Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N° 112 *Mai – Juin 1997*

Éditorial

G. Noël,

Comme je le mentionnais dans le numéro précédent, le membre du Cabinet de l'Education qui recevait une délégation de la Capp en février dernier, lui a certifié que l'heure n'était plus aux économies et que par conséquent, la Ministre n'envisageait pas de toucher aux "grilles horaires" dans l'immédiat.

Le tout est évidemment de savoir ce que l'on entend par "dans l'immédiat". Car depuis lors, une rumeur insistante fait état de ce que la décision de ramener l'horaire des élèves à 28 périodes par semaine serait "déjà prise, mais tenue secrète".

Comme toutes les rumeurs, l'origine de celle-ci est inconnue ou imprécise, ce qui la rend incontrôlable. Elle l'est d'autant plus qu'elle fait état d'une décision secrète. Dans le climat de méfiance qui régit actuellement les rapports entre citoyens et pouvoirs publics, tout démenti de ceux-ci est *a priori* suspect. Et pourtant ne peuvent-ils aussi être de bonne foi ?

La réaction normale devant une situation aussi malsaine serait de refuser de colporter une "information" dont on ignore la valeur. Mais on ne peut s'empêcher de penser que le nombre de 28 périodes par semaine ne surgit pas du néant, que ce nombre était déjà cité il y a plusieurs années comme un objectif possible et que, sans qu'une décision "secrète" soit nécessairement déjà prise (l'expérience montre que le secret ne dure jamais longtemps en Belgique), certaines personnalités influentes se sont, il n'y a pas si longtemps, prononcées dans ce sens. Après tout, si la Ministre veut éviter que les enseignants croient en n'importe quel bobard, ne lui suffirait-il pas d'inviter leurs représentants à participer aux organes où se prennent les décisions ?

C'est le point de vue que les associations pédagogiques regroupées au sein de la Capp défendent ensemble. C'est aussi ensemble qu'elles examineront dans les prochaines semaines l'attitude à prendre devant les "informations" qui circulent actuellement. La problématique de l'enseignement est extrêmement complexe. Pour faire face à cette complexité, nous avons besoin des idées, des réflexions, des suggestions de tous nos membres. Nous les appelons à nous en faire part en s'exprimant oralement lors de nos congrès ou assemblées générales ou par écrit, à tout moment.

G. Noël

Comment procédaient-ils ?

M. Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

1. Introduction

L'exposé qui suit ne prétend pas être exhaustif ; son but est de mettre en évidence quelques épisodes de l'histoire des mathématiques. Ainsi, il ne sera pas fait mention des civilisations mésopotamienne, chinoise ou maya ; il ne sera pas non plus discuté par exemple, des modes de transmission de la numération positionnelle indienne dans le monde arabe ; l'inventaire et l'étude des textes, tant indiens qu'arabes, sont encore bien trop incomplets pour espérer tirer quelque conclusion scientifique.

"À quoi ça sert les maths ? Pourquoi nous obliger à faire du calcul ou à résoudre des équations ?"

Ce sont là des questions qui "chatouillent" les élèves de l'enseignement secondaire. Mais leur méconnaissance du calcul différentiel et intégral, ou de l'algèbre linéaire entre autres, ne permet généralement pas au professeur de mathématiques de leur montrer que physique, chimie, biologie, sciences économiques ou autres, sont essentiellement des mathématiques appliquées. Or, voilà bien un moteur qui anime nos jeunes : les sciences ! même s'ils ne savent pas très bien de quoi ils parlent.

L'histoire des mathématiques, le contact avec des textes anciens permettent de replacer la discipline mathématique dans un contexte moins abstrait, celui de l'histoire de l'Homme, qu'il s'agisse de problèmes d'arpentage, de calcul du prix de vente d'une marchandise ou des modalités qui permettront de la troquer contre une autre, ... Il est alors possible de faire ressentir les mathématiques comme un besoin, une nécessité comparable à la maîtrise du feu ou à d'autres techniques qui ont amélioré notre vie de tous les jours. Leur enseignement risque peut-être de s'en trouver facilité, pour le grand bien de tous.

Je ne suis pas spécialiste des mathématiques égyptiennes ; mon information se limite à ce que m'a appris la lecture des travaux de Sylvia Couchoud, Gay Robins et Charles Shute, Richard J. Gillings, O. Neuge-

BAUER, CHASE, ... Mais il me semble important de parler aux jeunes élèves de mathématiques égyptiennes, pour deux raisons au moins :

— l'Égypte exerce un attrait certain sur pas mal de gens ;

— les hiéroglyphes sont d'"amusants" dessins à réaliser.

Il y a là une source de motivation qu'il serait dommage de ne pas exploiter.

2. Numération égyptienne

La numération égyptienne date d'environ deux millénaires (?) avant notre ère et est en fait un système assez primitif : l'écriture de 9 999 par exemple, nécessite l'emploi de 36 symboles !

Notre connaissance des mathématiques égyptiennes repose sur un très petit nombre de documents. Parmi ceux-ci, le plus important est sans doute le **Rhind Mathematical Papyrus** (R.M.P.) conservé au *British Museum* où il est catalogué sous les numéros BM 10 057 et BM 10 058. Ce sont deux grands morceaux de largeur 33 cm pour des longueurs de 206 et 319 cm. La longueur totale du document original devait atteindre plus ou moins 543 cm ; quelques petits fragments sont la propriété de l'*Historical Society* de New York.

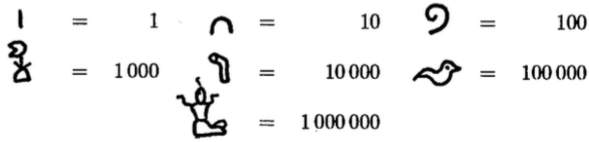
Le R.M.P. fut copié vers 1650 avant Jésus-Christ par le scribe AHMES d'après un texte qu'il dit daté du dix-neuvième siècle avant notre ère. Le papyrus contient fort probablement quatre-vingt quatre problèmes d'arithmétique et de géométrie (avec les solutions) ainsi que des tables de fractions doubles (à dénominateur impair) décomposées en somme de fractions de numérateurs 1 et de dénominateurs tous différents, comme

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

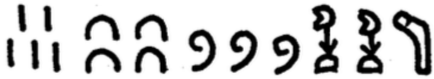
Ces fractions de numérateur 1 sont appelées fractions **unitaires** ou **égyptiennes** ; il est probable, comme nous le verrons sur un exemple, que leur importance est liée à la technique de division utilisée par le scribe égyptien.

Le R.M.P. fut découvert vers le milieu du siècle dernier dans une petite construction proche du temple mortuaire de RAMESSES II à Thèbes. L'Écossais Henry RHIND (1833–1863), qui séjournait en Égypte pour raison de santé, l'acheta à Luxor en 1858, avec d'autres antiquités égyptiennes dont un autre document mathématique, le **Leather Roll** (BM 10 250). L'exécuteur testamentaire de RHIND vendit ces documents au *British Museum.*

Le système de numération égyptien est **décimal non positionnel**. En lecture de droite à gauche, il utilise les symboles :



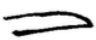
L'écriture de tout nombre est obtenue par répétition de ces symboles ; ainsi, 12 345 a pour graphie :



Le symbole utilisé pour désigner une fraction est  qui se prononce *rè* et signifie bouche, ouverture.

$\frac{1}{3}$ s'écrit 

Il existe cependant au moins deux exceptions :

 $= \frac{1}{2}$ et  $= \frac{2}{3}$

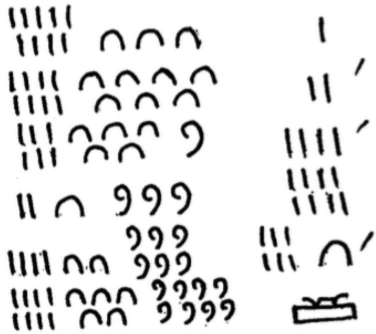
Cette dernière fraction est peut-être la seule, chez les Égyptiens, à avoir un numérateur différent de 1.

Les historiens s'accordent en général pour dire qu'ils n'ont aucune idée des techniques utilisées par le scribe égyptien pour additionner ou soustraire ; peut-être avait-il des tables, mais elles ne nous sont en tout cas pas parvenues. Par contre, les textes dont nous disposons sont suffisamment clairs en ce qui concerne la multiplication qui s'opérait par duplications successives, ce qui évitait de devoir apprendre par cœur des tables, dans une notation peu performante, il faut bien le dire. Quant à la division, elle était traitée comme l'inverse de la multiplication. Ainsi, s'il devait diviser 19 par 8, le scribe se posait la question de savoir par combien il fallait multiplier 8 pour obtenir 19. Le procédé introduit assez naturellement des fractions unitaires, comme nous le verrons dans le problème 24 du R.M.P.

Études quelques exemples.

— Multiplication de 22 par 39

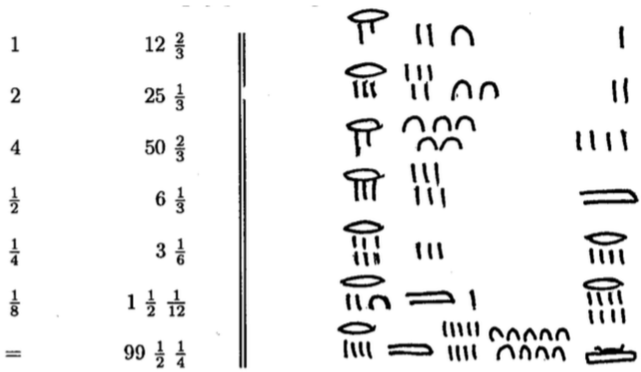
	1	39
\	2	78
\	4	156
	8	312
\	16	624
	=	858



En fait, le scribe écrit un des deux facteurs (39) et opère ensuite par duplications successives de celui-ci. Il s'arrête lorsqu'il atteint la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à l'autre facteur ($16 \leqslant 22$). Il coche ensuite les composantes **binaires** de cet autre facteur ($22 = 16 + 4 + 2$) et additionne les multiples correspondants du premier facteur 39 ($78+156+624 = 858$). Le procédé peut sembler lourd. Il l'est cependant moins que d'autres enseignés bien plus tard : Gillings [16] ([1]) cite notamment une méthode publiée par Robert Recorde dans son *Grounde of Artes* (1541).

— Multiplication de $7\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$ par $12\ \frac{2}{3}$

1. p. 17–18.



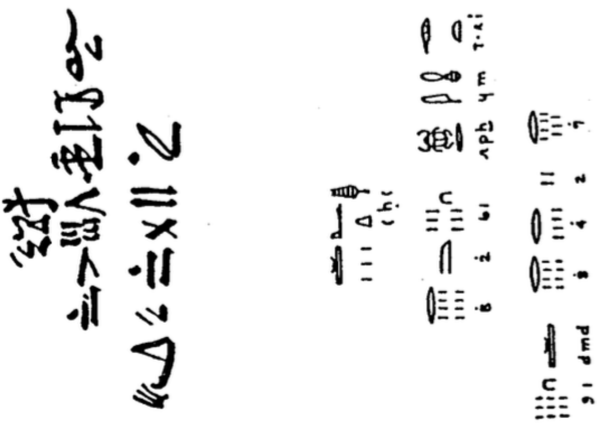
— Problème 24 du Papyrus Rhind

ce qui se traduit : “Une quantité, son septième ajouté devient 19.”

Comme on le voit ci-dessus et à la page suivante, ce n’est pas en hiéroglyphes que le texte est écrit mais en **hiératique**, une forme semi-cursive des hiéroglyphes. Pour une meilleure compréhension, nous avons ajouté en dessous la version en hiéroglyphes qu’il faut bien entendu lire de droite à gauche et en colonnes.

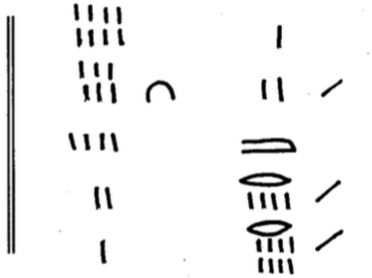
Le scribe suppose au départ que la quantité cherchée vaut 7 (pourquoi ?), ce qui donne (colonne à l’extrême droite, lignes 2 et 4) :

Le scribe trouve ainsi, pour somme de la quantité et de son septième, 8 ; ce résultat est faux puisqu’il aurait dû obtenir 19.



Le raisonnement qu'il tient alors est le suivant : la proportion de 19 à 8 est la même que celle de la quantité cherchée à 7, nombre qu'il avait choisi pour démarrer (par hasard ?). Il est ainsi amené à diviser 19 par 8 mais, comme nous l'avons dit plus haut, il va plutôt rechercher par combien il faut multiplier 8 pour obtenir 19. Nous trouvons cela à la colonne (à partir de la droite) 2, lignes 1, 2 et 3 et colonne 3, lignes 1 et 2.

	1	8
\	2	16
	$\frac{1}{2}$	4
\	$\frac{1}{4}$	2
\	$\frac{1}{8}$	1



Il obtient ainsi le quotient 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$, rapport de la proportion, qu'il doit maintenant multiplier par 7 pour trouver la quantité cherchée. Cela est fait dans la colonne de gauche du fragment de quatre lignes :

\	1	2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$
\	2	4 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$
\	4	9 $\frac{1}{2}$

Enfin, dans le fragment de gauche, sur trois lignes, la première de celles-ci signifie quantité ; à la deuxième ligne, nous trouvons sa valeur 16 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$, la somme des trois nombres obtenus ci-dessus (puisque 1 + 2 + 4 font 7). Quant à la troisième ligne, elle affirme que si on ajoute un septième de la quantité, c'est-à-dire 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$, cela fait bien 19.

Toute discussion sur la nature et la difficulté des problèmes présentés ici sort totalement du cadre de l'exposé.

3. La situation chez les Grecs et les Romains

Le système de numération utilisé par les Grecs n'est pas non plus positionnel.

Les unités (1 à 9), les dizaines (10 à 90) et les centaines (100 à 900) sont représentées par les lettres de l'alphabet (cf. ci-contre). Mais l'alphabet grec classique ne comporte que vingt-quatre lettres. Aussi, les Grecs empruntent-ils à l'alphabet phénicien les lettres qu'ils n'avaient pas utilisées ou qui n'avaient servi que dans certains alphabets grecs archaïques, telles que le *waw* ou *stigma* pour 6, le *qoppa* dérivant du *qof* phénicien pour 90 et le *sade* ou *sampi* pour 900.

Un nombre est donc représenté par un assemblage de lettres ou <u>mot</u>. Pour distinguer ces mots "numéraux" de ceux du langage, on leur adjoint un signe diacritique (') en haut à droite ou on les surmonte d'une barre horizontale.

1	α'	70	ο'
2	β'	80	π'
3	γ'	90	ϙ'
4	δ'	100	ρ'
5	ε'	101	ρα'
6	ς'	102	ρβ'
7	ζ'	200	σ'
8	η'	300	τ'
9	θ'	400	υ'
10	ι'	500	φ'
11	ια'	600	χ'
12	ιβ'	700	ψ'
13	ιγ'	800	ω'
14	ιδ'	900	ϡ'
15	ιε'	1000	͵α
16	ις'	2000	͵β
17	ιζ'	3000	͵γ
18	ιη'	4000	͵δ
19	ιθ'	5000	͵ε
20	κ'	6000	͵ς
21	κα'	7000	͵ζ
22	κβ'	8000	͵η
30	λ'	9000	͵θ
40	μ'	10000	͵ι
50	ν'	20000	͵κ
60	ξ'	100000	͵ρ

Ainsi, 862 s'écrit $\omega\xi\beta'$ ou $\overline{\omega\xi\beta}$. À partir de 1 000, on recommence avec α, β, ... mais les lettres sont cette fois accompagnées d'un signe en bas à gauche. Il est ainsi possible d'écrire des nombres jusqu'à 999 999. Cependant les Grecs avaient pris pour "grande" unité de base la **myriade** (10 000) qu'ils notaient M.

L'écriture des nombres supérieurs à une myriade met en évidence le nombre de celles-ci, ce qui, pour 689 385 donne :
$\xi\eta$

$\mathrm{M},\theta\tau\pi\varepsilon'$
ou soixante-huit **myriades** et neuf mille trois cent quatre-vingt cinq unités. On vérifiera aisément que 53 398 842 s'écrit :
$,\varepsilon\tau\lambda\theta$
$\mathrm{M},\eta\omega\mu\beta'$
c'est-à-dire cinq mille trois cent trente-neuf **myriades** et huit mille huit cent quarante-deux unités.

Il y a un léger progrès par rapport à la notation du scribe égyptien, mais le système est loin d'être satisfaisant quand il s'agit de représenter de grands nombres.

