Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N° 111 *Mars – Avril 1997*

Éditorial

G. Noël,

Dans l'éditorial du n°109, je mentionnais que la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* avait adressé un memorandum à la Ministre de l'Education afin de lui soumettre un certain nombre de réflexions. Nous lui rappelions aussi, *in fine*, le désir de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* et des autres associations pédagogiques d'être associées aux discussions relatives à l'avenir de l'enseignement. Le texte complet de ce memorandum a été publié dans SBPM-infor 103, et la réponse de la Ministre dans SBPM-infor 104.

De son côté, la CAPP, dont fait partie la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*, effectuait une démarche analogue après la publication du projet de décret définissant les missions prioritaires de l'enseignement. Un premier contact vient d'avoir lieu : une délégation de la CAPP a été longuement reçue par un membre du cabinet de la Ministre.

La conversation a porté notamment sur le support logistique que le Ministère pourrait apporter aux activités interdisciplinaires que la CAPP réalise, notamment par la mise à disposition des écoles de valises pédagogiques contenant un impressionnant matériel exploitable à divers niveaux et en collaboration par des professeurs de disciplines différentes. (Rappelons que les thèmes des valises déjà réalisées sont ≪le temps≫, ≪la communication≫, ≪espace et matière≫. Une quatrième valise est en préparation sur le thème ≪Semblables et différents≫). La question de la participation des associations pédagogiques aux instances qui décident de l'enseignement a également fait l'objet d'un large échange de vues.

Quel que soit le sujet abordé, on ne peut se défaire de l'impression que les structures de l'enseignement sont d'une lourdeur extrème et que les innovations trouvant leur origine à la base éprouvent bien des difficultés pour se faire entendre. En ces temps où l'on parle de ≪nouvelle culture politique≫, on pourrait cependant espérer mieux.

Le point de vue des associations pluralistes de professeurs, auquel la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* adhère pleinement, est très clair : si nous apprécions le travail effectué par la ≪hiérarchie≫, et si nous le respectons, nous considérons aussi que nos associations ont un rôle à jouer. Car ce n'est pas la hiérarchie, si éclairée soit-elle, qui peut représenter le point de vue des enseignants, précisément parce qu'elle est la hiérarchie, avec tout ce que cela implique. Nous continuerons donc, dans le respect des objectifs sociaux de nos associations, de revendiquer un droit de parole dans tous les organismes qui traitent de questions ayant des incidences pédagogiques. Faut-il rappeler que les associations pédagogiques sont les seules composantes de la communauté éducative qui, jusqu'à présent, ne sont pas consultées ?

Sur le front des réformes de l'enseignement en Communauté Française de Belgique, notre interlocuteur a reconnu que l'opération ≪Socles de compétences≫ était loin d'avoir été un grand succès, tout en attribuant ce fait à des difficultés de communication. Pour l'avenir, il nous a assuré que la Ministre n'envisage pas de toucher aux ≪grilles horaires≫ dans l'immédiat. La priorité va être donnée à l'établissement de ≪compétences terminales≫. Le programme ministériel se résume en quatre lettres : C P O E. Explicitons-les : C pour ≪Elaboration de Compétences terminales≫, P pour ≪Révision des Programmes en vue de les adapter aux compétences terminales≫, O pour ≪Opérationnalisation des objectifs fixés par les compétences terminales et les programmes≫, E pour ≪Elaboration d'une banque d'épreuves indiquant le niveau de difficulté visé par l'Evaluation certificative≫.

Provisoirement, je me contenterai d'une conclusion évidente : nous devrons dans les mois qui viennent rester particulièrement attentifs !

La géométrie de l'espace au niveau de la 5e année du secondaire. (II)

J. Navez, *Université de Liège*

Deuxième partie : Géométrie métrique (1)

1. Axiomes de perpendicularité et conséquences

1.1. Droites et plans perpendiculaires

En géométrie plane, la notion de perpendicularité a été introduite soit axiomatiquement, soit intuitivement. Nous conviendrons que l'on dispose d'un "rapporteur" dans le plan et qu'un angle a été privilégié entre tous : l'angle droit.

Pour introduire la perpendicularité dans l'espace, nous commençons en fait par les droites perpendiculaires à un plan. La notion intuitive : fil à plomb au-dessus d'une table est facile à donner. Ce qui est peut-être moins facile, c'est d'exprimer que la restriction dans le plan des axiomes de perpendicularité dans l'espace rend bien la perpendicularité dans le plan. La façon de l'exprimer correctement dépend des axiomes vus dans le plan.

Axiome 1 : *A toute direction δ, on associe bijectivement une 2-direction Δ ne la contenant pas et qui est dite lui être perpendiculaire.*

L'association en question peut être représentée par la perpendicularité "physique" que nous connaissons.

Cet axiome confirme aussi que la dimension de l'espace est 3.

Définition : *Une droite a est dite perpendiculaire à un plan α si la direction de a est perpendiculaire à la 2-direction de α et on note $a \perp \alpha$.*

L'association entre direction et 2-direction étant bijective, à toute 2-direction on associe également une et une seule direction et si une droite

1. La première partie a été publiée dans le numéro 110 (1997) pp. 5–28 de la revue Mathématique et Pédagogie.

est perpendiculaire à un plan, on pourra également dire que le plan est perpendiculaire à la droite.

Théorèmes

a) *Par un point de l'espace, il passe un et un seul plan perpendiculaire à une droite donnée.*
En effet, par un point donné, il passe un et un seul plan ayant une 2-direction donnée.

b) *Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*
Evident, puisque deux droites ont la même direction.

c) *Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.*
Evident, puisque les deux plans ont la même 2-direction.

d) *Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, ils sont parallèles.*
Unicité de la 2-direction associée à une direction donnée.

e) *Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, elles sont parallèles.*
Unicité de la direction associée à une 2-direction.

1.2. Droites orthogonales

Définition : *Une direction δ est dite orthogonale à une autre direction ε si la 2-direction Δ qui est perpendiculaire à δ contient la direction ε.*

On écrit $\delta \underline{\perp} \varepsilon$.

Axiome 2 : *La relation "être orthogonale à" dans l'ensemble des directions est symétrique.*

Propriété : *La relation "être orthogonale à" dans l'ensemble des directions est anti-réflexive.*

Cela est garanti par le fait que la 2-direction ne contient pas la direction à laquelle elle est associée.

Définitions :

— *Deux droites sont dites orthogonales si leurs directions sont orthogonales.*

— *Deux droites sont dites perpendiculaires si elles sont orthogonales et coplanaires.*

Conséquences immédiates

— Deux droites orthogonales ne sont pas parallèles.
— Deux droites perpendiculaires sont sécantes.
— Un plan perpendiculaire à une droite coupe cette droite.

Théorème ([2]) : *Dans un plan, les droites perpendiculaires version "espace" vérifient bien les propriétés fondamentales vues en géométrie plane.*

On peut considérer que ces propriétés fondamentales sont :
— à toute direction du plan on associe bijectivement une autre direction qui est dite lui être perpendiculaire ;
— cette association est symétrique ;
— cette association est anti-réflexive.
Il suffit de vérifier qu'à toute direction δ du plan est associée une et une seule direction ε du même plan qui lui est orthogonale.

Considérons un plan ϖ_0 passant par O, d_0 une droite représentant la direction δ et α_0 un plan représentant la 2-direction perpendiculaire à δ ; les plans ϖ_0 et α_0 sont sécants car ils ont un point commun et ne peuvent pas avoir la même 2-direction, soit e_0 leur droite d'intersection. La direction ε qui est représentée par e_0 est unique et bien déterminée.

On peut aussi montrer que l'association entre δ et ε est symétrique et non-réflexive.

1.3. Compléments sur les droites et plans perpendiculaires

Théorèmes

a) *Critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan : pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.*
La condition nécessaire est évidente vu la définition de l'orthogonalité. La condition suffisante provient du fait qu'une 2-direction est complètement déterminée par la donnée de deux directions différentes.
b) **Corollaire** : *Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites du plan.*

2. L'expression de ce théorème varie en fonction de la façon dont a été introduite la perpendicularité dans le plan.

c) *Par un point de l'espace, il passe une et une seule droite perpendiculaire à un plan donné.*
Une droite étant complètement déterminée par un point et une direction, l'affirmation est évidente.

d) **Corollaire** : *Etant donné deux droites perpendiculaires, il existe une et une seule droite à la fois perpendiculaire aux deux premières droites.*
Les deux premières perpendiculaires déterminent un plan puisqu'elles sont sécantes. Il existe une et une seule direction perpendiculaire à ce plan. Par le point d'intersection des deux premières droites, on peut mener une et une seule perpendiculaire à leur plan.

e) **Théorème des trois perpendiculaires** : *Si d'un point on mène deux droites, l'une perpendiculaire à un plan, l'autre perpendiculaire à une droite de ce plan, cette dernière droite est perpendiculaire au plan des deux premières.*
Prenons $P \in a$, $P \in b$, $c \subset \varpi$, $a \perp \varpi$, $b \perp c$. On voit que la droite c est orthogonale aux droites a et b et par conséquent, elle est perpendiculaire au plan qu'elles forment.

1.4. Plans perpendiculaires

Définition : *Un plan est dit perpendiculaire à un autre s'il contient une droite perpendiculaire à cet autre.*

Conséquences immédiates

- Deux plans perpendiculaires sont sécants.
- La relation est symétrique. On peut parler de plans perpendiculaires.

Théorèmes

a) *Si deux plans sont perpendiculaires, la perpendiculaire à l'un contenant un point de l'autre, appartient tout entière à cet autre.*
Si $\alpha \perp \beta$, il existe une droite d' contenue dans β et perpendiculaire à α. Si d est perpendiculaire à α et contient un point P de β, alors $d//d'$; la parallèle à d' menée par P est contenue dans β.

b) *La droite perpendiculaire à l'intersection de deux plans perpendiculaires et contenant un point de l'un des deux plans est perpendiculaire à l'autre.*
Soit i l'intersecton des plans $\alpha \perp \beta$; alors les mêmes notations que ci-dessus, $d' \perp i$ et toute droite perpendiculaire à i possède la direction qui est perpendiculaire à la 2-direction de α.

c) *Critère de perpendicularité : deux plans sont perpendiculaires si et seulement si deux droites qui leur sont respectivement perpendiculaires sont orthogonales entre elles.*
Pour démontrer la condition nécessaire, il faut mener deux droites qui sont perpendiculaires à l'intersection des deux plans et qui contiennent respectivement un point de chaque plan. Pour la condition suffisante, il faut remarquer que d'abord les plans sont sécants, et ensuite par un point de l'intersection, il faut mener deux droites qui sont respectivement parallèles aux deux droites données.

2. Opérations fondamentales

2.1. Projection orthogonale

La projection orthogonale sur un plan ϖ est la projection oblique relative à la direction perpendiculaire à la 2-direction de ϖ.

La projection orthogonale conserve bien entendu toutes les propriétés des projections obliques, mais en plus signalons celle-ci :

Un angle droit se projette orthogonalement sur un angle droit si et seulement si un de ses côtés est parallèle au plan de projection et si l'autre côté n'est pas perpendiculaire à ce plan.

La projection orthogonale sur une droite a est la projection oblique relative à la 2-direction perpendiculaire à la direction de a.

2.2. Symétrie orthogonale par rapport à un plan

C'est l'opération définie comme suit : si P est un point du plan, il est sa propre image. Si P n'appartient pas au plan, on mène par P la perpendiculaire au plan qui le coupe en un point M. P' est l'image de P si M est le milieu du segment PP'.

Théorème : *La composée de deux symétries orthogonales de plans parallèles est une translation.*

La démonstration se fait de la même manière.

Définitions :

— *On appelle* ***rotation*** *la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des plans sécants ou la transformation identique. Toute rotation différente de l'identité possède une droite de points fixes que l'on appelle* ***axe*** *de la rotation.*

— *On appelle* ***vissage*** *la composée d'une rotation et d'une translation dont la direction est parallèle à l'axe de rotation.*

— *La composée d'un nombre fini de symétries orthogonales par rapport à des plans s'appelle une* ***isométrie****.*

— *Deux figures sont dites isométriques s'il existe une isométrie permettant de passer de l'une à l'autre.*

Théorème : *Une isométrie conserve les distances.*

Il suffit de démontrer le théorème pour les symétries orthogonales.

3. Mesure des distances

L'axiome de la rotation tel qu'il a été énoncé dans le plan doit être modifié pour l'espace.

Axiome 3 : *Etant donné deux demi-droites fermées de même origine, il existe une et une seule rotation dont l'axe est perpendiculaire au plan des demi-droites et qui amène la première sur la seconde.*

Conséquence : à l'aide d'une rotation et d'une translation, on peut comparer des segments gauches à une même demi-droite graduée.

Il reste à choisir une unité de mesure et cet axiome veut dire que l'on peut mesurer les distances dans toutes les directions dans l'espace.

La mesure de la distance séparant les points P et Q est notée $d(P, Q)$ ou $|PQ|$ si on se réfère plus exactement à la longueur du segment PQ.

4. Espace métrique ou espace euclidien

L'espace métrique ou espace euclidien est l'espace affin muni des axiomes supplémentaires 1 à 3, d'une convention pour la représentation des angles droits et du choix d'une unité de mesure.

5. Produit scalaire dans l'espace euclidien

Considérons les vecteurs liés en un point O de l'espace euclidien.

On dira que deux vecteurs liés sont orthogonaux si les droites support de ces deux vecteurs sont perpendiculaires.

On appelle norme d'un vecteur lié la distance séparant son origine de son extrémité. On dit qu'un vecteur est normé si sa norme vaut 1.

Par l'intermédiaire des représentants, ces définitions peuvent s'étendre aux vecteurs libres.

En géométrie plane, on a défini le produit scalaire de deux vecteurs ; nous connaissons donc l'expression $\overrightarrow{OP} \,.\, \overrightarrow{OQ}$ dans le (un des) plan(s) qu'ils forment, mais nous souhaiterions l'étendre au cas de l'espace. Prenons comme définition :

$$\boxed{\overrightarrow{OP} \,.\, \overrightarrow{OQ} = |OP| \ |OQ| \cos(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})}$$

avec la convention habituelle si un vecteur est nul. Grâce aux propriétés vues en géométrie plane, cette définition peut encore s'écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{OP} \,.\, \overrightarrow{OQ} = \overline{OP}\ \overline{OQ'}}$$

où Q' est la projection orthogonale de Q sur la droite OP.

Conséquences immédiates

a) *Le produit scalaire de deux vecteurs dont au moins un est le vecteur nul est nul.*

b) *Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.*
c) *Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est égal au carré de sa norme.*
d) *Le produit scalaire est commutatif.*
e) *On peut déplacer les scalaires* : $(k\,\overrightarrow{OP}).\,\overrightarrow{OQ}= k(\overrightarrow{OP}\,.\,\overrightarrow{OQ})$.

En effet, si $P \neq O$ et si $k \neq 0$,

$$\begin{aligned}(k\,\overrightarrow{OP}).\,\overrightarrow{OQ} &= k\,|OP|\;\,|OQ|\cos(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}) \text{ si } k>0\\ &= -k\,|OP|\;\,|OQ|\,[-\cos(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ})] \text{ si } k<0.\end{aligned}$$

Si $P = O$ ou $k = 0$, la propriété est évidente.

Bilinéarité du produit scalaire

Il faut démontrer que $\overrightarrow{OP}\,.(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{OP}\,.\,\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OP}\,.\,\overrightarrow{OR}$.

Si on appelle S le point tel que $\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OS}$ et si on suppose $P \neq O$, on peut projeter orthogonalement sur la droite OP. La nouvelle thèse est alors :

$$\overline{OP}\;\overline{OS'} = \overline{OP}\;\overline{OQ'} + \overline{OP}\;\overline{OR'} \;\text{ soit }\; \overline{OS'} = \overline{OQ'} + \overline{OR'}.$$

Pour démontrer cela, il faut utiliser la propriété disant que la projection oblique sur une droite par rapport à une 2-direction donnée conserve l'équipollence. On peut bien sûr admettre cette propriété ou même admettre la bilinéarité du produit scalaire.

En combinant avec le résultat e) ci-dessus, la bilinéarité est ainsi établie.

Définition : *L'espace vectoriel E_0 muni du produit scalaire est un espace vectoriel dit euclidien.*

Ce qui précède peut s'étendre aux vecteurs libres en agissant par l'intermédiaire des représentants.

6. Repère cartésien

On appelle repère cartésien de l'espace la donnée d'un point O et de trois vecteurs liés en O, formant une base de E_0, c'est-à-dire trois vecteurs

linéairement indépendants $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3}$.
On note ce repère $(O, E_1E_2E_3)$.

On peut également se donner une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ des vecteurs libres et considérer que $\overrightarrow{OE_1}$ est un représentant de $\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2}$ un représentant de $\vec{e}_2$ et $\overrightarrow{OE_3}$ un représentant de $\vec{e}_3$. On notera alors le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Le point O s'apelle **origine** du repère.

Si P est un point quelconque de l'espace, on peut toujours écrire :

$$\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{OE_1} + y\,\overrightarrow{OE_2} + z\,\overrightarrow{OE_3}$$

et on dit que (x, y, z) sont les **coordonnées cartésiennes** de P dans le repère $(O, E_1E_2E_3)$; x s'appelle l'**abscisse** de P, y l'**ordonnée** de P et z la **cote** de P.

Dans un repère donné, l'association entre P et le triplet (x, y, z) est bijective.

6.1. Représentation analytique d'un vecteur lié

Si (x, y, z) sont les coordonnées du point P dans le repère $(O, E_1E_2E_3)$, les **composantes** du vecteur lié dans la base associée au repère sont bien sûr aussi (x, y, z).

6.2. Représentation analytique d'un vecteur libre

Considérons le vecteur libre déterminé par le bipoint (P_1, P_2) tel que les coordonnées de P_1 soient (x_1, y_1, z_1) et que les coordonnées de P_2 soient (x_2, y_2, z_2). Alors il existe un et un seul vecteur lié en O, $\overrightarrow{OP}$ qui est un représentant du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$. Autrement dit, les bipoints (P_1, P_2) et (O, P) sont équipollents.

