

$Math\'ematique \ et$

P'edagogie

Sommaire

• J. Navez, Editorial	2
• C. Villers, D'Alice à Fermat	3
• J. Navez, Etude superficielle des angles	16
• C. Radoux, Quelques propriétés combinatoires des nombres de Catalan généralisés	33
• M. Lartillier, Les tribulations de l'équation du second degré	41
 M. Fremal, G. Noël et R. Scrève, Rapport de la visite en République et Canton du Jura (7 – 8 – 9 avril 1997) 	57
• C. Festraets, Des problèmes et des jeux	64
• C. Festraets, Olympiades	7 4
• J. Bair et J. Haesbroeck, Bibliographie	88

Editorial

J. Navez.

Je profite de la date de parution du présent numéro de la revue pour présenter à tous les lecteurs mes meilleurs voeux pour l'année nouvelle.

Bonne santé et bon courage à tous les fidèles membres de la Société, qui ont participé à sa vie en lui offrant leur temps pour l'organisation des différentes activités, en lui offrant des publications, des articles, des énoncés de problèmes, et aussi à tous ceux qui, par leur attention constante, forment la base solide sur laquelle notre Société repose.

A nos nouveaux lecteurs, je souhaite également que l'intérêt et le plaisir qu'ils éprouvent en faisant des mathématiques se développent encore et qu'ils rejoignent ceux qui essaient constamment d'améliorer leur enseignement.

Je termine en souhaitant aux responsables de l'éducation qu'ils aient la prise de conscience que les mathématiques font partie de la culture générale de l'honnête homme et qu'il n'est pas raisonnable de prévoir une formation tronquée pour les jeunes générations.

Jacques NAVEZ

D'Alice à Fermat

C. Villers,

Mots-clé:

Alice au pays des merveilles (1865) A travers le miroir (1871) Contes de **Lewis Carroll** = Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898)

?? ♦

Pierre de Fermat (1601-1665) Conseiller au Parlement de Toulouse Précurseur du calcul différentiel, de la géométrie analytique, du calcul des probabilités

Je me propose de relater, dans la suite de ce texte, des développements inattendus qui peuvent apparaître lors d'une étude "divagatoire" d'un sujet qui, a priori, peut sembler au départ très éloigné des contenus des programmes.

La situation que je décris dans la suite de ce texte, est apparue à la suite de la représentation, par des élèves de l'école dont certains suivaient mon cours de mathématique, d'une pièce de théâtre tirée des oeuvres de Lewis Caroll "Alice au pays des merveilles" et "Au travers du miroir".

C'est en embrayant sur divers commentaires que la classe a été amenée à envisager la question que voici :

"Le Lapin blanc se trouve devant un 'carré' de salades. Comment peut-il s'en repaître ?"

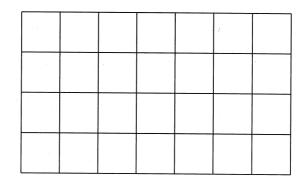
Fixer le point d'entrée dans le carré de salades, définir un mode de déplacement, décrire des trajets et leurs caractéristiques, trouver le point de sortie, telles furent les principales préoccupations .

Très rapidement, le groupe a abandonné l'aspect "potager" du problème pour le remplacer par des considérations plus "mathématiques".

C'est ainsi que nous avons convenu que chaque salade serait représentée par un noeud d'un quadrillage.

Nous nous sommes également accordé sur l'utilisation d'un quadrillage à maille unitaire dans un rectangle de dimension $a \times b$ avec a et b nombres naturels non nuls et a > b.

Ainsi, le quadrillage ci-dessous est de dimension 7×4 et il comporte 40 noeuds (et non 28 comme peuvent répondre quelques inattentifs).





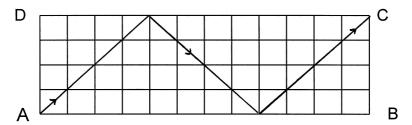
De manière générale, un quadrillage de dimension $a \times b$ comportera donc (a+1)(b+1) noeuds.

Parmi tous les modes de déplacement proposés (et qui ont aussi été des sources de découvertes intéressantes), nous avons examiné plus spécialement celui qui consiste à entrer dans le quadrillage par un de ses sommets, par suivre les directions diagonales des cellules du quadrillage en rebondissant quand c'est nécessaire jusqu'à sortir par un des autres sommets du rectangle global (cf. figure suivante).

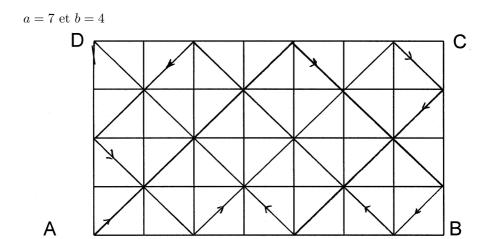
Remarquons que cette situation est isomorphe à celle du problème classique du déplacement d'une bille idéale sur un billard (idéal) rectangulaire.

De nombreux essais avec des valeurs numériques ont assis la connaissance En voici quelques uns..

a = 12 et b = 4



Dans ce cas, le trajet est simple. On entre en A et on sort en C. La raison en est trouvée facilement : c'est dû au fait que $12 = 3 \times 4 =$ un multiple de 4.



Le trajet est moins simple. On doit se déplacer de gauche à droite et aussi de droite à gauche, de bas en haut et aussi de haut en bas.

Certains des segments qui le composent, se coupent

On entre en A et on sort en D.

Alors une question se pose. Pouvait-on $\mathbf{pr\acute{e}voir}$ cela sans dessiner le trajet?

5

La réponse est "Oui" et les précisions s'obtiennent simplement encore bien.

Il suffit en effet d'attribuer des coordonnées aux points du quadrillage et de découvrir que chacun d'eux possède une caractéristique en relation avec la notion de parité.

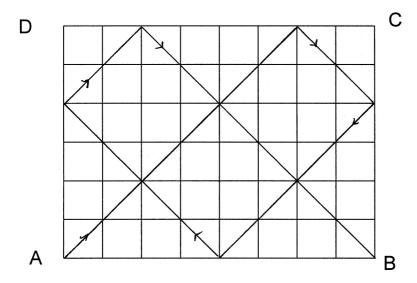
La somme des éléments de la coordonnée est paire ou impaire.

Le passage d'un point à l'autre du quadrilllage au cours du trajet, ne change pas la parité. (Pourquoi ? Voila un beau sujet d'étude!)..

Si on part de A(0,0) qui est un point pair, on doit donc sortir par un point également pair.

Ce ne peut-être ici qu'en D(0,4) qui est pair alors que B(7,0) et C(7,4) sont eux impairs.

Autre exemple : a = 8 et b = 6



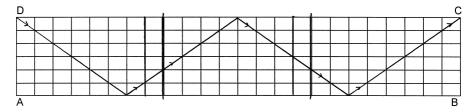
Ici encore le trajet est plus complexe. Si on part de A(0,0) qui est pair, alors on doit sortir en un sommet pair. Or, B(8,0), C(8,6) et D(0,6) sont tous pairs.

On ne peut ainsi pas prévoir en quel sommet on sortira. Mais ce ne sera pas en $A\,!$

De toute façon, les lignes se recoupent; c'est gênant.

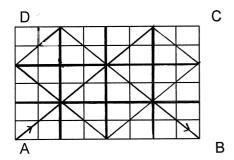
Une idée est d'éviter cela en imaginant qu'on juxtapose, par retournements, autant de fois que c'est nécessaire, le même quadrillage, à droite du premier, jusqu'à ce que le trajet atteigne un sommet donc un point de sortie.

Pour a = 8 et b = 6, on aura la situation suivante :



Il est clair alors que l'on sort lorsque le nombre de colonnes est **le plus petit nombre qui soit multiple commun de** a **et de** b. On le désigne par m(a,b).

En outre, la situation du quadrillage 8×6



est homothétique à celle d'un quadrillage 4×3



En appliquant le principe de la parité, il est alors possible de prévoir en quel sommet on va sortir.

Pour le trajet, le quadrillage 8×6 est "équivalent" au quadrillage 4×3 .

Dans ce dernier, on sait que si on part de A (sommet pair) alors on sort en B(4,0) qui est le seul autre sommet pair. Il en sera donc de même pour le quadrillage 8×6 qui lui est homothétique.

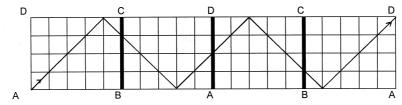
On va donc, à l'avenir, s'intéresser à la situation d'un quadrillage $(a \times b)$ avec a > b et pour lequel le plus grand nombre naturel qui divise à la fois a et b, que l'on désigne par D(a,b), vaut 1.

Autre exploitation : a = 5 et b = 4.

On a bien D(5,4) = 1.

Nous savons déja que dans ce cas, la sortie se fera au sommet de caractéristique paire, c'est-à-dire en D(4,0) puisque les autres sommets B et C sont des sommets impairs.

De plus, comme m(5,4)=20, nous pouvons aussi travailler avec une juxtaposition "horizontale" de 4 quadrillages 5×4 .



Et l'on "voit" bien qu'une résolution du problème, dans un quadrillage $a \times b$, consiste à rechercher combien de fois b est contenu dans $a, 2a, 3a, \ldots$ c'est-à-dire à effectuer les divisions par b des multiples successifs de a jusqu'à l'obtention d'un reste nul (ce qui détermine la dernière division). Pour l'exemple, on a et **on voit** :

$$1 \times 5 = M4 + 1$$
$$2 \times 5 = M4 + 2$$

$$3\times 5\ =\ M4+3$$

$$4 \times 5 = M4$$

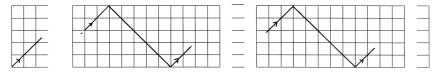
De la même manière, pour un quadrillage 12×5 , on a bien D(12,5) = 1 et on a, en outre, $m(12,5) = 60 = 12 \times 5$ d'où l'utilisation de 5 quadrillages juxtaposés (à réaliser par les sceptiques).

En plus:

$$1 \times 12 = M5 + 2$$

 $2 \times 12 = M5 + 4$
 $3 \times 12 = M5 + 1$
 $4 \times 12 = M5 + 3$
 $5 \times 12 = M5$

Nous remarquons que **tous les restes sont différents**. Cela se justifie d'ailleurs graphiquement en examinant le quadrillage correspondant. En effet, le fait que deux restes soient égaux signifierait, pour ce deuxième reste, une même "situation" que pour le premier (à un déplacement ou un retournement près) donc voudrait dire que l'on a déja atteint précédemment un point de sortie pour le trajet.



Revenons à nos divisions successives. Nous avons obtenu 4 restes non nuls inférieurs à 5. Donc nous avons obtenu, comme restes, **tous les nombres naturels de 1 à 4 (inclus)**.

On peut alors généraliser.

Soit deux naturels non nuls a, b avec a > b et D(a, b) = 1 Alors, on a :

$$1 \times a = Mb + r_1$$

$$2 \times a = Mb + r_2$$

$$3 \times a = Mb + r_3$$

$$\vdots$$

$$(b-1) \times a = Mb + r_{b-1}$$

et tous les r_i sont différents, donc sont tous les naturels de 1 à b-1.

Si nous multiplions ces égalités, membre à membre, nous obtenons

$$(b-1)!a^{b-1} = Mb + (b-1)!$$

donc

$$(b-1)!a^{b-1} - (b-1)! = Mb$$

ou

$$(b-1)!(a^{b-1}-1) = Mb$$

Interprétons cette dernière égalité.

b est diviseur du premier membre. S'il est composé, tous ses facteurs peuvent se trouver parmi ceux de (b-1)! Mais s'il est premier, alors ce n'est pas le cas et b n'est pas diviseur de (b-1)! Dans ce cas, il l'est forcément du deuxième facteur.

Dès lors:

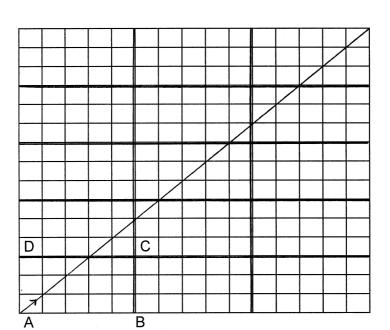
Si
$$b$$
 est un nombre premier et si $D(a,b)=1$ alors b divise $a^{b-1}-1$

C'est "le" (petit) théorème de Fermat.

Une autre exploitation a été la suivante :

Plutôt que de juxtaposer des quadrillages "en ligne", il était possible de le faire "en colonnes".

Ainsi pour un quadrillage 5×3 , on pouvait juxtaposer (en lignes) 3 rectangles de longueur 5 ou juxtaposer (en colonnes) 5 rectangles de hauteur 3. Cela revient donc à considérer un carré de côté 15 = m(5,3). Le trajet rectifié est alors donné par la diagonale issue de A.



Si on entre en A, alors on sort au sommet qui correspond à X. Des considérations de symétries orthogonales et de leurs composées permettent de retrouver ce sommet. (Nous savons par application du principe de parité que ce sera C).

${\bf Conjecturons\,!}$

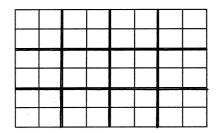
Soit A un rectangle $a \times b$ (a,b sont deux nombres naturels non nuls et a > b).

Alors:

a) d = D(a, b) est la longueur du côté du plus grand carré qui pave A.

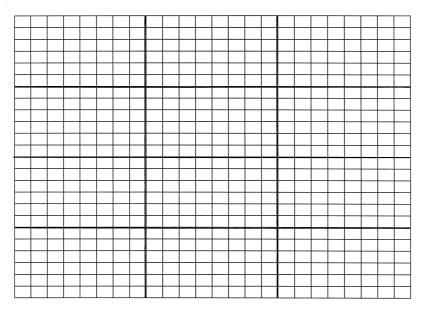
11

X



Cette propriété est triviale. Elle correspond à la définition de D(a,b)

b) k=m(a,b) est la longueur du côté du plus petit carré qui est pavé par A.



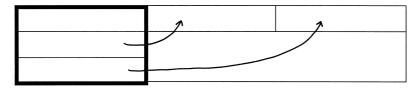
Nous laissons au lecteur le soin (et le plaisir) de démontrer cette assertion. (Une démonstration se trouve en annexe).

Enfin, nous terminerons par une propriété classique.

 $Lemme : Si \ d = D(a, b) = 1$, alors k = m(a, b) = ab.

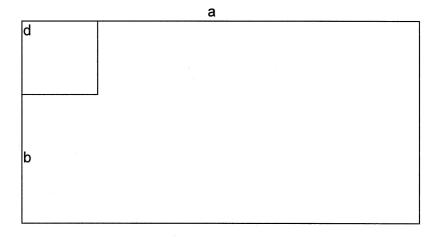
Exemple pour a=8 et b=3 :

On a D(8,3) = 1 et $m(8,3) = 8 \times 3 = 24$.

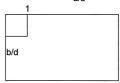


La longueur 24 est obtenue en juxtaposant 3 longueurs égales à 8. D'une manière générale, si D(a,b)=1, alors k=m(a,b) est égal à $b\times a$

Théorème : Soit un rectangle $a \times b$ et D(a, b) = d et m(a, b) = k.



Une homothétie de rapport $\frac{1}{d}$ transform e a en $\frac{a}{d}$, b en $\frac{b}{d}$, d en $\frac{d}{d} = 1$,



k en $\frac{k}{d}$ et fournit la situation du lemme.

Dès lors, $\frac{k}{d}$

est donc égal à $\frac{b}{d} \times \frac{a}{d}$. D'où

$$\frac{k}{d} = \left(\frac{b}{d}\right) \left(\frac{a}{d}\right)$$

ou encore

$$k = b\left(\frac{a}{d}\right)$$

donc

$$dk = ab$$
.

Le produit de deux nombres naturels est égal au produit de leur pgcd et de leur ppcm.

Annexe : k = m(a, b) est la longueur du côté du plus petit carré pavable par des rectangles $a \times b$.

Le carré de côté k=m(a,b) est certainement pavable avec des rectangles $a\times b$. Un tel pavage est, par exemple, constitué de $\frac{k}{b}$ rangées de rectangles (ou de $\frac{k}{a}$ colonnes de rectangles), tous placés horizontalement.

On a donc : k=ma=nb avec D(m,n)=1 d'où $\frac{a}{b}=\frac{n}{m}$ avec $\frac{n}{m}$ fraction irréductible.

