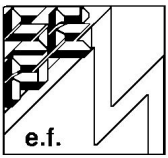



# *Mathématique et Pédagogie*

## *Sommaire*


- *J. Navez*, *Éditorial* — *2*
- *C. Monseur*, *Résultats à une enquête internationale en mathématiques* — *3*
- *G. Haesbroeck et V. Mathieu*, *Stabilité des points fixes hyperboliques dans les systèmes dynamiques discrets* — *12*
- *G. Lasters*, *Le produit sur le cercle* — *24*
- *J. Miewis*, *Chimborazo-Everest 1-0* — *29*
- *P. Dupont et N. Vast*, *Développements limités* — *36*
- *J. G. Segers*, *A propos des nombres de FIBONACCI* — *53*
- *C. Festraets*, *Olympiades* — *58*
- *C. Festraets*, *Des problèmes et des jeux* — *65*
- *C. Villers*, *Revue des revues* — *69*
- *C. Rédaction*, *12e Championnat 1/4 de finales* — *72*


*N° 114* *Novembre – Décembre 1997*

# Éditorial

**J. Navez**,

Jacqueline LIESENBORGHS, Jean-Paul HOUBEN et moi-même avons représenté la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*à la réunion organisée par les inspecteurs de mathématique de la Communauté Française et qui avait pour objet de donner nos impressions sur le canevas du futur programme applicable au 3ème degré. Cinq autres animateurs étaient également invités à cette réunion qui avait lieu au CAF à Tihange.

Notre intervention a porté essentiellement sur les points suivants :

- en tant qu'élément de culture générale, les mathématiques doivent imposer aux élèves le souci de rigueur et ce, quel que soit le nombre de périodes hebdomadaires. Cette volonté d'inculquer la nécessité des démonstrations et de voir entamer les choses en profondeur se heurte naturellement à la quantité d'informations que l'on voudrait voir apparaître dans les programmes.
- en ce qui concerne l'étude de la géométrie dans l'espace, nous pensons que les aspects synthétiques, vectoriels et analytiques doivent se conforter mutuellement pour arriver à une meilleure perception des notions. Dans cet esprit, il serait souhaitable que les programmes de géométrie et celui concernant le calcul matriciel et les systèmes d'équations soient vus simultanément.

Dans toutes les interventions à cette réunion, nous avons entendu des plaidoyers pour ajouter tel ou tel point de matière, mais bien peu de suggestions pour en diminuer la quantité.

Le vieil adage "tête bien faite ..." paraît bien ringard à l'heure de la culture du "surfing".

**Jacques NAVEZ**

# Résultats à une enquête internationale en mathématiques

**C. Monseur**, *Université de Liège, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education*

*Mots clés* : I.E.A. (Association internationale pour l'évaluation du rendement scolaire) ; enquête internationale ; élèves 13–14 ans.

L'Association internationale pour l'évaluation du rendement scolaire (I.E.A.) vient de publier les premiers résultats d'une enquête comparative sur les connaissances en mathématiques et en sciences des élèves de 41 systèmes scolaires.

Tant la Communauté française que la Communauté flamande de Belgique ont participé à cette enquête (comme d'ailleurs à la plupart des autres enquêtes internationales sur les acquis des élèves organisées par l'I.E.A. depuis le début des années 60). Le but de ces enquêtes est double :

- permettre à chaque pays de disposer de renseignements objectifs sur les points forts et les points faibles de son système éducatif ;
- contribuer à mieux comprendre le fonctionnement des systèmes scolaires et identifier les facteurs pouvant expliquer la plus grande efficacité de certains d'entre eux.

Les résultats publiés aujourd'hui portent sur les compétences en mathématiques et en sciences des élèves de 13-14 ans. Les épreuves utilisées sont identiques dans tous les pays ; elles portent sur un ensemble de savoirs et savoir-faire qui, d'après les programmes scolaires des 41 pays participants, constitue une sorte de dénominateur commun. Ces tests ont été administrés à des échantillons représentatifs d'élèves des deux années scolaires successives où se trouve, dans tous les pays, la majorité des jeunes âgés de 14 ans. Cela correspond, dans notre pays, aux deux premières années de l'enseignement secondaire.

Les épreuves de mathématiques comportaient 158 questions dont la majorité (122, soit 77,2%) se présente sous la forme de questions à choix multiple. Pour rencontrer les critiques souvent énoncées à l'égard de ce genre de questionnement (*seuls les processus cognitifs inférieurs sont mis en oeuvre*), le comité international responsable de l'élaboration des tests a également retenu 35 questions ouvertes (soit 22,8%).

Les tableaux 1 et 2 présentent la répartition des différentes questions selon les contenus mathématiques abordés et les processus cognitifs mobilisés.

*Tableau 1 : Répartition des questions selon les contenus*

| **Catégorie** | **Nombre d'items** | % |
|---|---|---|
| A : Nombres | 52 | 32,9 |
| B : Géométrie | 23 | 14,6 |
| C : Algèbre | 29 | 18,3 |
| D : Représentation, analyse de données, probabilité | 21 | 13,3 |
| E : Mesure | 21 | 13,3 |
| F : Proportionnalité | 12 | 7,6 |
| | 158 | 100 |

*Tableau 2 : Répartition des questions selon les processus cognitifs*

| **Processus cognitifs** | **Nombre d'items** | % |
|---|---|---|
| - connaissance | 32 | 20,3 |
| - utilisation de procédures | 70 | 44,3 |
| - résolution de problèmes | 48 | 30,4 |
| - raisonnement | 4 | 2,5 |
| - communication | 4 | 2,5 |
| | 158 | 100 |

Les épreuves ne portent pas uniquement sur la connaissance. En effet, les élèves devaient également, dans bon nombre de cas, utiliser des procédures simples ou complexes, formuler ou clarifier un problème, développer des stratégies de résolution, prédire un résultat ou en vérifier l'exactitude.

Des représentants du corps inspectoral ont été invités à juger de la pertinence de ces différentes questions par rapport aux objectifs assignés à l'enseignement des mathématiques en Communauté française. Pour chaque question, les inspecteurs devaient, sur base des programmes officiels, déterminer si la question pouvait être considérée comme ayant été vue. Plus de 85 pour cent des questions ont fait l'objet d'un enseignement au terme de la deuxième année de l'enseignement secondaire.

Le tableau 3 présente les résultats en mathématiques de l'ensemble des pays qui ont participé à l'étude au grade 8. En Communauté française et pour bon nombre de pays, le grade 7 correspond à la première année de l'enseignement secondaire et le grade 8 à la deuxième.

La moyenne internationale s'élève à 484 points au grade 7 et à 513 au grade 8, soit un an plus tard. Le gain moyen enregistré entre les deux années d'étude est donc de 29 points sur l'échelle des scores. Ce gain peut être

assimilé aux nouveaux acquis apportés par une année scolaire. Les résultats internationaux peuvent donc être traduits en nombre d'années scolaires qui nous sépare des différents pays :

| années = ( résultat du pays - résultat de la Communauté française) /29 |
|---|

Ainsi, la distance qui nous sépare de la Communauté flamande de Belgique peut s'écrire : ( 565 - 526 ) / 29 = 1,35 . En d'autres termes, les résultats des élèves néerlandophones à la fin de la deuxième année de l'enseignement secondaire correspondent aux résultats que les élèves de la Communauté française de Belgique devraient atteindre en fin de troisième année.

Les résultats internationaux peuvent également être traduits en pourcentage moyen de réussite à l'ensemble des questions.

*Tableau 3 : Résultats internationaux en mathématiques au grade 8*

| **Pays** | **Score** | **Années** | **% de réussite** |
|---|---|---|---|
| Singapour | 643 | 4.03 | 79 |
| Corée | 607 | 2.79 | 72 |
| Japon | 605 | 2.72 | 73 |
| Hong Kong | 588 | 2.14 | 70 |
| *Com. flamande* | *565* | *1.34* | *66* |
| République Tchèque | 564 | 1.31 | 66 |
| République Slovaque | 547 | 0.72 | 62 |
| Suisse | 545 | 0.66 | 62 |
| Pays-Bas | 541 | 0.52 | 60 |
| Slovénie | 541 | 0.52 | 61 |
| Bulgarie | 540 | 0.48 | 60 |
| Autriche | 539 | 0.45 | 62 |
| France | 538 | 0.41 | 61 |
| Hongrie | 537 | 0.38 | 62 |
| Russie | 535 | 0.31 | 60 |
| Australie | 530 | 0.14 | 58 |
| Irlande | 527 | 0.03 | 59 |
| Canada | 527 | 0.03 | 59 |
| **Com. française** | **526** | **0.00** | **59** |
| Thaïlande | 522 | -0.14 | 57 |
| Israël | 522 | -0.14 | 57 |
| Suède | 519 | -0.24 | 56 |
| **Moyenne** | **513** | **-0.4** | **55** |
| Allemagne | 509 | -0.59 | 54 |
| Nouvelle Zélande | 508 | -0.62 | 54 |
| Angleterre | 506 | -0.69 | 53 |
| Norvège | 503 | -0.79 | 54 |
| Danemark | 502 | -0.83 | 52 |
| Etats-Unis | 500 | -0.90 | 53 |
| Ecosse | 498 | -0.97 | 52 |
| Lettonie | 493 | -1.1 | 51 |
| Espagne | 487 | -1.3 | 51 |
| Islande | 487 | -1.3 | 50 |
| Grèce | 484 | -1.4 | 49 |
| Roumanie | 482 | -1.5 | 49 |
| Lituanie | 477 | -1.7 | 48 |
| Chypre | 474 | -1.8 | 48 |
| Portugal | 454 | -2.5 | 43 |
| Iran | 428 | -3.4 | 38 |
| Koweït | 392 | -4.6 | 30 |
| Colombie | 385 | -4.9 | 29 |
| Afrique du Sud | 354 | -5.9 | 24 |

Les résultats de nos élèves sont encourageants. En deuxième année de l'enseignement secondaire, seuls 8 des 41 pays participants obtiennent des résultats significativement supérieurs aux nôtres (par ordre décroissant de performance : Singapour, la Corée, le Japon, Hong-Kong, la Communauté flamande de Belgique, les Républiques Tchèque et Slovaque et enfin la Suisse). Quatorze pays se caractérisent par des résultats proches des nôtres (les différences observées ne sont pas statistiquement significatives). Parmi ceux-ci figurent les Pays-Bas, l'Autriche, la France, l'Irlande, la Suède et l'Allemagne. Enfin, dix-huit pays obtiennent des résultats significativement inférieurs aux nôtres, parmi lesquels il faut compter l'Angleterre, la Norvège, le Danemark, les Etats-Unis, l'Ecosse, l'Espagne, l'Islande, la Grèce et le Portugal. En d'autres termes, la Communauté française de Belgique se situe légèrement au-dessus de la moyenne internationale. Toutefois, plus d'une année scolaire nous sépare de la Communauté flamande.

Un examen plus détaillé des résultats actuels permet de relever quelques tendances.

Les questions où l'élève doit choisir la bonne réponse parmi plusieurs propositions sont mieux réussies que celles nécessitant une production écrite. Cette différence est de 15% en deuxième secondaire. Les performances des élèves laissent donc le plus à désirer lorsqu'il leur est demandé de construire une réponse et de la rédiger. Toutefois, ce constat n'est pas spécifique à nos élèves, il concerne tous les pays (différence de 15% également).

Le tableau 4 présente les pourcentages moyens de réussite selon les différentes matières, tant au niveau de la Communauté française qu'au niveau international.

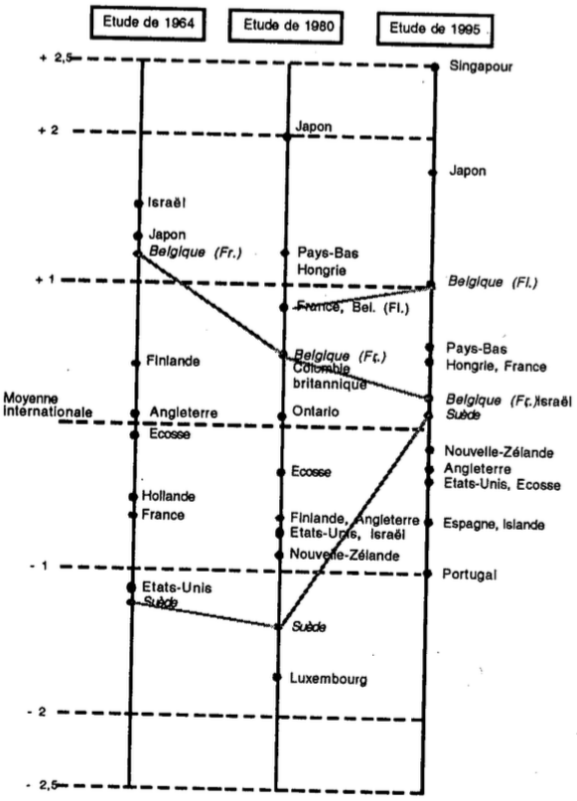
*Tableau 4 : Pourcentage moyen de réussite au grade 8 par catégorie de contenus*

| | Communauté française | Moyenne internationale | Différence |
|---|---|---|---|
| Nombres | 62% | 58% | 4% |
| Géométrie | 58% | 56% | 2% |
| Algèbre | 53% | 52% | 1% |
| Représentation de données | 68% | 62% | 6% |
| Mesure | 56% | 51% | 5% |
| Proportionnalité | 48% | 45% | 3% |

Comparativement aux résultats internationaux, nos élèves maîtrisent mieux les concepts d'arithmétique, de mesure et la représentation de données que les concepts de géométrie et d'algèbre.

En arithmétique, nos résultats sont particulièrement bons en ce qui concerne l'addition et la soustraction. Par contre, on observe un déficit non négligeable pour la division de fractions ou de nombres décimaux. Les problèmes liés aux bases orthonormées suscitent également des difficultés pour nos élèves. Toutefois, ces derniers constats doivent être lus avec réserves car les questions portant sur ces contenus spécifiques ne sont pas très nombreuses.

*Figure 1 : Résultats internationaux standardisés lors des trois études de l'I.E.A. en mathématiques*




Les résultats par processus cognitifs montrent que les questions de connaissance sont les mieux réussies (plus 5,7 par rapport à la moyenne internationale contre 3,1 pour les questions d'utilisation de procédures).

Ces résultats confirment les tendances observées lors des précédentes études de l'I.E.A. auxquelles a participé la Communauté française de Belgique. Que ce soit lors de la première étude (1964) ou lors de la seconde (1981), la Belgique francophone obtenait déjà, à ce niveau scolaire, des résultats supérieurs à la moyenne internationale.

La figure 1 présente la position de la Communauté française de Belgique lors des trois études. Les résultats des différents pays ont été standardisés afin de présenter les résultats sur une seule et même échelle.

La première étude, dont la collecte de données s'est déroulée au cours de l'année 1964, a vu la Belgique se classer en troisième position parmi les 10 participants. En 1980, 16 pays participent à la seconde étude et la Belgique francophone obtient des résultats toujours supérieurs à la moyenne. A cette époque, elle occupe la sixième position. La troisième étude semble indiquer une tendance relativement prononcée à se rapprocher de la moyenne internationale. A présent, la Belgique francophone occupe la 19e place parmi 41 pays.

Les variations de classement, certes, peuvent résulter d'une modification du niveau de performance des élèves. Toutefois, la position occupée par un système éducatif est directement dépendante des pays qui ont participé. A titre d'exemple, le classement actuel de la Communauté française de Belgique est comparable à celui de 1980 si l'on ne tient pas compte des quatre pays asiatiques qui obtiennent les meilleurs résultats. Par contre, l'évolution respective des deux communautés belges laisse suspecter une différence croissante. Pour confirmer ces observations, il importe d'interroger les pourcentages moyens de réussite aux différentes questions. Ces données sont susceptibles de nous informer plus précisément sur l'évolution du niveau de performance des élèves. En effet, l'accroissement de la différence peut refléter une réduction du niveau de performance des élèves francophones ou une augmentation des performances des étudiants néerlandophones, voire des deux. Cependant, les questions posées lors des deux études ne sont pas nécessairement comparables. Fort heureusement, l'intérêt des analyses diachroniques incite les responsables de la construction des épreuves de rendement à inclure, dans un nouveau test, des questions qui faisaient partie d'un test administré précédemment. Ces items, dits d'ancrage, ne subissent aucune modification. Il s'ensuit qu'une évolution des pourcentages de réussite à ces items ne peut être attribuée qu'aux seules compétences des élèves.

Le tableau 5 reprend les pourcentages médians de réussite aux items d'ancrage pour les deux Communautés belges. Le pourcentage moyen de réussite à l'ensemble des items est de 59% pour la Belgique francophone et de 66% pour la Flandre. Le tableau 5 présente les médians pour les deux études et les deux communautés éducatives belges.

*Tableau 5 : Pourcentages médians de réussite aux items d'ancrage*

| | 1984 | 1995 |
|---|---|---|
| Belgique francophone | 53 | 57 |
| Belgique néerlandophone | 55 | 65 |

En premier lieu, il est heureux de constater que le médian des items d'ancrage ne diffère pas des pourcentages moyens de réussite à l'ensemble de l'épreuve. L'analyse diachronique indique une très légère progression pour la Belgique francophone (4%) et une progression plus importante de la Belgique néerlandophone (10%). Ces indications, bien qu'elles portent sur un nombre restreint d'items, laissent supposer que le niveau de performance des élèves francophones n'a pas régressé depuis 1984 et qu'il se caractérise même par une amélioration. Dans le même temps, les élèves néerlandophones ont progressé davantage. En conclusion, si notre classement a tendance à se rapprocher de la moyenne internationale, il s'agit moins d'une diminution du niveau de performance de nos étudiants que d'une amélioration de quelques autres pays et de la venue de nouveaux participants .

En conclusion, les résultats actuels de la Communauté française de Belgique en mathématiques paraissent encourageants. Une analyse détaillée des résultats par catégorie de contenus et par processus cognitif a permis d'isoler de légères variations qui ne modifient pas le profil général, à savoir des résultats légèrement supérieurs à la moyenne internationale.