Comme $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2}$, on a que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$ et par suite, les composantes de $\overrightarrow{OP}$ sont $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

Dans le repère considéré, on dira que les composantes du vecteur libre $\overrightarrow{P_1P_2}$ sont $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

7. Repère cartésien orthonormé

Considérons deux vecteurs liés en O, $\overrightarrow{OE_1}$ et $\overrightarrow{OE_2}$, qui soient orthogonaux. On peut toujours trouver une droite qui soit perpendiculaire à la fois à la droite support de $\overrightarrow{OE_1}$ et à la droite support de $\overrightarrow{OE_2}$ (voir corollaire ci-dessus). On peut considérer qu'il y a deux façons de choisir sur cette droite un vecteur $\overrightarrow{OE_3}$: ou bien son sens est tel que le pouce et l'index de la **main droite** étant dirigés comme $\overrightarrow{OE_1}$ et $\overrightarrow{OE_2}$, le majeur indique le sens de $\overrightarrow{OE_3}$ ou bien le pouce et l'index de la **main gauche** étant dirigés comme $\overrightarrow{OE_1}$ et $\overrightarrow{OE_2}$, le majeur indique le sens de $\overrightarrow{OE_3}$. Dans le premier cas, on dira que les trois vecteurs sont orientés **dextrorsum** et, dans le second cas, qu'ils sont orientés **sinistrorsum**.

Si nous prenons comme base de E_0, trois vecteurs $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3}$ qui sont :

— orthogonaux deux à deux
— normés
— orientés dextrorsum

alors on dira que le repère $(O, E_1E_2E_3)$ est un **repère cartésien orthonormé**.

Expression vectorielle

Les vecteurs de base étant orthogonaux deux à deux, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{OE_2} \cdot \overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{OE_3} \cdot \overrightarrow{OE_3} = 1.$$

On peut rassembler tout cela en une seule expression :

$$\overrightarrow{OE_i} \cdot \overrightarrow{OE_k} = \delta_{ik},$$

où δ_{ik} vaut 0 si $i \neq k$ et vaut 1 si $i = k$ (symbole de KRONECKER).

Expression analytique du produit scalaire

Considérons deux vecteurs liés $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ et supposons que dans le repère orthonormé $(O, E_1E_2E_3)$ les coordonnées de P sont (x_1, y_1, z_1) et que celles de Q sont (x_2, y_2, z_2), on a alors :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \\
&= (x_1 + \overrightarrow{OE_1} + y_1 \overrightarrow{OE_2} + z_1 \overrightarrow{OE_3}).(x_2 \overrightarrow{OE_1} + y_2 \overrightarrow{OE_2} + z_2 \overrightarrow{OE_3}) \\
&= x_1 x_2 \overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OE_1} + y_1 y_2 \overrightarrow{OE_2} \cdot \overrightarrow{OE_2} + z_1 z_2 \overrightarrow{OE_3} \cdot \overrightarrow{OE_3}
\end{aligned}$$

et enfin,

$$\boxed{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.}$$

En particulier, si $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ appartiennent tous les deux au plan OE_1E_2, les coordonnées de P seront $(x_1, y_1, 0)$ et celles de Q seront $(x_2, y_2, 0)$ si bien que le produit scalaire de $\overrightarrow{OP}$ par $\overrightarrow{OQ}$ vaudra $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

On constate ainsi que l'on a bien généralisé la formule vue en géométrie plane.

Si on considère maintenant les deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de composantes respectives (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3), l'expression de leur produit scalaire sera :

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.}$$

Expression analytique de la norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur lié $\overrightarrow{OP}$ est la distance $|OP|$; si (x, y, z) sont les coordonnées de P, on a :

$$|OP|^2 = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.}$$

Si maintenant on considère un vecteur libre $\vec{a}$ de composantes (a_1, a_2, a_3), sa norme vaudra

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.}$$

Expression analytique de la distance entre deux points

Si on considère deux points P_1 et P_2 de coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2), $d(P_1, P_2) = |P_1P_2|$ et, par suite,

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.}$$

8. Géométrie analytique des droites et des plans dans l'espace

Equation d'un plan

Considérons un plan de l'espace donné par un point P_0 et une 2-direction Δ. Dans un repère orthonormé, les coordonnées de P_0 sont (x_0, y_0, z_0) et pour nous donner la 2-direction, nous allons considérer la direction δ perpendiculaire à laquelle elle est bijectivement associée. Supposons que δ soit représentée par un vecteur lié $\overrightarrow{OM}$ de composantes (a, b, c).

Le plan que nous cherchons peut alors être considéré comme le lieu des points P dont les projections orthogonales sur la droite support de $\overrightarrow{OM}$ sont égales à une constante.

On peut écrire

$$\overrightarrow{OP} \,.\, \overrightarrow{OM} = c^{ste}$$

soit

$$ax + by + cz = c^{ste}.$$

On exprime le passage par P_0 : $ax_0 + by_0 + cz_0 = c^{ste}$, et l'équation devient :

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

qui est l'équation du plan perpendiculaire à une direction donnée et passant par un point donné.

Si on pose $d = ax_0 + by_0 + cz_0$, l'équation prend la *forme canonique* :

$$\boxed{ax + by + cz = d.}$$

Inversement, si on se donne un plan par son équation canonique, le vecteur formé par les coefficients de x, y et z nous donne la direction perpendiculaire au plan. Cette direction s'appelle aussi la direction *normale* au plan.

On peut encore améliorer l'équation $\overrightarrow{OP} \, . \, \overrightarrow{OM} = c^{ste}$; puisque $\overrightarrow{OM}$ n'est pas un vecteur nul, on peut diviser les deux membres par $|OM|$ et on obtient :

$$\overrightarrow{OP} \, . \frac{\overrightarrow{OM}}{|OM|} = \frac{c^{ste}}{|OM|}.$$

Cette dernière équation s'appelle *équation normale* d'un plan. Il n'est pas difficile de voir que le module du second membre mesure exactement la distance du plan à l'origine.

Condition de parallélisme de deux plans

Deux plans sont parallèles si les directions perpendiculaires qui leur sont respectivement associées sont les mêmes.

Si on se donne deux plans par leurs équations canoniques $ax + by + cz = d$ et $a'x + b'y + c'z = d'$, ils seront parallèles si :

$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}} \qquad (*)$$

avec la convention habituelle pour les dénominateurs.

En particulier, deux plans dont les équations canoniques ne diffèrent que par le terme indépendant sont parallèles.

Condition de perpendicularité de deux plans

Deux plans sont perpendiculaires si les directions normales qui leur sont associées sont orthogonales. La condition est donc :

$$\boxed{aa' + bb' + cc' = 0.}$$

Equations d'une droite

Considérons une droite donnée par un point P_0 et par une direction δ. Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du point P_0 et $\overrightarrow{OM}$ un vecteur lié de composantes (u, v, w) représentant la direction δ. Comme en géométrie plane, nous disons que $\overrightarrow{OM}$ est un *vecteur direction* de la droite. Si P est un point quelconque de la droite,

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = k\,\overrightarrow{OM},$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + k\,\overrightarrow{OM}$$

et s'appelle *équation paramétrique vectorielle* de la droite.

Si on égale les composantes, on trouve :

$$\begin{cases} x = x_0 + ku \\ y = y_0 + kv \\ z = z_0 + kw \end{cases}.$$

Ce système s'appelle *équations paramétriques cartésiennes* de la droite.

Enfin, si on élimine k, on a :

$$\boxed{\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}}$$

Ces équations s'appellent *équations cartésiennes symétriques* d'une droite.

On peut se donner également une droite comme intersection de deux plans :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

mais il faut exprimer que les deux plans sont sécants, ce qui peut se faire en disant que la condition (*) n'est pas remplie. On peut montrer que la direction représentée par le vecteur de composantes $(bc' - b'c,\ ca' - a'c,\ ab' - a'b)$ est à la fois orthogonale à la normale au premier plan et à la normale au second, donc qu'elle est parallèle à l'intersection des deux plans.

Condition de parallélisme de deux droites

Les vecteurs direction respectifs doivent représenter la même direction, donc :

$$\boxed{\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'}}.$$

Condition d'orthogonalité de deux droites

Les vecteurs direction respectifs doivent être orthogonaux, donc :

$$\boxed{uu' + vv' + ww' = 0}.$$

Condition de parallélisme d'une droite et d'un plan

La direction de la droite doit être orthogonale à la direction normale au plan :

$$\boxed{au + bv + cw = 0}.$$

Condition de perpendicularité d'une droite et d'un plan

La direction de la droite doit être parallèle à la direction normale au plan :

$$\boxed{\frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{c}{w}}.$$

9. Problèmes de distances

Nous savons déjà calculer la distance entre deux points mais il reste la distance entre un point et un plan et la distance entre deux droites gauches.

Distance d'un point à un plan

La distance entre un point et un plan est la distance entre ce point et la projection orthogonale de ce point sur le plan.

Une petite construction et les propriétés des triangles rectangles nous disent que la distance d'un point à un plan est la plus petite des distances entre ce point et les points du plan.

Soit $ax+by+cz = d$ le plan en question et P_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) le point donné. La droite passant par P_0 et perpendiculaire au plan a pour équation :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

L'abscisse de son point d'intersection avec le plan peut être calculée ; elle vaut :

$$x = \frac{-a(by_0 + cz_0) + (b^2 + c^2)x_0 + ad}{a^2 + b^2 + c^2}$$

et par suite

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{a(d - ax_0 - by_0 - cz_0)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ y - y_0 &= \frac{b(d - ax_0 - by_0 - cz_0)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ z - z_0 &= \frac{c(d - ax_0 - by_0 - cz_0)}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
[d(P_0, \varpi)]^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \frac{(d - ax_0 - by_0 - cz_0)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\
d(P_0, \varpi) &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.
\end{aligned}$$

Distance entre deux droites gauches

Pour construire la *perpendiculaire commune* à deux droites gauches a et b, on peut considérer en un point X de b, la perpendiculaire c au plan (a, a') formé par a et la parallèle a' à a menée par X. Si A est le point de percée de a dans le plan (b, c), la perpendiculaire p abaissée de A sur b est la perpendiculaire commune aux deux droites gauches. En effet, p s'appuie sur a et sur b ; p est parallèle à c qui est à la fois perpendiculaire à b et à a', donc p est perpendiculaire à a et à b.

Si on désigne par B le pied de la perpendiculaire p sur b, la distance entre les deux droites gauches est $|AB|$.

Pour le calcul, il est plus simple de considérer que cette distance entre A et B est égale à la distance entre A et le plan (a, a').

10. Angles

Angle de deux droites

Si les deux droites sont **sécantes**, on est ramené à un problème du plan ; on considère habituellement que l'angle entre deux droites est l'angle aigu formé par ces deux droites.

Si les deux droites sont **gauches**, on se ramène au cas précédent en traçant une parallèle à une des deux droites passant par un point de l'autre.

Angle d'une droite et d'un plan

L'angle d'une droite et d'un plan est l'angle aigu déterminé par cette droite et sa projection orthogonale sur le plan.

Angles d'un dièdre

Considérons un dièdre dont les faces sont α et β et l'arête i. Par un point de i, on mène dans α la demi-droite perpendiculaire à i et dans β la demi-droite perpendiculaire à i ; l'angle formé par ces deux demi-droites s'appelle **rectiligne du dièdre** ou encore **angle du dièdre**. Pour calculer sa mesure dans le plan formé par les deux demi-droites, on considère l'angle inférieur ou égal à un angle plat (angle rentrant). On peut montrer que la mesure de cet angle est indépendante du point de i choisi pour construire l'angle.

11. Figures remarquables (suite) ([3])

11.1. Figures non limitées

Dièdre droit

On dit qu'un dièdre est droit si les plans des faces sont perpendiculaires.

Trièdre trirectangle

On dit qu'un trièdre est trirectangle si les plans des faces sont perpendiculaires deux à deux.

11.2. Figures limitées

Prisme droit

Un prisme est droit si les plans des faces sont perpendiculaires aux plans des bases.

Parallélépipède rectangle

Un parallélépipède rectangle est un prisme droit dont les bases sont des rectangles.

Cube

Un cube est un parallélépipède rectangle dont les six faces sont des carrés de même côté.

3. cf. 1ère partie.

Pyramide droite

Une pyramide est droite si sa base est un n-latère régulier et si son sommet se projette orthogonalement au centre de la base.

12. Les corps ronds

On appelle **surface conique de révolution** la surface engendrée par une droite (*génératrice*) tournant autour d'une autre droite qui est sécante. La droite autour de laquelle on tourne s'appelle *axe de révolution* et le point de concours des deux droites s'appelle *sommet* de la surface conique.

On appelle **cône de révolution** le solide limité par une surface conique de révolution, son sommet et un plan perpendiculaire à l'axe de révolution et ne passant pas par le sommet.

L'intersection du plan et de la surface conique est un cercle limitant un disque que l'on appelle *base* du cône de révolution.

On appelle **surface cylindrique de révolution** la surface engendrée par une droite (*génératrice*) tournant autour d'une autre droite parallèle. La droite autour de laquelle on tourne s'appelle *axe de révolution*.

On appelle **cylindre de révolution** le solide limité par une surface cylindrique de révolution et deux plans parallèles perpendiculaires à l'axe de révolution.

L'intersection d'un des plans et de la surface cylindrique est un cercle limitant un disque que l'on appelle *base* du cylindre de révolution.

On appelle **sphère** la surface obtenue en faisant tourner un cercle autour d'un de ses diamètres. Le centre du cercle s'appelle aussi *centre de la sphère.*

On appelle **boule** le solide limité par une sphère.

13. La sphère

Théorème : *La sphère est le lieu des points équidistants de son centre.*

Tout point de la sphère est équidistant du centre. En effet, tout point d'un cercle est équidistant du centre ; tout point de la sphère est l'image par rotation d'un point du cercle. Lors de la rotation, le centre reste fixe et les distances sont conservées puisque la rotation est une isométrie.

Si R est le rayon du cercle que l'on fait tourner autour de son diamètre AB, tout point Q situé à une distance R du centre O de la sphère est situé sur la sphère. En effet, dans le plan déterminé par AB et le point Q, le cercle de centre O et de rayon R passe par Q en vertu des propriétés du cercle et par conséquent, Q se trouve bien sur la sphère.

Equation cartésienne d'une sphère

Considérons une sphère de centre $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R. L'ensemble des points $P(x, y, z)$ appartenant à la sphère vérifie $|P_0P| = R$, ce qui équivaut à $|P_0P|^2 = R^2$ puisque les deux membres sont positifs. Cette dernière égalité peut s'écrire :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

qui est l'équation cartésienne de la sphère de centre P_0 et de rayon R.

En particulier, la sphère de centre O et de rayon R a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Positions relatives d'une sphère et d'un plan

Considérons une sphère et un plan placés de manière quelconque.

On peut toujours s'arranger pour prendre l'origine du repère au centre de la sphère, la direction de $\overrightarrow{OE_3}$ normale au plan et le point de percée de $\overrightarrow{OE_3}$ dans le plan sur le côté positif de $\overrightarrow{OE_3}$.

Dans ces conditions, la sphère a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

et le plan a pour équation

$$z = d \qquad \text{avec } d \geqslant 0.$$

Si on considère le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = d \end{cases}$$

on obtient

$$x^2 + y^2 = R^2 - d^2.$$

1) $R^2 - d^2 > 0 \Leftrightarrow R > d$
La sphère et le plan ont des points d'intersection qui se projettent orthogonalement sur le plan OE_1E_2 selon un cercle et qui appartiennent à un plan perpendiculaire à $\overrightarrow{OE_3}$; l'intersection est donc un cercle situé dans le plan, le centre de ce cercle est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan et le rayon du cercle vaut $(R^2 - d^2)^{1/2}$ où d est la distance du plan au centre de la sphère.
On dit que le plan est **sécant** par rapport à la sphère.
2) $R^2 - d^2 = 0 \Leftrightarrow R = d$
La sphère et le plan ont un seul point d'intersection, le point $(0, 0, d)$.
On dit que le plan est **tangent** à la sphère.
Le plan tangent en un point d'une sphère est ainsi le plan passant par ce point et perpendiculaire au rayon passant par ce point.
3) $R^2 - d^2 < 0 \Leftrightarrow R < d$
Le plan et la sphère n'ont aucun point commun.
On dit que le plan est **non sécant** par rapport à la sphère.

Remarque : Un plan passant par le centre de la sphère est toujours sécant puisque $d = 0$; on l'appelle **plan diamétral**. Un plan diamétral coupe la sphère selon un cercle de rayon R ; on dit que c'est un **grand cercle** de la sphère.

Si un plan coupe la sphère selon un cercle de rayon inférieur à R, on dit que c'est un **petit cercle** de la sphère.

Positions relatives d'une sphère et d'une droite

On se donne une sphère et une droite. Considérons le plan formé par la droite et le centre de la sphère. Ce plan est un plan diamétral, il coupe la sphère selon un grand cercle. Soit d la distance de la droite au centre de la sphère. Nous sommes ramenés au cas des positions relatives entre une droite et un cercle.

1) $R > d$
La droite coupe le cercle et par conséquent la sphère en deux points.
On dit que la droite est **sécante** par rapport à la sphère.
2) $R = d$

La droite et le cercle et par conséquent la droite et la sphère ont un seul point en commun. On dit que la droite est **tangente** à la sphère. Une tangente à la sphère est perpendiculaire au rayon passant par son point de contact, donc elle appartient au plan tangent passant par ce point.

3) $R < d$
La droite et le cercle et par conséquent la droite et la sphère n'ont pas de point commun. On dit que la droite est **non sécante** à la sphère.

Positions relatives de deux sphères

Considérons deux sphères de rayons respectifs R et r, sans restriction, prenons $R \geqslant r$. Appelons d la distance séparant les centres des deux sphères. On peut toujours choisir le repère tel que le centre de la sphère de rayon R soit l'origine O et tel que le centre de la deuxième sphère soit un point Q situé sur le côté positif de $\overrightarrow{OE_1}$. Les points communs aux deux sphères doivent satisfaire au système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ (x-d)^2 + y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

et par suite,

$$2dx = R^2 - r^2 + d^2,$$

ce qui implique $x \geqslant 0$.