Supposons qu'il existe un carré de côté c < k pavable avec des rectangles $a \times b$ placés horizontalement ou verticalement. Cela signifie que, dans une direction d'un côté du carré, on a :

$$c = ra + sb \tag{1}$$

(r, s nombres naturels) et que, dans la direction perpendiculaire, on a :

$$c = ta + ub (2)$$

(t, u nombres naturels). Si c < k, alors ra + sb < ma, donc r < m. Si c < k, alors ta + ub < nb, donc u < n.

$$(1)-(2)$$
 donne $ra+sb-ta-ub=0$, d'où

$$(r-t)a = (u-s)b$$

ou

$$\frac{a}{b} = \frac{u-s}{r-t}.$$

Donc cette dernière fraction est égale à $\frac{n}{m}$, a ses termes inférieurs à ceux de $\frac{n}{m}$ qui est irréductible. C'est impossible. Dès lors, le côté du plus petit carré pavable avec des rectangles $a \times b$ est bien k = m(a, b).

Adresse de l'auteur :

Claude VILLERS Rue Piérard 29 7022 Hyon

Etude superficielle des angles

J. Navez,

Mots clés : didactique des mathématiques, géométrie plane, angle.

1. Introduction

L'introduction de la notion d'angle est un sujet délicat, car cette notion s'enrichit par couches successives du primaire jusqu'à la fin du secondaire et aussi, parce que la notion est entrée dans le langage courant et admet plusieurs sens selon le contexte utilisé. Le résultat est d'une part, qu'en fin de secondaire, un élève peut difficilement répondre aux deux questions "Qu'est-ce qu'un angle?" et "Comment fait-on pour mesurer un angle?" et que, d'autre part, le professeur qui doit revoir la notion à un moment donné ne sait pas toujours exactement sur quoi s'appuyer, ni avec quel degré de rigueur il peut construire son cours.

La notion d'angle en mathématique est vue tout d'abord dans l'enseignement fondamental lors de la découverte des formes géométriques simples; dans le premier degré du secondaire, on voit les angles plans orientés et non orientés, et les angles isométriques constituent la base de bien des démonstrations en géométrie; dans le troisième degré du secondaire, les angles plans sont revus dans l'espace et on introduit les angles solides. En plus, dans les second et troisième degrés du secondaire, les angles sont au coeur de la partie "trigonométrie" du cours de mathématique. Les angles font aussi partie des cours de sciences et, comme le mot fait partie du langage courant, on peut également le retrouver dans pas mal d'expressions figurées et, finalement, dans n'importe quel volet de la formation.

Ce qui veut dire que si un élève éprouve des difficultés pour exprimer ce qu'est la nature et la mesure d'un angle, ce n'est pas par manque, mais plutôt par surabondance d'information.

L'idéal, bien sûr, pour un enseignant serait de pouvoir s'en tenir à une même définition en ce qui concerne la nature et la mesure des angles, du primaire jusqu'à la fin du secondaire et que ces mêmes notions soient élargies, approfondies, précisées au cours des études.

Dans ce qui suit, ne pouvant faire un travail exhaustif, je voudrais faire disons un sondage rapide sur la façon d'enseigner la notion d'angle plan et

montrer qu'il existe ainsi de nombreuses contradictions. Un travail scientifique sur la façon dont on a enseigné la notion d'angle au cours des siècles serait certainement très instructif sur l'évolution même des mathématiques, mais, vu l'ampleur que devrait prendre une telle étude, vous comprendrez que le petit exposé que je vous fais ne peut être que superficiel. Je voudrais également proposer aux professeurs une tentative d'unification de la notion qui, à mon avis, pourrait tenir jusqu'à la fin des études secondaires.

2. Quelques définitions extraites de la littérature

- "1°. Saillant ou rentrant formé par deux lignes ou deux surfaces qui se coupent; 2°. (Géom.) Figure formée par deux lignes ou par deux surfaces qui se coupent, mesurée en degrés."
 - Le Petit Robert, 1973, S.N.L., Paris.
- "La considération de deux droites AB et AC qui se rencontrent, conduit à une idée nouvelle, qui est celle d'**inclinaison mutuelle** ou d'angle et qui, comme l'idée de longueur, **ne saurait être définie**, c'est-à-dire ramenée à une idée plus simple. Les deux droites AB et AC sont les côtés de l'angle et leur point d'intersection A est un sommet."
 - ROUCHE-COMBEROUSSE, Traité de Géométrie, Première partie : Géométrie Plane, 6e édition, 1891, GAUTHIER-VILLARS, Paris.
- "Deux demi-droites, menées dans un plan par un même point et non opposées, divisent le plan en deux parties dont chacune est un angle. Les deux demi-droites sont les côtés de l'angle et l'origine commune aux deux demi-droites est le sommet. Deux demi-droites déterminent donc deux angles. L'un d'eux contient les demi-droites opposées à ses deux côtés, c'est un angle concave; l'autre ne les contient pas, c'est un angle convexe."
 - CAMBIER-LAMBOT, Eléments de Géométrie, 1922, DE BOECK, Bruxelles.
- "On appelle angle une portion de plan déterminée par deux demi-droites ayant la même origine. Deux demi-droites déterminent donc deux angles. L'un d'eux ne comprend pas les prolongements de ses côtés : c'est un angle convexe ; l'autre les comprend : c'est un angle concave. L'angle AOB peut être défini par la rotation, autour de O, qui amène la demi-droite OA sur la demi-droite OB."

- GUION, Cours de Géométrie, tome I, 12e édition, 1969 (1ère édition : 1949), DE BOECK, Bruxelles.
- "La figure formée par **deux demi-droites issues d'une même origine** est un angle. L'origine des deux demi-droites est le sommet de l'angle; les demi-droites en sont les côtés."
 - DESMET-VANDEPOEL, Traité de Géométrie, Première partie : Géométrie plane, 1ère édition, 1956, EDITIONS DE L'ELAN, Liège.
- "Angle = rotation qui a perdu son centre."
 - G. PAPY, Mathématiques Modernes, vol. 3, 1967, DIDIER, Bruxelles.
- "L'intersection de deux demi-plans dont les droites frontières sont sécantes s'appelle un secteur angulaire convexe. La réunion de deux demi-plans dont les droites frontières sont sécantes s'appelle un secteur angulaire concave. Un secteur angulaire s'appelle aussi un angle. (Dans le chapitre : angles ordinaires). A part les angles ordinaires du chapitre précédent, qu'on employait déjà à l'école primaire, il existe encore d'autres angles. Faisons maintenant connaissance avec les angles orientés. Un angle orienté est un couple de demi-droites de même origine. A tout angle ordinaire, correspondent deux angles orientés et, à tout angle orienté, correspondent deux angles ordinaires."
 - BROECKX-VAN EYCK-BURTON, La Suite 3, 1971, DE NEDER-LANDSCHE BOEKHANDEL, Anvers.
- "On considère, dans l'ensemble des couples (\bar{A}, \bar{B}) des demi-droites affines de V, la relation S définie par $(\bar{X}, \bar{Y})S(\bar{X}', \bar{Y}')$ si et seulement si le déplacement qui applique \bar{X} sur \bar{Y} a même **rotation linéaire associée** que le déplacement qui applique \bar{X}' sur \bar{Y}' . Chaque **classe d'équivalence** C de S est appelée angle orienté de chaque couple de demi-droites appartenant à C."
 - L. SART, Recyclage de Mathématique, Stavelot-Libramont, 1976 1977.
- "Soit S un secteur de sommet O. Les secteurs de **même angle** que S sont : les secteurs de même sommet O, transformés de S par symétrie axiale ; les secteurs transformés des précédents par translation."
 - IREM Strasbourg, Mathématiques, classe de 3e, 1980, ISTRA, Paris.
- "Voici d'abord l'interprétation la plus courante. Un angle est constitué par la donnée d'un point o et de deux demi-droites A, B d'origine o. Tous les angles équivalents à un angle donné constituent une classe d'équivalence et les différentes classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble des angles. Souvent, le mot angle

- est utilisé pour désigner une telle classe d'équivalence. Voilà une seconde interprétation du mot angle. La **fermeture convexe** d'un angle est appelé secteur angulaire. C'est une 3e interprétation de la notion d'angle."
- F. BUEKENHOUT, H. MEUNIER, M. TALLIER, Vivre la Mathématique 2, 1981, DIDIER-HATIER, Bruxelles.
- "Une paire de demi-droites de même origine détermine un angle." S. LORENT, R. LORENT, S. TROMPLER, Mathématique M20, 1981, DE BOECK, Bruxelles.
- "Nous avons vu qu'à une paire de demi-droites de même origine, nous pouvons associer un angle saillant et un angle rentrant. Il est donc sans doute plus logique et, en tout cas, plus clair d'introduire l'angle saillant de deux demi-droites de même origine comme la plus petite portion du plan délimitée par les deux demi-droites et l'angle rentrant comme la plus grande. On peut définir un angle orienté comme un couple de demi-droites, c'est-à-dire un ensemble ordonné de deux demi-droites."
 - J. GOBERT, Quelques aspects du cours de Géométrie, 1993, FO-PEM, Liège.

3. Essai de classification

Les définitions précédentes sont révélatrices de grandes tendances en ce qui concerne la notion d'angle et que l'on pourrait tenter de résumer comme suit :

- a) Un angle est un **écart**, une **inclinaison mutuelle** entre deux directions et est une **notion fondamentale** non définie.
- b) Un angle est une **portion de plan** limitée par deux demi-droites de même origine.
- c) La figure formée par une paire de demi-droites de même origine est un angle; la figure formée par un couple de demi-droites de même origine est un angle orienté. Vu l'imprécision, on retrouve souvent la variante suivante :
 - c') Deux demi-droites de même origine et non opposées déterminent deux angles; l'un contient les demi-droites opposées à ses deux côtés, il est dit concave (rentrant), l'autre ne les contient pas, il est dit convexe (saillant).
- d) On appelle angle une **classe d'équivalence** pour des secteurs angulaires isométriques et angle orienté une classe d'équivalence pour des

- couples de demi-droites de même origine qui se correspondent dans un déplacement.
- e) Un angle orienté est une **rotation**.

4. Quelques critiques

La définition a) est intéressante en ce sens qu'elle relève d'un besoin qu'ont toujours eu les hommes de pouvoir repérer et désigner les directions de façon toujours plus précise. Après les directions cardinales, les besoins de l'astronomie ont nécessité que s'élabore une théorie sur la mesure des angles. La géométrie élémentaire pourrait-elle se satisfaire uniquement de la notion de mesure des angles?

La définition b) est typiquement celle que l'on voit dans l'enseignement fondamental, même si, pour des raisons pédagogiques, le morceau de plan est remplacé par un morceau de tarte.

La variante de la définition c) fait apparaître clairement combien il est difficile de se débarrasser de la portion de plan qui est comprise entre les deux demi-droites. On est aussi naturellement amené à dire qu'un point se situe à l'intérieur d'un angle ou encore qu'il se situe dans l'angle, ce qui bien sûr contredit alors la définition. De même, si on considère dans un cercle un angle au centre, on voit mieux l'arc intercepté comme étant l'arc qui contient les points se situant dans l'angle plutôt que comme étant un des deux arcs délimités par les points d'intersection des demi-droites avec le cercle.

Pour définir des angles adjacents avec la définition c), il faut préciser que ces angles ont le sommet commun, ont un côté commun et sont tels que les côtés non communs sont situés "de part et d'autre" du côté commun.

La définition d) est très précise, car la notion de classe d'équivalence permet de régler élégamment l'addition des angles et aussi la mesure des angles, mais malheureusement elle fait intervenir des notions très lourdes et qu'il est hors de question de voir dans l'enseignement fondamental.

De plus, il est assez surprenant de voir qu'un angle, s'il est non orienté ou s'il est orienté, n'a pas la même nature. Peut-on accepter que le fait d'ajouter un qualificatif (orienté) fasse passer l'angle de portion de plan à couple de demi-droites?

La définition e) est très valable à condition de ne voir que des angles orientés et aussi à condition de la réserver à des élèves ayant acquis un certain niveau.

5. Essai d'une pédagogie unifiée pour les angles "ordinaires"

La considération d'un angle comme **portion de plan** permet de concevoir une pédagogie unifiée et d'enrichir progressivement la notion étudiée.

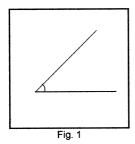
5.1. Au niveau de l'enseignement fondamental

On définit un angle comme étant une portion de plan comprise entre deux demi-droites de même origine.

A ce niveau, on peut déjà signaler que les demi-droites font partie de l'angle et s'appellent les côtés et que l'origine commune des demi-droites fait partie de l'angle et s'appelle le sommet.

On peut voir aussi que se donner les côtés n'est pas suffisant pour préciser l'angle. Il faut en plus montrer quelle est la portion de plan considérée. Pour ce faire, on utilise souvent un artifice comme, par exemple, un petit arc de cercle centré au sommet de l'angle et qui se trouve dans la partie considérée.

On introduit aussi la notion d'angle droit.



5.2. Au niveau du premier degré du secondaire

La définition vue au primaire est répétée telle quelle.

En revenant sur le fait que la donnée de deux demi-droites de même origine et non opposées ne détermine pas un mais bien deux angles, on peut donner les définitions d'angle saillant (qui ne contient pas les demi-droites opposées à ses côtés) et d'angle rentrant (qui contient les demi-droites opposées à ses côtés). Si on se donne deux demi-droites de même origine et opposées, elles déterminent deux angles plats (qui correspondent aux deux demi-plans déterminés par la droite toute entière, voir plus loin).

On revoit l'angle droit comme un angle saillant dont un côté est perpendiculaire à l'autre (on peut modifier cela en fonction de l'attitude prise pour l'introduction de la perpendicularité, voir par exemple (1).

On complète ces définitions en introduisant l'angle **total** ou **tour** et l'angle **nul**.

On dit qu'un point est dans un angle ou intérieur à un angle s'il appartient à cet angle, mais pas aux côtés de l'angle; on dit qu'un point est extérieur à un angle s'il n'appartient pas à cet angle.

Toutes ces définitions peuvent aussi être revues à la lumière de l'introduction de la notion de demi-plan. En voici une version axiomatique, mais qui bien sûr ne doit pas être délivrée telle quelle aux élèves de deuxième année.

Axiome : Une droite quel conque d d'un plan partage l'ensemble de tous les points du plan ne lui appartenant pas en deux régions telles que :

- si deux points appartiennent à une même région, le segment qui les joint ne coupe pas la droite d (on dit qu'ils sont situés d'un même côté par rapport à d);
- si deux points appartiennent à des régions différentes, le segment qui les joint coupe la droite d (on dit qu'ils sont situés de part et d'autre de d).

Définition: Chacune des deux régions du plan définies par la droite d et complétées par la droite d elle-même constitue un **demi-plan** de **frontière** d.

^{1.} J. NAVEZ, Introduction axiomatique à la géométrie affine et métrique du plan et de l'espace, Université de Liège, Didactique des mathématiques, 1994.

N.B. Ce demi-plan est dit fermé parce qu'il contient d; on pourrait aussi considérer la région sans la droite et on parlerait alors de demi-plan ouvert.

Conséquence : Un demi-plan est entièrement déterminé par sa frontière et par un point n'appartenant pas à sa frontière.

Propriétés :

 a) L'intersection de deux demi-plans de frontières sécantes est un angle saillant.

En effet, pour fixer les idées, considérons le demi-plan donné par sa frontière A'OA et par le point B, ainsi que le demi-plan donné par sa frontière B'OB et le point A. Leur intersection contient de toute évidence OA et OB. Elle ne peut contenir A' qui n'est pas dans le deuxième demi-plan, ni B' qui n'est pas dans le premier. En conséquence, puisque l'intersection ne comprend pas les prolongements des côtés, il s'agit d'un angle saillant.

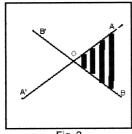


Fig. 2

b) L'union de deux demi-plans de frontières sécantes est un angle rentrant.

Plaçons-nous encore, pour fixer les idées, dans la même situation que ci-dessus. L'union contient A et A' qui sont dans le premier demiplan et B et B' qui sont dans le second, l'angle déterminé par l'union est donc rentrant.

c) Un demi-plan est un angle plat.

Angles opposés

Deux angles saillants sont dits **opposés** si les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

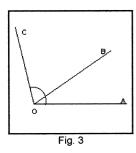
Deux angles opposés sont isométriques.

Angles adjacents

Deux angles sont dits **adjacents** lorsqu'ils ont le même sommet et un côté en commun et si le second côté de l'un n'appartient pas à l'autre.

Si deux angles sont adjacents, ils ne peuvent être tous les deux rentrants.

Soit AOB et BOC deux angles adjacents. L'angle AOC est alors appelé somme des deux premiers.



Somme des angles

Pour additionner deux angles disposés de manière quelconque, par isométrie on en fait des angles adjacents.