L'analyse diachronique montre que nos résultats ont bénéficié d'une augmentation ténue, tout en laissant apparaître une régression relative par rapport à d'autres systèmes éducatifs qui, dans le même temps, ont sensiblement amélioré la performance de leurs étudiants.

Adresse de l'auteur :

**Christian MONSEUR**
Université de Liège
Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education
Service de Pédagogie expérimentale
Boulevard du Rectorat 5, Bât. B32
4000 Liège (Belgique)

# Stabilité des points fixes hyperboliques dans les systèmes dynamiques discrets

**G. Haesbroeck et V. Mathieu**,

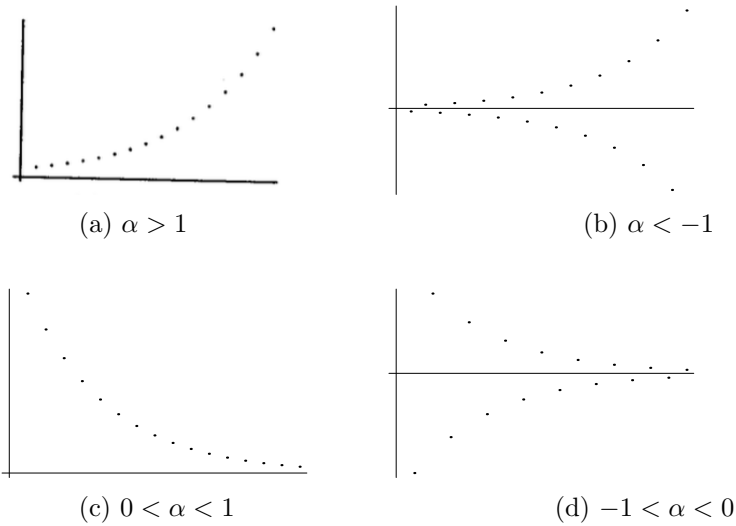
La théorie des systèmes dynamiques étudie "les processus en mouvement" [4, p. 1] tels que les trajectoires des étoiles dans le ciel, l'évolution temporelle des cours de la bourse, du prix d'un produit ou du nombre d'habitants d'une région, des réactions chimiques, etc.

Mathématiquement, ces situations sont souvent modélisées en faisant appel à des équations différentielles (lorsque les grandeurs varient continûment) ou à des équations récurrentes (dans les cas discrets).

Dans cet article, nous nous intéressons principalement aux modèles, parmi les plus simples, qui peuvent être décrits à l'aide d'une équation récurrente d'ordre 1 du type $x_t = f(x_{t-1})$, où $t$ désigne généralement la variable temporelle.

En guise d'application, considérons le cas du prix au temps $t$ d'un produit proportionnel au prix à l'instant $t-1$, ce qui fournit l'équation $p_t = \alpha p_{t-1}$, où $p_t$ désigne bien entendu le prix à l'instant $t$, tandis que $\alpha$ est un facteur de proportionnalité. La connaissance du prix initial $p_0$ permet de déterminer, de proche en proche, les prix à tout instant $t$ entier : de fait, $p_1 = \alpha p_0, p_2 = \alpha p_1 = \alpha^2 p_0, \ldots, p_t = \alpha^t p_0$. Plus généralement, pour l'équation $p_t = \alpha p_{t-1} + \beta$, on trouve aisément $p_t = (p_0 - \bar{p})\alpha^t + \bar{p}$ avec $\bar{p} = \frac{\beta}{1-\alpha}$.

Cet exemple montre que la "solution générale" d'une équation récurrente linéaire d'ordre 1, du type $x_t = \alpha x_{t-1} + \beta$, est décrite essentiellement par une fonction exponentielle dont le comportement asymptotique (c'est-à-dire le comportement pour $t$ tendant vers plus l'infini) est bien connu. Les cas les plus intéressants (relatifs à $|\alpha| \neq 1$) sont les suivants : la solution croît "de façon explosive" vers l'infini (si $\alpha > 1$), varie de façon alternée et explosive (si $\alpha < -1$), décroît vers une asymptote horizontale (si $0 < \alpha < 1$), tend de manière alternée vers une asymptote horizontale (si $-1 < \alpha < 0$).

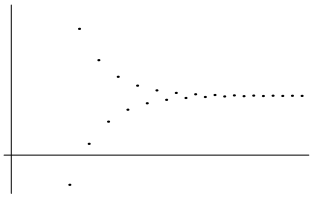


(a) $\alpha > 1$ (b) $\alpha < -1$

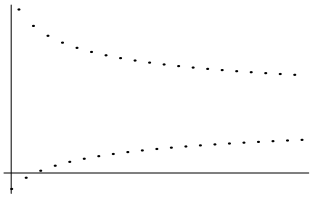
(c) $0 < \alpha < 1$ (d) $-1 < \alpha < 0$

Figure 1 : Graphiques de $\alpha^t$.

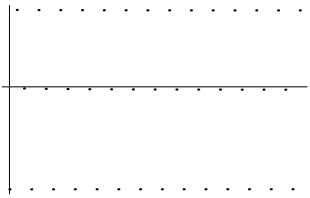
La situation est beaucoup moins claire, et peut même devenir très compliquée, dans le cas des équations récurrentes (toujours d'ordre 1) non linéaires qui peuvent même engendrer du "chaos déterministe" ; le mot "chaos" désigne dans ce contexte un état de désordre et d'irrégularité, tandis qu'un système physique dépendant du temps est qualifié de "déterministe" lorsque son comportement futur est décrit, à partir de la connaissance de conditions initiales, par la solution d'une équation différentielle ou récurrente [8, p. 1]. La variété des situations possibles peut être présentée en observant les figures suivantes où sont représentés les premiers éléments de la suite $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, avec $x_t = f(x_{t-1})$, les indices $t$ étant portés en abscisses et les valeurs $x_t$ en ordonnées. Une telle suite infinie sera notée $S(f; x_0)$ et est souvent appelée l'*orbite* de $x_0$ pour $f$. Bien entendu, $S(f; x_0)$ n'est définie que si, pour tout entier positif ou nul $k$, $x_k$ appartient au domaine de définition de $f$.



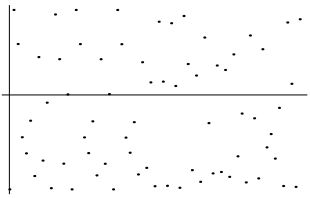
(a) $\lambda = 0.5$



(b) $\lambda = 0.75$



(c) $\lambda = -1.75$



(d) $\lambda = -1.9$

Figure 2 : Orbites de 0 pour $f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$.

Nous nous proposons ici d'étudier les limites d'orbites $S(f; x_0)$. En effet, d'après le topologiste américain Smale : "la propriété la plus importante d'un système dynamique est son comportement à long terme ; cela permet de "sélectionner" une série beaucoup plus simple de mouvements parmi ceux d'un système tout entier" [10, p. 162].

Nous considérerons constamment une fonction $f : I \to I$, où $I$ désigne un intervalle quelconque qui peut ne pas être borné (et même coïncider avec la droite numérique tout entière) ; nous supposerons la fonction $f$ continue sur $I$ et, si nécessaire, plusieurs fois dérivable sur un ouvert adéquat.

Dans ce travail, nous exploiterons la dérivée schwarzienne qui est définie, pour la fonction $f$ et au point $x$, par

$$D_s f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 ;$$

cette notion est analysée plus en détail dans [1].

Nous utiliserons également les notations suivantes : $f^1 = f, f^2 = f \circ f$, et, plus généralement pour tout entier $n \geqslant 2, f^n = f \circ f^{n-1}$; $f^{(1)} = f' = \frac{d}{dx} f$, $f^{(2)} = f'' = \frac{d}{dx} f^{(1)}$, et, plus généralement pour tout entier $n \geqslant 2$, $f^{(n)} = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}$.

Les exemples ci-dessus (voir figure 2) montrent que des orbites peuvent converger ou diverger.

Il convient tout d'abord d'observer que la limite éventuelle d'une orbite $S(f; x_0)$ est nécessairement un *point fixe* pour $f$, c'est-à-dire un point $x^*$ tel que $f(x^*) = x^*$.

De fait, si $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, avec $S(f; x_0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, alors, par continuité de $f$, on obtient

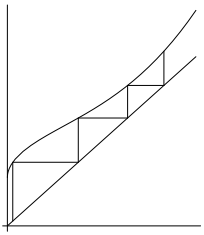
$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(\bar{x}).$$

Nous allons à présent introduire un procédé graphique qui permet de tracer l'orbite de n'importe quel point $x_0$ et de révéler intuitivement le comportement (convergence ou divergence) de cette orbite.

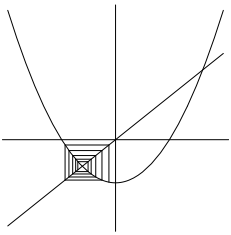
Considérons l'équation récurrente du premier ordre $x_t = f(x_{t-1})$. Dans un système d'axes cartésiens rectangulaires, portons en abscisse les valeurs de $x$ et en ordonnée les valeurs de $y = f(x)$. Superposons ensuite au graphe de $f$ la bissectrice du premier quadrant. Par le point $P_0$ de coordonnées $(x_0, x_0)$, traçons une verticale. Celle-ci rencontre le graphe de $f$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. A partir de ce point, menons une horizontale jusqu'au point $P_1 = (f(x_0), f(x_0))$ situé sur la bissectrice. Et recommençons les opérations depuis $P_1$ en traçant une verticale jusqu'au graphe de $f$, suivie d'une horizontale jusqu'à la bissectrice.

Les abscisses des points $P_0, P_1, P_2, \ldots$ de la bissectrice forment, dans l'ordre, l'orbite de $x_0$ pour $f$. Le diagramme ainsi obtenu porte le nom de *diagramme de phase*.

La structure géométrique d'une orbite quelconque est soit un "escalier", soit une "toile d'araignée". Les points fixes sont représentés par les abscisses des points d'intersection entre le graphe de $f$ et la bissectrice du premier quadrant.



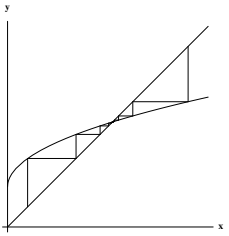
(a) Orbite en escalier



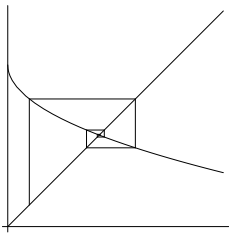
(b) Orbite en toile d'araignée

Figure 3 : Diagrammes de phase.

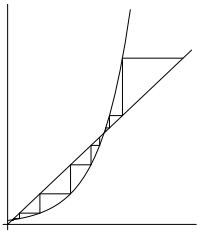
L'orbite d'un point situé au voisinage d'un point fixe $x^*$ peut se comporter de plusieurs façons qui se schématisent comme suit :



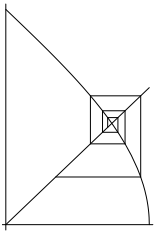

(a) Convergence monotone vers $x^*$.
$0 < f'(x^*) < 1$



(b) Convergence avec oscillations vers $x^*$.
$-1 < f'(x^*) < 0$



(c) Divergence monotone
$f'(x^*) > 1$



(d) Divergence avec oscillations
$f'(x^*) < -1$

Figure 4 : Convergence ou divergence d'une orbite.

Les figures ci-dessus suggèrent le fait que la convergence est liée à la valeur absolue de $f'(x^*)$ et les oscillations au signe de $f'(x^*)$ : l'orbite converge

(resp. diverge) lorsque la valeur absolue de la pente de la tangente au graphe de $f$ au point fixe $x^*$ est inférieure (resp. supérieure) à la pente de la diagonale $y = x$, c'est-à-dire lorsque $|f'(x^*)| < 1$ (resp. $|f'(x^*)| > 1$). Par ailleurs, l'orbite n'oscille pas (resp. oscille) autour de $x^*$ lorsque la fonction $f$ est croissante (resp. décroissante), c'est-à-dire lorsque $f'(x^*) > 0$ (resp. $f'(x^*) < 0$).

Après cette introduction géométrique et intuitive, revenons à l'étude rigoureuse du comportement asymptotique (c'est-à-dire de l'éventuelle convergence) d'orbites dont l'élément initial est proche d'un point fixe.

Les cas les plus simples sont liés à la notion d'hyperbolicité. Un point fixe $x^*$ pour $f$ est qualifié d'*hyperbolique* si $f$ est de classe $C_1$ dans un voisinage de $x^*$ avec $|f'(x^*)| \neq 1$. Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$ possède trois points fixes, à savoir $0, -1$ et $1$, qui sont tous hyperboliques puisque $f'(0) = \frac{1}{2},\ f'(-1) = f'(1) = 2$ [3, p. 24].

Notons la possibilité d'avoir des points fixes non hyperboliques : ainsi, la fonction $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ possède l'unique point fixe $x^* = \frac{1}{2}$ qui n'est pas hyperbolique puisque $f'(x^*) = 1$.

Les points fixes hyperboliques donnent lieu à des résultats précis en ce qui concerne la convergence d'orbites issues de leur voisinage.

**Th»orÀme 0.1** *Soit $x^*$ un point fixe pour $f$, tel que $|f'(x^*)| < 1$. Il existe un intervalle compact $I$ dont l'intérieur contient $x^*$ et tel que, pour tout $x_0$ appartenant à $I\backslash\{x^*\}$, l'orbite de $x_0$ pour $f$ est entièrement située dans $I$ et converge vers $x^*$.*

*Preuve* : Nous pouvons trouver deux nombres positifs $\varepsilon$ et $q$ tels que $|f'(x)| < q < 1$ pour tout $x$ de $I = [x^* - \varepsilon; x^* + \varepsilon]$. Soit $x_0$ un point arbitraire de $I$. Comme $x_1 - x^* = f(x_0) - f(x^*)$, la formule des accroissements finis livre un point $c$ situé entre $x_0$ et $x^*$, donc dans $I$, tel que

$$x_1 - x^* = f'(c)(x_0 - x^*).$$

D'où $|x_1 - x^*| < q\,|x_0 - x^*| < |x_0 - x^*|$ et $x_1 \in I$. De même, $x_2 - x^* = f(x_1) - f(x^*) = f'(d)(x_1 - x^*)$ pour un élément $d$ situé entre $x_1$ et $x^*$, d'où $|x_2 - x^*| < q\,|x_1 - x^*| < q^2\,|x_0 - x^*| < |x_0 - x^*|$ et $x_2 \in I$. De proche en proche, nous montrons que $|x_t - x^*| < q^t\,|x_0 - x^*|$ pour tout $t \in \mathbb{N}$. Comme $q < 1$, chaque $x_t$ est situé dans $I$ et l'orbite $S(f; x_0)$ converge vers $x^*$ puisque $\lim\limits_{t\to\infty} q^t = 0$.

■

A cause de cet énoncé, un point fixe $x^*$ (pour $f$) tel que $|f'(x^*)| < 1$ est souvent qualifié d'*attirant*; il correspond à un équilibre *stable* du système dynamique puisque l'orbite de $x^*$ ne comporte que l'élément $x^*$, tandis que l'orbite d'une valeur proche de $x^*$ tend toujours vers $x^*$.

Par un raisonnement semblable à celui de la preuve précédente, nous pouvons démontrer le théorème suivant.

**Th»orÀme 0.2** *Soit $x^*$ un point fixe pour $f$ tel que $|f'(x^*)| > 1$. Il existe un intervalle compact $I$ dont l'intérieur contient $x^*$ et tel que, pour tout $x_0$ appartenant à $I\backslash\{x^*\}$, on peut trouver un entier $n$ tel que $f^n(x_0)$ n'appartient pas à $I$.*

*Preuve* : Nous pouvons trouver deux nombres positifs $\varepsilon$ et $q$ tels que $|f'(x)| > q > 1$ pour tout $x$ de $I = [x^* - \varepsilon; x^* + \varepsilon]$.

Procédons par l'absurde. Si la thèse n'est pas vérifiée, il existe $x_0$ dans $I\backslash\{x^*\}$ tel que, pour tout entier $n$, $x_n = f^n(x_0) \in I$.

Comme $x_1 - x^* = f(x_0) - f(x^*)$, la formule des accroissements finis livre un point $c$ situé entre $x_0$ et $x^*$, donc dans $I$, tel que

$$x_1 - x^* = f'(c)(x_0 - x^*),$$

d'où $|x_1 - x^*| > q\,|x_0 - x^*|$. De même, $x_2 - x^* = f(x_1) - f(x^*) = f'(d)(x_1 - x^*)$ pour un élément $d$ situé entre $x_1$ et $x^*$, ce qui entraîne $|x_2 - x^*| > q\,|x_1 - x^*| > q^2\,|x_0 - x^*|$.

De proche en proche, nous montrons que $|x_t - x^*| > q^t\,|x_0 - x^*|$ pour tout entier $t$. Comme $q > 1$, $\lim_{t\to+\infty} q^t = +\infty$, ce qui contredit l'appartenance de tous les $x_t$ dans $I$.

■

En raison de cet énoncé, un point fixe $x^*$ (pour $f$) tel que $|f'(x^*)| > 1$ est appelé *repoussant*; il correspond à un équilibre *instable* puisque l'orbite d'un point voisin de $x^*$ s'éloigne de $x^*$.

Le traitement des points fixes non hyperboliques, encore baptisés *neutres*, est beaucoup plus délicat; certains auteurs se réfèrent même à ces points en affirmant qu'ils correspondent à des cas où "the first derivative is inconclusive" [7, p. 160]. Nous n'aborderons pas ici l'étude de ces points fixes neutres, car elle est beaucoup plus technique [2]. Nous nous contenterons d'observer que, dans les cas de points fixes hyperboliques, le fait qu'une orbite démarre à gauche ou à droite du point fixe n'a aucune influence sur

la convergence ou la divergence de l'orbite. Il n'en va pas nécessairement de même lorsque $|f'(x^*)| = 1$, ainsi qu'en témoigne la figure suivante :

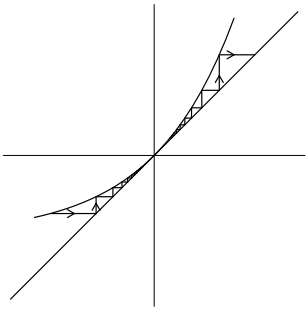


Figure 5 : Point fixe non hyperbolique (convergence par valeurs inférieures et divergence par valeurs supérieures).