Si $d = 0$ et $R = r$, les deux sphères sont confondues. Si $d = 0$ et $R > r$, il n'y a pas de point d'intersection. Si $d \neq 0$, l'existence de points d'intersection est subordonnée aux inégalités $x \leqslant R$ et $x \leqslant d+r$, ce qui nous donne finalement la condition pour qu'il existe des points d'intersection :

$$R - r \leqslant d \leqslant R + r.$$

1) $d > R + r$
Il n'y a pas de point commun. La boule limitée par la deuxième sphère ne se trouve pas dans la boule limitée par la première.
On dit que les sphères sont **non sécantes et extérieures** l'une par rapport à l'autre.

2) $d = R + r$
Il y a un seul point commun. Les deux boules ont aussi ce seul point commun.

On dit que les deux sphères sont **tangentes extérieurement.** Les deux sphères ont le même plan tangent en leur point commun.

3) $R - r < d < R + r$
L'intersection est un cercle situé dans un plan perpendiculaire à la droite joignant les deux centres des sphères (*droite des centres*).
On dit que les deux sphères sont **sécantes**.

4) $d = R - r$
   4.1) $d \neq 0$
   Il y a un seul point commun. La deuxième boule est comprise dans la première. On dit que les deux sphères sont **tangentes intérieurement**. Les deux sphères ont le même plan tangent en leur point commun.
   4.2) $d = 0$ et $R = r$
   Les deux sphères sont **confondues**.

5) $d < R - r$
Il n'y a pas de point commun. La deuxième boule est incluse dans la première.
On dit que les deux sphères sont **non sécantes et intérieures**, la seconde par rapport à la première.
Ce cas est bien entendu exclu si $R = r$. C'est par contre le cas général quand $d \neq 0$.

14. Produit vectoriel

Définition : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, considérons deux vecteurs liés $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ (éventuellement les représentants de deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$) qui sont linéairement indépendants. Le **produit vectoriel** de $\overrightarrow{OA}$ par $\overrightarrow{OB}$ est un nouveau vecteur $\overrightarrow{OC}$ ($\vec{c}$) noté $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ tel que :

— $\overrightarrow{OC}$ a une direction perpendiculaire à la 2-direction déterminée par $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
— $\overrightarrow{OC}$ a le sens obtenu par la règle des trois doigts de la main droite appliquée à $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.
— $\overrightarrow{OC}$ a pour norme $\left|\overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \left|\overrightarrow{OB}\right| \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Si les deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont linéairement dépendants, leur produit vectoriel est le vecteur nul.

Conséquences immédiates

a) *Le produit vectoriel est anti-commutatif* : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = -(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA})$.
En effet, la seule chose qui va changer par définition est le sens du vecteur obtenu par la règle de la main droite.

b) *On peut déplacer les scalaires* :
$(k\,\overrightarrow{OA}) \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \wedge (k\,\overrightarrow{OB}) = k(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$.
Les deux premiers points sont évidents ; le troisième découle de
$\left|k\,\overrightarrow{OA}\right| = |k|\ \left|\overrightarrow{OA}\right|$.

c) *La condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs soient linéairement dépendants est que leur produit vectoriel soit nul.*
En effet, la condition suffisante s'obtient à partir de l'annulation de la norme.

d) *Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont deux vecteurs orthogonaux,*
$\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right|\ \left|\overrightarrow{OB}\right|$.

e) *On a $\overrightarrow{OE_1} \wedge \overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{OE_3}$, $\overrightarrow{OE_2} \wedge \overrightarrow{OE_3} = \overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_3} \wedge \overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{OE_2}$.*

Propriétés géométriques

1) *Le produit vectoriel de deux vecteurs linéairement indépendants est égal au produit vectoriel de l'un par la projection orthogonale de l'autre sur un plan perpendiculaire au premier.*
En effet, soit $\overrightarrow{OB'}$ la projection orthogonale de $\overrightarrow{OB}$ sur un plan perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$ passant par O. Le plan OAB étant le même que le plan OAB', la direction perpendiculaire est aussi la même ; la règle de la main droite donne le même sens.
Enfin : $\left|\overrightarrow{OB'}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ si bien que
$\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right|\ \left|\overrightarrow{OB'}\right| = \left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB'}\right|$.

2) *Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont linéairement indépendants, $\left|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.*
3) *La droite d'intersection de deux plans sécants dont les 2-directions sont respectivement perpendiculaires à $\vec{a}$ et $\vec{b}$, possède $\vec{a}\wedge\vec{b}$ comme vecteur direction.*
   En effet, $\vec{a}\wedge\vec{b}$ est une direction à la fois incluse dans la 2-direction du premier plan et dans la 2-direction du second plan.
4) *La perpendiculaire commune à deux droites gauches ayant pour vecteurs direction $\vec{a}$ et $\vec{b}$ possède $\vec{a}\wedge\vec{b}$ comme vecteur direction.*

Expression analytique

Supposons d'abord les deux vecteurs linéairement indépendants.

Soient (a_1, a_2, a_3) les composantes de $\overrightarrow{OA}$ et (b_1, b_2, b_3) les composantes de $\overrightarrow{OB}$. Le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$ et passant par O a pour équation :

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0.$$

Le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{OB}$ et passant par O a pour équation :

$$b_1x + b_2y + b_3z = 0.$$

Si on a simultanément $a_1b_2 - a_2b_1 = a_3b_1 - a_1b_3 = a_2b_3 - a_3b_2 = 0$, les deux plans sont confondus et $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont plus linéairement indépendants. Pour fixer les idées, supposons que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Par CRAMER, on trouve que les points d'intersection des deux plans ont pour coordonnées :

$$x = k\frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = k\frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad z = k.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\sin^2(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}\right|^2\\
&= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\
&= (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2.
\end{aligned}$$

Et on voit que pour le point C, on doit avoir $k = \varepsilon(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Pour décider du signe de ε, on peut considérer que la formule doit être valable pour n'importe quel couple de vecteurs. En particulier, si $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}_1$ et $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}_2$, on doit trouver $\overrightarrow{OE}_1 \wedge \overrightarrow{OE}_2=\overrightarrow{OE}_3$, donc il faut prendre $\varepsilon = \pm 1$.

Les coordonnées de C et par suite les composantes du produit vectoriel sont donc :

$$\boxed{x = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad y = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad z = a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Si les deux vecteurs sont linéairement dépendants, la formule précédente reste valable puisqu'on trouve le vecteur nul.

Distance entre deux droites gauches

Considérons une droite donnée par le point $A = (x_A, y_A, z_A)$ et le vecteur direction $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et une droite donnée par le point $B = (x_B, y_B, z_B)$ et le vecteur direction $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Supposons que ces droites sont gauches, ce qui implique que $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{0}$. Nous avons vu que la perpendiculaire commune avait pour vecteur direction $\vec{a} \wedge \vec{b}$. L'équation du plan passant par A et dont la 2-direction est déterminée par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peut s'écrire :

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)(x - x_A) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)(y - y_A) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)(z - z_A) = 0.$$

La distance du point B à ce plan est égale à la distance entre les deux droites gauches et vaut :

$$\boxed{d = \frac{|(a_2 b_3 - a_3 b_2)(x_B - x_A) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)(y_B - y_A) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)(z_B - z_A)|}{[(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2]^{1/2}}}$$

15. Produit mixte

Définition : Considérons trois vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ (ou $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$), on appelle produit mixte des trois vecteurs l'expression

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} \,.(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}).$$

Conséquences immédiates

a) *La condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs liés soient coplanaires est que leur produit mixte soit nul.*
Si $\overrightarrow{OA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, c'est évident ; sinon, si $\overrightarrow{OA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$, la direction de $\overrightarrow{OA}$ est incluse dans la 2-direction définie par $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

b) *La condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs soient linéairement dépendants est que leur produit mixte soit nul.*
Exprimé comme cela, c'est valable aussi bien pour les vecteurs liés que pour les vecteurs libres.

Propriété géométrique

Le module du produit mixte de trois vecteurs linéairement indépendants est égal au volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.

En effet, si on appelle φ l'angle entre OC et la perpendiculaire au plan OAB, on a que :

$$\left|(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \left|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\right| \cos\varphi.$$

Or $\left|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\right|$ est l'aire de la base et $\left|\overrightarrow{OA}\right| \cos\varphi$ est la hauteur du parallélépipède.

Expression analytique

En vertu de l'expression analytique du produit scalaire et du produit vectoriel, on trouve :

$$\boxed{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Soit $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$.

Ceci peut donc venir épauler l'étude algébrique des déterminants de dimension 3.

Permutations

On a

$$\begin{aligned}
&(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \\
&= (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \\
&= -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = -(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}).
\end{aligned}$$

On peut démontrer ces propriétés soit directement en fonction des propriétés ou expressions analytiques vues précédemment ou encore comme conséquence des propriétés des déterminants. A moins que l'on se serve de ces expressions pour démontrer les propriétés des déterminants ...

Adresse de l'auteur :

Jacques NAVEZ
Université de Liège
Institut de Mathématique
Avenue des Tilleuls 15
4000 Liège

La variable aléatoire exponentielle : un outil pédagogique remarquable

J. Paris, *Institut de Statistique, UCL.*

L'introduction des variables aléatoires (en abrégé v.a.) continues pose toujours un problème quand on veut faire référence à la v.a. normale car celle-ci présente deux difficultés importantes : en probabilité, sa densité n'a pas de primitive sous forme finie ; en statistique, sa densité dépend de deux paramètres. De ce fait, elle ne relève pas de la catégorie des problèmes élémentaires. Par contre, la v.a. exponentielle évite ces deux écueils et de plus dans les problèmes de fiabilité, elle joue un rôle bien plus prépondérant que celui de la normale. Par ailleurs, la v.a. exponentielle permet en plus de rencontrer de manière naturelle des difficultés classiques de l'analyse à propos de la continuité et de la dérivabilité. Comme elle ne suscite pas de difficulté technique particulière et permet un ensemble de remarques intéressantes à propos de la collecte des données, elle constitue un outil pédagogique de premier plan.

1 Pour analyser d'abord les aspects mathématiques, rappelons que la loi de probabilité d'une v.a. X est entièrement caractérisée par sa fonction de répartition F (encore appelée fonction de distribution ou cumulative) définie par

$$F(a) = P(X \leq a) \qquad a \in R \tag{1}$$

Cette fonction F jouit des propriétés suivantes qui la caractérisent :

1) $\forall a \in R \qquad 0 \leq F(a) \leq 1$
2) $\lim_{a \to -\infty} F(a) = 0 \qquad \lim_{a \to +\infty} F(a) = 1$
3) F est croissante (mais pas nécessairement strictement croissante)
4) le signe $\leq$ dans la définition de F en fait une fonction continue à droite (mais pas nécessairement continue).

On distingue deux types de v.a. :

1) Les v.a. discrètes qui peuvent prendre un nombre fini ou une infinité dénombrable de valeurs différentes. La fonction F est seulement continue à droite. Les seuls points intéressants du domaine de F sont les points de discontinuité qui correspondent aux valeurs possibles de la v.a., les grandeurs des discontinuités représentent les probabilités correspondantes. Nous ne nous occuperons pas de ces v.a. ici.
2) Les v.a. continues peuvent prendre toute valeur d'un intervalle et possèdent une fonction de répartition F continue. Comme dans les

exposés élémentaires, nous nous limiterons à la sous-classe des v.a. absolument continues. Dans ce cas, il existe une fonction f application de R dans R^+, intégrable, appelée densité de probabilité ou fonction de fréquence et qui permet de représenter F sous la forme d'une intégrale soit

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \tag{2}$$

En particulier, on a toujours la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{3}$$

qui constitue un procédé d'intégration remarquable.

La fonction F donnée par (2) est toujours continue mais pas nécessairement dérivable. La fonction f correspondante est intégrable mais pas nécessairement continue. Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition 0.1 *Si la fonction f est continue au point x, alors la fonction F correspondante est dérivable au même point et*

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \tag{4}$$

Remarques :

1) Il est équivalent de caractériser la loi de probabilité de la v.a. X par f ou par F. Le plus souvent, on utilise f.
2) On peut dire que la caractérisation de la loi de probabilité d'une v.a. par la fonction f ou par F est une caractérisation du type physique (répartition de masse).

2. La variable aléatoire exponentielle

La v.a. exponentielle illustre à merveille les concepts mathématiques rappelés. Il s'agit d'une v.a. positive caractérisée par

$$f(x) = \begin{cases} \gamma e^{-\gamma x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{5}$$

où γ est un paramètre strictement positif. Quand la v.a. exponentielle représente la durée de vie d'un appareil électronique par exemple, alors, comme on le verra ci-dessous, $\frac{1}{\gamma}$ représente la durée de vie moyenne des appareils du même type. La valeur de ce paramètre, petite ou grande, joue donc un rôle primordial dans ce modèle.

La fonction f définie par (5), est continue sauf au point $x = 0$. Elle vérifie la relation (3) car

$$\int_0^\infty \gamma e^{-\gamma x} dx = 1 \tag{6}$$

Par intégration, on en déduit :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\gamma x} & x \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

On vérifie facilement que la fonction F est partout continue. Comme prévu, elle est aussi dérivable sauf au point $x = 0$.

On trouve encore, par intégration par parties, que la moyenne ou l'espérance de X est le nombre

$$\mu = EX = \int_0^\infty x\gamma e^{-\gamma x} dx = \frac{1}{\gamma} \tag{8}$$

Comme il s'agit d'une v.a. positive, on peut retrouver μ par la relation équivalente, mais plus facile à utiliser ici

$$\mu = \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx = \int_0^\infty e^{-\gamma x} dx = \frac{1}{\gamma} \tag{9}$$

Remarque :

En prenant $\gamma = 1$, à partir des relations () et (), on pourra faire remarquer que

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \int_0^\infty xe^{-x} dx = 1 \tag{10}$$

De manière analogue et toujours par intégration par parties, on trouve

$$EX^2 = \int_0^\infty x^2 \gamma e^{-\gamma x} dx = \frac{2}{\gamma^2} \tag{11}$$

On en déduit la variance de X soit

$$\sigma^2 = varX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \tag{12}$$

On notera en particulier que, quel que soit γ, le coefficient de variation $\frac{\sigma}{\mu}$ vaut toujours 1, ce qui explique pourquoi la v.a. exponentielle n'est pas un bon modèle pour représenter des phénomènes où la dispersion est grande par rapport à la moyenne.

On voit également que la médiane de X est le nombre m qui satisfait les relations

$$P(X \leq m) = P(X \geq m) = \frac{1}{2}$$

soit, à partir de (7),

$$m = \frac{1}{\gamma} \ln 2$$

et on a toujours :

$$m < \mu$$

3. Fiabilité, caractérisation et génération

Quand la v.a. exponentielle X représente une durée de vie, on caractérise plus volontiers sa loi de probabilité par sa fonction de fiabilité

$$R(x) = P(X > x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ e^{-\gamma x} & x \geq 0 \end{cases} \tag{13}$$

ou par son taux de panne instantané

$$r(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \gamma \tag{14}$$

La v.a. exponentielle est donc particulièrement utile pour modéliser certaines parties de la durée de vie d'un objet.

Ainsi, une voiture présente souvent plus de petites pannes au début de sa mise en circulation mais le nombre de celles-ci diminue rapidement et donc $r(x)$ aussi. Par contre, en fin d'utilisation, les pannes reviennent à cause de l'usure et $r(x)$ augmente. Enfin, entre les deux, on peut dire que $r(x)$ est constant ce qui revient à dire que les intervalles de temps entre deux pannes consécutives suivent une loi exponentielle dans la période intermédiaire de la vie d'une voiture.

Pour mieux représenter certains phénomènes où une fraction α des composants ne fonctionnent jamais, on remplace la fonction F définie par () par

$$G(x) = \alpha + (1-\alpha)\int_0^x \gamma e^{-\gamma x} dx \tag{15}$$

Pour la v.a. mixte ainsi caractérisée, on a :

$$\begin{array}{l} P(X=0) = \alpha \\ P(X=x) = 0 \quad \forall x > 0 \end{array}$$

et sa fonction de répartition G n'est pas continue au point $x = 0$.

La v.a. exponentielle est celle qui a suscité le plus de problèmes mathématiques de caractérisation. En particulier, la v.a. exponentielle est la seule v.a. qui satisfasse à

1) Absence de vieillissement :
   Ceci se traduit par la propriété suivante de la probabilité conditionnelle

$$P(X > s+t | X > s) = P(X > t) \qquad \forall t > 0, s > 0 \tag{16}$$

2) Durée de vie moyenne résiduelle constante :
   Ceci se traduit par la propriété suivante de l'espérance conditionnelle

$$E[X - t | X > t] = EX \tag{17}$$

Si nous considérons les modèles de maintenance dans lesquels un composant défectueux est immédiatement remplacé par un autre du même type et dont la durée de vie X est exponentielle, nous pouvons considérer la v.a. conjointe $N(t)$ qui représente le nombre de remplacements à effectuer dans l'intervalle $]0, t]$. Si nous définissons

$$P(0,t) = P\left[N(t) = 0\right]$$

à partir de la loi de probabilité de X, nous pouvons déduire

$$P(0,t) = P[N(t) = 0] = P(X > t) = e^{-\gamma t} \tag{18}$$

et de manière évidente

$$P[N(t) \geq 1] = 1 - e^{-\gamma t}$$

Enfin, on peut montrer que, de manière générale

$$P\big(N(t)=k\big)=e^{-\gamma t}\frac{(\gamma t)^k}{k!}=(-1)^k\frac{t^k}{k!}P^{(k)}(0,t) \qquad k=0,1,\cdots \tag{19}$$

Ainsi, la v.a. $N(t)$ suit une loi de Poisson de moyenne et de variance γt.

La v.a. exponentielle et la v.a. de Poisson sont donc étroitement liées et malheureusement, de ce fait, parfois confondues.

Pour assurer la transition avec la statistique, nous pouvons aussi indiquer qu'on peut générer des v.a. exponentielles de moyenne μ à partir des v.a. uniformes $\sqcup$ sur $[0,1]$ (v.a. de densité constante égale à un sur l'intervalle $[0,1]$ et nulle en dehors), par la relation

$$X=-\mu\ln(1-\sqcup) \tag{20}$$

Comme on trouve facilement des générateurs pour la v.a. uniforme, on peut trouver facilement des observations pour une v.a. exponentielle.