La réunion des deux angles est alors leur somme.

La somme de deux angles n'est pas toujours possible : elle l'est toujours si les deux angles sont saillants, elle l'est parfois si l'un est saillant et l'autre rentrant et elle ne l'est jamais si les deux angles sont rentrants.

On appelle **moitié** d'un angle \hat{a} un autre angle \hat{i} tel que $\hat{i} + \hat{i} = \hat{a}$.

On appelle **double** d'un angle \hat{a} un autre angle \hat{u} tel que $\hat{a} + \hat{a} = \hat{u}$.

Deux angles sont dits **supplémentaires** si leur somme est un angle plat.

Deux angles sont dits **complémentaires** si leur somme est un angle droit.

Comparaison des angles

Soit AOB et A'O'B' deux angles non nuls. Pour les comparer, on amène par isométrie A'O'B' en AOB'' de telle sorte que l'intersection des points intérieurs ne soit pas vide.

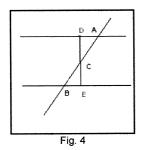
- Si AOB'' = AOB, alors on dit que les deux angles sont égaux (AOB et A'O'B' sont isométriques).
- Si $AOB'' \subset AOB$, alors on dit que A'O'B' est **plus petit** que AOB.
- Si $AOB'' \supset AOB$, alors on dit que A'O'B' est **plus grand** que AOB.

En cas particulier, les angles plus petits (plus grands) qu'un angle droit s'appellent angles **aigus** (**obtus**).

En propriété, on voit que les angles saillants (rentrants) sont plus petits (plus grands) qu'un angle plat.

Angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants

En fonction de l'étude qu'on fait du parallélisme et des isométries, on peut déduire les égalités habituelles entre ces angles.



Par exemple, pour démontrer que les angles alternes internes de sommets A et B sont égaux, on mène par C, milieu de AB, la perpendiculaire commune aux deux parallèles et on observe que les triangles rectangles ADC et BEC sont isométriques ; donc, les angles alternes internes sont isométriques et par suite égaux.

Somme des angles d'un triangle

La démonstration de la propriété disant que la somme des angles d'un triangle vaut un angle plat est aisée à partir des résultats précédents : il suffit de mener une parallèle à un côté passant par le sommet opposé.

Mais, auparavant, il faut peut-être parler de la notion de **triangle**.

Pour être conséquent, il faut définir le triangle comme la **portion de plan** limitée par les segments de droites joignant 2 à 2 trois points non alignés.

Cette définition est très intéressante parce que dans la suite, il viendra naturellement que la mesure d'un triangle est son aire. Le triangle mérite donc lui aussi une définition **superficielle**.

Les points **intérieurs** à un triangle sont les points qui se situent dans le triangle, mais pas sur les côtés.

Les **angles d'un triangle** ABC sont les angles de sommets respectifs A, B et C et dont l'intersection avec le triangle comprend tous les points intérieurs au triangle.

On peut voir aussi qu'un triangle est la figure formée par l'intersection de trois demi-plans dont les frontières ne sont pas concourantes et dont chacun contient comme point intérieur le point d'intersection des frontières des deux autres.

Les angles d'un triangle sont des angles saillants. En effet, le triangle étant l'intersection de trois demi-plans, aucun angle ne peut être plus grand qu'un angle plat (demi-plan).

Amplitude des angles

Dans une première étude, le principe de la mesure des angles peut être vu de manière assez naïve.

Pour effectuer des comparaisons, on utilise des isométries (ce qui revient à déplacer le rapporteur).

On commence par utiliser comme unité l'**angle total** ou le **tour** et ainsi, l'angle plat sera un demi-tour, l'angle droit un quart de tour . . .

On utilisera ensuite les degrés avec la formule de passage : $1 \text{ tour} = 360^{\circ}$ et bien entendu, on inculquera aux élèves l'usage du rapporteur.

5.3. Au niveau du deuxième degré du secondaire

Nous allons voir que la définition "superficielle" d'un angle cadre parfaitement avec les nouvelles notions que l'on introduit dans le deuxième degré.

Angles au centre, angles inscrits et angles tangentiels dans un cercle

Si A, B et C sont trois points d'un cercle de centre O et de rayon R, l'angle saillant BAC s'appelle **angle inscrit** dans ce cercle.

On dit que cet angle inscrit **intercepte** l'arc de cercle BC qui est l'**intersection** de l'angle et du cercle.

A cet angle inscrit correspond un **angle au centre** BOC qui intercepte le même arc que l'angle inscrit BAC.

Si A et B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon R et si C est un point de la tangente en A, alors l'angle saillant BAC s'appelle angle tangentiel.

On dit que l'angle tangentiel **intercepte** l'arc de cercle AB, **intersection** du cercle et de l'angle.

A cet angle tangentiel correspond un **angle au centre** AOB qui intercepte le même arc que l'angle tangentiel BAC.

Propriétés (à démontrer) :

- a) Un angle inscrit est la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.
- b) Un angle tangentiel est la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Ce chapitre se termine traditionnellement par l'étude de l'arc de segment capable.

Angles orientés

Beaucoup d'auteurs ayant pris une définition "superficielle" changent brutalement la nature de l'angle lorsqu'il est orienté. Nous allons montrer que l'on peut très bien continuer avec notre définition, l'adjectif orienté apportant seulement une propriété supplémentaire aux angles.

 $D\acute{e}finition$: on dit qu'un angle est orienté si on a fixé un ordre pour les côtés de cet angle.

- A un angle ordinaire AOB on peut donc faire correspondre deux angles orientés AOB et BOA.
- Pour indiquer graphiquement cet ordre, l'arc de cercle que l'on a déjà utilisé pour désigner l'angle est souvent muni d'une flèche qui indique l'ordre 1er côté \rightarrow 2ème côté.

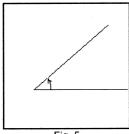


Fig. 5

Pour se conformer à l'usage, deux angles orientés seront dits **égaux** si on passe du premier au second par un déplacement.

Bien plus tard, on pourra introduire les classes d'équivalence pour la relation "se correspondre par un déplacement" dans l'ensemble des angles orientés et chaque classe d'équivalence pourra encore s'appeler "angle orienté".

Si on passe de AOB à A'OB' par une symétrie orthogonale d'axe passant par O, on peut montrer que les angles orientés AOB et B'OA' sont égaux; on dira alors que les angles orientés AOB et A'OB' sont **opposés**.

Orientation du plan

On appelle **faisceau de demi-droites** l'ensemble de toutes les demi-droites du plan ayant la même origine O; le point O s'appelle le **sommet** du faisceau.

On peut axiomatiquement (ou intuitivement) voir qu'il existe deux sens de parcours, réciproques l'un de l'autre dans un faisceau. Un faisceau est dit **orienté** lorsqu'on a choisi un sens de parcours pour ce faisceau.

Quand un faisceau est orienté, tout faisceau qui s'en déduit par un déplacement est dit de même orientation. On dit alors que le plan est orienté.

Pour privilégier un sens de parcours des faisceaux du plan, on utilise un truc : le sens inverse des aiguilles d'une montre, et on l'appellera sens trigonométrique.

Le sens trigonométrique peut également être matérialisé sur un cercle (cercle trigonométrique).

Si, dans un angle orienté non nul, on dessine l'arc de cercle intercepté par cet angle sur un cercle centré au sommet et si, sur cet arc de cercle, on considère le sens de parcours déterminé par 1er côté \rightarrow 2ème côté, on peut avoir deux cas :

- le sens sur l'arc de cercle est le sens trigonométrique; on dit que l'angle est **orienté positivement**.
- le sens sur l'arc de cercle est le sens contraire du sens trigonométrique;
 on dit que l'angle est orienté négativement.

Angle d'une rotation

Il est en théorie nécessaire de disposer de l'axiome de la rotation qui dit : "il existe une et une seule rotation qui applique une demi-droite sur une demi-droite de même origine".

Ensuite, on définit l'angle orienté d'une rotation différente d'une symétrie centrale comme étant l'**angle orienté saillant** déterminé par un couple de demi-droites correspondantes ayant pour origine le centre de rotation.

Il y a un petit problème pour la rotation qui est une symétrie centrale, puisque les deux angles déterminés par un couple de droites correspondantes sont plats. On peut lever cette indétermination en utilisant le sens trigonométrique. En effet, on prendra alors comme angle plat pour la rotation celui qui a le sens trigonométrique. Il faut enfin montrer que l'angle de rotation ne dépend pas du choix du couple de droites correspondantes choisies pour le définir.

Avec nos précautions, on peut alors avoir le théorème qui dit : "une rotation est complètement déterminée par son centre et son angle".

Addition des angles orientés

On notera (+) un angle qui est orienté dans le sens trigonométrique et (-) un angle qui est orienté dans le sens contraire du sens trigonométrique.

- -AOB(+) + BOC(+): le résultat est AOC(+).
- --AOB(-) + BOC(-): le résultat est AOC(-).
- AOB(+) + BOC(-): le résultat est AOC(+) si, en tant qu'angle ordinaire, AOB est plus grand que BOC et AOC(-) si, en tant qu'angle ordinaire, BOC est plus grand que AOB.

Dans tous les cas, la relation de CHASLES

$$AOB + BOC = AOC$$

reste valable.

Mesure des angles orientés

1ère version

Mesurer un angle orienté peut se faire par analogie avec ce que l'on a fait pour un angle ordinaire.

Si on utilise le degré comme unité, on commence par mesurer l'angle non orienté, puis on affecte le résultat du signe + si l'angle est orienté dans le sens trigonométrique et du signe - si l'angle est orienté dans le sens contraire du sens trigonométrique.

On peut aussi utiliser un cercle gradué comme rapporteur : par un déplacement, on amène le premier côté de l'angle sur la droite 0° du cercle et puis,

- si l'angle est orienté (+), le second côté se trouvera sur la graduation $+90^{\circ}$, $+180^{\circ}$, $+270^{\circ}$, ...
- si l'angle est orienté (–), le second côté se trouvera sur la graduation $-90^\circ, -180^\circ, +-70^\circ, \dots$

Cette mesure n'est pas facile, on le sait, à justifier mathématiquement car, si la graduation d'une droite est déjà un problème difficile, la graduation d'un cercle l'est bien plus encore (²). Mais l'objectif au deuxième degré ne me paraît pas de pouvoir justifier l'existence d'une mesure.

^{2.} J. NAVEZ, Op. Cit.

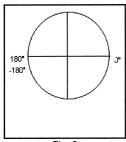


Fig. 6

La mesure ainsi introduite fonctionne bien avec l'addition des angles orientés :

- la mesure de la somme d'un angle mesurant $+15^{\circ}$ et d'un angle mesurant $+30^{\circ}$ est bien $+45^{\circ}$.
- la mesure de la somme d'un angle mesurant -180° et d'un angle mesurant -270° est bien -90° .
- la mesure de la somme d'un angle mesurant 180° et d'un angle mesurant -60° est bien 120° .
- la mesure de la somme d'un angle mesurant -270° et d'un angle mesurant 60° est bien -210° .

On voit que, dans les mesures positives, on ne peut aller au-delà de $+360^{\circ}$ et, dans les mesures négatives, en deçà de -360° ; il faut retirer ou ajouter autant de fois 360° que nécessaire pour se retrouver dans la zone permise.

Il est à remarquer que la définition superficielle des angles conduit à un spectre plus large que la définition linéaire : on fait nettement la distinction entre l'angle de 270° et l'angle de -90° ; la plage va de -360° à 360° .

2ème version

Un angle étant une portion de plan, sa mesure naturelle pourrait être celle d'une surface, donc une aire.

Si on admet que, par d'autres moyens, on sait que l'aire du disque vaut πR^2 , pour trouver la mesure d'un angle orienté, on peut limiter la surface par un cercle de rayon 1 (une unité de longueur) et centré au sommet de l'angle pour avoir une aire finie; ensuite, on affecte cette aire du signe + si l'angle est orienté dans le sens trigonométrique et du signe - si l'angle est orienté dans le sens contraire du sens trigonométrique.

Ainsi, un angle droit saillant orienté dans le sens trigonométrique aura pour mesure $+\frac{\pi}{4}$ puisqu'il correspond à un quart de disque; un angle plat

orienté dans le sens contraire du sens trigonométrique aura pour mesure $-\frac{\pi}{2}$ puisqu'il correspond à un demi-disque . . .

Mesure des angles de rotation

D'après nos définitions, l'angle de rotation est toujours un angle saillant, au pis un angle plat et, dans ce cas, il est obligatoirement orienté dans le sens trigonométrique. Avec la première version, un angle de rotation est toujours compris dans] $-180^{\circ},180^{\circ}$] et, à la composition des rotations, correspond l'addition des mesures modulo 360° .

6. Conclusion provisoire

Nous n'avons pas abordé tous les aspects. Il reste, au niveau du second degré du secondaire, à étudier l'angle entre deux vecteurs et aussi à préparer la trigonométrie.

Nous voyons que, si l'aspect "superficiel" d'un angle rend les propriétés géométriques plus simples à expliquer, des considérations différentes de ce à quoi on est habitué peuvent apparaître au niveau des mesures. Il ne s'agit bien entendu pas du $\frac{\pi}{4}$ pour l'angle droit, qui est une boutade, mais bien de la plage dans laquelle il faut considérer les mesures principales des angles orientés. Il faudrait montrer que ces différences ne sont pas insurmontables pour la suite du programme et notamment, pour l'aspect vectoriel et trigonométrique des choses.

Au niveau du troisième degré du secondaire, il faudra parler des angles plans dans l'espace, mais aussi des angles formés par deux demi-plans de même frontière. Peut-être aurez-vous l'obligeance de bien vouloir lire un jour une étude "solide" des angles.

Adresse de l'auteur :

Jacques NAVEZ Quai G. Kurth 84, bte 043 4020 Liège.

Quelques propriétés combinatoires des nombres de Catalan généralisés

C. Radoux.

En hommage à mon professeur François Jongmans

Mots clés : nombres de Catalan généralisés; propriétés combinatoires; déterminants de Hankel

1. Définitions et rappels

Le nombre de séquences formées de n nombres 1 et n nombres -1, à sommes partielles toutes positives ou nulles, est donné par le n-ième **nombre de Catalan**

$$c_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

J'en ai introduit, dans [1] et [2], la généralisation

$$c_{n,k} = \frac{(2k+1)\binom{2n}{n+k}}{n+k+1},$$

pour des raisons alors essentiellement techniques. Voici le début de la matrice triangulaire infinie de ces nombres :

1									
1	1								
2	3	1							
5	9	5	1						
14	28	20	7	1					
42	90	75	35	9	1				
132	297	275	154	54	11	1			
429	1001	1001	637	273	77	13	1		
1430	3432	3640	2548	1260	440	104	15	1	
4862	11934	13260	9996	5508	2244	663	135	17	1

L'interprétation combinatoire précédente se généralise elle-même très naturellement : $c_{n,k}$ est le nombre de séquences formées de (n+k) nombres 1 et (n-k) nombres -1, à sommes partielles toutes positives ou nulles.

Le nombre de Catalan "classique" correspond tout simplement à k=0.

La formule qui m'était utile dans les deux articles cités était surtout

$$c_{m+n} = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} c_{m,k} c_{n,k}.$$

Rappelons aussi que

$$(1-x)(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}(x^{n-k} - x^{n+k+1}).$$

En divisant par $x^{n+1/2}$, puis en posant $x=e^{2i\alpha}$, on obtient l'identité plus élégante

$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \sin(2k+1)\alpha = 2^{2n} \sin \alpha \cos^{2n} \alpha.$$

C'est de cette dernière formule que découle, dans [2], l'inversion de la matrice de Hankel de dimension finie quelconque (toujours de déterminant 1!) construite sur les nombres de Catalan, ainsi que la remarque

$$\sum_{k=i}^{j} (-1)^{k+i} \begin{pmatrix} k+i \\ k-i \end{pmatrix} c_{j,k} = \delta_{ij}.$$

Je voudrais maintenant montrer, pour le pur plaisir du calcul, que ces nombres de Catalan généralisés engendrent facilement de nombreuses petites formules parfois assez surprenantes. J'ai mis en exergue les résultats nouveaux les plus significatifs.

2. Formules faciles

Voici d'abord quelques conséquences triviales, mais jolies, des formules qui précèdent. Je les laisse "en exercice".

$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_{n,k} = 0$$
$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}^2 = c_{2n}.$$

Celles qui suivent sont à peine plus difficiles : songez seulement à dériver ou intégrer entre de "bonnes" bornes les identités rappelées... Signalons toutefois que la connaissance des fonctions eulériennes $\Gamma(n)$ et B(m,n) indique de confortables raccourcis.