Archimède (287 – 212 av. J.-C.) a écrit un petit ouvrage intitulé $\Psi AMMITH\Sigma$ que l'on traduit en français par *L'Arénaire*. Dans ce livre d'une bonne vingtaine de pages, qu'il dédie non pas comme d'habitude à un mathématicien tel Ératosthène par exemple, mais à son protecteur et ami Gélon, tyran de Syracuse, Archimède veut prouver que le nombre de grains de sable que contiendrait la Terre, si elle en était complètement remplie, n'est pas infini. L'opuscule n'est en fait qu'un prétexte qui lui permet de démontrer la force du nouveau système de numération qu'il a conçu :

Συμβαίνει δὴ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν ἐς τὸ μὲν τῶν μυρίων ὑπάρχειν ἁμῖν παραδεδομένα, καὶ ὑπὲρ τὸ τῶν μυρίων [μὲν] ἀποχρεόντως γιγνώσκομες μυριάδων ἀριθμὸν λέγοντες ἔστε ποτὶ τὰς μυρίας μυριάδας. Ἔστων οὖν ἁμῖν οἵ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἐς τὰς μυρίας μυριάδας πρῶτοι καλούμενοι, τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν αἱ μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων dotαριθμῶν, …

Ainsi, la tradition nous a transmis les noms des nombres jusqu'à dix mille ; et nous reconnaissons suffisamment les nombres dépassant les dix mille en les énumérant jusqu'à la myriade de myriades ; nous appellerons premiers les nombres que nous venons de citer, jusqu'à la myriade de myriades, et unités de nombres seconds les myriadièmes myriades de nombres premiers, …

Pour être tout à fait clair, Archimède compte ainsi :

1		un ou unité des nombres premiers
10		dix
100		cent
1 000		mille
10 000	10^4	myriade
100 000		dix myriades
1 000 000		cent myriades
10 000 000		mille myriades
100 000 000	10^8	myriade myriadième ou unité des nombres seconds
⋮		
	10^{16}	unité des nombres troisièmes
⋮		
	10^{27}	mille unités des nombres quatrièmes
⋮		

On constate un net progrès dans l'expression des grands nombres.

Quant au monde latin, chacun connaît la faiblesse du système en vigueur. À celui qui n'en est pas convaincu, nous demanderons d'effectuer — sans tricher — l'addition suivante :

$$\text{CCCLXXI} \quad + \quad \text{MCCVII} \quad + \quad \text{MDCXXXVI} \quad + \quad \text{DVIII}$$

qui peut également s'écrire :

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & C & C & C & L & X & X & I \\
 & & & & M & C & C & V & I & I \\
 & & M & D & C & X & X & X & V & I \\
 & & & & & D & V & I & I & I \\
\hline
M & M & M & D & C & C & X & X & I & I
\end{array}$$

Cet exemple met en évidence quelques réalités historiques :
— le peu de progrès effectués dans l'art du calcul ;
— la justification de techniques de multiplications et divisions par "duplications" successives (cf. Égypte) ;

— la nécessité d'utiliser des auxiliaires de calcul (abaque, boulier, ...) même pour résoudre des problèmes qui nous paraissent élémentaires ;
— la considération que le commun des mortels avait pour les "abacistes" ;
— ...

4. La naissance de l'Empire arabe

Vers le sixième siècle de notre ère, la vie dans le nord et le centre de la péninsule arabique est axée sur le tribalisme bédouin. L'unité sociale privilégie le groupe à l'individu. Le groupe maintient sa cohésion extérieurement par le besoin de se défendre contre les embûches du désert, intérieurement par les liens du sang via la lignée mâle. L'organisation politique de la tribu nomade est rudimentaire ; à sa tête, on trouve un *sayyid* ou Cheikh, dirigeant élu qui est rarement plus que le premier parmi ses égaux : il suit plutôt qu'il ne dirige les avis de la tribu. Le *sayyid* reçoit des directives du conseil des anciens ou *majlis* qui représente les différentes familles ou clans et est le porte-parole de l'opinion publique. La vie est réglée par les us et coutumes ou *Sunna* et la religion est une sorte de polydémonisme. La seule exception au nomadisme est l'oasis où se crée parfois une petite communauté sédentaire avec une organisation politique un peu plus évoluée. Il existe à cette époque une langue poétique et technique standard qui rassemble les tribus dans une tradition et une culture uniques transmises oralement.

Par ci par là, on rencontre des nomades sédentarisés qui installent des villes avec un système de société moins simpliste. Parmi celles-ci, la plus importante est La Mecque dans le Ḥijāz. La construction de la ville en forme de cube, connue sous le nom de *Ka'ba* est un symbole d'unité à La Mecque. Un conseil du nom de *Mala'*, formé à partir des *majlis* des clans, remplace le simple *majlis* tribal. Le semblant d'autorité du *sayyid* est totalement supplanté par une sorte d'oligarchie de familles dirigeantes.

L'Arabie n'est pas complètement isolée du reste du monde hellénistique ou occidental, mais elle vit plutôt en marge de ceux-ci. Juifs et chrétiens s'établissent dans différentes parties du pays en y répandant les cultures araméenne et hellénistique. On trouve des Juifs et des Arabes judaïsés à Yathrib, plus tard rebaptisée Médine.

La réaction arabe à ces différents stimuli externes se traduit par l'acquisition d'armes, l'apprentissage de la stratégie, les techniques de fabrication des textiles, du vin, l'art de l'écriture, les religions monothéistes et leurs idées morales, … en fait, les bases essentielles d'une culture, bases qui assureront le succès de la mission de Muḥammad par la suite.

La Mecque est occupée par la tribu d'Arabie septentrionale des *Quraysh*, qui s'est rapidement développée en une importante communauté commerçante. Ils ont des accords commerciaux avec les autorités frontalières de Byzance, de Perse, d'Éthiopie, organisent un commerce extensif et fondent des coopératives. C'est dans cette conjoncture qu'apparaît Muḥammad, le Prophète de l'Islam.

Les deux sources qui fournissent des renseignements sur sa vie sont la *Sīra* (la biographie traditionnelle) et le Coran. Il semble être né à La Mecque entre 570 et 580 dans la famille des *Banū Hāshim*, famille honorable de *Quraysh* qui ne faisait pas partie de l'oligarchie dominante. Muḥammad lui-même dit avoir été élevé en orphelin dans des conditions peu favorables, sans doute par son grand-père. Il acquiert richesse et position sociale en épousant la veuve d'un riche marchand plus âgée que lui. On trouve le témoignage de ces faits dans le Coran, sourate 93, versets 6 à 8. Il est probable mais non certain qu'il fut lui-même marchand. Selon la *Sīra*, il connaissait des Juifs et des Chrétiens et le Coran est clairement lié aux textes religieux juifs et chrétiens. La tradition parle aussi d'un certain peuple, les *Ḥanīfs* recherchant une forme plus pure de religion que l'idôlatrie prônée par la classe dominante. Toujours selon la tradition, Muḥammad reçoit le premier appel alors qu'il approche la quarantaine. Si ses premiers prêches sont considérés comme inoffensifs par l'oligarchie en place, ils finissent par inquiéter cette classe dominante. D'une part, trop de fidèles convertis viennent des classes les plus défavorisées et d'autre part, l'abandon de l'ancienne religion à La Mecque risque de faire perdre à la ville son statut de ville de pélerinage et donc de passage obligé. Muḥammad doit fuir (*Hijra*) vers 622, devant ses adversaires politiques et religieux, à Yathrib, ville située quelque 400 km au nord de La Mecque. Plus tard, Yathrib sera rebaptisée Médine, ce qui signifie la Ville (qui a accueilli le Prophète).

Dans l'oasis de Médine, la situation est très différente : il y a pas mal de réfugiés juifs et l'organisation politique est beaucoup plus rudimentaire qu'à La Mecque. S'il connaît quelques difficultés au début de sa mission, Muḥammad parviendra, grâce entre autres à sa diplomatie, à former une solide coalition de tribus arabes ayant adhéré à l'Islam. Armés, bien entraînés et forts de leur conviction, ils attaqueront et prendront La Mecque en janvier 630. Les *Quraysh* n'auront alors plus qu'à se soumettre : c'est l'avènement de L'Islam.

Selon la biographie traditionnelle, Muḥammad meurt le 8 juin 632 après une courte maladie et le problème de la succession se pose cruellement. Lui qui se proclamait seul représentant de la volonté de Dieu ne pouvait désigner un successeur de son vivant. La tradition plus tardive qui veut qu'il désigna son cousin ‘Alī qui avait épousé sa fille Fāṭima n'est acceptée que par la *Shī‘a* (dissidents que l'on trouve notamment en Égypte et en Perse). C'est finalement l'un de ses beaux-pères Abū Bakr qui est désigné avec le titre de Calife, c'est-à-dire Député, Successeur (du Prophète). Le Califat est né. Abū Bakr est plus qu'un Cheikh : il possède le pouvoir exécutif et une armée. Puisque son accession contestée exige une action politique et militaire, il va l'assumer. Deux ans plus tard, à sa mort en 634, ‘Umar lui succédera sans réelle opposition. Notons au passage qu'Abū Bakr et ‘Umar étaient parmi les premiers que le Prophète avait convertis.

La première tâche du nouveau régime est de contrer par des actions militaires les rébellions tribales. Ces guerres connues sous le nom de *Ridda* se développeront en guerres de conquêtes qui repousseront très loin les frontières de l'Arabie. La langue arabe sera la langue officielle du nouvel état et elle deviendra petit à petit celle des intellectuels.

De 633 à 637, c'est la conquête de la Syrie et de l'Iraq ; de 639 à 642, celle de l'Égypte et de 642 à 646, la prise d'Alexandrie. Sous les Umayyades c'est-à-dire la première dynastie de Califes, l'Empire arabe s'étendra sur toute l'Espagne, le Maghreb, la Tripolitaine, l'Égypte, la Syrie, la Mésopotamie, l'Arménie, l'Iraq, la Perse, ... jusqu'à la vallée de l'Indus, pour s'arrêter aux frontières de la Chine. En France, Charles Martel stoppera l'invasion à Poitiers en 732. Depuis 635, la capitale de l'Empire des Umayyades est Damas en Syrie.

En 750 prend fin la dynastie des Umayyades avec l'accession au Califat de Abū al-‘Abbās as-Saffāh qui marque le début de la dynastie des Abbassides. En 751, lors d'une victoire sur des forces chinoises, à l'est du fleuve Iaxarte ou Syr-Darya, les Arabes ont parmi leurs prisonniers des artisans fabricants de papier qui était connu des Chinois depuis le deuxième siècle av. J.-C.

En 772, le deuxième Calife Abbasside al-Manṣūr (754-775) transfère la capitale de l'Empire de Damas à Baghdad, ville qu'il avait fondée en Iraq dix ans plus tôt. Le site avait été choisi pour des raisons pratiques : près d'un canal navigable reliant le Tigre et l'Euphrate, à l'intersection de routes commerciales, ...

Un autre Calife Hārūn ar-Rashīd (786-809), celui des *Mille et Une Nuits*, introduit en Iraq l'usage du papier, encourage le développement des sciences et des mathématiques et fonde une bibliothèque.

L'un de ses successeurs, al-Ma'mūn (813-833) rassemble les savants dans une espèce d'Académie, la Maison de la Sagesse, qui comprend aussi un observatoire bien équipé.

Pendant près de deux siècles, les Arabes vont traduire sans relâche : Euclide, Archimède, Apollonius, Ptolémée, Diophante, ... – pour ne citer que les sciences mathématiques – soit d'après les originaux grecs, soit d'après des traductions syriaques. À cela, il faut ajouter les connaissances venues de l'Inde, de la Perse et de la Mésopotamie. Cette période de traductions sera suivie d'une période de créations.

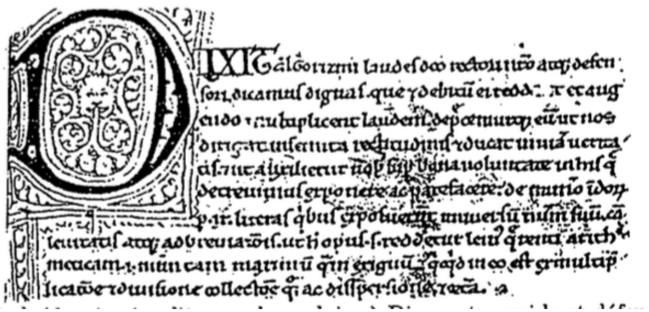
5. La numération de position

La découverte du principe de position ne fut pas a priori une évidence puisqu'elle a échappé à pas mal de civilisations. Il semble que le système de numération de position fut transmis au monde occidental vers le onzième siècle par les Arabes qui eux-mêmes, le tenaient des Indiens. Avant cela, on en trouve de plus sommaires à Babylone (2000 av. J.-C.), chez les astronomes Mayas (époque classique, entre le troisième et le neuvième siècle de notre ère) et chez les Chinois (un peu avant le début de notre ère).

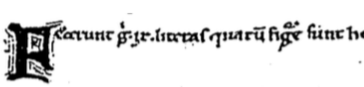
C'est Abū Ja'far Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫūarizmī (v. 780 – v. 850), savant d'origine persane qui travaillait à la Maison de la Sagesse du calife al-Ma'mūn, qui nous a laissé le premier ouvrage connu dans lequel sont exposés le système décimal et les opérations de calcul sur base de ce système. La seule copie qui nous en est parvenue jusqu'à présent est une traduction latine contenue dans le manuscrit Ms. Ii.vi.5 conservé à la bibliothèque de l'Université de Cambridge. Ce manuscrit date probablement du treizième siècle, en tout cas, pas plus tard que le quatorzième.

Sur l'auteur, AL-H̲ŪARIZMĪ, on ne connaît pas grand-chose sinon qu'il était originaire du H̲ūarizm, région au sud de la Mer d'Aral. Son surnom "géographique" ou *nisba* en arabe, a donné "algorisme" qui a longtemps désigné les méthodes de calcul **al-hindī**, c'est-à-dire à la façon indienne puis s'est transformé en "algorithme" qui désigne ce que chacun sait. Quant au manuscrit de Cambridge, il semble être une mauvaise traduction d'un ouvrage intitulé *Kitāb al-jam'w-al-tafrīq bi hisāb al-hindī* ou *Livre de l'addition et de la soustraction au moyen du calcul à l'indienne*. Mauvaise traduction et mauvaise copie puisque le texte est incomplet et que le scribe a très souvent omis de transcrire les nouveaux chiffres alors qu'il leur avait réservé des espaces blancs, parfois beaucoup trop larges …

L'auteur explique en détail le système décimal positionnel et dit comment prononcer le nom des nombres. Il donne les procédés d'addition et de soustraction en opérant de gauche à droite c'est-à-dire en commençant par les chiffres occupant les positions hautes. Il parle ensuite de la division par deux, seule opération qu'il traite de droite à gauche, puis de la duplication (cf. Égypte). Viennent ensuite la multiplication et la division. Il faut, dit-il, connaître les tables de multiplication depuis 1×1 jusqu'à 9×9 ; il conseille ensuite de travailler sur une tablette couverte de poussière ou de sable, sans doute d'origine indienne et qui est l'ancêtre de l'ardoise qui était encore utilisée dans nos écoles avant 1960. Au treizième siècle, FIBONACCI recommandera encore l'usage d'une *tabula dealbata*. AL-H̲ŪARIZMĪ vérifie les multiplications et duplications au moyen de la preuve par neuf. Après les opérations sur les nombres entiers, l'auteur traite des fractions, en latin *fractiones*, traduction de l'arabe *kasr* qui signifie rompu, brisé. Il parle d'abord des fractions sexagésimales puis des fractions ordinaires. Le texte s'interrompt au milieu de la description du produit de $3\,\frac{1}{2}$ par $8\,\frac{3}{11}$. Voici quelques extraits du manuscrit.

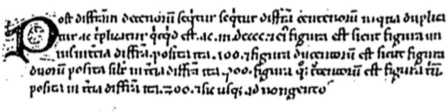


[Fol. 104r.] Algorizmi a dit : rendons gloire à Dieu notre guide et défenseur tant pour lui offrir ce qui lui est dû que pour renforcer notre louange envers Lui. Supplions-Le de nous guider sur le chemin de la Sagesse et de nous mener à la Vérité. Qu'Il nous aide, dans Sa bienveillance, à révéler ce que nous avons décidé de faire connaître : tout ce qui concerne la numération des Indiens par les IX symboles (*litere*) au moyen desquels ils ont mis sur pied leur système universel de numération, eu égard à sa facilité et à sa concision. Ainsi il est certain que le travail arithmétique sera rendu plus aisé, qu'il s'agisse de manipuler de grands nombres aussi bien que de petits, de multiplier et de diviser autant que d'additionner et de soustraire.



Donc ils ont conçu IX symboles dont les formes (*figure*) sont < >.

On constate effectivement qu'ici, le scribe a omis de recopier ces symboles.



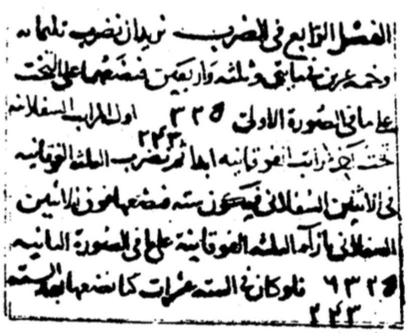
[Fol. 105r.] Après la position des dizaines suit {suit} la position des centaines dans laquelle on double et triple ce qui va depuis *c* jusqu'à *dcccc* et sa forme est juste comme la forme du 1 mis en troisième position, donc 100 et la forme de deux cents est juste comme la forme de deux, placé de la même manière en troisième position, donc 200 ; la forme de trois cents est aussi celle de trois placé en troisième position, donc 300 et ainsi de suite jusqu'à neuf cents.