4. Statistique

Considérons un échantillon aléatoire simple de taille n, formé de v.a. indépendantes $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de même loi de probabilité à savoir celle d'une v.a. exponentielle de paramètre γ. Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une réalisation de cet échantillon, la fonction de vraisemblance du problème est la fonction L, considérée comme fonction de γ, définie par

$$L(\gamma)=\pi_{i=1}^{n}\gamma e^{-\gamma x_i}=\gamma^n e^{-\gamma\sum\limits_{i=1}^{n}x_i} \tag{21}$$

La valeur de γ qui rend maximum L ou de manière équivalente $\ln L$, conduit à l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\gamma}$ de γ soit en l'occurrence

$$\hat{\gamma}=\frac{1}{\bar{X}} \tag{22}$$

On voit de suite que si on veut trouver facilement des propriétés de cet estimateur, il est plus facile de poser $\mu=\frac{1}{\gamma}$ et d'utiliser μ comme paramètre. On trouve alors pour estimateur du maximum de vraisemblance de μ

$$\hat{\mu}=\bar{X} \tag{23}$$

En particulier, on remarque que dans ce problème, il n'est pas nécessaire de calculer la variance des observations pour estimer μ, ni même pour estimer la variance de $\bar{X}$ puisque

$$var\bar{X} = \frac{\mu^2}{n} \tag{24}$$

Quand les variables mesurées représentent des durées de vie, l'estimateur $\bar{X}$ présente un inconvénient majeur. Pour pouvoir être calculé, on doit disposer de toutes les observations. La durée d'observation est donc $\max(X_1, X_2, \cdots X_n)$. Ceci peut être gênant en pratique, comme le montre l'échantillon de taille 10 ci-dessous, généré par la formule (20) avec $\mu = 5$ (les observations ont été arrondies pour la facilité mais cela ne change rien au problème) :

9.31	1.07	0.11	7.69	0.15	4.28	3.40
2.89	6.21	33.80				

L'incrédulité du lecteur à propos de ces données sera peut-être grande, pourtant elles ne surprendraient pas le professionnel qui a utilisé souvent la v.a. exponentielle. De plus, un test de vérification ne conduit pas à rejeter l'hypothèse qu'il s'agit bien d'une v.a. exponentielle de moyenne 5.

On peut encore noter que pour avoir la valeur exacte des observations, il faut en plus assurer un système adéquat de surveillance.

Pour nos données, on obtient

$$\bar{X} = 6.891$$

d'où une première estimation de μ, à savoir $\hat{\mu}_1 = 6.891$.

On pourrait, à l'opposé de ce qui précède, décréter que le temps d'observation sera $V = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. On voit de suite que

$$P(V > v) = P(\text{ tous les } X_i > v) = \pi_{i=1}^{n} P(X_i > v) = e^{-n\gamma v} \tag{25}$$

ainsi V est aussi une v.a. exponentielle mais de paramètre $n\gamma$.

On peut utiliser cette propriété pour obtenir un deuxième estimateur de γ ou de μ. En effet, on voit que

$$E(nV) = \frac{n}{n\gamma} = \frac{1}{\gamma} = \mu \tag{26}$$

$$var(nV) = \frac{n^2}{n^2\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2} = \mu^2 \tag{27}$$

Si nous prenons nV comme deuxième estimateur de μ , nous voyons qu'il est sans biais comme le premier mais que sa variance est n fois plus grande et de plus, elle ne diminue pas quand la taille de l'échantillon augmente, ce qui est plutôt gênant pour apprécier l'efficacité du procédé.

Pour nos données, on trouve

$$nV = 1.1$$

d'où une deuxième estimation de μ, à savoir $\hat{\mu}_2 = 1.1$.

Pour mettre en oeuvre ce deuxième procédé, on doit encore pouvoir disposer de la valeur exacte de V. Comme dans le premier, la durée d'observation est aléatoire.

Si on désire utiliser une procédure facile à mettre en oeuvre et qui ne demande pas une valeur précise de l'observation, on peut utiliser la suivante : on fixe un instant a, par exemple $a = 3$, et à cet instant, on note le nombre de composants de l'échantillon qui survivent encore. Ceci permet de trouver un estimateur de γ ou de μ en identifiant la probabilité théorique de survivre au-delà de a avec la fréquence observée $\frac{N_a}{n}$ des composants de l'échantillon qui survivent au-delà de a.

Pour notre exemple, cela donne la relation

$$e^{-3\gamma} = \frac{6}{10} \tag{28}$$

qui nous fournit une troisième estimation de μ, à savoir

$$\hat{\mu}_3 = 5.872846$$

On pourrait étudier les propriétés de l'estimateur obtenu et les comparer aux autres, comme on pourrait aussi découvrir d'autres estimateurs en proposant d'autres méthodes de collecte de l'information mais la difficulté technique dépasse alors le cadre de l'objectif poursuivi.

Remarque :

Cet exemple simple montre combien il est difficile pour le statisticien de proposer la "meilleure" solution à un problème statistique sans en connaître toutes les facettes.

Adresse de l'auteur :

José PARIS
Institut de Statistique, UCL
Voie du Roman Pays 20
1348 Louvain-La-Neuve.

Tables de mortalité : théorie et pratique

D. Justens, *Institut Cooremans Bruxelles - Université de Liège*

1. Contenu

Nous rappelons les raisonnements mathématiques élémentaires qui furent à l'origine de la construction des premières tables de mortalité élaborées sur base d'un support à la fois intuitif et rigoureux. Ces résultats, dus à l'actuaire britannique Makeham et datant de 1868, sont toujours appliqués aujourd'hui par l'ensemble des organismes assureurs et les prescriptions du législateur en matière de tarification passent par l'utilisation du même modèle. Nous présentons aussi les résultats des observations effectuées ces dernières années par les différentes compagnies concernées et regroupées par l'UPEA (Union Professionnelle des Entreprises d'Assurances). Nous justifions empiriquement l'utilisation systématique du modèle de Makeham et donnons ensuite les prescriptions légales en matière de tarification contenues dans le moniteur du 31.12.92 (pages 27 884 à 27 913), de façon à permettre une vue d'ensemble des données du problème prenant en compte toutes ses facettes : théorico-mathématiques, empiriques et légales.

2. Construction des tables de mortalité théoriques

2.1. Notations usuelles

Dans un premier temps et par souci de faciliter la tarification, on décide de travailler de manière discrète. On convient de noter ${}_np_x$ la probabilité de survie d'un individu d'âge x pendant n années au moins et ${}_nq_x$ la probabilité d'observer le décès de cet individu d'âge x avant sa $(x+n)^e$ année. On a évidemment ${}_np_x +_n q_x = 1$. Lorsque $n = 1$, les probabilités se notent plus simplement p_x et q_x. Les hypothèses de travail des actuaires "vie" tendent à la simplification. On table sur la statique et l'indépendance. Les probabilités de survie d'un individu d'âge x aujourd'hui dans n années sont supposées identiques aux probabilités de survie d'un individu d'âge $x+n$ aujourd'hui. Ces hypothèses sont manifestement fausses. Les tables sont modifiées régulièrement et les tendances à l'allongement de l'espérance de vie (du moins dans nos pays) sont connues de tous. Nous donnerons en fin d'article un tableau récapitulatif reprennant l'évolution des tables théoriques en montrant leurs tendances et ... leurs contradictions. Sous ces hypothèses, on a :

$$_np_x = p_x * p_{x+1} * \cdots * p_{x+n-1}$$

2.2. Modélisation d'une population fictive

Il est d'usage de travailler avec des tables de survie communément appelées "tables de mortalité", qui décrivent l'évolution d'une population fictive. On note l_0 l'effectif de la population initiale (généralement, on choisit $l_0 = 10^5$ ou 10^6). On construit ensuite successivement

$$l_{x+1} = p_x * l_x \qquad x \in N.$$

Propriété 1.

$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

La démonstration se fait par récurrence, la propriété étant évidente pour $n = 1$.

2.3. La notion de taux instantané de décès

Nous abandonnons le point de vue discret commode pour le calcul des primes pures mais difficile à interpréter. La population fictive l_x devient une fonction continue, à valeurs dans R^+ (et non plus dans N). L'obligation d'avoir des l_x naturels n'est stricte que si on en décide ainsi. Passons sur ce manque de rigueur (il y en aura d'autres) et calculons le nombre de décès par unité de temps entre les âges x et $x + \Delta x$. on arrive à :

$$\frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

On appelle *taux instantané de décès à l'âge x* le taux de décès par unité de temps au voisinage de l'âge x. On a :

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{1}{l_x} * \frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

Théorème 1

$$\mu_x = -\frac{d}{dx}\left[lnl_x\right]$$

La démonstration est un simple calcul. On a aussi le

Théorème 2

$$_np_x = e^{-\int_x^{x+n}\mu_t dt} = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}dt}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}\int_0^n \mu_{x+t}dt &= -\left[lnl_{x+t}\right]_0^n \\ &= ln\left[\frac{l_x}{l_{x+n}}\right] \\ &= -ln[_np_x]\end{aligned}$$

2.4. Le modèle de Makeham

Le fondateur de l'actuariat moderne propose une modélisation basée sur l'hypothèse d'un risque accidentel constant quel que soit l'âge et d'un risque exponentiel lié au vieillissement. Il pose :

$$\mu_x = A + \alpha c^x$$

Dans cette présentation, A modélise le risque accidentel ($A > 0$), α le risque initial lié à la population considérée ($\alpha > 0$) et c le coefficient d'aggravation du taux de décès par année ($c > 1$). Cette façon de procéder est intéressante d'un point de vue strictement actuariel. Il n'est pas rare de rencontrer des contrats pour lesquels les indemnités versées en cas de décès accidentel sont significativement supérieures à celles consenties en cas de décès consécutif à une maladie. Il est donc indispensable d'introduire une modélisation qui différencie les multiples facteurs “risque”.

Construction de tables de survies compatibles

Le théorème 1 nous permet d'écrire :

$$\frac{d}{dx}[lnl_x] = -A - \alpha c^x$$

En intégrant, on obtient successivement :

$$lnl_x = -Ax - \frac{\alpha}{lnc}c^x + lnk$$

$$l_x = k * e^{-Ax} * e^{-\frac{\alpha}{lnc} * c^x}$$

La constante d'intégration a dans ce contexte une interprétation : elle exprime le choix arbitraire de la population fictive initiale l_0 (attention les deux quantités sont liées mais différentes).On pose $e^{-A} = s$. Ce dernier paramètre modélise le risque accidentel annuel. (A étant strictement positif, s est strictement inférieur à 1) On pose aussi :

$$g = e^{-\frac{\alpha}{lnc}}$$

On atteint alors la modélisation définitive :

$$l_x = k * s^x * g^{c^x};$$

On remarquera que le modèle de Makeham, proposant une fonction exponentielle pour représenter une probabilité de décès, est évidemment locale. Dans les applications, on ne modélise l_x que dans l'intervalle [0, 120]. Nous verrons en fait que cette représentation a surtout un sens dans la fourchette [25, 65].

2.5. Ajustement

Les observations de populations se font généralement sur des périodes courtes, pour éviter de trop grandes fluctuations dues à son évolution. On le voit, cette pratique est en contradiction avec l'hypothèse de statique qui sous-tend tous les calculs de primes pures. Il faut deux ans minimum pour estimer des taux de décès : on observe les clients potentiels entre deux anniversaires successifs. Ainsi les tables 85-89 dont nous allons parler plus loin sont basées sur 4 observations seulement. Les q_x et p_x sont donc approchables empiriquement. En utilisant le modèle de Makeham, on vérifie que :

$$\frac{1}{p_x} = \frac{l_x}{l_{x+1}} = \frac{1}{s} * g^{[c^x - c^{x+1}]}$$

La constante d'intégration k n'intervient évidemment pas dans la comparaison avec les observations. Un premier passage aux logarithmes donne :

$$ln\left[\frac{1}{p_x}\right] = -lns + c^x(c-1)ln\frac{1}{g}$$

En posant $a = (c-1)ln\frac{1}{g}$, $b = lns$ et $\alpha_x = ln\frac{1}{p_x}$, on peut écrire :

$$\alpha_x = -b + ac^x$$

Un deuxième passage aux logarithmes linéarise l'expression et l'on peut travailler avec la méthode classique des moindres carrés. On minimise

$$S = \sum_{x=0}^{120} [ln(\alpha_x + b) - lna - xlnc]^2$$

On le constate, malgré ses défauts, le modèle de Makeham (établi à partir de la définition des μ_x) permet une interprétation intellectuellement satisfaisante, un ajustement aisé (à partir des observations p_x) et la construction de tables de mortalité utilisables (l_x).

2.6. La notion d'espérance de vie

Ce concept correspond à l'ancienne appellation "vie moyenne". La durée de vie d'un individu appartenant à une population donnée étant une variable aléatoire, on peut calculer son espérance. Pour ce faire, on fait appel à une simplification usuelle en actuariat, la linéarité locale : lorsque plusieurs individus décèdent entre leur $(x+k)^e$ et leur $(x+k+1)^e$ anniversaire, nous ferons l'hypothèse (fausse) d'une durée de vie moyenne égale à $(x+k+\frac{1}{2})$. Sous cette hypothèse, on démontre le

Théorème 3

$$E[\text{vie}|\text{âge } x] = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{120-x} ({}_k p_x)$$

Démonstration. On calcule :

$$\begin{aligned}
E[\text{vie}|\text{âge } x] &= \sum_{k=0}^{120-x} (k+\frac{1}{2}) * \frac{l_{x+k}-l_{x+k+1}}{l_x} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{120-x} \frac{l_{x+k}-l_{x+k+1}}{l_x} + \frac{1}{l_x}\sum_{k=0}^{120-x} k(l_{x+k}-l_{x+k+1}) \\
&= \frac{1}{2l_x}[(l_x-l_{x+1})+(l_{x+1}-l_{x+2})+\ldots] \\
&\quad +\frac{1}{l_x}[(l_{x+1}-l_{x+2})+2(l_{x+2}-l_{x+3})+\ldots] \\
&= \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{120-x} l_{x+k} = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{120-x} ({}_kp_x)
\end{aligned}$$

2.7. Problèmes d'ajustement

La publication des tables de mortalité se fait généralement sans mention des paramètres ajustés k, s, g et c. On peut se demander si la donnée d'une table (pour laquelle les l_x sont arrondis à l'unité) permet de retrouver le modèle. On vérifie sans trop de mal que la constante c, qui modélise le coefficient d'aggravation de la probabilité instantanée de décès, obéit pour tout x à :

$$c = \frac{ln\left[\frac{l_{x+1}}{l_{x+2}}\right] + ln\left[\frac{l_{x+3}}{l_{x+2}}\right]}{ln\left[\frac{l_x}{l_{x+1}}\right] + ln\left[\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\right]}$$

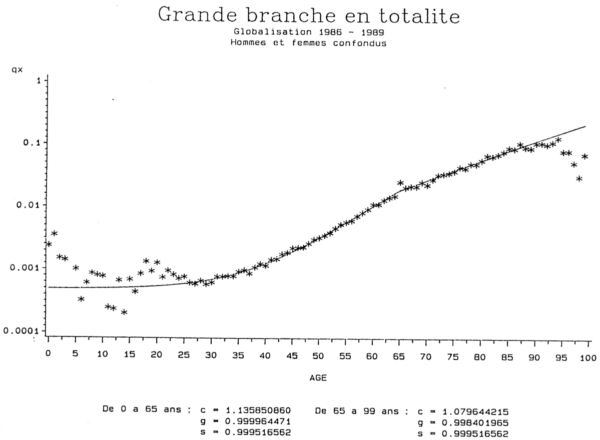
Dans cette relation, chaque expression dont on calcule le logarithme est proche de 1. L'approximation de c que l'on en tire est donc proche de l'indétermination $\frac{0}{0}$. De petites erreurs d'arrondis (usuelles pour les l_x) donnent des estimations significativement différentes. En supposant c connu, on arrive aisément à g, s et k.

3. Les observations

Différentes sources sont disponibles. L'UPEA diffuse (de manière restreinte) les résultats regroupés de tous les organismes assureurs belges. Ces derniers sont ajustés selon le modèle de Makeham. Le législateur a lui aussi fourni le résultat de ses observations sous la forme d'une paramétrisation du même modèle : l'utilisation du jargon, des notations et des modèles connus des seuls professionnels n'est pas neutre : elle participe à la volonté de non-information de nos dirigeants. L'Institut National de Statistique publie (avec retard) le résultat de ses observations sur l'ensemble de la population belge, selon le double clivage du sexe et de la région de domiciliation. On constate ainsi empiriquement (les observations ne sont pas ajustées), à partir des observations étalées sur 1991-1993, que les flamands mâles ont une espérance de vie à la naissance (73.96) supérieure de presque 3 ans à celle des Wallons (71.42) et d'un an à celle des Bruxellois (72.68) ! Encore un domaine dans lequel les inégaliés sont flagrantes. Mais le clivage des sexes révèle une différence encore plus révoltante : la Bruxelloise peut tabler sur une durée de vie moyenne de presque 80 ans (79.71) et l'on arrive à 80.21 ans pour la flamande contre 79.04 pour la Wallonne. Enfin, certaines compagnies d'assurances fournissent sans paramétrisation des tables de mortalités ajustées. Ces dernières sont réservées aux professionnels et l'on n'en apprécie pas la diffusion.