Nous allons montrer que les fonctions qui admettent des dérivées schwarziennes négatives [1] ont des propriétés dynamiques très intéressantes qui simplifient leur analyse.

Or, de nombreuses fonctions $f$ sont telles que $D_s f(x) < 0$ pour tout $x$ n'annulant pas $f'$ et telles que la limite de $D_s f(x)$, lorsque $x$ tend vers tout point stationnaire de $f$, est négative ou égale à $-\infty$ : nous écrivons alors simplement $D_s f < 0$. Pour la bonne compréhension du texte, rappelons à leur propos cet important résultat, appelé *principe schwarzien du min-max : soit $f$ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $D_s f < 0$, alors $f'$ ne peut pas avoir un minimum local positif, ni un maximum local négatif* [1].

**Introduisons le concept d'intervalle d'attraction**

**Définitions** : Soit $x^*$ un point fixe attirant pour $f$. Le *bassin d'attraction* de $x^*$ pour $f$ est l'ensemble de tous les points dont l'orbite converge vers $x^*$. L'*intervalle d'attraction* de $x^*$ pour $f$ est le plus grand intervalle, noté $I_f(x^*)$, qui est inclus dans le bassin d'attraction.

Par exemple, l'intervalle d'attraction de 0 pour $f(x) = x^2$ est $]-1; 1[$ ; c'est aussi son bassin d'attraction. Mais, le bassin d'attraction peut différer de l'intervalle d'attraction ainsi qu'en témoigne la figure suivante où le bassin d'attraction de $x^*$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

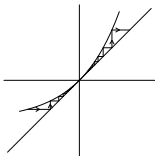


Figure 6 : Le bassin d'attraction de $x^*$ pour $f$ différent de $I_f(x^*)$.

Il est intéressant de connaître les bassins d'attraction des points fixes attirants car, si le système se trouve dans un état stable et si nous modifions la condition initiale (en particulier, si nous introduisons une certaine erreur de mesure), nous sommes assurés d'obtenir à plus ou moins long terme les mêmes résultats pour autant que nous restions dans le bassin d'attraction correspondant à l'état stable initial.

Nous devons tout d'abord donner quelques propriétés topologiques de l'intervalle d'attraction (et nous noterons $\bar{A}$ l'adhérence d'un sous-ensemble $A$ de $\mathbb{R}$ pour la topologie naturelle de $\mathbb{R}$).

**Lemme 0.1** *Soient $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x^*$ un point fixe attirant pour $f$. L'intervalle d'attraction $I_f(x^*)$ de $x^*$ pour $f$ est un intervalle ouvert contenant $x^*$ ; de plus,*

$$f(I_f(x^*)) \subset I_f(x^*) \ \ et \ \ f(\bar{I}_f(x^*)) \subset \bar{I}_f(x^*).$$

*Si $I_f(x^*) = ]a;b[$, alors $\{f(a), f(b)\} \subset \{a, b\}$.*

*Preuve.* Par le théorème , il existe un réel positif $\varepsilon$ tel que, pour tout $x$ de $]x^* - \varepsilon; x^* + \varepsilon[$, l'orbite $S(f;x)$ est entièrement située dans $]x^* - \varepsilon; x^* + \varepsilon[$ et converge vers $x^*$ ; en conséquence,

$$]x^* - \varepsilon; x^* + \varepsilon[ \subset I_f(x^*).$$

Supposons l'existence d'un plus grand (resp. plus petit) élément $a$ dans $I_f(x^*)$. Il existe un nombre réel positif $N(\varepsilon)$ tel que $-\varepsilon < f^{N(\varepsilon)}(a) - x^* < \varepsilon$.

Grâce à la continuité de $f$, il existe un réel positif $\delta$ tel que $-\varepsilon < f^{N(\varepsilon)}(a+\delta) - x^* < \varepsilon$ (resp. $-\varepsilon < f^{N(\varepsilon)}(a-\delta) - x^* < \varepsilon$). Dès lors, $a + \delta$ (resp. $a - \delta$) appartient également à $I_f(x^*)$, ce qui est absurde.

L'intervalle $I_f(x^*)$ ne contenant ni maximum, ni minimum est ouvert.

En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, $f(I_f(x^*))$ est un intervalle ; il est visiblement inclus dans $I_f(x^*)$ puisque les orbites d'un point $x$

et de $f(x)$ sont composées des mêmes éléments (hormis $x$). En vertu de la continuité de $f$, on a de plus

$$f(\bar{I}_f(x^*)) \subset \overline{f(I_f(x^*))} \subset \bar{I}_f(x^*).$$

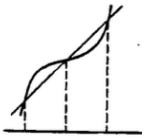
Dans ces conditions, si $I_f(x^*) = ]a; b[$, alors

$$\{f(a), f(b)\} \subset [a, b] \setminus ]a, b[ = \{a, b\}.$$

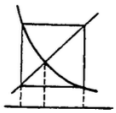
■

La deuxième partie de ce lemme permet de préciser la nature des extrémités $a, b$ de $I_f(x^*)$ lorsque ce dernier est borné.

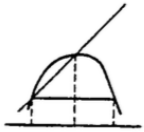
En effet, trois situations sont possibles :
— ou bien $a$ et $b$ sont des points fixes pour $f$, c'est-à-dire $f(a) = a$ et $f(b) = b$ ;
— ou bien $a$ et $b$ forment un "cycle de période 2", en ce sens que $f(a) = b$ et $f(b) = a$, d'où $f^2(a) = a$ et $f^2(b) = b$ ;
— ou bien $a$ ou $b$ est un point fixe qui coïncide avec l'image par $f$ de l'autre point, à savoir $f(a) = f(b) = a$ ou $f(a) = f(b) = b$.
Ces trois cas sont représentés par les figures ci-dessous.



(a) $f(a) = a,\ f(b) = b$



(b) $f(a) = b,\ f(b) = a$



(c) $f(a) = f(b) = a$

Figure 7 : Formes d'un intervalle d'attraction borné.

**Th»orÀme 0.3** *Soit $f$ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $D_s f < 0$. Si $x^*$ est un point fixe attirant pour $f$, alors son intervalle d'attraction $I_f(x^*)$ n'est pas borné, ou contient un point stationnaire de $f$ dont l'orbite tend vers $x^*$.*

*Preuve* : Supposons l'intervalle $I_f(x^*)$ borné. Par le lemme , nous pouvons écrire $I_f(x^*) = ]a; b[$ avec $\{f(a), f(b)\} \subset \{a, b\}$.

Cas 1 : Si $f(a) = f(b) = a$ ou si $f(a) = f(b) = b$, le théorème de Rolle garantit dans $I_f(x^*)$ l'existence d'un point stationnaire pour $f$.

Cas 2 : Si $f(a) = a$ et $f(b) = b$, la formule des accroissements finis livre des éléments $c \in ]a; x^*[$ et $d \in ]x^*; b[$ tels que

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(x^*)}{a - x^*} = \frac{a - x^*}{a - x^*} = 1$$

et

$$f'(d) = \frac{f(b) - f(x^*)}{b - x^*} = \frac{b - x^*}{b - x^*} = 1.$$

En vertu du théorème de Weierstrass, la fonction $f'$ admet dans l'intervalle $[c; d]$ un minimum qui est inférieur à 1, puisque $f'(x^*) < 1$, et qui ne peut dès lors être atteint qu'en un minimant local $m$ situé dans $]c; d[$.

Par le principe schwarzien du $\min - \max$, $f'(m) \leqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $f'$ assure l'existence d'un point situé entre $m$ et $c$ (ou $d$), et dès lors dans $]a; b[$, où $f'$ s'annule.

Cas 3 : Si $f(a) = b$ et $f(b) = a$, il est clair que $x^*$ est encore un point fixe attirant pour $f^2$ et que $]a; b[$ est l'intervalle d'attraction de $x^*$ pour $f^2$. De plus, $D_s f^2 < 0$, en vertu de la règle de dérivation schwarzienne en chaîne [1]. Comme $f^2(a) = a$ et $f^2(b) = b$, le raisonnement du cas précédent peut être repris à propos de $f^2$ (en lieu et place de $f$) : l'intervalle $]a; b[$ renferme donc un point stationnaire $x_0$ de $f^2$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, on obtient

$$(f^2)'(x_0) = f'(f(x_0))f'(x_0) = 0,$$

et $f$ possède donc également un point stationnaire dans $]a; b[$.

■

**Remarque** : Ce dernier théorème explique pourquoi, pour les fonctions $f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$ par exemple, nous envisageons généralement l'orbite de l'origine, ainsi qu'en attestent les graphiques de la figure 2. Nous savons en effet que si $|x|$ est suffisamment grand, alors l'orbite $S(f_\lambda; x)$ tend vers $+\infty$. Dès lors, l'intervalle d'attraction de $f_\lambda$ est toujours borné. Puisque 0 est le seul point stationnaire pour $f_\lambda$ et que $D_s f_\lambda < 0$, il s'ensuit que si $f_\lambda$ admet un point fixe attirant, le point stationnaire doit le "trouver".

# Bibliographie

[1] BAIR J. et HAESBROECK G., La dérivée Schwarzienne, *Mathématique et Pédagogie*, n° 108, 1996, pp. 29-38.

[2] BAIR J. et HAESBROECK G., Monotonous stability for neutral fixed points, en voie de publication dans *Bulletin Belg. Math. Soc. S. Stevin.*

[3] DEVANEY R. L., *An Introduction To Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, 1989, Addison-Wesley Publishing Company.

[4] DEVANEY R. L., *A First Course In Chaotic Dynamical Systems*, 1992, Addison-Wesley Publishing Company.

[5] HOLMGREN R. A., *A first course in discrete dynamical systems*, 1991, Springer-Verlag.

[6] MICKENS R. E., *Difference equations : theory and applications*, 2nd edition, 1990, Chapman et Hall.

[7] SANDEFUR J. T., *Discrete Dynamical Systems*, 1990, Clarendon Press Oxford.

[8] SCHUSTER H. G., *Deterministic chaos : an introduction*, 3d argm. ed., 1995, VCH Verslasgesellschaft mbh.

[9] SHARKOVSKY A. N., MAISTRENKO Y. L. et ROMANENKO E. Y., *Difference equations and their applications*, 1993, Kluwer Academic Publishers.

[10] STEWART I., *Dieu joue-t-il aux dés ? Les mathématiques du chaos*, 1992, Flammarion.

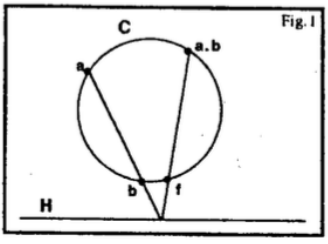
Adresses des auteurs :

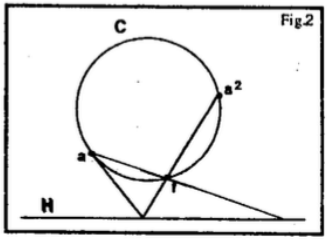
**Gentiane HAESBROECK et Valérie WATHIEU**
Université de Liège
Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales
7, Boulevard du Rectorat, Bâtiment 31
4000 Liège - Belgique

# Le produit sur le cercle

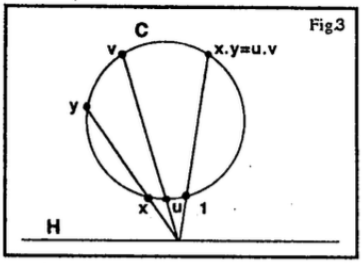
**G. Lasters**,

Il est possible de définir une loi binaire sur le cercle qui est fort intéressante. Pour faire cela, nous avons besoin d'un cercle $C$, d'une droite fixe $H$ et d'un point fixe $f$ sur le cercle. Le produit $a \bullet b$ est défini comme dans la figure 1. Si $a$ et $b$ coïncident, $a \bullet b$ est donc $a^2$ ; la ligne $ab$ est alors tangente en $a$ au cercle.

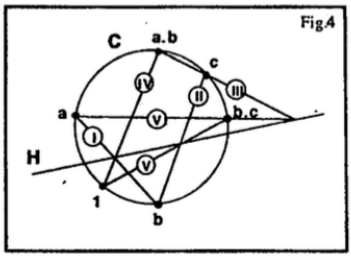



Dans la figure 2, $f$ peut être noté comme 1 parce que $a \bullet f = a$. Si $x, y, u$ et $v$ sont des points du cercle tels que $x \bullet y = u \bullet v$, les droites $xy$ et $uv$ se coupent sur la droite fixe $H$ (figure 3).




Il est évident que $\bullet$ est commutative, mais il est moins évident que $\bullet$ est aussi associative. L'associativité de $\bullet$ découle du théorème de Pascal illustré ci-dessous (figure 4).

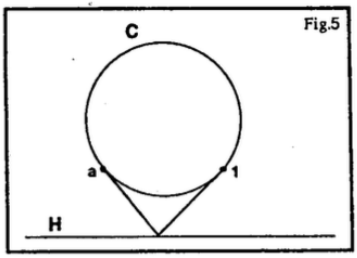



Dans cette figure, l'hexagone de Pascal est formé par les points $a, b, c, a \bullet b, 1, b \bullet c$.

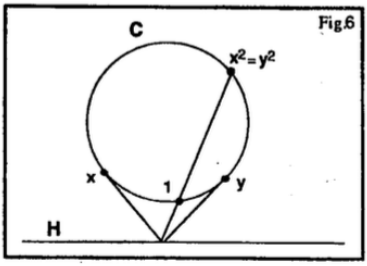
On a que : $I$ et $IV$ se coupent sur $H \Leftrightarrow a \bullet b = (a \bullet b) \bullet 1$
$II$ et $V$ se coupent sur $H \Leftrightarrow b \bullet c = 1 \bullet (b \bullet c)$
$III$ et $VI$ se coupent sur $H \Leftrightarrow (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

**Quelques remarques**

1. Dans la figure 5, $a^2 = 1$ ; nous prenons $-1$ pour valeur de $a$.




2. Dans la figure suivante, $y$ peut être noté comme $(-1) \bullet x$.
*Preuve* : $((-1) \bullet x)^2 = (-1)^2 \bullet x^2 = 1 \bullet x^2$.



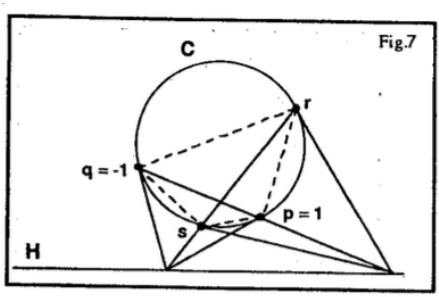
Maintenant, nous allons résoudre trois problèmes géométriques avec le produit sur le cercle.

**Problème I**

Inscrire un quadrilatère $pqrs$ dans $C$ d'une manière telle que les côtés opposés se coupent su $H$.

*Solution* : Mettons $p = 1,\ q = -1$, $r$ et $s$ sont construits comme dans la figure 7.

On a $s \bullet r = 1$ et $s^2 = -1$, d'où $s \bullet (s \bullet r)s = (-1) \bullet r \Leftrightarrow s = (-1) \bullet r$.




$qs$ et $pr$ se coupent sur $H$ car :

$$\begin{aligned} q \bullet s = p \bullet r &\Leftrightarrow (-1) \bullet (-1) \bullet r = 1 \bullet r \\ &\Leftrightarrow 1 \bullet r = 1 \bullet r \end{aligned}$$

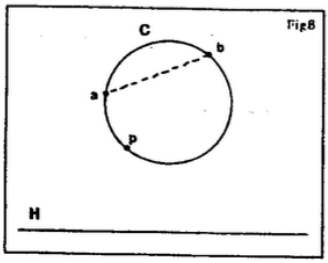
$qr$ et $sp$ se coupent sur $H$ car :

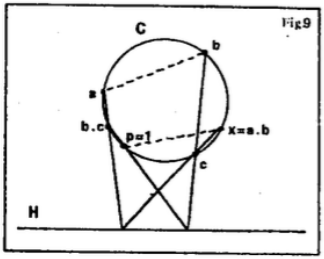
$$\begin{aligned} q \bullet r = s \bullet p &\Leftrightarrow (-1) \bullet r = (-1) \bullet r \bullet 1 \\ &\Leftrightarrow (-1) \bullet r = (-1) \bullet r \end{aligned}$$

**Problème II**

Nous voulons maintenant construire, dans les limites du cadre (figure 8), le segment $px$ ($x$ étant un point du cercle) tel que $ab$ et $px$ se coupent sur $H$. Notons $p = 1$, alors $x = a \bullet b$. Puisque $ab$ coupe $H$ en dehors du cadre, nous devons construire $x$ en employant un point auxiliaire $c$ sur le cercle $C$.

Ensuite, on construit, comme indiqué dans la figure 9, le point $b \bullet c$. Utilisant l'associativité de l'opérateur $\bullet$, on a : $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c = x \bullet c$ ; ce qui mène directement à l'identification du point $x$. Donc, la solution montrée dans la figure 9 est purement algébrique.




**Problème III**

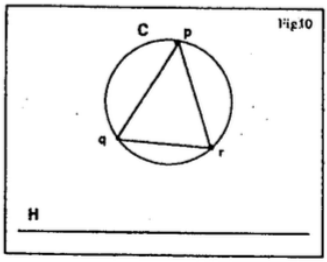
Etant donné un triangle $pqr$ (figure 10), construire un triangle $p'q'r'$ tel que :

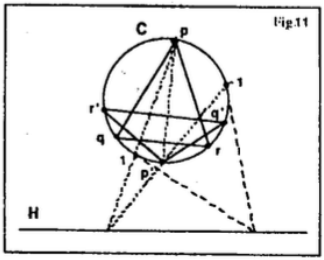
- $pq$ et $p'q'$ se coupent sur $H$
- $qr$ et $q'r'$ se coupent sur $H$
- $pr$ et $p'r'$ se coupent sur $H$.

Algébriquement, la solution est simple.

