Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N° 113 *Septembre – Octobre 1997*

Éditorial

J. Navez,

Grâce à l'efficacité des membres de la commission "Congrès" et des responsables de l'Athénée Royal du Condroz, le Congrès de Ciney s'est déroulé dans des conditions parfaites.

Suite à l'assemblée générale de notre société qui a eu lieu lors de ce congrès, j'ai le redoutable honneur d'écrire pour la première fois cet éditorial. J'essaierai de faire de mon mieux, même si je n'a pas la plume aussi facile que Guy Noël, le président sortant, dont il me plaît de souligner ici le dévouement infatigable envers la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*.

En ces temps de rentrée scolaire, je voudrais d'abord souhaiter à tous les profeseurs un bon travail avec des élèves attentifs et motivés, des programmes bien adaptés, une inspection conciliante et une direction bienveillante.

Mais, pour en revenir aux difficultés de tous les jours, cette année verra l'introduction en quatrième du nouveau programme de mathématique pour le second degré et j'aimerais rappeler que la commission pédagogique de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*désire connaître vos réactions et suggestions à propos de ce nouveau programme. D'ailleurs, la commission pédagogique est ouverte à tous les membres qui désirent y participer et pour faire un travail efficace, elle a besoin de vous.

Mathématique et Pédagogie n° 113, 3–12, 1997

Analyse du nouveau programme de mathématique pour le second degré de l'enseignement secondaire

G. Noël,

Le texte ci-dessous a été approuvé par le Conseil d'Administration de la SBPMef.

1. Le nouveau programme du second degré

Rappelons d'abord que le nouveau programme de troisième année est en vigueur depuis septembre dernier. La *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* n'a pas pris de position officielle et définitive à l'égard de ce texte. Au cours des contacts qu'elle a eus avec la Commission Pluraliste des Programmes de Mathématique (CPPM), elle a posé des questions et exprimé certaines inquiétudes tout en réservant sa position jusqu'à ce que soit connu le projet de programme de quatrième année.

Une première version de celui-ci nous a été transmis par M. l'Inspecteur Bajart par une lettre en date du 24 novembre 1996, qui précise que le document est encore provisoire et sera intégré à celui de troisième année de manière à former un document (toujours provisoire) unique pour le degré. Ce document intégré nous a été communiqué officiellement par M. Bajart le 10 avril 1997, dans la version soumise à l'approbation du CEPEONS, de l'Enseignement catholique et de l'Enseignement de la Communauté française.

Les commentaires ci-dessous sont basés sur cette version.

2. Le préambule

Le préambule du document commence par réaffirmer l'intention de réaliser une construction progressive du savoir en exploitant des activités et des situations-problèmes qui conduisent à une structuration théorique.

Apprendre aux élèves à se poser des questions devant une situation, à émettre des conjectures et à les vérifier, notamment par une argumentation, sont des objectifs que la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* a fait siens depuis longtemps et qu'elle essaie de promouvoir à travers ses diverses activités, destinées tant aux élèves qu'aux enseignants. Elle ne peut donc que se réjouir de les voir mentionnés dans les documents officiels.

De même, la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* ne peut qu'approuver le document lorsque celui-ci estime que l'usage des calculatrices scientifiques doit devenir familier aux élèves et lorsqu'il conseille l'emploi de calculatrices graphiques et d'ordinateurs. L'usage de ces instruments est en effet susceptible tant de faciliter la compréhension de certainess notions que de permettre l'étude de situations réalistes.

Il est également important que les documents officiels indiquent explicitement que les exploitations de situations-problèmes doivent déboucher sur des structurations. C'est en effet grâce à des synthèses, et d'éventuels compléments, que les notions rencontrées lors de l'étude d'une situation pourront s'intégrer aux connaissances des élèves et être ultérieurement réinvesties dans d'autres situations.

Enfin, la construction du savoir sur base de l'exploitation de situations-problèmes assure aux enseignants une liberté pédagogique plus grande que celle qui pourrait résulter d'un enseignement linéaire plus traditionnel. En contrepartie, il importe qu'une abondante documentation pédagogique soit mise à la disposition des enseignants et que des échanges d'opinions et d'informations soient organisés entre eux de façon plus intensive que par le passé. La *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* s'est toujours inscrite dans ce courant et réaffirme son désir d'y participer.

Le préambule énumère également les objectifs généraux attribués aux différents sujets abordés dans les programmes, (géométrie, calcul algébrique, et traitement de données). Ces objectifs sont constitués d'une description commentée de ces sujets, mais les points considérés comme les plus importants ne sont pas précisés, de sorte que la structuration théorique dont il a été question plus haut n'apparaît pas clairement. Ce sera donc à chaque enseignant de construire une telle synthèse pour son propre compte.

3. Les compétences générales à développer

Cette section énumère cinq compétences générales qui sont essentielles et que chaque enseignant doit développer inlassablement à travers l'ensemble des activités proposées aux élèves.

La liste doit à notre sens être considérée comme exemplative et non limitative. On y trouve les verbes *comprendre, traiter, argumenter, raisonner, communiquer, appliquer, généraliser, structurer, synthétiser.*

Malgré cette liste de compétences générales à développer, la partie du cours consacrée à des démonstrations risque d'être trop restreinte si on interprète de façon minimaliste les phrases *On traitera au moins les problèmes suivants* (voir les cadres consacrés aux théorèmes de Pythagore et de Thalès), que l'on pourrait remplacer par *Il ne suffira pas de traiter les problèmes suivants.*

4. Les compétences à atteindre

A l'instar du programme du premier degré, celui du deuxième degré est présenté en cadres comportant deux colonnes, la première mentionnant les intitulés de matière, la seconde des commentaires relatifs à ces intitulés. Chaque cadre constitue ce que nous pourrions appeler une *unité de sens* et est précédé d'une liste de *compétences à atteindre.* (Le texte relatif au premier degré était structuré de façon analogue, mais au lieu de *compétences à atteindre*, il y était question d'*objectifs.*) Le paragraphe intitulé *Organisation des matières* précise que ces compétences

> *indiquent ce que l'élève doit pouvoir faire avec ce qu'il a appris, l'essentiel de ce qu'il doit maîtriser. Elles sont suffisamment générales pour pouvoir être atteintes à partir d'activités variées. Elles ne peuvent conduire à un enseignement qui se réduirait à l'apprentissage de procédures.*

Préciser les compétences à atteindre pour chaque thème doit être considéré comme un progrès par rapport aux anciens textes de programmes. D'après la citation qui précède, ces compétences sembleraient constituer le minimum de certification.

La dernière phrase citée est également particulièrement importante. Le texte distingue clairement ce que l'élève aura appris des procédures qu'il devra maîtriser. Il n'est en effet pas utile d'enseigner des procédures sans les expliquer, les analyser, les faire comprendre, faute de quoi ces procédures ne pourraient être installées durablement.

La description des *compétences à atteindre* est donc faite le plus souvent à l'aide de verbes d'action. On y reconnait le souci de formuler les compétences à atteindre en termes opérationnalisables. Certains des verbes utilisés, comme *associer, modifier, interpréter, . . .* permettent d'éviter que l'enseignement se réduise à l'apprentissage de procédures.

L'étude de la matière mentionnée dans les cadres doit également permettre de développer les compétences générales mentionnées précédemment. Il est donc normal que dans les cadres figurent des activités allant au delà des compétences à atteindre.

5. Géométrie, nombres et trigonométrie

Cette section comporte six cadres pour la troisième année et trois pour la quatrième.

5.1. Troisième année

Les thèmes abordés sont

1. Le théorème de Pythagore et les nombres irrationnels.
2. Les configurations de Thalès, les rapports et les proportions.
3. Les cas de similitude des triangles.
4. La trigonométrie du triangle rectangle.
5. Les angles.
6. Les cas d'isométrie des triangles.

Les thèmes "Théorème de Thalès" et "Cas de similitude des triangles" sont voisins.

Rencontrer des égalités de rapports de segments dans des configurations triangulaires, partager un segment en n parties de même longueur, lier la notion de figures semblables à l'idée intuitive d'agrandissement, considérer les sections d'une pyramide par un plan parallèle à sa base, toutes ces activités pourraient déboucher sans un gros investissement supplémentaire sur la notion d'homothétie qui jouerait un rôle unificateur et faciliterait la compréhension en mettant en évidence les notions fondamentales. Cet objectif ne nécessite pas que les homothéties soient perçues comme des transformations *du plan*. Il suffit qu'elles soient perçues comme s'appliquant à des figures individuelles. En liant les homothéties à la similitude des figures, on adopterait aussi une démarche analogue à celle qui associe les isométries aux figures isométriques. On introduirait de la sorte plus de cohérence et de structure dans les programmes.

Sous l'intitulé "Propriétés des proportions", on trouve, mis sur le même pied, deux énoncés dont le second (*permutation des moyens ou des extrêmes dans une proportion*) a l'allure d'une "règle" dont on peut craindre qu'elle soit appliquée mécaniquement. Cette règle est au surplus totalement inutile puisqu'elle n'est qu'une application immédiate de la première "propriété" (*conversion d'une égalité entre deux rapports en une égalité entre deux produits et réciproquement*), que l'on a judicieusement évité d'énoncer sous la forme ancienne "le produit des moyens est égal au produit des extrêmes". Ce sera donc aux enseignants de veiller à ne pas tomber à cette occasion dans le piège d'un enseignement qui se réduirait à l'apprentissage de procédures.

5.2. Quatrième année

Les points rencontrés sont

1. Calcul vectoriel.
2. Nombres et trigonométrie.
3. Géométrie plane, géométrie de l'espace.

Le thème *Calcul vectoriel* associe d'entrée de jeu un vecteur (du plan) à un couple de nombres *et* à une translation. Ceci est important, l'idée de vecteur en tant que classe d'équivalence et non en tant qu'élément de celle-ci (ce qu'on nomme parfois malheureusement "vecteur lié") est une notion essentielle qui va permettre d'expérimenter la souplesse de l'outil : tout vecteur a une infinité de représentants. Le report du produit scalaire en 5ième permet de lier cette notion à celle de produit matriciel. Par contre l'enseignant se voit privé d'un outil efficace dans tout ce qui concerne les notions de norme et de perpendicularité. Nous y reviendrons plus loin.

Le thème *Nombres et trigonométrie* débute par un point relatif aux valeurs approchées de π. Il peut non seulement amener la découverte des extensions successives de la notion de nombre, débouchant sur les réels, mais aussi ouvrir une porte vers une notion plus générale d'approximation, et par là vers celle de limite de suite et de convergence.

La *Géométrie de l'espace* montre mieux que la géométrie plane la nécessité de démontrer (par exemple à l'occasion des constructions de sections dans un solide) parce qu'aucune représentation plane n'est "fiable. Les premières activités doivent avoir pour objectif de familiariser les élèves avec ces représentations. Il pourrait être utile de mentionner d'autres types de représentation : la perspective centrale (ou linéaire, ou d'observation), la projection orthogonale. La représentation rencontrée en dessin scientifique, utilisant deux plans de projection perpendiculaires permet de surmonter le problème de l'ambiguïté des autres représentations. Ces notions seraient seulement évoquées pour mettre en évidence les conventions de la perspective cavalière.

6. Fonctions et algèbre

Cette section comporte neuf cadres, dont cinq pour la troisième année et quatre pour la quatrième.

6.1. Troisième année

1. Graphiques, tableaux, formules.
2. Fonction du premier degré.
3. Equations, systèmes d'équations.
4. Inéquations
5. Calcul numérique, expressions algébriques, polynômes.

Selon la philosophie développée dans l'introduction du texte, les activités, les problèmes à résoudre doivent servir à motiver l'introduction de développements théoriques nouveaux. Dans le cadre consacré aux équations et systèmes d'équations du premier degré, on aurait pu donner plus de relief à l'intitulé *Résolution de problèmes*. Par exemple, un point "Analyse de situations problématiques débouchant sur des équations" aurait pu précéder les intitulés relatifs à la résolution des équations.

6.2. Quatrième année

1. Calcul numérique, expressions algébriques, polynômes.
2. Fonctions.
3. Droite, cercle, parabole.
4. Deuxième degré.

La rédaction de cette partie du texte indique clairement qu'en 4ième, on ne se cantonne plus aux équations de degré 1 ni à des équations n'ayant qu'une solution. La recherche et le développement de stratégies permettant la résolution d'une équation du second degré constituent un excellent cadre pour réactiver et objectiver les différentes techniques de factorisation.

L'étude de $\sqrt{a}$ et des radicaux d'indice n devraient permettre, tout comme la rencontre du nombre π, une première approche des nombres réels et du processus de convergence.

La résolution d'équations et d'inéquations prendra tout son sens si on l'envisage en liaison étroite avec l'observation des graphiques de fonctions.

L'étude des transformations de graphiques fait passer les élèves d'un point de vue local, c'est-à-dire du calcul de valeurs particulières à un stade plus global. Il permet de mettre en évidence des familles de fonctions ayant des graphes semblables.

Ce point pourrait être aussi l'occasion de réutiliser les transformations géométriques rencontrées antérieurement, telles que les isométries. La non-disponibilité des homothéties ne permet pas d'étudier directement de la même façon le passage de $f(x)$ à $\frac{1}{k}f(kx)$. Rien n'empêche cependant d'introduire à l'occasion de cette étude de fonctions de nouvelles transformations géométriques telles que les étirements et les homothéties. Ce point pourrait d'autant plus se justifier que le graphe des fonctions considérées n'étant généralement pas borné, la situation favorise la prise de conscience par l'élève de ce que les transformations s'appliquent à l'intégralité du plan et non simplement à des figures bornées.

Certains regretteront de ne plus disposer du produit scalaire pour aborder les questions de perpendicularité, de médiatrice d'un segment, de cercle ou de parabole. Sans le produit scalaire, il serait opportun de mentionner ce chapitre en tant qu'application de la relation de Pythagore ou des relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Mais peut-être pourrait-on aussi envisager de reporter ce point en 5ième si l'on désire alléger le programme.

7. Traitement numérique de données

Cette section ne comporte que deux cadres, un en troisième année, l'autre en quatrième. Les cadres n'ont pas de titre particulier.

Le traitement numérique de données est un sujet qui ne figurait pas auparavant dans les programmes du second degré et n'était guère développé au troisième. C'est aussi un sujet dont l'importance va grandissant puisqu'il doit aider tout citoyen à maîtriser les particularités économiques et sociales de notre société. Il est donc nécessaire d'être très attentif tant à la matière abordée dans cet enseignement qu'à la philosophie sous-jacente.

L'objectif que nous attribuons au chapitre "Analyse de données" est d'apprendre à l'élève à se poser des questions devant un tableau de données numériques, à effectuer des comparaisons, à tirer des conclusions et à évaluer le degré de confiance qu'il peut avoir en elles.

L'essentiel de cet enseignement ne devrait donc pas consister en des calculs de paramètres statistiques. Il convient d'abord d'apprendre à choisir les outils nécessaires pour répondre aux questions. Par exemple, dans quelle circonstance la détermination de la moyenne est-elle plus opportune que celle de la médiane ?

Un tel apprentissage suppose la considération de nombreuses situations significatives, des situations qui posent de vraies questions auxquelles on veut apporter de vraies réponses. Dès lors, il paraît peu réaliste de séparer la rencontre de paramètres de position de celle de paramètres de dispersion. Les deux types d'informations véhiculées par ces deux types de paramètres sont souvent tous deux nécessaires pour trouver des réponses sensées aux questions posées. La répartition de la matière sur les deux années, telle qu'elle est prévue actuellement, ne permet pas vraiment d'atteindre la compétence essentielle mentionnée pour le programme de troisième année : *Interpréter les valeurs centrales en fonction de la situation traitée.* Notre point de vue est renforcé par la présence dans le programme de quatrième d'un retour sur cette compétence : *Préciser la portée des valeurs centrales à la lumière des paramètres de dispersion.*

S'il est difficile de séparer les deux types de paramètres statistiques, il n'est pas indispensable de rencontrer d'emblée tous les paramètres de position traditionnels et tous les paramètres de dispersion traditionnels. Il est par exemple possible de rencontrer d'abord des situations qui sont traitées efficacement par l'emploi de la médiane et de l'écart inter-quartile.

Ces deux paramètres ont l'avantage de pouvoir être déterminés sans recours à des formules et sont peut-être plus visiblement liés que la moyenne et l'écart-type à la prise de conscience par l'élève de ce qu'est une distribution statistique. (La moitié de la population est toujours située entre les premier et troisième quartiles.)