3.1. Résultats observés sur la population des assurés

En prenant en considération la branche vie dans sa totalité, on observe les fréquences de décès qui suivent :



La simple observation de ces valeurs (représentées ici en coordonnées semi-logarithmiques) permet l'interprétation qui suit. Les fréquences observées

sur la population toute entière suivent une progression régulière entre 25 et 64 ans. Ce point est à mettre à l'actif de la modélisation de Makeham qui table sur une telle évolution. Une progression de raison différente est observée pour la tranche des 66-95 ans : la mise à la retraite, lorsqu'elle est bien acceptée se traduit par une diminution de l'aggravation du taux de décès par an (cette dernière égale à $c-1$ passe de 13.6 à 8% environ). Le pic situé en 65 ans peut probablement être attribué à la dépression consécutive à la mise à la retraite de certains citoyens mâles. L'aspect psychologique semble primordial et l'on peut s'en rendre compte en constatant la diminution significative des fréquences de décès observée les années précédant le 100^e anniversaire. La modélisation des probabilités de décès des plus jeunes est nettement plus délicate. Après une forte mortalité infantile (en décroissance régulière les 5 premières années) on passe à une situation chaotique suivie d'une bosse partiellement explicable (suicides des jeunes garçons et accidents de voiture). La tarification ne peut prendre en compte de telles variations qui conduiraient à une surévaluation des primes pour les jeunes assurés. De plus, l'étalement du paiement des primes (annuités constantes) ne se conçoit que pour un risque croissant : dans le cas contraire, l'assureur ne couvrirait, pas au début du contrat, la totalité du risque réel assuré.
En décomposant la population en deux sous-population selon le clivage du sexe, on observe des tendances significativement différentes qui conduisent à la segmentation en vigueur depuis 1993. L'ajustement aux données selon le modèle classique de Makeham (avec rupture en 65 ans) donne :

Hommes de 0 à 65 ans		
c	g	s
1.136867893	0.99996483	0.999376135
Femmes de 0 à 65 ans		
c	g	s
1.136374284	0.999975425	0.999725911

Hommes de 65 à 99 ans		
c	g	s
1.080031437	0.998358196	0.999376135
Femmes de 65 à 99 ans		
c	g	s
1.094643114	0.99960467	0.999725911

Pour commenter ces observations, il est indispensable de passer aux paramètres initaux du modèle A et α, le nombre c étant le seul à pouvoir être interprété.

Hommes de 0 à 65 ans		
c	α	A
1.136867893	0.000004512	0.000624060
Femmes de 0 à 65 ans		
c	α	A
1.136374284	0.000003142	0.000274127

Hommes de 65 à 99 ans		
c	α	A
1.080031437	0.000126507	0.000624060
Femmes de 65 à 99 ans		
c	α	A
1.094643114	0.0.000035756	0.000274127

L'interprétation des trois dernières colonnes est délicate. Le paramètre α est censé modéliser le risque de décès initial caractérisant la population : quelle peut être son interprétation quand on considère la sous-population des plus de 65 ans ? Pour les plus jeunes, on constate que la sous-population des femmes est caractérisée par un risque initial de 33% moins élevé et un risque de décès accidentel deux fois plus petit que ceux relatifs à la sous-population des hommes. Ces différences énormes doivent être progressivement compensées par un taux d'aggravation plus élevé : on constate que c'est le cas. La prise en considération de 4 modèlisations partielles constitue une représentation très satisfaisante de la réalité. Le législateur n'a pas emprunté cette voie, comme nous le constatons dans le paragraphe suivant.

3.2. Prescriptions légales

Dans le moniteur du 31 décembre 1992 (page 27 887), on peut lire que *partant des données démographiques récentes (1988-1989), l'Office de Contrôle a établi deux tables de mortalité ajustées ED(M) et ED(F) représentatives de la mortalité de la population belge respectivement de sexe masculin et de sexe féminin*. Suit alors le tableau :

Hommes		
c	g	s
1.103798111	0.999624664	0.999441703

Femmes		
c	g	s
1.119312877	0.999935634	0.999669730

Encore une fois, pour être interprété, ce tableau doit être transformé en :

Hommes		
c	α	A
1.103798111	0.000037074	0.000558453

Femmes		
c	α	A
1.119312877	0.000007255	0.000330325

Comparons ces deux sources. Si l'estimation du risque de décès semble plus ou moins cohérente, à quelques différences près difficilement explicables si l'on tient compte du fait que les observations ont été faites sur des populations comparables au même moment, il n'en va pas de même du risque de décès initial α et du taux d'aggravation c, qui ajustés sur toute la durée de l'existence sont significativement différents. L'ajustement proposé par le législateur va par ailleurs conduire à quelques absurdités, comme nous le constaterons au paragraphe suivant. Dans le même paragraphe, du même moniteur, il poursuit : *A partir de ces tables et moyennant une marge de sécurité multiplicative et additive pour ce qui concerne les opérations de genre décès, une marge de sécurité correspondant à un accroissement attendu de la longévité et à une correction d'antisélection pour les opérations du genre vie, il a été construit 4 tables, MK, FK, MR et FR dont sont tirées les lois de mortalité minimales applicables à long terme respectivement pour les assurés de sexes masculin et féminin, et pour les opérations de genre vie et de genre décès. Les sécurités qu'elles comportent semblent être les minima acceptables en deçˆ desquels la responsabilité des autorités de tutelle et de contrôle pourrait se trouver à juste titre mise en cause.*

On le constate, le législateur est davantage préoccupé par la rentabilité des organismes assureurs que par la couverture bien ajustée des risques réellement courrus. Les éléments modificateurs évoqués sont vagues, privés de tout support justificatifs. Les tables qui en découlent figurent en annexe (pages 27 908 et 27 909) : *Les tables de mortalité MR, FR, MK et FK sont déterminées par la relation suivante appliquée au nombre de survivants à l'âge x pour 1 000 000 de naissances :* $l_x = ks^x g^{c^x}$ *où les constantes* k, s, g *et* c *ont les valeurs reprises ci-dessous selon la table :*

paramètres	MR	FR	MK	FK
k	1 000 266.63	1 000 048.56	1 000 450.59	1 000 097.39
s	0.999441704	0.999669731	0.999106876	0.999257048
g	0.999733441	0.999951440	0.999549614	0.999902624
c	1.101077536	1.116792454	1.103798111	1.118239062

Comme plus haut, nous convertissons ces données numériques en celles, interprétables, du modèle de Makeham :

paramètres	MR	FR	MK	FK
k	1 000 266.63	1 000 048.56	1 000 450.59	1 000 097.39
A	0.000558452	0.000330324	0.000893523	0.000743228
α	0.000025670	0.000005364	0.000044489	0.000010883
c	1.101077536	1.116792454	1.103798111	1.118239062

On le constate, les compagnies d'assurances ne prennent aucun risque, les risques de décès étant sur- ou sous-estimés systématiquement selon les contrats.

4. En guise de conclusion

On peut se demander dans quelles limites le modèle proposé par le législateur est une représentation fiable d'une quelconque réalité objective. En fait, l'utilisation d'un modèle unique quelle que soit la catégorie d'âge conduit à certaines aberrations. Les tables antérieures mixtes (voir [1]) ajustées selon les observations effectuées sur la population belge entre 1959 et 1963 avaient pour paramètres $c = 1.099239, g = 0.9994364, s = 0.999789$ et $k = 1000564$. Le passage aux valeurs numériques du modèle de Makeham donne $A = 0.0007423$ et $\alpha = 0.00008135$. On le constate, l'estimation du risque initial α a baissé de façon significative en 30 ans. Pour compenser cette diminution importante, l'ajustement analytique "tord" le facteur d'accroissement c. C'est ainsi que les tables antérieures donnaient une proportion de centenaires 4 à 5 fois plus grande que les tables actuelles, ce qui est contraire aux observations. Bien plus, le facteur risque initial de la population féminine étant 4 fois plus petit que le facteur correspondant attaché à la population masculine, la torsion de c est encore plus sensible ici. On "observe" ainsi, dans les tables théoriques actuelles (les l_x) une plus grande proportion d'hommes âgés de plus de 95 ans que de femmes du même âge ! Le lissage utilisé (moindres carrés) "oublie" l'interprétation théorique initiale et les résultats obtenus sont donc (comme toujours en mathématique) approximativement et localement valables. La conscience des limites d'un modèle doit toujours être vue comme un accroissement de sa fiabilité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Adam, Joseph Éléments de la théorie mathématique des assurances, *Centre d'information de l'assurance, UPEA*, Bruxelles, 1976.

[2] Cnapelinckx, G. Nysten, L. Meurice, P. Algèbre financière, *De boeck*, Bruxelles 1986 (21^{e} édition).

[3] Justens, Daniel, Effets pervers de la modélisation de Makeham en assurances "vie", *Idioma 6, GEREFA*, pp 203-208, 1994.

Adresse de l'auteur :

Daniel JUSTENS
Rue du Jardinage 39
1082 Bruxelles

Idées pour la formation mathématique des instituteurs

P. Marlier, *Ecole Normale des "Rivageois" à Liège*

Introduction : constats et perspective

Si on vous parle changements dans les Ecoles Normales, vous songerez sans doute à la transformation en Hautes Ecoles ; mais bien que la mise en place soit imminente, il est difficile d'en parler tant nombre de points d'interrogation subsistent à ce sujet ([1]). Par ailleurs, ce n'est peut-être pas le lieu d'en parler. Mais indépendamment de cette réorganisation, des choses avaient déjà changé – en particulier, il a fallu faire face à une véritable explosion démographique avec ce que cela implique de modification des relations humaines – et d'autres étaient à revoir : une impression très largement partagée par les professeurs nouvellement désignés dans le supérieur court, le pédagogique en tout cas, est que le niveau des élèves y est anormalement bas et qu'il y a donc lieu de le "tirer vers le haut".

Je ne peux prononcer un tel jugement sans apporter quelques précisions qui, omises, pourraient faire penser que sous couvert d'une soi-disant réflexion pédagogique, j'ai surtout envie de régler des comptes personnels. Ce n'est en aucune façon le cas. Ce qui fonde mon constat provient tant de mes observations personnelles que de l'avis exprimé par mes collègues, qu'ils soient ou non de la même école ou du même réseau. Les statistiques générales d'échecs en première année d'Ecole Normale confirment ce point de vue pessimiste. Il va de soi que si j'avais la conviction qu'il s'agissait d'un problème local, j'appliquerais le principe qui veut que le linge sale se lave en famille.

Bien que ces considérations pessimistes soient valables pour toutes les sections de l'Ecole Normale ou d'autres catégories de l'enseignement supérieur, ce qui va suivre traite essentiellement de la formation des instituteurs primaires.

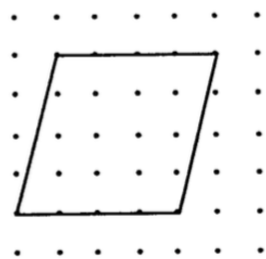
Peut-être quelques échantillons, mathématiques et autres, feront-ils mieux saisir à quel niveau les choses se situent. Vous imaginez peut-être que je vais citer la règle de l'accord du participe passé ou la réduction au

1. Ceci est écrit le 14 août 1996.

même dénominateur. Avec quelque cynisme, je vous dirai que ça, c'est l'ordinaire (2) ; cela n'étonne même plus. Voici des choses qui vous paraîtront sans doute plus surprenantes. Il n'est pas si rare d'en trouver qui sont en difficulté avec "se" et "ce", "on" et "ont", "son" et "sont", "peu" et "peut", "a" et "à", ... (3), ce qui indique à quel point la maîtrise de la langue véhiculaire (4) est dépourvue de structuration.

En mathématique, ce n'est bien sûr guère mieux. Certains n'arrivent pas à fixer les notions de médianes, médiatrices, hauteurs et bissectrices d'un triangle ; dans une copie, on omet d'effectuer un calcul comme $1,7 \times 3,2$ parce que l'usage de la calculatrice est interdit. J'ai vu enseigner que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$; j'ai entendu donner du cercle la définition suivante : *le cercle est une ligne courbe fermée.*

J'ai vu un élastique placé sur un géoplan comme sur la figure ci-dessous :



on fit convenir aux enfants que la figure ainsi obtenue était un losange, ce qu'on "vérifia" en mesurant sommairement avec la latte graduée. Quand, à la fin de la leçon, j'ai fait remarquer la faute, cela a, dans un premier temps, suscité un étonnement considérable tant la "preuve" par mesure semblait irréfragable. Puis mes explications (ou mon autorité) ayant emporté la conviction qu'il ne s'agissait pas d'un losange, on m'a tranquillisé en m'assurant que de toute manière les élèves ne l'avaient pas remarqué, ce qui, bien sûr m'a tout à fait rassuré.

2. Ce qui ne veut bien sûr pas dire normal. On peut en effet s'interroger sur l'efficacité d'un système scolaire qui en douze ans de scolarité obligatoire n'arrive pas à amener la majorité des jeunes à maîtriser cela, ni à les persuader que si on ne le maîtrise pas, on ferait peut-être mieux de ne pas envisager d'être instituteur.

3. LA perle que j'ai trouvée dans une copie : "se çont les trois cas possibles".

4. Je préfère cette expression à celle de "langue maternelle" car le français n'est pas la langue maternelle d'un certain nombre de nos étudiants.

En logique, il en est pour qui (après explication de ce qu'est la réciproque de $p \Rightarrow q$) la réciproque de "*les candidats qui répondent à telles conditions sont subsidiables*" est "*sont subsidiables les candidats qui répondent à telles conditions*".

On voit à quelle distance on peut se trouver d'une activité mathématique digne de ce nom, selon nos conceptions, fort bien synthétisées à mon goût dans les pages 53 à 56 du document "SOCLES DE COMPETENCES ..." dont voici quelques extraits significatifs :

> *A l'école fondamentale, l'étude de la mathématique s'effectue au départ d'objets, de faits vécus et observés dans le réel.*
> *L'accent est mis, non sur une accumulation quantitative et répétitive d'exercices, mais sur une véritable formation mathématique au travers de la construction et du développement d'une compétence essentielle :* **relever des défis à l'intelligence, résoudre des situations problématiques** *en recourant tant* **à l'intuition** *qu'à la* **mise en évidence des liens logiques.** ([5])

Il ne faut bien sûr imaginer ni que tous nos étudiants ne font que commettre des erreurs telles que celles qu'on a dites, ni que tous ceux ou toutes celles qui les commettent sont ou vont devenir instituteurs : j'ai fait allusion au très important taux d'échecs. Mais l'élimination, indispensable eu égard au respect qu'on doit aux enfants qui pourront leur être confiés, n'est moralement acceptable que si l'on a d'abord fait ce qui était possible pour les tirer du niveau où ils sont au départ pour les amener vers une attitude raisonnablement proche de ce qui est décrit dans le texte ci-dessus. De toute manière, même nos bons étudiants doivent être formés à l'enseignement.

Un grand nombre de ces étudiants traîne un passé mathématique peu épanouissant. Avec les effets de caricature habituels aux résumés brefs, on peut dire qu'ils ne se sont tirés d'affaire que par la mémorisation de formules appliquées avec plus ou moins de bonheur, la bienveillance ou la résignation du professeur ajoutant ce qu'il faut pour que le résultat soit jugé satisfaisant. Comment imaginer, dans ces conditions, qu'ils pratiquent et surtout inventent une pédagogie du défi et de l'exploration plutôt qu'une pédagogie du "c'est comme ça qu'on fait" vers laquelle tout les porte, si on ne les amène pas d'abord eux-mêmes à faire la découverte d'une approche différente de

5. C'est le texte lui-même qui attire l'attention par les caractères gras. Les explications données aux expressions "résoudre des situations problématiques" et "défi à l'intelligence" sont fort intéressantes elles aussi. Je ne le fais pas pour éviter d'allonger mon texte et parce que je suppose que toute personne intéressée peut facilement consulter le document cité.

la maîtrise des savoirs, approche qui non seulement confère à ceux-ci une autre solidité mais s'accompagne d'un authentique plaisir de trouver et de connaître.

En partant de la conviction qu'un des principes pédagogiques fondamentaux est que si le professeur trouve son plaisir en classe, il y a de bonnes chances que les élèves apprennent quelque chose, l'objectif est donc d'amener à trouver du plaisir à faire de la mathématique, des personnes pour qui ce fut rarement le cas.

Telle est l'ambition dans toute son ampleur. Restent à trouver les moyens. Fort heureusement, par ses congrès, par les textes qu'elle publie, la SBPM met à la disposition de ceux qui veulent en profiter, les ressources de la réflexion et du labeur d'un grand nombre de gens intelligents. Après quelques tâtonnements peu fructueux ([6]), je me suis tourné vers la *méthode de la série de problèmes qui vont quelque part.*

Dans l'état actuel des choses, seul mon cours de géométrie de première année est dans un état d'achèvement qui le rend présentable. Ce qui suit en est une partie.

Le contenu du cours et le choix du point de vue

L'enseignement de la géométrie à l'école primaire peut pratiquement se résumer à l'étude des principales figures géométriques planes et des principaux solides, avec ce que cela suppose de parallélisme et de perpendicularité, d'égalité de segments pour en exprimer les propriétés essentielles. On peut y joindre la question de "calculer rationnellement des périmètres, des aires, des volumes" que les programmes rangent dans la rubrique "Grandeurs". Le théorème de Thalès peut être une voie d'accès à la proportionnalité. Ces mêmes programmes parlent aussi de construire les figures aux instruments.

C'est cette idée de **construction de figures** qui a retenu mon attention. Une certaine familiarité avec le logiciel CABRI-GEOMETRE et ses macro-<u>constructions</u> n'y est certainement pas pour rien. La fréquentation des ELEMENTS d'Euclide non plus ; on se souviendra, par exemple, que les trois premiers postulats sont des énoncés "constructivistes" et que la

6. c'est-à-dire dont le fruit principal a été de me convaincre que ce n'était pas cela qu'il fallait faire.

méthode de démonstration de l'égalité des triangles consiste à reconstruire l'un sur l'autre en fonction des éléments connus pour constater à la fin du processus qu'il y a coïncidence. Nous voilà donc en bonne compagnie.

De plus, en première année de l'Ecole Normale, nos étudiants ont un cours de dessin dont une partie est du dessin "scientifique". Ils y apprennent à tracer des parallèles, des perpendiculaires, des bissectrices,... Il n'est sûrement pas de mauvaise pédagogie d'utiliser dans un cours les acquis d'un autre, surtout si les points de vue sont légèrement différents.

1. Les constructions élémentaires

Conformément aux recommandations du GEM, il faut partir du terrain de l'élève, mais bien entendu ne pas y camper. D'une manière générale, il est de bonne pédagogie de commencer par un problème que normalement les élèves savent résoudre, pour les mettre en confiance. D'où

1.1 - *Construire un triangle dont on connaît les (longueurs des) trois côtés.*

Pour s'adapter aux élèves, on posera le problème en termes "concrets" : *construire un triangle dont les côtés mesurent 10cm, 7cm, 6cm.* Selon qu'ils sont gauchers ou droitiers, selon la première donnée privilégiée, ils n'auront la même figure qu'à une isométrie près. Pour éviter le langage technique prématuré, on peut se contenter de faire appel ici à la notion de figures "superposables" qui, à ce stade, dit suffisamment ce qu'elle veut dire. On conclura donc que le problème n'a qu'une solution.