6. Le calcul al-hindī

Il s'agit, comme nous venons de le voir, du calcul au moyen des "figures indiennes". Nous l'illustrerons avec un extrait du *Livre des principes du calcul à l'indienne* écrit vers l'an 1000. Ce texte toujours existant dans sa version arabe originale (bibliothèque Aya Sophya d'Istambul, manuscrit

MS4857, folios 267b à 282b) est particulièrement intéressant. C'est en effet à l'heure actuelle le plus ancien ouvrage en version arabe sur le calcul à l'indienne ; il précède de peu le traité d'al-Haraji également en version arabe.

Le traité du calcul à l'indienne est divisé en deux livres ; le premier concerne le système décimal, le second, le sexagésimal pur. On y trouve les quatre opérations arithmétiques fondamentales, l'extraction des racines carrées, les techniques de preuve et l'extraction des racines cubiques. Tout comme al-Hūarizmī, ibn Labbān procède de gauche à droite. Prenons un exemple.



ثم نضرب المرتبة الفوقانية ايضا في الاربعة السفلانية

ونزيد العشرة على مثلها تصير ستة وثلاثين فيحصل

فنحصل على ما في الصورة الثالثة ٧٢٣٢٥ ثم نضرب
٢٢٣

الثلثة الثلثة الفوقانية في الثلثة السفلانية فيكون تسعة

فنضعها فوق الثلثة السفلانية كان الثلثة الفوقانية

ونقل المراتب السفلانية مرتبة فنحصل على ما في الصورة

الرابعة ٧٢٣٢٥ ثم نضرب الاثنين الفوقانية فوق الثلثة
٢٢٣

السفلانية في الاثنين السفلاني فيكون اربعة فنزيدها على

الاثنين الذي فوق الاثنين فيصير ستة ثم نضرب الاثنين

الفوقاني ايضا في الاربعة السفلانية فيكون ثمانية فنزيدها

على الستة التي فوق الاربعة ثم نضرب الاثنين الفوقاني

ايضا في الثلثة السفلانية فيكون ستة فنضعها فوق

الثلثة كان الاثنين الفوقاني ونقل المراتب السفلانية

مرتبة فنحصل على ما في الصورة الخامسة ٧٦٦٢٥
٢٢٣

ثم نضرب الخمسة الفوقانية في الاثنين السفلاني فيكون

عشرة فنزيدها على عشرات المرتبة التي فوق الاربعة ثم

نضرب الخمسة ايضا في الاربعة السفلانية يكون عشرين

فنزيدها على عشرات الاربعة فيصير تسعة ثم نضرب ايضا الخمسة

في الثلثة السفلانية يكون خمسة عشر فنترك الخمسة كانها

ونزيد العشرة على عشراتها فنحصل على ما في الصورة السادسة

٧٨٦٧٥ وذلك ما اردنا ان نعلم ضرب التاج و الكسوة
٢٢٣

Nous voulons multiplier 325 par 243. Les deux nombres sont écrits sur la tablette couverte de poussières ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & & \end{array}$$

Le premier ordre du multiplicateur est sous la dernière position du multiplicande. Nous multiplions le 3 du multiplicande par le 2 du multiplicateur, ce qui donne 6. Nous le plaçons au-dessus du 2 du multiplicateur à côté du 3 du multiplicande, comme ceci :

$$\begin{array}{ccccc} 6 & & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & & \end{array}$$

Si le produit avait été autre que 6 et avait contenu des dizaines et des unités, nous aurions mis les unités au-dessus du 2 et les dizaines à gauche des unités. Nous multiplions le 3 du dessus également par le 4 du dessous. Nous additionnons le 10 des dizaines de telle manière que 6 devient 7. Il en résulte ceci :

$$\begin{array}{ccccc} 7 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & & \end{array}$$

Nous multiplions le 3 du dessus par le 3 du dessous, ce qui fait 9. Nous l'écrivons au-dessus du 3 inférieur, à la place du 3 supérieur. Nous faisons glisser en bas les ordres d'une place [vers la droite]. Il en résulte :

$$\begin{array}{ccccc} 7 & 2 & 9 & 2 & 5 \\ & 2 & 4 & 3 & \end{array}$$

Alors nous multiplions le 2 qui est au-dessus du 3 par le 2 du dessous, ce qui fait 4. Nous l'ajoutons au 2 qui est au-dessus du 2 inférieur pour avoir 6. Ensuite, nous multiplions le 2 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait 8. Nous l'ajoutons au 9 qui est au-dessus du 4. Ensuite, nous multiplions encore le 2 supérieur par le 3 inférieur, ce qui fait 6 que nous écrivons au-dessus du 3, à la place du 2. Puis nous faisons glisser en bas les ordres d'une place [vers la droite]. Il vient :

$$\begin{array}{ccccc} 7 & 7 & 7 & 6 & 5 \\ & & 2 & 4 & 3 \end{array}$$

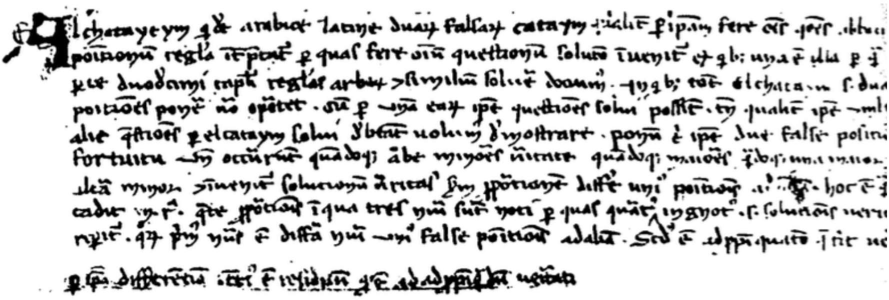
Ensuite, nous multiplions le 5 du dessus par le 2 du dessous pour obtenir 10. Nous ajoutons 1 aux dizaines de l'ordre qui est au-dessus du 2. De nouveau, nous multiplions le 5 par le 4 du dessous, ce qui fait 20. Nous ajoutons 2 aux dizaines de l'ordre au-dessus du 4, ce qui fait 9. Nous multiplions encore le 5 par le 3 du dessous, ce qui donne 15 ; le 5 est laissé à sa place et le 1 est ajouté à ses dizaines. Nous obtenons :

$$\begin{array}{ccccc} 7 & 8 & 9 & 7 & 5 \\ & & 2 & 4 & 3 \end{array}$$

C'est ce que nous souhaitions faire.

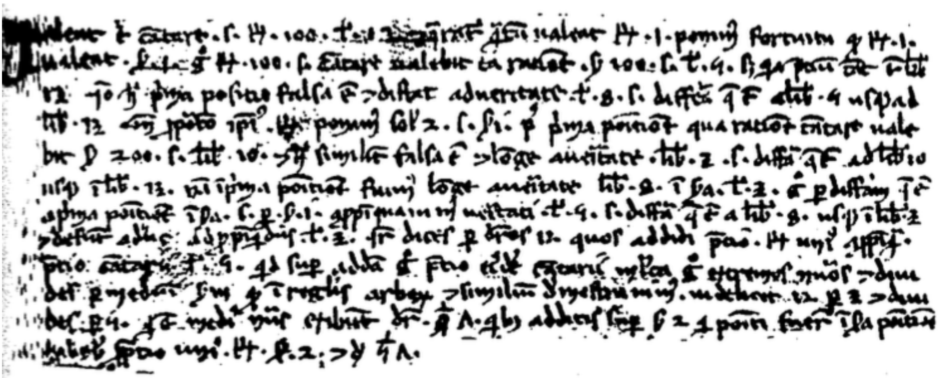
7. La règle al-h̲aṭāyn

Elle était probablement connue à Baghdad à l'époque d'AL-H̲ŪARIZMĪ ; on la trouve chez les Indiens, les Chinois, ... Voyons simplement de quoi il s'agit. Elle est notamment décrite dans le célèbre *liber abbaci* de LEONARDO PISANO (v. 1170 – v. 1240). Encore appelé FIBONACCI, on possède peu de renseignements sur sa vie si ce ne sont les quelques données suivantes qu'il nous livre dans le prologue du *liber abbaci*. Son père était *publicus scriba*, sorte de représentant pour les commerçants de Pise à la douane de Bougie en Algérie ; il fit venir son fils Léonard auprès de lui afin de lui apprendre, au contact des Arabes, les méthodes de calcul au moyen des figures indiennes. Plus tard, LÉONARD DE PISE parcourra tout le bassin méditerranéen. On apprend d'autres sources qu'il rencontrera des savants comme MICHEL SCOTT, JEAN DE PALERME ou MAÎTRE THÉODORE à la Cour de Frédéric II de Hohenstaufen, Empereur germanique, Roi de Sicile et grand amateur de sciences. FIBONACCI a joué un rôle non négligeable dans la transmission des connaissances mathématiques vers l'Europe occidentale. Il a considérablement influencé l'algébriste italien LUCA PACIOLI dont nous reparlerons.



Ici commence le chapitre treize qui traite de la règle *al-ẖaṭāyn* par laquelle on résout presque tous les énoncés d'abaque.

Al-ẖaṭāyn en arabe, *duarum falsarum positionum regula* en latin. C'est grâce à elle qu'on trouve la solution de presque tous les énoncés. C'est par l'une de ces règles que nous avons appris à résoudre les problèmes d'arbres et autres dans la troisième partie du chapitre douze. Dans ces énoncés, il ne faut pas utiliser *al-ẖaṭāyn* tout entier, à savoir les deux positions lorsque le problème peut être résolu par l'une d'elles seulement. Cependant nous voulons montrer comment on doit résoudre le problème ci-dessous et beaucoup d'autres par *al-ẖaṭāyn.* On prend bien sûr les deux fausses positions au hasard. D'où il arrive que les deux soient en dessous de la vérité ou au-dessus ou parfois l'une au-dessus et l'autre en dessous. On trouve la vérité des solutions selon la proportion de la différence d'une position à l'autre, c'est-à-dire ce qui vient par la règle de quatre nombres proportionnels dont trois sont connus : des trois, on trouve le quatrième inconnu, à savoir la vérité de la solution. Le premier de ces nombres est la différence des nombres d'une fausse position à l'autre. Le second est l'approche qui a été faite de la vérité par cette différence. Le troisième est le résidu pour atteindre la vérité.



Un *cantar*, à savoir 100 *rotuli* vaut, disons 13 livres ; on demande combien vaut 1 *rotulus*. Posons au hasard qu'un *rotulus* vaut 1 sou ; donc, à partir de cette estimation, 100 *rotuli*, c'est-à-dire un *cantar* vaudra 100 sous, à savoir 5 livres. Mais puisque le prix d'un *cantar* est 13 livres, cette première position est fausse. Elle s'écarte de 8 livres de la vérité, à savoir la différence de 5 livres à 13 livres. D'où, pour le prix de ce *rotulus*, posons 2 sous, à savoir 1 sou de plus qu'en première position. À partir de cette estimation, le *cantar* vaudra 200 sous, c'est-à-dire 10 livres. Et semblablement, cette position est fausse et s'éloigne de la vérité de 3 livres, à savoir la différence de 10 livres à 13 livres. En première position, nous étions éloignés de la vérité de 8 livres ; en seconde, de 3 livres. Donc pour la différence qui est de la première position à la seconde, à savoir pour 1 sou, nous avons approché la vérité de 5 livres, à savoir la différence de 8 livres à 3 livres et il manque à cette approche trois livres. C'est pourquoi tu diras : pour 12 deniers que j'ai ajoutés au prix d'un *rotulus*, j'ai approché le prix du *cantar* de 5 livres. Qu'ajouterai-je donc au prix de ce *rotulus* pour approcher des 3 livres qui font défaut à la seconde position pour arriver au prix du *cantar* ? Multiplie donc les nombres extrêmes et divise par le médian selon ce que nous avons montré dans les problèmes d'arbres et autres, à savoir 12 par 3 et tu diviseras par 5 qui est le nombre médian, viendront $\frac{1}{5}$ 7 deniers. Si tu les ajoutes aux deux livres qui avaient été posées en seconde position, tu obtiendras, pour le prix d'un *rotulus*, 2 sous et $\frac{1}{5}$ 7 deniers.

On peut penser que le scribe Ahmes a utilisé le procédé de simple fausse position pour résoudre le problème 24 du *papyrus Rhind*. Cependant, si l'on regarde d'autres énoncés dans le papyrus, on s'aperçoit que le scribe ne prend pas au hasard sa fausse position ; il la choisit de manière à ne pas devoir travailler dès le départ avec des fractions, ce qui fait dire à certains historiens des sciences, comme par exemple Michel GUILLEMOT de l'Université de Toulouse, que le procédé utilisé par les Égyptiens s'apparente plus à un changement de variable qu'à une méthode de fausse position.

8. Un peu d'algèbre

Il n'est pas question d'en faire un historique mais simplement de présenter un énoncé classique

Nous avons choisi le texte de LUCA PACIOLI (v. 1450 – v. 1517) qui a largement puisé chez FIBONACCI ; cette option est dans la lignée de la transmission en Occident des connaissances du monde arabe. Dans tous les cas, l'exposé est algébrique :

Un *census* (*māl*, en arabe) auquel on ajoute 10 *res*

cela donne 39 deniers (*dirham*, en arabe). On recherche la *res* et le *census*. En clair :

$$x^2 + 10x = 39$$

Que valent x et x^2 ?

Quel que soit l'auteur, l'énoncé algébrique est suivi d'une solution algébrique puis d'une démonstration géométrique à la manière du livre II des *Éléments* d'EUCLIDE (par exemple, compléter un carré).

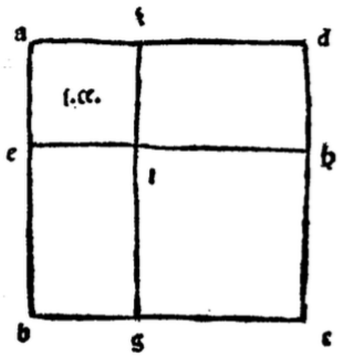
Avant de traiter cette question, présentons en quelques mots l'algébriste LUCA PACIOLI. Il est né en Ombrie, à Borgo San Sepolcro, près d'Arezzo. Il a subi l'influence de FIBONACCI mais aussi du mathématicien géomètre et peintre PIERO DELLA FRANCESCA (v. 1410 – 1492) ; il fut l'ami de LEONARDO DA VINCI (1452 – 1519) qui illustra l'une de ses publications. Il était moine mais titulaire d'une *chaire ambulante de mathématiques*, ce qui l'amena à parcourir l'Italie pour les enseigner. Sa renommée repose beaucoup sur l'édition en 1494 de sa *Summa*, encyclopédie monumentale des connaissances mathématiques de l'époque. Dans sa rédaction, il a voulu abandonner la langue savante, le latin et donc l'écrire en langue vulgaire. Mais il n'a que partiellement atteint son but puisqu'on trouve dans la *Summa* plusieurs dialectes italiens des villes qu'il avait traversées.

Cõmo adire.1.ce.p̃.10.co.sõno eq̃li a.39.per nũero semplici. Dicemo che per trouare le valute del cẽso e ancora de la cosa sua: ℞.che hauẽdo tu recata la equatiõe tutta a.1.ce.che tu demeççi la quantita de le cose quali q̃ sõ.10.neuẽ.5. E q̃sta mi/ta dico che multiplichi in se fa.25.E sopra questo ponghi el numero che in la equatione se

troua:cioe.39.fara.64.E di questo dico che prẽda la.℞.Quale e.8.E di lei caui la mita d̃ l cose che so.5.restara.3.p la valuta de la cosa.E tãto sira la.℞.del cẽso:cioe.3.El cẽso tuto vi ra a essere.9.Unde.10.co.vol dire.30.el cẽso vol dir.9.che giõti asiemi bẽ se aguagliano a.39. cõmo dicemo.

C'est comme dire .1. *census* plus .10. *cose* sont égaux à .39. pour prendre des nombres simples. J'avais dit que pour trouver la valeur du *census* et encore de la *cosa* sa racine, il faut que tu réduises toute l'équation à .1. *census*, que tu divises par deux la quantité des *cose* qui vaut .10., cela fait .5. et je dis que cette moitié, tu dois la multiplier par elle-même, ce qui fait .25. Et à cela tu ajoutes le nombre qui se trouve dans l'équation, c'est-à-dire .39., cela fera .64. Et de ce que tu viens de trouver, je dis que tu prends la racine qui vaut .8. Et de cette quantité, ôte la moitié des *cose* qui sont .5., il restera .3. pour la valeur de la *cosa*. Et c'est autant que vaudra la racine du *census*, c'est-à-dire .3. Et tout le *census* vaudra .9. Donc .10. *cose*, je veux dire .30., le *census*, je veux dire .9. que nous joignons ensemble, cela nous amène bien à .39. comme je l'avais dit.