On construit les points $x'$ $(x = p, q, r)$ tels que $x' = (-1) \bullet x$. Alors, il s'ensuit que : $p' \bullet q' = (-1) \bullet p \bullet (-1) \bullet q = p \bullet q$, donc $p'q'$ et $pq$ se coupent sur $H$.

Le même argument s'applique pour les autres côtés des triangles $pqr$ et $p'q'r'$. La construction est montrée dans la figure 11. Pour ne pas alourdir la figure 11, uniquement la construction du point $p'$ est détaillée.



Adresse de l'auteur :

**Guido LASTERS**
Ganzendries 245
3300 Oplinter-Tienen

# Chimborazo-Everest 1-0

**J. Miewis**,

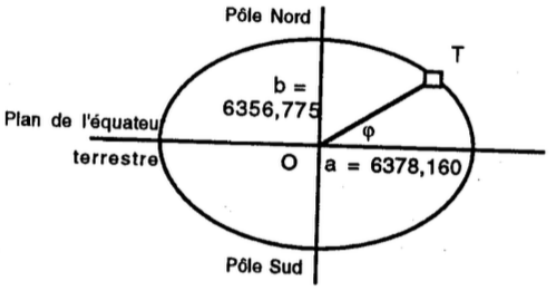
La plupart des encyclopédies s'accordent pour désigner le Mont Everest comme le point le plus élevé de la terre. Avec ses 8848 m au-dessus du niveau moyen des mers, il semble ne craindre aucun concurrent ! Et en tout cas pas un volcan nommé Chimborazo, point culminant à 6267 m dans les Andes équatoriennes.

L'autre jour pourtant, l'un de mes élèves - offusqué - prétendait que son professeur de géographie avait cité le Chimborazo comme le point de la surface terrestre le plus éloigné du centre de la terre. Rien d'étrange à cela, lui dis-je, puisque la terre n'est pas rigoureusement sphérique : elle est plus proche de l'ellipsoïde de révolution et c'est celui-ci qui sert de repère au niveau moyen des mers qui à son tour détermine les altitudes.

Comme cela se passait dans un cours de rhétorique où les étudiants avaient quelques notions sur les ellipses, il se trouvait là une question ma foi assez originale et matière à quelque interdisciplinarité...

## 1. Ce que dit la géographie.

Abordons d'abord quelques concepts géographiques nécessaires à notre propos :

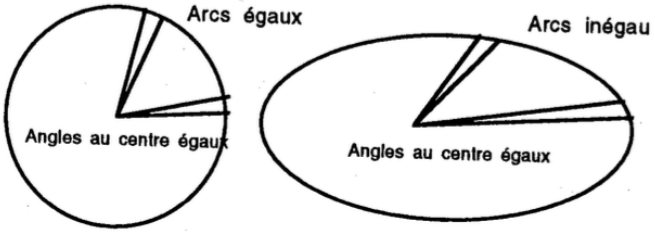



Si la terre - ellipsoïdale - est coupée par un plan comprenant les deux pôles, la section est une ellipse. Cette ellipse admet comme demi grand axe

($a$) le rayon terrestre équatorial, estimé à 6378,160 km et comme demi petit axe ($b$) le rayon terrestre aux pôles estimé lui à 6356,775 km.

Un point $T$ d'altitude nulle à la surface terrestre est repéré dans notre section elliptique par l'angle $\varphi$ de latitude. C'est un angle au centre croissant régulièrement de la latitude zéro à l'équateur jusqu'à la latitude 90° aux pôles.

Si dans un cercle, deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux, il en va tout autrement dans une ellipse : un angle au centre d'un degré aux alentours de la latitude zéro intercepte un arc plus grand que celui intercepté par un angle au centre d'un degré sous nos latitudes.




L'idée d'une terre ellipsoïdale est en fait assez ancienne : de 1736 à 1746, trois savants français : Godin, Bouguer et La Condamine avaient mesuré au Pérou un arc équivalent à une variation d'un degré de latitude. De 1792 à 1799, deux autres savants français : Delambre et Méchain mesurèrent l'arc de Dunkerque jusqu'à Barcelone pour établir la première définition du mètre.

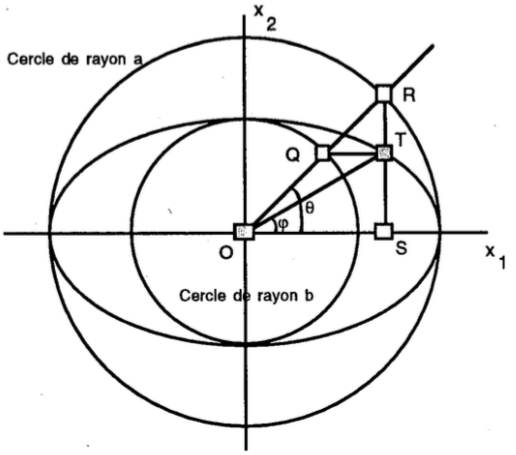
Les différences - significatives - observées entre ces deux mesures sont à l'origine de l'hypothèse que la terre n'est pas une sphère, mais plutôt un ellipsoïde de révolution.

L'évolution des techniques et la précision des mesures ont conduit aux actuelles valeurs des rayons ($a$) et ($b$).

Par ailleurs, la latitude du Mont Everest est 27,98° Nord et celle du volcan Chimborazo est 1,28° Sud.

# 2. Ce que nous dit la géométrie de l'ellipse.

## 2.1. L'équation de l'ellipse par rapport à la latitude.




Rapportée à un repère dont l'origine $O$ est au centre de la terre, le premier axe $OX_1$ dans la direction d'un point quelconque de l'équateur terrestre et le second axe $OX_2$ en direction du pôle Nord, ses équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x_1 &= a\cos\theta \\ x_2 &= b\sin\theta \end{cases}$$

où $\theta$ **n'**est malheureusement **pas** la latitude du point mobile de coordonnée $(x_1, x_2)$ sur l'ellipse, mais un angle au centre des deux cercles qui conduisent à la construction classique de l'ellipse.

Le paramètre $\theta$ de ses équations paramétriques est l'angle $S\hat{O}R$, tandis que $\varphi$ est l'angle $S\hat{O}T$ de latitude du point $T$.

L'abscisse de $T$ peut donc d'exprimer par :

$$x_1 = a\cos\theta \quad \text{et} \quad x_1 = OT\cos\varphi$$

L'ordonnée de $T$ s'exprime quant à elle par :

$$x_2 = b\sin\theta \quad \text{et} \quad x_2 = OT\sin\varphi.$$

De $b\sin\theta = OT\sin\varphi$ et $a\cos\theta = OT\cos\varphi$, on tire par division :

$$\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}\,\varphi.$$

Nous avons ainsi trouvé le lien entre la latitude $\varphi$ et le paramètre $\theta$ des équations paramétriques de l'ellipse :

$$\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{a}{b}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right) \quad (O \leqslant \theta,\ \varphi < 90^\circ).$$

L'emploi des formules classiques de goniométrie :

$$1 + \mathrm{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \ \text{ et } \ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

appliquée à la relation

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{a}{b}\ \mathrm{tg}\,\varphi$$

permet de trouver :

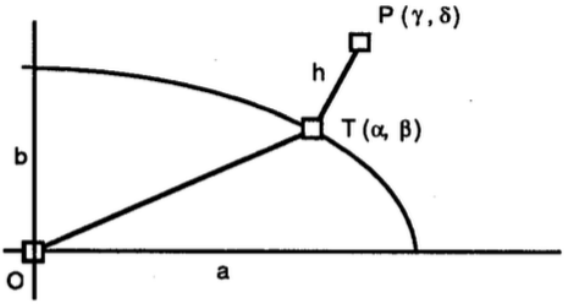
$$\sin\theta = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{b^2 + a^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}} \ \text{ et } \ \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}}$$

et finalement l'équation d'une ellipse rapportée à l'angle $\varphi$ de latitude :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}} \\ x_2 = \frac{ab\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{b^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}} \end{cases}$$

## 2.2. Le problème de l'altitude.

L'altitude d'un lieu $P$ se conçoit mesurée perpendiculairement à un plan localement tangent à la surface terrestre.



Cela signifie pour notre ellipse que l'altitude ($h$) doit être portée suivant la normale au point $T$ considéré. La distance du sommet $P$ au centre de la terre $O$ n'est donc pas la somme des deux distances $OT$ et $TP$.

L'équation de la normale au point $T(\alpha, \beta)$ d'une ellipse de paramètres $a$ et $b$ est donnée dans tous les manuels :

$$a^2\beta(x_1 - \alpha) = b^2\alpha(x_2 - \beta).$$

Nous devons avec ces données rechercher la coordonnée du point $P(\gamma, \delta)$ situé à une distance $h$ de $T$ vers l'extérieur de notre quart d'ellipse, ce qui signifie que l'abscisse et l'ordonnée de $P$ sont plus grandes respectivement que celles de $T$. Cette restriction à un quart d'ellipse permet en effet de lever l'ambiguïté sur $P$, puisqu'il existe deux points sur la normale à une distance $h$ de $T$.

Nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} (\gamma - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2 = h^2 \\ a^2\beta(\gamma - \alpha) = b^2\alpha(\delta - \beta) \end{cases}$$

la première équation exprimant la distance de $T$ à $P$, la seconde vérifiant que le point $P$ appartient à la normale.

($\alpha$ et $\beta$ sont connus et valent respectivement $a\cos\theta$ et $b\sin\theta$).

La seconde équation donne :

$$\gamma - \alpha = \frac{b^2\alpha}{a^2\beta}(\delta - \beta)$$

que l'on reporte dans la première :

$$(\delta - \beta)^2 \left( \frac{b^4\alpha^2}{a^4\beta^2} + 1 \right) = h^2$$

puis

$$(\delta - \beta)^2 = \frac{h^2 a^4 \beta^2}{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2}$$

et en remplaçant $\alpha$ et $\beta$ :

$$(\delta - \beta)^2 = \frac{h^2 a^4 b^2 \sin^2\theta}{b^4 a^2 \cos^2\theta + a^4 b^2 \sin^2\theta} = \frac{h^2 a^2 \sin^2\theta}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \delta &= \beta + \frac{ha\sin\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} \qquad (1) \\ \delta &= \sin\theta\left(b + \frac{ha}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right). \end{aligned}$$

En isolant le terme $(\delta - \beta)$ dans la seconde équation du système, on obtient en utilisant la même stratégie :

$$\gamma = \cos\theta\left(a + \frac{hb}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right).$$

La coordonnée de $P$ étant à présent connue, il est facile de trouver la distance $OP$ (que nous proposons au carré pour alléger l'écriture) :

$$\begin{aligned} d^2 &= \cos^2\theta\left(a + \frac{hb}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right)^2 \\ &\quad + \sin^2\theta\left(b + \frac{ha}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right)^2. \end{aligned}$$

Cette formule calcule la distance du centre de la terre à un point d'altitude $h$ situé à une latitude (Nord) $\varphi$ :

$$\left(a = 6378,160\ km;\ b = 6356,775\ km;\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi\right)\right).$$

*C'est le choix du signe en (1) qui motive la restriction aux latitudes nord : nous n'aurons qu'à supposer que le Chimborazo est à 1,28° de latitude nord ; cela ne changera rien aux résultats).*

## 3. Appliquons notre formule.

Les calculs ont été effectués avec une machine d'une capacité de 10 chiffres significatifs et en utilisant au maximum les mémoires pour les valeurs intermédiaires.

$$
\begin{array}{lll}
EVEREST : & h & = 8,848\ km \\
 & \varphi & = 27,98^\circ \\
 & \theta & = 28,06^\circ \\
 & & \\
 & d & = 6382,282\ km. \\
 & & \\
CHIMBORAZO : & h & = 6,267\ km \\
 & \varphi & = 1,28^\circ \\
 & \theta & = 1,28^\circ \\
 & & \\
 & d & = 6398,416\ km.
\end{array}
$$

D'un certain point de vue mathématique, le Chimborazo mérite donc d'être reconnu : c'est en son sommet que se situe le point terrestre le plus éloigné du centre de la terre : Chimborazo-Everest : 1-0.

# Bibliographie


[1] Broeckx R., Mathématique, La Suite 62, 1974,
pour l'équation de l'ellipse et de la normale.

[2] Encyclopédie Britannique
pour les latitudes, altitudes et rayons terrestres.



Adresse de l'auteur :

**Jules MIEWIS**
avenue de Péville 150
4030 Grivegnée (Liège)

# Développements limités

**P. Dupont et N. Vast**,

## 1. Introduction

Nous cherchons à approximer « localement » une fonction par un polynome, autour d'un point donné. De manière plus précise, si $a$ est un point non isolé du domaine d'une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous cherchons un polynome $P$ tel que, lorsque $x$ est proche de $a$, la différence $f(x)-P(x)$ soit (en valeur absolue) inférieure à $(x-a)^n$, pour un naturel $n$ fixé. Techniquement, nous voulons donc que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{1}$$

Cependant, si cette condition est remplie, alors on a aussi

$$\lim_{x \overset{\to}{\neq} a} (f(x)-P(x)) = 0$$

et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leqslant n$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^m} = 0,$$

d car

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^m} = \lim_{x\to a} \left( \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} \cdot (x-a)^{n-m} \right) = 0 \cdot \delta_n^m = 0,$$

où $\delta_n^m$ est le symbole de Kronecker : $\delta_n^m = 1$ si $m = n$ et 0 sinon.

Donc en fait ce sont $(n+1)$ conditions sur le polynome $P$ qui sont contenues dans (1). Si nous voulons que le problème de trouver ce polynome ait une solution unique, il ne faut pas admettre un ensemble trop vaste comme champ de recherches ; mais, puisque $P$ est astreint à $(n+1)$ conditions, pour que le problème soit soluble, il faut disposer d'au moins $(n+1)$ degrés de liberté. La conclusion est que nous chercherons $P$ dans $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n} = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k X^k \ : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$. Un tel polynome $P$ est appelé *développement limité d'ordre $n$ de $f$ en $a$.*

Ce type d'approximation polynomiale d'une fonction est plus répandu en France que chez nous. En Belgique, lorsqu'il est question d'approcher une fonction par un polynome, nous pensons inévitablement aux polynomes de Taylor. Nous verrons qu'un polynome de Taylor est un développement limité. Par contre, une fonction $f$ peut admettre un développement limité d'ordre $n$ en $a$ sans y posséder de polynome de Taylor de cet ordre.

Quel est l'intérêt de ces développements limités ? Aux yeux des élèves, approximer une fonction par un polynome ne sert pas à grand-chose puisqu'il suffit d'appuyer sur les touches de sa calculette pour obtenir la valeur d'une fonction en un point, avec 9 décimales. Ils ne voient donc pas quels avantages nous pouvons trouver dans les développements limités. Une façon de les motiver est de leur montrer comment la connaissance des développements limités des fonctions élémentaires peut faciliter le calcul de certaines limites qui présentent une indétermination du type $\frac{0}{0}$ (voir le paragraphe 4). Cet avantage est d'autant plus net lorsque, pour lever l'indétermination, la règle de L'Hospital (outil dont les élèves raffolent !) devrait être utilisée de manière répétée. Bien sûr, la seule connaissance des développements limités des fonctions élémentaires ne suffit pas : il faut aussi, pour que l'outil soit réellement efficace, disposer d'un moyen de les combiner entre eux pour éviter le recours à la définition lorsque nous devons calculer le développement limité d'une fonction comme, par exemple, $x \mapsto 2 \exp x + x^4 \sin 2x$. C'est de ces règles de « combinaison » que nous allons discuter ici, en les appelant « raccourcis ». Certains d'entre eux sont bien connus : par exemple, le fait que le développement limité de la somme de deux fonctions en un point est la somme des développements limités de ces deux fonctions en ce point. D'autres par contre, bien que tout aussi utiles, sont rarement cités dans les livres d'Analyse, ou alors, ils sont utilisés dans des exemples sans avoir été énoncés de manière précise et encore moins démontrés.

Nous nous proposons de faire ici un inventaire de tous les raccourcis qui nous semblent intéressants (voir la table page 42) et de démontrer certains d'entre eux. L'intérêt de ces raccourcis de calcul des développements limités apparaitra dans une série d'exemples. Dans un dernier paragraphe, nous parlerons de trois raccourcis d'usage moins fréquent.

## 2. Développements limités

**Définition :** Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en un point $a$ non isolé du domaine de $f$ et $n$ un naturel. Nous appelons *développement limité d'ordre $n$ de $f$ en $a$* un polynome $P$ de degré inférieur à $n$ tel que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Il est aisé de démontrer que si un tel polynome existe, alors il est unique. Dans ce cas, nous le noterons $P_{n,a}f$ et simplement $P_n f$ si $a = 0$. D'autre part, clairement,

**Proposition 2.1** *Si $P_{n,a}f$ existe pour un certain $n$ supérieur à 1, alors $P_{m,a}f$ existe pour tout naturel $m$ inférieur à $n$ et $P_{m,a}f$ est la* restriction d'ordre $m$ en $a$ de $P_{n,a}f$ *; en d'autres termes, si $P_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$, alors $P_{m,a}f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x-a)^k$.*

■

Remarque : Si $P_{n,a}f$ existe, on pose

$$\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - P_{n,a}f(x)}{(x-a)^n} & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

On a $\lim_a \epsilon = 0$ et $\epsilon$ est donc continue en $a$. D'autre part,

$$f(x) = P_{n,a}f(x) + (x-a)^n \cdot \epsilon(x).$$

## 3. Polynomes de Taylor

Les développements limités font penser aux polynomes de Taylor. Rappelons la définition de ceux-ci : Si $f$ est une fonction $n$ fois dérivable en $a$ (ce qui suppose que $f^{(n-1)}$ existe sur un voisinage de $a$), le *polynome de Taylor d'ordre $n$ de $f$ autour de $a$* est le polynome de degré inférieur à $n$, que l'on notera $T_{n,a}f$, tel que

$$(T_{n,a}f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

Il est possible de démontrer que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (T_{n,a}f)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

(Voir p. ex. [2]). Donc, si $f$ est $n$ fois dérivable en $a$, alors $P_{n,a}f$ existe et est égal à $T_{n,a}f$. En fait, puisque $f$ est continue en $a$, les polynomes $P_{0,a}f$ et $T_{0,a}f$ existent de toute façon et sont égaux à $f(a)$.