Une répartition différente de la matière proposée entre la troisième et la quatrième année, de façon à rapprocher les paramètres de position des paramètres de dispersion qui leur correspondent pourrait rencontrer le point de vue qui vient d'être développé.

8. D'autres sujets

En analysant le programme du second degré, nous nous sommes aussi interrogés sur la continuité entre les programmes du premier et du second degré, ainsi que sur la préparation du programme du troisième degré. Plusieurs questions nous préoccupent :

1. La géométrie de l'espace ne fait que de très timides apparitions en troisième année et n'apparaît aucunement dans les compétences à atteindre.
2. L'arithmétique est totalement absente du second degré, ce qui nous semble très regrettable. L'arithmétique peut être rencontrée à travers des "jeux numériques" qui motivent les élèves. Elle fournit des possibilités de pratiquer des démonstrations dans un cadre non géométrique. Elle est inséparable de l'apprentissage de l'algèbre et du combinatoire. Le projet de programme mentionne d'ailleurs l'analogie entre l'algorithme de la division polynomiale et celui de la division des naturels. Pour la même raison, l'étude d'un sujet tel que l'algorithme d'Euclide aurait été particulièrement bienvenue.
3. Les programmes du deuxième degré ne comportent aucune allusion ni aux notions ensemblistes, ni aux notions logiques (y compris les quantificateurs). Ces notions pourraient trouver de bonnes illustrations par la définition de l'ensemble solution d'une équation, d'une inéquation ou d'un système d'équations. Les notions de condition nécessaire et/ou suffisante ne se réfèrent plus à l'implication logique. Les lois de De Morgan, si nécessaires quand on veut montrer par exemple qu'il est souvent plus facile de déterminer l'ensemble des va-

leurs pour lesquelles une fonction n'est pas définie que celui où elle est définie, ne sont plus mises en évidence.

Sans faire de ces notions un point supplémentaire du programme, il serait important d'inciter les enseignants à les utiliser, même de façon peu formalisée, chaque fois que l'occasion se présente. Il arrivera alors un moment où la nécessité de procéder à une synthèse (qui pourrait être très rapide) s'imposera d'elle-même, conformément à l'esprit de la section "Compétences générales à développer" et à la philosophie du programme qui indique dès le premier paragraphe de l'introduction que les activités doivent conduire à une structuration théorique.

25 avril 1997

Pavages et papiers peints

S. Courtois et F. Denis, *Inspecteurs honoraires*

1. Généralités

1.1 Si Euclide devait réécrire les "Eléments" actuellement, il utiliserait probablement de manière plus large les notions de symétrie et de transformation, dont on connaît à présent les voies qu'elles ouvrent à la géométrie. Le terme "symétrie" utilisé ici a un sens large ; il désigne toute isométrie qui conserve la figure F considérée. A l'idée de symétrie se lie celle de transformation de F, ensemble structuré tel que carré, triangle, frise, pavage, ... La symétrie au sens large fait correspondre chaque point de F à un point de F, tout en conservant la structure de F, c'est-à-dire ses propriétés.

Tout en sachant que la géométrie ne se ramène pas uniquement à des groupes de symétries, nous utiliserons essentiellement la géométrie des transformations comme une approche, un moyen, un contenu accessibles à de jeunes élèves.

1.2 Des figures géométriques formées de motifs qui se répètent sont courantes autour de nous, décoration de vêtements, de tissus d'ameublement, de halls de gare, de bâtiments civils ou religieux. Facteur d'ordre ou de beauté dans de nombreuses civilisations, ces figures se retrouvent couramment sous forme de frises ou de dentelles, de mosaïques, de pavages et papiers peints, de rosaces et de formes circulaires autour d'un point.

1.3 Rosaces (fig. 1), frises (fig. 2), papiers peints (fig. 3) constituent en géométrie des groupes appelés ornementaux. Une rosace est caractérisée par un groupe de rotations. Une frise est caractérisée par un groupe d'isométries dont les translations ont une seule direction. Un papier peint est caractérisé par un groupe d'isométries ayant deux translations de base non parallèles. Nous nous intéressons dans cet article à la notion géométrique de papier peint dont les modèles courants sont les pavages du plan à l'aide de pavés, de mosaïques et naturellement les papiers peints qui ornent les murs des maisons.

Fig.1

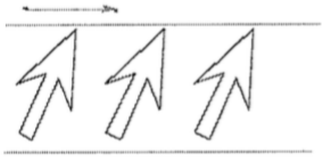


Fig.2

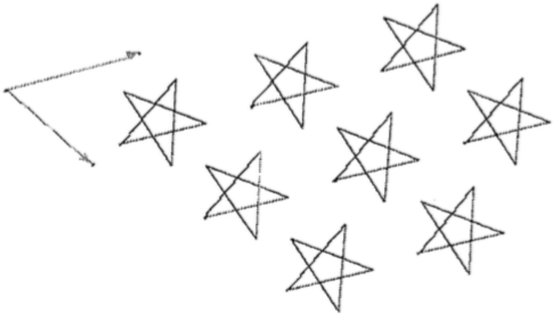


Fig.3

1.4 Toutes les figures de cet article ont été réalisées à l'aide du logiciel **Cabri-géomètre II**. Ce logiciel permet de reproduire aisément les figures ornementales de cet article et d'en créer des nouvelles. Cabri II dispose des diverses transformations utilisées et les images de polygones peuvent être obtenues directement par ces transformations, le logiciel les traitant comme des objets. A l'écran, les couleurs apportent un plus indéniable.

2. Le modèle du pavé

2.1 Avec quelques formes géométriques peut-on paver le plan ?

Paver signifie recouvrir, sans laisser de vide, sans recouvrements, à l'aide d'un motif (le pavé) formé d'une ou plusieurs figures. Le tout est d'assembler des figures de manière à ce que la somme des angles autour de tout point soit de 360°. On en trouve de multiples réalisations dans l'art islamique : les Maures en Espagne connaissaient déjà au 15ème siècle tous les types de pavages.

Observons-en quelques-unes (fig. 4,5 et 6).

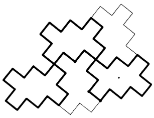


Fig.4

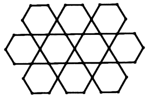


Fig.5


Fig.6

2.2 Il n'y a que trois pavages réguliers, réguliers, car ils sont formés d'un seul type de polygone régulier : le triangle équilatéral (fig. 7), le carré (fig. 8) ou l'hexagone régulier (fig. 9).

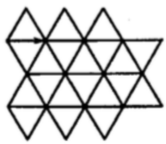


Fig.7

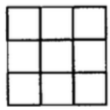


Fig.8


Fig.9

2.3 A l'aide de polygones réguliers simples, par exemple des triangles équilatéraux, des carrés, des hexagones réguliers, des octogones réguliers, ayant tous des côtés de même longueur, il est possible de construire des pavages constitués de deux ou plusieurs types de ces figures :

- des triangles équilatéraux et des carrés (3 3 3 4 4) (fig. 10),
- des triangles équilatéraux et des hexagones (3 6 3 6) (fig. 5),
- des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones (3 4 6 4) (fig. 11),
- des carrés et des octogones réguliers (4 8 8) (fig. 12).

Chaque sommet présente le même assemblage de polygones.

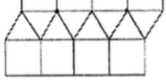


Fig.10

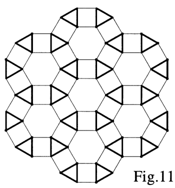


Fig.11

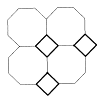


Fig.12

2.4 Mais il arrive aussi que tous les sommets ne présentent par le même assemblage de polygones bien qu'il s'agisse des mêmes polygones réguliers.

Par exemple, avec des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones réguliers, on obtient (3 4 4 6) et (3 4 6 4) (fig. 13).

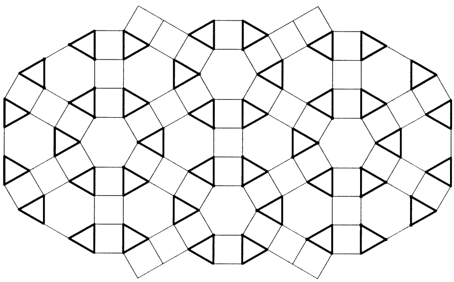


Fig.13

2.5 Une question classique consiste à savoir si on peut paver le plan à l'aide de triangles quelconques ou particuliers, à l'aide de quadrilatères quelconques ou particuliers, tous égaux entre eux. La réponse est évidemment affirmative.

Une question moins courante est de savoir si on peut paver le plan avec des hexagones égaux non réguliers. La réponse est aussi affirmative si les hexagones ont un centre de symétrie (fig. 14), de tels hexagones étant des projections parallèles sur un plan d'hexagones réguliers. Les angles de ces hexagones sont de trois types : a, b, c avec $2(a+b+c) = 8$ droits, donc $a+b+c = 4$ droits.

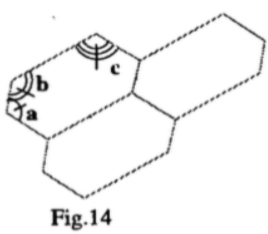


Fig.14

3. Analyse de symétries de pavages et de papiers peints

3.1 Les plus anciens papiers peints, en noir et blanc, connus auraient été créés au 16ème siècle en Angleterre. Le mathématicien Fedorov démontra en 1891 qu'il y avait exactement 17 types de papiers peints et il en établit un classement. Klein en 1897 et Polya en 1924 travaillèrent aussi sur ce théorème. La découverte intuitive des Maures au 15ème siècle constituait donc une réussite merveilleuse pour l'époque.

La première analyse peut porter sur l'existence ou non de rotations d'ordre $2, 3, 4, 6$.

La deuxième porte alors sur l'existence ou non d'axes de symétries, passant ou non par les centres des rotations (fig. 15).

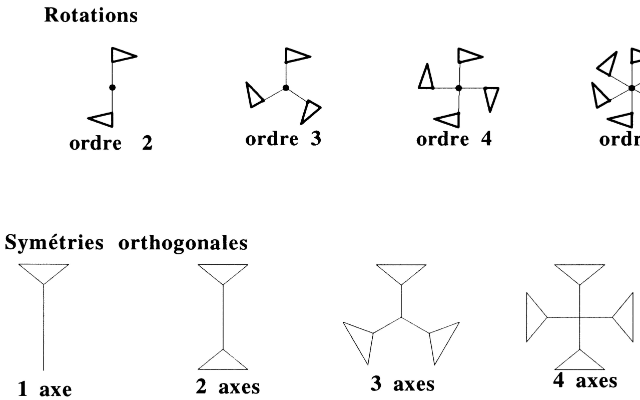


Fig.15

3.2 Le premier coup d'oeil au papier peint comporte une dimension esthétique liée à la forme (fleur stylisée, figures géométriques, ...) aux couleurs, aux sombres et aux clairs, comme le premier regard que l'on porte sur un vitrail ou sur une peinture. L'analyse géométrique est un deuxième temps esthétique.

Pédagogiquement, cette analyse demande peu de pré-requis. On peut demander de colorier le papier peint selon ce qu'on veut mettre en évidence : une figure qui se reproduit par translations, le motif que reproduit l'ensemble du papier peint par translations, le réseau des translations ainsi que sa forme (parallélogramme, rectangle, carré, losange,...), une symétrie ou une rotation qui conserve le motif ou le papier peint dans son ensemble.

Par exemple, dans la figure 16, on peut demander de marquer les centres des symétries centrales.

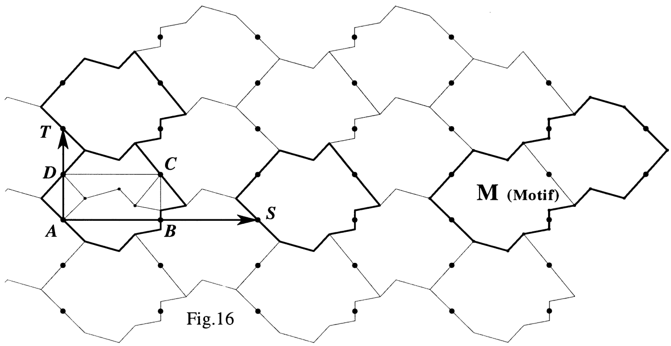


Fig.16

N.B. : La technique utilisée pour construire le polygone utilisé pour réaliser le pavage de la figure n° 16 équivaut à découper une enveloppe préalablement collée de façon à la mettre à plat.

4. Créer des pavages, des papiers peints

4.1 La démarche la plus intéressante est la création de papiers peints. Tout pavage, tout papier peint contient deux translations de base non parallèles qui, avec leurs composées, étalent le motif choisi.

Ramenons ce motif à un point, les deux translations étalent ce point suivant des réseaux pouvant être assimilés à des "quadrillages" formés de parallélogrammes, quelconques (fig. 17) ou particuliers, rectangles (fig. 18), losanges, carrés (fig. 19), losanges avec un angle de 60° (réseaux hexagonaux) (fig. 20).

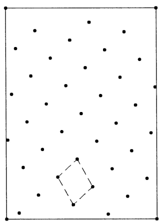


Fig.17

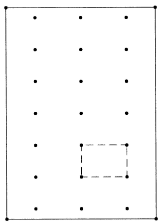


Fig.18

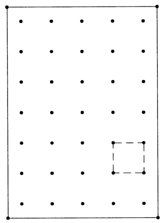


Fig.19

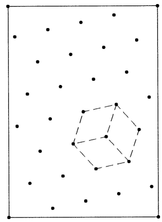


Fig.20

Ce sont les papiers peints les plus élémentaires. Nous les utiliserons comme canevas pour créer des papiers peints plus "ornés".

A cet effet, nous procéderons en trois temps : étudier les symétries d'un réseau, ensuite du motif, enfin, celles du papier peint dans son ensemble.

Dans un but de simplification, on se limitera aux translations (modélisées par un glissement du calque), aux rotations (modélisées par un pivotement du calque autour du centre) et aux symétries orthogonales (modélisées par un retournement du calque). On n'étudiera donc pas l'existence éventuelle de symétries glissées, car dans cet article, nous ne visons pas à établir une classification générale des papiers peints. Par contre, on utilisera les rapports existant entre les symétries des trois objets : le quadrillage, le motif, le papier peint.

4.2 Les isométries des réseaux à base de parallélogrammes quelconques ou particuliers se réfèrent à 9 points privilégiés : les quatre sommets, les quatre milieux des côtés et le point d'intersection des diagonales. Il y a aussi 8 droites privilégiées : les quatre droites qui incluent les côtés, les deux droites passant par les milieux des côtés et les droites des diagonales.

Voyons d'abord les déplacements qui s'illustrent aisément à l'aide d'un calque transparent, isométrique au quadrillage, qu'on fait tourner autour d'un de ses points.

Tous ces réseaux admettent une rotation de 180° en chacun des 9 points privilégiés (centres de symétrie) (fig. 21). Les réseaux en carrés admettent en outre des rotations de 90°, 180° et 270° en chacun des quatre sommets.

Les réseaux en losanges ayant un angle de 60°, regardés comme hexagonaux, admettent des rotations de 60°, 120°, 180°, 240°, 300° centrées en chaque sommet (fig. 22).

Il n'existe pas d'autres types de rotations dans ces réseaux.

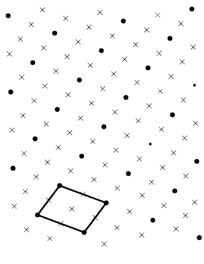


Fig.21

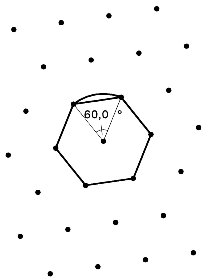


Fig.22

Dans le réseau à base de parallélogrammes (fig. 21), les sommets des parallélogrammes sont indiqués par des gros points et les cinq autres par des croix.

4.3 Voyons ensuite les retournements dont on n'examine que les symétries orthogonales, et qui s'illustrent à l'aide d'un calque transparent isométrique au quadrillage qu'on retourne en le faisant pivoter autour d'une de ses droites.