Vient ensuite la preuve géométrique que nous ne reproduirons pas ici *in extenso* : elle est très longue car Pacioli justifie absolument toutes ses affirmations. Nous reproduirons la figure avec quelques commentaires et laissons au lecteur le soin des justifications :



Sur cette figure, on voit un petit carré $afie$ qui représente le *census* c'est-à-dire x^2. Le côté de ce carré vaut donc x, la *cosa* cherchée. On construit alors les rectangles $fdbi$ et $beig$ dont un des côtés vaut x et l'autre la moitié du coefficient de x, c'est-à-dire 5. L'aire de chacun de ces rectangles vaut donc $5x$. L'aire du **gnomon** $beafdhigb$ vaut ainsi

$$x^2 + 5x + 5x = x^2 + 10x = 39$$

Si on complète ce gnomon par le carré $gihc$ de côté 5 et donc d'aire 25, on obtient un grand carré $abcd$ d'aire $39 + 25 = 64$. Le côté de ce grand carré vaut 8 et l'inconnue recherchée, par exemple le côté af égale $8 - 5$ c'est-à-dire 3.

Bibliographie

[1] Muhammad ibn Mūsā AL-H̱ŪARIZMĪ, *trad. latine des douzième-treizième siècles*, Manuscrit de la Bibliothèque de l'Université de Cambridge (Ms. Ii.vi.5).

[2] ARCHIMÈDE, *L'Arénaire*, Les Belles Lettres (Budé), Paris, 1971.

[3] Michel BALLIEU, *Le liber abbaci de Léonard de Pise : ce qu'on y trouve effectivement . . .*, Acad. Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belg., Comité National de Logique, d'Histoire et de Philosophie des Sciences, Colloque national (15-16/10/1992), Éd. R. Halleux & A.-C. Bernès, Brux., 1993.

[4] Michel BALLIEU et Jean-Michel DELIRE, *Approche des notions de nombres rationnels et irrationnels à partir de textes grecs et latins*, Actes de la première université d'été européenne (Montpellier 19-23 juillet 1993), IREM de Montpellier, p. 460-480.

[5] J. L. BERGGREN, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer Verlag, 1986.

[6] Baldassarre BONCOMPAGNI, *Scritti di Leonardo Pisano* (Vol. I : Liber Abbaci), Roma, 1857.

[7] Carl B. BOYER, *A History of Mathematics*, J. Wiley & sons, 1968.

[8] Sylvia COUCHOUD, *Mathématiques égyptiennes (recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique)*, Éd. Le Léopard d'Or, 1993.

[9] John N. CROSSLEY and Alan S. HENRY, *Thus Spake al-Khwārizmī : A Translation of the Text of Cambridge University Library Ms. Ii.vi.5*, Historia Mathematica 17 (1990), p. 103-131.

[10] Jean-Michel DELIRE, *L'expression des grands nombres dans l'Arénaire d'Archimède*, Mémoires et Publications de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut, Vol. 96, Mons (Maison Losseau), 1992.

[11] *Principles of Hindu Reckoning*, A translation with introduction and notes by Martin LEVEY and Marwin PETRUCK of the *Kitāb fī uṣūl ḥisāb al-hind*, The University of Wisconsin Press, Madison and Milwaukee, 1965.

[12] Leonardo FIBONACCI, *liber abbaci*, manuscrit I72 SUP, Biblioteca Ambrosiana, Milano.

[13] Leonardo FIBONACCI, *liber abbaci*, manuscrit Conversi Soppressi C.1. n° 2616 (Codice Magliabechiano, Badia Fiorentina), Biblioteca Nazionale, Firenze.

[14] Leonardo FIBONACCI, *liber abbaci*, Codici Gaddiani Reliqui n° XXXVI, Biblioteca Laurenziana, Firenze.

[15] Leonardo FIBONACCI, *liber abbaci*, Codice Riccardiano n° 783, Biblioteca Riccardiana, Firenze.

[16] Richard J. GILLINGS, *Mathematics in the time of the Pharaohs*, Dover Publ., Inc., New York, 1982.

[17] Bernard LEWIS, *The Arabs in History*, Oxford University Press, 1993.

[18] Heinz LÜNEBURG, *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*, B.I. Wissenschaftsverlag, 1993.

[19] Norreddine MAHAMMED, *Sur la résolution des équations algébriques*, IREM de Lille, novembre 1995.

[20] O. NEUGEBAUER, *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover Publ., Inc., New York, 1969.

[21] Luca PACIOLI, *Summa de Arithmetica*, édition fac simile du cinqcentième anniversaire, Roma, 1994.

[22] Gay ROBINS & Charles SHUTE, *The Rhind Mathematical Papyrus (an ancient Egyptian text)*, British Museum Publ., London, 1987.

[23] Adolf P. YOUSCHKEVITCH, *Les mathématiques arabes* (VIII^{e} – XV^{e} siècles), Éd. Vrin, Paris, 1976.

[24] *Le Saint Coran*, Presses du Complexe du roi Fahd, an 1410 de l'Hégire.

Adresse de l'auteur :
Michel BALLIEU
Rue A. Moitroux 22
7100 La LouviÀre

Optimisation dès les premières années du secondaire

C. Villers,

Le texte qui suit est basé sur le contenu d'une "Foire aux idées" présentée lors du Congrès 1996 de la SBPMef, à Dinant.

1. Introduction

Une des missions du Professeur de Mathématique consiste, sans conteste, à confronter ses élèves aux divers aspects des mathématiques.

Car c'est bien là une des richesses de ce cours que de permettre d'exhiber de multiples facettes, tout aussi importantes les unes que les autres, tant dans le domaine de l'information (la matière) proprement dite que de celui de la formation (le comportement).

Citons-en, à titre d'exemples, quelques unes parmi les plus connues :

la pratique d'une certaine rigueur,
la nécessité d'une liberté de la pensée,
la faculté d'adaptation devant les situations du moment,
la capacité à prendre des initiatives,
la pratique de l'autonomie,
...

bref tout ce qui concourt à l'acquisition d'un savoir aussi bien que d'un savoir-faire.

Cependant force est bien de constater qu'un des aspects, particulièrement séduisant, de ce cours, qu'est la recherche d'une certaine optimisation, n'est pratiquement pas abordé donc nécessairement peu développé dans les premières années de notre enseignement secondaire. C'est probablement dû à l'absence de références le concernant dans les programmes de ces classes, et cela depuis très longtemps d'ailleurs. Sauf erreur de ma part, il faut attendre les textes des programmes de cinquième année pour voir apparaître le terme "optimisation". C'est peut-être dommage de retarder à un tel point l'introduction de cette notion qui, j'en suis persuadé par l'expérience, me semble abordable plus tôt.

Il faut constater, par ailleurs, que ce souci de recherche d'une solution optimale à un problème figurait dans une brochure publiée en 1980 et intitulée “Commentaires du programme de mathématique pour les trois cycles”, dans le cadre de la réforme pédagogique de l'*Enseignement primaire.* Voici d'ailleurs quelques énoncés qui étaient proposés à la réflexion des maîtres auxquels s'adressait cet ouvrage.

P1 *Un industriel présente ses biscuits dans des boîtes en forme de prisme à base carrée (côté de la base : 8 cm ; hauteur : 10 cm).*
Pour l'expédition dans les magasins, il a l'intention d'utiliser des caisses en carton comptant de 30 à 38 boîtes.
Comment ranger ces boîtes ?
Quelle est la solution exigeant le moins de carton ?

La solution proposée pour ce problème traite de la notion de diviseur et de multiple mais est uniquement de type numérique. Elle se borne à utiliser des nombres naturels ce qui oblige déjà cependant à envisager de nombreuses possibilités.

P2 *Quelles dimensions (rayon et hauteur) peuvent avoir des boîtes de conserve cylindriques d'un demi-litre de volume ?*
Exigent-elles toutes pour leur fabrication la même quantité de tôle ?
Si non, pourriez-vous trouver le couple le plus économique, c'est-à-dire le rayon et la hauteur correspondants à la plus petite surface de tôle ?

Ici, la solution, de type littéral, permet la manipulation de formules. Elle examine les possibilités à partir de valeurs naturelles pour le rayon mais accepte les valeurs rationnelles (VAD à 10^{-2} cm près) pour les hauteurs. Un diagramme pour les couples (rayon, aire) est ébauché puis affiné en utilisant, pour le rayon, une graduation en mm.

P3 *Aux quatre coins d'une feuille de papier carrée de 30 cm de côté, on découpe une encoche carrée de 1 cm de côté.*
On relève verticalement les quatre bords de manière à obtenir une cuvette en forme de prisme droit à base carrée de 28 cm de côté et de 1 cm de hauteur.
On répète l'opération en agrandissant chaque fois l'encoche de 1 cm.
A quelle grandeur d'encoche correspond la “cuvette” ayant la plus grande capacité ?

Ici, à nouveau, une recherche purement numérique est proposée. La solution s'intéresse aussi au rapport entre la longueur du carré initial et celle de l'encoche correspondant à la capacité maximale.

Alors, une question se pose. Pourquoi un tel hiatus dans le “déroulement” du contenu du cursus scolaire s’est-il installé ? Est-ce par oubli ou par tiédeur ?

2. Proposition

Je défends l’idée qu’il est possible de traiter de problèmes d’optimisation dès les premières années de l’enseignement secondaire.

Cela présente de multiples avantages.

Entre autres, la révélation de cette facette spéculative des mathématiques rend ces dernières un peu plus proches de notre comportement habituel. Elle permet de créer ainsi de l’intérêt vis-à-vis de ce cours injustement décrié surtout s’il se cantonne dans une structure répétitive donc peu exaltante (exposé d’une notion, liste de lois à mémoriser, applications systématiques à difficultés soit-disant progressives). De la motivation peut également très souvent être induite. En outre, de très nombreux points des programmes y trouvent un champ d’application, se trouvent illustrés, acquièrent du sens et de la “saveur” et peuvent parfois même trouver une justification à leur introduction.

Adresse

Je demande donc aux responsables et collaborateurs à la rédaction des programmes, d’envisager de prévoir formellement l’introduction de ce genre de préoccupation, dans les textes soumis aux maîtres qui enseignent dans les premières années de l’enseignement secondaire.

3. Illustrations du propos

Voici donc quelques exemples qui illustrent le propos.

3-1 *André et Bernadette doivent se rendre dans un lieu distant de 10 km afin d’y disputer un match de tennis en double mixte. Malheureusement leur voiture est en panne et ils ne disposent que d’un seul vélo.*
Ils souhaitent pouvoir commencer la rencontre le plus tôt possible.
Comment vont-ils s’organiser sachant que le vélo ne peut porter qu’une seule

personne à la fois et que les vitesses de déplacement sont de 4km/h pour les piétons et 20 km/h pour les cyclistes.

Certes, l'un des deux personnages de cette histoire peut effectuer tout le trajet en vélo, ce qui lui prendra 1/2h et attendre son coéquipier qui mettra 2h1/2 pour effectuer le trajet à pieds.

Une autre façon de procéder est que l'utilisateur du vélo abandonne celui-ci sur le trajet et achève son parcours à pieds alors que l'autre personnage, parti à pieds, reprend le vélo au passage pour terminer son déplacement.

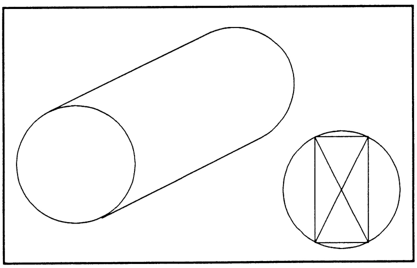
L'idéal, en terme de gain de temps, est que les deux équipiers arrivent en même temps à destination. En quel point d du trajet faut-il, à cet effet, abandonner le vélo ?

Je vous laisse le soin de terminer cette recherche. (La réponse obtenue correspond-elle à l'idée intuitive que vous en aviez ?)

3-2 *A la scierie, on souhaite fabriquer une poutre ayant la forme d'un parallélépipède rectangle dont le volume soit le plus grand possible, dans un tronc ayant la forme d'un cylindre de longueur L et dont le diamètre de base est d.*

Des croquis illustrent la situation.

Voilà déjà qu'apparaît un problème connexe et qui peut faire l'objet d'une recherche.
Comment inscrire un rectangle dans un cercle ?



La base du parallélépipède doit être un rectangle inscrit dans un disque de diamètre d. Si x et y (variables positives) représentent les dimensions de ce rectangle alors $V = xyL$ (L est une constante) et V est maximum quand xy est maximum.

Quelle relation existe-t-il entre x et y ?

On sait que $x^2 + y^2 = d^2$. Et ensuite ?

On souhaite voir apparaître xy, alors on "pense" au double produit $2xy$. A ce moment la géométrie cède la place à l'algèbre. D'où :

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = d^2.$$

En groupant des termes :

$$(x^2 + y^2 + 2xy) - 2xy = d^2 \qquad (*)$$

ou

$$(x^2 + y^2 - 2xy) + 2xy = d^2 \qquad (**)$$

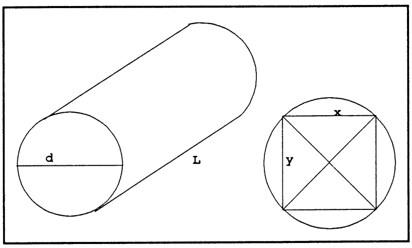
$(*)$ $(x^2 + y^2 + 2xy) - 2xy = d^2$ devient $(x + y)^2 - 2xy = d^2$, donc $2xy = (x + y)^2 - d^2$.

Il faut alors interpréter cette dernière égalité. Elle nous "dit" que xy (positif) sera minimum (donc nul) si $x+y = d$. Cela implique que le triangle rectangle considéré est plat et, de toute façon, cette éventualité ne nous intéresse pas.

$(**)$ $(x^2 + y^2 - 2xy) + 2xy = d^2$ devient $(x - y)^2 + 2xy = d^2$ donc $2xy = d^2 - (x - y)^2$.

Cette égalité nous intéresse beaucoup plus car elle nous dit que xy est *maximum* si $x - y = 0$ donc si $x = y$. *La base de la poutre est alors un carré.*

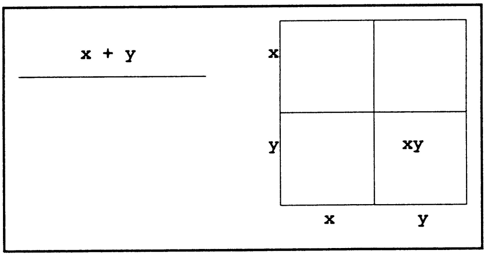
Voila encore un problème connexe : *Comment inscrire un carré dans un cercle donné ?*



Il est alors possible de saisir l'occasion de généraliser la notion. Par exemple, si x et y sont deux réels positifs,alors $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ et $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Donc $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$.

Cette égalité nous montre que pour $x+y$ donné, xy est maximum quand $x = y$ et xy est le quart de $(x + y)^2$.

ce qui est illustré par la figure ci-contre :



En résumé :

x et y étant des réels positifs, si $x + y = k$, alors xy est maximum pour $x = y$ (et $xy = k^2/4$)

De la même façon, on a :

$$(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2$$

qui montre que

x et y étant des réels positifs, si $xy = k$, alors $x + y$ est minimum pour $x = y$ (et $x + y = 2\sqrt{k}$)

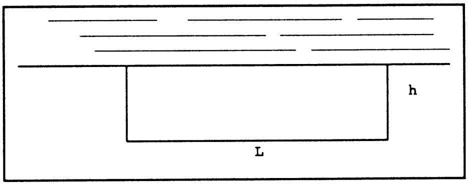
3.1. Addendum

Dans “Les mathématiques, de la maternelle jusqu’à 18 ans” (CREM 1996), au point intitulé “Analyse aux deux premiers degrés du secondaire” (p.276), on trouve l’exemple suivant :

On veut à l’aide d’un fil de clôture de 40m de long, délimiter un pré rectangulaire adossé à une rivière. Quelles seront les dimensions du rectangle si l’on souhaite que l’aire du pré soit la plus grande possible ?

Les auteurs proposent
$2h + L = 40$
d’où $L = 40 - 2h$
et $S = hL = h(40 - 2h) = -2h^2 + 40h$

Cela est alors suivi d'une étude par approximation et/ou par le tracé d'une parabole.



On déduit que S est maximum quand $h = 10$, donc $L = 20$ et alors $S = 200$ (avec les unités correspondantes).

Il est cependant possible de procéder comme préconisé plus avant, ce qui donne l'occasion de renconter de multiples points des programmes.

$$S = -2h^2 + 40h = -2(h^2 - 20h).$$

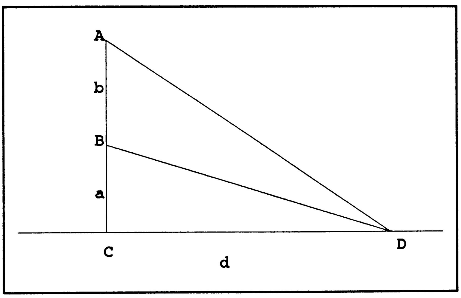
D'abord, S sera maximum quand $h^2 - 20h$ sera ... minimum (intéressant !!!!)