Nous avons de plus le résultat suivant :

**Proposition 3.1** *Si $P_{n,a}f$ existe pour un $n$ supérieur à 1, alors $f$ est dérivable en $a$.*

■

Lorsque $n = 1$, nous avons même une équivalence et $P_{1,a}f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = T_{1,a}f(x)$. Par contre, lorsque $n$ est supérieur à 2, le polynome $P_{n,a}f$ peut exister sans que $f$ ne soit $n$ fois dérivable en $a$, et par conséquent sans que $T_{n,a}f$ n'existe. En effet, la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas deux fois dérivable en 0, mais puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0,$$

le polynome nul est le développement limité d'ordre 2 de $f$ au point 0.

Remarque : Nous avons défini la notion de développement limité d'une fonction $f$ en un certain point $a$ non isolé dans le domaine de $f$. Dans la suite, nous nous limiterons au cas où $a = 0$. En effet, les polynomes de Maclaurin (c'est-à-dire les polynomes de Taylor autour de 0) des fonctions élémentaires sont bien connus et, comme nous venons de le remarquer, ils fournissent des développements limités des fonctions élémentaires en 0 ; ce sont donc les raccourcis autour de 0 qui ont une réelle efficacité. D'autre part, quand il s'agira d'utiliser ces développements limités pour calculer certaines limites, nous pourrons toujours nous ramener à une limite en 0 par un changement de variable.

# 4. Calculs de limites

La définition même de développement limité montre l'intérêt que présente, pour le calcul de certaines limites, la connaissance des développements limités des fonctions élémentaires. En effet, si $f$ possède un développement limité d'ordre $n$ en 0, alors, puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_n f(x)}{x^n} = 0,$$

l'existence de $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^n}$ équivaut à celle de $\lim_{x\to 0} \dfrac{P_n f(x)}{x^n}$ et ces deux dernières limites sont égales si elles existent.

On a même un résultat plus général :

**Th»orÀme 4.4** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $f$ et $g$ possèdent un développement limité d'ordre $n$ en 0 et si $P_n g$ n'est pas nul, alors $\lim_0(f/g)$ existe si et seulement si $\lim_0(P_n f/P_n g)$ existe et dans ce cas, ces deux limites ont la même valeur.*

Avant de démontrer ce théorème, énonçons un lemme :

**Lemme 4.1** *Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $n$ un naturel. Si $f$ possède un développement limité d'ordre $n$ en 0 et si $P_n f$ n'est pas nul, alors $\lim_0(f/P_n f) = 1$.*

Démonstration du lemme : D'après la remarque faite au paragraphe 2, il existe une fonction $\epsilon$ telle que $f = P_n f + \mathrm{I}^n\epsilon$ et que $\lim_0 \epsilon = 0$ (où $\mathrm{I} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est l'identité). Si $P_n f(x)$ s'écrit $a_l x^l + a_{l+1}x^{l+1} + \cdots + a_n x^n$ avec $0 \leqslant l \leqslant n$ et $a_l \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\lim_0 \frac{f}{P_n f} &= \lim_0 \left(1 + \frac{\mathrm{I}^n\epsilon}{P_n f}\right) = \\ &= \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x^{n-l}\epsilon(x)}{a_l + a_{l+1}x + \cdots + a_n x^{n-l}}\right) \\ &= 1 + \frac{\delta_n^l \cdot 0}{a_l} = 1.\end{aligned}$$

■

Démonstration du théorème : Distinguons deux cas :

— Si $P_n f \neq 0$, on peut écrire

$$\frac{f}{g} = \frac{P_n f}{P_n g} \cdot \frac{f/P_n f}{g/P_n g} \quad \text{et} \quad \frac{P_n f}{P_n g} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g/P_n g}{f/P_n f}.$$

La thèse résulte alors du théorème sur la limite d'un produit et du lemme appliqué à $f$ et à $g$.

— Si $P_n f = 0$, $\lim_0 P_n f / P_n g = 0$ ; la thèse est donc que $\lim_0 f/g$ existe et est nulle. Or, dans ce cas, $f = \mathrm{I}^n \epsilon$ pour une certaine fonction $\epsilon$ telle que $\lim_0 \epsilon = 0$. Alors, si $P_n g(x)$ s'écrit $b_m x^m + b_{m+1} x^{m+1} + \cdots + b_n x^n$ avec $0 \leqslant m \leqslant n$ et $b_m \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_0 \frac{f}{g} &= \lim_0 \frac{\mathrm{I}^n \epsilon}{P_n g} \cdot \frac{1}{g/P_n g} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x^{n-m} \epsilon(x)}{b_m + b_{m+1} x + \cdots + b_n x^{n-m}} \cdot \frac{1}{\lim_0 (g/P_n g)} \\
&= \frac{\delta_n^m \cdot 0}{b_m} \cdot 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

**Exemple 1.** Soit à calculer $\lim_0 f/g$ où $f(x) = x^2$ et $g(x) = 1 \cos x$. Puisque les fonctions sont indéfiniment dérivables en 0, leur développement limité en 0 est leur polynome de Maclaurin (voir le paragrajphe 3). Comme $g(0) = g'(0) = 0$ et $g''(0) = 1$, nous avons $P_0 g(x) = P_1 g(x) = 0$ et $P_2 g(x) = \frac{1}{2} x^2$, et nous pouvons appliquer le théorème 4 avec des développements limités d'ordre 2. Il est clair que $P_2 f(x) = x^2$. Dès lors,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2/2} = 2.$$

**Exemple 2.** En procédant exactement de la même manière, nous voyons que $\lim_{x \to 0} x/(1 - \cos x)$ n'existe pas, puisque $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2/2}$ n'existe pas.

Il est bon, ici, de faire observer que le théorème 4 donne un moyen de prouver qu'une limite n'existe pas, au contraire des différentes versions du théorème de L'Hospital, qui ne fournissent jamais que des conditions suffisantes d'existence d'une limite.

## 5. Raccourcis de calcul et exemples

La liste des principaux raccourcis se trouve dans la table ci-aprËs, où leur sont assignés des sigles : [Som], [Der], etc.. Pour ne pas alourdir celle-ci, nous

y avons omis, dans chacun des raccourcis les plus simples, les hypothèses « naturelles », c'est-à-dire celles qui sont nécessaires pour que le membre de droite ait un sens. À titre d'exemple, dans le cas de [Som], un énoncé complet serait : *Si $f$ et $g$ possèdent un développement limité d'ordre $n$ en 0, alors $f \pm g$ possède un développement limité d'ordre $n$ en 0 et*

$$P_n(f \pm g) = P_n f \pm P_n g.$$

Dans le cas où les hypothèses sont moins « directes », nous les avons précisées. D'autre part, à chaque fois qu'apparait un développement $P_j$, sont sous-entendues les hypothèses assurant que $j$ est un naturel. En ce qui concerne les notations, rappelons que I désigne la fonction identité et ent$x$), la partie entière du réel $x$.

**Principaux raccourcis de calcul des développements limités**

| | |
|---|---|
| [Pol] | Si $Q(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$, alors $P_n Q(x) = \sum_{k=0}^{\min(d,n)} a_k x^k$ |
| [Som] | $P_n(f \pm g) = P_n f \pm P_n g$ |
| [Pro1] | $P_n(fg) = P_n(P_n f \cdot P_n g)$ |
| [Pui1] | Si $m \in \mathbb{N}$, alors $P_n(f^m) = P_n((P_n f)^m)$ |
| [Pro2] | Si $f$ (resp. $g$) possède un développement limité d'ordre $n$ en 0 où le coefficient de $x^j$ est nul pour $j \in \{0, \dots, k-1\}$ (resp. $j \in \{0, \dots, l-1\}$), alors $P_n(fg) = P_n(P_{n-l} f \cdot P_{n-k} g)$ |
| [Pui2] | Si $m \geqslant 1$, si $km \leqslant n$ et si $f$ possède un développement limité d'ordre $n$ en 0 où le coefficient de $x^j$ est nul pour $j \in \{0, \dots, k-1\}$, alors $P_n(f^m) = P_n((P_{n-k(m-1)} f)^m)$ |
| [Comp] | Si $g(0) = 0$, $P_n(f \circ g) = P_n(P_n f \circ P_n g)$ |
| [Quo] | Si $g(0) \neq 0$, $P_n\,(f/g) = P_n\,(P_n f / P_n g)$ |
| [MFct] | Si $c \in \mathbb{R}$, alors $P_n(cf) = c \cdot P_n f$ |
| [MVar] | Si $c \in \mathbb{R}$, alors $P_n(f \circ c\mathrm{I}) = (P_n f) \circ c\mathrm{I}$ |
| [Cx^m] | Si $n \geqslant m > 0$, alors $P_n(f \circ \mathrm{I}^m) = (P_{\mathrm{ent}} f) \circ \mathrm{I}^m$ |
| [Px^m] | $P_n(\mathrm{I}^m f) = \mathrm{I}^m P_{n-m} f$ |

• Les démonstrations des raccourcis [Pol] et [Som] sont immédiates ; contentons-nous de les illustrer par un exemple.

**Exemple 3.** Soit à calculer $\lim_0 f/g$ où $f(x) = e^x - \cos x$ et $g(x) = 3x^2 + 2x$. D'après [Pol], $P_0 g(x) = 0$ et $P_1 g(x) = 2x$ ; pour utiliser le théorème 4, il suffit donc de considérer des développements limités d'ordre 1. Grâce au raccourci [Som] et à la connaissance des polynomes de Maclaurin des fonctions exp et cos, $P_1 f(x) = P_1 \exp(x) - P_1 \cos(x) = 1 + x - 1 = x$. Dès lors,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

- Détaillons les cas du produit et de la composée :

**Proposition 5.1** *Si $f$ et $g$ possèdent un développement limité d'ordre $n$ en 0, alors $fg$ possède un développement limité d'ordre $n$ en 0 et*

$$P_n(fg) = P_n(P_n f \cdot P_n g). \qquad [Pro1]$$

## Preuve

Il faut démontrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{(fg)(x) - P_n(P_n f \cdot P_n g)(x)}{x^n} = 0.$$

Comme, par définition,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(P_n f \cdot P_n g)(x) - P_n(P_n f \cdot P_n g)(x)}{x^n} = 0,$$

il suffit de montrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{(fg)(x) - (P_n f \cdot P_n g)(x)}{x^n} = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0} \frac{(fg)(x) - (P_n f \cdot P_n g)(x)}{x^n} = \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(fg)(x) - ((P_n f) \cdot g)(x) + ((P_n f) \cdot g)(x) - (P_n f \cdot P_n g)(x)}{x^n} \\
&= \lim_{x \to 0} \left( \frac{f(x) - P_n f(x)}{x^n} \cdot g(x) + P_n f(x) \cdot \frac{g(x) - P_n g(x)}{x^n} \right) \\
&= 0 \cdot g(0) + P_n f(0) \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

**Lemme 5.1** *Si $P$ est un polynome, alors*

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(f(x)) - P(P_n f(x))}{x^n} = 0.$$

**Proposition 5.2** *Si $g(0) = 0$ et si $f$ et $g$ possèdent un développement limité d'ordre $n$ en $0$, alors $f \circ g$ possède un développement limité d'ordre $n$ en $0$ et*

$$P_n(f \circ g) = P_n(P_n f \circ P_n g). \qquad [Comp]$$

## Preuve

Si $n = 0$, il est clair que les deux membres de l'égalité sont égaux à $f(0)$.

Supposons à présent que $n > 0$. Il suffit de montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(g(x)) - (P_n f)(P_n g(x))}{x^n} = 0.$$

Or cette limite est égale à

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(g(x)) - (P_n f)(g(x)) + (P_n f)(g(x)) - (P_n f)(P_n g(x))}{x^n} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left[ \left( \frac{g(x)}{x} \right)^n \cdot \epsilon(g(x)) + \frac{(P_n f)(g(x)) - (P_n f)(P_n g(x))}{x^n} \right].$$

où la fonction $\epsilon$ est telle que $f = P_n f + \mathrm{I}^n \epsilon$ (voir la remarque du paragraphe 2). Dans la limite, le premier terme tend vers 0 puisque $g$ est dérivable en 0 (proposition 3) et $\epsilon$ est continue en $g(0) = 0$ ; quant à la limite du second terme, elle est nulle aussi (lemme 5). La thèse en découle.

■

Remarque : Plus généralement, sans l'hypothèse que $g(0) = 0$, on a : $P_n(f \circ g) = P_n(P_{n,g(0)} f \circ P_n g)$. Cependant, à défaut de connaitre $P_{n,g(0)} f$, ce raccourci est inexploitable.

**Exemple 4.** Soit à calculer $\lim_0 f/g$ où $f(x) = \cos(\sin x) - \cos(e^x - 1)$ et $g(x) = x^3$.

D'après le raccourci [Pol], $P_n g = 0$ si $n < 3$ et $P_3 g(x) = x^3$ ; nous travaillerons donc avec des développements limités d'ordre 3. Grâce au raccourci [Som],

$$P_3 f = P_3(\cos \circ \sin) - P_3(\cos \circ (\exp - 1)),$$

et, en utilisant le raccourci [Comp], nous obtenons (avec quelques petits abus d'écriture) :

$$P_3(\cos\circ\sin)(x) = P_3(P_3\cos\circ P_3\sin)(x) = P_3\left(1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3!}x^3\right)^2\right) = 1-\frac{1}{2}x^2$$

et

$$\begin{aligned} P_3(\cos\circ(\exp-1))(x) &= P_3(P_3\cos\circ P_3(\exp-1))(x) \\ &= P_3\left(1-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3\right)^2\right) \\ &= 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3 \end{aligned}$$

Dès lors, $P_3 f(x) = x^3/2$ et

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos(e^x-1)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3/2}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

• Occupons-nous maintenant du raccourci [Quo]. Nous allons voir dans la proposition suivante que pour calculer le développement limité d'ordre $n$ de $f/g$, il suffit de diviser $P_n f$ par $P_n g$ suivant les puissances croissantes, à l'ordre $n$. Rappelons d'abord ce que signifie « diviser suivant les puissances croissantes ». (Voir aussi [3].)

**Définition :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N$, $D \in \mathbb{R}[x]$ ; si $D(0) \neq 0$, il existe un et un seul polynome $Q$ de degré inférieur à $n$ et un unique polynome $R$, tels que

$$N(x) = D(x)Q(x) + x^{n+1}R(x).$$

Les polynomes $Q$ et $R$ s'appellent respectivement *quotient* et *reste* à l'ordre $n$ de la division de $N$ par $D$ suivant les puissances croissantes.

**Lemme 5.2** *Soit $N$ et $D$ deux polynomes, le terme indépendant de $D$ étant non nul. Le développement limité d'ordre $n$ de $N/D$ en $0$ est le quotient à l'ordre $n$ de la division de $N$ par $D$ suivant les puissances croissantes.*

## Preuve

Soit $Q$ le quotient à l'ordre $n$ de la division de $N$ par $D$ suivant les puissances croissantes. On doit montrer que

$$\lim_{x\to 0}\frac{N(x)/D(x)-Q(x)}{x^n} = 0.$$

Comme $D(0) \neq 0$, il suffit de montrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{N(x) - D(x)Q(x)}{x^n} = 0,$$

et ceci découle directement du fait que, par définition de $Q$, il existe un polynome $R$ tel que $N(x) - D(x)Q(x) = x^{n+1}R(x)$.

■

**Proposition 5.3** *Si $f$ et $g$ possèdent un développement limité d'ordre $n$ en 0 et si $g(0) \neq 0$, alors $f/g$ possède un développement limité d'ordre $n$ en 0 et*

$$P_n\left(\frac{f}{g}\right) = P_n\left(\frac{P_n f}{P_n g}\right). \qquad [Quo]$$

## Preuve

Soit $Q$ le quotient à l'ordre $n$ de la division de $P_n f$ par $P_n g$ suivant les puissances croissantes. D'après le lemme 5, $Q$ est le développement limité d'ordre $n$ de $P_n f / P_n g$ en 0, et par un argument semblable à celui utilisé dans la démonstration de ce même lemme, il suffit de montrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)Q(x)}{x^n} = 0.$$

Par définition de $Q$, il existe un polynome $R$ tel que

$$P_n f(x) = P_n g(x)Q(x) + x^{n+1}R(x).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)Q(x)}{x^n} = \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_n f(x) + P_n g(x)Q(x) + x^{n+1}R(x) - g(x)Q(x)}{x^n} \\
&= \lim_{x \to 0} \left( \frac{f(x) - P_n f(x)}{x^n} - \frac{g(x) - P_n g(x)}{x^n} Q(x) + xR(x) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque les trois termes tendent vers 0.

■

**Exemple 5** Calculons le développement limité d'ordre 7 de tg en 0. D'après [Quo], il suffit de calculer le quotient à l'ordre 7 de

$$P_7 \sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$$

par

$$P_7 \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6,$$

selon les puissances croissantes : voir la table 1.

TABLE 1 – Division selon les puissances croissantes de $P_7 \sin$ par $P_7 \cos$

$$\begin{array}{l|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \\
\cline{2-2}
-\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^7}{720}\right) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} \\
\cline{1-1}
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{840} & \\
-\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{72} + \cdots\right) & \\
\cline{1-1}
\frac{2x^5}{15} - \frac{4x^7}{315} + \cdots & \\
-\left(\frac{2x^5}{15} - \frac{x^7}{15} + \cdots\right) & \\
\cline{1-1}
\frac{17x^7}{315} + \cdots & \\
-\left(\frac{17x^7}{315} - \cdots\right) & \\
\cline{1-1}
\cdots &
\end{array}$$

Ainsi,

$$P_7 \operatorname{tg}(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7.$$

Remarquons que dans l'utilisation de l'algorithme de division, il est permis d'ignorer les termes dont le degré dépasse (strictement) 7.

**Exemple 6.** Soit à calculer $\lim_0 f/g$ où $f(x) = \operatorname{tg} x + x^2 - \sin x$ et $g(x) = \sin x - \ln(1+x)$.