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)c_{n,k} = 2^{2n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2k+1)c_{n,k} = -2c_{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{c_{n,k}}{(n+k+1)(n+k+2)} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}-1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k c_{n,k}}{(n-k+1)(n+k+2)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

3. Nouveau et plus amusant

L'identité $\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \sin(2k+1)\alpha = 2^{2n} \sin \alpha \cos^{2n} \alpha$ fait apparaître $c_{n,k}$ comme un **coefficient de Fourier**. Appliquons donc la formule de Fourier :

$$c_{n,k} = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^{2n} \alpha \sin(2k+1)\alpha \sin \alpha \, d\alpha.$$

Cela vous semble trop "tordu"?

On peut cheminer par la formule de Simpson

$$\sin(2k+1)\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\cos(2k\alpha) - \cos(2k+2)\alpha\right),\,$$

puis intégrer de manière artisanale...

En se rappelant maintenant quelques conditions relatives à la convergence uniforme, justifiant la permutation de l'intégrale et de la série qui suivent, on peut donc écrire

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n,k}}{2^{2n}} = \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \alpha \right) \sin(2k+1)\alpha \sin \alpha \, d\alpha$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(2k+1)\alpha \sin \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \, d\alpha$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(2k+1)\alpha}{\sin \alpha} \, d\alpha.$$

Mais il est bien connu que cette dernière intégrale, indépendante de l'entier k considéré, vaut π . Du même coup, la série calculée jouit de la même propriété :

$$\forall k, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n,k}}{2^{2n}} = 2$$

ou, en n'écrivant plus les termes évidemment nuls,

$$\forall k, \quad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{c_{n,k}}{2^{2n}} = 2.$$

La convergence plutôt lente de ces séries (la formule de Stirling explique facilement le phénomène : $\frac{c_n}{2^{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n^3}}$) rend peu convaincants les tests numériques effectués sur ordinateur, même avec un logiciel aussi puissant que Derive.

Il est donc tentant de calculer explicitement les sommes partielles, en utilisant la même idée de départ. C'est un peu plus technique, mais très routinier. Par exemple, on effectue (retour aux sources!) la substitution $z=e^{i\alpha}$. Il en résulte une intégrale curviligne étendue au cercle unité du plan complexe. Le théorème des résidus, appliqué au pôle z=0, mène enfin à l'identité

$$\sum_{n=k}^{p} \frac{c_{n,k}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{t=0}^{p-k} {2p+2 \choose t}.$$

L'opération $\lim_{p\to\infty}$ restitue bien le résultat précédent.

4. Encore un autre point de vue

Nous venons de voir que l'interprétation de $c_{n,k}$ comme coefficient de Fourier donne spontanément d'assez beaux résultats. Mais, par ailleurs, $c_{n,k}$ est le coefficient de x^{n-k} dans le polynôme $(1-x)(1+x)^{2n}$. Il peut donc également s'écrire comme **coefficient de Taylor**:

$$c_{n,k} = \frac{1}{(n-k)!} \left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \left((1-x)(1+x)^{2n} \right) \right)_{x=0}.$$

Ceci suggère et permet aussi l'évaluation facile d'expressions comme, par exemple,

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} c_{n,n-k}.$$

Montrons que

$$s(n) = \frac{2(2n^2 + 2n + 1)(4n)!}{n!(3n+2)!}.$$

En effet,

$$\begin{split} s(n) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!} \, \left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \, ((1-x)(1+x)^{2n}) \right)_{x=0} \left(\frac{d^k}{dx^k} \, ((1-x)(1+x)^{2n}) \right)_{x=0} \\ &= \frac{1}{n!} \, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \, \left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \, ((1-x)(1+x)^{2n}) \right)_{x=0} \left(\frac{d^k}{dx^k} \, ((1-x)(1+x)^{2n}) \right)_{x=0}. \end{split}$$

La formule de Leibnitz donne donc

$$s(n) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dx^n} \left((1-x)^2 (1+x)^{4n} \right) \right)_{x=0}.$$

s(n) apparaît ainsi à son tour comme le coefficient de x^n dans $(1-x)^2(1+x)^{4n}$. Il vaut donc

$$\left(\begin{array}{c}4n\\n\end{array}\right)-2\left(\begin{array}{c}4n\\n-1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}4n\\n-2\end{array}\right)$$

et, comme annoncé,

$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} c_{n,n-k} = \frac{2(2n^2 + 2n + 1)(4n)!}{n!(3n+2)!}.$$

5. Un déterminant de Hankel variable

On peut aussi généraliser la propriété étudiée dans [1] et [2]. Soit, en effet,

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m c_{m,k} x^k.$$

Soit encore,

$$H_n(x) = \begin{vmatrix} P_0(x) & P_1(x) & P_2(x) & \dots & P_n(x) \\ P_1(x) & P_2(x) & P_3(x) & \dots & P_{n+1}(x) \\ P_2(x) & P_3(x) & P_4(x) & \dots & P_{n+2}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_n(x) & P_{n+1}(x) & P_{n+2}(x) & \dots & P_{2n}(x) \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant, dont tous les éléments, à l'exception de $P_0(x)$, sont divisibles par x+1, possède précisément une valeur d'une simplicité remarquable :

$$H_n(x) = (1+x)^n.$$

Une démonstration consiste à exprimer la matrice considérée comme produit d'une matrice triangulaire inférieure A par une matrice triangulaire supérieure B, la diagonale de A se composant d'un nombre 1 suivi exclusivement de termes x+1, la diagonale de B ne comportant que des 1. C'est donc également une généralisation "naturelle" de la preuve du théorème de départ. Précisons quelque peu.

Posons

$$a_{n,r}(x) = \sum_{k=r}^{n} c_{n,k} x^{k-r}$$

(en particulier, $a_{n,0}(x) = P_n(x)$ et $a_{n,n}(x) = 1$).

En notant que ce polynôme n'est autre que le coefficient de u^{n-r} dans $\frac{(1-u)(1+u)^{2n}}{1-ux}$, c'est-à-dire dans $\sum_{k=0}^n c_{n,k}(u^{n-k}-u^{n+k+1})\sum_{t=0}^\infty u^t x^t$, on voit que

$$a_{m+n,0}(x) = a_{m,0}(x)a_{n,0}(x) + (x+1)\sum_{k=1}^{\min(m,n)} a_{m,k}(x)a_{n,k}(x)$$

En d'autres termes, comme annoncé, la matrice \mathcal{H} , c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} P_0(x) & P_1(x) & P_2(x) & P_3(x) & \dots & P_n(x) \\ P_1(x) & P_2(x) & P_3(x) & P_4(x) & \dots & P_{n+1}(x) \\ P_2(x) & P_3(x) & P_4(x) & P_5(x) & \dots & P_{n+2}(x) \\ P_3(x) & P_4(x) & P_5(x) & P_6(x) & \dots & P_{n+3}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(x) & P_{n+1}(x) & P_{n+2}(x) & P_{n+3}(x) & \dots & P_{2n}(x) \end{pmatrix}$$

n'est autre que le produit de \mathcal{A} , c'est-à-dire de

$$\begin{pmatrix} a_{0,0}(x) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,0}(x) & (x+1)a_{1,1}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,0}(x) & (x+1)a_{2,1}(x) & (x+1)a_{2,2}(x) & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,0}(x) & (x+1)a_{3,1}(x) & (x+1)a_{3,2}(x) & (x+1)a_{3,3}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,0}(x) & (x+1)a_{n,1}(x) & (x+1)a_{n,2}(x) & (x+1)a_{n,3}(x) & \dots & (x+1)a_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

par sa "presque transposée \mathcal{B} , aux facteurs (x+1) près", c'est-à-dire par

$$\begin{pmatrix} a_{0,0}(x) & a_{1,0}(x) & a_{2,0}(x) & a_{3,0}(x) & \dots & a_{n,0}(x) \\ 0 & a_{1,1}(x) & a_{2,1}(x) & a_{3,1}(x) & \dots & a_{n,1}(x) \\ 0 & 0 & a_{2,2}(x) & a_{3,2}(x) & \dots & a_{n,2}(x) \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,3}(x) & \dots & a_{n,3}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

C'est le cas particulier x=0 qui restitue le résultat antérieur, puisque $P_a(0)=c_a.$

Comme

$$P_a(1) = \left(\begin{array}{c} 2a \\ a \end{array}\right),$$

on retrouve aussi gratuitement un autre théorème amusant.

Le cas x=-1 régurgite une trivialité, puisque nous savons que $\forall a\geqslant 1,\ P_a(-1)=0\ldots$

Quant à la formule d'inversion, elle devient évidemment

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+i} \left(\left(\left. k-1+i \atop k-1-i \right. \right) x + \left(\left. k+i \atop k-i \right. \right) \right) a_{j,k}(x) = \delta_{i,j}.$$

6. Pour ne pas conclure...

On voit que cette situation, riche en interprétations diverses est porteuse d'une infinité virtuelle de formules (d'intérêt très variable, je le concède sans peine). Comme dans le *jardin extraordinaire* de Trenet, *il suffit pour ça d'un peu d'imagination*. La promenade est à vous maintenant!

Bibliographie

- [1] C. Radoux, Démonstration élémentaire d'une formule relative aux nombres de Catalan, *Mathématique et Pédagogie*, n° 100, 25–28, 1995.
- [2] C. Radoux, Nombres de Catalan généralisés, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, Volume 4, n° 2, 289–292, 1997.

On trouvera, bien sûr, une mine de théorèmes relatifs aux nombres de Catalan dans le livre de François Jongmans édité par la SBPMef (à lire absolument par tous les passionnés d'histoire des sciences!).

Adresse de l'auteur :

Christian RADOUX

Université de Mons-Hainaut Faculté des Sciences Avenue Maistriau 15 7000 Mons

Les tribulations de l'équation du second degré

M. Lartillier,

Ce petit texte est un résumé de l'exposé du Congrès de Dinant. Un texte plus complet, accompagné des documents originaux qui illustraient cette conférence, paraîtra prochainement comme dossier CedOP (U.L.B.).

1. Babylone (-2500)

Un document important à plus d'un titre : la tablette BM13901 (un des plus anciens textes babyloniens à caractère mathématique) est consacrée à des problèmes qui se résolvent à l'aide "d'équations du second degré". Sous forme d'énoncés suivis d'une méthode de résolution "pas à pas", cette tablette nous fait découvrir :

- 1) différentes méthodes adaptées aux différents types "d'équations",
- 2) une technique que l'on pourrait qualifier de "complétion des carrés", sans doute d'après une connaissance des "produits remarquables" $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ et, quoique fort discuté $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Un exemple : l'équation proposée est

$$x^2 + 1x = 0;45.$$

Solution:

$$1(1/2) = 0;30$$

 $(0;30)^2 = 0;15$

$$0; 15 + 0; 45 = (0; 60) = 1$$

 $1 = (x + 0; 30)^2$
 $x + 0; 30 = 1$
 $x = 0; 30$ (c'est le côté).

De manière contemporaine, l'équation est (1)

$$x^2 + 1x = 0,75.$$

Le scribe va "compléter" le premier membre afin d'obtenir un carré.

L'équation est du type

$$x^2 + px = q$$
 avec p, q positifs;

d'où la démarche:

$$x^{2} + 2(p/2)x = q$$

$$x^{2} + 2(p/2)x + (p/2)^{2} = q + (p/2)^{2}$$

$$(x + (p/2))^{2} = (4q + p^{2})/4.$$

La quantité du second membre étant bien sûr positive, le scribe recherche dans une table de carrés, la racine carrée positive $r = \sqrt{(4q + p^2)/4}$ et enfin,

$$x = r - (p/2).$$

Autre problème : il s'agit cette fois de l'équation

$$0;40x^2 + 0;20x = 0;20.$$

Solution:

$$0; 40 \times 0; 20 = 0; 13, 20$$

$$0; 20 \times (1/2) = 0; 10$$

$$(0; 10)^2 = 0; 1, 40;$$

1. Le système babylonien étant mixte (à la fois décimal et sexagésimal), il vient

$$0;45 = \frac{45}{60} \to 0,75$$
 en décimal
$$1 = \frac{60}{60} \to 1 \text{ en décimal}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{30}{60} = 0;30 \to 0,50 \text{ en décimal}$$

$$(0;30)^2 = \frac{15}{60} = 0;15 \to 0,25 \text{ en décimal}$$

d'où 0; 15 qui est le carré de 0; 30 d'où 0; 40x = 0; 20

en multipliant par l'inverse de 0;40, qui est 1;30, il vient 0;30 qui est le côté.

L'équation était cette fois du type :

$$ax^2 + bx = c$$
 avec $a, b, c > 0$

et le coefficient principal a étant distinct de 1 dans la résolution de cette équation, le scribe sera donc amené à effectuer au moins une division, c'està-dire à multiplier par l'inverse d'un nombre et donc de recourir à une table d'inverses.

Le scribe usera d'une astuce pour éviter autant que possible l'opération "division" : il multiplie tous les termes de l'équation par le coefficient principal

$$ax^{2} + bx = c$$

$$a.ax^{2} + a.bx = a.c$$

$$(ax + (b/2))^{2} = ac + (b/2)^{2} = r^{2}$$

$$a.x = r - (b/2).$$

Il ne reste plus au scribe qu'à effectuer une seule division par a (cette astuce du scribe babylonien est à mémoriser, car nous aurons l'occasion d'y revenir plus tard!).

Il est à noter que TOUS les problèmes traités n'admettent jamais qu'une et une seule racine "réelle" (d'ailleurs toujours positive!).

2. Grèce 1.

Dans le livre II des Eléments d'EUCLIDE, d'aucuns ont cru reconnaître une vision géométrique de l'algèbre : "l'algèbre géométrique" des Grecs. En effet, les théorèmes peuvent souvent se traduire en équations du second degré. La technique de démonstration adoptée par EUCLIDE et sans doute par ses prédécesseurs consiste en "l'application des aires". PROCLUS dit d'ailleurs :

"ces notions sont anciennes et remontent aux premiers pythagoriciens".

Il est intéressant de se pencher sur la terminologie. Trois types d'applications des aires :

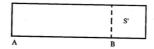
"L'application simple" ou "parabole"
 A un segment de droite donné (A, B), on va appliquer un rectangle d'aire donnée S.



2) "L'application par défaut" ou "ellipse" On construit sur un segment donne (A, B) un parallélogramme ou un rectangle d'aire donnée S avec un défaut d'aire S'.



3) "L'application par excès" ou "hyperbole" On construit sur un segment donné (A,B) un parallélogramme ou un rectangle d'aire donnée S avec un excès d'aire S'.



On ne peut manquer de reconnaître trois appellations bien connues mais dans un tout autre contexte : parabole, ellipse, hyperbole en théorie des coniques.

Il est ici important de rappeler que les mathématiciens grecs dont EU-CLIDE et ARCHIMEDE, ne voyaient les sections coniques que comme sections par un plan perpendiculaire à une génératrice de trois sortes de cône :

"la section de cône acutangle" (encore appelée "courbe du bouclier" par EUCLIDE) "notre ellipse"

"la section de cône d'angle droit" "notre parabole"

"la section de cône obtusangle" "notre demi-hyperbole".

Il faudra attendre APOLLONIUS de Perge (-262,-190) pour, à l'aide de trois propositions, relatives aux sections d'un double cône par un plan quelconque :

- reconnaître les trois coniques sur un même cône
- reconnaître les deux branches d'une hyperbole
- par application des aires, donner la terminologie usuelle des trois coniques

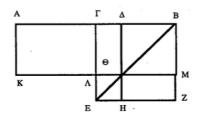
(dans le dossier CedOP, nous donnerons les trois propositions ainsi que leur traduction d'APOLLONIUS).

Revenons aux "équations du second degré" ou du moins ce qui, chez EUCLIDE, semble en tenir lieu : Livre II Th.5.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite placée entre les sections, est égal au quarré de la moitié de la droite entière (trad. de F. PEYRARD 1819).

Il faut donc démontrer que :

Aire sur $A\Theta$ + Aire sur ΛH = Aire sur ΓZ .



Aire sur $A\Lambda = \text{Aire sur } \Gamma M$ Aire sur $\Gamma\Theta = \text{Aire sur } \Theta Z$

> Aire sur $\Gamma M = \text{Aire sur } \Delta Z$ Aire sur $A\Lambda = \text{Aire sur } \Delta Z$

Aire sur $A\Theta = \text{Aire sur } \Gamma\Theta + \text{Aire sur } \Delta Z$ Aire sur $A\Theta = \text{Aire sur } \Lambda H = \text{Aire sur } \Gamma Z$.