Or $h^2 - 20h = h^2 - 20h + 100 - 100$ ("art" de compléter un carré de binôme) $= -100 + (h - 10)^2$.

Cette expression *montre* (en pratiquant de l'analyse !!!) que le minimum de $h^2 - 20h$ est atteint lorsque $h - 10 = 0$, donc quand $h = 10$.

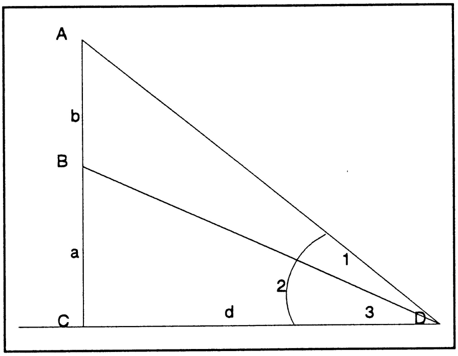
3-3 *Une statue de hauteur b est placée au sommet d'une colonne de hauteur a. A quelle distance du pied de la colonne doit-on se placer pour voir la statue sous le meilleur angle ? (la statue et la colonne sont considérées comme verticales et le sol comme horizontal).*

Une figure illustre la situation



Soit alors $|CB| = a$, $|BA| = b$, $|CD| = d$ (a et b sont des constantes positives, d est une variable positive).

Classiquement :
Soit $mes(D_1)$ strictement comprise entre $0°$ et $90°$.
On exprime $\text{tg}(D_1) = \text{tg}(D_2 - D_3)$ en fonction de la variable d. On obtient $\text{tg}(D_1) = bd/(d^2 + a(a + b)) = f(d)$ que l'on dérive.
Une étude de $f'(d)$ montre alors que $\text{tg}(D_1)$, donc D_1 est maximum pour $d = \sqrt{a(a + b)}$.



On est ici très éloigné des niveaux de compétence des premières années.

Il est à noter par ailleurs qu'on peut très bien se passer de la dérivation (après le calcul de

$$\text{tg}(D_1) = bd/(d^2 + a(a + b)) = b/(d + (a(a + b))/d).)$$

En effet, la fraction sera maximum quand son dénominateur sera minimum.

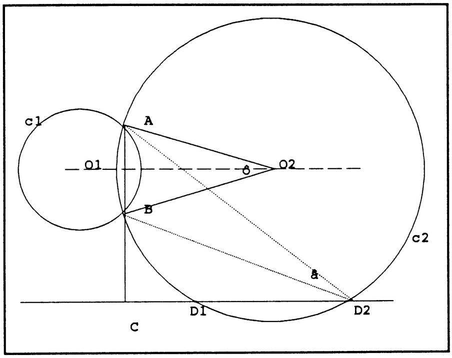
Or celui-ci est la somme des deux termes positifs d et $a(a + b)/d$ dont le produit $a(a + b)$ est constant. Dès lors cette somme est minimum quand ses deux termes sont égaux, donc lorsque $d = a(a+b)/d$, c'est-à-dire quand $d^2 = a(a + b)$, donc quand $d = \sqrt{a(a + b)}$.

Le problème proposé peut cependant être traité à l'aide d'outils plus simples.

Les trois points non alignés A, B et D appartiennent à un (seul) cercle. Seuls A et B sont fixes. Les centres des cercles comprenant A et B appartiennent à $m = Med[AB]$.

Traçons quelques-uns de ces cercles.

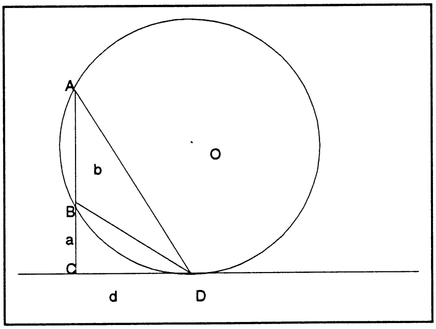
Certains tels c_1 ne conviennent pas car ils ne fournissent pas de points D. D'autres comme c_2 fournissent généreusement deux points D (D_1 et D_2) d'où l'on voit $[AB]$ sous le même angle â = ô/2. â sera maximum quand ô le sera, donc quand O_2 sera "le plus près possible" de $[AB]$.



Cela sera réalisé quand c_i sera tangent à s. Dans cas, on aura $D_1 = D_2 = D$.

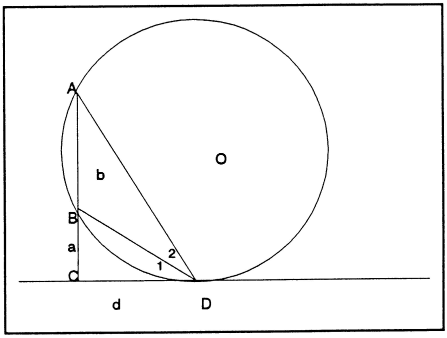
Dans ce cas, que vaut $|DC|$?

On a immédiatement :
$|CD|^2 = |CA| \, . \, |CB|$
(puissance du point C par rapport au cercle)
$= (a + b)a$.
D'où :
$|CD| = d = \sqrt{a(a+b)}$.



Autrement :

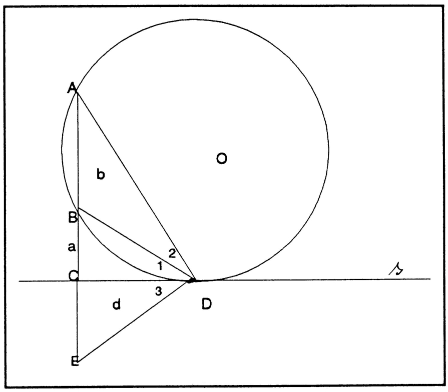
$D_1 = A_1$ (angle tangentiel et angle inscrit interceptant le même arc).
Donc les triangles rectangles BCD et DCA sont semblables.
Dès lors, $a/d = d/(a+b)$
ou $d^2 = a(a+b)$
ou $d = \sqrt{a(a+b)}$



Autrement encore :

Soit E le symétrique de B par rapport à s. Donc $|CE| = a$.

On a,
$D_3 = D_1$ (symétrie).
On a $D_1 = A_1$ (Angles tangentiel et inscrit....).
Donc $D_3 = A_1$.
Or $D_{21} + A_1 = 90°$, donc $D_{21} + D_3 = 90°$.
D_{213} est donc un angle droit.
Le triangle ADE est donc un triangle rectangle et $[DC]$ en est la hauteur relative à l'hypoténuse $[AE]$.
Dès lors,
$|CD|^2 = |CA|.|CE| = (a+b)a$
ou $|CD| = d = \sqrt{a(a+b)}$.



3-4 *Les graphes cartésiens des fonctions* $f : R \to R : x \to f(x) = x^2$ *et* $g : R+ \to R : x \to g(x) = x$ *sont tracés dans le même repère orthonormé d'origine* O. *Ils se coupent en un second point* I.

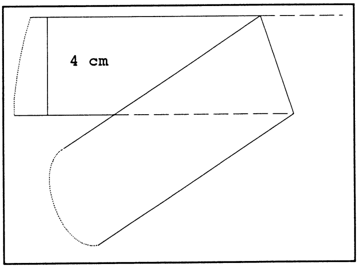
On observe la partie du plan comprise entre les deux graphes pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. *On y inscrit un triangle* OAB *avec* $AB//OY$.

Quelle est la plus grande aire possible d'un tel triangle ?

Je laisse le soin au lecteur de traiter ce problème qui peut paraître compliqué au premier abord mais dont le traitement ne requiert que des notions simples. Bon amusement !

4. Une histoire ... pour conclure

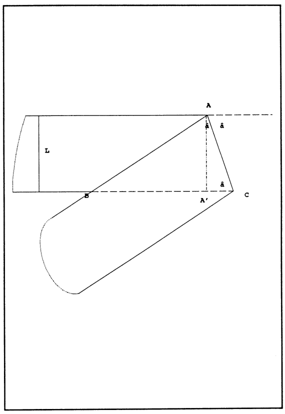
Agnès (13 ans) pliait distraitement un ruban de papier de 4cm de largeur. Tiens, dit-elle : "la forme obtenue là où cela se superpose, est un triangle dont l'aire varie selon l'inclinaison du pli".



"C'est bien" lui rétorqua son frêre Benoît (15 ans). "Mais sais-tu seulement quand cette aire sera minimale et ce qu'elle vaudra alors ?"

Charles (17 ans) intervint. "Vous savez que je suis en math-fortes. Je peux résoudre facilement ce problème et même le généraliser à n'importe quelle largeur L du ruban. Voici ma solution."

Soit â l'angle de pliure. Donc $ACB = A$ (parallèles et sécante) et $BAC =$ â (la pliure crée la symétrie d'axe AC) ; dès lors, l'angle ABC est égal à un angle de $180° - 2$â.
On a : $S = (1/2)\,|AA'|\,.\,|BC|$; or, $|AA'| = L$ et $|BC| = |BA'| + |A'C| = L/\operatorname{tg}(180° - 2\text{â}) + L/\operatorname{tg}(\text{â})$.
Donc,
$S = (1/2)Lx[L/\operatorname{tg}(1180° - 2\text{â}) + L/\operatorname{tg}(\text{â})] = (1/2)L[-L/\operatorname{tg}(2\text{â}) + L/\operatorname{tg}(\text{â})] = L2/[2\operatorname{tg}(\text{â})] - L2/[2\operatorname{tg}(2\text{â})]$ ce qui exprime S en fonction de â.



Je dérive S par rapport à â et j'étudie les variations de S'. J'obtiens alors que S est minimum quand â est un angle de 45°.

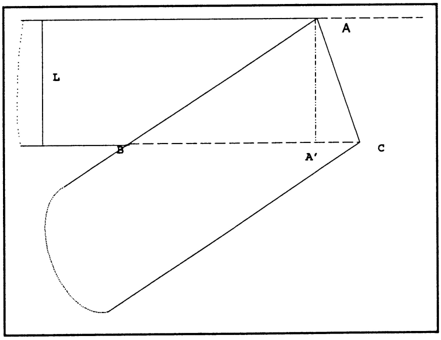
J'en conclus (en occultant le problème posé par tg(90°)) que $S_{\min} = L2/2$. Dans le cas où $L = 4(\text{cm})$, on $S_{\min} = 8(\text{cm}^2)$.

"Il n'est pas nécessaire d'effectuer tant de calculs" reprit Benoît.

"Charles a montré grâce aux parallèles et à une symétrie orthogonale que le triangle ABC est un triangle isocèle de base $[AC]$ donc que $|BC| = |BA|$. D'où,

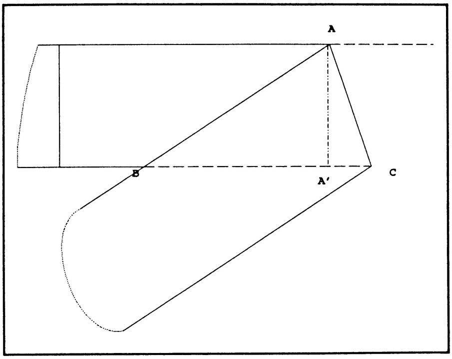
$$\begin{aligned} S &= (1/2)\,|AA'|\,.\,|BC| \\ &= (1/2)\,|AA'|\,.\,|BA| \\ &= (L/2)\,|BA|\,. \end{aligned}$$

S sera minimum quand $|BA|$ le sera, c'est-à-dire quand $[BA]$ sera perpendiculaire à $[BC]$. Et alors, $S = (1/2)LL = L2/2$.
Si $L = 4(\text{cm})$, alors $S_{\min} = 8(\text{cm}^2)$".



"Mais pourquoi donc vous compliquez-vous la vie à un tel point" dit alors Agnès.

"Je sais que $S = (1/2)\,|AA'|\,.\,|BC|$ et que $|AA'|$ vaut 4 cm. Or, $[BC]$ est oblique par rapport au bord AB du ruban. Sa longueur sera minimale quand il sera perpendiculaire à ce bord ou, si vous préférez, quand ce bord lui sera perpendiculaire. On obtiendra donc $S_{\min}$ quand AB sera perpendiculaire à BC.
Dans ce cas, $S_{\min}$ vaudra (4 cm $\times$ 4 cm)/2 soit 8 cm^2.



Fin de l'histoire !

Adresse de l'auteur :
Claude VILLERS
Rue Piérard 29
7022 Hyon

Bébés évacués avec l'eau du bain

R. Graas,

... selon ce que fait redouter certain proverbe anglais ! Les remous de la mathématique (dite) moderne s'apaisent. Les échos du fameux "A bas EUCLIDE !" deviennent imperceptibles.

Dans les nuages qui se dissipent, on peut mieux voir telles disparitions à coup sûr déplorables, bien que pas toutes au même degré.

Si la géométrie classique reprend vigueur (hardiment dans les olympiades mathématiques qui se multiplient et croissent – même si le "KANGOUROU" français vient de faire naufrage ([1]) –, on n'en peut dire autant de l'arithmétique par exemple dont quelques chapitres d'utilité fréquente et guère encombrants partent quasi invisibles – au grand dam de certains calculs – : p.g.c.d., p.p.c.m., nombres premiers, proportions. En Algèbre, les équations en nombres entiers, les fractions continues (non seulement, elles offrent un bel exemple de convergence gauche droite, mais elles reviennent à l'ordre du jour dans les calculs d'approximation), l'algèbre financière ("le martyre de la progression géométrique", disait le Professeur BALLIEU) qui rendrait tant de services aux futurs emprunteurs ([2]).

La conique est devenue "enfin laconique" ainsi que s'exprimait PAPY. Les plumes qu'elle a laissées dans ce combat ne devraient-elles pas être revisitées ? Ne disons rien de la Trigonométrie sphérique : là EULER et LHUILLIER sont bien morts, mais tant d'applications simples et parlantes s'y rencontraient pour la géographie, l'astronomie, la cristallographie. L'Analytique à 3 dimensions permettrait peut-être une réinsertion.

De la Descriptive faut-il avoir regret ? Le D.A.O. ne s'y est-il pas substitué ? On peut avoir la nostalgie des belles – et dépouillées – épures du Professeur PLAINEVAUX (ULB) : puits de mine, rayon lumineux dans un prisme, pointe VICKERS, antenne de T.V., ...).

Contestera-t-on l'opportunité d'une nouvelle vision de la pédagogie mathématique cherchant moins d'abstractions (prématurées souvent) et plus de problèmes réels ? Le genre des potaches actuels ne laisse guère de doutes à ce sujet ([3]).

R. Graas, inspecteur honoraire.

1. B.G.U. n° 70 de l'APMEP.
2. Le dernier numéro de WISKELING consacre un large exposé significatif à ce thème.
3. La même revue donne le ton à cet égard de façon percutante.

Ne jetez pas les opérations sur les ensembles et l'algèbre linéaire avec l'eau du bain

J. Wilmet, *Professeur à l'I.S.I.C. (Hainaut)*

On constate actuellement une tendance à rejeter des programmes tout l'héritage de la réforme des "Mathématiques modernes" des années soixante.

Interrogeons-nous sur les raisons de cette attitude. Peut-être à une certaine époque, a-t-on envisagé le contenu de l'enseignement uniquement en fonction des élèves appelés à devenir des mathématiciens professionnels ?

Doit-on revenir en arrière sans discernement ? Nous ne le pensons pas. En effet, nous allons montrer que des pans de matière, apparus il y a une trentaine d'années, constituent des bases mathématiques essentielles dans l'organisation de notre vie en société.

Deux exemples illustreront ces propos :

– les opérations sur les ensembles et la fiabilité des processus industriels,

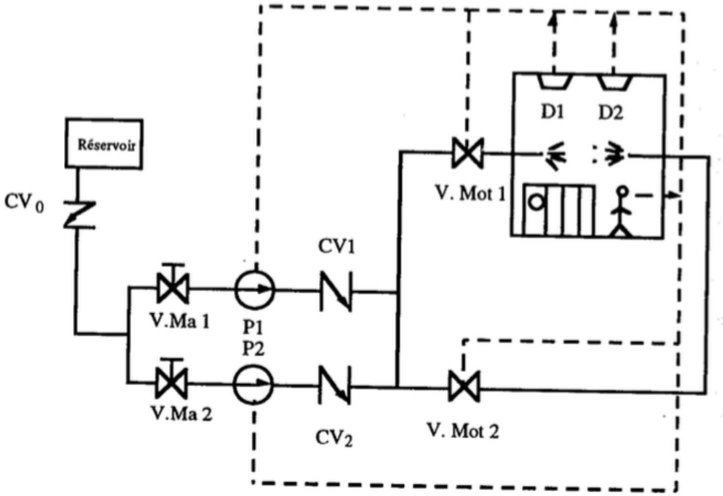
– l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, calcul matriciel, ...) et les télécommunications.

(Il va de soi que ces deux exemples sont loin de constituer une liste exhaustive.)