Nous utiliserons les raccourcis [Pol] et (plusieurs fois) [Som]. D'abord, d'une part, $P_1 \sin(x) = P_2 \sin(x) = x$ ; d'autre part, $P_1(\ln \circ (1 + \mathrm{I}))(x) = x$ et $P_2(\ln \circ (1 + \mathrm{I}))(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ . Donc, $P_1 g = 0$ et $P_2 g(x) = \frac{1}{2}x^2$ : il est nécessaire d'utiliser des développements limités d'ordre 2. Ensuite (cf. ex. 5),

$$P_2 f(x) = P_2 \operatorname{tg}(x) + x^2 - P_2 \sin(x) = x + x^2 - x = x^2.$$

Dès lors,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x + x^2 - \sin x}{\sin x - \ln(1 + x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2/2} = 2.$$

• La démonstration de [Pro2] est calquée sur celle de [Pro1]. Les raccourcis [Pui1] et [Pui2] peuvent se démontrer par récurrence. Les autres raccourcis découlent aisément de la définition de développement limité. Plutôt que de les démontrer en détail, nous allons les illustrer dans des exemples de calculs de développements limités et d'utilisations de ceux-ci dans le calcul de certaines limites.

**Exemple 7.** Soit à calculer

$$\lim_{x \to 1} \left( \frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

Cette limite est égale à

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \ln x + \ln x - (x - 1)}{(x - 1) \ln x}.$$

Un changement de variable la transforme en

$$\lim_{[y \to 0} \frac{y \ln(1 + y) + \ln(1 + y) - y}{y \ln(1 + y)}.$$

Notons $g(y) = y \ln(1+y)$ ; selon le raccourci [Pxˆm], $P_1 g = 0$ et $P_2 g(y) = y^2$ ; nous travaillerons donc avec des développements limités d'ordre 2. Introduisons $f(y) = y \ln(1 + y) + \ln(1 + y) - y$. Grâce aux raccourcis [Pol] et [Som],

$$P_2 f(y) = P_2 g(y) + P_2(\ln \circ (1 + \mathrm{I}))(y) - y.$$

La limite proposée est donc égale à

$$\lim_{x \to [} y]0 \frac{y^2 + \left(y - \frac{1}{2}y^2\right) - y}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

**Exemple 8.**

Soit à calculer $\lim_0 f/g$ où $f(x) = \sin x^4 - \sin^2 x^2$ et $g(x) = \sin^4 x - x^3 \sin x$. Les raccourcis [Som], [Pui2] et [Px^m] montrent que $P_n g = 0$ si $n \leqslant 5$, tandis que

$$\begin{aligned} P_6 g(x) = P_6\left((P_3 \sin)^4\right)(x) - x^3 P_3 \sin(x) = \\ = \left(x^4 - \frac{2}{3}x^6\right) - \left(x^4 - \frac{1}{6}x^6\right) = \\ -\frac{1}{2}x^6. \end{aligned}$$

Nous utiliserons donc des développements limités d'ordre 6. Grâce aux raccourcis [Som], [Cx^m] et [Pui2], en abusant un peu des notations, il vient

$$\begin{aligned} P_6 f(x) &= P_6(\sin x^4) - P_6(\sin^2 x^2) \\ &= P_{\text{ent}} \sin(x^4) - P_6\left((P_5 \sin x^2)^2\right) \\ &= P_1 \sin(x^4) - P_6\left((P_{\text{ent}} \sin(x^2))^2\right) \\ &= x^4 - x^4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

La limite proposée est donc égale à 0.

c Soit à calculer

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\cos\frac{1}{x} \cos\frac{1}{x^2} - e^{-1/x^2}\right).$$

En posant $y = 1/x$ et en utilisant les raccourcis [Pol], [Pro1], [Som], [Cx^m] et [MVar], la limite devient successivement (avec quelques petits abus d'écriture) :

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{y \to 0 \\ >}} \frac{\cos y^2 \cos y - e^{-y^2}}{y^2} \\ &= \lim_{\substack{y \to 0 \\ >}} \frac{P_2\left(P_2(\cos y^2) \cdot (P_2 \cos y)\right) - P_2\left(e^{-y^2}\right)}{y^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{y \underset{>}{\to} 0} \frac{P_2\left(P_1\cos(y^2)\cdot P_2\cos(y)\right) - P_1\exp(-y^2)}{y^2} \\
&= \lim_{y \underset{>}{\to} 0} \frac{P_2\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{2}y^2\right)\right) - P_1\exp(-y^2)}{y^2} \\
&= \lim_{y \underset{>}{\to} 0} \frac{1-\frac{1}{2}y^2-(1-y^2)}{y^2} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

l'ordre des développements à utiliser ayant été préalablement déterminé par l'examen du dénominateur.

**Exemple 10.** Soit à calculer $\lim_0 f/g$ où $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ et $g(x) = x\sin x$. Il est suffisant de travailler à l'ordre 3 : $P_3 g(x) = x - (x - \frac{1}{6}x^3)$ grâce au raccourci [Som]. Pour le numérateur, on utilise [Pui2] : $P_3(\operatorname{tg}^2)(x) = P_3((P_2\operatorname{tg})^2)(x) = x^2$. Dès lors,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3/6} = \lim_{x\to 0}\frac{6}{x}\ ;$$

comme cette dernière limite n'existe pas, la limite proposée n'existe pas non plus. (Mais les limites à gauche et à droite valent respectivement $-\infty$ et $+\infty$.)

# 6. Trois raccourcis supplémentaires

Les résultats suivants sont tout aussi intéressants que les autres raccourcis sur le plan théorique mais peut-être moins utiles sur le plan pratique.

**Proposition 6.1** *Si $f$ est dérivable sur un voisinage de $0$, si $f$ possède un développement limité d'ordre $(n+1)$ en $0$ et si $f'$ possède un développement limité d'ordre $n$ en $0$, alors*

$$P_n(f') = (P_{n+1}f)'. \qquad [Der]$$

## Preuve

Il suffit de montrer que

$$\int_0^x P_n(f') + f(0) = P_{n+1}f(x).$$

Ceci se fait aisément puisque, par le théorème de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \left(\int_0^x P_n(f') + f(0)\right)}{x^{n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - P_n(f')(x)}{(n+1)x^n}$$

qui est nulle selon la définition de $P_n(f')$.

■

Remarque : Ainsi, l'existence de $P_n(f')$ entraine celle de $P_{n+1}f$ ; la réciproque, en revanche, n'est pas vraie, comme le montre l'exemple du paragraphe 3.

**Proposition 6.2** *Si $f$ est continue sur un voisinage de 0 et possède un développement limité d'ordre $(n-1)$ en 0, alors la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f$ possède un développement limité d'ordre $n$ en 0 et*

$$P_nF(x) = \int_0^x P_{n-1}f. \qquad [Int]$$

Ceci est une conséquence du raccourci [Der] et de la remarque précédente puisque la continuité de $f$ sur un voisinage de 0 entraine la dérivabilité de $F$ sur ce voisinage.

**Exemple 11.** Soit à calculer

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right).$$

Si nous posons $y = 1/x$, cette limite devient

$$\lim_{y\overset{>}{\to}0} \frac{\operatorname{arctg} y - y}{y^2}.$$

Nous devons donc travailler avec des développements d'ordre 2. En utilisant [Int] et [Cxˆm], nous obtenons

$$P_2 \operatorname{arctg}(y) = \int_0^y P_1\left(\frac{1}{1+\mathrm{I}^2}\right) = \int_0^y \left(P_0\left(\frac{1}{1+\mathrm{I}}\right) \circ \mathrm{I}^2\right) = y.$$

Dès lors, grâce au raccourci [Som], nous voyons que la limite proposée est égale à

$$\lim_{y\overset{>}{\to}0} \frac{y-y}{y^2} = \lim_{y\overset{>}{\to}0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

**Proposition 6.3** *Si $m \in \mathbb{N}*$, si $f$ est $m$ fois dérivable en $0$, si $f$ possède un développement limité d'ordre $(n+m)$ en $0$, si $f^{(j)}(0) = 0$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ et si*

$$g : domf \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} f(x)/x^m & si\ x \neq 0, \\ f^{(m)}(0)/m! & si\ x = 0, \end{cases}$$

*alors $g$ possède un développement limité d'ordre $n$ en $0$ et*

$$P_n g = \frac{P_{n+m} f}{I^m}. \qquad [Qx\hat{}n]$$

## Preuve

Ceci découle de la définition des développements limités :

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - (P_{n+m} f)/x^m}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x^m g(x) - P_{n+m} f(x)}{x^{n+m}} = 0$$

car $x^m g(x) = f(x)$ pour tout $x$.

■

# Bibliographie


[1] Jacques Douchet, Bruno Zwahlen, *Calcul différentiel et intégral, 1 — Fonctions d'une variable réelle*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1983

[2] Jean Mawhin, *Analyse — Fondements, techniques, évolution*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1992

[3] J. Quinet, *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Tome 1, Algèbre*, 5e éd., Dunod, Paris, 1973



*Adresse des auteurs :*

Pascal Dupont, Nicole Vast
Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux,
Unité de Mathématique,
Passage des Déportés 2
5030 Gembloux
Courrier électronique : dupont@fsagx.ac.be

# A propos des nombres de FIBONACCI

**J. G. Segers**,

Les nombres de Fibonacci $f_n$ se déduisent de la paire $\{0, 1\}$ par additions successives :

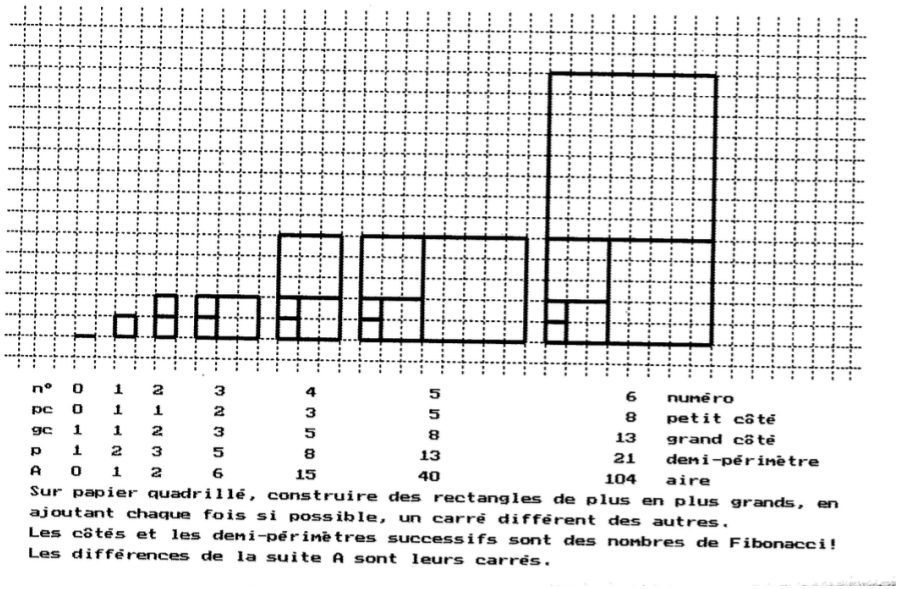
$$\begin{aligned} (1) \qquad & f_0 = 0,\ f_1 = 1, \\ (1') \qquad & f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ \text{ pour } \ n \geqslant 2; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f_2 = f_1 + f_0 &= 1 + 0 = 1, \\ f_3 = f_2 + f_1 &= 1 + 1 = 2, \\ f_4 = f_3 + f_2 &= 2 + 1 = 3; \end{aligned}$$

etc.

Ainsi, le début de la suite s'établit comme suit :
(1") $F$ $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$
dont les différences premières sont
(2) $G$ $1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$
c'est-à-dire que l'on obtient la suite de départ avec un terme supplémentaire précédant les autres, mais qui obéit à la définition générale si on l'appelle $f_{-1}$.




Considérons maintenant la suite $P$ des produits de deux termes consécutifs ainsi que les différences jusqu'au degré 5 par exemple. On obtient

(3) $P$ 0 1 2 6 15 40 104 273 714 1870 4895 12816
(4) $A$ 1 1 4 9 25 64 169 441 1156 3025 7921 ...
(5) $B$ 0 3 5 16 39 105 272 715 1869 4896 ...
(6) $C$ 3 2 11 23 66 167 443 1154 3027 ...
(7) $D$ −1 9 12 43 101 276 711 1873 ...
(8) $E$ 10 3 31 58 175 435 1162 ...

En examinant ces suites de près, on constate d'abord que les termes de $A$ sont des carrés, et ensuite un fait bizarre : la différence entre les termes homologues de deux suites séparées par une autre est une puissance de 2 ; entre $P$ et $B$ la différence est 1, entre $A$ et $C$ elle est 2, entre $B$ et $D$ elle est 4, entre $C$ et $E$ elle est 8. Exemples :

$$714 - 715 = -1,\ 1156 - 1154 = 2,\ 715 - 711 = 4,\ 1154 - 1162 = -8.$$

Ces différences sont alternativement positives et négatives.

Qui est en mesure d'expliquer ces phénomènes ?

En partant des termes $f_n$ de $F$, les termes de $P$ sont par définition de la forme

$$p_n = f_{n+1}f_n,$$

et ceux de $A$

$$\begin{aligned} a_n &= p_{n+1} - p_n = f_{n+1}f_{n+2} - f_nf_{n+1} \\ &= f_{n+1}(f_{n+2} - f_n) = f_{n+1}(f_{n+1} + f_n - f_n) = f_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, se trouve établi que les termes de $A$ sont les carrés des termes de $F$ à partir de $n = 1$.

Les termes de $B$ (leur numérotation commence par 1) sont de la forme

$$b_n = a_n - a_{n-1},$$

ce qui donne

$$b_n = f_{n+1}^2 - f_n^2.$$

Calculons :

$$\begin{aligned} p_n - b_n &= f_{n+1}f_n - f_{n+1}^2 + f_n^2 = f_n^2 - f_{n+1}(f_{n+1} - f_n) \\ &= f_n^2 - (f_n + f_{n-1})f_{n-1} \\ &= -(f_nf_{n-1} - f_n^2 + f_{n-1}^2) = -(p_{n-1} - b_{n-1}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les différences des termes homologues de $P$ et de $B$ sont égales en valeur absolue, mais alternent en signe. Comme $p_1 - b_1 = 1$, les différences d'indice impair valent 1, et celles d'indice pair valent $-1$.

On a de même

$$c_n = b_{n+1} - b_n = f_{n+2}^2 - 2f_{n+1}^2 + f_{n'}^2,$$

dont on tire

$$\begin{aligned} a_n - c_n &= f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 + 2f_{n+1}^2 - f_n^2 = \underline{-f_{n+2}^2 + 3f_{n+1}^2 - f_n^2} \\ &= -(f_{n+1} + f_n)^2 + 3f_{n+1}^2 - f_n^2 \\ &= -(2f_n + f_{n-1})^2 + f_{n+1}^2 + 2(f_n + f_{n-1})^2 - f_n^2 \\ &= f_{n+1}^2 - 3f_n^2 + f_{n-1}^2 = -(a_{n-1} - c_{n-1}), \end{aligned}$$

résultat que l'on obtient en comparant la dernière expression en $f_n$ avec celle soulignée plus haut. Nous pouvons conclure comme ci-avant : les différences

des termes homologues de $A$ et de $C$ sont égales en valeur absolue, mais alternent en signe. Comme $a_1 - c_1 = -2$, les différences d'indice impair valent $-2$, et celles d'indice pair valent 2.

Mais on peut raisonner plus simplement et plus rapidement

$$\begin{aligned} a_n - c_n &= p_{n+1} - p_n - b_{n+1} + b_n = p_{n+1} - b_{n+1} - (p_n - b_n) \\ &= -(p_n - b_n) + p_{n-1} - b_{n-1} = -(p_n - p_{n-1}) + (b_n - b_{n-1}) \\ &= -(a_{n-1} - c_{n-1}), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer les propriétés analogues des valeurs des termes de $B - D$ et de $C - E$.

On peut remplacer la formule de récurrence de $F$ par une formule directe permettant de calculer immédiatement les termes de la suite (1"), et puis ceux des autres.

Pour commencer, considérons la suite (1"). Nous constatons qu'après une croissance faible des premiers termes, cette croissance augmente pour les termes suivants ; ce qui suggère qu'il s'agit peut-être d'une suite exponentielle. Ecrivons pour commmencer avec un nombre inconnu $x$

$$(9) \qquad f_n = x^n, \text{ d'où } x^n = x^{n-1} + x^{n-2}.$$

On en déduit, en divisant par $x^{n-2}$, que $x^2 = x+1$, d'où les deux valeurs

$$(10) \qquad \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

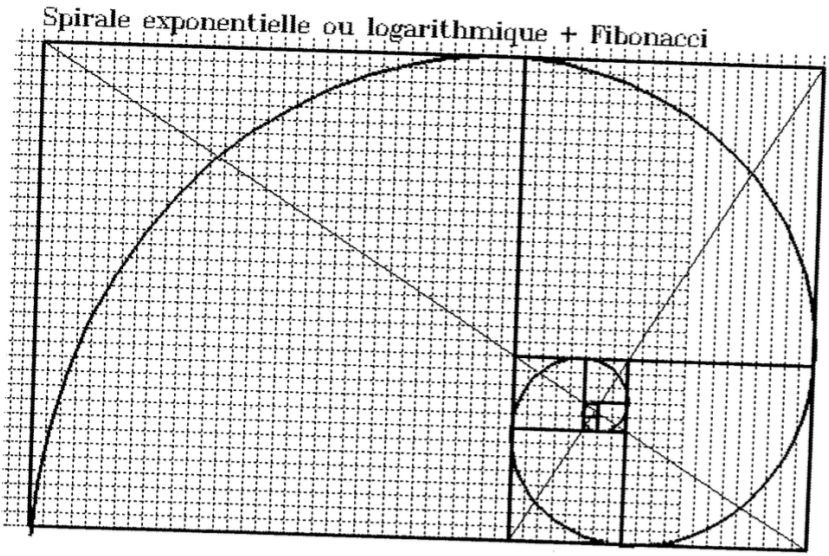
Ces deux valeurs satisfont à (1'), mais ni l'une ni l'autre ne satisfait à (1). La relation (1') étant homogène, n'importe quelle combinaison linéaire $ax + by$ la satisfait également. On peut alors choisir les coefficients $a$ et $b$ de manière à satisfaire à (1). La première égalité donne $b = -a$, et la seconde

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

On a donc finalement

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Il est évident que l'emploi de cette formule pour démontrer les propriétés ci-avant est infiniment plus lourd et plus compliqué.