Des variations de données comme *(10cm, 6cm, et 4cm)* ou *(10cm, 6cm, 3cm)* amènent des réflexions intéressantes, comme la découverte ou le rappel des **inégalités triangulaires** ([7]), qu'un triangle "plat" n'est pas vraiment un triangle (alors qu'un angle "plat" est vraiment un angle), que les figures dont on parle sont des figures idéales dont les figures dessinées ne sont que des approximations ([8]), ou le fait qu'un problème mathématique peut ne pas avoir de solution.

7. Cette graphie indique qu'on rencontre ici un contenu de matière.

8. Pour des élèves faibles en mathématique, la boutade habituelle que la géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses est une mauvaise plaisanterie. Leur évidence est qu'une figure faite avec soin est une figure juste et donc fiable ou faisant preuve. D'où l'intérêt de poser explicitement la question de savoir si le triangle dont les dimensions sont *(10, 6, 4)* est un "vrai" triangle.

1.21 - *Construire un triangle dont on connaît un côté et les deux angles adjacents.*
1.22 - *Construire un triangle dont on connaît un côté et deux angles.*

Ces problèmes seront l'occasion de rappeler ou de (dé)montrer que **la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180°.**

L'énoncé **1.22**, qu'on peut d'ailleurs poser en données "concrètes" sans passer par l'intermédiaire du premier, va faire découvrir la notion de problème "ouvert" (ou "semi-ouvert"), c'est-à-dire de problème à réponses multiples. Cette multiplicité sera facilement découverte en demandant à plusieurs élèves de venir exposer leur solution. Se posera alors la question de savoir quand on les aura toutes, c'est-à-dire, qu'à partir d'une exploration spontanée, on sera amené à faire une discussion. On n'oubliera pas les cas particuliers comme celui où il s'agit d'un triangle isocèle *(6cm, 78°, 51°).*

On voit qu'un problème assez simple réclame, pour une solution complète, de véritables méthodes mathématiques. En outre, rencontrées de cette manière, ces méthodes apparaissent irrécusables : le fait que la multiplicité des solutions ait été rencontrée à partir de la production des élèves eux-mêmes la rend incontournable ; amenée par l'autorité du professeur, elle serait rangée par un certain nombre dans ce "plus" qui caractérise les élèves forts, mais dont peut se dispenser un futur instituteur qui aura le souci d'enseigner "les bases".

1.31 - *Construire un triangle dont deux côtés mesurent respectivement 7cm et 5cm et l'angle compris entre ces deux côtés a une amplitude de 43°. Combien y a-t-il de solutions ?*
1.32 - *A quelle(s) condition(s) la construction d'un triangle dont on donne deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés est-elle possible ?*

1.41 - *Construire un triangle dont deux côtés mesurent respectivement 7cm et 5cm et un angle non compris entre ces deux côtés a une amplitude de 38°.*

Les problèmes **1.31** et **1.32** sont des problèmes fermés ou à réponse évidente (les côtés doivent être de longueur non nulle et l'amplitude de l'angle doit être d'amplitude strictement comprise entre 0° et 180°). Il est normal dans une séquence d'apprentissage que des problèmes de difficultés différentes soient mêlés. C'est d'autant plus normal que les énoncés sont des variations "innocentes" sur un schéma donné. Il est par ailleurs important, quand on rencontre une situation d'apparence simple, de se demander si elle est réellement simple ou si elle cache des pièges.

Dans le problème **1.41**, les mathématiciens auront reconnu le "cas douteux" qui, pour nos étudiants, est précisément une situation piégeuse. Car, quand ils reportent une distance, comme tout un chacun pourrait-on dire, pour éviter de charger le dessin, ils ne tracent que l'arc de cercle qu'ils pensent devoir être utile. Il faut donc bien préciser que **le compas est un outil qui permet de reporter des longueurs dans <u>toutes</u> les directions** et que l'omission de ce report dans toutes les directions peut être une simplification abusive. Il faut songer aussi qu'on a le cas douteux si l'angle donné est opposé au côté de 5cm ; ce à quoi les élèves penseront sans doute le plus spontanément, mais il faut envisager aussi la situation où c'est au côté de 7 cm que l'angle donné est opposé.

Les deux problèmes suivants sont des variations sur la situation précédente. Le **1.42** est assez clair, mais le **1.43** fait apparaître une autre difficulté : les méthodes graphiques ne permettent pas de décider si le problème, dans sa version "cas douteux" admet 0, 1 ou 2 solutions. Le professeur choisira de laisser planer le doute, ce qui élargit l'éventail des réponses possibles, ou de faire appel, pour trancher la question, à des acquis des élèves non rappelés jusqu'ici, à savoir qu'**une tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon du point de contact** et que dans les triangles rectangles, on a la relation de Pythagore ([9]).

1.42 - *Construire un triangle dont deux côtés mesurent respectivement 7cm et 5cm et un angle non compris entre ces deux côtés a une amplitude de 88°.*

1.43 - *Construire un triangle dont deux côtés mesurent respectivement 8cm et 7,3cm et un angle non compris entre ces deux côtés a une amplitude de 66°.*

La séquence **1.5** montre qu'à partir d'un énoncé plutôt simpliste (qu'on peut bien entendu omettre), on peut évoluer par variations assez logiques vers des situations qui requièrent quelque inventivité. Il n'est pas répété dans chaque énoncé qu'il faut discuter le nombre de solutions, mais il doit être clair qu'une réponse complète implique cette discussion. Les questions **1.56** et **1.57** sont des exemples de situations où les données sont surabondantes et où il faut donc s'interroger sur leur compatibilité.

9. Ce rappel du théorème de Pythagore aurait déjà pu se faire dans la séquence **1.1**.

1.51 - *Construire un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs 4cm et 6cm.*
1.52 - *Construire un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit a pour longueur 5cm et l'hypoténuse 7cm.*
1.53 - *Construire un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit a pour longueur 5cm et l'hypoténuse 4cm.*
1.54 - *Construire un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit a pour longueur 5cm et dont un angle a une amplitude de 40°.*
1.55 - *Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 7cm et dont un angle a pour amplitude 35°.*
1.56 - *Construire un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit mesure 5cm, l'hypoténuse mesure 8cm et dont un angle a pour amplitude 35°.*
1.57 - *Construire un triangle rectangle dont un côté mesure 4cm, l'hypoténuse 8cm et dont un angle a pour amplitude 30°.*

Les problèmes suivants sont formulés en termes familiers (triangles isocèles) et attirent l'attention sur une notion moins souvent formulée, à savoir qu'**un triangle a toujours au moins deux angles aigus**.

1.61 - *Construire un triangle isocèle dont chacun des deux angles égaux a une amplitude de 95°.*
1.62 - *Construire un triangle isocèle non équilatéral dont le côté non égal aux deux autres mesure 4cm et dont l'angle opposé à ce côté a une amplitude de 72°.*
1.63 - *Construire un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse a une longueur de 6cm.*

Bilan provisoire au terme de cette première phase d'approche : à partir d'un matériau notionnel assez simple et pour eux irrécusable ([10]), il est possible de développer un enseignement centré sur les compétences, les attitudes intellectuelles, plus que les contenus ; ces compétences ou démarches sont loin d'être toutes élémentaires.

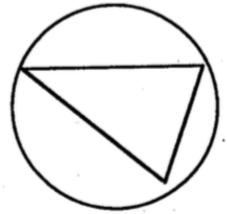
Il est tout à fait pensable de les impliquer eux-mêmes dans l'activité de recherches d'énoncés construits à partir d'une idée donnée : la définition de triangles à partir de leurs éléments "de base", leurs côtés et leurs angles, l'activité s'arrêtant quand on estime avoir fait le tour de la question, c'est-à-

10. Je veux dire par là que vouloir leur enseigner par exemple une axiomatique du plan provoque chez eux un blocage considérable dont une composante principale est le refus d'une formation qui n'ait pas de lien assez direct avec leur tâche future d'enseignants. En abordant les choses par le biais que j'ai décrit, on ne rencontre pas cette difficulté.

dire quand on en a fait la discussion. Ceci est évidemment de l'abstraction au second degré par rapport aux problèmes formulés ci-dessus. Au professeur de juger si c'est opportun.

2. Cercle circonscrit, médiatrices, hauteurs

Si vous demandez à des étudiants de première année de tracer un **triangle inscrit** à un cercle, il n'est pas impossible que vous trouviez dans certains cahiers quelque chose qui ressemble au dessin ci-contre.



D'où l'utilité, voire la nécessité, de préciser des notions qu'on pourrait croire acquises et le vocabulaire qui les exprime. Pour éviter la méprise, on peut décider d'utiliser l'expression "triangle inscrit à un cercle" et d'exclure "triangle inscrit dans un cercle" ; on n'omettra pas de dire que le cercle est "circonscrit au triangle". Ce sera sans doute aussi une bonne occasion de rappeler les notions de **cercle, disque, circonférence**.

2.11 - *Construire un triangle inscrit à un cercle de 3cm de rayon dont un côté a une longueur de 4cm et dont un angle adjacent à ce côté a une amplitude de 35°.* ([11])

2.12 - *Construire un triangle inscrit à un cercle de 3cm de rayon dont un côté a une longueur de 4cm et un autre une longueur de 3,2cm.*

2.13 - *Construire un triangle isocèle inscrit à un cercle de 3cm de rayon dont le côté non égal aux deux autres a une longueur de 4cm.*

2.14 - *Construire un triangle isocèle inscrit à un cercle de 3cm de rayon et dont un côté a une longueur de 4cm.*

2.15 - *Construire un triangle isocèle inscrit à un cercle de 3cm de rayon et dont un angle a une amplitude de 68°.*

2.16 - *Construire un triangle équilatéral inscrit à un cercle donné.*

11. J'ai eu un jour le plaisir de m'entendre poser la question de savoir ce qui se passe si l'angle donné est opposé au sommet donné. Ce fut l'occasion de (re)découvrir expérimentalement que tous les angles inscrits dans un cercle et interceptent le même arc ont même amplitude et que donc, selon les mesures données, le problème était insoluble ou admettait une infinité de solutions.

Il va de soi qu'on peut omettre le problème **2.13** qui sera traité comme un des cas du **2.14**. Certaines des situations rencontrées seront l'occasion de formuler un principe méthodologique qui trouvera de nombreuses applications : **supposons le problème résolu ; que verra-t-on d'utilisable dans nos données ?**

Par ailleurs, on peut introduire ici une autre démarche qui, pour être menée à bien, requiert la maîtrise d'une autre notion élémentaire, à savoir qu'**une tangente à un cercle n'a qu'un point commun avec ce cercle et est perpendiculaire au rayon dont ce point de contact est une extrémité**.

La résolution et la discussion de **2.11** auront peut-être fait apparaître que le problème a deux solutions parce que les données ont été "judicieusement" choisies. Pourquoi ne pas s'interroger aussi sur les conditions de ce choix ? Il est assez facile d'établir le lien entre le rayon du cercle et le segment donné nécessaire pour que la question ait un sens. Plus subtile est la question suivante :

2.21 - *Dans la situation du **2.11**, dans quelles limites peut varier l'angle donné pour qu'il y ait deux solutions ?*

Pour renforcer le contenu de matière rencontré dans le problème précédent, on peut par exemple se poser la question suivante :

2.22 - *Etant donné un cercle (avec son centre) et une direction, tracer la (les) tangente(s) au cercle, appartenant à la direction.*

Les problèmes qui suivent vont requérir la notion de **médiatrice d'un segment**. Ce sera bien sûr le moment d'en rappeler la double définition.

2.31 - *Trouver le centre d'un cercle donné.*
2.32 - *Un triangle admet-il toujours un et un seul cercle circonscrit ? Trois points non alignés déterminent-ils toujours un et un seul cercle ?*
2.33 - *Le centre du cercle circonscrit à un triangle est-il toujours à l'intérieur de ce triangle ? Discuter la situation.*

Au niveau de la méthode de recherche, ceci risque fort d'être tout à fait intéressant, car beaucoup d'étudiants vont commencer par dessiner des triangles et chercher le centre du cercle circonscrit, alors que si on commence par dessiner un cercle et qu'on y inscrit des triangles, cela devient très évident. Il n'est cependant pas dit qu'ils auront perdu leur temps en abordant le problème par le sentier abrupt.

Au niveau des contenus, on a maintenant l'importante propriété des triangles rectangles : **un triangle rectangle est toujours inscriptible dans un demi-cercle**, et réciproquement, **un triangle inscrit ou inscriptible dans un demi-cercle est rectangle**. Il n'est bien sûr pas dit que ces propositions ont été rigoureusement démontrées ; il n'est même pas sûr qu'on ait les outils pour le faire. Mais est-ce nécessaire ?

2.41 - *Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur 10cm et dont un côté de l'angle droit a pour longueur 5cm.*

2.42 - *Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur 10cm et dont un angle a une amplitude de 32°.*

2.43 - *Etant donné un cercle et un point extérieur à ce cercle, tracer la (les) tangente(s) à ce cercle comprenant le point.*

Ce problème présente beaucoup d'intérêt, non seulement par les savoirs qu'il implique, mais aussi du point de vue de la méthodologie de la recherche. Il est courant en effet que les étudiants tracent le cercle dont le centre est le point donné et qui comprend le centre du cercle donné, et qu'ils prennent l'intersection des deux cercles pour points de contact. Si la distance du point au cercle est à peu près égale au rayon (ce qui est souvent le cas pour les dessins faits "spontanément"), il est difficile de décider de la validité du procédé. Nous voici donc devant la très intéressante situation de **test d'hypothèse**. Une indication qu'on peut leur donner ([12]) est de **tester l'hypothèse dans des cas "extrêmes"**, c'est-à-dire en l'occurrence quand le point donné est assez proche ou assez éloigné du cercle. Une autre chose intéressante est de réfléchir avec eux à la valeur de cet essai manqué. Leur réaction la plus habituelle sera de se dire qu'une fois de plus en mathématique, ils n'ont pas su répondre à une question posée. Les convaincre que formuler une hypothèse et la tester est une activité intellectuelle valable et que donc dûment rapportée dans une copie d'interrogation ou d'examen, cette démarche sera validée en points, est une tâche bien difficile, tant cette idée leur est étrangère.

2.5 - *Etant donné un triangle scalène non rectangle, construire autour de ce triangle le(s) parallélogramme(s) dont ce triangle est la moitié.*
Dans l'hypothèse où on trouve plusieurs parallélogrammes, sont-ils superposables ?
La figure globale obtenue est-elle un triangle ?
Au cas où cette figure est un triangle, tracer ses médiatrices.

12. Il est peu probable qu'ils la trouvent d'eux-mêmes.

Peut-on en conclure quelque chose sur les hauteurs du triangle initial ? Est-ce vrai pour tout triangle ?

Il n'est pas évident que la propriété de **convergence des hauteurs d'un triangle** présente en soi un intérêt particulier ; il est encore moins évident qu'il faille mettre cela dans le bagage des instituteurs, surtout en raison de leur faiblesse en mathématique qui impose de se concentrer sur l'essentiel. Mais, du point de vue des compétences, le raisonnement qui consiste à faire valoir que les hauteurs d'un triangle étant toujours les médiatrices d'un autre triangle, la concourance de ces dernières implique la concourance des premières, peut être jugé intéressant. Par ailleurs, il sera utile d'attirer l'attention des étudiants sur le fait qu'alors que dans d'autres contextes on a des mots différents pour désigner des choses différentes (par exemple : cercle, disque, circonférence), ici on trouve de nombreuses ambiguïtés. L'expression "hauteur d'un triangle" désigne tantôt un segment, tantôt la longueur de ce segment, tantôt la droite dont ce segment est une partie. On ne peut que le regretter, mais en attendant un changement éventuel de la terminologie, mieux vaut être averti.

3. Cercle inscrit, bissectrices

3.11 - *Tracer un cercle de 2cm de rayon et un triangle circonscrit à ce cercle.*
Quelles sont les distances du centre du cercle à chacun des côtés ?
Tracer les droites passant par un sommet du triangle et par le centre du cercle. Que peut-on dire de ces droites en rapport avec les angles du triangle ?

Les contenus de matière à voir ou à rappeler en liaison avec cette question sont les notions de **cercle inscrit à un triangle** ou de **triangle circonscrit à un cercle**, de **distance d'un point à une droite** et de **bissectrice d'un angle** (double définition).

3.12 - *Tracer un triangle circonscrit à un cercle de 2cm de rayon dont un côté mesure 10cm et tel que le point de contact du cercle avec ce côté est à 4cm d'une extrémité du côté de longueur donnée.*

3.13 - *Comment peut-on modifier les données du problème* ***3.12*** *pour qu'il reste possible ?*

Quelques tâtonnements (ou un peu d'imagination) montrent que ce problème **3.13** est d'une difficulté considérable si on se fixe pour objectif une solution complète. Mais on peut se proposer d'explorer ce qui se passe en ne faisant varier qu'une donnée à la fois et en se contentant de repérer approximativement quelques points critiques et de dire ce qui s'y passe. Le logiciel CABRI-GEOMETRE est un outil précieux pour ce genre de travail.

3.21 - *Etant donné un triangle, tracer le cercle inscrit à ce triangle.*
3.22 - *Démontrer que les bissectrices d'un triangle sont concourantes.*

3.31 - *Construire un triangle dont les angles ont pour amplitudes 40°, 60° et 80°, et dont le cercle inscrit a un rayon de 2cm.*
3.32 - *Construire un triangle rectangle dont le cercle inscrit a un rayon de 2cm et dont un des angles a une amplitude de 40°.*
3.33 - *Construire un triangle isocèle dont le cercle inscrit a un rayon de 2cm.*

Assez évidemment, ce problème **3.33** admet une infinité de solutions. Quelle(s) condition(s) ajouter à cet énoncé pour en faire un probème qui n'admet qu'une ou deux solutions ? Voici un résumé (réécrit) des réponses obtenues dans une classe en janvier 1996.