1. Opérations sur les Ensembles. Fiabilité industrielle

1.1. Le problème

Considérons le système de détection et d'extinction d'incendie représenté ci-dessous :



Légende

CV : Clapet-vanne anti-retour,	P : Pompe à moteur,
V. Ma : Vanne manuelle,	V. Mot : Vanne motorisée,
D : Détecteur de feu,	

On suppose que :

— les détecteurs d'incendie D1 et D2 sont redondants, c'est-à-dire qu'ils surveillent tout le local,
— l'opérateur peut également initier l'alarme d'incendie,
— les pompes P1 et P2 ont chacune une capacité de 100 %,
— les deux voies d'aspersion (via V. Mot 1 et V. Mot 2) ont chacune une capacité de 100 %,
— il n'y a pas suffisamment de temps pour manoeuvrer des vannes manuelles qui doivent être normalement ouvertes,
— les vannes motorisées sont normalement fermées.

On demande d'étudier les défaillances de ce système pouvant amener l'incident majeur :

"Il n'y a pas aspersion en cas de feu réel."

Ensuite, on donnera les probabilités de défaillance des différents composants et on demandera de calculer la *fiabilité* du système soit :

$$1 - Prob \quad \text{(incident majeur)}.$$

1.2. Rappels

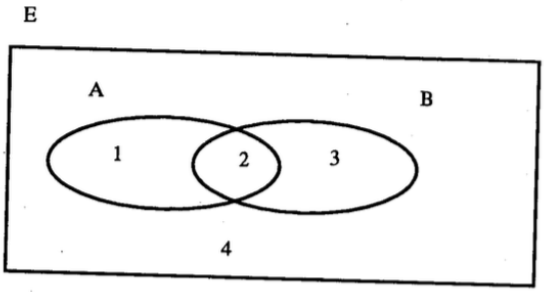
Si on veut parler de probabilités relatives à une situation, on doit d'abord considérer l'ensemble des événements pouvant se produire, soit $\mathcal{A}$.

Ainsi, au jeu de dé

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ \{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\} \\ \{1,2\},\{1,3\},\ldots,\{1,6\},\{2,3\},\ldots,\{5,6\} \\ \ldots \\ \{1,2,3,4,5\},\ldots,\{2,3,4,5,6\} \\ E = \{1,2,3,4,5,6\} \end{array} \right\}$$

et $\sharp\mathcal{A} = 64$.

Il est commode de représenter $\mathcal{A}$ comme ensemble de parties d'un référentiel E.



On définit alors les opérations :

1. **Union** (*ou somme logique*) – conjonction : ou non exclusif
   Notation $A \cup B$ situations : $1, 2, 3$
2. **Intersection** (*ou produit logique*) – conjonction : et
   Notation $A \cap B$ situation : 2

3. **Complément** (*ou négation logique*) - conjonction : non
Notation : $\bar{A}$ situations : $3, 4$
$\bar{B}$ situations : $1, 4$.

On se rappelle les propriétés suivantes :

Associativité	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotence	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Absorption	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
Règles de Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

En utilisant ces propriétés, il est parfois possible de simplifier des expressions contenant un grand nombre d'opérations sur les parties de E. Ainsi, par exemple,

$$\begin{aligned} &(A \cup B \cup C) \cap (C \cup (A \cap B)) \\ &\quad = ((A \cup B \cup C) \cap C) \cup ((A \cup B \cup C) \cap (A \cap B)) \\ &\quad = C \cup (A \cap B). \end{aligned}$$

1.3. Arbre de défaillances

Désignons par T l'incident majeur :

"il n'y a pas aspersion en cas de feu réel."

Nous prendrons en considération les possibilités de défaillance suivantes, appelées *événements de base* :

R	: réservoir vide,
C_j	: le clapet-vanne j ne s'ouvre pas,
F_j	: le clapet-vanne j ne se ferme pas $(j = 0, 1, 2)$,
A_i	: la vanne manuelle i est fermée,
P_i	: la pompe i ne fonctionne pas,
B_i	: la vanne motorisée i ne s'ouvre pas,
D_i	: le détecteur i d'incendie est défaillant $(i = 1, 2)$,
S	: en cas de feu, le surveillant ne donne pas l'alarme.

Les hypothèses énoncées dans l'exposé du problème permettent alors d'écrire l'expression de l'incident majeur T en fonction des événements de base ; cette expression porte le nom d'*Arbre de défaillances*.

$$\begin{aligned} T = {} & R \cup C_0 \\ & \cup \; ((A_1 \cup P_1 \cup C_1) \cap (A_2 \cup P_2 \cup C_2)) \\ & \qquad \text{(les 2 trains de pompe sont déficients)} \\ & \cup \; (B_1 \cap B_2) \text{ (les 2 vannes motorisées restent fermées)} \\ & \cup \; (D_1 \cap D_2 \cap S) \text{ (l'alarme n'est pas donnée)} \\ & \cup \; (P_1 \cap F_1) \cup (P_2 \cap F_2) \text{ (l'eau reflue par un train de pompe).} \end{aligned}$$

1.4. Fiabilité du système

Il existe des tables de probabilité de défaillance des éléments de base. Elles sont calculées à partir de l'expérience industrielle. Dans notre exemple, les probabilités suivantes sont données :

$$\begin{array}{llll} P_r(C_j) & = 10^{-4} & P_r(R) & = 10^{-6} \\ P_r(A_i) & = 3 \times 10^{-4} & P_r(F_j) & = 10^{-3} \\ P_r(B_i) & = 3 \times 10^{-3} & P_r(P_i) & = 3 \times 10^{-3} \\ P_r(S) & = 3 \times 10^{-2} & P_r(D_i) & = 3 \times 10^{-4}. \end{array}$$

En supposant l'indépendance des événements de base, on obtient :

$$P_r(T) \cong 0,000125.$$

La fiabilité de notre système de détection et d'extinction d'incendie est donc approximativement de 7999/8000.

2. Algèbre linéaire et Télécommunications

2.1. Gagnons aux pronostics !

Un match de football se conclut par une des trois situations suivantes :

– les deux équipes n'ont pu se départager ; dans ce cas, nous notons le chiffre 0,

– l'équipe visitée gagne et nous notons le chiffre 1,

– l'équipe visiteuse l'emporte : nous notons le chiffre 2.

Si nous envisageons quatre matchs, il y a donc quatre-vingt-une possibilités de résultats ; l'ensemble des situations possibles :

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \mid x, y, z, t \in \{0, 1, 2\} \right\} \text{ et } \sharp E = 81.$$

Cependant, si nous pronostiquons les neuf colonnes ci-dessous, nous sommes sûrs d'obtenir au moins trois chiffres exacts sur quatre !

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0. \end{array}$$

Cette constatation est bien connue des pronostiqueurs acharnés et de la presse spécialisée. Mais au point de vue mathématique, comment l'expliquer ?

Une première remarque est assez évidente. Si nous appelons "*distance de deux résultats*" le nombre de chiffres différents, nous voyons que les neuf quadruples pronostiqués sont à la distance 3 l'un de l'autre. Par conséquent, chacun de ces quadruples et le centre d'une sphère de rayon 1 constituée de huit satellites. Ainsi, $\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$ admet pour satellites :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1. \end{matrix}$$

En tout, il y a donc neuf classes disjointes de neuf résultats : leur réunion est l'ensemble E tout entier. Tout résultat possible est donc situé à la distance 0 ou 1 d'un des neuf quadruples pronostiqués, ce qui explique la propriété bien connue des joueurs.

Ce qui est remarquable, c'est que la mathématique sous-jacente est tellement riche qu'elle pourra nous fournir des outils de correction d'erreurs.

Ainsi, les calculatrices contiennent un grand nombre de données cablées. Des quantités infimes de métaux lourds, se trouvant dans les matériaux, peuvent occasionner des modifications dans le contenu des mémoires. Il est nécessaire de corriger ces erreurs lors de la mise en service de la machine. Il en est de même pour les messages qui sont échangés entre les différentes unités d'une armée ou les renseignements envoyés par les sondes spatiales.

2.2. Rappels : Corps commutatif (champ)

Espace vectoriel

Considérons l'ensemble $F = \{0, 1, 2\}$ et les deux lois de composition internes T et $*$ définies comme suit :

$$\begin{aligned} xTy &= \text{reste de la division par 3 de } x + y, \\ x * y &= \text{reste de la division par 3 de } xy. \end{aligned}$$

On obtient les tables de composition :

$$\begin{array}{c|ccc} T & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} * & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1. \end{array}$$

On se rappelle que :

- F, T est un groupe commutatif,
- $\{1, 2\}, *$ est un groupe commutatif,
- $*$ est distribuée par T.

En un mot, $F, T, *$ est un champ.

D'autre part, l'ensemble des quadruples d'éléments de F ; soit E (défini en 2.1) est un Espace vectoriel de dimension 4 sur F.

Plus généralement, si p est premier, l'ensemble

$$F_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$$

des restes de la division par p est un champ pour les lois T et $*$ et $(F_p)^n$ est un espace vectoriel de dimension n sur le champ F_p.

2.3. Code linéaire

Considérons un corps commutatif F_p (p premier).

On appelle *Code linéaire* $\mathbb{C}(n, k)$ *de longueur* n *et de dimension* k *sur* F_p un sous-espace-vectoriel de dimension k de $(F_p)^n$.

Les éléments $0, 1, 2, \ldots, p-1$ du corps constituent l'alphabet, les vecteurs de $\mathbb{C}$ sont les mots et n est la longueur du code.

Ainsi, dans l'exemple des pronostics, nous constatons que les neuf quadruples de référence sont un sous-vectoriel de dimension 2 de $(F_3)^4$, c'est-à-dire de E.

2.4. Le Codage

Le codage consistera à transmettre un message ou à stocker une information uniquement en utilisant des mots du code.

Chaque mot possède n coordonnées mais la dimension de $\mathbb{C}$ valant k, il doit exister $(n-k)$ relations linéaires entre ces coordonnées.

Ainsi, dans notre exemple, si x, y, z et t sont les coordonnées d'un mot du code, on doit avoir

$$z = x + y \text{ et } t = 2x + y.$$

Connaissant x et y, le mot du code peut donc être reconstitué entièrement par la multiplication matricielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matrice de CODAGE de genre } (4,2)\,; \\ \text{en général, de genre } (n,k).}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.5. Poids des mots. Distance d'un code. Code c-correction d'erreurs

Le poids d'un mot est le nombre de lettres non nulles figurant dans ce mot. Dans notre exemple, à l'exception du neutre, tous les mots sont donc de poids 3.

La distance d entre deux mots d'un code est le nombre de lettres différentes. La distance d'un code est la distance minimale entre deux mots de ce code.

C'est ici que se manifeste la nécessité de l'utilisation de sous-espaces-vectoriels. En effet, si deux mots m_1 et m_2 appartiennent au sous-vectoriel $\mathbb{C}$, il en est de même de leur différence $m_1 - m_2$. Dès lors, par linéarité,

$$d(m_1, m_2) = d(m_1 - m_2, 0)$$

et la distance du code apparaît donc comme le poinds minimal (non nul) des mots de ce code.

Dans notre exemple, d vaut 3.

Un code est dit c-correcteur d'erreurs s'il est apte à corriger c lettres fautives dans un mot transmis incorrectement.

Il est évident qu'un code c-correcteur doit avoir une distance au moins égale à $2c + 1$.

Considérons un code c-correcteur d'erreurs de longueur n et de dimension k sur F_p. Ce code est dit parfait si toute erreur peut être corrigée, autrement dit si tout vecteur de $(F_p)^n \setminus \mathbb{C}$ peut être remplacé sans ambiguïté par un mot du code $\mathbb{C}$.

Les neuf colonnes pronostiquées en 2.1 constituent un code 1-correcteur d'erreur parfait.

2.6. Le mécanisme de correction d'erreurs

Matrice H de contrôle

Reprenons l'exemple des pronostics. Le code est donc le sous-vectoriel de dimension 2 de $(F_3)^4$ ci-dessous :

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

Si les coordonnées d'un mot sont désignées par x, y, z et t, rappelons que l'on doit avoir

$$z = x + y \text{ et } t = 2x + y.$$

x, y, z, t doivent donc satisfaire aux deux équations linéaires :

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 0t &= 0 \\ 2x + y + 0z + 2t &= 0 \end{aligned}$$

Les mots du code et eux seuls doivent vérifier la relation matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le code est donc le noyau d'une application linéaire. La matrice H de cette application linéaire est appelée *matrice de contrôle* du code.

Correction des erreurs

Pour tout mot m du code, on aura donc

$$\overset{(2,4)}{H} \; \overset{(4,1)}{m} = \overset{(2,1)}{0} \; .$$

En revanche, si un mot μ n'appartient pas au code, et si celui-ci est parfait 1-correcteur d'erreurs, c'est que

$$\mu = m + \gamma,$$

m étant le mot de code le plus proche de μ et γ l'erreur.

On a alors

$$H\mu = Hm + H\gamma = H \overset{(2,1)}{\gamma}.$$

L'erreur étant de poids 1, cette dernière matrice $H\gamma$, appelée "*syndrome du mot erroné* μ doit être *multiple d'une colonne de la matrice de contrôle.* La correction est donc très facilement réalisable dans le cas où l'on emploie un code 1-correcteur d'erreur.

Ainsi, dans notre exemple habituel, supposons que nous transmettions le mot $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Le produit $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

C'est donc la deuxième lettre qui était fautive. L'erreur γ vaut 1. En la retirant à la deuxième lettre du mot erroné, on reconstitue le mot correct soit $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.7. Un peu d'histoire ... et d'actualité

Historiquement, c'est le mathématicien Richard HAMMING qui a inventé le premier code-correcteur d'erreurs. Ce code était de longeur 7 et de dimenstion 4 sur le champ $F_2 = \{0, 1\}$. La matrice de contrôle, de genre $(3, 7)$ est facile à retenir ; ses colonnes sont les expressions binaires des nombres 1 à 7 :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si l'on sait, en outre, que le code est parfait 1-correcteur d'erreur, on en déduit que la syndrome d'un mot erroné indique, en binaire, le numéro de la lettre fautive ! On comprend pourquoi HAMMING passa pour un sorcier au moment de sa découverte.

Plus généralement, un code est dit “de HAMMING” s’il est 1-correcteur et parfait. Ainsi, le code $(15, 11)$ sur F_2, qui sert aux transmissions de l’U.S. ARMY et le code $(13, 10)$ sur F_3.

Citons encore le code de GOLAY $(23, 12)$ sur F_2, 3-correcteur d’erreurs et parfait. C’est lui qui a été utilisé pour transmettre les photos de Jupiter, prises par les premières sondes Voyager.

Pour en savoir plus :

– *Introduction à la théorie des codes.* F. SIGRIST, Université de 2007 Neuchâtel, Suisse ;

– *Minitel, codage de l’information et corps finis.* P. ARNOUX, in “Pour la Science” (mars 1988).

Adresse de l’auteur :

Jean WILMET
rue du Bruliau, 12
7120 PEISSANT

Donner du sens aux expressions et au calcul algébrique

B. Honclaire, *CREM*

Le nouveau programme du premier degré demande explicitement de faire construire par les élèves des expressions algébriques : "... *Elaboration et interprétations d'expressions littérales, ...*".

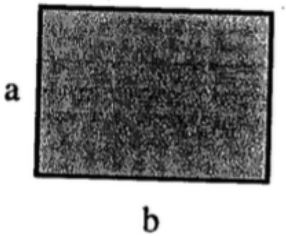
L'élève vient de l'école primaire en ayant utilisé les parenthèses pour exprimer un calcul "qui se fait avant". Il code naturellement des calculs comme $3 + 5 * 7$ par l'expression $3 + (5 * 7)$. Un tel usage des parenthèses le sécurise dans ses calculs.

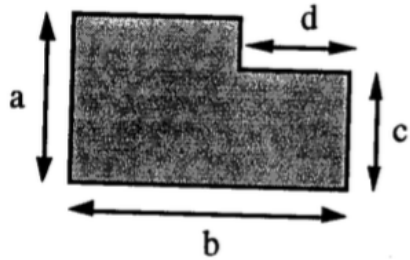
Le passage de ces écritures naturelles aux écritures des mathématiciens et les problèmes que cela pose font l'objet d'un document publié par le CREM et intitulé "**Faire de l'algèbre ou Algébriser au premier degré ?**".

1. Coder et décoder, usage d'organigrammes, de graphes fléchés, ...
2. Opérateurs et composition d'opérateurs
3. Conventions d'écriture pour expressions algébriques
4. Rencontre et résolution d'équations
5. Transformation de formules

A la fin de ce document, sont proposées des situations permettant de construire des expressions algébriques. Au premier degré, *lors de l'apprentissage*, il n'est pas souhaitable que ces situations soient trop complexes et viennent rebuter les élèves dans cette phase essentielle d'initiation. Cela explique le caractère, que l'on peut juger *gratuit*, des exemples proposés ; ils sont de nature numérique ou géométrique. Mais il est évident que, dès que les élèves possèdent un bagage algébrique suffisant, il faut leur permettre de le faire fonctionner dans des situations significatives.

1. Exprimer le périmètre et l'aire des figures suivantes.





2. Exprimer la longueur des arêtes, l'aire totale et le volume d'un parallélipipède rectangle (dimensions : a, b et c puis $a, 2a$ et $3a, \ldots$).