Si l'on pose $\ell(AB)=a$ et $\ell(DB)=x$, alors le problème revient à trouver x tel que $ax-x^2=b^2$ ("aire du gnomon"); une application par défaut d'un rectangle sur un segment de longeur a.

Livre II Th. 6.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Si on pose $\ell(AB) = a$, alors le problème revient à appliquer avec excès le rectangle d'aire donnée b^2 sur le côté a donné; d'où l'équation $ax + x^2 = b^2$.

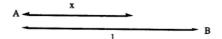
Enfin, EUCLIDE introduit le théorème II 11 qui lui permet de démontrer le théorème constructif doit il usera dans la construction des pentagones, décagones, icosaèdres et dodécaèdres.

Livre II Th. 11.

Couper une droite donnée de sorte que le rectangle construit sur l'entière et un segment est égal au carré sur le segment restant.

Livre VITh. 30.

Une ligne droite est coupée en "Moyenne et Extrême raison" quand la droite est au grand segment comme le grand est au petit.



On a
$$\ell/x = x(\ell - x)$$
; d'où $\ell(\ell - x) = x^2$ ou $x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$

dont la racine positive est

$$\ell(-1+\sqrt{5})/2$$

ou en modifiant quelque peu, $a=x,\ b=\ell-x,\ a+b=\ell,$ il vient

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

ou encore

$$1 + (b/a) = a/b$$

ou en notant Φ le rapport (a/b), il vient

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0;$$

d'où la racine

$$\Phi = (1 + \sqrt{5})/2.$$

On reconnaît la

Proportio Divina (Fra Luca PACIOLI di Borgol 1509), Sectio Divina (KEPLER 1596), Sectio Aurea (Leonardo da VINCI 1509), le "célèbre" Nombre d'Or.

3. Grèce 2.

A côté de la vision géométrique des Eléments, deux Mathématiciens grecs, au moins, résolvent des problèmes où le traitement est sans discussion du type "équations du second degré" :

HERON d'Alexandrie (?-62)

Dans Geometrica 24,3, on peut lire:

Etant donné un carré dont la somme de son aire et de son périmètre est 896, trouvez son côté.

Cet énoncé est suivi d'une résolution, étape par étape :

"la moitié de 4 : 2"

"le carré ajouté 4 + 896; d'où 900"

"la racine carré 30"

"on retranche 2:28"

"c'est le côté du carré".

En écriture temporaine, cela donne : $x^2 + 4x = 896$

$$x^{2} + 2(4/2)x = 896$$

$$x^{2} + 2(4/2)x + 4 = 900$$

$$(x + (4/2))^{2} = 900$$

$$x + (4/2) = 30$$

$$x = 28.$$

Bien sûr, la seule racine positive est considérée!

Un autre problème traduit en notations contemporaines :

$$(11/14)d^2 + (29/7)d = 212.$$

Cette fois, le coefficient principal n'est PAS un!

Voici les démarches effectuées par HERON : il mutliplie par 154

$$121d^2 + 58 \times 11d = 212 \times 154$$

d'où $(11d)^2 + 58 \times 11d = 212 \times 154$.

HERON a multiplié toute son équation par 154 pour

- (1) éliminer les fractions
- (2) diminuer le nombre de divisions dans la suite de la résolution.

Cette technique n'est pas sans rappeler la technique du scribe babylonien et susciter de nouvelles questions à l'historien des sciences : y a-t-il une influence babylonienne sur la mathématique grecque?

Et si oui, à partir de quelle époque et dans quelle proportion?

DIOPHANTE d'Alexandrie (?-250)

Nous allons retrouver chez DIOPHANTE à la fois les mêmes problèmes et les mêmes techniques mais avec cette fois un essai de symbolisation :

DIOPHANTE dit qu'il FAUT ramener tout problème du second degré à un des trois types suivants :

- $(1) mx^2 + px = q$
- $(2) mx^2 = px + q$
- $(3) mx^2 + q = px;$

les trois types babyloniens que l'on va retrouver encore pendant long-temps!

Il n'y a pas de méthode unique pour résoudre les équations du second degré!

De plus, nous dit DIOPHANTE, il FAUT multiplier toute l'équation par le coefficient principal m si celui-ci n'est pas unité.

Dans l'Arithmetica de DIOPHANTE, les équations du second degré sont :

$$IV.22 x^2 = 4x - 4$$

$$IV.31 325x^2 = 3x + 18$$

$$VI.6 84x^2 + 7x = 7$$

$$VI.7 84x^2 - 7x = 7$$

$$VI.9 630x^2 - 73x = 6$$

$$VI.8 630x^2 + 73x = 6.$$

4. L'Inde

Des traces d'"algèbre" en tant que calcul avec des inconnues apparaissent déjà en Inde vers -300.

avijakta ganita "science du calcul des inconnues"

est opposé à

vijakta ganita "science du calcul des connues ou arithmétique" ; terminologie à laquelle succèdera :

bîjaganita "élément d'analyse - science du calcul",

le mot

yavat-tavat abrégé en ya

signifie l'"autant que" et représente notre inconnue x, son carré

yavat-varga abrégé en yava.

Apparition des coefficients négatifs : si a est un nombre positif, alors $\overset{\circ}{a}$ représente le négatif (-a)

Le nombre absolu ou terme indépendant de l'équation se dit

rupa abrégé en ru

(notons que rupa donnera la monnaie indienne "roupie", cette remarque est loin d'être fortuite!).

L'écriture des équations ou méthode

nyâsa

consiste en l'écriture sur deux lignes (les deux membres) de l'équation.

Ainsi, yava 0 ya 10 ru 8 représente $0x^2 + 10x - 8$ yava 1 ya 0 ru 1 $1x^2 + 0x + 1$ ou

 $10x - 8 = x^2 + 1.$

On notera l'économie du signe d'égalité dans cette disposition!

La résolution des équations du second degré consiste en la

 ${\bf MADHYAMAHARANA\ Madhyama\ =\ moyen}$

Aharana = élimination ou destruction;

"élimination du moyen terme".

BRAHMAGUPTA (598-665)

Règle pour l'élimination du "moyen terme" :

"Mettre le nombre absolu du côté opposé à celui du carré et de l'inconnue simple en soustrayant. Au nombre absolu multiplié par quatre fois le coefficient du carré, ajouter le carré du coefficient du terme moyen, la racine carrée du même moins le coefficient du terme moyen, étant divisée par deux fois le coefficient du carré, est la valeur du terme moyen".

$$yava\ 1\ ya\ \ \overset{\circ}{10}\ ru\ 0$$

 $yava\ 0\ ya\ 0\ ru\ 9$
 $9\times 4\times 1=36$
 $36+\overset{\circ}{(10)}=64$
 $8-\overset{\circ}{10}=18$
 $18/(2\times 1)=9$.

Plus tard, le grand mathématicien BHASKARA (1114-1150) usera d'autres règles et surtout, acceptera, dans certains problèmes du second degré, la présence de deux racines (réelles)

$$((1/8)x)^2 + 0x + 12$$
$$0x^2 + 1x + 0.$$

Après quelques transformations, il vient

$$(x - 32)^2 = 16^2.$$

Ici, 16 < 32 et les deux solutions 16 et 48 sont acceptées par BHASKARA.

5. L'équation du second degré dans le Monde Arabe

Au carrefour de la mathématique grecque et de la mathématique indienne, les mathématiciens arabes vont hériter des deux formes de pensée mathématique :

- de l'Inde : la numérotation de position, l'écriture des chiffres et l'algèbre (celle-ci avec une légère perte d'ailleurs!)
- de la Grèce, le souci des démonstrations rigoureuses par voie géométrique.

Mohammed ibn Musa al-KWARISMI (780-850)

Par "al-gabr" et "muqabala", on DOIT ramener toute équation quadratique à 6 formes canoniques :

- tous les termes doivent apparaître comme des grandeurs additives
- le coefficient du "trésor" (coefficient de x^2) DOIT être égal à l'unité et pour ce faire :
- IL FAUT DIVISER toute l'équation par le coefficient de x^2 .

Notre enseignement a bien hérité de l'algèbre d'al-KWARISMI (pourquoi ne pas reprendre la technique du babylonien?)!

Les six types d'équations :

- (1) "des carrés égalent des choses" : $ax^2 = bx$
- (2) "des carrés égalent des dirhams" : $ax^2 = c$
- (3) "des choses égalent des dirhams" : bx = c
- (4) "des carrés et des choses égalent des dirhams" : $ax^2 + bx = c$
- (5) "des carrés et des dirhams égalent des choses" : $ax^2 + c = bx$
- (6) "des choses et des dirhams égalent des carrés" : $bx + c = ax^2$.

A côté de ses "algorithmes", al-KWARISMI fournit une, parfois deux, justifications géométriques inspirées des 5,6 du livre II des Eléments d'EUCLIDE : lorsqu'une équation admet deux racines opposées, il ne retiendra que la seule racine positive!

Tout est énoncé en "phrases" : il n'y a aucun symbolisme comme en Inde!

Après, al-KWARISMI, Tabit ibn QURRA (826-901) va montrer que les équations du second degré se ramènent à trois types et que les propositions d'EUCLIDE II5 et II6 suffisent pour les résoudre.

6. Des techniques arabes à la symbolisation contemporaine

Les techniques que l'on peut qualifier d'indo-arabes vont peu à peu pénétrer l'Occident au cours du Moyen Age et progressivement donner naissance à une écriture symbolique qui fut jusqu'il y a peu considérée comme l'algèbre (classique).

Chiffres indo-arabes, recherche d'écriture symbolique, fusion des "trois cas" de résolution des équations du second degré en un seul, tels seront les progrès apportés par cette période dans le sujet qui nous occupe.

Leonardo FIBONACCI (1180-1250)

"Primus enim modus est, quando census et radices equantur numero : ... Verbi gratia : duo census, et decem radices equantur denariis 30" : il s'agit de l'équation

$$2x^2 + 10x = 30$$

(notons la présence de denariis (deniers), monnaie du Moyen Age : cf rupa-dirham).

Les techniques et les exemples numériques sont repris au traité d'al-KWARISMI ou au travaux d'Umar al HAYYAM et des justifications géométriques à l'aide d'EUCLIDE II5,6 et VI28,29.

Nicolas CHUQUET (1490)

.3.2 p. 12.0 egault a. 12.1 ... reste .0. donc R2.0. adioustee ou soustraicte avec .2. ou de .2. monte .2. qui est le nobe. que l'on demande :

un début de symbolisme et surtout l'acceptation du "zéro" ... comme nombre à part entière!

L'équation étant

$$3x^2 + 12 = 12x$$

dont le "discriminant" vaut 144 - 144 = 0.

Lucas PACIOLI (1494)

Si res et census numero coequantur a rebus dimiido sumpto censum producere debes, addereque numero, cuius a radice totiens tolle semis rerum, census latusque redibit.

Si une inconnue et son carré valent un nombre, après avoir pris la moitié des inconnues, tu dois le mettre au carré et l'ajouter au nombre;

à la racine de cela, enlève la moitié des inconnues;

arrivera le carré et son côté

(on retrouve ici census pour le carré, radix pour racine, latus pour le côté d'un carré).

Michael STIFEL (1486-1567)

Moine Augustin, comme Luther dont il ne tardera pas à partager les idées de réforme, ce mathématicien va connaître une vie assez mouvementée : partisan de Luther, adepte de numérologie, prédicateur quant à la fin du monde, il devra s'exiler à plusieurs reprises.

Au sujet des équations du second degré, M. STIFEL a l'impression de trouver - enfin - la méthode unique de résolution : c'est la célèbre règle AMASIAS. Hélas! La règle N'est PAS unique puisqu'il faut, dans certains cas,

ajouter et dans d'autres soustraire.

CARDANO (24-IX-1501–21-IX-1576)

S'inspirant de la règle AMASIAS de STIFEL, il va donner la règle suivante dans l'Ars Magna en 1545:

> Querna, da bis Nuguer, admi Reguan, minue dami.

Querna pour le type

$$x^2 = ax + N$$

da bis, car dans la résolution

$$x = \sqrt{(a/2)^2 + N} + (a/2),$$

on DOIT ajouter deux fois.

Nuquer pour le type

$$N = x^2 + ax$$

admi, car dans la résolution

$$x = \sqrt{(a/2)^2 + N} - (a/2),$$

on DOIT ajouter puis soustraire.

Requan pour le type

$$ax = x^2 + N$$

minue dami, car dans la résolution

$$x = \pm(\sqrt{(a/2)^2 - N}) + (a/2),$$

on DOIT soustraire puis ajouter OU soustraire.

Notons que CARDANO signale que si $(a/2)^2 - N$ n'est pas positif, alors le problème est faux!

Rafaele BOMBELLI (20-1-1526/1572)

Il écrit en 1572 au sujet des équations du second degré :

L'inconnue x est notée par 1, son carré x^2 par 2, p pour le signe "+", m pour le signe "-".

Toujours trois cas à traiter! Mais, pour la première fois depuis BHASKARA II, la mise sous forme canonique sert de justification.

7. Un Géant : Simon STEVIN (1548-1620)

Comme l'a brillamment montré H. BOSMANS, relayé par R. DE-PAU, le Brugeois Simon STEVIN, en plus d'une notation très élégante pour l'époque, inspirée de R. BOMBELLI, va réaliser pour les équations du second degré, l'exploit tant attendu : la réduction à un seul type de résolution.

STEVIN sera d'ailleurs parfaitement conscient de sa découverte. Après avoir rappelé le moyen mnémotechnique de CARDAN, il dit :

"Mais nous démontrerons une seule manière par laquelle, sans varier d'une syllabe, l'opération sera en toutes trois la même."

En effet, la seule différence dans la résolution des trois types d'équations du second degré consiste à soit ajouter, soit soustraire la moitié du terme moyen.

Ainsi, dans $x^2 = bx + c$,

$$x = (\sqrt{(b/2)^2 + c}) + (b/2)$$

(on ajoute!), alors que dans $x^2 + bx = c$,

$$x = (\sqrt{(b/2)^2 + c}) - (b/2)$$

(on soustrait!).

STEVIN dit, dans le second cas,

$$x = (\sqrt{(b/2)^2 + c}) + (-b/2)$$

(on ajoute!).

L'astuce est de taille pour l'époque :

Soustraire un nombre a = ajouter son opposé (-a); c'est la première fois en Occident que les nombres négatifs sont utilisés en ce sens.

8. Epilogue

L'histoire va, à présent, s'accélérer.

Les notations vont devenir ce qu'elles sont aujourd'hui, les équations du second degré, ramenées à un seul type, n'attendent plus que l'écriture définitive de "leurs formules de résolution".

Dans l'ALGEBRE de MacLAURIN parue en 1748, on peut lire :

- 1) Tansportez tous les termes qui contiennent l'inconnue dans un membre de l'équation et tous les termes connus dans l'autre.
- 2) Si le carré de l'inconnue est multiplié par quelque quantité, divisez tous les termes de l'équation par cette quantité.
- 3) Formez le carré de la moitié de la quantité qui multiplie l'inconnue simple, ajoutez-le dans l'un et l'autre membre de l'équation et par ce moyen, le membre qui renferme l'équation sera un quarré parfait.
- 4) Tirez la racine quarrée de l'un et l'autre membre, qui, dans l'un, fera toujours l'inconnue avec la moitié de la quantité qui multipliait l'inconnue simple; de sorte qu'en transportant cette moitié, on aura la valeur de l'inconnue.

Il restait à un tout grand mathématicien le soin d'écrire un texte lisible, clair et définitif : EULER dans son traité d'algèbre (1748), rapidement traduit en français et en anglais, dira

notre équation xx + px = q: ... soit négativement, nous aurons pour x deux valeurs exprimées de cette manière :

$$x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}.$$

642.

Voilà la formule qui contient la règle, d'après laquelle toutes les équations du second degré peuvent être résolues, & il sera bon d'en imprimer la subtance dans la mémoire, afin qu'on n'ait pas besoin de répéter à chaque fois toute l'opération que nous venons de faire. On pourra toujours ordonner l'équation, de façon que le quarré pur xx se trouve d'un seul côté, & qu'ainsi l'équation ci-dessus ait la forme xx = -px + q, où l'on voit sur-le-champ que $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$.

Une bibliographie détaillée sera fournie dans le dossier CEdOP.