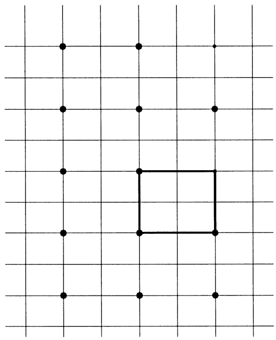


Fig.23

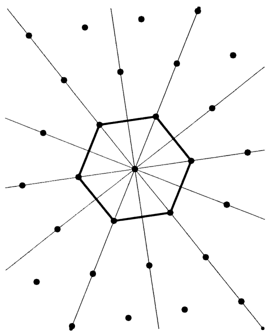


Fig.24

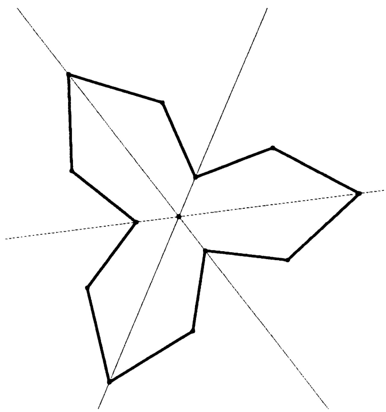
Les réseaux de rectangles admettent deux directions d'axes de symétrie perpendiculaires, les droites des quadrillages et les droites passant par les milieux des côtés des rectangles (fig. 23).

Les réseaux en losanges admettent eux aussi deux directions d'axes de symétrie : les droites contenant les diagonales des losanges. Les réseaux hexagonaux admettent six directions d'axes de symétrie, faisant entre elles des angles de 30°, correspondant aux directions des axes de symétrie de l'hexagone régulier (fig. 24).

4.4 Les symétries des motifs dépendent de la figure que l'on va imaginer pour constituer le motif du papier peint et qui remplacera les points du réseau. Selon le cas, ce motif aura un centre de rotation, un ou plusieurs axes de symétrie, mais il se peut aussi qu'il n'ait aucune symétrie.

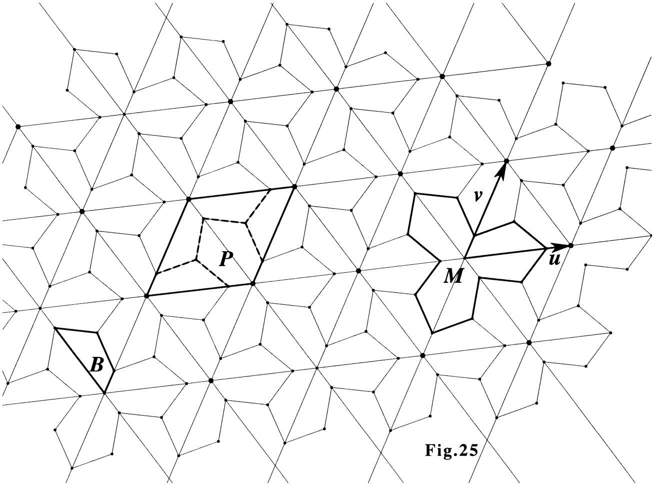
On peut choisir comme motif une figure pouvant paver le plan et dont on apprécie l'esthétique et/ou les symétries.

Voyons un exemple. Partons d'un réseau hexagonal et remplaçons chaque point par le motif choisi que voici :



Ce motif admet trois rotations (0°, 120°, 240°) et trois axes de symétrie passant par le point du réseau centre des rotations et faisant entre eux des angles de 60°.

Chaque symétrie du motif choisi est une symétrie du réseau. Ce papier peint (fig. 25) conserve en chacun des points de son réseau les symétries du motif.



M est le <u>**motif**</u> dont le groupe de symétries comprend 3 rotations et 3 axes de symétrie passant par le centre de rotation, **il permet de réaliser le pavage du plan uniquement en composant deux translations de base et leurs réciproques**.

Les vecteurs u et v correspondent aux translations de base.

B **est la partie du plan d'aire minimum qui permet de réaliser le motif, le parallélogramme de base** (voir point 4.6) **et aussi de reconstituer l'ensemble du papier peint par l'action du groupe de symétries qui caractérise celui-ci** (voir point 1.3).

P **est le** <u>**parallélogramme de base**</u> **défini par quatre points adjacents du réseau**. Ce parallélogramme P permet lui aussi de construire l'ensemble du pavage grâce aux deux translations de base de vecteurs u et v.

Dans la figure 25, P est un losange qui a un angle de 60°, mais il n'en a conservé qu'un axe de symétrie. Comparé au motif, il n'en a ni les symétries, ni l'esthétique. C'est ce qui justifie le fait qu'on s'attache au motif dans ce qui suit.

4.5 Toute transformation qui est à la fois une symétrie du réseau et une symétrie du motif est une symétrie du papier peint

Symétries du réseau en chacun de ses points	Symétries du motif	Symétries du papier peint
Figure 16		
2 rotations (90° et 180°) 2 symétries orthogonales	rotation de 180°	rotations d'ordre 2
Figure 25		
6 rotations 6 symétries orthogonales	3 rotations 3 symétries orthogonales	rotations d'ordre 3 symétries orthogonales (type 3 axes)

En associant les cinq types de réseaux à des motifs admettant divers degrés de symétrie jusqu'à l'ensemble des symétries du quadrillage, on peut amorcer une classification des papiers peints. Cette démarche permettrait de déterminer les 17 types de papiers peints, mais ce n'est pas l'objet de cet article.

4.6 La notion de ligne polygonale de base permet d'expliquer la manière de construire le motif.

Partons d'un réseau hexagonal.

On détermine le centre O du triangle équilatéral ABC obtenu en joignant trois points voisins du réseau et on choisit un point P appartenant au segment $[AC]$ (fig. 26).

Soit P' l'image du point P par la rotation de centre O et d'amplitude 120° ; POP' est la **ligne polygonale de base** et $APOP'$ est le polygone d'aire minimum permettant de réaliser le pavage.

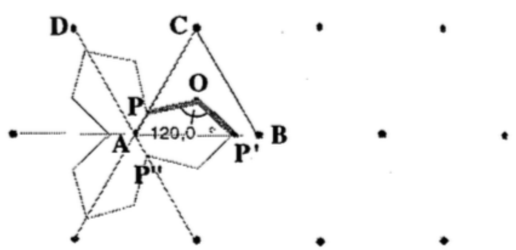


Fig.26

Pour construire le motif, on applique à la ligne polygonale POP' la symétrie d'axe AB et à $POP'P''$ deux rotations de centre A et d'amplitude $120°$.

4.7 Il nous est loisible d'utiliser le même procédé avec un motif proche de ceux qu'utilise Escher. Il suffit de partir d'une ligne polygonale un peu plus compliquée et d'appliquer la même procédure (fig. 27).

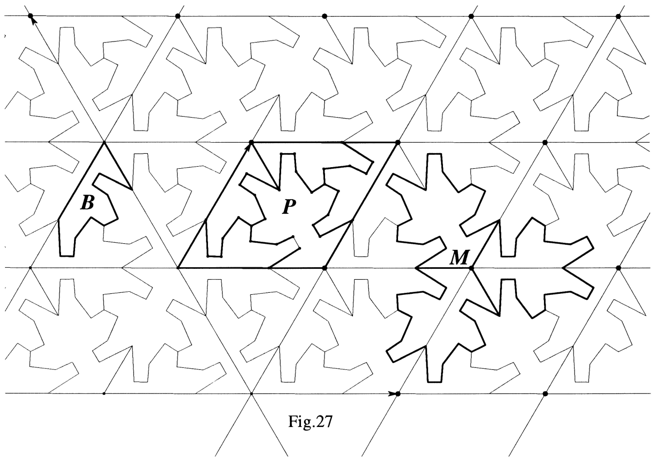


Fig.27

Dans ce cas, le motif M est constitué par un ensemble de trois “chinois” ayant en commun un des points du réseau.

4.8 Sur un tel papier peint, il est aisé d'illustrer la composition de deux de ses isométries, par exemple de deux rotations de centres distincts (fig. 27).

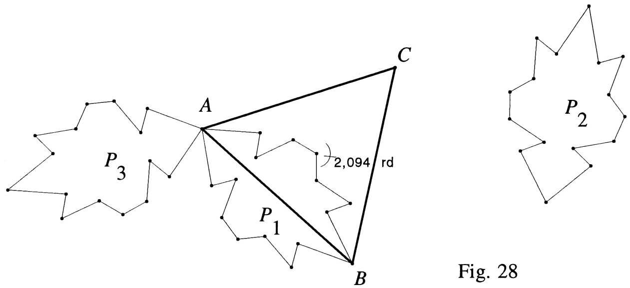


Fig. 28

$$r_{(B,120^\circ)} \circ r_{(C,120^\circ)}(P_1) = r_{(B,120^\circ)}(P_2) = r_{(A,120^\circ)}(P_1) = P_3.$$

Conclusion

L'analyse de motifs, ornements, isolés ou répétés servant de thèmes décoratifs, est une activité géométrique susceptible d'apprendre à **regarder** des objets et des figures, à les **manipuler**, à les **construire**.

Nous proposons une approche par **des voies concrètes**, accessibles à des élèves de tous âges et de toutes capacités : expérimenter des mouvements de translation, de rotation, reproduire sur papier en réseau, observer dans un miroir, ...

Le matériel est aussi accessible : des éléments décoratifs de l'environnement, du papier transparent, du papier calque, l'ordinateur pour créer des "patterns" originaux...

Celui qui le souhaite peut pousser plus loin l'étude théorique des groupes ornementaux (voir la bibliographie).

Ce thème n'est-il pas aussi un exemple d'interdisciplinarité, faisant intervenir les mathématiques, l'art, la technologie et l'histoire ?

Bibliographie

[1] F. BUEKENHOUT et J. DOYEN, *Groupes de symétries*, P.U.B., 1976-1977.

[2] M.-P. COLLONGE, F. TREHARD, *Mosaïques et isométries*, Paris, Cedic, 1982, 99 pages.

[3] D. SEYMOUR et J. BRITTON, *Introduction to Tessellations*, Dakle Seymour Publications, P.O. Box 10888, Palo Alto CA 94303, 256 pages.

[4] A. BELL et T. FLETCHER, *Symmetry groups*, Derby (U.K.), Association of Teachers of Mathematics, 1964-1985, 19 pages.

[5] E.G. MARTIN, *Transformation geometry, An introduction to symmetry*, New York, Heidelberg, Berlin, Srpinger-Verlay, 1982, 237 pages.

Nous remercions notre Collègue, Monsieur Alfred WARBECQ, qui a, à nouveau, accepté d'être notre premier lecteur, pour ses conseils judicieux et ses amicaux encouragements.

Adresse des auteurs :

Francis DENIS
rue Duchêne 9
4120 NEUPRE

Sylvain COURTOIS
Raatshovenstraat 83
3400 LANDEN

John NASH, prix Nobel d'économie 1994

M. Hallin et L. Lemaire, *Université Libre de Bruxelles*

En 1994, le prix Nobel d'économie a été attribué conjointement à John HARSANYI, John NASH et Reinhard SELTEN.

John NASH est un mathématicien souvent mieux connu pour ses travaux de géométrie différentielle et d'analyse que pour les idées de théorie des jeux qui ont justifié son Prix Nobel.

Il n'a publié que 14 articles en 68 ans, dont douze entre 1950 et 1958, et dont cinq seulement en théorie des jeux. En fait, le prix Nobel récompense essentiellement les idées novatrices qu'il eut entre 1948 et 1950—c'est-à-dire entre 20 et 22 ans.

John Nash est né en 1928 aux Etats-Unis, et en 1945 a entamé des études d'ingénieur chimiste. Mais très rapidement il change d'orientation pour la chimie pure, puis les mathématiques, et en 3 ans obtient un B. A. (licence) et un M. Sc. (diplôme approfondi) en mathématiques.

Ce parcours peu conventionnel lui vaut d'entrer, presque par hasard, en contact avec la discipline qui lui vaut aujourd'hui un prix Nobel. C'est à l'occasion d'un cours à option en économie internationale qu'il rencontre en effet la théorie des jeux.

A l'instar des rencontres ultérieures avec les sujets divers qui occuperont la suite de sa carrière, cette première rencontre avec la théorie des jeux se traduit par la résolution d'un problème, et donne naissance à la désormais classique *solution de Nash d'un problème de marchandage*. Ce travail, qui sera publié en 1950, caractérise de façon axiomatique, et avec beaucoup d'élégance (il faudra trente ans pour qu'on s'aperçoive de la redondance partielle de son axiomatique !), l'arbitrage de certaines situations conflictuelles à deux joueurs.

Ce premier contact joue cependant un rôle déterminant dans le choix qu'il effectue en 1948, en entrant à Princeton, de préparer une thèse en théorie des jeux. C'est dans ce travail, consacré aux jeux non coopératifs et élaboré en une période extraordinairement courte de 14 mois, qu'il introduit le concept de *point d'équilibre au sens de Nash*—une notion si fondamentale aujourd'hui qu'elle peut sembler, aux yeux de certains, avoir toujours existé. On peut considérer que les quarante années de développement qu'a connues depuis la théorie des jeux se sont, dans une très large mesure, organisés autour de ce concept fondateur.

La période “théorie des jeux” de la carrière de John Nash s’arrête, à peu de chose près, là. Au total, il ne publie que cinq articles dans ce domaine entre 1950 et 1954, puis se tourne vers des sujets totalement différents.

Son virage, à vrai dire, est déjà largement entamé dès 1948. Nash en effet s’inquiète de ce que le très sérieux département de mathématiques de Princeton puisse considérer la théorie des jeux comme trop exotique, et refuser un sujet de thèse aussi peu orthodoxe. Il prépare donc “en réserve” un premier résultat liant les variétés différentielles et les variétés algébriques (qu’il publiera en 1952). Cette précaution, heureusement pour la réputation des mathématiciens de Princeton, s’avéra inutile et, en 1950 (à 22 ans !), Nash est docteur en mathématique, et lauréat virtuel d’un prix Nobel dont personne à l’époque n’aurait osé prédire l’instauration.

Il passe alors au MIT (Massachusetts Institute of Technology) où il obtient ses deux résultats les plus marquants en mathématique “pure”.

Considérons une surface dans $\mathbb{R}^3$, et deux vecteurs tangents à cette surface. Nous pouvons définir leur produit scalaire comme étant leur produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$. Pour une sous-variété M de dimension m de $\mathbb{R}^n$, on peut définir le produit scalaire de la même manière.

Mais considérons maintenant une variété abstraite obtenue en collant ensemble des morceaux d’espace euclidien (des “cartes”), et en chaque point de cette variété, choisissons de façon arbitraire un produit scalaire sur les vecteurs tangents, en demandant simplement que ce produit varie de façon C^∞ d’un point à l’autre.

Est-il possible de plonger cette variété abstraite dans un certain espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de telle sorte que le produit scalaire abstrait coïncide en chaque point avec celui de $\mathbb{R}^n$?

La question est extrêmement difficile, et Nash montre que la réponse est affirmative pour toute variété M, pourvu qu’on prenne un espace euclidien de dimension assez grande (précisément : $n \geqslant m(m+1)(3m+11)/2$). C’est le célèbre *théorème de plongement de Nash*, que tous les spécialistes de la géométrie riemannienne connaissent et utilisent constamment.

Dans le cours de la (difficile) démonstration, Nash a besoin d’un théorème de fonction implicite. Ces théorèmes sont classiques dans $\mathbb{R}^n$, et s’étendent facilement aux espaces de Banach. Mais ceci ne suffit pas pour sa démonstration. Il crée donc un théorème plus général, qui sera raffiné par J. Moser pour devenir un autre résultat archi-connu—cette fois en analyse : le *théorème de Nash - Moser*.

Nash s'attaque ensuite à des problèmes d'équations aux dérivées partielles liées à la mécanique des fluides. Son travail est aussi brillant, mais ne marque pas autant le sujet car De Giorgi, en Italie, résout le problème juste avant lui—avec d'autres méthodes.

Nous sommes alors en 1959 et, tragiquement, Nash est progressivement frappé de schizophrénie, une maladie mentale qui l'empêche de continuer à travailler après 1964, et l'amène à faire de nombreux séjours à l'hôpital.

Ainsi, le prodigieux travail de Nash, qui a marqué très profondément trois sujets distincts (la théorie des jeux, la géométrie différentielle et l'analyse) a été accompli en moins de 15 ans, et est contenu dans seulement 14 articles publiés.

