et papier quadrillé), les auteurs suggèrent six activités :

1. Tourner une feuille transparente
2. Tourner des triangles rectangles
3. Calculer des aires
4. Parallélisme et perpendicularité sur un quadrillage
5. Glisser dans un repère
6. Tourner de 90° dans un repère.

Elles permettent des mises au point des quadrilatères, des aires, des périmètres à partir de conflits créés dans la classe par les situations.

Mesurage et observations ne suffisent pas, arguments et justifications sont nécessaires pour obtenir l'adhésion de tous à un résultat.

Sur le quadrillage, les activités associent

- rotation de 90° et perpendicularité
- rotation de 180° et parallélisme
- alignement de points et pente d'une droite aux déplacements selon les deux directions privilégiées du quadrillage
- encadrements de nombres rationnels et évaluation d'aires.

Géométrie et nombres sont constamment liés à travers les activités.

Ces publications conformes aux nouveaux programmes, aideront les enseignants à pratiquer une pédagogie basée sur l'apport des élèves, à favoriser un apprentissage du raisonnement. Elles peuvent être achetées en s'adressant au CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), rue E. Vandervelde 5, 1400 Nivelles.

Y. NOEL

Programmation linéaire par Jacques TEGHEM – Collection "Statistique et mathématique appliquées" – Editions Ellipses

L'ouvrage de Jacques Teghem propose une synthèse complète et mise à jour des éléments classiques de la programmation linéaire, doublée d'une introduction aux développements les plus récents de nouveaux aspects de la théorie. La présentation de la théorie usuelle (algorithme simplexe et dualité) est détaillée et illustrée de façon à accéder à la compréhension du support mathématique. Cette partie du livre devrait particulièrement convenir aux étudiants du premier cycle des universités et des hautes écoles.

L'auteur introduit également la programmation linéaire en univers incertain, rappelant et utilisant la notion de nombre flou, et présente quelques éléments de programmation multicritère avant de les combiner. Cette partie plus réaliste dans sa conception devrait intéresser particulièrement les gestionnaires et tous ceux du monde de l'entreprise qui désirent maîtriser parfaitement un outil d'optimisation bien adapté au concret. Peut-être regretterons-nous, ici particulièrement, l'absence de résolution de cas réels, les exemples proposés étant purement formels.

Dans une troisième partie, destinée à un public plus spécialisé, l'auteur nous initie à la théorie de la complexité, aux méthodes de point intérieur avant de proposer quelques éléments de programmation linéaire en variables entières.

Enfin, une série d'applications formelles sont exposées et résolues, et l'accés au logiciel OMP est présenté de manière conviviale. Tous ces éléments font de ce manuel une référence théorique pratiquement incontournable.

D. JUSTENS

Qui a dit ?

Fontenelle,

> “Madame, [...] puisque nous sommes en humeur de mêler toujours des folies de galanterie à nos discours les plus sérieux, les raisonnements de Mathématique sont faits comme l'Amour. Vous ne sauriez accorder si peu de chose à un Amant, que bientôt après il ne faille lui en accorder davantage, et à la fin cela va loin. De même, accordez à un Mathématicien le moindre principe, il va vous en tirer une conséquence, qu'il faudra que vous lui accordiez aussi, et de cette conséquence encore une autre ; et malgré vous même, il vous mène si loin, qu'à peine le pouvez-vous croire.”

Fontenelle, *Entretiens sur la pluralité des Mondes (1686-1687). Cinquième soir.*

Humour

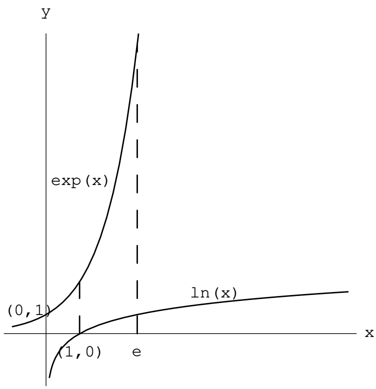
R. Haine,

La cotation "Des tourments du professeur à l'indignation des étudiants"

Première (més)aventure

A la sortie d'une interro (math 4h/sem., classe de 6ème), les élèves confrontent leurs réponses à la question suivante :

"Après esquisse grossière des courbes $y = e^x$, $y = \ln x$, $x = 1$, $x = e$, calculer à 10^{-5} près l'aire comprise entre les 4".



Tous ceux qui ont trouvé $11,43598$ sont ravis, et, prenant leurs désirs pour la réalité s'attribuent royalement le maximum (10/10) pour la question.