Adresse de l'auteur :

M. LARTILLIER.

U.R.E.M. (U.L.B.) avenue J. Sibélius 16/25 1070 BRUXELLES

Rapport de la visite en République et Canton du Jura (7 – 8 – 9 avril 1997)

M. Fremal, G. Noël et R. Scrève,

1. Préambule

Pour la deuxième année consécutive, une délégation de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française a eu la chance de pouvoir séjourner durant trois jours en République et Canton du Jura, suite à une invitation des autorités officielles de ce canton suisse. Cette invitation s'inscrit dans le cadre des contacts établis depuis plusieurs années entre notre Société et les mathématiciens de la République et Canton du Jura. C'est ainsi que les habitués de nos congrès connaissent et apprécient les interventions de nos collègues jurassiens, notamment de M. Charles Félix, coordonnateur de l'enseignement des mathématiques en République et Canton du Jura.

Cette année, la délégation de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française était composée de G. Noël, Président, M. Fremal, Secrétaire et R. Scrève, Trésorier. Elle a été accueillie à Porrentruy par M. Charles Félix et MM. François Laville, Chef de Service au Service de l'Enseignement et Stéphane Berdat, Chef de Service au Service de la Coopération.

Au cours des trois journées de visite, la délégation belge a eu l'occasion de visiter plusieurs écoles et institutions. On en trouvera un rapport dans les lignes qui suivent. Le lecteur est invité à relire au préalable le rapport établi par la délégation qui s'était rendue au Jura en 1996, rapport publié dans le numéro 109 de *Mathématique et Pédagogie*, où il trouvera notamment un exposé de l'organisation de l'enseignement au Jura ainsi que des indications concernant les grilles horaires et les programmes de mathématique.

2. Le programme de la visite

Vu la composition de la délégation de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, une importance particulière a été

accordée à la question de la formation des enseignants. Ce sujet a été abordé lors d'une visite à l'Institut Pédagogique de Porrentruy qui est chargé de cette formation.

Un autre établissement d'enseignement supérieur a été visité : l'École d'Ingénieurs de Saint-Imier. La délégation a également eu le plaisir de rencontrer un "vieil" ami, Alain Valette, professeur à l'Université de Neuchâtel, ancien membre du Conseil d'Administration de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française et bien connu de nombreux membres de notre Société. Alain nous a dressé rapidement une comparaison du fonctionnement de l'Université de Neufchâtel avec celui d'une université belge.

Des visites dans des écoles secondaires n'ont pas été négligées. C'est ainsi que la délégation a pu assister à des leçons au niveau du secondaire inférieur au Collège de Delémont, à l'École Secondaire des Breuleux et au Collège Thurmann et au niveau du secondaire supérieur au Lycée Cantonal de Porrentruy.

Enfin, la visite s'est achevée par la présentation par G. Noël, d'un logiciel destiné à être utilisé à l'occasion de l'initiation à la géométrie de l'espace. Cette présentation a eu lieu devant un groupe constitué essentiellement d'enseignants du secondaire supérieur.

3. La formation des maîtres

L'Institut pédagogique est chargé de la formation pédagogique des maîtres de tous les niveaux : écoles enfantine, primaire, secondaire inférieure, secondaire supérieure. Il accueille donc les futurs enseignants après que ceux-ci aient achevé un cycle de formation générale, en l'occurrence le baccalauréat (dénommé ici la "maturité") ou un équivalent pour les futurs maîtres d'école enfantine ou d'école primaire, une demi-licence dans trois branches (dont au moins une parmi les trois branches de base : français, allemand, mathématique) pour les futurs maîtres du secondaire inférieur et une licence pour ceux du secondaire supérieur. Des candidats n'ayant pas les diplômes requis peuvent également être admis sous certaines conditions.

La formation pédagogique dure deux ans pour les maîtres des écoles enfantine et primaire, un an pour les autres. Une particularité importante de l'Institut Pédagogique est que l'accès aux filières "École enfantine" et "École primaire" est limité : les candidats ne doivent pas seulement

posséder les diplômes requis, ils doivent aussi être sélectionnés à la suite d'un concours (¹). La raison de cette limitation réside dans des contraintes de places dans l'école, lors de l'organisation des stages professionnels, ainsi que dans la volonté d'attribuer un emploi, au moins partiel, à tous les enseignants diplômés.

Le concours d'admission ne porte pas sur la compétence de fond, supposée acquise à la suite de la formation générale. Il est constitué de tests d'aptitude à enseigner. Connaissant la difficulté d'évaluer ces aptitudes avant tout stage professionnel, la délégation de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française s'est beaucoup intéressée au contenu de ces tests qui, pour éviter tout bachotage, ne sont pas entièrement du domaine public.

Ce sont en fait cinq tests différents :

- Un test de personnalité est destiné à mesurer la qualité des relations maître-élève.
- Un test de méthodes de travail évalue l'aptitude à consulter un document et répondre en un temps limité à des questions s'y rapportant.
- 3. Un **test de logique visuelle** est d'un type classique parmi les tests psychologiques : "trouver l'intrus parmi ..." ou "quelle est la figure qui vient après ...".
- 4. Un **test de compréhension de texte** au cours duquel le candidat doit lire un texte et ensuite répondre à un questionnaire portant sur la compréhension ponctuelle et globale du texte.
- 5. Un **test oral** a pour objectif de mesurer l'aisance orale et gestuelle, la capacité à communiquer.

Les responsables de l'Institut Pédagogique de Porrentruy ne semblent pas considérer la forme de ce concours comme absolument définitive. Ils n'excluent pas une évolution qui pourrait par exemple amener un étalement du concours dans le temps de façon que certains des tests puissent préparer l'observation des candidats en face d'élèves.

^{1.} Il n'est pas impossible qu'à l'avenir, ce système soit étendu aux autres filières.

4. La formation des ingénieurs

Bien que la Confédération Helvétique ne soit pas (encore?) membre de l'Union Européenne, l'influence de celle-ci s'y fait déjà sentir puisque des mesures ont été prises en vue d'harmoniser les formations supérieures non universitaires avec les formations européennes correspondantes. C'est ainsi que, sans que les frontières cantonales constituent des entraves, les écoles supérieures sont en cours de restructuration, par leur regroupement en "Hautes Écoles" qui devront joindre des activités de recherche à leurs activités usuelles d'enseignement. Autant dire que la délégation de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française se trouvait presque en terrain familier!

L'École d'Ingénieurs de Saint-Imier sera donc incorporée dès cette année dans une Haute École Spécialisée. Elle devrait conserver ses sections d'électronique, d'informatique, de microtechnique et de mécanique (complétées par divers post-graduats).

Tournant notre attention vers les cours de mathématique, notamment dans la section informatique, nous constatons qu'ils représentent 44% du volume horaire de la 1^{re} année, 20,6% du volume de la 2^e année et disparaissent en 3^e année. La mathématique est donc une formation de base, qui fournit au futur ingénieur "des notions et des outils". Elle est enseignée par des ingénieurs. Les sujets abordés sont l'algèbre, la mathématique numérique (y compris les probabilités et statistiques), la géométrie analytique et l'analyse. Ces enseignements sont ouverts à l'utilisation des moyens modernes de calcul, ce qui est bien normal dans une section informatique!

Le fait que les mathématiques aient un côté utilitaire ne les empêche pas d'être parfois des mathématiques très modernes. Ainsi, l'école réalise des processeurs basés sur la théorie des ensembles flous et la logique floue, des sujets datant d'au maximum une vingtaine d'années et dont les applications se multiplient, y compris dans des appareils photos ou des lave-vaisselle.

Pour en savoir plus sur l'École d'Ingénieurs de Saint-Imier, consultez son site Web : http ://www.eisi.ch

5. Les leçons dans les écoles secondaires

Dans le cadre du présent texte, il est très difficile de faire une description d'une leçon de mathématique qui permette d'apprécier pleinement à la fois l'environnement matériel et intellectuel du travail scolaire, la matière enseignée, l'activité des élèves en classe, l'activité qui prolonge la précédente à domicile, la façon dont l'efficacité de la leçon est évaluée, etc. Nous nous contenterons donc de donner quelques indications sur les sujets traités, et de relever — de façon sans aucun doute arbitraire — quelques points que nous avons particulièrement remarqués.

Parmi les sujets traités, relevons les suivants :

Au secondaire inférieur :

- une introduction, par essais et erreurs aux équations du premier degré (3^e année, niveau B (²))
- la découverte de l'aire du losange, par manipulation de matériel (1^{re} année, niveau C)
- l'aire d'un polygone simple par le théorème de Pick (1^{re} année, niveaux mélangés)
- une activité sur les nombres auto-descriptifs (1^{re} année, niveaux mélangés)
- une introduction à la programmation en LOGO (2^e année, option)
- la division de polynômes (3^e année, niveau A)

Au secondaire supérieur :

- une leçon du cours à option de "Mathématiques appliquées", établissant la stabilité du cristal de NaCl (6° année).
- une leçon de probabilités, dans une classe de la filière littéraire (6° année).

Une chose frappe dès l'abord quand on pénètre dans les écoles visitées : l'extrême propreté des locaux, et le respect qu'ont les élèves pour ceux-ci. Nous avons été stupéfaits en constatant qu'il n'est pas rare que les élèves ôtent leurs chaussures en entrant dans l'école et, soit circulent en chaussettes (blanches!), soit enfilent des pantoufles. Par delà l'anecdote, des faits de ce genre témoignent d'un état d'esprit qui devient malheureusement rare chez nous. Dans le même registre, ajoutons que les classes de mathématique sont équipées de façon systématique du matériel nécessaire pour dessiner

^{2.} Pour la définition des niveaux, voir le compte-rendu de la délégation précédente dans Math'ematique et P\'edagogie N° 109.

au tableau, sans qu'il soit nécessaire de mettre ce matériel sous clé. D'une façon générale, les enseignants disposent de tout le matériel qui peut leur être utile.

A noter aussi que les écoles sont équipées d'une bibliothèque importante. En particulier, la bibliothèque du lycée de Porrentruy est tout à fait remarquable : non seulement elle a des collections importantes d'ouvrages et de revues, mais elle est ouverte en permanence et une partie des locaux est accessible aux élèves qui peuvent y travailler, ou simplement s'y détendre. Si nous en jugeons par le nombre d'élèves que nous avons pu y voir, une telle organisation est appréciée et répond à un besoin. Même les écoles du secondaire inférieur sont équipées d'une bibliothèque importante. Nous avons pu nous en rendre compte à l'Ecole Secondaire des Breuleux et au Collège de Delémont.

Si nous en venons aux questions relatives à l'enseignement lui-même, il est clair que nos collègues jurassiens du secondaire inférieur s'interrogent actuellement sur la répartition des élèves en classes de niveaux. Certains estiment qu'il y a là un risque de créer des ghettos et craignent que certains élèves restent indûment bloqués au niveau C (le plus faible) malgré l'existence de procédures prévues pour "remonter" à un niveau supérieur.

Attirons également l'attention sur l'existence au secondaire supérieur du cours à option de mathématiques appliquées (2 périodes par semaine). Il permet de proposer aux élèves de véritables questions interdisciplinaires, le type de question qui n'apparaît que rarement dans le cadre d'un cours de mathématique traditionnel, mais qui est susceptible de montrer vraiment l'intérêt et la puissance de l'outil mathématique.

6. Remerciements

Comme le lecteur a pu le constater en lisant ce qui précède, si la visite de la délégation de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française n'a duré que trois jours, elle a été riche en activités et elle a permis de récolter une masse importante d'informations qui sont encore à méditer et à confronter à nos conceptions usuelles.

Au terme de cette visite particulièrement fructueuse, la délégation manquerait à tous ses devoirs si elle ne soulignait pas la cordialité et l'excellence de l'accueil qui lui a été réservé par tous ses interlocuteurs. Partout elle a ressenti le désir de faire connaître les conditions de vie et de travail au Jura, et d'échanger des informations et des expériences. Nous tenons à remercier chaleureusement nos hôtes.

- MM. Amadio, Boillat, Bourquard, Conus, Gogniat, Jolissaint, Odiet, Surdez, et Venzin qui ont accepté de nous accueillir dans leurs classes du secondaire,
- MM. Etique, Doyen de l'Ecole d'Ingénieurs de St-Imier, Siegrist, directeur de l'Institut Pédagogique et Valette, professeur à l'Université de Neuchâtel, pour les importants entretiens qu'ils nous ont accordés,
- et tout particulièrement M. Charles Félix, coordonnateur de l'enseignement des mathématiques au Jura, qui a organisé la visite et nous a consacré tout son temps durant ces trois jours, veillant à ce que tout se déroule de façon impeccable.

63

Des problèmes et des jeux

C. Festraets.

Racines en folies problème n° 190 de M. et P. n° 112.

Soit n un naturel non nul et $x \in \mathbb{R}$. On définit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n (x+k)$. Pour quelle(s) valeur(s) de n l'équation en x, $f_n(x) = x$, admet-elle une (des) solution(s) rationnelle(s)? réelle(s)?

Je dois des excuses à tous ceux qui ont cherché à résoudre ce problème ; il y a une malencontreuse coquille dans l'énoncé. Vous trouverez l'énoncé correct à la fin de cette rubrique. Tel quel le problème est cependant intéressant. En voici une solution.

Solution - 1ère partie - de M. PONCHAUX de Lille.

Nous allons démontrer successivement que, pour tout naturel n de \mathbb{N}^*

- 1) l'équation $f_n(x)=x$ n'admet qu'une solution réelle et celle-ci est plus grande que 1 ;
- 2) pour qu'un rationnel $\frac{p}{q} > 0$ soit solution de $f_n(x) = x$, il faudrait qu'il soit entier;
- 3) l'équation $f_n(x) = x$ n'a pas de solution dans \mathbb{N}^* .
- 1) Considérons la fonction ϕ_n définie sur $[-1, +\infty[$ par $\phi_n(x) = f_n(x) x.$

Pour tout n de \mathbb{N}^* , $\phi_n(x)$ est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\phi'_n(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{2}(x+n)^{-\frac{1}{2}} - 1$$

$$\phi''_n(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}} - \dots - \frac{1}{4}(x+n)^{-\frac{3}{2}}.$$

On voit que, $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\phi_n''(x) < 0$ et, par conséquent, ϕ_n' est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$. Elle décroît de $\lim_{x \to -1} \phi_n'(x) = +\infty$ à $\lim_{x \to +\infty} \phi'(x) = -1$.

Ainsi, la fonction continue ϕ'_n sur $]-1,+\infty[$ s'annule en un seul point, que nous noterons α , de cet intervalle.

Sur $]-1, \alpha[, \phi'_n(x) > 0$, donc la fonction continue ϕ_n est strictement croissante sur $[-1, \alpha[$.

Sur $]\alpha, +\infty[, \phi'_n(x) < 0$, donc ϕ_n est strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$.

$$\phi_n(-1) > 0.$$

$$\forall x \in]-1, \alpha], \ \varphi_n(x) > \phi_n(-1) > 0.$$

L'équation $\phi_n(x) = 0$ n'a donc pas de solution sur $[-1, \alpha]$.

D'autre part,

$$\lim_{x \to +\infty} \phi_n(x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{n}{x^2}} - 1 \right) = -\infty.$$

Sur $[\alpha, +\infty[$, la fonction continue ϕ_n décroît de $\phi_n(\alpha) > 0$ à $-\infty$. L'équation $\phi_n(x) = 0$ (c'est-à-dire $f_n(x) = x$) admet donc sur $]\alpha, +\infty[$ une solution unique β .

On peut remarquer que, puisque $\phi_n(1) > 0$, la solution β appartient à l'intervalle $]1, +\infty[$.

2) Ecrivons l'équation $f_n(x) = x$ sous la forme

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} - \dots - \sqrt{x+n} = 0.$$

Envisageons le produit des 2^n facteurs différents de la forme

$$\sqrt{x^2} \pm \sqrt{x+1} \pm \sqrt{x+2} \pm \dots \pm \sqrt{x+n}$$
.

Dans le développement de ce produit, chacun des radicaux figure avec un exposant pair, car il est évident que le produit reste inchangé si on remplace $\sqrt{x^2}$ par $-\sqrt{x^2}$ ou chaque $\sqrt{x+i}$ par son opposé $-\sqrt{x+i}$ $(i \in \{1,2,\ldots,n\})$.

En d'autres termes, le produit des 2^n facteurs précédemment décrits est un polynôme en x à coefficients entiers.

De plus, le terme de plus haut degré de ce polynôme est

$$\left(\sqrt{x^2}\right)^{2^n} = x^{2^n}.$$

Son coefficient est 1. Ce qui permet d'affirmer que si un rationnel $\frac{p}{q}$ est un zéro de ce polynôme, alors $\frac{p}{q}$ est un entier.

Donc, si $f_n(x)-x=0$ admet une solution rationnelle, alors cette solution est un entier.

Solution - 2ème partie de B. LOISEAU de Mouscron.