Heureusement, la santé de John Nash s'est progressivement améliorée, ce qui lui a permis de se rendre à Stockholm pour recevoir son prix Nobel, et de participer à une conférence consacrée aux prolongements de ses idées en théorie des jeux.

Indépendamment de l'attribution du Prix Nobel, notons que le *Duke Mathematical Journal* vient de publier un volume spécial en l'honneur de Nash, dont les articles soulignent—s'il en était besoin—l'impact actuel de ses idées.

On y trouve aussi un 15ème article de Nash, déposé en 1968 à la bibliothèque de Princeton, mais jamais publié. Il contient un certain nombre de théorèmes, mais aussi de conjectures et d'idées non démontrées. Peut-être cet article conduira-t-il à de nouveaux développements ...

Adresse des auteurs :

Institut de statistique CP 210 Campus Plaine
Département de Mathématique CP 218 Campus Plaine
Université Libre de Bruxelles, Boulevard du Triomphe 1050 - Bruxelles

Bourdes significatives

R. Graas,

Ose-t-on encore rire et se moquer en “bonne société” de la “bosse des mathématiques” ? Cela ne passe plus – ou guère – après l’essor scientifique qui a si profondément modifié l’enseignement secondaire.

Mais il y a – au contraire – des tentatives de récupération : on veut se parer, parfois bien maladroitement, hélas !, des plumes de beaux oiseaux.

En voici deux exemples repérés récemment, au pur hasard de lectures et qui montrent à suffisance qu’un minimum de formation mathématique s’impose. Surtout en cette période de restrictions dans les horaires de l’enseignement secondaire !

Dans la revue “L’entreprise et l’homme” de l’ADIC (n° 3/93), à l’article de Thierry LIEVENS (page 114, 1ère colonne, 3ème alinéa), on trouve, en incise, cette perle : “l’origine est perpendiculaire au temps”. L’intitulé étant : “Du nouveau du côté de la Création”, on suppose évoqué un système d’axes cartésiens : mais comment ?

De même, dans le volume “Dépassées, les valeurs catholiques ?” (Collections PANORAMIQUES. Editeur ARLEA-CORLET 1995) à l’article de Pierre MAILLOT : “L’Occident perd-t-il ses valeurs chrétiennes ?” (page 209, 2ème colonne au milieu) : “Le Catholicisme institutionnel et la pensée chrétienne sont comme deux cercles inscrits : ils ont une partie commune et des parties séparées”. Sans doute a-t-on voulu parler de cercles sécants ?

Que la publicité produise à l’occasion de semblables énormités, on pourrait le concevoir, voire l’admettre. Mais dans des textes à prétention philosophique ?

Adresse de l’auteur :

Robert GRAAS
Inspecteur honoraire
rue de Gembloux 35
5002 SAINT-SERVAIS

Echanges SBPM-APMEP :

Exposés du Groupe "Problématiques lycée" de l'APMEP, *Mons, le 15 février 1997*

Une autre entrée dans les programmes d'enseignement

Régis GRAS

1. Introduction

Le "pourquoi des savoirs", voire le "pourquoi l'école", revient de façon lancinante dans la bouche des élèves de cette fin de siècle. Une réponse en termes d'objectifs satisfait certes leur attente de perspective, mais laisse ouvert le recours aux situations et aux moyens qui permettent d'atteindre ces objectifs. A travers une recherche menée depuis plus de dix ans dans le cadre de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public français (A.P.M.E.P.), nous avons tenté d'y répondre par une nouvelle cohérence dans l'énoncé des programmes, cohérence qui tente de prendre en compte, non seulement les contenus et les méthodes, mais aussi :

— les objectifs spécifiques des mathématiques pour des élèves de 11 à 15 ans, objectifs induits par les attentes et les besoins pluridisciplinaires, professionnels, quotidiens, se conciliant avec les finalités culturelles de l'école ([1]) (contribuer à la formation triple, l'homme, le citoyen, le travailleur) ;

— le sens que ces besoins et ces attentes entretiennent entre eux relativement aux notions enseignées, aux démarches, aux conduites développées, sens que les élèves sont susceptibles de leur attribuer ;

— la fonction épistémologique des notions et des démarches que celles-ci assurent, en particulier dans le développement de "l'esprit scientifique" et la provision de modèles ;

— des activités à travers des situations qui favorisent la mise en cohérence de l'ensemble dans des contextes variés.

Ce travail se poursuit à l'heure actuelle pour les classes du second cycle (15 à 18 ans).

1. cf. "Pour un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au collège". Publication APMEP, janvier 1985.

2. La question du sens

L'énonciation et l'étude des objectifs spécifiques à travers de nombreux exemples ont déjà fait l'objet d'une tâche à laquelle l'APMEP a apporté sa contribution. Mais l'aspect institutionnel y est prépondérant.

Le sens pour les élèves, quant à lui, se nourrit à différentes sources :
— leur histoire personnelle ou celle de la classe, donc dans les relations que ceux-ci ont avec le savoir, relations qui passent par leur vécu dans le quotidien et par les situations d'enseignement ;
— leur environnement scientifique, social et culturel ;
— les relations interconceptuelles et pluridisciplinaires, relations évidemment plus objectivables que les précédentes.

Suivant le paradigme d'une théorie constructiviste de l'apprentissage, selon laquelle nous nous plaçons, le sens n'est alimenté et activé qu'à la faveur de questions que se posent ou peuvent se poser les élèves à partir de problèmes reconnus authentiques par eux, ni évidents, ni trop complexes. Il est optimisé en fonction de l'enjeu introduit par ces questions, aiguisé par le défi qu'éventuellement elles contiennent et par les réponses qui ont pu être proposées a priori par les élèves. Il est le moteur d'une authentique avancée didactique, et, par conséquent, de la construction et de l'appropriation (au sens étymologique) des savoirs. L'histoire nous livre d'ailleurs que ce n'est que dans ces conditions que la connaissance scientifique a pu se développer.

3. Une réponse didactique : la problématisation des savoirs

On peut alors percevoir la fonction épistémologique du renversement didactique qu'il faut opérer : si l'élève parvient à lui donner un sens qui le problématise, sa connaissance s'accroîtra plus par les réponses aux questions qu'il fera siennes (G. Brousseau parlerait ici de "dévolution du problème") que par celles qui lui restent artificielles et étrangères. Certes, il ne faut pas se bercer de l'illusion que ce renversement serait didactiquement aisé, voire possible relativement à tous les concepts qu'il est nécessaire de construire en sept années de secondaire. Mais la recherche obstinée de situations didactiques le favorisant devrait être payée d'un changement d'attitude transférable dans un champ assez large pour qu'il devienne efficace.

A. C. Clairaut (1713-1765) nous propose dans "*Elémens de géométrie*" ce que E. Barbin appelle une "*géométrie problématisée*", c'est-à-dire dit-elle, "*une géométrie où les savoirs ont un sens parce qu'ils sont des instruments pour résoudre des problèmes*". En ce sens, poursuit-elle, "*contrairement à Euclide qui donne au début de chacun de ses livres des Eléments une longue liste des définitions, Clairaut n'introduit les concepts qu'au fur et à mesure, au moment où les concepts deviennent nécessaires à la résolution d'un problème. De même, l'impératif qui dicte l'ordre d'introduction des propositions est l'ordre déductif chez Euclide, alors que chez Clairaut, il se situe dans la problématique choisie, c'est-à-dire la mesure des terrains (...). Les concepts et les savoirs sont construits comme réponses à des questions : ce sont des instruments pour résoudre des problèmes. (...). Pour Clairaut, le savoir implique le processus par lequel on sait*" ([2])

C'est donc, dans un champ de contraintes et de nécessités, que la construction d'une connaissance, comme solution d'un problème, peut apparaître justifiée et assimilable. Citons quelques exemples :

— la résolution d'une inéquation, voire d'un système d'inéquations, prend son sens et sa fonction dans le cadre de la recherche de valeurs conduisant à l'optimisation d'une relation entre différentes variables numériques ;

— des limites d'incertitude sur des valeurs d'une grandeur à partir de la donnée de l'incertitude sur une autre (ou plusieurs) qui la détermine(nt) permet de donner du sens à la continuité ;

— l'observation de régularités dans des situations (tiercé, loto, ...) conduit à la notion de probabilité ;

— l'identification de caractères discriminants dans un ensemble d'objets (exemple : des figures ou des transformations géométriques) ou dans un ensemble d'individus prend surtout son sens dans la nécessité d'une organisation structurée, d'une création d'un support de mémoire (mental, écrit, informatique) et impliquant un problème de classification...

Ainsi, le renversement didactique évoqué plus haut affecte l'économie de l'élève. Grâce au sens qu'elles prennent par la nécessité, le coût, ni trop élevé, ni dérisoire, des opérations cognitives engagées par l'élève dans la résolution de problème ou, ce qui est équivalent pour construire une connaissance, se

2. cf. "Sur la conception des savoirs géométriques dans les *Elémens de géométrie*" E. BARBIN, Edition bilingue rapport ERASMUS ICP-93 coordonnée par A. GAGATSIS, Université de Thessalonique. Article cité par A. GAGATSIS dans "Histoire de la géométrie en Grèce. L'influence des géomètres français de 1830 à 1884" Repères n° 17, octobre 1994

rembourse sur la consistance de celle-ci et sa durabilité, sur son efficacité dans des situations voisines ou sa transférabilité dans d'autres disciplines.

4. Vers le développement de l'esprit scientifique

Si le savoir implique le processus par lequel on sait, comme le dit Clairaut, quelles composantes didactiques doivent constituer les situations-problèmes dont nous devrions jalonner le temps d'enseignement ? Sans que ces composantes soient toujours nécessaires dans leur ensemble, voici celles qui nous paraissent constituer le plus souvent un processus d'apprentissage compatible avec notre volonté de développer ce qui est communément appelé "esprit scientifique" :

— partir du questionnement d'une situation, mais en inscrivant son sens dans une perspective théorique, conjecturer une réponse (éventuellement faire un pari), la formuler sous forme d'hypothèse avec les outils cognitifs à notre disposition au moment présent ;

— modéliser, et donc suspendre provisoirement le seul sens personnel en faveur d'une formalisation admise par le groupe-classe ;

— traiter la situation formelle, éventuellement changer de cadre de résolution, de registres d'expression et mettre en place de nouveaux outils ;

— interpréter les réponses et résultats obtenus, et, donc, restituter du sens ; éventuellement, réfuter une hypothèse, revenir sur la modélisation et la formalisation choisies ;

— participer à leur institutionnalisation, objectivation qui tient lieu de mise en accord intersubjectif ;

— expliquer, généraliser, anticiper, prévoir dans des situations comparables et donc élargir le sens du questionnement initial.

5. Des propositions

L'approche par les "problématiques" va donc consister à identifier les grandes classes de situations-problèmes susceptibles de conduire à la génération des contenus d'enseignement plus ou moins traditionnels. Il s'agit d'un ensemble ordonné ni par le temps, ni par des classes de contenus disjointes organisées selon une logique "bourbakiste" a posteriori. Il s'agit, à travers le mot “problématique” de faire référence à deux investigations principales qu’il faut mener, expliciter et conjoindre :

— des classes de problèmes que les contenus mathématiques acquis ou à construire permettraient de résoudre dans le cadre de finalités cognitives ou méthodologiques ;
— des classes de situations qui peuvent naturellement poser question aux élèves, parce que soumises à des contraintes ou à des nécessités, situations d’origine mathématique ou non (extra-disciplinaire, sociale, quotidienne,...).

Nous en avons entrepris l’identification. Celle-ci nécessite d’être conduite en référence à des objectifs généraux de l’enseignement, des objectifs spécifiques des mathématiques, en y associant des situations, des démarches et des contenus, le tout en fonction des différents niveaux scolaires. Ces situations doivent recéler suffisamment de sens pour l’élève afin que son engagement soit réel et déterminant dans sa participation à une nouvelle acquisition.

Au cours d’une même situation, une ou plusieurs problématiques peuvent être en jeu. Cependant, leur inventaire ne cache pas que toute formation, générale ou technique, de notre temps, doit les prendre en compte dans les cursus scolaires. Finalement, ce travail ambitieux doit se révéler fécond à plusieurs titres :

— permettre une réflexion approfondie sur la “raison” du savoir pour l’élève,
— permettre de ne pas négliger des aspects essentiels de cette “raison” en donnant un sens à l’introduction de notions et en classant les problèmes en fonction d’une signification problématique,
— harmoniser les composantes essentielles d’un curriculum et en montrer la récurrence tout le long de son développement.

Voici donc les dix problématiques que nous avons retenues comme constitutives d’un nouveau regard sur les programmes du secondaire et que nous illustrerons par des situations significatives.

Dix “problématiques” pour l’enseignement des mathématiques

En référence privilégiée à des contenus

1) Repérage
2) Représentations figurales et/ou graphiques. Propriétés des modèles associés
3) Dynamique des points, des figures et des nombres
4) Techniques algorithmiques
5) Traitement et représentation de données statistiques

En référence privilégiée à des objectifs méthodologiques

6) Changements de cadres et de registres
7) Recueil, traitement, consultation et communication de l’information
8) Modélisation d’une situation et résolution de problèmes avec recherche de solutions adéquates à certaines conditions
9) Choix opportun et optimal des outils et des méthodes dans des situations sous contraintes
10) Conjectures et preuves.

Présentation de deux problématiques

Lors de la journée de rencontre SBPM-APMEP du 15 février 1997, deux collègues français ont présenté plus en détail les problématiques n° 2 (Représentations figurales et/ou graphique. Propriétés des modèles associés) et n° 6 (Changements de cadres et de registres).

Voici tout d'abord deux tableaux, le premier se référant à la problématique n° 2 et le second à la problématique n° 6), présentant les situations, contenus et démarches.

NDLR

Les listes qui suivent ne prétendent pas être exhaustives quant aux situations et aux contenus. Elles nécessitent d'être élargies, précisées et spécifiées à des niveaux de classe du second cycle, ainsi qu'à ses différentes filières.

Situations	**Contenus**
$*$ Constructions de figures (triangles ou quadrilatères en particulier) à partir de la donnée de paramètres ou d'éléments de la figure. $*$ Représentations sur la feuille de papier de figures planes et de solides (perspective cavalière). $*$ Développement de solides et relation entre surface et volume. $*$ Décomposition de lignes (resp. de solides) simples pour accéder à des mesures approchées de longueurs (resp. d'aires, de volumes).	$*$ Rappels des propriétés des éléments "remarquables" du triangle et de la classification des quadrilatères selon les critères de directions et de longueurs. $*$ Solides usuels. Propriétés de la sphère, de la pyramide, du cylindre et du cône. $*$ Surfaces latérales et volumes de quelques solides. $*$ Génération de surfaces à l'aide d'une courbe.
$*$ Courbes ou surfaces définies à partir de phénomènes physiques : sinusoïdes, coniques, chaînette, hélice, cycloïde, cardioïdes, franges d'interférences, paraboloïde,... $*$ Recherche de l'équation d'une courbe dont on donne des points d'intersection avec les axes ou d'autres éléments en nombre suffisant ou non.	$*$ Equation cartésienne de certaines courbes, de certaines surfaces et leur représentation à partir d'une relation explicite (ex. : $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ ou implicite (ex. : $x = f(t)$, $y = g(t)$). $*$ Autres types de définition en coordonnées semi-polaires, polaires, cylindriques.
$*$ Problèmes de contact. $*$Etude de familles de courbes dépendant d'un paramètre : familles de droites passant par un point, faisceaux de cercles, ...	$*$ Equation de tangentes, de plans tangents.
$*$ Représentation d'un ordre et d'un préordre partiels. Recherche d'un chemin dans un graphe.	$*$ Notions sur les graphes : sommets, arcs, chemins,...