3.331 - *Construire un triangle équilatéral dont le cercle inscrit a un rayon de 2cm.*
3.332 - *Construire un triangle isocèle dont le cercle inscrit a un rayon de 2cm et dont un angle a une amplitude de 40°.*
3.333 - *Construire un triangle isocèle dont le cercle inscrit a un rayon de 2cm et dont la "base" (le côté non égal aux deux autres) a une longueur de 7cm.*
3.334 - *Construire un triangle isocèle dont le cercle inscrit a un rayon de 2cm et dont la hauteur relative à la "base" a une longueur de 7cm.*
3.335 - *Construire un triangle isocèle dont le cercle inscrit a un rayon de 2cm et dont chacun des deux côtés égaux a une longueur de 9cm.*
3.336 - *Construire un triangle isocèle dont le cercle inscrit a un rayon de 2cm et dont les hauteurs relatives aux côtés égaux ont une longueur de 3,5cm.*

Commentaires : les problèmes **3.331** à **3.334** sont assez faciles. Le **3.336** l'est un peu moins, mais à condition d'avoir la bonne idée, on voit clairement qu'il est impossible. On peut évidemment se poser la question de savoir comment modifier les données chiffrées pour qu'il devienne possible. Quant au **3.335**, alors que son énoncé est une variation somme toute assez anodine sur ce qui précède, il est tout sauf élémentaire, probablement insoluble pour les étudiants de l'Ecole Normale. On peut cependant, "au pifomètre", trouver des solutions approximatives et arriver à la conclusion qu'il y en a deux. Cette rencontre de problèmes difficiles ne devrait pas décourager les étudiants de se poser des questions.

On rencontrera des sauts de difficulté analogues dans la séquence suivante :

3.341 - *Construire un triangle rectangle dont le cercle inscrit a un rayon de 2cm et dont un des côtés de l'angle droit a une longueur de 6cm.*
3.342 - *Construire un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit a une longueur de 6cm, dont un des angles a une amplitude de 50° et dont le cercle inscrit a un rayon de 2cm.*
3.343 - *Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 12cm et le rayon du cercle inscrit 2cm.*
3.351 - *Quelles variations chiffrées peut-on introduire dans l'énoncé* ***3.341*** *en voulant garder un problème possible.*
3.352 - *Même question par rapport à* ***3.342****.*
3.353 - *Même question par rapport à* ***3.343****.*

Le logiciel CABRI-GEOMETRE, avec ses figures "qui bougent", est précieux pour explorer les situations rencontrées dans les problèmes **3.351, 3.352** et **3.353**. Sa fonction "lieu géométrique" m'a été bien utile pour trouver la solution de **3.343**.

Conclusions

Ce qui précède est, on le suppose, un échantillon suffisant pour évaluer les points forts et les points faibles de la méthode préconisée.

Rappelons-en quelques principes : sans négliger la maîtrise des contenus de matière (les savoirs), on met **l'accent sur les compétences** ([13]), des attitudes intellectuelles parmi lesquelles le fait de se poser des questions et l'examen des possibilités d'une situation donnée ne sont pas les moins intéressantes. Cette façon d'aborder les savoirs fournit un **modèle** et met sur la piste **d'un enseignement** fait dans l'esprit recommandé par le document "SOCLES DE COMPETENCES ...".

Au crédit de la méthode, il faut encore ajouter, mais avec les réserves qu'on va dire, que cette **pédagogie** est **fonctionnelle** en ce sens que les

13. Je préfère ce terme à celui de "savoir-faire" non seulement parce qu'il est plus en accord avec la terminologie aujourd'hui courante, mais aussi parce que "savoir-faire" peut avoir des relents de "trucs et ficelles".

notions ne sont introduites ou rappelées que dans un contexte où on les utilise.

Si on se souvient que ces démarches ne sont pas du tout familières à un grand nombre de nos étudiants, on admettra que pour autant que l'expérience s'avère un succès, cela permet d'établir un bilan favorable.

Mais rien n'étant parfait en ce bas monde, il y a lieu de se livrer à un examen des non-acquis, des objectifs pédagogiques non rencontrés.

Se pose en particulier la question de savoir si on aura suffisamment contribué à la construction d'un univers mathématique globalement structuré. Telle que pratiquée ces deux dernières années scolaires, en cherchant à valoriser et à utiliser les bribes de connaissances qui restent dans la tête de nos étudiants, la méthode véhicule un certain nombre d'illogismes, voire de cercles vicieux : on a par exemple fait appel au théorème de Pythagore qui ne sera repris et démontré que plus loin dans le cours ; il n'y a bien sûr pas d'axiomatique ; appel implicite ou explicite est fait aux isométries du plan sans qu'on en ait refait la théorie,... Par ailleurs, on peut se demander si au terme de l'ensemble des séquences, ils auront rencontré les savoirs qu'on souhaite les voir posséder ([14]).

Cette dernière question ne peut évidemment recevoir de réponse qu'au vu de l'ensemble de la formation mathématique reçue au cours des trois années de l'Ecole Normale. Mais il importe aussi de la poser correctement. Il n'est pas dit du tout qu'un instituteur, pas plus que n'importe quel autre enseignant, doive avoir appris au cours de sa formation initiale tout ce qu'il est susceptible de devoir mettre en oeuvre un jour ou l'autre au cours de sa carrière. S'il est gênant que la formation initiale ait d'importantes lacunes, cela ne semble pas l'être que la formation continuée, soit sous la forme de l'étude personnelle, soit par la participation à des recyclages organisés, apporte une quantité non négligeable de savoirs. Dans cette optique, il est évidemment important que les étudiants aient acquis de bonnes méthodes d'étendre et d'étoffer les acquis antérieurs.

Plus importante à mes yeux est la question de la structuration des savoirs. Encore faut-il, elle aussi, la situer correctement. Ici aussi, à défaut d'une expérience plus complète et qui se soit déroulée dans des circonstances normales, il faut se livrer à une analyse des éléments qu'on a et ... des projets ou intentions.

14. Le bilan est d'autant plus difficile à établir que les années scolaires 94–95 et 95–96 ont été très perturbées par les grèves d'étudiants ou de professeurs.

Je pense qu'il faudrait pouvoir amener nos étudiants à voir l'intérêt d'une structuration plus forte, pourquoi pas axiomatisée ([15]), qui fasse percevoir la mathématique comme un tout organisé et non comme une juxtaposition d'observations judicieuses et soigneusement faites. Ceci me semble indispensable si on veut que l'enseignement de la mathématique à l'école primaire ressemble à de la mathématique et non à la plupart des autres connaissances. Il n'y a pas de véritable raison à l'accord du participe passé, si ce n'est que c'est ainsi que s'expriment ceux dont la langue est le français ; il n'y a pas de raison à ce qu'en français on accorde l'adjectif possessif avec l'objet (ou la personne) possédé(e), alors qu'en néerlandais ou en anglais, on l'accorde avec le (la) propriétaire ([16]) ; il n'y a pas de raison, si ce n'est de commodité dans certains contextes, à ce que l'eau bouille à 100°C et gèle à 0°C (Fahrenheit a d'ailleurs retenu d'autres repères), etc..., mais il y a une raison à ce qu'un parallélogramme dont les côtés sont "égaux" ait des diagonales perpendiculaires, il y a des raisons à ce que les règles du calcul des fractions soient ce qu'elles sont, etc... Cette importante distinction doit apparaître dans l'enseignement donné aux enfants de l'école primaire. Il est donc indispensable que cela apparaisse dans la formation des instituteurs et que l'évaluation de leur compétence porte aussi là-dessus.

Dans l'état actuel des choses, il n'est sans doute guère possible d'amener réellement les étudiants au niveau dont je viens de parler. Mais il est sans doute possible de s'en approcher, et la méthode qui consiste en une analyse plus critique de ses intuitions et la réalisation de synthèses partielles peut apporter quelque chose d'intéressant. A mon jugement, les autres méthodes sont moins fructueuses.

Enfin, si on tient que le plaisir du professeur est une des clefs importantes de l'efficacité de son enseignement, amener les futur(e)s instituteurs(trices) à trouver leur plaisir à enseigner la mathématique est sûrement un critère de succès. Quant à moi, je peux vous affirmer que je trouve mon plaisir à faire cela.

Adresse de l'auteur :

15. Si les instituteurs sont des professeurs de mathématique, on ne peut pas dire qu'ils soient tous des mathématiciens, et il n'est pas du tout indispensable qu'ils le soient. Il est donc exclu de prétendre à la maîtrise d'une axiomatique au sens strict du terme. Mais un ensemble de propositions de base, certainement redondantes, probablement imprécises, à partir desquelles on peut se faire une idée de la structure générale de l'édifice me semble souhaitable, pour autant bien sûr que les étudiants en voient l'intérêt.

16. On dit en français "Isabelle et son frère", mais en néerlandais "Isabelle en haar broeder", et en anglais "Isabelle and her brother".

Pierre MARLIER
Rue de Plainevaux 185/15
4100 Seraing
tél. : 04/337 49 45

Des problèmes et des jeux

C. Festraets

$\boxed{\text{Euh ?}}$ problème n° 178 de M. et P. n° 108.

a, b, c, d, e sont des réels tels que

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e &= 8 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 &= 16. \end{aligned}$$

Quelle est la valeur maximale de e ?

Solution de H.-J. SEIFFERT de Berlin

Si a, b, c, d, e sont des réels satisfaisant les équations considérées, alors de

$$\begin{aligned} e^2 &\leqslant \left(a-\frac{6}{5}\right)^2+\left(b-\frac{6}{5}\right)^2+\left(c-\frac{6}{5}\right)^2+\left(d-\frac{6}{5}\right)^2+e^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-\frac{12}{5}(a+b+c+d)+\frac{144}{25} \\ &= 16-\frac{12}{5}(8-e)+\frac{144}{25} \\ &= \frac{64}{25}+\frac{12}{5}\,e \end{aligned}$$

il vient

$$\left(e-\frac{6}{5}\right)^2 \leqslant \frac{100}{25}$$

ce qui conduit à $e \leqslant \frac{16}{5}$.

Puisque les deux équations sont vérifiées par $a = b = c = d = \frac{6}{5}$ et $e = \frac{16}{5}$, nous pouvons conclure que $\frac{16}{5}$ est la valeur maximale de e.

Solution de P. DUPONT de Grez-Doiceau

Commençons par généraliser. Nous allons traiter le problème suivant :

Soit $n \in N$, $p, q \in R$. Quel est le maximum du réel x_n s'il existe $x_1, \ldots, x_{n-1} \in R$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = p \tag{1}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = q^2? \tag{2}$$

Dans R^n, (1) est l'équation de l'hyperplan P admettant $v = (1, 1, \ldots, 1)$ pour vecteur normal et passant par $c = (p/n,\ p/n, \ldots, p/n)$. La distance de P à l'origine est $d = \sqrt{n \cdot (p/n)^2} = p/\sqrt{n}$.

Par ailleurs, (2) est l'équation de l'hypersphère S de centre O et de rayon q. Si $p \leqslant q$, P et S se coupent selon la sphère $(n-2)$-dimensionnelle T, contenue dans P, centrée en c et de rayon $r = \sqrt{q^2 - p^2/n}$.

Un réel x_n pour lequel il existe $x_1, \ldots, x_{n-1}$ tels que (1) et (2) est l'"hypercote" d'un point x de T. Or, l'hypercote de x sera maximale si et seulement si le rayon (orienté, en fait) $[cx]$ de T fait avec l'axe Ox_n un angle minimal, et le plus petit angle que puisse faire Ox_n un tel rayon, contenu dans P, est l'angle α de P et Ox_n, dont le complémentaire est l'angle β entre v et $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Il vient de suite $\cos\beta = 1/\sqrt{n}$ et, de là, $\cos\alpha = \sqrt{(n-1)/n}$.

Donc,

$$\begin{aligned} m &= \max\{x_n | x \in T\} = c_n + r \cdot \cos\alpha = \frac{p}{n} + \sqrt{q^2 - \frac{p^2}{n}}\sqrt{\frac{n-1}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\left(p + \sqrt{(n-1)(nq^2 - p^2)}\right). \end{aligned}$$

Dans le cas d'espèce proposé, $n = 5$, $p = 8$ et $q^2 = 16$, de sorte que

$$m = \frac{1}{5}\left(8 + \sqrt{5 \times 16 - 64)}\right) = \frac{16}{5}.$$

Bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek et de B. LOISEAU de Mouscron dont la démonstration procède d'une idée similaire à celle de P. DUPONT.

Sommes de fractions problème n° 179 de M. et P. n° 108.

On considère la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *où* $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}_0$.

De combien de manières peut-on écrire la fraction $\frac{1}{1980}$ *comme somme d'un nombre fini de termes consécutifs de cette suite.*

Solution de M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned}
&a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{g-1} \\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{g-1} - \frac{1}{g}\right) \\
&= \frac{1}{p} - \frac{1}{g}.
\end{aligned}$$

On est donc amené à résoudre l'équation diophantienne

$$\frac{1}{1980} = \frac{1}{p} - \frac{1}{g} \quad \text{où} \quad 1 \leqslant p < g.$$

Cette équation s'écrit successivement

$$pg = 1980g - 1980p$$

$$pg - 1980g + 1980p = 0$$

$$(p - 1980)(g + 1980) = -1980^2$$

$$(1980 + g)(1980 - p) = 1980^2 \tag{1}$$

Soit P l'ensemble des diviseurs naturels de 1980^2 inférieurs à 1980 et soit G l'ensemble des diviseurs naturels de 1980^2 supérieurs à 1980.

A chaque valeur de $1980 - p$ appartenant à P correspond une valeur de $1980 + g$ appartenant à G et satisfaisant l'équation (1).

Or,

$$1980^2 = 2^4 \times 3^4 \times 5^2 \times 11^2;$$

ce nombre admet $5 \times 5 \times 3 \times 3 = 225$ diviseurs.

Puisque $\operatorname{div} 1980^2 = P \cup G \cup \{1980\}$ et que $\sharp P = \sharp G$, on a finalement $\frac{1}{2}(225 - 1) = 112$ possibilités.

Bonnes solutions de J. JANSSEN de Lambermont et de B. LOISEAU de Mouscron.

$\boxed{\text{Polygones et triangles}}$ problème n° 180 de M. et P. n° 108.

Dans le plan, on donne un 1996*-gone convexe. On considère tous les triangles qui ont leurs sommets aux sommets de ce polygone et un point P intérieur au polygone et n'appartenant à aucun des côtés des triangles.*

Démontrer que le nombre de triangles pour lesquels P est un point intérieur est pair.

Solution de B. LOISEAU de Mouscron

1996 étant un nombre pair, il suffit de montrer que

– si on se donne un n-gone convexe, avec n pair, et si on considère tous les triangles ayant leurs sommets aux sommets de ce polygone,

– si on considère un point P n'appartenant à aucun des côtés de ces triangles (c'est-à-dire n'appartenant à aucun des segments reliant deux des sommets du polygone)

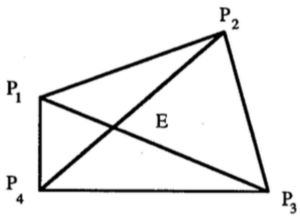
alors, le nombre de triangles considérés auxquels P est intérieur est pair.

N.B. : J'omets l'hypothèse que P est intérieur au polygone. Ce n'est évidemment pas une généralisation : si P n'est pas intérieur au polygone, il n'est intérieur à aucun des triangles considérés (parce que le polygone est convexe), et bien sûr, 0 est pair... C'est juste une astuce technique qui me permet d'éviter une discussion par cas dans la preuve du pas récurrent de ma démonstration. Toutefois, cela permet aussi de laisser entrevoir que le résultat est vrai aussi pour un point non intérieur dans le cas d'un polygone non convexe ; ce qui, cette fois, est une vraie généralisation.

On démontre le résultat par récurrence sur $n \geqslant 4$ (et pair).

$n = 4$: Soit P_1, P_2, P_3, P_4 formant dans cet ordre un quadrilatère convexe, et P sur aucun des P_iP_j. Si P est extérieur au quadrilatère, la thèse est triviale ; considérons maintenant le cas où il est intérieur au quadrilatère. Comme le quadrilatère est convexe, le point d'intersection des diagonales $E = P_1P_3 \cap P_2P_4$ (existe et) est intérieur au quadrilatère, et tout point intérieur au quadrilatère (et non sur les diagonales) est intérieur à EP_1P_2, EP_2P_3, EP_3P_4 ou EP_4P_1.

Par symétrie, il suffit de considérer le cas où P est intérieur à EP_1P_2. Dans ce cas, P est intérieur à un nombre pair de triangles considérés : $P_1P_2P_3$ et $P_1P_2P_4$.



Pas récurrent : Supposons la thèse vraie pour n pair, montrons qu'elle est vraie pour $n+2$.

Soit $P_1P_2P_3 \dots P_nP_{n+1}P_{n+2}$ un polygone convexe et P un point quelconque, non sur les $[P_iP_j]$. Alors, le polygone $P_1P_2P_3 \dots P_n$ est également convexe, et par hypothèse de récurrence, P est intérieur à un nombre pair de triangles dont les sommets sont parmi $P_1P_2P_3 \dots P_n$. Il reste donc à montrer que P est intérieur à un nombre pair de triangles dont les sommets sont parmi $P_1P_2P_3 \dots P_nP_{n+1}P_{n+2}$, **et dont un sommet au moins est P_{n+1} ou P_{n+2}**.

Pour chaque paire $\{i, j\}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, on a un quadrilatère convexe $P_iP_jP_{n+1}P_{n+2}$. Par le pas initial, P est intérieur à un nombre pair $k_{\{i,j\}}$ de triangles dont les sommets figurent parmi ces quatre points.

Si on considère cela pour toutes les paires $\{i, j\}$, on va compter tous les triangles contenant P, de sommets non parmi $P_1P_2P_3 \dots P_nP_{n+1}P_{n+2}$, et dont un sommet au moins est P_{n+1} ou P_{n+2}, et ces triangles seulement.

Mais leur nombre n'est pas $\displaystyle\sum_{\{i,j\}} k_{\{i,j\}}$, car certains triangles ont été comptés plusieurs fois. Lesquels ? Combien de fois ?