Adresse de l'auteur :

**Jack. G. SEGERS**
rue Hocheporte 107/63
4000 LIEGE

# Olympiades

**C. Festraets**,

Voici les résultats de l'équipe belge à l'Olympiade Mathématique Internationale qui, cette année, s'est déroulée à Mar del Plata en Argentine.

| | | |
|---|---|---|
| BAES Michel (F) | 10/42 | |
| DE DECKER Ivo (N) | 20 | (bronze) |
| DEVOS Harald (N) | 7 | |
| SYMENS Stijn (N) | 14 | |
| VANDENBUSSCHE Eric (F) | 21 | (bronze) |
| WAXWEILER Laurent (F) | 16 | (bronze) |

Le seuil pour la médaille de bronze est 15, celui pour la médaille d'argent est 25 et celui pour la médaille d'or est 35.

Le classement par pays (non officiel) classe la Belgique à la 41ème place pour 82 pays participants. La Chine (223/252, six médailles d'or) prend la 1ère place devant la Hongrie (219) et l'Iran (217).

Voici les six problèmes proposés. Chacun est noté sur 7 et les élèves disposent de 4 heures et demie pour résoudre les trois premiers et du même temps pour résoudre les trois derniers le second jour.

1. Dans le plan, les points à coordonnées entières sont les sommets de carrés unités. Les carrés sont coloriés alternativement en blanc et en noir (comme sur un échiquier).

   Pour tout couple d'entiers strictement positifs $m$ et $n$, on considère un triangle rectangle dont les sommets sont des points à coordonnées entières et dont les côtés de l'angle droit, de longueurs $m$ et $n$, suivent les côtés des carrés.

   Soit $S_1$ l'aire totale de la partie noire du triangle et $S_2$ l'aire totale de sa partie blanche. On pose :

   $$f(m,n) = [S_1 - S_2].$$

   (a) Calculer $f(m,n)$ pour tous les entiers strictement positifs $m$ et $n$ qui sont tous deux pairs ou tous deux impairs.

   (b) Montrer que pour tout $m$ et $n$ : $f(m,n) \leqslant \frac{1}{2}\max(m,n)$.

   (c) Montrer qu'il n'existe pas de constante $C$ telle que, pour tous $m$ et $n$, $f(m,n) < C$.

2. L'angle $\hat{A}$ est le plus petit dans le triangle $ABC$.
   Les points $B$ et $C$ divisent le cercle circonscrit au triangle en deux arcs. Soit $U$ un point intérieur à l'arc limité par $B$ et $C$ qui ne contient pas $A$.
   Les médiatrices des segments $AB$ et $AC$ rencontrent la droite $AU$ respectivement en $V$ et $W$. Les droites $BV$ et $CW$ se coupent au point $T$.
   Montrer que
   $$AU = TB + TC.$$

3. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels vérifiant les conditions suivantes :
   $$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$
   et
   $$|x_i| \leqslant \frac{n+1}{2} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$
   Montrer qu'il existe une permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que
   $$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

4. Une matrice carrée à $n$ lignes et $n$ colonnes, à éléments dans l'ensemble $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, est appelée une matrice *d'argent* si, pour tout $i = 1, \ldots, n$, la réunion de la $i$-ème ligne et de la $i$-ème colonne contient tous les éléments de $S$. Montrer que
   (a) il n'existe pas de matrice d'argent pour $n = 1997$ ;
   (b) il existe des matrices d'argent pour une infinité de valeurs de $n$.

5. Trouver tous les couples $(a, b)$ d'entiers $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ vérifiant l'équation
   $$a^{(b^2)} = b^a.$$

6. Pour tout entier strictement positif $n$, $f(n)$ désigne le nombre de façons de représenter $n$ comme une somme de puissances de 2 à exposants entiers positifs ou nuls.
   Deux représentations qui ne diffèrent que par l'ordre des termes de la somme sont considérées comme les mêmes. Par exemple, $f(4) = 4$ car le nombre 4 peut être représenté par les quatre façons suivantes : $4$ ; $2+2$ ; $2+1+1$ ; $1+1+1+1$.
   Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$,
   $$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Je serai heureuse de recevoir et de publier vos solutions à ces problèmes.

* * * *

Voici maintenant des solutions aux problèmes MIDI de l'Olympiade Mathématique Belge. Ces solutions sont choisies parmi les meilleures proposées par les élèves finalistes.

1. *Claude a oublié d'écrire le signe de multiplication entre un nombre de deux chiffres et un nombre de trois chiffres, et a lu le tout comme un seul nombre de cinq chiffres ; ce nombre est alors le sextuple du produit attendu des deux nombres. Quels sont ceux-ci ?*

Solution de Pierre GRAMME, 3ème, Centre Scolaire Saint-François-Xavier, Verviers.

Soit $x$ le premier nombre (de 2 chiffres) et $y$ le second (de 3 chiffres). On a

$$\begin{aligned} 1000x + y &= 6xy \\ y &= 6xy - 1000x \\ y &= x(6y - 1000) \\ x &= \frac{y}{6y - 1000} \end{aligned}$$

ce qui donne comme solutions entières

$$\begin{aligned} y &= 0 \quad , \ x = 0 \\ y &= 160 \ , \ x = -4 \\ y &= 168 \ , \ x = 21 \\ y &= 200 \ , \ x = 1 \end{aligned}$$

Donc, seuls $x = 21$ et $y = 168$ peuvent convenir car ils ont respectivement 2 et 3 chiffres.

2. *Soit $a, b$ et $c$ trois réels non nuls tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Résoudre le système*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ (x + a)^2 + (y + b)^2 = (z + c)^2 \end{cases}$$

*d'inconnues réelles $x, y$ et $z$ (c'est-à-dire : exprimer, en fonction de $a, b$ et $c$, l'ensemble $S$ des triplets $(x, y, z)$ de réels qui satisfont ce système).*

Solution de Fabian RADOUX, 4ème, Centre Scolaire Saint-François-Xavier, Verviers.

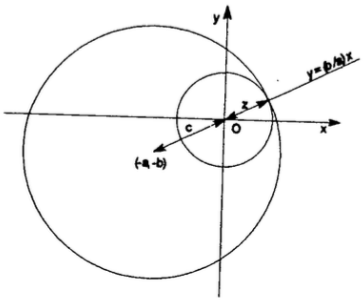
Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ (x+a)^2 + (y+b)^2 = (z+c)^2 \end{cases}$$

avec $a^2 + b^2 = c^2$.

L'équation $x^2 + y^2 = z^2$ représente un cercle de rayon $z$ centré à l'origine tandis que l'équation $(x+a)^2 + (y+b)^2 = (z+c)^2$ représente un cercle de rayon $z+c$ centré en $(-a,-b)$.

La solution du système est l'intersection de ces deux cercles qui sont tangents puisque $a^2 + b^2 = c^2$.




La solution est donc l'intersection de la droite $y = \frac{b}{a}\, x$ et du cercle $x^2 + y^2 = z^2$, soit

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}\, x \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\, x \\ x^2 + \frac{b^2}{a^2}\, x^2 = z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\, x \\ x^2 \left( \frac{a^2+b^2}{a^2} \right) = z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\, x \\ x = \frac{az}{c} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{bz}{c} \\ x = \frac{az}{c} \end{cases}$$

Les solutions de ce systèmes sont donc les triplets $(x, y, z)$ tels que $x = \frac{az}{c}$ et $y = \frac{bz}{c}$.

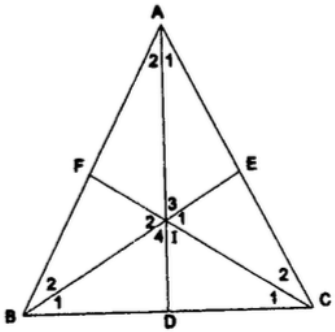
Remarque : cette solution n'est pas parfaite, puisqu'elle suppose implicitement $z > 0$ et $z + c > 0$ ; elle a cependant le mérite de l'originalité et il suffirait de quelques légères corrections pour la rendre tout à fait correcte.

3. *Dans un triangle $ABC$, soit $D$ (resp. $E$, $F$) le point d'intersection du côté $BC$ (resp. $CA$, $AB$) et de la bissectrice issue de $A$ (resp. $B$, $C$). Soit aussi $I$ le point commun aux trois bissectrices. Démontrer que si*

$$\frac{|AI|}{|ID|} = \frac{|BI|}{|IE|} = \frac{|CI|}{|IF|},$$

*alors le triangle $ABC$ est équilatéral.*

Solution de Jérome GOFFIN, 4ème, Athénée Royal, Arlon.




Considérons les triangles $ECI$ et $BFI$

$$\frac{|BI|}{|IE|} = \frac{|CI|}{|IF|} \text{ (par hypothèse)} \Leftrightarrow \frac{|BI|}{|CI|} = \frac{|IE|}{|IF|} \tag{1}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 \text{ (angles opposés par le sommet)} \tag{2}$$

de (1) et (2), les triangles $ECI$ et $FBI$ sont semblables. Donc $\hat{C}_2 = \hat{B}_2$, or $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ et $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ par hypothèse, d'où $\hat{B} = \hat{C}$.

Considérons les triangles $BDI$ et $AEI$

$$\frac{|BI|}{|IE|} = \frac{|AI|}{|ID|} \text{ (par hypothèse)} \Leftrightarrow \frac{|BI|}{|AI|} = \frac{|IE|}{|ID|} \tag{3}$$

$$\hat{I}_3 = \hat{I}_4 \text{ (opposés par le sommet)} \tag{4}$$

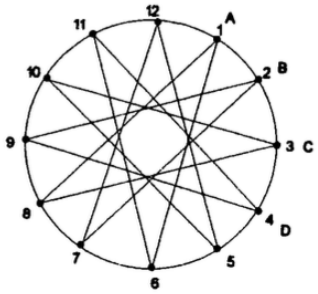
de (3) et (4) $BDI$ et $AEI$ sont semblables, donc $\hat{B}_2 = \hat{A}_1$, or $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ et $\hat{A}_2 = \hat{A}_1$ par hypothèse, d'où $\hat{A} = \hat{B}$ ; $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ et le triangle $ABC$ est équilatéral.

4. *Sur un cercle, douze points distincts sont numérotés, cycliquement, de* 1 *à* 12. *Quatre jetons portant les lettres* $A, B, C$ *et* $D$ *occupent respectivement les points portant les numéros* $1, 2, 3$ *et* 4.

*Ces jetons peuvent se déplacer selon la règle suivante : à partir de l'un des points numérotés, il est permis de se rendre au cinquième point dans un sens ou dans l'autre, en sautant quatre points, pour autant que le point atteint ne soit pas occupé par un autre jeton.*

*Après un certain nombre de déplacements, les quatre jetons occupent à nouveau les places* 1 *à* 4, *mais pas nécessairement dans l'ordre* $A, B, C, D$. *Quelles sont toutes les permutations que la règle indiquée permet d'obtenir ?*

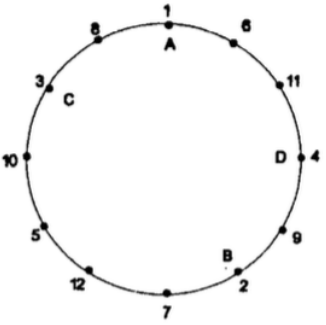
Solution de Tom SCHAUL, 3ème, Lycée du Nord, Wilz.




Imaginons que tous les trajets possibles soient attachés l'un à l'autre formant une grande ficelle circulaire (sans bouts) sur laquelle les jetons peuvent bouger dans deux directions (mais bien sûr pas se dépasser les uns les autres).

On remarque que cela équivaut à notre cercle initial.

La ficelle aura l'air à peu près comme cela :




Maintenant, c'est bien visible qu'il y a exactement 4 permutations possibles pour les positions 1,2,3,4

$$ABCD,\ CDBA,\ BADC,\ DCAB.$$

* * * * * * * * *

ERRATUM

Dans l'article intitulé "Optimisation dès les premières années du secondaire" par Cl. Villers, paru dans le numéro 112 (mai-juin 1997), il faut, dans l'énoncé 3-4, page 40, lire $g(x) = \sqrt{x}$ et non $g(x) = x$.

# Des problèmes et des jeux

**C. Festraets**,

La clé des chiffres problème n° 187 de M. et P. n° 111.

*Un nombre entier $a$ est tel que le chiffre des dizaines de son carré est* 7. *Quel peut être le chiffre des unités de $a^2$ ?*

Solution de J. JANSSEN de Lambermont.

Soient $x$ et $y$ les chiffres des dizaines et des unités du nombre $a$ et soit $k$ le chiffre des unités de $a^2$.

On a

$$a^2 \equiv 20xy + y^2 \equiv 70 + k \quad (mod\ 100). \tag{1}$$

De deux choses l'une : $y^2 < 10$ ou bien $y^2 > 10$.

a) Si $y^2 < 10$, alors $y^2 = k$ et (1) devient

$$\begin{array}{rcll} 20xy & \equiv & 70 & (mod\ 100) \\ 2xy & = & 7 & (mod\ 10); \end{array}$$

ce qui est impossible.

b) Si $y^2 > 10$, posons $m$ le chiffre des dizaines de $y^2$. Dès lors, $y^2 = 10m + k$ et (1) devient

$$\begin{array}{rcll} 20xy + 10m & \equiv & 70 & (mod\ 100) \\ 2xy + m & \equiv & 7 & (mod\ 10); \end{array}$$

ce qui entraîne que $m$ doit être impair.

Il n'y a que deux possibilités : $y^2 = 16$ ou $y^2 = 36$.

Le chiffre des unités de $a^2$ est donc 6 (par exemple, $a = 24$ et $a^2 = 576$, $a = 26$ et $a^2 = 676$).

Ont envoyé de bonnes solutions : J. FINOULST de Diepenbeek, M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre, B. LOISEAU de Mouscron, A. PATERNOTTRE de Boussu, M. PONCHAUX de Lille, J. RASSE de Mean, J. RONDOU de Heverlee.

Ils étaient quatre ... problème n° 188 de M. et P. n° 111.

*Déterminer les quadruples $(a, b, c, d)$ d'entiers positifs ou nuls tels que*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2. \tag{1}$$

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek.

Nous allons démontrer que $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ est la seule solution.

Si $abc = 0$, on a nécessairement $d = 0$.

Si $abc \neq 0$, on aura $d \neq 0$.

En effet, on peut écrire

$$3d^2 = a^2(b^2c^2 - 3) + b^2(a^2c^2 - 3) + c^2(a^2b^2 - 3); \tag{2}$$

en supposant $d = 0$, on devra avoir par exemple, $b^2c^2 - 3 < 0$, d'où $b = c = 1$ et (2) donne $0 = -2a^2 + a^2 - 3 + a^2 - 3 = -6$ !

Soit $(a, b, c, d)$ une solution de (1) et soit $g$ le pgcd de $a, b, c, d$.

On a

$$a = \alpha \times g, \quad b = \beta \times g, \quad c = \tau \times g, \quad d = \mu \times g$$

et $a, \beta, \tau, \mu$ sont premiers entre eux.

La relation (1), après simplification par $g^2$, devient

$$\alpha^2 + \beta^2 + \tau^2 + \mu^2 = g^4 \times \alpha^2\beta^2\tau^2.$$

Comme $a, \beta, \tau, \mu$ sont premiers entre eux, ils ne peuvent être pairs tous les quatre. Ceci laisse les possibilités :

1. Trois de ces nombres sont pairs :
   1er membre $\equiv 1$ $(mod\ 4)$, 2ème membre $\equiv 0$ $(mod\ 4)$.
2. Deux de ces nombres sont pairs, deux impairs :
   1er membre $\equiv 2$ $(mod\ 4)$, 2ème membre $\equiv 0$ $(mod\ 4)$.
3. Un de ces nombres est pair, trois impairs :
   1er membre $\equiv 3$ $(mod\ 4)$.
   Si $a, \beta$ ou $\tau$ est pair, 2ème membre $\equiv 0$ $(mod\ 4)$.
   Si $\mu$ est pair, 2ème membre $\equiv 0$ ou $1$ $(mod\ 4)$ selon que $g$ est pair ou impair.
4. Les quatre nombres sont impairs :
   Tenant compte de $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4k(k+1)+1 \equiv 1$ $(mod\ 8)$,
   - 1er membre $\equiv 4$ $(mod\ 8) \equiv 0$ $(mod\ 4)$
   - Si $g$ est impair, 2ème membre $\equiv 1$ $(mod\ 4)$

– Si $g$ est pair, 2ème membre $\equiv 0 \ (mod\ 16) \equiv 0 \ (mod\ 8)$.

On peut conclure que l'équation proposée n'a aucune autre solution que $(0, 0, 0, 0)$.

Bonnes solutions de M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre, de A. PATERNOTTRE de Boussu, de M. PONCHAUX de Lille et de J. RASSE de Mean

Bissection problème n° 189 de M. et P. n° 111.

*Dans un tétraèdre $ABCD$, soient $K$ et $L$ les milieux respectifs des arêtes $AB$ et $CD$. Démontrer que tout plan contenant $KL$ divise le tétraèdre en deux parties d'égal volume.*

Solution de B. LOISEAU de Mouscron.

Dans le cas particulier où le tétraèdre est régulier, il est découpé en deux parties isométriques, et a fortiori d'égal volume. En effet, dans ce cas, $KL$ est un axe de symétrie du tétraèdre (c'est une perpendiculaire commune à $AB$ et $CD$) et donc tout plan contenant $KL$ coupe le tétraèdre en deux parties symétriques l'une de l'autre par rapport à $KL$ (si un point du tétraèdre est d'un côté du plan, son symétrique est aussi dans le tétraèdre, de l'autre côté du plan).