Situations	**Contenus**	**Démarches**
∗ Lecture critique d'un texte mathématique (énoncé de problème, extrait de manuel, texte historique...), suivie d'une discussion. *Exemple : article "croix ou pile" de la Grande Encyclopédie.*	∗ Enoncé de géométrie ambigu (divers cas de figure), démonstration sujette à caution, erreur historique d'un mathématicien...	∗ Extraire l'information pertinente dans un but d'argumentation. Mettre ces éléments sous une autre forme, jugée plus apte à emporter la conviction (d'un autre ou de soi-même).
∗ Résolution mathématique d'un problème énoncé en langue naturelle ("word problem" des anglo-saxons). *Exemples : problème de croisement de mobiles, problème de programmation linéaire.*	∗ Exercice de probabilités : schéma d'urne, probabilité conditionnelle... ∗ Problème "concret" menant à utiliser l'algèbre, l'analyse ou la géométrie.	∗ Passer au registre symbolique au cours de la démarche de modélisation (cf problématique n° 8).
∗ Résolution d'un problème grâce à un ou plusieurs changements de cadres et/ou de registres (pilotés par l'enseignant ou imaginés par l'élève). *Exemples : recherche de la section, problème d'alignement, d'orthogonalité, de lieu...*	∗ Problème de géométrie de l'espace dont la résolution fait intervenir la géométrie plane. ∗ Problème de géométrie plane dont la résolution peut faire intervenir le vectoriel, les transformations, l'analytique, les complexes...	∗ Changer de cadre ou de registre, dans le but de faciliter la résolution du problème, et revenir dans le cadre et le registre initiaux pour contrôler la démarche de résolution réalisée ou en cours.
∗ Accès aux concepts d'analyse par le recours au registre graphique de l'analytique. *Exemples : introduction du nombre dérivé, introduction de l'intégrale définie.*	∗ Situation d'analyse pour laquelle la visualisation permet de se représenter le problème et d'envisager une démarche de résolution (nombre dérivé et pente, intégrale et aire).	∗ (Pour le professeur) Prendre appui sur un registre familier pour introduire un nouveau concept.
∗ *Exemple : problème de probabilités conditionnelles.*	∗ Construction et utilisation des tableaux de probabilités et des arbres pondérés, "lecture" de représentations graphiques de fonctions numériques.	∗ (Pour le professeur) Institutionnaliser les règles de fonctionnement de certains registres.

Exemple d'activité entrant dans le cadre de la problématique n° 2

Philippe BARDY

Je vous présente aujourd'hui une activité testée deux ans de suite en classe de 1ère E.S. (option Maths), après que de nouveaux programmes aient été mis en place.

Cette série, troisième voie entre les séries scientifique et littéraire, est souvent mal considérée par les élèves, et l'on y retrouve souvent des gens orientés par défaut. Ces élèves, même s'ils ont choisi l'option Maths, ont souvent fait une classe de Seconde (indifférenciée) médiocre, et ont mal assimilé, voire détesté, les parties les plus ardues du cours. C'est en particulier le cas de la géométrie (calcul vectoriel, transformations), et plus encore de la géométrie dans l'espace.

Or, ces nouveaux programmes de 1ère E.S. ont introduit, en option Maths, de la géométrie plane et dans l'espace (repérage, barycentre, produit scalaire).

La tâche était donc difficile de "faire passer" cette géométrie à des élèves a priori réticents.

Bien que ne travaillant pas encore dans le groupe "Problématiques" de l'APMEP, mon interrogation a été : "comment problématiser la notion de barycentre pour qu'elle s'impose le plus aisément possible ?".

Une heure de "bricolage" à équilibrer des tiges auxquelles pendaient quelques briques Légo m'a permis de définir le "point d'équilibre" (pas encore appelé barycentre pour éviter d'effrayer par un mot à consonance barbare !) de deux points pondérés par des coefficients positifs, et d'arriver à traduire sa position vectoriellement. Une deuxième heure a permis d'équilibrer trois ou quatre points (à coefficients toujours positifs) et de voir le calcul des coordonnées du "point d'équilibre".

C'est à ce moment que se présente l'activité ci-dessous.

Bien que présentant un changement de cadre important et intéressant (problématique n° 6), j'ai placé cette activité dans la problématique n° 2, car l'objectif est bien de construire et de faire fonctionner des barycentres.

1. L'activité

1) Prérequis :
   — Moyenne pondérée,
   — Résolution graphique d'inéquations du premier degré à deux inconnues,
   — Définition et construction d'un barycentre (éventuellement uniquement avec des coefficients positifs),
   — Définition et propriété de l'homothétie.
2) Déroulement de l'activité :
   — Une séance d'une heure pour la phase 1,
   — Une séance d'une heure pour la phase 2.
3) Gestion de la classe :
   — Travail individuel avec confrontation des résultats avec le voisin, pour la phase 1,
   — Travail en groupes (3 ou 4 élèves) pour la phase 2,
   — Prévoir suffisamment de papier millimétré pour éviter la perte de temps des tracés.

2. Quelques observations

1) Activité qui démarre bien, puisque le début est très accessible à tous.
2) La fin de la partie 1 surprend certains élèves qui n'avaient pas perçu qu'il s'agissait d'une traduction de contraintes, et qui n'attendaient donc pas des inéquations.
3) A la question 2 de la partie 2, on obtient dans pas mal de groupes des idées intéressantes, souvent incomplètes, plutôt orientées "équilibre", ou plutôt "vectorielles".

   Il est intéressant de les laisser s'exprimer, se développer, voire se compléter. L'enseignant doit donc naviguer subtilement entre une attitude d'institutionnalisation (synthèse des idées) et une ouverture permanente.

   Ce n'est qu'après un temps assez long d'appropriation des différentes idées qu'il faut passer réellement à la synthèse globale, montrant l'intérêt du travail géométrique (barycentre, vecteurs, homothéties), la richesse de la notion de barycentre (aspect vectoriel, "équilibre", moyenne pondérée), et l'efficacité de va-et-vient entre les cadres analytique et géométrique.

4) La dernière question sert à convaincre de l'efficacité de l'outil barycentre, et à vérifier l'appropriation par les élèves de la synthèse faite précédemment. D'ailleurs plusieurs prolongements ont eu lieu (différents les deux années), à l'initiative des élèves, en partant de situations "extrêmes" : notes de trimestre très faibles, ou très fortes, y a-t-il des cas où ce n'est plus la peine de passer l'examen car c'est déjà "foutu", ou au contraire déjà "gagné" ?

3. Mise en regard avec la problématique n° 2

Cette activité peut se faire très tôt après un cours minimal sur les barycentres. Elle en montre l'intérêt, et permet aux élèves de fixer des images mentales de certaines propriétés.

L'appel à un calcul vectoriel simple, à une utilisation abordable de l'homothétie ([3]) redonne à beaucoup d'élèves de cette série le goût pour la géométrie qu'ils avaient perdu en pratiquant des exercices trop "gratuits".

Comme indiqué dans la description de la problématique n° 2 (bulletin de l'APMEP, supplément au n° 401), cette activité est bien centrée sur les verbes **représenter, conjecturer, justifier, calculer**. De même, cette activité permet bien de "relier différents cadres et registres en insistant sur le passage légitime et fructueux du niveau de la prévision à celui de la justification".

Elle contient, de manière intéressante, deux théorèmes en action : l'associativité de la barycentration (de façon évidente), et la linéarité des coefficients (la deuxième année, plusieurs groupes d'élèves m'ont proposé de remplacer le système $[A(8), E(4)]$ par le système $[A(2), E(1)]$). Il est alors bien plus facile de les institutionnaliser par la suite dans le cours.

Cette activité pourrait aussi, un peu remaniée, servir à définir la notion même de barycentre.

1ère ES (option maths) Activité "Barycentre"

3. L'image d'un seul point suffit pour obtenir le tracé complet si on utilise le parallélisme et les distances.

Dans son année scolaire, un étudiant passe en maths et physique un partiel par trimestre (il y en a 3), et un examen terminal. Dans chaque matière, ces devoirs ont pour coefficients : $2, 3, 3$ et 4.

Pour avoir la validation de son année, il doit obtenir dans chaque matière une moyenne coefficientée supérieure ou égale à 10, ou, deux moyennes supérieures ou égales à 8 dont la somme soit supérieure ou égale à 21.

Partie 1

1) Voici les notes de trois élèves. Leur année est-elle validée ?

Alain :

	trim. 1 (2)	trim. 2 (3)	trim. 3 (3)	exam. (4)
maths	11	12	10	8
physique	9	9	13	12

Bella :

	trim. 1 (2)	trim. 2 (3)	trim. 3 (3)	exam. (4)
maths	12	13	10	6
physique	11	11	11	11

Cindy :

	trim. 1 (2)	trim. 2 (3)	trim. 3 (3)	exam. (4)
maths	11	11	10	8
physique	9	10	13	12

Aide individuelle : rappeler la notion de moyenne pondérée.

2) Voici les notes des trois trimestres d'un élève. Quelles notes peut-il avoir à l'examen pour obtenir son année ?

Denis :

	trim. 1 (2)	trim. 2 (3)	trim. 3 (3)	exam. (4)
maths	10	7	9	
physique	10,5	9	12	

Aide individuelle : proposer le calcul intermédiaire de la moyenne annuelle des trois trimestres. Suggérer une mise en (in)équations (cf. problématique n° 4).

3) Et pour cet autre élève ?

Enzo :

	trim. 1 (2)	trim. 2 (3)	trim. 3 (3)	exam. (4)
maths	10	4	8	
physique	16	11	13	

Remarque : suivant la classe, on peut laisser les élèves traiter cette question, ou la stopper en faisant remarquer son côté fastidieux.

Partie 2

Dans cette partie, on se propose de reprendre les questions de la partie 1, mais en faisant une représentation graphique des différentes situations.

Comme on a été amené à le faire dans la **partie 1**, on va repérer les notes de maths et de physique sur deux axes (orthonormés).

Pour un élève donné, chaque trimestre sera représenté par le point dont les coordonnées sont les notes obtenues ce trimestre. De même pour l'examen et pour les moyennes.

1) Pour chacun des trois premiers élèves, représenter sur trois graphiques différents les points T_1, T_2, T_3, et E correspondant aux trois trimestres et à l'examen.
   Qu'est-ce que le point M (moyennes finales) pour les points T_1, T_2, T_3, et E ?
   Le construire pour chacun des trois élèves. Vérifier avec les calculs de la **partie 1**.
   Aide individuelle : suivant la classe, on peut guider vers un travail vectoriel, se contenter de “point d'équilibre”, utiliser l'associativité.
2) Pour le quatrième élève, représenter les points T_1, T_2, T_3.
   Construire, sans calcul, le point A correspondant aux moyennes des trois trimestres.
   Placer quatre points M (moyennes finales) qui permettraient à Denis d'obtenir sa validation (on les notera M, M', M'', M''').

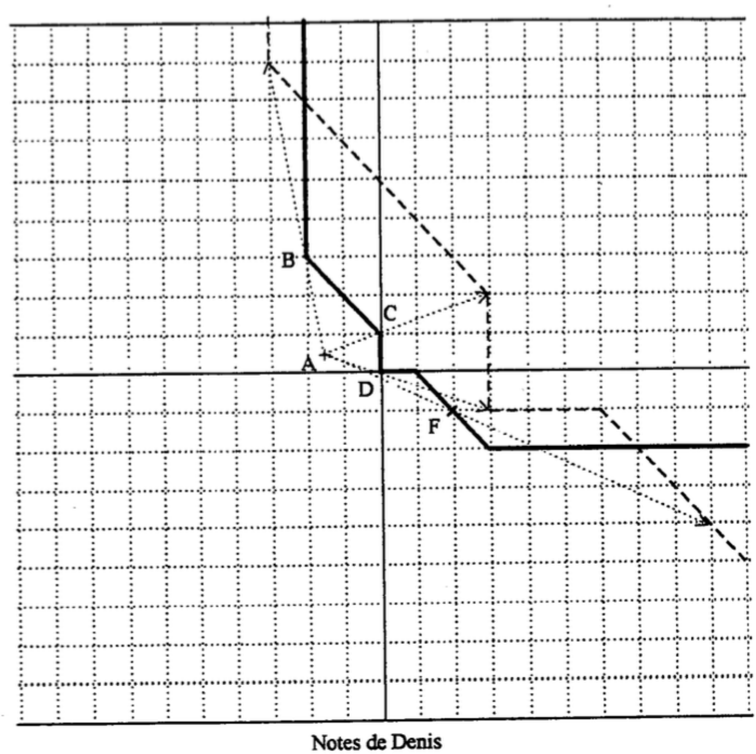
Construire dans chacun des cas le point E correspondant aux notes d'examen (on les notera N, N', N'', N''').

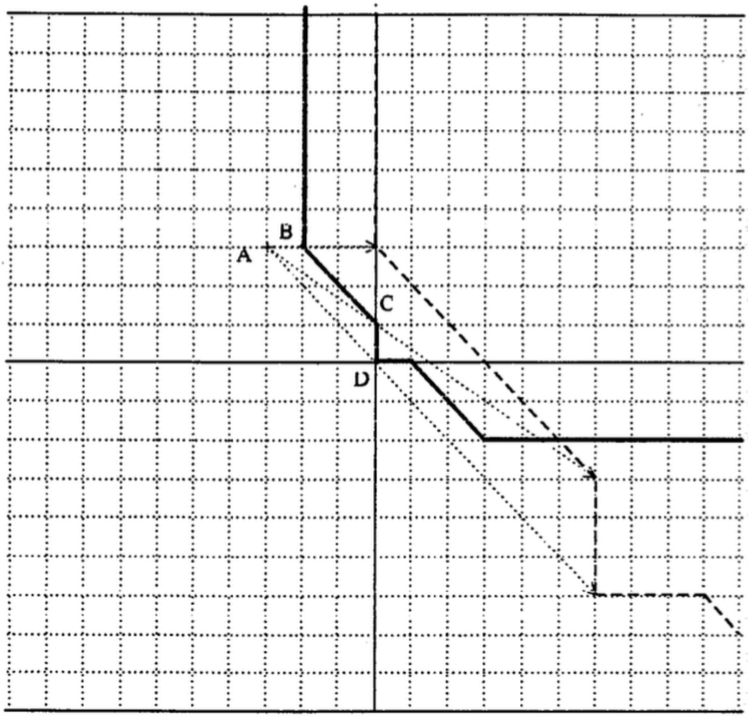
Remarque : c'est là que le travail en groupe devient intéressant.

Comment généraliser à toutes les situations de succès ?

Remarque : il est nécessaire de laisser la question très ouverte, et de laisser du temps pour chercher.

3) Application : refaire le même travail avec les notes de Enzo. Comparer avec la méthode analytique.





Notes d'Enzo

Problématique n° 6

Changements de cadres et de registres

Un exemple de mise en oeuvre des changements de cadres et de registres :

l'introduction du nombre dérivé en classe de Première

Bernard PARZYSZ

Cette séquence a été expérimentée en classe de Première ES (section : Sciences économiques et sociales). Le texte ci-dessous prend en compte les enseignements de cette expérimentation.

1. Idée générale

Il s'agit d'introduire le nombre dérivé de la fonction f en x_0 comme coefficient directeur, non pas de la position limite d'une sécante à la courbe représentative de f pivotant autour du point $(x_0; f(x_0))$, mais de la meilleure approximation affine de f en x_0. Cette approche d'un concept d'analyse fait jouer un rôle primordial à la géométrie analytique.

2. Pré-requis

- détermination des bornes d'un intervalle réel, de centre et de taille donnés,
- limite d'une fonction en un point,
- détermination du coefficient directeur d'une droite passant par deux points de coordonnées données,
- programmation de la calculatrice graphique pour faire afficher une courbe d'équation $y = f(x)$ dans une fenêtre donnée.

3. Déroulement de la séquence

1er tableau : les élèves sont répartis en groupes de 3 ou de 4, chaque groupe disposant d'une calculatrice graphique au moins.

La consigne est de *représenter graphiquement la fonction* $f : x \to -\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$ *dans une fenêtre orthonormale de la calculatrice, centrée sur le point* A *de la courbe de coordonnées* $\left(2; \frac{3}{2}\right)$ *et de largeur* 6.

On commence par une étude qualitative. La consigne est ensuite de *rétrécir* cette fenêtre *ad libitum*, mais en la centrant toujours sur le point A, et d'observer les modifications correspondantes de l'arc affiché. Le seul paramètre sur lequel peuvent jouer les élèves est la largeur de la fenêtre.

En fait, les élèves remarquent que, lorsque la fenêtre rétrécit, la "courbure" diminue (la courbe "se redresse"), et que l'arc de courbe observable finit par ressembler à un segment de droite : pour une fenêtre suffisamment petite, la courbe se confond pratiquement avec une droite.

N.B. : 1) une petite mise au point sur la façon d'obtenir une fenêtre orthonormée centrée sur A est nécessaire.