Quelle ne fut par la déception de trois d'entre eux d'obtenir un zéro royal ! Poliment, l'un demande : "Mais Monsieur, j'ai la même réponse que X, et lui a 10/10 ; n'y a-t-il pas une erreur ?" Les deux autres élèves concernés sont toute ouïe ... car ils ont tous les trois la même solution, à savoir :

$$\begin{aligned}
\text{aire hachurée} &= \int_1^e (e^x - \ln x)dx = [e^x - \ln x]_1^e = (e^e - \ln e) - (e - \ln 1) \\
&= e^e - 1 - e \cong 11,43598 \\
\text{au lieu de} &= \int_1^e (e^x - \ln x)dx = [e^x - x\ln x + x]_1^e \\
&= (e^e - e\ln e + 1) - (e - \ln 1 + 1) \cong e^e - e - 1 \cong 11,43598.
\end{aligned}$$

Dur, dur de convaincre les élèves que leur réponse, bien que la seule exacte, mérite zéro !

– “Mais Monsieur, vous ne devriez coter que la réponse ” !

– Cher ami, tu as de la chance qu’on ne cote pas que la réponse.

****

Au delà de cette (més)aventure, on peut se poser la question induite par cette mauvaise solution, à savoir : Y-a-t-il d’autres bornes et/ou d’autres fonctions pour lesquelles on aurait $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$?

Je laisse le soin à d’autres d’y répondre, me contentant de maudire ce hasard qui fait parfois curieusement les choses, et la probabilité d’arrivée d’un tel évènement qui est epsilonique et pas nulle !

****

A propos de probabilité, voici la deuxième (més)aventure survenue avec la même classe. Même confrontation des réponses respectives des élèves entre eux pour la question suivante :

1) Combien faut-il d’habitants dans un village pour que deux d’entre eux au moins aient les mêmes initiales ?
2) Quelle est la probabilité pour que dans un village de 677 habitants, il y en ait deux qui possèdent les mêmes 2 initiales ?

La première partie se résout sans difficulté, d’au moins trois manières différentes, et la réponse est 676.

Pour le deuxième partie, voici ce que quelques-uns ont fait : probabilité cherchée : $677 - 676 = 1$!

Dur dur pour un professeur d’imaginer, voire impossible de concevoir qu’en faisant une telle démarche, la bonne réponse, la seule, l’unique, (trouvée !), ne mérite pas plus que 0 !

****

Un mini-débat s’engage rapidement entre les élèves car certains, (devinez lesquels !) affirment que ces mésaventures ne seraient pas arrivées s’ils avaient dû répondre à un QCM ou s’ils n’avaient dû fournir <u>que</u> la réponse finale ! Ils sont aussitôt “contrés” par une majorité pour qui le plus important est dans le raisonnement.

Mais alors où est la solution à ce problème de cotation ?

Eh bien, chez les initiateurs et partisans de la pédagogie de la réussite qui raisonnent de la façon suivante :

Il y a passage automatique d'une classe à la suivante.

Donc, quelles que soient les cotes, cela n'a pas d'importance.

Mieux encore, supprimer les interros, les examens : il n'y aura plus nécessité de corriger, donc plus aucun tourment pour le professeur, ni déception et indignation chez les élèves !

R. HAINE

Olympiades

C. Festraets,

Dans le "Mathématique et Pédagogie" n° 109, je vous ai proposé une solution du problème MAXI 1 de l'O.M.B. due à C. PERLITSCHKE, concurrent de 6ème année.

Un lecteur de Mouscron, Y. HANSSENS, m'en envoie une autre, fort courte, que je vous soumets.

Rappelons l'énoncé.

A la gare de formation des trains, la seule consigne est que deux voitures de première classe ne peuvent jamais se suivre. De combien de manières peut être composée une rame de quinze voitures, si l'on dispose d'au moins quinze voitures de chacune des deux classes ? (Les voitures de premières classe sont indiscernables entre elles, de même que celles de seconde).

Soit R_n le nombre de possibilités pour composer une rame de n voitures telles que deux voitures de 1ère classe ne se suivent pas.

Si la première voiture est de 1ère classe, la deuxième est nécessairement de 2ème classe et il reste R_{n-2} possibilités pour choisir les $n-2$ voitures restantes.

Si la première voiture est de 2ème classe, il reste R_{n-1} positions pour les $n-1$ voitures suivantes.

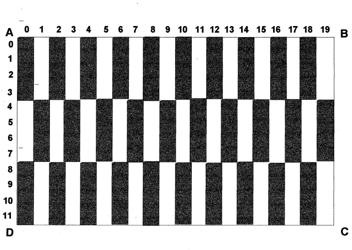
Nous avons donc $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$.

Comme $R_1 = 2$ (1 ou 2) et $R_2 = 3$ (12, 21 ou 22), R_{15} sera le quinzième terme de la suite

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \ldots$$

(qui n'est autre que la suite de Fibonacci amputée de ses trois premiers termes : 0,1,1).