3) Démontrons la propriété suivante : si une somme de racines carrées d'entiers positifs est un entier positif, alors chacune des racines carrées est un entier positif.

Soit
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{q_i} = q$$
 avec $q_1, q_2, \dots, q_n, q \in \mathbb{N}$.

Remarquons que, pour a entier positif, \sqrt{a} s'écrit de manière univoque sous la forme

$$a'\sqrt{p_1}\sqrt{p_2}\ldots\sqrt{p_k}$$

où a' est un entier positif et p_1, p_2, \ldots, p_k sont des nombres premiers distincts.

Par exemple,
$$\sqrt{3780} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} = 6\sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{7}$$

Appelons cette expression la décomposition canonique de \sqrt{a} .

Si tous les $\sqrt{q_i}$ ne sont pas entiers, il existe au moins un nombre premier p intervenant sous la forme \sqrt{p} dans la décomposition canonique de l'un des $\sqrt{q_i}$.

Mettons \sqrt{p} en évidence dans tous les termes où il intervient. On obtient

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \sqrt{p} \cdot A + B = q.$$

A et B étant indépendants de \sqrt{p} .

D'où

$$\sqrt{p} = \frac{q - B}{A}$$

si $\frac{q-B}{A}$ est rationnel, alors $\sqrt{p}\in Q,$ ce qui est impossible ;

si $\frac{q-B}{A}$ est irrationnel, alors $\frac{q-B}{A}$ peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire à coefficients rationnels de racines carrées de nombres premiers

dont aucun n'est égal à p. Ce qui est aussi impossible; si p_1, p_2, \ldots, p_k sont des nombres premiers distincts de p, $\sqrt{p} \notin Q\left(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_k}\right)$

De cette propriété, on peut conclure que si l'équation

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \dots + \sqrt{x+n} = x$$

admet une solution entière, alors chacune des racines carrées doit être un entier.

Pour n=1, l'équation $\sqrt{x+1}=x$, soit $x+1=x^2$ (avec x>0) n'admet pas de solution entière.

Pour $n \geqslant 2$, $\sqrt{x+1}$ et $\sqrt{x+2}$ doivent être entiers, ce qui implique $x+1=y^2$ et $x+2=z^2$ $(x,y,z\in\mathbb{N})$, donc $z^2-y^2=1$, ce qui est impossible car la différence entre deux carrés est au moins égale à 3.

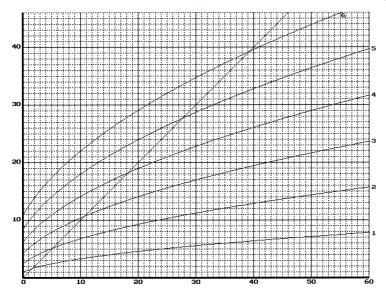
On peut, en fin de compte conclure, que l'équation $f_n(x) = x$ n'admet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, qu'une seule solution et cette solution est un irrationnel plus grand que 1.

Voici, réalisé par J.G. SEGERS de Liège, les graphiques des fonctions f_n pour n = 1, 2, ..., 6. Il a calculé les solutions de l'équation $f_n(x) = x$, à 10^{-5} près, pour ces valeurs de n et formule une hypothèse intéressante.

$$x_1 = 1,61803$$
 $x_2 = 5,15634$
 $x_3 = 10,67507$
 $x_4 = 18,17422$
 $x_5 = 27,65379$
 $x_6 = 39,11378$
 $3,53831$
 $1,98042$
 $1,98042$
 $1,98042$
 $1,98042$

La seconde différence semble être constante.

Un lecteur sera-t-il intéressé par la démonstration de cette hypothèse?



Triangle inscrit | problème n° 191 de M. et P. n° 112.

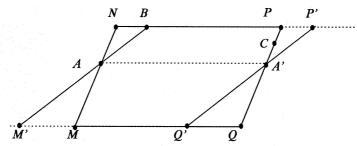
Soit MNPQ un parallélogramme et ABC un triangle dont les sommets appartiennent au bord du parallélogramme. Démontrer que l'aire du triangle ABC est au plus égale à la moitié de l'aire du parallélogramme.

Solution de B. LOISEAU de Mouscron.

1er cas : Si deux sommets appartiennent au même côté du parallélogramme, le résultat est vrai dès que le troisième sommet se trouve dans le parallélogramme (intérieur ou bord). En effet, dans ce cas, si par exemple A,B appartiennent à MN, alors la hauteur h de ABC, relative à AB, est nécessairement inférieure à la hauteur h' de MNPQ, relative à MN, et comme $AB \leqslant MN$, on a $\mathrm{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \ AB \times h \leqslant \frac{1}{2} \ MN \times h' = \frac{1}{2} \ \mathrm{Aire}(MNPQ)$.

2ème cas : Si on n'est pas dans le premier cas, les trois sommets appartiennent à trois côtés consécutifs de MNPQ (ces quatre sommets exclus), disons que A est sur]MN[, B sur]NP[, C sur]PQ[. On peut en outre supposer $PC \leq NA$. La droite (AB) coupe (MQ) en un point M' extérieur au segment]MQ[. Soit A' le projeté de A sur (PQ) parallèlement

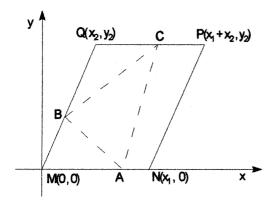
à MQ: A' est intérieur à]PQ[, et PA' = NA. La parallèle à AB passant par A' coupe MQ en un point Q' intérieur à]MQ[et NP en un point P' extérieur à]NP[(formellement, il faudrait le démontrer, en utilisant le fait que l'angle A'AB est strictement inférieur à l'angle A'AN). Ainsi, le parallélogramme M'BP'Q' a la même aire que MNPQ (même base, car MQ = AA' = M'Q', même hauteur, car les deux parallélogrammes sont formés sur les deux mêmes droites parallèles), et le triangle ABC a deux sommets A,B sur un côté de ce nouveau parallélogramme, et un sommet C intérieur à ce dernier (ou sur le côté P'Q', si par hasard NA = PC, c'est-à-dire A = A'). On est donc ramené au premier cas, et la thèse est



prouvée.

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek

Dans un système d'axes rectangulaires (voir figure), les sommets du parallélogramme ont les coordonnées $M(0,0), N(x_1,0), Q(x_2,y_2)$ et $P(x_2+x_1,y_2)$ et les sommets du triangle $A(\alpha x_1,0), B(\beta x_2,\beta y_2)$ et $C(x_2+\tau x_1,y_2)$. En outre, les paramètres α,β et τ varient de 0 à 1.



On sait que l'aire du parallélogramme MNPQ est égale à x_1y_2 . L'aire du triangle est donnée par le déterminant

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 + \tau(x_1 + x_2) - \alpha x_1 & y_2 \\ \beta x_2 - \alpha x_1 & \beta y_2 \end{vmatrix}$$

et, après développement

Aire
$$ABC = \frac{1}{2} y_2 (\tau \beta - \alpha \beta + \alpha) x_1.$$

Il suffira de prouver que

$$(\tau - \alpha)\beta + \alpha \leq 1.$$

Deux cas:

a) $\tau \leqslant \alpha$: on a $(\tau - \alpha)\beta + \alpha \leqslant \alpha \leqslant 1$;

b) $\tau > \alpha$: on a $(\tau - \alpha)\beta + \alpha \leqslant (\tau - \alpha) + \alpha = \tau \leqslant 1$.

Remarque. Si le sommet C appartient au segment [NP], le triangle ABC peut être remplacé par le triangle ABD où D est le point d'intersection de [PQ] ou [MQ] et la parallèle par C à AB.

Bonnes solutions de J. JANSSEN de Lambermont, M. PONCHAUX de Lille et M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre.

Et ainsi de suite ... problème n° 192 de M. et P. n° 112.

On considère la suite $(s) = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$ définie par

$$\begin{cases} s_1 = 1 \\ s_n = s_{n-1} + \frac{1}{s_{n-1}} \ pour \ n > 1. \end{cases}$$

Démontrer que $14 < s_{100} < 18$.

Solution de H. J. SEIFFERT de Berlin.

Nous allons démontrer que

$$\sqrt{2n} < s_n < \sqrt{2n-4} + 1 \text{ pour tout } n \geqslant 4. \tag{1}$$

Puisque $\sqrt{8} \approx 2,828 < 2,9 = \frac{29}{10} = s_4 < 3 = \sqrt{4} + 1,$ (1) est vraie pour n=4.

Supposons que (1) soit vraie pour $n, n \ge 4$.

La fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$, x > 1, est strictement croissante, de sorte que par l'hypothèse d'induction, on a

$$\sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} = f(\sqrt{2n}) < f(s_n) = s_{n+1}$$

$$< f(\sqrt{2n-4}+1) = \sqrt{2n-4}+1 + \frac{1}{\sqrt{2n-4}+1}$$
 (2)

$$4n(n+1) < 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2,$$

d'où

$$2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$$

et après division par $\sqrt{2n}$,

$$\sqrt{2n+2} < \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \tag{3}$$

D'autre part, on a

$$\sqrt{2n-2} + \sqrt{2n-4} > 1 \quad \text{(pour } n \geqslant 4\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2n-2} + \sqrt{2n-4}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2n-2} - \sqrt{2n-4} < 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2n-4} + 2 > \sqrt{2n-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2n-4} + 1 > \frac{\sqrt{2n-2} + \sqrt{2n-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2n-4} + 1} < \frac{2}{\sqrt{2n-2} + \sqrt{2n-4}} = \sqrt{2n-2} - \sqrt{2n-4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2n-4} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2n-4} + 1} < \sqrt{2n-2} + 1$$
(4)

De (2), (3) et (4), il vient

$$\sqrt{2n+2} < s_{n+1} < \sqrt{2n-2} + 1,$$

ce qui complète la démonstration par induction de (1).

En particulier, on a

$$\sqrt{200} < s_{100} < \sqrt{196} + 1.$$

 $\sqrt{200} \simeq 14,142 \text{ et } \sqrt{196} = 14, \text{ donc}$

$$14 < s_{100} < 15$$
.

M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre, B. LOISEAU de Mouscron et J. RONDOU de Heverlee ont envoyé de bonnes solutions.

190. Racines en folies

Soit n un naturel non nul et $x \in \mathbb{R}$.

On définit
$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \sqrt{x+k}$$
.

Pour quelle(s) valeur(s) de n l'équation $f_n(x) = n$ admet-elle une (des) solution(s) rationnelle(s)? réelle(s)?

199. Pythagore voit double

Trouver toutes les solutions du système

(S)
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ c^2 + b^2 = d^2 \end{cases}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

(proposé par B. LOISEAU de Mouscron)

200. Deux, un, zéro ...

Pour n naturel, on note g le nombre de chiffres 1 de l'écriture binaire de n et h l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui divise n!

Prouver que g + h = n.

(proposé par M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre)

201. Triangle et inégalités

a,b,c sont les longueurs des côtés d'un triangle,

$$R = a^2 + b^2 + c^2$$
 et $S = (a + b + c)^2$.

Démontrer que

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{R}{S} < \frac{1}{2}$$

et que, dans cette inégalité, $\frac{1}{2}$ ne pourrait pas être remplacé par un nombre plus petit.

Olympiades

C. Festraets,

Dans ce numéro, vous trouverez les solutions des quatre problèmes MAXI de l'Olympiade Mathématique Belge ainsi que celle des trois premiers problèmes de l'Olympiade Mathématique Internationale.

O.M.B.

Les solutions des problèmes 1, 2, 3 sont celles proposées par des élèves ayant participé à l'Olympiade. Le quatrième problème (qui était sans doute le plus difficile) n'a été résolu parfaitement par aucun élève, vous lirez donc la solution fournie par l'auteur du problème.

- 1. Un polygone convexe à 1997 côtés est pavé par des polygones dont chaque côté est soit un côté du polygone initial, soit un côté d'un autre polygone du pavage. Un tel pavage peut-il consister en
 - (a) 1997 triangles?
 - (b) 1997 quadrilatères?
 - (c) 1998 triangles?

Solution de J.C. DELVENNE, 6ème, Institut Sainte-Marie, Arlon.

- (a) D'un point à l'intérieur du polygone, on élance grâcieusement des segments vers les sommets. Ces segments ne sortent pas du polygone puisque celui-ci est convexe. On obtient 1997 triangles.
 - (b) La réponse est non.

Chaque quadrilatère a 4 côtés.

Cela ferait en tout (1997 \times 4) côtés, dont 1997 sur le polygone initial. Or, les côtés internes sont tous mitoyens entre deux quadrilatères et sont donc comptés deux fois dans le total (1997 \times 4).

Or, $1997 \times 4 - 1997$ est impair, ce qui est choquant.

(c) Le réponse est non.

En effet, $1998 \times 3 - 1997$ est également impair.

2. Dans l'expression $1+2+\cdots+1997$, combien faut-il au minimum changer de signes + en signes - pour que la nouvelle expression ait pour valeur 1997?

Solution de L. NINOVE, 5ème, Centre Scolaire Saint Pierre, Bruxelles.

Pour devoir changer le moins de signes possibles, il faut changer de signe aux plus grands nombres en priorité. Quand on change le signe d'un nombre n de la suite, cela revient à soustraire 2n de la suite originale, par exemple,

$$1 + 2 + \dots + 1996 - 1997 = \frac{1997.1998}{2} - 2.1997.$$

Nous devons donc chercher à combien de "gros nombres" nous devons changer de signe en priorité.

Nous aurons une suite comme celle-ci

$$1+2+\cdots+(x-1)-x-(x+1)-\cdots-1997.$$

Cette somme doit être la plus petite possible tout en restant supérieure ou égale à 1997.

Cela revient à faire

$$\frac{1997.1998}{2} - 2.\left(\frac{1997.1998}{2} - \frac{x.(x-1)}{2}\right) \geqslant 1997$$
$$-\frac{1997.1998}{2} - 1997 + x^2 - x \geqslant 0.$$

et donc $x \geqslant 1413, 65...$

Le plus petit naturel x satisfaisant à cette condition est x = 1414.

La somme $1+2+\cdots+1413-1414-\cdots-1997$ est égale à 2979, ce qui est de 982 supérieur à la somme souhaitée 1997.

Diminuer de 982 revient à changer le signe de $\frac{982}{2}=491.$ La suite obtenue est

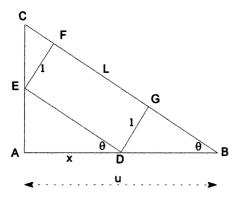
$$1+2+\cdots+490-491+492+493+\cdots+1413-1414-1415-\cdots-1997.$$

Elle contient 585 signes -.

- 3. Considérons tous les rectangles inscrits dans un triangle ABC, rectangle en A, l'un des côtés de ces rectangles étant contenu dans l'hypoténuse du triangle rectangle.
 - (a) Lequel de ces rectangles a une aire maximale?

(b) La partie du triangle rectangle extérieure à ce rectangle d'aire maximale consiste en trois triangles; soit a (resp. b, c) le rayon du cercle inscrit à celui de ces triangles dont A (resp. B, C) est un sommet. Dans quels cas est-il vrai que $a^2 = b^2 + c^2$?

Solution de L. DOYEN, 6ème, Lycée E. Jacqmain, Bruxelles.



(a) Soient $u=|AB|,\ x=|AD|,\ L=|FG|,\ \ell=|EF|,\ \theta=\widehat{CBA}$ (x étant une variable).

DEFG est un rectangle, donc ED//FG et $\widehat{ADE} = \theta$.

On a $L = \frac{x}{\cos \theta}$ (car ADE est un triangle rectangle) et $\ell = (u - x) \sin \theta$ (car BDG est un triangle rectangle).

Donc l'aire du rectangle DEFG vaut

$$A(x) = \frac{x}{\cos \theta} \cdot (u - x) \sin \theta$$
$$\frac{dA(x)}{dx} = (u - 2x) \operatorname{tg} \theta$$

A(x) est maximum pour (u-2x) tg $\theta=0$, donc

$$x = \frac{u}{2}.$$

Le rectangle d'aire maximum a son sommet D au milieu de [AB] et son sommet E au milieu de [AC].

(b) Considérons les triangles $ADE,\,GBD$ et FEC; ils sont semblables. En effet,

$$\widehat{EAD} = \widehat{DGB} = \widehat{CFE} = 90^{\circ}$$

et

$$\widehat{ADE} = \widehat{GBD} = \widehat{FEC} = \theta.$$

On a donc

$$\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|GB|}{|BD|} = \frac{|FE|}{|EC|}.$$

Le rapport de similitude entre ADE et GBD est $\frac{|BD|}{|DE|}$, celui entre ADE et FEC est $\frac{|EC|}{|DE|}$. D'où on a

$$a \cdot \frac{|BD|}{|DE|} = b$$
 et $a \cdot \frac{|EC|}{|DE|} = c$.