2) on peut, bien sûr, prendre un autre type de fonction, mais en évitant toutefois les fonctions trinômes du second degré. En effet, celles-ci possèdent la propriété que, pour tout réel h : $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$, propriété qui peut se révèler gênante dans certaines procédures des élèves (2ème tableau, ci-après) pour les amener à rechercher une limite.

2ème tableau : On se propose maintenant d'effectuer une étude quantitative : *il s'agit de déterminer une équation de la "droite" affichée sur l'écran de la calculatrice.* Pour cela, il suffira de trouver son coefficient directeur, puisqu'on sait qu'elle passe par le point $A\left(2; \frac{3}{2}\right)$.

On distribue alors aux groupes un tableau dans lequel sont indiquées diverses largeurs de fenêtre, de plus en plus petites. Il s'agit, pour chacune des fenêtres correspondantes :

1) d'afficher la courbe,
2) de déterminer le coefficient directeur de la "droite" qui s'affiche.

Diverses stratégies apparaissent pour résoudre cette question :

a) *en ce qui concerne les points choisis pour déterminer le coefficient directeur* :

- certains élèves prennent deux points quelconques, dont ils déterminent les coordonnées par l'un des deux procédés indiqués ci-après ; les abscisses de ces points peuvent éventuellement être les bornes de la fenêtre ;
- certains choisissent systématiquement pour abscisses les bornes de la fenêtre ;
- certains utilisent le point A comme l'un des deux points.

b) *en ce qui concerne la détermination des coordonnées de ces points* :

- certains élèves utilisent la fonction TRACE de leur calculatrice, qui indique les coordonnées d'un point choisi de la courbe, mais les arrondit parfois ; dans ce cas, le coefficient directeur trouvé, dépendant de cet arrondi, n'est qu'approximatif ;
- certains calculent l'ordonnée en utilisant la définition de la fonction f, obtenant ainsi une valeur exacte.

Ces stratégies diverses et variées deviennent source de conflit au sein de certains groupes : quelle est la "bonne" méthode ? Une courte phase collective de débat sur la question permet de régler le problème et d'opter pour le *calcul de l'ordonnée.*

La mise en commun montre que les groupes (et même parfois différents individus au sein d'un même groupe) ont obtenu pour le coefficient directeur des valeurs différentes, quoique "voisines", et que, pour une même méthode, des fenêtres différentes donnent des valeurs différentes. Par exemple :

a) si on prend le point $\left(2; \frac{3}{2}\right)$ et un autre point, celui de l'abscisse $2,01$: on a $f(2,01) = 1,48989975$. D'où la valeur $-1,010025$;
b) si on prend le point $\left(2; \frac{3}{2}\right)$ et un autre point, celui de l'abscisse $1,995$: on a $f(1,995) = 1,504975031$. D'où la valeur $-0,9950062$;
c) si on prend les points d'abscisses $1,99$ et $2,01$: on a $f(1,99) = 1,50990025$ et $f(2,01) = 1,48989975$. D'où la valeur $-1,000025$.

En résumé, *on obtient dans tous les cas des valeurs voisines de* -1. Mais y a-t-il réellement une valeur limite ? On peut certes le conjecturer, mais ce n'est pas suffisant.

<u>3ème tableau</u> : La diversité des tailles de fenêtres, de même que la constatation du fait que "plus la fenêtre est petite, plus la courbe est droite", conduit, après débat, à rechercher la pente en s'appuyant, d'une part sur le point $A\left(2; \frac{3}{2}\right)$ qui est indépendant de la fenêtre considérée, et d'autre part sur un point M "très voisin" de A.

On aboutit, après débat, à la consigne suivante : *Soit M le point de la courbe d'abscisse $2+h$ (avec h "petit"). Déterminer le coefficient directeur de la droite (AM).* Le calcul donne la valeur $-\left(1 + h + \frac{h^2}{4}\right)$, qui est "à la limite" égale à -1.

<u>4ème tableau</u> : Ayant ainsi caractérisé la droite qui se confond pratiquement avec la courbe au "voisinage" du point A, on peut maintenant chercher son équation et la faire afficher par la calculatrice, conjointement avec la courbe, dans la fenêtre initiale $[-1; 5]$; on constate alors :

1) qu'elle "frôle" cette courbe, mais que la presque coïncidence n'est que locale ;
2) qu'elle recoupe la courbe en un second point, $B\left(-2; \frac{11}{2}\right)$.

Vient ensuite l'institutionnalisation, dans laquelle on considère une fonction f quelconque et un point d'abscisse x_0, un coefficient directeur $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, le problème de l'existence, la définition, etc.

4. Analyse de cette séquence du point de vue des cadres et des registres

L'apprentissage visé est relatif au cadre de l'analyse réelle (nombre dérivé d'une fonction en un point), et plus précisément à celui des fonctions réelles d'une variable réelle. Cependant, le 1er tableau, dans lequel est posé le problème, se situe dans le cadre de la géométrie repérée (analytique) ; la raison en est que le registre graphique de ce cadre permet aux élèves de se faire une représentation à forte composante visuelle de ce problème (au voisinage d'un point, la courbe est "presque" une droite), à l'aide d'une activité qui est, elle aussi, de nature essentiellement graphique (modifier la fenêtre de la calculatrice et observer ce qui se passe).

Le 2ème tableau se situe, lui aussi, dans ce même cadre de la géométrie analytique (coefficient directeur d'une droite définie par deux points), et fait intervenir, en plus du registre graphique, le registre numérique (coordonnées de points), par une succession de va-et-vient, puis le registre symbolique (formule $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ permettant le calcul du coefficient directeur). On a ici le schéma suivant :

<u>Registres</u> :

graphique	$\leftrightarrow$	numérique ($\mathbb{R}^2$)	$\rightarrow$	symbolique + numérique

<u>Démarches</u> :

repérage des points à utiliser	détermination des coordonnées	détermination du coefficient directeur

(N.B. : le passage du registre graphique au registre numérique est facilité par la calculatrice (qui fournit les coordonnées d'un point choisi), mais celle-ci peut cependant se révéler obstacle à la résolution du problème (arrondis) ; il convient donc d'être vigilant).

L'insuffisance des résultats numériques trouvés (pentes différentes, quoique voisines), ainsi que le contrat didactique habituel en mathématiques, amènent les élèves à rechercher une justification (3ème tableau), et à se poser ainsi un nouveau problème, situé cette fois dans le cadre de l'analyse réelle (existence et valeur d'une limite), par une référence au registre graphique du cadre analytique (influence de la taille de la fenêtre) ; le travail est dorénavant placé dans le registre symbolique (recherche de la limite de $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0). Pour répondre à la question initialement posée, il s'agira ensuite, par un retour au cadre de la géométrie analytique, d'interpréter cette limite comme étant "la vraie pente" de la droite approximant la courbe, et de revenir finalement au registre graphique (tableau 4) pour faire dessiner cette droite (tangente), afin de contrôler ainsi à la fois le résultat du calcul symbolique et le fait que l'on a bien répondu à la question posée.

La progression de la séquence peut donc être schématisée de la façon suivante :

Cadres :

analyse →	**analytique** →	**analyse** →	**analytique**

Registres :

symbolique	*graphique* *numérique* *symbolique*	*symbolique*	*symbolique* *graphique*

Démarches :

	observation de la courbe, calcul des coeff. dir.	recherche d'une limite	tangente à la courbe

On voit que ce qui permet aux élèves de progresser dans leur démarche, c'est bien sûr la possibilité d'effectuer un travail véritable dans un cadre et un registre donnés, mais aussi :

1) l'existence d'un cadre et d'un registre d'appui (ici : le cadre de la géométrie analytique, et le registre graphique) qui permettent, non seulement – et ce n'est pas négligeable – d'établir un lien entre

différents aspects du concept visé (ici : nombre dérivé et tangente), mais aussi de faciliter les conjectures, de donner du sens aux actions effectuées et de contrôler celles-ci.

2) l'insuffisance du travail dans un seul cadre et dans un seul registre, car la démarche induit des questions qui ne peuvent être résolues que par le recours à un autre cadre (ici : l'analyse) et/ou à un autre registre (ici : le registre symbolique). En fait, c'est, dans une large mesure, cette succession de changements et ces va-et-vient qui constituent l'élément moteur de la démarche, et lui permettent d'aboutir.

Olympiades

C. Festraets,

Le 27 mars 1997, les élèves ayant obtenu un score supérieur à 100 à la demi-finale de l'OMB étaient invités à participer au "15th Annual American Invitational Mathematics Examination". Ils disposaient de 3 heures pour répondre aux 15 questions (calculatrices et tables interdites), chaque réponse étant un entier compris entre 0 et 999 inclus.

Les meilleurs résultats sont ceux de :

Eric VANDENBUSSCHE	:	10/15,
Laurent WAXWEILER	:	9/15,
Seji MASSON	:	8/15,
Michel BAES	:	7/15.

Voici les questions. Vous trouverez les réponses à la fin de cet article.

1. Combien parmi les entiers entre 1 et 1000 inclus peuvent être exprimés comme la différence des carrés de deux entiers non négatifs ?
2. Les neuf lignes horizontales et les neuf lignes verticales d'un échiquier 8×8 forment r rectangles parmi lesquels s sont des carrés. Le nombre $\frac{s}{r}$ peut être écrit sous la forme $\frac{m}{n}$, où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux.
   Trouver $m+n$.
3. Sarah désire multiplier un nombre à deux chiffres par un nombre à trois chiffres. Mais elle laisse tomber le signe de multiplication et simplement place le nombre à deux chiffres à gauche du nombre à trois chiffres formant ainsi un nombre à cinq chiffres. Ce nombre vaut exactement neuf fois le produit que Sarah aurait dû obtenir.
   Quelle est la somme des nombres à deux et à trois chiffres ?
4. Des cercles de rayons $5, 5, 8$ et $\frac{m}{n}$, où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux, sont mutuellement tangents extérieurement.
   Trouver $m+n$.
5. Le nombre r peut être exprimé sous la forme d'un nombre à quatre décimales $0,abcd$, où a, b, c et d représentent des chiffres, pouvant éventuellement être zéro. On désire approcher r par une fraction dont le numérateur est 1 ou 2 et dont le dénominateur est un entier. La fraction de ce type la plus proche de r est $\frac{2}{7}$.
   Quel est le nombre de valeurs possibles pour r ?

6. Le point B se trouve à l'extérieur du polygone régulier à n côtés $A_1A_2\dots A_n$ et A_1A_2B est un triangle équilatéral.

   Quelle est la plus grande valeur de n pour laquelle A_n, A_1 et B sont des sommets consécutifs d'un polygone régulier.

7. Une voiture se déplace droit vers l'Est à la vitesse de $\frac{2}{3}$ mile par minute sur une longue route droite. Au même moment, une tornade (tempête circulaire), dont le rayon est de 51 miles, se déplace vers le Sud-Est à la vitesse de $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ mile par minute. Au temps $t = 0$, le centre de la tornade se trouve à 110 miles exactement au Nord de la voiture. Au temps $t = t_1$ minutes, la voiture pénètre dans le cercle de la tempête et au temps $t = t_2$ minutes, elle en ressort.

   Trouver $\frac{t_1+t_2}{2}$.

8. Combien de tableaux 4×4 différents, dont les entrées sont toutes des 1 ou des -1 ont la propriété que la somme des entrées dans chaque ligne est 0 et la somme des entrées dans chaque colonne est 0.

9. Si x est un nombre réel non négatif, on définit $< x >$ la partie fractionnaire de x, c'est-à-dire $< x >= x - \lfloor x \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x. Supposons que a est positif, $< a^{-1} >=< a^2 >$ et $2 < a^2 < 3$.

   Trouver la valeur de $a^{12} - 144a^{-1}$.

10. Chaque carte dans un paquet a trois caractères : un dessin d'une des formes - cercle, carré ou triangle-, elle est peinte en une des trois couleurs - rouge, bleu ou vert - et de plus, chaque couleur apparaît en une des nuances - clair, moyen ou foncé -. Le paquet comprend 27 cartes et toutes les combinaisons forme - couleur - nuance sont représentées.

    Un ensemble de trois cartes du paquet est dit *complémentaire* si toutes les affirmations suivantes sont vraies :

    (i) chacune des trois cartes a une forme différente ou les trois cartes ont la même forme,
    (ii) chacune des trois cartes a une couleur différente ou les trois cartes ont la même couleur,
    (iii) chacune des trois cartes a une nuance différente ou les trois cartes ont la même nuance.

    Combien d'ensembles de trois cartes complémentaires différents y a-t-il ?

11. Soit $x = \dfrac{\displaystyle\sum_{n=1}^{44} \cos n^\circ}{\displaystyle\sum_{n=1}^{44} \sin n^\circ}$.

    Quel est le plus grand entier qui ne dépasse pas $100x$?

12. La fonction f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des nombres réels non nuls, a les propriétés $f(19) = 19$, $f(97) = 97$ et $f(f(x)) = x$ pour toutes les valeurs de x sauf $-\frac{d}{c}$.

    Trouver l'unique nombre qui n'appartient pas à l'image de f.

13. Soit S l'ensemble des points du plan cartésien satisfaisant

    $$|||x| - 2| - 1| + |||y| - 2| - 1| = 1.$$

    Si un modèle de S était construit à l'aide de fil d'épaisseur négligeable, alors la longueur totale de fil nécessaire serait $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers positifs et b n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier.

    Trouver $a + b$.

14. Soit v et w des racines distinctes de l'équation $z^{1997} - 1 = 0$, choisies au hasard. Soit $\frac{m}{n}$ la probabilité que $\sqrt{2+\sqrt{3}} \leqslant |v + w|$ où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux.

    Trouver $m + n$.

15. Les côtés du rectangle $ABCD$ ont pour longueur 10 et 11. Un triangle équilatéral est dessiné de telle sorte qu'aucun des points du triangle ne se trouve à l'extérieur de $ABCD$. L'aire maximale possible pour un tel triangle peut être écrite sous la forme $p\sqrt{q} - r$ où p, q et r sont des entiers positifs, et q n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier.

    Trouver $p + q + r$.

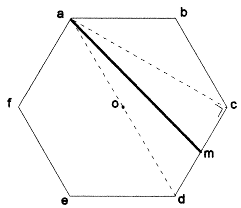
* * * * *

A présent, je vous propose les solutions des quatre problèmes MINI de la finale de l'OMB 97. Ces solutions sont choisies parmi les meilleures rédigées par les candidats.

MINI 1

Dans le plan, construire par un sommet d'un hexagone régulier une droite qui partage l'intérieur de l'hexagone en deux régions dont l'une a une aire double de l'autre.

Solution de Mathieu REMY, 2ème, Centre scolaire Saint-Michel, Bruxelles.



H est l'aire de l'hexagone régulier $abcdef$ de centre O. Si une des régions doit avoir une aire double par rapport à l'autre, c'est que l'une vaut $\frac{2}{3}$ de l'hexagone $\left(\frac{2H}{3}\right)$ et que l'autre vaut $\frac{1}{3}$ de l'hexagone $\left(\frac{H}{3}\right)$.

Soit D la droite issue de a passant par m, ce dernier se trouvant sur un des côtés de l'hexagone ; D coupe l'hexagone en deux parties, l'une d'aire $\frac{H}{3}$ et l'autre d'aire $\frac{2H}{3}$.

1. M ne peut pas se trouver sur bc (ni sur fe) car $aire\ abc = \frac{H}{6}$ et $\frac{H}{6} < \frac{H}{3}$.
2. m se trouve donc sur dc (ou sur ed, mais je travaillerai sur dc).
   $\widehat{acd}$ est un angle droit, car il est inscrit dans un demi-cercle.
   $$aire\ abcm \left(\frac{H}{3}\right) = aire\ abc \left(\frac{H}{6}\right) + aire\ acm \left(\frac{H}{6}\right)$$
   (m est encore inconnu).
3. acd et acm ont tous deux la même hauteur ac et acd vaut le double de acm, cela entraîne que la base (dc) de acd vaut le double de celle (mc) de acm.

On en conclut que m est le milieu du côté dc, à condition que la droite D soit issue de a.

MINI 2

Le nombre $1997^4 + 4^{1997}$ *est-il premier ?*

Solution de Axel BAUDSON, 2ème, Athénée Royal, Binche.

J'ai décidé de chercher quels sont les derniers chiffres du nombre $1997^4 + 4^{1997}$, car ce sont généralement ces derniers chiffres qui influencent la divisibilité. J'ai donc commencé par essayer de prévoir le chiffre des unités.