Mais il en résulte que l'énoncé est vrai aussi dans le cas d'un tétraèdre quelconque, car tout tétraèdre peut être transformé par une transformation affine (bijective) de l'espace en un tétraèdre régulier, et ce type de transformation préserve et reflète les égalités de volume (et même les rapports de volume), ainsi que les constructions proposées dans l'énoncé. Donc, s'il faut préciser : partons de notre tétraèdre quelconque et coupons-le en deux selon l'énoncé ; appliquons une affinité qui transforme le tétraèdre en un tétraèdre régulier : les deux parties deviennent alors isométriques, donc ont égal volume ; mais si elles ont même volume après la transformation, c'est qu'elles l'avaient déjà avant.

Cette solution est évidemment la plus directe et la plus courte, mais J. FINOULST de Diepenbeek, M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre, M. PONCHAUX de Lille et J. RASSE de Mean ont aussi envoyé de bonnes solutions utilisant géométries vectorielle, synthétique ou analytique.

196. Pas facile

Soit $ABC$ un triangle dont les mesures des côtés sont $a, b, c$, les mesures en radian des angles sont $A, B, C$ et le demi-périmètre est $p$.

Démontrer que

1) $\sum \frac{b+c-a}{A} \geqslant \frac{6p}{\pi}$ ;

2) $\sum \frac{b+c-a}{aA} \geqslant \frac{9}{\pi}$.

197. Petit Fermat

Si $p$ est un nombre premier, alors $2^p + 3^p$ ne peut être mis sous la forme $n^k$ où $n$ est un naturel et $k$ est un naturel strictement supérieur à 1.

198. Polynôme ?

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

pour tout $x$ réel.

# Revue des revues

**C. Villers**,

## Bulletin de l'APMEP (France), *n*°409-Avril-Mai 1997

- Dans *son éditorial intitulé "On line ! Restons branchés ..."*, le Président Jean-Pierre Richeton plaide pour que chacun s'intéresse au phénomène Internet et invite les lecteurs à ne pas se laisser "larguer" face à ce nouveau moyen de communication.
- Dans *la rubrique "Dans nos classes"*, on trouve un intéressant article de G. Kurtz de l'IREM de Strasbourg, dont le titre est "Des courbes à la loupe. Image calculée et ordre de grandeur".
  L'auteur montre dans ce texte que l'informatique, aussi puissante soit-elle, ne peut pas tout. Il arrive que des images fausses ou amputées d'éléments significatifs soient fournies lorsqu'on confie à l'ordinateur, le soin de tracer la courbe représentant une fonction.
  L'essentiel de l'article consiste en la description commentée du traitement de 2 situations dans le domaine évoqué.
- Dans *la rubrique "Etudes"*, deux articles devraient retenir l'attention du lecteur.

  1. "Etude d'une itération en géométrie du triangle" par G. Bourgeois et J.-P. Lechêne de Marseille, traite d'une suite de triangles.
  2. "La quadrature du cercle à précision théorique variable" par Yves Pirat, décrit une recherche sur la construction, à la règle et au compas, d'un carré ayant, avec une erreur relative la plus petite possible, la même aire qu'un cercle donné.

- Dans *la rubrique "Examens et Concours"*, un texte "Analyse des sujets du Baccalauréat 1996" par Jean Capron traite de questions qui ne sont pas citées. C'est incompréhensible pour un non-initié.
- Cette livraison comporte encore les rubriques habituelles dont "Avis de Recherche", les "Problèmes de l'APMEP" et "Olympiades 1996" qui contiennent de nombreux énoncés d'exercices et des propositions de solutions.

## Bulletin de l'APMEP (France), *n*°410 - 1997

Ce numéro particulièrement copieux (208 pages) est entièrement consacré aux Journées Nationales d'Albi 1996. Ces journées constituent des moments particulièrement forts pour l'APMEP.

Le lecteur intéressé trouvera donc dans les pages de cette livraison les synthèses des nombreuses conférences, toutes de grande qualité, ainsi que les résumés de contenu ou d'ambiance de 22 ateliers (parmi beaucoup d'autres) qui ont animé les journées précitées.

Un compte-rendu d'une réunion-débat sur le thème Mathématique et Société complète ce numéro 410.

## Bulletin de l'APMEP (France), $n°411$ - juillet 1997

Au sommaire de ce numéro, nous trouvons

- *L'Editoria*l du Président Jean-Pierre Richeton.
- *Etude des processus de vérification mis en oeuvre par les élèves de Première S* par Sylvie Coppé.
  L'auteur y présente les résultats d'une recherche à propos des processus de vérification mis en oeuvre par les élèves concernés, au cours de deux situations différentes sur les plans des enjeux institutionnels et de la gestion du temps.
- *Graphique, démonstration et rigueur : quelques réflexions* par André Antibi.
  Le dessin devrait faciliter l'enseignement des mathématiques en le rendant moins abstrait et plus accessible à la masse. Ce rôle est-il joué pleinement ? Voilà la question qui est ici traitée.
- *Comment diviser un angle $\theta$ en n parties égales (avec un compas et une règle flexible)* par Aldolreza Moghadassi.
- *Un anneau de Moebius développable* par Jean-Pierre Truong.
  Une question intéressante y est abordée. C'est : "Peut-on trouver une équation d'un anneau de Moebius qui puisse être développé comme le modèle en papier" ?
- Un article de C. Jeanbrau qui s'interroge sur ce que peut être une formation mathématique, ce qu'on en attend, qui elle vise et comment l'évaluer.
  L'auteur y commente des énoncés d'exercices de diverses provenances (niveau Baccalauréats).
- *Calcul du taux de croissance moyen* par Yves Husset.
- *Le Jipto : un nouveau jeu intellectuel de poursuite* par Tatiana et Grigori Tomski.
  C'est la présentation et l'étude d'un jeu de poursuite, pour tous.
- *Topologie et manipulation directe dans les logiciels de construction* par Serge Hocquenghem.
  Les logiciels de constructions géométriques permettent de manipu-

ler les objets géométriques, dont des droites et des points. L'auteur montre que le cas des droites est différent de celui des points et expose la situation-problème ainsi créée.

– *Lire entre les lignes* de K. Mizar.

En outre, ce numéro contient, bien entendu, les traditionnelles rubriques que sont : *Les Problèmes de l'APMEP, Avis de Recherche, Nouvelles brèves, Matériaux pour une documentation, Vie de l'Association, Tribune libre, Courrier des lecteurs.*

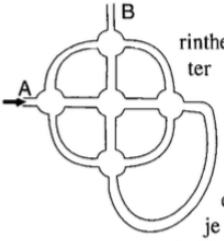
**Claude Villers**

# 12e Championnat 1/4 de finales

**C. Rédaction**,

## 12e Championnat 1/4 de finales

### 1 - LE BON PLAN

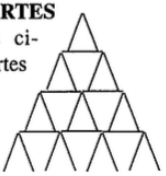



Dans ce labyrinthe, je dois respecter les règles suivantes à chaque carrefour, excepté au premier où je peux choisir d'aller où je veux :

* si j'ai tourné à gauche au carrefour précédent, alors je tourne à droite
* si je suis allé tout droit au carrefour précédent, alors je tourne à gauche
* si j'ai tourné à droite au carrefour précédent, alors je vais tout droit.

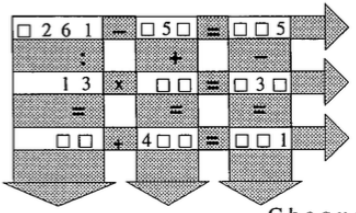
Je rentre en A et je veux sortir en B le plus rapidement possible. **Dessinez mon trajet.**

### 2 - CHÂTEAU DE CARTES



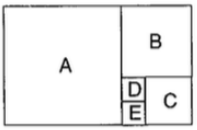
Le château de cartes ci-contre comporte 26 cartes et possède 4 étages.
Avec un jeu de tarot, qui compte 78 cartes), **combien d'étages pourra-t-on bâtir ?**

### 3 - OPÉRATIONS CROISÉES




Chaque petit carré contient un chiffre. **Complétez de telle sorte que toutes les opérations (verticales et horizontales) soient justes.**

### 4 - LE RECTANGLE EN CARRÉS




Le rectangle représenté ci-contre a une aire totale égale à 160 cm ². Il a été découpé en cinq carrés A, B, C, D et E.

**Donnez la longueur du côté C.**

### 5 - ANIMOTS

Les 4 mots animaliers superposés ci-contre, vont s'animer pour en fournir un 5 ème, de 5 lettres également, à inscrire sur la ligne inférieure en pointillés. A cet effet, chaque chiffre indique le nombre de lettres du mot de sa ligne, qui appartiennent aussi au 5 ème mot et qui sont bien placées. **Trouvez ce 5 ème mot.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | T | R | U | I | E |
| 0 | L | O | R | I | S |
| 3 | C | A | R | P | E |
| 0 | C | O | B | R | A |
| | - | - | - | - | - |

note : le loris est un lémurien.

### 6 - SEXISME

Lors d'un colloque international sur les mathématiques, on dénombrait moins de 5000 participants, dont l'ensemble était constitué d'Allemands, de Belges, de Canadiens, de Danois et d'Espagnols. Toutes les délégations nationales comprenaient le même nombre de personnes. On pouvait remarquer qu'il y avait deux fois plus d'hommes allemands de d'Allemandes, trois fois plus d'hommes belges que de femmes belges, quatre fois plus de Canadiens que de Canadiennes, cinq fois plus de Danois que de Danoises et enfin six fois plus d'hommes espagnols que de femmes espagnoles.

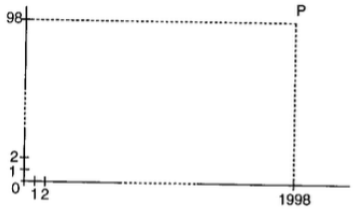
**Combien de femmes participaient à ce colloque ?**

## 7 - LES DIAGONALES

Si je trace dix rectangles et leurs diagonales, j'aurai au maximum 20 diagonales (au maximum, car une diagonale peut servir à plusieurs rectangles).

**Combien en aurai-je au minimum ?**

## 8 - EN ARRIÈRE TOUTE



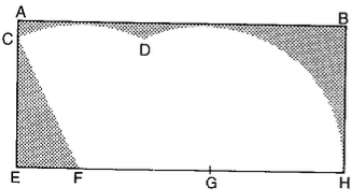

Sur un repère, un point P est situé grâce aux deux nombres 1998 et 98 donnés dans cet ordre (voir dessin).

Adrien a inventé une façon de se promener sur le plan qu'il a codée : 1 ; 9 ; 9 ; 8. Cela signifie qu'on avance d'une unité vers la droite, qu'on tourne à droite et avance de 9 unités, qu'on tourne à droite et avance de 9, et enfin qu'on tourne à droite et avance de 8. Adrien s'est promené sur le plan, à partir du point P, en utilisant 40 fois son code complet 1 ; 9 ; 9 ; 8.

**Dites-nous où il se trouve maintenant, en utilisant deux nombres dans le bon ordre.**

## 9 - LES ESSUIE-GLACES

On assimile le pare-brise d'une voiture à un rectangle ABHE. Deux essuie-glaces de même longueur tournent autour de leurs axes respectifs: le premier autour de F, son extrémité allant de G jusqu'à C en passant par D, et le second autour de G, son extrémité allant de H jusqu'à D (on assimile les essuie-glace aux balais de caoutchouc). C est sur [AE] et la longueur de CA est égale à la distance de D à la droite (AB) qui est tangente aux cercles de centres F et G décrits par les extrémités des essuie-glace.



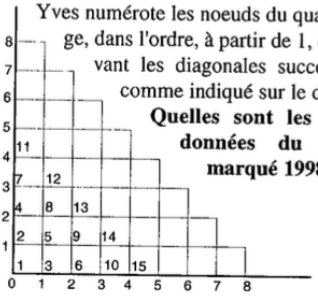

**Quelle est, en pourcentage de la surface du pare-brise, la surface essuyée, indiquée en blanc sur la figure ?**

On prendra 22 / 7 pour $\pi$ et 12 / 7 pour $\sqrt{3}$.

## 10 - EN DIAGONALE

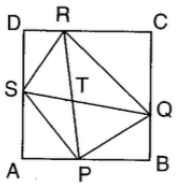
Yves numérote les noeuds du quadrillage, dans l'ordre, à partir de 1, en suivant les diagonales successives comme indiqué sur le dessin.

**Quelles sont les coordonnées du point marqué 1998 ?**




## 11 - LE QUADRILATÈRE

Sur les côtés d'un carré ABCD, on place les points PQRS comme sur le dessin, de telle sorte que SR = 6 cm, SP = 10 cm, SQ = 14 cm, PSR = 120° et RTS = 60°.

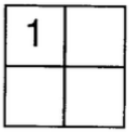



**Quelle est l'aire du carré ABCD ?**

On donnera cette aire en $cm^2$, arrondie au $cm^2$ le plus proche (on prendra 1,732 pour $\sqrt{3}$).

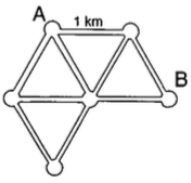
## 12e Championnat 1/4 de finales (4e et 5e primaire)

### 1 - JAMAIS 5



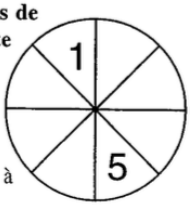

**Complétez les trois cases vides de ce tableau** avec les nombres 2, 3 et 4 de façon que la somme de deux nombres situés dans une même ligne ou une même colonne ne soit jamais égale à 5.

### 2 - LE RODAGE DES PATINS




Pour roder ses nouveaux patins à roulettes, Mathias doit faire 5 km. Il a décidé, pour effectuer ce rodage d'un seul coup, d'aller du carrefour A au carrefour B en parcourant exactement 5 km, mais sans passer plus d'une fois par un même carrefour.
**Dessinez son trajet.**

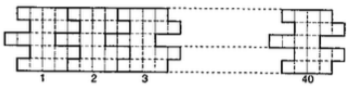
### 3 - LES HUIT NOMBRES




**Complétez les cases de la roue suivante** avec les nombres de 1 à 8 (1 et 5 sont déjà placés), de telle sorte que :

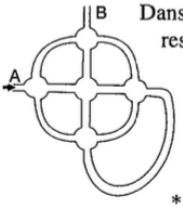
* 6 soit situé juste à côté de 1
* 2 soit situé juste à côté de 5
* 7 soit situé juste à côté de 4 et de 2
* 8 ne soit pas placé immédiatement à côté de 6.

### 4 - LA FRISE




Une frise est constituée par une figure d'une forme curieuse qui se répète 40 fois. Sachant qu'un petit carreau représente 1 cm, **quel est le périmètre de la frise ainsi construite ?**

### 5 - LE BON PLAN




Dans ce labyrinthe, je dois respecter les règles suivantes à chaque carrefour, excepté au premier où je peux choisir d'aller où je veux :

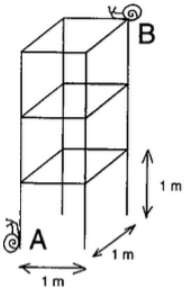
* si j'ai tourné à gauche au carrefour précédent, alors je tourne à droite
* si je suis allé tout droit au carrefour précédent, alors je tourne à gauche
* si j'ai tourné à droite au carrefour précédent, alors je vais tout droit.

Je rentre en A et je veux sortir en B le plus rapidement possible.
**Dessinez mon trajet.**

### 6 - LE NOMBRE MYSTÉRIEUX

Mathias, qui adore jouer avec les nombres, choisit un nombre à deux chiffres. Il calcule successivement la somme des deux chiffres, leur produit et leur différence (le plus grand moins le plus petit), puis il additionne les trois résultats. Il obtient alors 35.
**Quel pouvait être le nombre choisi par Mathias ?**

## 7 - LES DEUX ESCARGOTS




Un escargot B est immobile à l'extrémité d'une structure métallique (voir dessin). Tout en bas se trouve un escargot A, qui veut rejoindre l'escargot B. En allant au plus court, il lui faudra tout de même parcourir 5 m ! Mais il a le choix.

**Combien de chemins différents de longueur 5 m, peut-il emprunter pour arriver en B ?**

## 8 - LA FFJM DANS TOUS SES ÉTATS

Avec les lettres F, F, J et M, il est possible de former différents sigles : FFJM (Fédération Française des Jeux Mathématiques), MFJF (Mouvement Furtif des Jeunes Frondeurs), ....

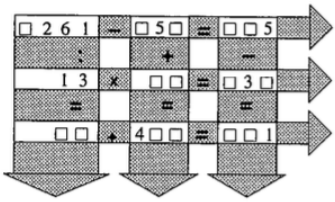
**Combien de sigles peut-on ainsi écrire, en comptant les deux exemples donnés?**

## 9 - RANGEMENT

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 2 | 2 | 0 | 3 |
| 0 | 3 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 |

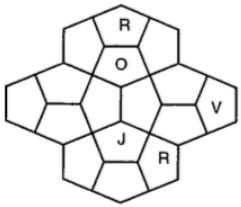
Dans un jeu de domino, toutes les pièces portant des numéros égaux ou supérieurs à 4 pont été écartés. Nina a placé les dix dominos restants dans un rectangle. Elle a indiqué où est placé le domino 1 - 2. **Indiquez la place de tous les autres en repassant leur contour.**

## 10 - OPÉRATIONS CROISÉES




Chaque petit carré contient un chiffre. **Complétez de telle sorte que toutes les opérations (verticales et horizontales) soient justes.**

## 11 -PENTACOLORIAGE




Thomas a acheté des tuiles pentagonales de couleur pour paver une partie de son jardin. Il a ainsi à sa disposition 4 tuiles rouges, 4 tuiles vertes, 4 tuiles orange et 4 tuiles jaunes. Il comptait le faire ce matin de bonne heure, mais sa soeur Olivia avait déjà commencé à fixer 5 tuiles.

Sachant que Thomas veut que deux tuiles de la même couleur ne se touchent ni par un côté, ni par un coin, **comment doit-il disposer les tuiles restantes ?**