3. On donne un parallélipipède rectangle de dimensions $5, 4$ et 3 (cm). On augmente les dimensions d'une même longueur. Quelle est l'augmentation de la longueur totale des arêtes, de l'aire totale et du volume du nouveau solide par rapport à l'ancien ? Même question si on multiplie les dimensions par un même nombre.

4. En un sommet d'un rectangle, on découpe un carré. Exprimer l'aire de la figure restante et la comparer à l'aire du rectangle de départ. Même question pour le périmètre.

5. Trouver deux nombres dont la somme égale le produit. (Peut-on choisir un des nombres et ensuite calculer l'autre ?) Même question pour deux nombres dont la différence égale le produit.

6. Trouver un rectangle dont l'aire (en cm^2) et le périmètre (en cm) s'expriment par le même nombre. (Peut-on choisir une dimension et ensuite calculer l'autre ?) Même question pour un carré.

7. On dispose de petits cubes en bois. On veut construire, à l'aide de ces petits cubes, de plus grands cubes. On veut que la surface extérieure du grand cube soit peinte. Pour cela, il faudra peindre certaines faces des petits cubes. Combien et de quelle façon si on désire utiliser le moins de peinture possible ?

8. On vous affirme ceci :

La somme de deux nombres naturels consécutifs est un multiple de deux.
La somme de trois nombres naturels consécutifs est un multiple de trois.
La somme de quatre nombres naturels consécutis est un multiple de quatre.
La somme de cinq nombres naturels consécutifs est un multiple de cinq.
...
Qu'en pensez ?

9. Choisir deux nombres. On demande de calculer un troisième nombre comme suit : *ajouter* 1 *au deuxième et diviser ensuite par le premier*. Comment calculer un quatrième nombre ? Continuer pour un cinquième nombre, ...

10. Choisir deux nombres au hasard. Calculer le troisième : somme du premier et du deuxième ; le quatrième : somme du deuxième et du troisième ; le cinquième : somme du troisième et du quatrième ; le sixième : somme du ... Calculer la somme des six nombres. Communiquer uniquement le cinquième nombre au professeur. Retrouvera-t-il la somme ?

Des pistes d'exploitation de ces situations

1. et 2. En fonction du niveau des classes, ces exercices peuvent être précédés d'exemples numériques.

3. La longueur ajoutée aux dimensions peut être $1, 2, \ldots$ avant d'être désignée par une lettre afin de généraliser. L'augmentation de volume $(5 + x)(4 + x)(3 + x) - 60$ peut "rester" sous cette forme et faire l'objet de calculs de valeurs numériques ; dans une classe de troisième, il est évident qu'on pourra la transformer.

4. L'invariance du périmètre, dans des limites à déterminer, peut être découverte par calcul sur des valeurs numériques ou littérales, mais aussi géométriquement. L'aire est l'occasion de confronter les élèves avec des calculs de valeurs numériques d'expressions telles que $ab - x^2$.

5. et 6. Les recherches sur des exemples numériques débouchent sur des équations telles que $5x = 5 + x$ ou $5x = 2(5 + x)$.

La généralisation permet de rencontrer des fractions algébriques du genre

$$b = \frac{a}{a-1} \text{ ou } b = \frac{2a}{a-2}.$$

Un autre énoncé permet de rencontrer une situation analogue : choisir deux nombres a et b. Calculer $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{a}{a-b}$ et comparer $x + y$ et xy. Ici également, les calculs numériques peuvent précéder la justification algébrique.

7. Cette situation est l'occasion d'aborder des constructions et des représentations de solides et d'arriver par un problème à l'analyse d'un cube : nombre de sommets, d'arêtes, de faces.

La description des petits cubes à peindre est l'occasion de parler de faces parallèles, de faces ayant une arête commune, de faces ayant un sommet commun, ...

Les résultats obtenus pour les premiers cubes construits peuvent se mettre en tableau :

Grand cube construit	Petits cubes utilisés			
	3 faces peintes	2 faces peintes	1 face peinte	non peints
2^3 ou 8	8	–	–	–
3^3 ou 27	8	12	6	1
4^3 ou 64	8	24	24	8
...				

La généralisation peut passer par une description,

– il faut toujours 8 cubes identiques (trois faces peintes) pour les sommets,

– il faut des cubes aves deux faces peintes pour faire les arêtes (sauf les deux sommets) et il y a douze arêtes,

– il faut des cubes avec une face peinte pour terminer les faces et il y a six faces,

– il faut des cubes non peints pour faire le petit cube intérieur, et puis se coder comme ci-après.

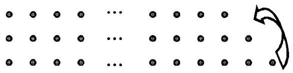
n^3	8	$12(n-2)$	$6(n-2)^2$	$(n-2)^3$

La démonstration par calcul algébrique que $8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3$ est égal à n^3 est du niveau d'une troisième année.

8. Exhiber un contre-exemple pour prouver que la première et la troisième affirmations sont fausses est un méthode qui va contraster avec la

démonstration des deux autres affirmations. En effet, tous les exemples produits confirment les propositions, mais le rôle d'une représentation géométrique ou d'une expression algébrique est de donner la certitude que tous les cas ont été examinés.

Par exemple :



$$\begin{array}{l} n \\ n+1 \\ \underline{n+2} \\ 3\,n+3 \text{ ou } 3(n+1) \end{array}$$

Pour un développement plus complet de cette situation, on peut consulter un document du CREM : *L'arithmétique du petit Nicolas* (par N. Rouche).

9. Les exemples numériques feront apparaître l'usage des écritures fractionnaires et décimales : leurs avantages et inconvénients. L'utilisation d'une calculatrice ou d'un tableur est appropriée à cette situation.

La démonstration que la suite est cyclique est du niveau d'une bonne deuxième ou d'une troisième année. Pour plus d'informatoins, on peut consulter Mathématique et Pédagogie n° 40 janv. fév. 1983, *Des modèles de "Cycle de cinq nombres"*.

10. Situation étonnante, dans laquelle le "prof magicien" fait découvrir son secret. La généralisation est simple et au niveau des exigences pour une classe de première.

Le document complet est bien entendu disponible au CREM ; vous pouvez également le consulter et/ou le télécharger par INTERNET sur le site http ://www.profor.be, à la rubrique "documents", partie "mathématiques".

Le CREM constitue actuellement une banque de situations qui ne demande qu'à grandir. Toute contribution est la bienvenue !

AVIS de RECHERCHE :	situations dans tous les domaines (technique, économique, scientifique, vie courante, etc.), pour les deux premiers degrés (actuellement !)

RECOMPENSE :	la banque appartiendra à tous les épargnants

Adresse de l'auteur :

Bernard HONCLAIRE
CREM asbl
5, rue Emile Vandervelde
1400 Nivelles
067/212527

Dans nos classes

Y. Noël,

Toute reproduction de cette page pour usage en classe est fortement encouragée.

A.

$1+2=3$
$2+3=5$
$3+4=7$
$4+5=9$

$42+43=\cdots$

B.

$1+2+3=\cdots$
$2+3+4=\cdots$
$3+4+5=\cdots$
$4+5+6=\cdots$

$42+43+44=\cdots$

C.

$1+2+3+4=\cdots$
$2+3+4+5=\cdots$
$3+4+5+6=\cdots$

$42+43+44+45=\cdots$

D.

$1+2+3+4+5=\cdots$
$2+3+4+5+6=\cdots$

$42+43+44+45+46=\cdots$

E.

$1+2+3+4+5+6=\cdots$
$2+3+4+5+6+7=\cdots$

$42+43+44+45+46+47=\cdots$

F.

$1+2+3+4+5+6+7=\cdots$
$2+3+4+5+6+7+8=\cdots$

$21+22+23+24+25+26+27=\cdots$

G.

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=\cdots$
$301+302+303+304+305+306+307+308+309+310+311=\cdots$

Que remarques-tu ?

1. Arithmétique et apprentissage de la démonstration

A condition de laisser la parole aux élèves, je pense que la page de calcul qui précède peut conduire ceux-ci à formuler des conjectures, à avoir besoin d'un minimum de vocabulaire de base pour s'exprimer oralement (nombre pair, nombres consécutifs, ...), à avoir besoin d'un minimum d'expressions pratiques pour s'exprimer par écrit (comment expliciter qu'un naturel est pair, que deux naturels sont consécutifs, ...). La situation permet aussi de démontrer des conjectures, en respectant une progression dans les énoncés comme dans la présentation de la démonstration, selon que les élèves sont plus ou moins jeunes et selon le niveau de rédaction auxquels ils peuvent être amenés.

1.1. A tout niveau

Confrontés à la page de calcul qui précède, il est probable que les élèves parleront de

— somme de plusieurs nombres (naturels)
— nombres qui se suivent
— nombres pairs, nombres impairs
— multiples de 3, multiples de 5
— ...

Selon que les élèves continueront à calculer les sommes comme si chaque calcul était donné seul ou qu'ils s'organiseront peu à peu pour obtenir les nouveaux résultats ≪ économiquement ≫ à partir d'autres sommes déjà effectuées, ils disposeront d'éléments plus ou moins forts pour établir des conjectures, mais surtout pour élaborer des justifications plus ou moins claires de ces conjectures. Il est donc essentiel de laisser calculer librement, en observant si possible d'éventuelles stratégies, mais sans les influencer.

Le vocabulaire peut être un peu plus codé, les stratégies peuvent évoluer plus rapidement et des notations plus élaborées peuvent être disponibles si les élèves sont plus agés (au deuxième degré par exemple) mais il faut que la matière soit créée par la classe puisqu'on y puisera des démonstrations sans avoir recours au parachutage magistral.

1.2. Au premier degré

Parmi des conjectures possibles,
- Toutes les sommes obtenues en A sont impaires.
- Toutes les sommes obtenues en E sont impaires.
- En B, D et F, les sommes sont alternativement paires et impaires.
- Pour obtenir les sommes en B, on peut utiliser les résultats donnés en A et calculer $3+3$, $5+4$, $7+5$, ...
- Pour calculer la deuxième ligne en G, on peut ajouter 11×300 à la somme obtenue à la première ligne.
- Pour chaque lettre (en D par exemple), toutes les sommes s'obtiennent facilement à partir des sommes obtenues sous la lettre précédente (ici C).
- Pour chaque lettre, après avoir calculé la somme de la première ligne, on ajoute toujours le même nombre pour obtenir la somme suivante (3 dans la colonne B, 4 dans la colonne D, ...)
- Toutes les sommes en B sont multiples de 3.
- Toutes les sommes en D sont multiples de 5
- ...

Bien d'autres possibilités existent et nous serons heureux d'alimenter cette rubrique grâce à l'imagination de vos élèves. Nous ne nous sommes pas amusés à proposer des conjectures incorrectes. Elles seront cependant inévitables et pain bénit didactique dans les classes puisqu'elles provoqueront des discussions et motiveront la recherche de justifications et/ou réfutations dans la partie collective du travail.

Nous avons accumulé ci-dessus des conjectures dans le désordre.
- Certaines ressemblent à des énoncés de ≪ théorèmes ≫ :
  La somme de deux naturels consécutifs est toujours un naturel impair
- D'autres sont des ≪ démonstrations ≫ de tels théorèmes : ainsi, en A par exemple, si les élèves ont remarqué la chaîne de résultats

$$3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+2} 9 \xrightarrow{+2} \cdots$$

  c'est-à-dire l'application répétitive de **l'opérateur** $+2$ à partir du nombre **impair** 3, il s'agit bien d'une première démonstration de l'imparité de toutes les sommes de ce groupe de calcul.

De manière analogue, le schéma fléché

$$6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15 \xrightarrow{+3} \cdots$$

justifie que toutes les sommes de trois naturels consécutifs sont multiples de 3.

En C, partant de 10 et ajoutant toujours 4, nous obtenons toujours des nombres pairs, mais aucun n'est multiple de 4.

En D, partant de 15 et appliquant répétitivement l'opérateur +5, toutes les sommes sont multiples de 5.

Peut-être les élèves remarqueront-ils que les sommes obtenues en B sont alternativement multiples de 6 et de 3 ? Cette constatation est évidemment correcte et les élèves risquent d'en amener d'autres encore. Si la situation devient trop touffue, la disposition en colonne des cas B, D et F peut aider à focaliser l'attention sur les **sommes d'un nombre impair de naturels consécutifs** :

— **Toute somme de trois naturels consécutifs est multiple de 3**
— **Toute somme de cinq naturels consécutifs est multiple de 5**
— **Toute somme de sept naturels consécutifs est multiple de 7**

Si les élèves n'y voient pas clair, on s'en rendra compte en leur demandant ce qui se passe en G, s'ils peuvent proposer un autre groupe de calculs intéressants, deviner une propriété et la justifier. Un autre support, utilisant une lettre peut modifier la rédaction d'une démonstration. Prenons par exemple le cas de sommes de 17 naturels consécutifs :
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17 = 153$ est multiple de 17. Les sommes suivantes sont

$$2 + 3 + 4 + \cdots + 18$$

$$3 + 4 + 5 + \cdots + 19$$

Chaque somme vaut 17 de plus que la précédente et apparaît donc dans le schéma

$$153 \xrightarrow{+17} \dots \xrightarrow{+17} \dots \xrightarrow{+17} \dots \xrightarrow{+17} \dots$$

qui donnent successivement des multiples de 17.

En utilisant une lettre, une ≪ somme générale ≫ peut s'écrire

$$(n+1) + (n+2) + (n+3) + \cdots + (n+17)$$

Sachant que $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 17 = 153$ est un multiple de 17, et que

$$(n+1)+(n+2)+\cdots(n+17) = (n+n+\cdots+n)+(1+2+\cdots+17) = (17\times n)+153$$

on peut en déduire que 17 peut être mis en évidence, ce qui amène une écriture générale d'un multiple de 17.

1.3. Au deuxième degré

Les considérations sur les nombres naturels peuvent être étendues aux nombres entiers. C'est dans le cadre des entiers que 0 acquerra son statut de multiple de tous les nombres. L'existence des nombres et de leurs opposés permettra de simplifier des démonstrations. Nous détaillons un peu ces points dans la suite.

La formulation écrite est facilitée par l'usage de lettres, faisant le lien avec la notation algébrique. La rédaction des démonstrations évolue grâce à ces nouveaux moyens. La situation permet aussi une importante évolution dans la structuration logique de certaines conjectures énoncées plus haut :

— Les énoncés séparés donnés pour les sommes de trois naturels consécutifs, de cinq nombres naturels, etc, peuvent être rassemblés et **généralisés** :

— La rédaction d'une démonstration dans les **entiers** permet de ≪ voir ≫ que la condition **suffisante** (le nombre de termes de la somme est impair) est aussi une condition **nécessaire**. Ainsi, une infinité d'implications vues dans un premier temps sont finalement reprises avec leurs réciproques dans une belle équivalence en synthèse finale de l'activité.

1.3.1. Zéro, partition, multiples de ...

— Nous avons rencontré, au paragraphe 1.2, des schémas fléchés du type

$$6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15 \xrightarrow{+3} \cdots$$

Leur extension aux nombres entiers conduit à

$$\cdots \xleftarrow{-3} -6 \xleftarrow{-3} -3 \xleftarrow{-3} 0 \xleftarrow{-3} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} \cdots$$

et 0 prend, dans cette chaîne, son rôle de multiple de 3 à part entière !

— En utilisant l'opérateur ≪ $+3$ ≫ et différentes origines dans $\mathbb{Z}$, trois familles apparaissent : les multiples de 3, les (multiples de 3)+1, les (multiples de 3)+2 ...à moins que ce ne soient les (multiples de 3)-1 ? Les notations $3k$, $3k+1$, $3k+2$ et $3k-1$ pour désigner un élément général des trois familles respectives peuvent s'appuyer sur ce support.

1.3.2. Nombres consécutifs

Une nouvelle fiche de travail peut être proposée pour orienter un peu la suite du travail.

> *Voici quelques nombres entiers consécutifs :*
>
> $$-6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$
>
> *Choisis parmi ceux-ci quelques nombres consécutifs et calcule leur somme. Recommence plusieurs fois.*
> *Y a-t-il des choix qui rendent le calcul plus facile ?*
> *Un défi : donne une suite de mille entiers consécutifs et leur somme.*

Revenons au point G de la feuille de calcul :

$$(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5$$

est une somme de onze entiers qui vaut 0.

Pour calculer

$$301+302+303+304+305+306+307+308+309+310+311$$

comparons les termes des deux sommes :

$$\begin{array}{ccccccccccc} (-5) & (-4) & (-3) & (-2) & (-1) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \\ 301 & 302 & 303 & 304 & 305 & 306 & 307 & 308 & 309 & 310 & 311 \end{array}$$

Chaque terme de la deuxième somme vaut 306 de plus que le terme correspondant de la première. Ainsi la deuxième vaut $0+(11\times 306) = 3366$.