– Si $P \in Int(P_iP_jP_{n+1})$ (ou $P_iP_jP_{n+2}$), ce triangle n'a été compté qu'une seule fois : lorsqu'on a considéré la paire $\{i, j\}$.

– Si $P \in Int(P_iP_{n+1}P_{n+2})$, ce triangle a été compté $n-1$ fois : chaque fois qu'on a considéré une paire $\{i,j\}$, avec j différent de i (aussi bien supérieur qu'inférieur).

Bref, chaque triangle a été compté un nombre impair de fois (1 ou -1) et par conséquent, ces éventuelles redondances ne changent rien du point de vue de la parité : le nombre de triangles a même parité que le nombre $\sum_{\{i,j\}} k_{\{i,j\}}$, et est donc pair puisque chaque $k_{\{i,j\}}$ l'est.

■

Remarque : Dans le pas récurrent, l'hypothèse de convexité n'a servi à rien, si ce n'est à montrer que des sous-polygones du polygone donné étaient convexes, afin de pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence et le pas initial. Par conséquent, on peut parfaitement bien se passer de cette hypothèse, à condition d'élargir le nombre de cas du pas initial (admettre que le quadrilatère puisse ne pas être convexe). On peut même élargir les cas en admettant que des points puissent être alignés trois à trois dans le polygone, auquel cas il faut admettre dans le pas initial des cas dégénérés. Tous ces cas sont immédiats.

Solution de C. FESTRAETS

Considérons d'une part, tous les triangles ayant leurs sommets aux sommets du 1996-gone et ayant P comme point intérieur, d'autre part, tous les quadrilatères ayant les mêmes propriétés.

Désignons par t et q respectivement le nombre de tels triangles et de tels quadrilatères.

A tout triangle contenant P, on peut faire correspondre $1996-3=1993$ quadrilatères contenant P.

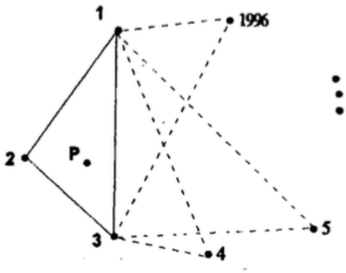


Fig.1

A tout quadrilatère contenant P, on peut faire correspondre 2 triangles contenant P.

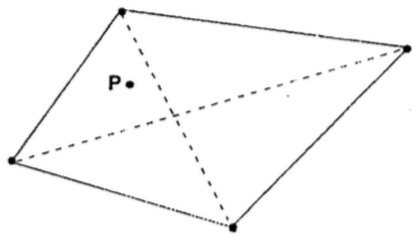


Fig.2

D'où $1993t = 2q$ et puisque 1993 est impair, t est pair.

Bonne solution de J. JANSSEN de Lambermont.

187. La clé du chiffre

Un nombre entier a est tel que le chiffre des dizaines de son carré est 7.

Quel peut être le chiffre des unités de a^2 ?

188. Ils étaient quatre ...

Déterminer tous les quadruples (a, b, c, d) d'entiers positifs ou nuls tels que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 b^2 c^2.$$

189. Bissection

Dans un tétraèdre $ABCD$, soient K et L les milieux respectifs des arêtes AB et CD.

Démontrer que tout plan contenant KL divise le tétraèdre en deux parties d'égal volume.

Olympiades

C. Festraets,

Dans le "Mathématique et Pédagogie" n° 109, je vous ai proposé une solution du problème MAXI 1 de l'O.M.B. due à C. PERLITSCHKE, concurrent de 6ème année.

Un lecteur de Mouscron, Y. HANSSENS, m'en envoie une autre, fort courte, que je vous soumets.

Rappelons l'énoncé.

A la gare de formation des trains, la seule consigne est que deux voitures de première classe ne peuvent jamais se suivre. De combien de manières peut être composée une rame de quinze voitures, si l'on dispose d'au moins quinze voitures de chacune des deux classes ? (Les voitures de première classe sont indiscernables entre elles, de même que celles de seconde).

Soit R_n le nombre de possibilités pour composer une rame de n voitures telles que deux voitures de 1ère classe ne se suivent pas.

Si la première voiture est de 1ère classe, la deuxième est nécessairement de 2ème classe et il reste R_{n-2} possibilités pour choisir les $n-2$ voitures restantes.

Si la première voiture est de 2ème classe, il reste R_{n-1} positions pour les $n-1$ voitures suivantes.

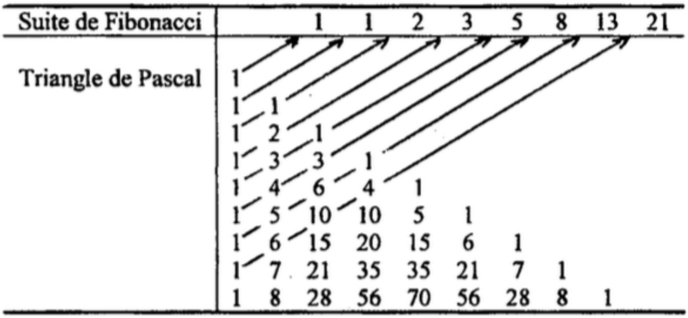
Nous avons donc $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$.

Comme $R_1 = 2$ (1 ou 2) et $R_2 = 3$ (12, 21 ou 22), R_{15} sera le quinzième terme de la suite

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \ldots$$

(qui n'est autre que la suite de Fibonacci amputée de ses trois premiers termes : 0,1,1).

Remarque : la solution de C. Perlitschke et celle décrite ci-dessus illustrent le lien entre le triangle de Pascal et la suite de Fibonacci :



Voici à présent les solutions des trois derniers problèmes de l'Olympiade Internationale. Aucun concurrent belge n'a résolu complètement ces problèmes à vrai dire fort difficiles. 75 pays participaient, avec en général six elèves par pays, et sur ce nombre important de concurrents, six seulement ont pu résoudre le problème 5.

4. Les entiers strictement positifs a et b sont tels que les nombres $15a+16b$ et $16a-15b$ sont tous les deux des carrés d'entiers strictement positifs. Trouver la plus petite valeur pouvant être prise par le minimum de ces deux carrés.

Solution

Posons $15a+16b=r^2$ où $r,s\in\mathbb{N}$.
$16a-15b=s^2$

Il vient

$$\begin{aligned} r^4+s^4 &= (15a+16b)^2+(16a-15b)^2 \\ &= (15^2+16^2)(a^2+b^2) \\ &= 481(a^2+b^2) \\ &= 13.37(a^2+b^2) \qquad (1) \end{aligned}$$

Par le petit théorème de Fermat, on a, $\forall x\in\mathbb{N}$,

$$x^{12}\equiv 1\ (mod\ 13)$$

$$\begin{aligned} \text{donc}\quad x^4 &\not\equiv -1 (mod\ 13) \\ x^{36} &\equiv 1 (mod\ 37) \\ \text{donc}\quad x^4 &\not\equiv -1 (mod\ 37) \end{aligned}$$

De (1), on a $r^4 + s^4 = 0(mod\, 13)$ d'où il existe un naturel a tel que

$$r^4 \equiv a(mod\, 13) \;\text{ et }\; s^4 \equiv -a(mod\, 13)$$

ce qui n'est possible que pour $a = 0$ puisque -1 n'est pas une 4ème puissance modulo 13.

On a ainsi

$$r^4 \equiv s^4 \equiv 0(mod\, 13)$$

et de même

$$r^4 \equiv s^4 \equiv 0(mod\, 37).$$

r et s sont donc multiples de $13.37 = 481$.

On peut vérifier que pour $r = s = 481$, on obtient les solutions $a = 481.31$, $b = 481$.

$r^2 = s^2 = 481^2$ est la plus petite valeur demandée.

5. Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que AB soit parallèle à ED, BC soit parallèle à FE et CD soit parallèle à AF.

Soient R_A, R_C et R_E les rayons des cercles circonscrits respectivement aux triangles FAB, BCD et DEF et soit p le périmètre de l'hexagone.

Montrer que

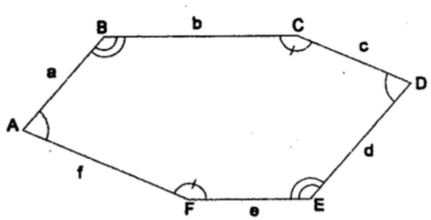
$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{p}{2}.$$

Solution

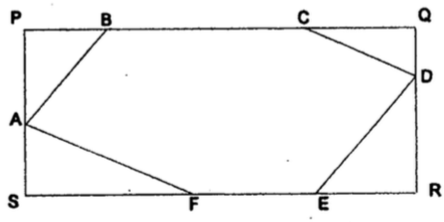
Posons a, b, c, d, e, f les longueurs respectives des côtés AB, BC, CD, DE, EF et FA.

Remarquons que les angles opposés de l'hexagone sont égaux, donc

$$\begin{aligned} BF &= 2R_A \sin A \\ BD &= 2R_C \sin C \\ FD &= 2R_E \sin E = 2R_E \sin B. \end{aligned}$$



Par A et par D, menons les perpendiculaires à BC (et à FE). Ces deux droites forment avec BC et FE un rectangle $PQRS$.



$BF \geqslant PS = QR$, d'où $2BF \geqslant PS + QR$. Or

$$\begin{aligned}
PS &= PA + AS \\
&= a\sin(180^\circ - B) + f\sin(180^\circ - F) \\
&= a\sin B + f\sin F \\
&= a\sin B + f\sin C \\
QR &= QD + DR \\
&= c\sin(180^\circ - C) + d\sin(180^\circ - E) \\
&= c\sin C + d\sin E \\
&= c\sin C + d\sin B
\end{aligned}$$

donc, $2BF \geqslant a\sin B + f\sin C + c\sin C + d\sin B$.

Remplaçons BF par sa valeur en fonction de R_A,

$$4R_A \geqslant a\frac{\sin B}{\sin A} + f\frac{\sin C}{\sin A} + c\frac{\sin C}{\sin A} + d\frac{\sin B}{\sin A}.$$

De manière similaire, on a

$$4R_C \geqslant c\frac{\sin A}{\sin C} + b\frac{\sin B}{\sin C} + e\frac{\sin B}{\sin C} + f\frac{\sin A}{\sin C}$$

$$4R_E \geqslant e\frac{\sin C}{\sin B} + d\frac{\sin A}{\sin B} + a\frac{\sin A}{\sin B} + b\frac{\sin C}{\sin B}.$$

Additionnons

$$4(R_A + R_C + R_E) \geqslant a\left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B}\right) + b\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\right) + \cdots$$

Or, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

d'où

$$4(R_A + R_C + R_E) \geqslant 2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f$$

et finalement

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{p}{2}.$$

6. Soient n, p et q des entiers strictement positifs tels que $n > p + q$.

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des entiers vérifiant les deux conditions suivantes :
(i) $x_0 = x_n = 0$
(ii) pour chaque entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

soit $x_i - x_{i-1} = p$, soit $x_i - x_{i-1} = -q$.

Montrer qu'il existe un couple d'indices (i, j) avec $i < j$ et $(i, j) \neq (0, n)$ tel que $x_i = x_j$.

Solution

On peut toujours supposer que p et q sont premiers entre eux ; si p et q admettent un commun diviseur $d > 1$, on les remplace respectivement par $p' = \frac{p}{d}$ et $q' = \frac{q}{d}$.

Soit k le nombre d'indices i tels que $x_i - x_{i-1} = p$, $n - k$ est alors le nombre d'indices i tels que $x_i - x_{i-1} = -q$ et puisque $x_0 = x_n = 0$, on a

$$kp + (n - k)q = 0.$$

Or, p et q sont premiers entre eux, donc il existe un entier a tel que

$$k = aq$$

et

$$n - k = ap$$

ce qui donne

$$n = a(p+q)$$

(avec $a > 1$, car par hypothèse, $n > p+q$).

Posons

$$y_i = x_{i+p+q} - x_i \quad (i \in \{0, 1, \ldots, n-p-q\}).$$

Comme $n > p+q$, il y a plus d'un y_i. Montrons que l'un au moins d'entre eux vaut 0, ce qui établira la thèse.

Soit $j \in \{i+1, i+2, \ldots, i+p+q\}$ et soit r le nombre d'indices j tels que $x_j - x_{j-1} = p$; le nombre d'indices j tels que $x_j - x_{j-1} = -q$ est alors $p+q-r$ et on a

$$\begin{aligned} y_i &= x_{i+p+q} - x_i = \sum_{j=i+1}^{i+p+q} (x_j - x_{j-1}) \\ &= rp + (p+q-r).(-q) \\ &= (p+q)(r-q) \end{aligned}$$

y_i est donc multiple de $p+q$.

Considérons l'expression

$$\begin{aligned} y_{i+1} - y_i &= (x_{i+1+p+q} - x_{i+1}) - (x_{i+p+q} - x_i) \\ &= (x_{i+1+p+q} - x_{i+p+q}) - (x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

Chacune des deux expressions entre parenthèses vaut soit p, soit $-q$, donc $y_{i+1} - y_i = 0$ ou $y_{i+1} - y_i = \pm(p+q)$ et puisque y_i est multiple de $p+q$, si $y_i = s(p+q)$, alors $y_{i+1} = s(p+q)$ ou $y_{i+1} = (s \pm 1)(p+q)$.

La somme

$$\begin{aligned} & y_0 + y_{p+q} + y_{2(p+q)} + \cdots + y_{(a-1)(p+q)} \\ &= (x_{p+q} - x_0) + (x_{2(p+q)} - x_{p+q}) + (x_{3(p+q)} - x_{2(p+q)}) \\ &\quad + \cdots + (x_{a(p+q)} - x_{(a-1)(p+q)}) \\ &= a_{a(p+q)} - x_0 = x_n - x_0 \end{aligned}$$

étant nulle par hypothèse, ses termes ne peuvent être tous strictement positifs ou tous strictement négatifs. Si l'un d'entre eux est nul, la propriété est démontrée. Sinon, dans la suite

$$y_0, y_1, \ldots, y_{n-p-q},$$

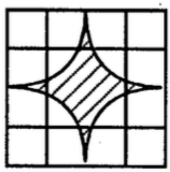
certains termes sont strictement positifs et d'autres strictement négatifs. Donc, ou bien un des y_i est nul ou bien il y a au moins deux termes consécutifs qui n'ont pas le même signe. Mais cette dernière éventualité est impossible puisque nous avons vu plus haut que si $y_i = s(p+q)$, alors $y_{i+1} = s(p+q)$ ou $y_{i+1} = (s \pm 1)(p+q)$.

*　*

*

ERRATUM

Dans le "Complément à la rubrique *Dans nos classes* publiée dans Mathématique et Pédagogie n° 108, pp. 79–83" par Y. Noël (Mathématique et Pédagogie n° 110, p. 72), les figures adéquates n'ont malheureusement pas été bien recopiées, ce qui rend le texte incompréhensible. La deuxième figure est à supprimer et à remplacer par la troisième qui devient la suivante :



Toutes les excuses de la rédaction pour ces erreurs "en cascade".

J. BAIR

Bibliographie

J. Bair,

Economie politique par Bernard JURION, De Boeck Université, 1996, 512 pages. - Exercices d'économie politique par Bernard JURION et Anne LECLERCQ, De Boeck Université, 1997, 379 pages.

Aujourd'hui, l'économie joue un rôle important dans notre société : pour s'en convaincre, il suffit, par exemple, de regarder la place importante que les journaux (écrits, radiophoniques ou télévisés) et les livres y consacrent ou encore d'observer le nombre très grand de jeunes qui souhaitent faire carrière dans le domaine.

Cet engouement pour cette discipline est tout à fait justifié. En effet, un défi majeur de la société est, d'après l'auteur principal de ces deux ouvrages, de *résoudre les trois problèmes fondamentaux et interdépendants : quels biens faut-il produire, en quelle quantité et à quelle époque ? ... Comment ces biens doivent-ils être produits ? ... Pour qui ces biens doivent-ils être produits ?*

Comme tout citoyen responsable, le professeur de mathématique ne peut évidemment pas ignorer les théories économiques fondamentales et contemporaines qui "influencent" la vie de la société. Mais il a également des "raisons professionnelles" de s'intéresser à la science économique dont l'objet est *d'expliquer comment les individus, agissant seuls ou en groupes, affectent à la satisfaction de besoins illimités des ressources rares ou limitées*. De notre point de vue, on peut affirmer que les économistes font de "l'optimisation mathématique" puisqu'ils cherchent à dégager des solutions optimales en respectant certaines contraintes, ce qui explique évidemment qu'ils utilisent, et de plus en plus, des concepts mathématiques.

Le professeur de mathématique trouvera dans l'univers économique de très nombreux exemples concrets et réalistes pour illustrer des concepts mathématiques, même de base. Il doit néanmoins être au courant des problèmes abordés en économie et du "jargon" de l'économiste : par exemple, lorsque celui-ci parle de valeur marginale, il fait tout simplement appel à la dérivée de la fonction considérée.

Les deux ouvrages en question pourront aider efficacement le mathématicien à se familiariser, dans une perspective très générale, avec les notions de base de la science économique.

Le premier livre expose, de façon claire, précise et très didactique l'essentiel des problèmes de base abordés aussi bien en micro-économie, qu'en macro-économie et dans l'étude des relations économiques internationales. L'auteur insiste tout particulièrement sur la logique des mécanismes micro et macro-économiques et fait abondamment usage de l'analyse graphique tout en utilisant des outils mathématiques simples.

Le deuxième livre illustre le premier en proposant des exercices regroupés en vingt thèmes. Pour chacun de ceux-ci, plusieurs exercices sont résolus, alors que d'autres, non résolus, sont proposés au lecteur. Au terme de chaque partie figurent des exercices récapitulatifs (souvent des questions posées, par le premier auteur, lors d'examens auprès de ses étudiants en première candidature en ingénieurs civils, en ingénieurs de gestion et en sciences de gestion à l'Université de Liège).

Ces deux livres ont une présentation très réussie : ils sont faciles et agréables à consulter. Ils constituent dès lors un "maître-achat" pour le professeur de mathématique qui souhaite s'investir dans l'étude de la science économique.

J. BAIR