Remarque : la solution de C. Perlitschke et celle décrite ci-dessus illustrent le lien entre le triangle de Pascal et la suite de Fibonacci :



Voici à présent les solutions des trois derniers problèmes de l'Olympiade Internationale. Aucun concurrent belge n'a résolu complètement ces problèmes à vrai dire fort difficiles. 75 pays participaient, avec en général six elèves par pays, et sur ce nombre important de concurrents, six seulement ont pu résoudre le problème 5.

4. Les entiers strictement positifs a et b sont tels que les nombres $15a + 16b$ et $16a - 15b$ sont tous les deux des carrés d'entiers strictement positifs. Trouver la plus petite valeur pouvant être prise par le minimum de ces deux carrés.

Solution

Posons $15a + 16b = r^2$ où $r, s \in \mathbb{N}$.
$16a - 15b = s^2 3$

Il vient

$$\begin{aligned} r^4 + s^4 &= (15a + 16b)^2 + (16a - 15b)^2 \\ &= (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) \\ &= 481(a^2 + b^2) \\ &= 13.37(a^2 + b^2) \end{aligned} \tag{1}$$

Par le petit théorème de Fermat, on a, $\forall x \in \mathbb{N}$,

$$x^{12} \equiv 1 \; (mod\, 13)$$

donc

$$\begin{aligned} x^4 &\not\equiv -1 (mod\, 13) \\ x^3 6 &\equiv 1 (mod\, 37) \\ \text{donc} \quad x^4 &\not\equiv -1 (mod\, 37) \end{aligned}$$

De (1), on a $r^4 + s^4 = 0(mod\,13)$ d'où il existe un naturel a tel que

$$r^4 \equiv a(mod\,13) \text{ et } s^4 \equiv -a(mod\,13)$$

ce qui n'est possible que pour $a = 0$ puisque -1 n'est pas une 4ème puissance modulo 13.

On a ainsi

$$r^4 \equiv s^4 \equiv 0(mod\,13)$$

et de même

$$r^4 \equiv s^4 \equiv 0(mod\,37).$$

r et s sont donc multiples de $13.37 = 481$.

On peut vérifier que pour $r = s = 481$, on obtient les solutions $a = 481.31$, $b = 481$.

$r^2 = s^2 = 481^2$ est la plus petite valeur demandée.

5. Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que AB soit parallèle à ED, BC soit parallèle à FE et CD soit parallèle à AF.

Soient R_A, R_C et R_E les rayons des cercles circonscrits respectivement aux triangles FAB, BCD et DEF et soit p le périmètre de l'hexagone.

Montrer que

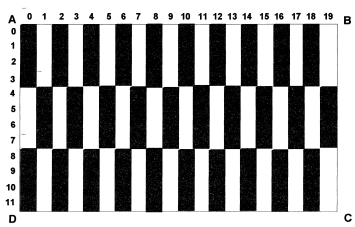
$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{p}{2}.$$

Solution

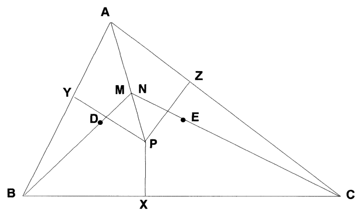
Posons a, b, c, d, e, f les longueurs respectives des côtés AB, BC, CD, DE, EF et FA.

Remarquons que les angles opposés de l'hexagone sont égaux, donc

$$\begin{aligned} BF &= 2R_A \sin A \\ BD &= 2R_C \sin C \\ FD &= 2R_E \sin E = 2R_R \sin B. \end{aligned}$$



Par A et par D, menons les perpendiculaires à BC (et à FE). Ces deux droites forment avec BC et FE un rectangle $PQRS$.



$BF \geqslant PS = QR$, d'où $2BF \geqslant PS + QR$. Or

$$\begin{aligned} PS &= PA + AS \\ &= a\sin(180^\circ - B) + f\sin(180^\circ - F) \\ &= a\sin B + f\sin F \\ &= a\sin B + f\sin C \\ QR &= QD + DR \\ &= c\sin(180^\circ - C) + d\sin(180^\circ - E) \\ &= c\sin C + d\sin E \\ &= c\sin C + d\sin B \end{aligned}$$

donc, $2BF \geqslant a\sin B + f\sin C + c\sin C + d\sin B$.