1.3.3. Evolution d'une notation

Comment exprimer une suite de trois nombres consécutifs de manière générale ? Nous pouvons utiliser des notations variées comme :

$$n \qquad n+1 \qquad n+2 \tag{1}$$

$$n+1 \qquad n+2 \qquad n+3 \tag{2}$$

$$n-1 \qquad n \qquad n+1 \tag{3}$$

C'est évidemment la forme (1) qui vient spontanément. Nous avons déjà exploité subrepticement l'intérêt de (2) en fin de première partie pour démontrer que toute somme de dix-sept naturels consécutifs est multiple de 17. Enfin, (3) marque une étape décisive

— pour simplifier encore la démonstration donnée en fin du paragraphe 1.2. En effet, la somme de dix-sept entiers consécutifs peut s'écrire

$$(n-8)+(n-7)+\cdots+(n-1)+n+(n+1)+\cdots+(n+8)=17n$$

— pour percevoir le passage à la réciproque, comme nous l'expliciterons plus loin.

1.3.4. Une implication, une équivalence

Toute somme d'un nombre impair ($2k+1$) d'entiers est multiple de ce nombre.

Si les élèves écrivent

$$a=n+(n+1)+(n+2)+\cdots(n+2k-2)+(n+2k-1)+(n+2k)$$

nous pouvons généraliser une démonstration prévue au premier degré :

$$a=(n+n+n+\cdots+n)+(1+2+3+\cdots+(2k-2)+(2k-1)+2k)$$

Comme ≪ les premières parenthèses ≫ contiennent le nombre $17n$, il suffit de voir si $1+2+3+\cdots+(2k-2)+(2k-1)+2k$ est multiple de 17 pour pouvoir le mettre en évidence et savoir que a est multiple de 17.

La situation motive ainsi le calcul de $1+2+3+\cdots+(2k-2)+(2k-1)+2k$, ...c'est-à-dire le calcul classique de

$$1+2+3+4+\cdots+n$$

Le calcul de a exécuté ci-dessus donne l'occasion de montrer l'intérêt de noter autrement une suite de $2k+1$ entiers consécutifs. En effet, en utilisant la notation (3) ci-dessus, la somme à évaluer est

$$a=(n-k)+(n-k+1)+\cdots+n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k-1)+(n+k)$$

...et a vaut ≪ presque évidemment ? ≫ $(2k+1)\times n$. La somme est donc multiple de $2k+1$.

De plus, dans cette dernière recherche de justification, le jeu des ≪ compensations ≫ entre les termes symétriques de part et d'autre du terme n de la somme fait ≪ sentir ≫ l'importance de disposer d'un nombre **impair** de termes puisque les ≪ compensations ≫ se font symétriquement autour de n.

Si nous avions une somme d'un nombre pair (soit $2k$) de termes, soit

$$t = (n-k)+(n-k+1)+\cdots+(n-1)+n+(n+1)+\cdots+(n+k-2)+(n+k-1)$$

Après compensations, il reste

$$t = (n + n + n + \cdots + n) - k$$

avec $2k$ termes entre les parenthèses. Ainsi, $t = (n \times 2k) - k$ est multiple de k mais pas de $2k$.

Pour qu'une somme de x entiers soit multiple de x, il **faut** donc que x soit **impair**.

Nous avons donc démontré l'équivalence suivante :

La somme de x nombres entiers consécutifs est multiple de x si et seulement si x est impair.

Qui a écrit ?

G. Noël,

Caractères des livres modernes

a) Ils se distinguent par la disposition des matières, l'introduction des nouvelles méthodes.

Plus d'une démonstration est basée sur l'idée du mouvement. Translation, rotation, retournement, déplacement dans son plan d'une figure de forme invariable, composition des déplacements ... tels sont les procédés modernes d'exposition.

b) Notons aussi le soin apporté dans la rédaction des préliminaires, mesure des grandeurs, choix des axiomes, existence du plan. Ces points difficiles ont été remaniés depuis cinquante ans grâce au progrès de la géométrie non euclidienne.

c) Enfin l'introduction des signes + et -, généralise certains résultats.

Indication : L'auteur est un mathématicien belge, auteur de manuels qui ont été très largement utilisés dans notre enseignement secondaire.

L'auteur est V. Herbiet, et le texte est extrait de

"Notes sur l'enseignement de la géométrie, Chap 5, Les livres de géométrie."

Cette série d'articles est parue en 1922 dans la "Revue Belge de Pédagogie",

dont le responsable était le Frère Maximin, directeur de l'Ecole Normale de Carlsbourg.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

$\boxed{\text{Minimum}}$ problème n° 181 de M. et P. n° 109.

Pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, *soit* $f(n) = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + (n-1)^2 + n$. *Déterminer*

$$\min_{n \geqslant 1} \frac{f(n+1)}{f(n)}.$$

Solution de H.-J. SEIFFERT de Berlin

Soit $n \geqslant 5$. Alors

$$\begin{aligned} f(n+1) - 3f(n) &= \sum_{k=1}^{n+1} k^{n-k+2} - 3\sum_{k=1}^{n} k^{n-k+1} \\ &= n + 1 + \sum_{k=1}^{n} (k-3)k^{n-k+1} \\ &= n - 1 - 2^{n-1} + 4^{n-3} + \sum_{k=5}^{n} (k-3)k^{n-k+1} \\ &> 4^{n-3} - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2^{n-5} - 1) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} > 3 \text{ pour tout } n \geqslant 5.$$

Puisque $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 8$, $f(4) = 22$ et $f(5) = 65$, il s'ensuit que le minimum demandé est

$$\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{8}{3} = 2,666...$$

Bonnes solutions de F. GLINEUR de Quiévrain, de J. JANSSEN de Lambermont, de M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre, de B. LOISEAU de Mouscron et de M. PONCHAUX de Lille.

$\boxed{\text{Carrés et suites}}$ problème n° 182 de M. et P. n° 109.

Soit a_n *le nombre de carrés parfaits de la suite* $2, 9, 16, 23, \ldots, 7n+2 \ (n \in \mathbb{N})$.

Trouver a_{1996}.

Solution de M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre

D'une part, considérons la table des carrés modulo 7

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

.

Il suit que les carrés parfaits de la suite sont de la forme

$$3^2 = 9,\ 4^2 = 16,\ (7+3)^2 = 100;\ (7+4)^2 = 121, \ldots, (7k+3)^2,\ (7k+4)^2, \ldots$$

D'autre part,

$$118^2 = 13924 < 7 \times 1996 + 2 = 13974 < 119^2 = 14161.$$

On s'arrêtera donc à

$$115^2 = (7 \times 16 + 3)^2 \text{ et } 116^2 = (7 \times 16 + 4)^2.$$

Pour chaque valeur de k, il y a 2 carrés parfaits dans la suite ; k varie de 0 à 16, donc prend 17 valeurs. D'où la réponse $a_{1996} = 34$.

Bonnes réponses de F. GLINEUR de Quiévrain, J. JANSSEN de Lambermont, J. LIEVENS de Liège, A. PATERNOTTRE de Boussu, M. PONCHAUX de Lille, J. RASSE de Mean, J. RONDOU de Heverlee et J. G. SEGERS de Liège.

$\boxed{\text{Trapèze}}$ problème n° 183 de M. et P. n° 109.

Soit $ABCD$ *un trapèze isocèle avec* $AB//DC$ *et* $|AB| > |DC|$. *Soient* M *et* N *des points appartenant respectivement à* AD *et* BC *et tels que* $MN//AB$. E *est la projection orthogonale de* D *sur* AB, F *est le point d'intersection de* DE *et* BM, G *est le point d'intersection de* BD *et* AF, P *est le point d'intersection de* NG *et* CD.

Démontrer que PA *est perpendiculaire à* CD.

Il y avait une faute de frappe dans l'énoncé. Plusieurs lecteurs s'en sont aperçu et trois d'entre eux m'ont envoyé une solution correcte après avoir rectifié cet énoncé. Il s'agit de J. FINOULST de Diepenbeek, B. LOISEAU de Mouscron et M. PONCHAUX de Lille.

Solution de M. PONCHAUX de Lille.

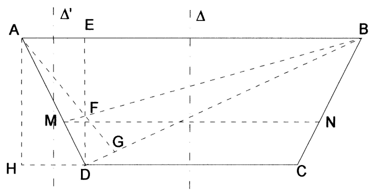
Notons H le projeté orthogonal de A sur la droite CD. Le quadrilatère $AEDH$ est un rectangle. Par conséquent

$$\overline{AE} = \overline{HD}. \tag{1}$$

Le trapèze $ABCD$ (de bases $[AB]$ et $[DC]$) étant isocèle, les droites AD et BC se correspondent dans la symétrie d'axe Δ, médiatrice commune de $[AB]$ et $[CD]$. Les droites AD et EH se correspondent dans la symétrie orthogonale d'axe Δ', médiatrice commune de $[HD]$ et $[AE]$.

Comme Δ et Δ' sont parallèles, les images BC et EH de la droite AD par les symétries précédentes sont parallèles. Le quadrilatère $EHCB$ est donc un parallélogramme et

$$\overline{EB} = \overline{HC}. \tag{2}$$



Le théorème de Thalès appliqué aux droites parallèles AB, MN et DC permet d'écrire

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}}. \tag{3}$$

Par hypothèse, les droites AG, BM et DE sont concourantes en F. Le théorème de Céva appliqué au triangle ABD donne

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} \times \frac{\overline{GB}}{\overline{GD}} \times \frac{\overline{MD}}{\overline{MA}} = -1$$

d'où, en utilisant les relations (1), (2) et (3)

$$\frac{-\overline{HD}}{\overline{HC}} \times \frac{\overline{GB}}{\overline{GD}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} = -1;$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{\overline{GB}}{\overline{GD}} \times \frac{\overline{HD}}{\overline{HC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} = 1.$$

D'après la réciproque du théorème de Ménélaüs appliquée au triangle BDC et aux points G, H, N appartenant respectivement aux droites BD, DC et CB, on peut conclure que les points G, H, N sont alignés. Ainsi, H, point commun aux droites GN et DC, est le point P de l'énoncé et par conséquent, PA est perpendiculaire à CD.

190. Racines en folie

Soit n un naturel non nul et $x \in \mathbb{R}$. On définit $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x+k}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de n l'équation en x, $f_n(x) = x$ admet-elle une (des) solution(s) rationnelle(s) ? réelle(s) ?

Problème proposé par Marc LARDINOIS de Haine-St-Pierre.

191. Triangle inscrit

Soit $MNPQ$ un parallélogramme et ABC un triangle dont les sommets appartiennent aux bords du parallélogramme.

Démontrer que l'aire du triangle ABC est au plus égale à la moitié de l'aire du parallélogramme.

192. Et ainsi de suite ...

On considère la suite $(s) = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$ définie par

$$\begin{cases} s_1 &= 1 \\ s_n &= s_{n-1} + \frac{1}{s_{n-1}} \quad \text{pour} \quad n > 1 \end{cases}.$$

Démontrer que $14 < s_{100} < 18$.

Revue des revues

C. Villers,

Bulletin de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public-France), *n*°406-septembre-octobre 1996.

Dans ce numéro, particulièrement copieux, on trouve :

– L'*Editorial du* Président intitulé "Réfléchir, Echanger, Agir". J.P. Richeton y défend l'idée qu'une association telle que l'APMEP doit être un lieu de réflexion et d'échanges sur la pratique du métier d'enseignant.
Il poursuit en adressant un appel aux bonnes volontés en les encourageant à apporter leur contribution à la vie de l'Association.

– *Réhabiliter le calcul mental* par Daniel Djament.
Dans ce court article, l'auteur montre que le calcul mental est un enjeu essentiel de l'enseignement des mathématiques dès l'Ecole Primaire. Il y met en exergue une quadruple fonction de cette capacité à calculer mentalement :
  · Effectuer les calculs élémentaires de la vie quotidienne ;
  · Apprendre à utiliser une calculatrice de manière performante ;
  · Préparer à la compréhension des règles d'algèbre ;
  · Entraîner à l'approximation.

– *Enseigner la perspective cavalière au Collège* par M. Rousselet.
Nous savons les ambiguïtés et l'imprécision que peuvent revêtir les représentations planes d'un objet de l'espace.
L'auteur rappelle dans son article, ce qu'est la perspective cavalière et en examine les principales propriétés. Il définit ensuite une approche pédagogique possible du dessin en perspective cavalière.

– *Rimes-Raison* par Bernard Lahorque-Paulot.
Ce sont les réponses, rédigées en alexandrins, données par des élèves à un exercice proposé comme devoir à domicile.

– *Le Plaisir de chercher, la Joie de trouver* par François Padilla avec la collaboration de Jean Aymes.
Cet article décrit le plaisir ressenti par professeur et élèves dans la recherche d'une solution à un problème qui excite la curiosité.
Voici cet exercice : Soit un triangle ABC. Soit $A' = S_B(C),\ B' = S_C(A),\ C' = S_A(B)$.
Construire ABC lorsque A', B' et C' sont donnés. 9 solutions sont alors décrites.

– *Factorielles et coefficients binomiaux. Factorisations et congruences* par J. Bouteloup.
Il s'agit d'une étude fouillée sur le sujet annoncé.
– *Cryptographie classique et cryptographie à clé révélée* par Dany-Jack Mercier.
Cet article souhaite préciser les enjeux actuels de la cryptographie. Il évoque quelques systèmes classiques et montre l'apport important de l'arithmétique dans deux systèmes récents.
– *Système balançaire* par Pierre Jullien.
L'auteur y analyse un système de mesure d'une masse utilisant la numérotation de base 3 mais avec les "chiffres" $-1, 0$ et 1.
– *Le coin de mathématitien* par Michel Gosse.
Place dans la rubrique "Technologies nouvelles", cet article présente le logiciel Mathématicien et donne un exemple de ses possibilités en décrivant la représentation d'une surface définie par $z = f(x, y) = \dots$
Celle livraison de la revue de l'APMEP contient en outre les rubriques traditionnelles que sont :
  · Les problèmes de l'APMEP
  · Avis de recherche
  · Nouvelles brèves
  · Matériaux pour une documentation.

Bulletin de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public-France), $n°$407-décembre 1996.

– L'éditorial de cette livraison du bulletin de l'APMEP, débute par *l'Editorial* du Président Jean-Pierre Richeton qui y rappelle combien important est le fait de donner du sens aux mathématqiues que l'on enseigne et donc de veiller à ne pas réduire le travail des élèves à une série de tâches mécaniques trop souvent vides de sens.
– P.L. Hennequin rend hommage au mathématicien Paul Erdös décédé fin septembre.
– La rubrique "Dans nos classes" compte 4 articles.
  · Le premier est destiné aux enseignants de Collèges. Michel Rousselet y traite du sujet "A la recherche du trésor de Rackham Le Rouge" et y montre comment le logiciel (bien connu) Cabri-géomètre peut venir en aide à ceux qui cherchent une solution à un problème de type géométrique. L'auteur conclut qu'un tel logiciel ne dispense pas de toute réflexion ni de toute démonstration.

· Les 3 autres s'adressent plus particulièrement aux professeurs de Lycées.
  - *Maths-Physique - une activité commune* par Suzy Haegel.
    Cet article relate une confrontation entre “Matheux” et “Physiciens” sur des problèmes de terminologie.
  - *La partie cachée de l'iceberg ou l'évaluation scolaire et la calculatrice en Terminale Scientifique* par Marie Lattuati et Isabel Santos-Rodrigues.
    Les auteurs se penchent ici sur la réalité de l'usage des calculatrices par les élèves et sur la nécessité, pour l'enseignant, de prendre en compte la nature de cette utilisation lors de ses évaluations.
  - *le presque et le tout à fait en mathématiques* par Claude Pariselle.
    Il s'agit de la présentation de deux thèmes de travail à proposer aux élèves dès le Collège et qui ont pour objectifs :
    a) de permettre une utilisation spontanée de stratégies dont la construction doit assurer une bonne compréhension ;
    b) de stimuler une réflexion sur la différence entre égalité et équivalence.

- La rubrique “Etudes” comporte 2 articles :
  · *Sur la suite des nombres premiers* par E. Ehrhart.
  Il s'agit ici de la “suite” d'un article paru en février 1997.
  · *A partir du paradoxe de Joseph Bertand* par Christian Jeanbrau.
  Joseph Bertrand (1822-1400) est connu pour une conjecture arithmétique : il existe au moins un nombre premier entre n et $2n$ ($\forall n \in N_0$).
  L'article du bulletin relate un schéma pédagogique utilisé en enseignement de Licence. Il expose les conditions et le contenu de cet enseignement.
- Deux articles constituent la rubrique “Mathématiques et Société” :
  · *Culture Mathématique générale* par F. Boule.
  C'est une étude sur une épreuve de connaissances et de savoir-faire de caractère élémentaire proposée aux étudiants entrant à l'IUFM de Dijon (IUFM = Institut Universitaire de Formation des Maîtres).
  · *Le silence de l'évidence* par Didier Nordon.
  L'auteur y montre la nécessité, pour le professeur, de savoir se taire à certains moments !

– La livraison comporte enfin les rubriques traditionnelles (mais aussi fort intéressantes) que sont :
  · Les problèmes de l'APMEP
    On y trouve des énoncés et des solutions.
  · Olympiades Mathématiques
    Tous les énoncés (8) des problèmes proposés aux participants à la 37ème OMI à Bombay.
  · Avis de recherche
    Demandes et réponses.
  · Nouvelles brèves
  · Matériaux pour une documentation
  · Courrier des lecteurs.

Claude VILLERS