En prenant les puissances de 4, on peut remarquer ceci : le chiffre représentant les unités se répète :

$$4^1 = \underline{4}, \qquad 4^2 = 1\underline{6}, \qquad 4^3 = 6\underline{4}, \qquad 4^4 = 25\underline{6}, \ldots$$

Lorsque l'exposant est pair, le chiffre des unités sera 6 et lorsqu'il est impair, le chiffre des unités est 4.

On peut donc prévoir que dans 4^{1997}, le chiffre des unités sera 4.

En ce qui concerne 1997^4, le chiffre des unités sera déterminé par les puissances de 7. Or, $7^4 = 240\underline{1}$.

On peut donc déduire que dans 1997^4, le chiffre des unités sera 1.

Donc, dans $1997^4 + 4^{1997}$, le chiffre des unités sera $4 + 1 = 5$. Or, tout nombre dont le chiffre des unités est 5 est forcément divisible par 5. Et $1997^4 + 4^{1997}$ n'est pas premier.

MINI 3

En Algébristan, un mariage ne peut se contracter qu'entre deux personnes adultes de sexes différents. Les $\frac{3}{4}$ *des hommes adultes sont mariés aux* $\frac{5}{7}$ *des femmes adultes.*

La proportion des adultes mariés est-elle déterminée par ces informations ? Si oui, quelle est cette proportion ?

Solution de Etienne LEFEBVRE, 1ère, Collège Saint-Hubert, Bruxelles.

Si chaque homme marié ne peut avoir qu'une seule femme, alors s'il y a 20 hommes, il y en aura 15 de mariés $\left(\frac{3}{4}\right)$ et donc, il y aura aussi 15 femmes mariées puisque chaque homme ne peut avoir qu'une seule femme.

15 est $\frac{5}{7}$ de 21, donc pour 41 adultes $(20 + 21)$, il y en aura 30 mariés.

$\frac{30}{41}$ des adultes en Algébristan sont mariés.

Mais si un homme peut avoir plusieurs femmes, alors il est impossible de déterminer la proportion des adultes mariés.

MINI 4

Deux polygones réguliers, l'un à quinze côtés et l'autre à seize côtés, sont inscrits dans le même cercle. Leurs sommets sont tous distincts.

Prouver que l'un des arcs de cercle déterminés par les trente et un sommets a une mesure inférieure à 1°.

Solution de Christian DELACROIX, 2ème, centre scolaire Saint-Michel, Bruxelles.

– Lorsqu'on inscrit le polygone régulier à 15 côtés dans le cercle, on obtient 15 arcs de cercle de 24° chacun, déterminés par les 15 sommets, car 360° (amplitude du cercle) : 15 (15 sommets) $= 24^\circ$.

– Lorsqu'on inscrit le polygone régulier à 16 côtés dans le cerle, 14 de ses sommets seront chacun sur un arc de cercle différent et entre 2 sommets du polygone à 15 côtés.

Il reste encore 2 sommets du polygone à 16 côtés à placer sur un arc de cercle de 24°.

– L'écart entre 2 sommets du polygone à 16 côtés est de $22,5^\circ$ (360° : 16), tandis que l'arc de cercle déterminé par 2 sommets du polygone à 15 côtés vaut 24°.

– Mais étant donné que les sommets sont tous distincts, les deux sommets du polygone à 16 côtés doivent partager l'arc de cercle en 3 arcs plus petits :

le 1er : $22,5^\circ$ (écart entre les 2 sommets du polygone à 16 côtés),

le 2ème + le 3ème : $24^\circ - 22,5^\circ = 1,5^\circ$.

Mais comme il reste deux arcs de cercle : $1,5^\circ : 2 = 0,75^\circ$ et un arc sera toujours inférieur à 1°.

Solutions des 15 problèmes de l'A.I.M.E.

Question	Réponse	Question	Réponse	Question	Réponse
1	750	6	042	11	241
2	125	7	198	12	058
3	126	8	090	13	066
4	017	9	233	14	582
5	417	10	117	15	554

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

$\boxed{\text{Très poly}}$ problème n° 184 de M. et P. n° 110.

Déterminer tous les polynômes $P(x)$ pour lesquels on a identiquement

$$xP(x-1) = (x-26)P(x).$$

Solution de M. PONCHAUX de Lille

On voit que $P(0) = 0$ et $P(25) = 0$.

Remarquons que si, pour un entier a tel que $1 \leqslant a \leqslant 25$, on a $P(a-1) = 0$, alors $P(a) = 0$.

Donc, $P(0) = 0 \Rightarrow P(1) = P(2) = \cdots = P(25) = 0$.

Tout polynôme solution admet donc la factorisation

$$P(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-25)Q(x)$$

où $Q(x)$ est un polynôme.

Utilisons l'identité donnée : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x\left[(x-1)(x-2)\ldots(x-26)Q(x-1)\right] = (x-26)\left[x(x-1)\cdots(x-25)Q(x)\right]$$

d'où, après simplification,

$$\forall x \in \mathbb{R} : Q(x-1) = Q(x).$$

Le polynôme $Q(x)$ est donc constant.

En effet, la condition précédente traduit le fait que la fonction Q doit être périodique. Mais comme il s'agit d'une fonction polynôme et qu'un polynôme de degré n ne peut prendre plus de n fois la même valeur pour $n > 0$, on en déduit que ce polynôme est de degré 0, c'est-à-dire constant.

Conclusion : les polynômes solutions sont de la forme

$$P(x) = Cx(x-1)(x-2)\ldots(x-25) \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Les lecteurs suivants ont aussi envoyé une bonne solution : P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek, M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre, J. JANSSEN de Lambermont et J. RASSE de Mean.

Time for a square problème n° 185 de M. et P. n° 110.

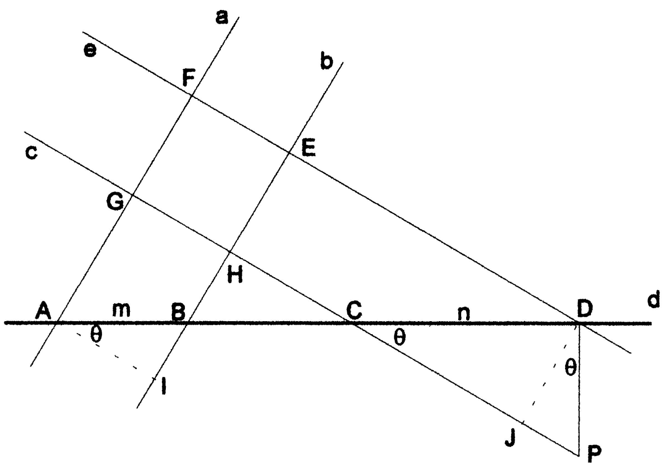
Soient A, B, C et D quatre points donnés sur une droite d. Construire un carré dont deux des côtés parallèles (éventuellement prolongés) passent par A et B respectivement et dont les deux autres côtés (éventuellement prolongés) passent par C et D respectivement.

Solution de J. RONDOU de Heverlee.

On doit supposer $A \neq B$ et $C \neq D$.

Soient m et n les longeurs respectives des segments $[AB]$ et $[CD]$.

Construisons $[DP]$ tel que $DP \perp d$ et $|DP| = m$.



Traçons la droite c comprenant C et P, la droite e passant par D et parallèle à c, les droites a et b passant respectivement par A et B et perpendiculaires à c.

Ces quatre droites déterminent le rectangle $EFGH$.

Démontrons que c'est un carré.

Soit θ l'angle $\widehat{PDC}$.

Construisons le triangle rectangle AIB. On a

$$|AI| = m \sin\theta,$$

d'où $|GH| = |FE| = m \sin\theta$.

Construisons le triangle rectangle DJP. On a

$$|DJ| = m \sin\theta,$$

d'où $|FG| = |EH| = m \sin\theta$.

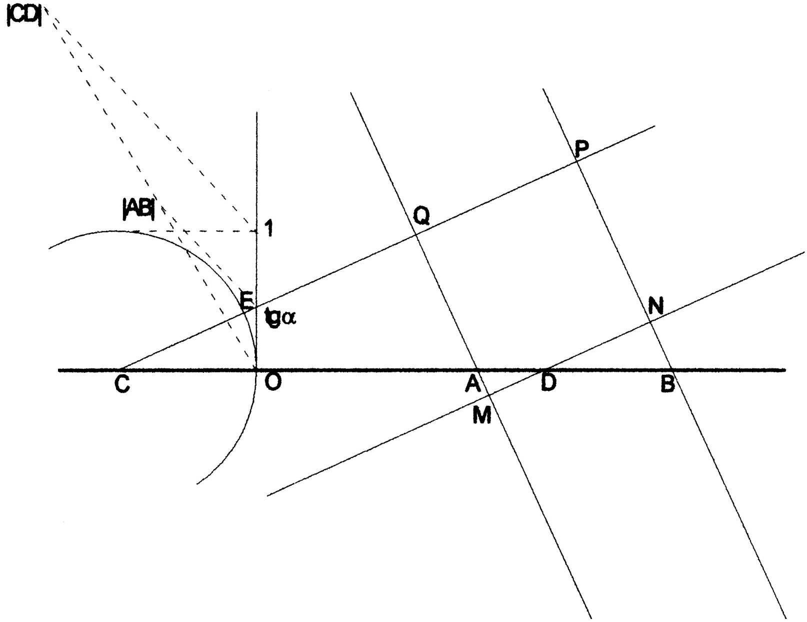
Les quatre côtés du rectangle $EFGH$ ont même longueur. On a donc bien construit un carré.

Solution de J. LIEVENS de Liège.

Supposons le problème résolu et soit $MNPQ$ le carré à constuire.

Désignons par α la mesure des angles aigus en C et D.

Les angles aigus en A et B en sont les compléments.



Projetons orthogonalement

$$\begin{array}{llll} [AB] & \text{sur} & MN & : |MN| = |AB|\cos\alpha \\ [CD] & \text{sur} & MQ & : |MQ| = |CD|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = |CD|\sin\alpha. \end{array}$$

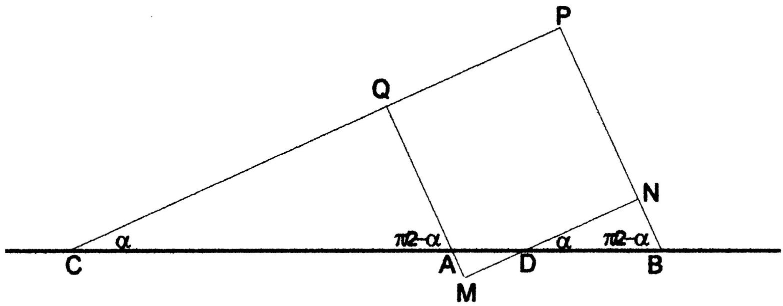
Comme $|MN| = |MQ|$, on a

$$\begin{aligned} |AB|\cos\alpha &= |CD|\sin\alpha \\ \frac{|AB|}{|CD|} &= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1}. \end{aligned}$$

D'où la construction du carré demandé.

Traçons le cercle trigonométrique de centre C et, sur l'axe des tangentes, recherchons le point d'abscisse $\operatorname{tg}\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha$ est une 4ème proportionnelle ; sur une droite issue de O, portons, à partir de O, les distances $|AB|$ et $|CD|$.



En projetant sur l'axe des tangentes, on obtient le point E d'abscisse $\operatorname{tg}\alpha$.

On trace alors CE, la parallèle à CE par D et les perpendiculaires à CE par A et par B.

Le carré demandé est construit.

Bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek, J. JANSSEN de Lambermont, B. LOISEAU de Mouscron, A. PATERNOTTRE de Boussu, M. PONCHAUX de Lille, J. RASSE de Mean.

Trigonométrie élémentaire | problème n° 186 de M. et P. n° 110.

Soit f la fonction qui donne $\cos((4k+1)x)$ *en termes de* $\cos x$ *:*

$$\cos((4k+1)x) = f(\cos x).$$

Démontrer que la même fonction f donne $\sin((4k+1)x)$ *en termes de* $\sin x$*, c'est-à-dire*

$$\sin((4k+1)x) = f(\sin x).$$

Deux lecteurs assidus proposent la même solution, il s'agit de B. LOISEAU de Mouscron et H.-J. SEIFFERT de Berlin.

En utilisant des propriétés bien connues du sinus et du cosinus, on a pour toute valeur de x

$$f(\sin x) \;=\; f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos\left((4k+1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\\
&= \cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}-(4k+1)x\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(4k+1)x\right)\\
&= \sin((4k+1)x)
\end{aligned}$$

(k étant un entier).

Bonnes solutions (mais plus longues) de J. FINOULST de Diepenbeek, J. JANSSEN de Lambermont, M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre, J. LIEVENS de Liège, A. PATERNOTTRE de Boussu, M. PONCHAUX de Lille et J. RASSE de Mean.

193. Gardons nos distances

Sur un segment $[AB]$, on donne $2n$ points 2 à 2 symétriques par rapport au milieu M de $[AB]$. On colorie n de ces points en bleu et les n autres en rouge.

Prouver que la somme des distances de A aux n points rouges est égale à la somme des distances de B aux n points bleus.

194. Un peu d'harmonie

Soit $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{N_n}{D_n}$ où N_n et D_n sont des entiers positifs premiers entre eux.

Déterminer tous les nombres premiers $p \geqslant 5$ tels que p est un diviseur de N_{p-4}.

195. Racines

Prouver que les racines de l'équation

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

ne peuvent être toutes réelles si $2a^2 < 5b$.

Revue des revues

C. Villers,

Math-Ecole (revue suisse), *n*°167-avril 1995.

Au sommaire :

– **Jacques-André Calame**, *Editorial - Entre formation théorique et stage pratique ... il y a l'enfant. Ne l'oublions pas !*

– **Chantal Richter**, *Lente approche de la numération*

– **Michel Brêchet**, *Faire des mathématiques ... et apprendre*
L'auteur propose un problème pouvant servir de point de départ pour l'étude des équations à deux variables. Cette situation a été expérimentée dans une classe de neuvième année, option scientifique.
L'article présente l'analyse du problème, le comportement des élèves pendant leur recherche et quelques extraits de leurs comptes rendus. Cette activité a permis aux élèves de s'investir dans une recherche, de se poser des questions, de mettre en place une stratégie et de construire un nouvel outil pour résoudre le problème.

– **Gianfranco Arrigo**, *Activités en laboratoire de mathématiques*
(Compte rendu des travaux d'un groupe du Colloque romand Mathématiques 93)
Les enseignants du groupe ont observé le comportement des élèves afin de déterminer les opérations mentales les plus souvent sollicitées en situation de recherche.
L'analyse a permis de soulever une série de problèmes :
– le langage,
– le rôle de l'enseignant pendant les travaux de recherche en classe,
– les "bons" et les "mauvais" élèves,
– la formation des groupes,
– le moment de la présentation des résultats des groupes,
– le développement successif du contenu mathématique en classe.

– **Daniel Surchat**, *Raymond Queneau revu par des élèves de 6e*
Un problème, extrait du journal de Raymond Queneau, est proposé à des élèves de sixième année. Il s'agit de tracer une figure donnée en trois coups de crayon sans passer deux fois sur le même trait. Son étude est l'occasion d'introduire quelques notions sur les graphes.

– **Francis Perret**, *Paradoxe géométrique ? Tour de magie, ... ou ... quand le contenu devient le contenant !*

– **René Mayor**, *Travail à la chaîne*

– **Yvan Michlig**, *"Pythagore vous tend le bras"*

Pythagore, un jeu dont les règles peuvent être modifiées selon l'âge des élèves ou les objectifs poursuivis, trouve sa place dans le "coin mathématique" de nos classes. Ce jeu est un moyen d'exercer les premiers calculs additifs et soustractifs, il permet aussi l'élaboration de certains éléments de stratégie reposant sur les probabilités.

– *Jeux pour tous*
Les jeux : "La tête à Toto", "Kantamino", "Tangoes", "Tantrix" et "Pyros" sont brièvement présentés. Ils peuvent être exploités dans les classes du primaire et du secondaire.
– *"La revue des revues"*
Maths et Malices n° 20
Grand N n° 49 à n° 55.

Math-Ecole (revue suisse), *n*°168-août 1995.