Remplaçons BF par sa valeur en fonction de R_A,

$$4R_A \geqslant a\frac{\sin B}{\sin A} + f\frac{\sin C}{\sin A} + c\frac{\sin C}{\sin A} + d\frac{\sin B}{\sin A}.$$

De manière similaire, on a

$$\begin{aligned}4R_C &\geqslant c\frac{\sin A}{\sin C}+b\frac{\sin B}{\sin C}+e\frac{\sin B}{\sin C}+f\frac{\sin A}{\sin C}\\ 4R_E &\geqslant e\frac{\sin C}{\sin B}+d\frac{\sin A}{\sin B}+a\frac{\sin A}{\sin B}+b\frac{\sin C}{\sin B}.\end{aligned}$$

Additionnons

$$4(R_A+R_C+R_E)\geqslant a\left(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\right)+b\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)+\cdots$$

Or, on sait que

$$\forall x\in\mathbb{R}: x+\frac{1}{x}\geqslant 2$$

d'où

$$4(R_A+R_C+R_E)\geqslant 2a+2b+2c+2d+2f$$

et finalement

$$R_A+R_C+R_E\geqslant\frac{p}{2}.$$

6. Soient n, p et q des entiers strictement positifs tels que $n > p+q$.

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des entiers vérifiant les deux conditions suivantes :
(i) $x_0 = x_n = 0$
(ii) pour chaque entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

soit $x_i - x_{i-1} = p$, soit $x_i - x_{i-1} = -q$.

Montrer qu'il existe un couple d'indices (i, j) avec $i < j$ et $(i, j) \neq (0, n)$ tel que $x_i = x_j$.

Solution

On peut toujours supposer que p et q sont premiers entre eux ; si p et q admettent un commun diviseur $d > 1$, on les remplace respectivement par $p' = \frac{p}{d}$ et $q' = \frac{q}{d}$.

Soit k le nombre d'indices i tels que $x_i - x_{i-1} = p$, $n-k$ est alors le nombre d'indices i tels que $x_i - x_{i-1} = -q$ et puisque $x_0 = x_n = 0$, on a

$$kp + (n-k)q = 0.$$

Or, p et q sont premiers entre eux, donc il existe un entier a tel que

$$k = aq$$

et

$$n - k = ap$$

ce qui donne

$$n = a(p+q)$$

(avec $a > 1$, car par hypothèse, $n > p+q$).

Posons

$$y_i = x_{i+p+q} - x_i \quad (i \in \{0, 1, \ldots, n-p-q).$$

Comme $n > p+q$, il y a plus d'un y_i. Montrons que l'un au moins d'entre eux vaut 0, ce qui établira la thèse.

Soit $j \in \{i+1, i+2, \ldots, i+p+q\}$ et soit r le nombre d'indices j tels que $x_j - x_{j-1} = p$; le nombre d'indices j tels que $x_j - x_{j-1} = -q$ est alors $p+q-r$ et on a

$$\begin{aligned} y_i &= x_{i+p+q} - x_i = \sum_{j=i+1}^{i+p+q} (x_j - x_{j-1}) \\ &= rp + (p+q-r).(-q) \\ &= (p+q)(r-q) \end{aligned}$$

y_i est donc multiple de $p+q$.

Considérons l'expression

$$\begin{aligned} y_{i+1} - y_i &= (x_{i+1+p+q} - x_{i+1}) - (x_{i+p+q} - x_i) \\ &= (x_{i+1+p+q} - x_{i+p+q}) - (x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

Chacune des deux expressions entre parenthèses vaut soit p, soit $-q$, donc $y_{i+1} - y_i = 0$ ou $y_{i+1} - y_i = \pm(p+q)$ et puisque y_i est multiple de $p+q$, si $y_i = s(p+q)$, alors $y_{i+1} = s(p+q)$ ou $y_{i+1} = (s \pm 1)(p+q)$.

La somme

$$\begin{aligned} & y_0 + y_{p+q} + y_{2(p+q)} + \cdots + y_{(a-1)(p+q)} \\ &= (x_{p+q} - x_0) + (x_{2(p+q)} - x_{p+q}) + (x_{3(p+q)} - x_{2(p+q)}) \\ &\quad + \cdots + (x_{a(p+q)} - x_{(a-1)(p+q)}) \\ &= a_{a(p+q)} - x_0 = x_n - x_0 \end{aligned}$$

étant nulle par hypothèse, ses termes ne peuvent être tous strictement positifs ou tous strictement négatifs. Si l'un d'entre eux est nul, la propriété est démontrée. Sinon, dans la suite

$$y_0, y_1, \dots, y_{n-p-q},$$

certains termes sont strictement positifs et d'autres strictement négatifs. Donc, ou bien un des y_i est nul ou bien il y a au moins deux termes consécutifs qui n'ont pas le même signe. Mais cette dernière éventualité est impossible puisque nous avons vu plus haut que si $y_i = s(p+q)$, alors $y_{i+1} = s(p+q)$ ou $y_{i+1} = (s \pm 1)(p+q)$.