Au sommaire :

– **François Jaquet**, *Editorial*
– **Colomba Boggina-Jan, François Jaquet**, *Nombres et sens*
L'enfant qui entre à l'école primaire sait déjà beaucoup de choses dans le domaine du nombre. Mais les connaissances numériques varient d'un enfant à l'autre. L'activité décrite dans l'article permet une différenciation.
– **Jacques-André Calame**, *Math 5-6 ... pas si mal !*
Les ouvrages romands de mathématiques 5e et 6e, utilisés depuis une dizaine d'années, ont été soumis à une évaluation importante. L'article présente quelques éléments tirés de la synthèse.
– **Raymond Hutin, Antonella Belcarne, E. H. Saada**, *Math 5-6 : Informations*
Le numéro d'août 95 du bulletin "le point sur la recherche" est consacré essentiellement à l'évaluation des ouvrages Mathématiques 5e/6e. Trois articles, extraits de ce bulletin, sont reproduits.
– **André Calame**, *De la pub pour le cube (première partie)*
Le problème étudié dans cet article est le suivant :
"Placez les nombres de 1 à 8 sur les sommets d'un cube de telle manière que la somme des nombres de chaque face soit la même."
Deux questions se posent naturellement :
1) combien y a-t-il de solutions différentes ?
2) faut-il considérer comme distinctes deux solutions qui ne diffèrent que par la position du cube ?
L'objet de cet article est de répondre à la seconde question en déterminant les 48 isométries du cube.

- *Rapport sur la première épreuve du 3e Rallye mathématique romand*
  Cette compétition par classes, réservée aux degrés 3, 4 et 5 de l'école primaire, se déroule en trois étapes. L'auteur présente quelques problèmes de la première épreuve, les énoncés sont suivis d'observations sur les réponses proposées par les classes.
- **Trigan S. A.**, *Puzzles à trois dimensions*
- *Courrier des lecteurs*
- **Janine Cosandey**, *Activités de sériation*
- *Notes de lectures*
  L'envers du tableau. Quelle pédagogie pour quelle école ? Philippe Meirieu, ESF Editions, 1993.

Math-Ecole (revue suisse), *n*°169-octobre 1995.

Au sommaire :

- **François Jaquet**, *Editorial : Pilotage et professionnalisme*
- **V. Ledermann, J. A. Calame, C. Künzi**, *3e Rallye mathématique romand : reportage dans une classe de mordus*
  Cette compétition par classes entières, réservée aux degrés 3, 4 et 5 de l'école primaire, se déroule en trois étapes. Les problèmes de la troisième épreuve sont présentés, les énoncés sont suivis d'observations sur les réponses proposées par les classes. Des professeurs ayant participé au rallye avec leur classe donnent leurs impresssions.
- 3e Rallye mathématique romand. Problèmes de la finale
- **André Calame**, *De la pub pour le cube (seconde partie)*
  La première partie de cet article est parue dans le numéro 168. Le problème posé était le suivant :
  "Placez les nombres de 1 à 8 sur les sommets d'un cube de telle manière que la somme des nombres de chaque face soit la même."
  Cette deuxième partie démontre l'existence de trois solutions non équivalentes. En tenant compte des 48 isométries du cube, chacune de ces solutions donne lieu à 48 dispositions différentes.
- **Blaise Müller**, *Le vertigineux paradoxe du contenu plus grand que le contenant ...*
- **Augustin Genoud**, *Solutions des problèmes*
  Deux problèmes et leurs solutions sont présentés :
  1) tournoi de football
  2) qui pair gagne (15e problème de la demi-finale du 9e championnat international des jeux mathématiques et logiques de mars 1995)
- *La revue des revues*
  Présentation de la revue française "Tangente"
- **André Scheibler, Berthe-Hélène Balmer**, *CIEAEM 47*

Echos de la rencontre CIEAEM 47 qui a eu lieu à Berlin en 1995. Cette semaine de réflexion avait pour thème “Education mathématique et sens commun. Le défi du changement social et du développement technologique”.

Math-Ecole (revue suisse), *n*°170-décembre 1995.

Au sommaire :

- **François Jaquet**, *Editorial : Interdisciplinarité*
- **Jean-Paul Reding**, *Les n'ombres chinoises (première partie)*
  En introduction, l'auteur dresse le bilan de ce que l'Occident doit à la civilisation chinoise, tant du point de vue technique que du point de vue culturel. Les thèmes mathématiques abordés dans cette première partie sont :
  – le système de numération,
  – les méthodes de calcul.
- **Joane Allard**, *Résolution de problèmes, une valse à trois temps*
  “L'école primaire doit poursuivre un objectif de formation générale : permettre le transfert des apprentissages dans le quotidien.”
  L'auteur propose un scénario d'intervention en trois temps afin de faciliter l'activité de résolution de problèmes :
  – l'appropriation du problème,
  – la recherche d'une solution,
  – la communication de la solution.
  Chacune de ces étapes est importante et aucune ne peut être négligée. Des pistes et des suggestions d'activités sont proposées pour chacune d'elles.
- **Caroline Joseph**, *Math-Adore !*
  Une nouveauté neuchâteloise : un concours interclasses en mathématiques pour les degrés 4 et 5 de l'école primaire. Ce numéro contient l'énoncé du premier problème.
- **André Scheibler**, *Sens commun, c'est quoi ?*
  L'auteur propose un modèle théorique, construit sur le modèle didactique de Brousseau, pour identifier le concept de sens commun. Il présente plusieurs situations et montre comment celles-ci s'inscrivent dans le modèle théorique et quelle exploitation il peut en être fait.
- *Championnat des jeux mathématiques et logiques*
  Reportage sur la finale internationale qui s'est déroulée à Paris les 1 et 2 septembre 1995. Quelques-un des énoncés de cette finale sont proposés.
- *4e Rallye mathématique romand*

– *Mathématiques sans frontières*
– **Nicole Toussaint, Jean Fromentin**, *Fichier Evariste*
Les auteurs présentent un fichier de 120 problèmes, niveau Benjamins, 120 problèmes niveau Cadets, tirés de différents tournois et rallyes mathématiques. Ce fichier est publié par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP).
– **Bernard Capponi**, *De Cabri I à Cabri II*
Les principales modifications de Cabri II par rapport à Cabri I sont présentées.
– *La revue des revues*
Instantanés mathématiques, revue publiée au Québec par l'association des promoteurs de l'avancement de la mathématique à l'élémentaire (APAME). L'article de Joane Allard présenté ci-dessus est extrait d'un numéro de cette revue.
– *Pour votre bibliothèque*
Présentation de plusieurs ouvrages :
– Théorie élémentaire du commerce (ALEAS Editeur)
– Le septième arrhe (ALEAS Editeur)
– Jeux 4 - De l'intérêt des problèmes de rallyes (brochure de l'APMEP)
– Les jeux de Nim, par Jacques Bonteloup (ADCS)
– Les trois dernières annales du championnat organisé par la Fédération française des jeux mathématiques et logiques
– *Notes de lecture*
– Chacun, tous ... différemment ! Différenciation en Mathématiques au cycle des apprentissages par Roland Charnay, Jacques Douaire, Jean-Claude Guillaume et Dominique Valentin, rencontres pédagogiques n° 34, INRP, Paris 1995
– Histoire d'infini par la Commission Inter-IREM, Epistémologie et histoire des mathématiques

M. FREMAL

Bulletin de l'APMEP (France), *n*°408-Février/Mars 1997

Au sommaire
– *L'Editorial* du Président Jean-Pierre Richeton :
Cet éditorial en forme de lettre ouverte souhaite répondre aux critiques formulées par des adhérents. L'auteur en profite pour montrer combien il est difficile, pour une association telle que l'APMEP, de représenter tous les courants de pensée des membres et de "coller" à l'actualité pédagogique.

– Dans *la rubrique "Etudes"* :
  Un article de Jean De Biasi, intitulé "Inversion triangulaire".
  L'auteur y définit la notion de points inversés par rapport à un triangle (dans un plan affine euclidien orienté).
  Suivent alors Théorèmes, Exemples, Etude barycentrique, Cercles d'Apollonius, Coniques tangentes aux côtés d'un triangle et Transformation d'une courbe.
  Un texte de Saucir Belkora intitulé "De l'intérêt du théorème de la forme globale en programmation linéaire".
  Ce théorème utilise la forme globale d'un programme linéaire. L'auteur en donne une démonstration personnelle et tente d'en dégager l'intérêt pédagogique pour un enseignement de programmation linéaire s'adressant à des étudiants en gestion ou en économie.
  Un article de Jean Barbé et Renaud Palisse "La quadrature du rectangle".
– Dans *la rubrique "Dans nos classes"* :
  "Dominos et consolidation en classe de sixième" par François Drouire, présente un travail réalisé par des élèves de sixième (collège), à propos d'un thème de construction d'un jeu de dominos.
  Cette livraison comporte encore les rubriques habituelles dont, en particulier, un substantiel espace pour les problèmes de l'APMEP.
  En particulier, on y trouve d'intéressants développements au sujet de solutions au problème que voici :
  Soient O, H, I trois points d'un plan.
  a) A quelle condition existe-t-il un triangle ABC admettant O pour centre du cercle circonscrit, H pour orthocentre et I pour centre du cercle inscrit ?
     Comment construire ce triangle dans les cas particuliers où I est situé sur le segment $[OH]$ ou sur sa médiatrice ?
  b) A quelle condition existe-t-il un triangle ABC admettant O pour centre du cerle circonsrit, H pour orthocentre et I pour centre de l'un des cercles exinscrits ?

Claude VILLERS

Bibliographie

J. Bair,

Atlas des mathématiques par F. Reinhardt et H. Soeder, La Pochothèque, Le livre de poche, 1997, 502 pages.

Cet ouvrage est la version française, en un seul volume, du livre de poche allemand *Atlas zur Mathematik*, édité en deux tomes.

Bien entendu, un *Atlas* n'est pas un livre exposant une théorie poussée dans ses moindres détails ; c'est ainsi que les démonstrations des théorèmes sont la plupart du temps omises, seules les plus courtes étant données pour illustrer certains types de raisonnement.

Le but de cet ouvrage est d'apporter une vue d'ensemble des mathématiques, en tenant compte des liens existant entre les différentes disciplines et en montrant l'évolution de cette "science arborescente" qu'est aujourd'hui la mathématique.

Le livre présente aussi bien les théories de base les plus anciennes que certains chapitres étudiés tout récemment. Voici un petit aperçu du contenu : la logique mathématique, les relations et les structures algébriques y compris la théorie de Galois, les géométries mêmes celles qui ne sont pas euclidiennes (y compris la géométrie fractale), la topologie éventuellement algébrique, l'analyse réelle et complexe avec, par exemple, les intégrales de Riemann à celles de Lebesgue, les surfaces et variétés, notamment les surfaces feuilletées de Riemann, le calcul des probabilités, la programmation linéaire.

La présentation matérielle de cet *Atlas* est soignée, malgré la taille restreinte des caractères : les illustrations, toujours en page de gauche, font largement appel aux couleurs. De nombreux exemples illustrent les théories présentées. Un index et une bibliographie bien fournie complètent cet ouvrage dont le caractère encyclopédique et la haute tenue en font un libre de référence à recommander à tout mathématicien professionnel.

J. BAIR

L'évaluation des actifs financiers. Modèles à temps discret par Patrick Roger, De Boeck Université, 1996, 362 pages.

Cet excellent ouvrage introductif, destiné prioritairement aux mathématiciens désireux de pénétrer dans le monde de la finance stochastique, propose une approche progressive et pédagogique, dans un contexte rigoureux, des différentes théories d'évaluation d'actifs financiers dans leur sens le plus vaste, incluant notamment des produits moins connus du grand public. L'auteur prend soin tout au long des démonstrations de distinguer les hypothèses techniques de celles répondant à la logique économique. Ces dernières sont toujours interprétées et commentées.

Le choix délibéré des modèles à temps discret permet à l'auteur d'aborder la description de l'évolution des principaux produits financiers en faisant appel à un minimum de prérequis mathématique spécifique. L'ouvrage n'en demeure pas moins un livre de mathématique interprétée de fort bon niveau.

En consacrant la première partie de son travail aux modèles monopériodiques (2 échéances), l'auteur met en évidence la notion de risque et expose de façon simple et interprétée les modèles classiques (CAPM par exemple). L'introduction du temps sous forme de successions d'échéances permet dans la seconde partie d'atteindre une description plus réaliste de l'univers financier.

L'ouvrage illustre abondamment chacune des notions présentées au moyen de nombreux exemples numériques dont quelques-uns tirés du monde réel. Signalons l'utilisation d'une terminologie spécifiquement française pour la présentation de certains produits usuels, un élément qui ne nuit en rien aux qualités scientifiques de ce livre.

D. JUSTENS

Les jeux mathématiques, par Michel Criton, P.U.F., Coll. Que sais-je ?, N° 3220, 126 pages, 1997.

Les jeux mathématiques sont décidément à la mode. Il n'y a pas si longtemps, nous signalions les brochures n° 97 et 98 de l'APMEP consacrées à ce thème. Voici que vient de paraître un "Que sais-je ?" sur le même sujet, qui devrait prendre place dans la bibliothèque de tous ceux pour qui les mathématiques sont, aussi, une source de jeux.

Après un chapitre d'introduction, ce petit fascicule comporte essentiellement trois parties. La première (quatre chapitres, trente-cinq pages), présente l'historique du sujet, de l'Egypte antique à Martin Gardner, en passant par tous les "classiques", Bachet de Méziriac, Sam Loyd, Henry Dudeney, ...et quelques autres qui le sont moins. Connaissez-vous par exemple Alcuin d'York ? Il serait l'auteur du célèbre problème du loup, de la chèvre et du chou et aurait vécu à la cour de Charlemagne ! Dans la foulée, l'auteur signale les tendances actuelles et en particulier le succès des compétitions telles que les Olympiades et le Championnat des Jeux mathématiques et logiques. Un seul regret ici : malgré qu'elle ait été créée avant le concours australien de mathématiques, et quinze ans avant le Kangourou français, malgré qu'elle recueille un succès de participation au moins aussi respectable que bien d'autres compétitions, pas une ligne n'est consacrée à notre Olympiade Mathématique Belge ...Consolons-nous en constatant que, par contre, notre revue *Math-Jeunes* figure en bonne place parmi les publications destinées aux élèves.

La deuxième partie (un chapitre, 50 pages) présente une "classification" des jeux mathématiques. Les guillemets s'imposent car, comme le remarque très justement l'auteur, toute tentative de ce genre, si louable soit-elle, est une véritable gageure. On retrouvera bien entendu des jeux et problèmes de logique, de permutation, de combinatoire, de probabilités, de théorie des graphes, de cryptarithmétique, etc. Beaucoup sont très connus, d'autres moins. Expliquer les solutions de ces problèmes et les mathématiques sous-jacentes à tous ces sujets aurait nécessité non un "Que sais-je ?", mais une bibliothèque complète. L'auteur ne vous privera donc pas du plaisir de découvrir vous-même les solutions des problèmes qu'il propose. Tout au plus, dans la troisième partie (17 pages) indique-t-il les réponses à quelques-uns d'entre eux, histoire de vous permettre de vérifier les vôtres ! Bon amusement !

G. NOEL

L'infini en mathématiques, par Norbert VERDIER, Dominos, Flammarion, 1997, 125 p.

Ce petit ouvrage (105 pages, plus des annexes avec un glossaire, une bibliographie et un index) se veut être un effort pour vulgariser les mathématiques.

Ecrit par un professeur de mathématiques de l'Université de Paris-Sud-XI (Orsay), le livre se compose de deux parties principales. La première est un exposé pour comprendre la notion mathématique de l'infini depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours. La seconde est un essai pour réfléchir sur la dualité fini-infini : y sont abordées plusieurs questions cruciales, telles que "l'infini existe-t-il ?" ou encore "peut-on éviter la question de l'infini ?".

En quelques pages, l'auteur nous invite à voyager à travers le temps, dans le monde passionnant de l'infini mathématique. Il relate aussi bien les théories anciennes sur l'infini que ses implications les plus actuelles ; c'est ainsi qu'il évoque, par exemple, des théories assez récentes comme l'intuitionnisme, l'analyse non standard ou la logique linéaire.

Cet exposé, très clair, d'accès facile et bien rédigé, devrait passionner beaucoup d'élèves (et leurs professeurs) qui sont souvent attirés par des questions touchant à l'infini.

En résumé, à lire et à conseiller.

J. BAIR