Quand a-t-on $a^2 = b^2 + c^2$?

$$a^{2} = a^{2} \frac{|BD|^{2}}{|DE|^{2}} + a^{2} \frac{|EC|^{2}}{|DE|^{2}}$$

$$\Leftrightarrow |DE|^{2} = |BD|^{2} + |EC|^{2}$$

$$\Leftrightarrow |DE|^{2} = |AD|^{2} + |AE|^{2}$$

car |BD| = |AD| et |EC| = |AE|.

Pour avoir cela, il faut que AED soit un triangle rectangle en A. Or, ceci est vrai par hypothèse, donc $a^2 = b^2 + c^2$ est toujours vrai.

4. Les colonnes et les lignes d'un échiquier 1997×1997 sont numérotées de 0 à 1996, les colonnes de gauche à droite et les lignes de bas en haut. La case située à l'intersection de la colonne x et de la ligne y est notée (x,y).

Un pion qui se trouve initialement sur la case (a,b) (avec $a \le b$) doit se rendre sur la case (c,d) (avec $c \le d$), en respectant les règles suivantes :

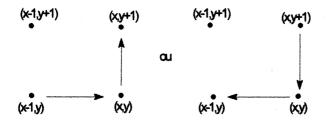
- 1. Les déplacements s'effectuent d'une case à l'une des quatre cases adjacentes.
- 2. Les cases (x, y) avec x > y sont interdites.
- 3. Le pion ne passe pas deux fois par la même case.
- 4. Entrer dans la case (x, y) coûte x.y euros.

Quel est pour le pion l'itinéraire le meilleur marché? Discuter en fonction de a,b,c,d, décrire toutes les solutions optimales s'il y en a plusieurs.

Solution.

Puisqu'on a un nombre fini de trajets possibles, l'un d'entre eux au moins est optimal. Quelles sont ses caractéristiques?

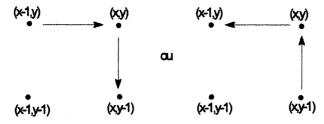
Il n'y a pas de changement de direction de la forme



car la case (x-1,y+1) est plus économique que (x,y)

$$(x-1).(y+1) = xy + x - y - 1 < xy.$$

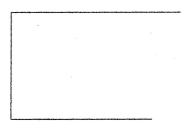
De même, il n'y a pas de changement de direction de la forme



Le demi-tour étant interdit par la condition 3, les seuls changements de direction permis sont



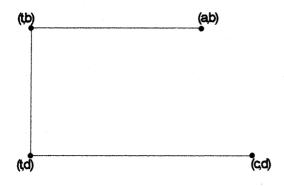
et l'itinéraire global est de la forme



Si b = d, un seul itinéraire est possible



Si $b \neq d$, l'itinéraire général se présente comme suit



(en supposant b > d, sinon on permute (a, b) et (c, d), ce qui ne modifie en rien le raisonnement qui suit).

Le prix de cet itinéraire, en comptant la case (a,b) de départ est

$$\begin{array}{lll} \mathrm{de}\ (t+1,b)\ \grave{\mathrm{a}}\ (a,b) & : \ \left(\frac{a(a+1)}{2} - \frac{t(t+1)}{2}\right)b \\ \mathrm{de}\ (t+1,d)\ \grave{\mathrm{a}}\ (c,d) & : \ \left(\frac{c(c+1)}{2} - \frac{t(t+1)}{2}\right)d \\ \mathrm{de}\ (t,b)\ \grave{\mathrm{a}}\ (t,d) & : \ \left(\frac{b(b+1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2}\right)t \end{array}$$

ce qui donne au total

$$-\frac{t^2}{2}(b+d) + \frac{t}{2}(-b-d+b^2+b-d+d) + K$$

où K ne dépend pas de t.

Désignons ce prix par p(t).

$$p(t) = -\frac{t^2}{2} (b+d) + \frac{t}{2} (b^2 - d^2) + K.$$

Le graphique de p est une parabole concave dont le minimum pour $t \in \{0, 1, ..., \min(a, c)\}$ ne peut avoir lieu que pour les valeurs extrêmes

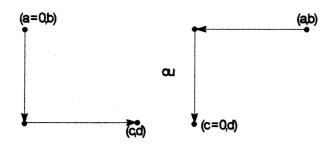
$$t = 0 : p(0) = K$$

$$t = m = \min(a, c) : p(m) = K + \frac{b+d}{2} m(-m+b-d)$$

$$p(m) \leqslant p(0) \Leftrightarrow \frac{b+d}{2} m(-m+b-d) \leqslant 0$$

 $\Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m \geqslant b-d$

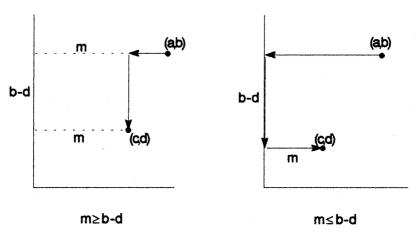
 $\text{si} \quad m = 0, \quad \text{alors} \quad t = m = 0$



 $si m \neq 0$

(c'est-à-dire a > 0 et c > 0), alors

soit m < b - d et t = 0 est minimum unique soit m = b - d et t = 0 ou t = m sont minimum soit m > b - d et t = m est minimum



OMI

1. Dans le plan, les points à coordonnées entières sont les sommets de carrés unités. Les carrés sont coloriés alternativement en blanc et en noir (comme sur un échiquier).

Pour tout couple d'entiers strictement positifs m et n, on considère un triangle rectangle dont les sommets sont des points à coordonnées entières et dont les côtés de l'angle droit, de longueurs m et n, suivent les côtés des carrés.

Soit S_1 l'aire totale de la partie noire du triangle et S_2 l'aire totale de la partie blanche. On pose

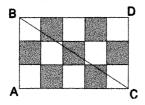
$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

- (a) Calculer f(m,n) pour tous les entiers strictement positifs m et n qui sont tous deux pairs ou tous deux impairs.
 - (b) Montrer que pour tout m et $n: f(m,n) \leq \frac{1}{2} \max(m,n)$.
- (c) Montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que, pour tous m et n, f(m, n) < C.

Solution.

(a) Soit BAC un triangle rectangle en ${\cal A}$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Considérons le rectangle ABDC. Son centre est le centre de symétrie de



l'échiquier.

L'aire de la partie noire de BAC

est égale à l'aire de la partie noire de BDC et donc, à la moitié de l'aire de la partie noire du rectangle ABDC.

De même pour l'aire de la partie blanche.

Si m et n sont pairs, dans le rectangle le nombre de cases noires est égal au nombre de cases blanches, d'où

$$f(m,n) = 0.$$

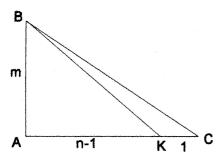
Si m et n sont impairs, dans le rectangle il y a soit une case noire, soit une case blanche en plus, d'où

$$f(m,n) = \frac{1}{2}.$$

(b) Si m et n sont de même parité, en vertu de ce qui vient d'être démontré, on a bien

$$f(m,n) \leqslant \frac{1}{2} \max(m,n).$$

Examinons le cas où m est pair et n impair.



Soit |AB| = m, |AC| = n

et soit K le point de [AC] tel que |AK| = n - 1.

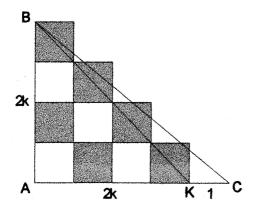
m et n-1 sont pairs, donc dans le triangle BAK, les parties blanches et noires ont même aire.

Dans le triangle BKC, la différence des aires des parties blanches et noires est, en valeur absolue, inférieure à l'aire totale du triangle BKC, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ m. D'où

$$f(m,n) \leqslant \frac{1}{2} m \leqslant \frac{1}{2} \max(m,n).$$

(c) Soit BAC un triangle rectangle avec |AB| = 2k et |AC| = 2k + 1. Soit K le point de [AC] tel que |AK| = 2k.

Dans BAK, l'aire de la partie blanche est égale à celle de la partie noire. Reste à examiner le triangle BKC.



L'aire du triangle BKC

est k.

Supposons, par exemple, que BK ne traverse que des cases noires. L'aire de la partie blanche du triangle BKC est alors constituée de 2k triangles semblables à BAC et la somme des aires de ces triangles est égale à

$$\frac{1}{2} 2k(2k+1) \left(\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2(2k)^2} + \frac{(2k-1)^2}{(2k+1)^2(2k)^2} + \frac{(2k-2)^2}{(2k+1)^2(2k)^2} + \dots + \frac{1^2}{(2k+1)^2(2k)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{4k(2k+1)} ((2k)^2 + (2k-1)^2 + (2k-2)^2 + \dots + 1^2)$$

$$= \ \frac{1}{4k(2k+1)} \cdot \frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6} = \frac{4k+1}{12}.$$

L'aire de la partie noire du triangle BKC est égale à

$$k - \frac{4k+1}{12} = \frac{8k-1}{12}$$

et la différence de ces deux aires est

$$\frac{8k-1}{12} - \frac{4k+1}{12} = \frac{2k-1}{6}.$$

D'où

$$f(2k, 2k+1) = \frac{2k-1}{6}$$

et devient arbitrairement grande lorsque k augmente.

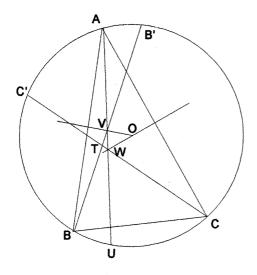
2. L'angle est le plus petit dans le triangle ABC. Les points B et C divisent le cercle circonscrit au triangle en deux arcs. Soit U un point intérieur à l'arc limité par B et C qui ne contient pas A. Les médiatrices des segments AB et AC rencontrent la droite AU respectivement en V et W. Les droites BV et CW se coupent au point T.

Montrer que

$$AU = TB + TC.$$

Solution de Laurent WAXWEILER

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, C' la seconde intersection de CT avec le cercle, B' la seconde intersection de BT avec le cercle.



$$\begin{split} AU &= BT + CT &\Leftrightarrow AW + WU = BT + CT \\ &\Leftrightarrow CW + WU = BT + CT \\ &\Leftrightarrow CW + WU = BT + CW + WT \\ &\Leftrightarrow WU = BT + WT \\ &\Leftrightarrow WC' = BT + WT \\ &\Leftrightarrow WT + TC' = BT + WT \\ &\Leftrightarrow TC' = BT \quad \text{(nouvelle expression de la thèse)}. \end{split}$$

Or,

$$BB' = AU$$

(symétries orthogonales par rapport aux médiatrices)

$$CC' = AU$$

d'où

$$\begin{array}{ll} BB' &=& CC'\\ \widehat{BOB'} &=& \widehat{COC'}\\ \widehat{C'OB'} &=& \widehat{BOC}\\ C'B' &=& CB \quad \text{(cordes ayant le même angle au centre)}. \end{array}$$

BCB'C' est un trapèze isocèle et donc BT = TC'.

3. Soient x_1, x_2, \ldots, x_n des réels vérifiant les conditions suivantes

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$$

et

$$|x_i| \leqslant \frac{n+1}{2}$$
 pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Montrer qu'il existe une permutation $(y_1, y_2, ..., y_n)$ de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ telle que

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}.$$

Solution.

Supposons que pour toute permutation $(y_1, y_2, ..., y_n)$ de $(x_1, x_2, ..., x_n)$, on ait

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| > \frac{n+1}{2}.$$

Si

$$y_1 + 2y_2 + \dots + iy_i + (i+1)y_{i+1} + \dots + ny_n > \frac{n+1}{2}$$

et si

$$y_1 + 2y_2 + \dots + (i+1)y_i + iy_{i+1} + \dots + ny_n < -\frac{n+1}{2},$$

alors, en soustrayant ces deux inégalités, on a

$$-y_i + y_{i+1} > n+1,$$

ce qui est impossible car, par hypothèse,

$$|y_i| \leqslant \frac{n+1}{2}$$
 et $|y_{i+1}| \leqslant \frac{n+1}{2}$.

Dès lors, si

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \dots + (n-1)y_{n-1} + ny_n > \frac{n+1}{2}$$

alors,

$$y_{2} + 2y_{1} + 3y_{3} + \dots + (n-1)y_{n-1} + ny_{n} > \frac{n+1}{2}$$

$$y_{2} + 2y_{3} + 3y_{1} + \dots + (n-1)y_{n-1} + ny_{n} > \frac{n+1}{2}$$

$$\vdots$$

$$y_{2} + 2y_{3} + 3y_{4} + \dots + (n-1)y_{n} + ny_{1} > \frac{n+1}{2}$$

$$y_{3} + 2y_{2} + 3y_{4} + \dots + (n-1)y_{n} + ny_{1} > \frac{n+1}{2}$$

$$\vdots$$

et finalement,

$$y_n + 2y_{n-1} + 3y_{n-2} + \dots + (n-1)y_2 + ny_1 > \frac{n+1}{2}$$
.

De même, si

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \dots + (n-1)y_{n-1} + ny_n < -\frac{n+1}{2}$$

alors

$$y_n + 2y_{n-1} + 3y_{n-2} + \dots + (n-1)y_2 + ny_1 < -\frac{n+1}{2}.$$

Or, on a

$$|(y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n) + (y_n + 2y_{n-1} + \dots + ny_1)|$$

$$= |(n+1)y_1 + (n+1)y_2 + \dots + (n+1)y_n|$$

$$= (n+1)|y_1 + y_2 + \dots + y_n| = n+1.$$

La valeur absolue de la somme de deux termes strictement supérieurs à $\frac{n+1}{2}$ ou strictement inférieurs à $-\frac{n+1}{2}$ ne peut être égale à n+1. Donc, la supposition de départ est fausse et il existe une permutation (y_1, y_2, \ldots, y_n) de (x_1, x_2, \ldots, x_n) telle que

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Bibliographie

J. Bair et J. Haesbroeck.

Maths: exercices résolus et expliqués - Fonctions réelles (tome 1); une autre clef pour comprendre par Michèle Garin, éditrice, 1997; commandes et renseignements: tél. - fax: 02/675.91.56 ou 058/51.05.74.

Ce volumineux ouvrage comprend 668 pages manuscrites, dans une présentation très claire et bien aérée. Il est intéressant pour les élèves des 3èmes générales et techniques de l'enseignement secondaire (les dernières années du collège, en France), mais il s'adresse particulièrement aux élèves des 4èmes et des 5èmes générales et techniques de l'enseignement secondaire (les 1ères et 2èmes années du lycée, en France), ainsi qu'aux élèves des 6èmes et 7èmes professionnelles. Il est également bien adapté pour toute personne qui voudrait comprendre vraiment les mathématiques, et tout particulièrement étudier par elle-même les bases de l'analyse mathématique.

Le livre contient 560 exercices entièrement résolus, mais aussi des "textes continus", des explications intuitives, des justifications théoriques, des développements "étape par étape", une présentation "en spirale", les rappels des notions exploitées dans les exercices. De ce fait, il constitue un excellent "guide" qui vise constamment une compréhension véritable des mathématiques, et donc le développement de l'esprit logique, analytique et critique.

La matière traitée est essentiellement constituée des fondements même de l'analyse, à savoir l'étude des nombres réels, la notion de fonction, l'image d'un nombre par une fonction, le graphique, les racines, le signe et le domaine de définition d'une fonction, des fonctions du premier degré, avec les notions de droite du plan coordonné et de pente d'une droite, des fonctions du second degré et des paraboles, ainsi qu'une première approche des notions de limite, d'asymptote à une courbe, de discontinuité, ...

Le choix des exercices et la présentation de leur résolution donnent véritablement, comme le sous-titre du livre l'indique, une "autre clef pour comprendre".

J. BAIR

Espace Math 4 par Adam, Bastin, Close et Lousberg, De Boeck-Wesmael, 1997, 378 pages.

Les auteurs continuent le travail réalisé dans la collection "Espace Math" (n° 1, 2 et 3, avec, chaque fois, le livre de l'élève, un cahier d'exercices et un complément pédagogique). Ils insistent spécialement sur la pédagogie des situations en présentant de nombreuses activités concrètes et variées, ainsi que sur l'enseignement en spirale en n'épuisant pas de suite le contenu des notions exposées, mais en les introduisant de manière progressive. Ils ont également eu l'excellente idée d'agrémenter leur texte de notions historiques et d'un aperçu de la vie et des découvertes de mathématiciens célèbres.

Le "manuel" est articulé en

- des activités destinées à introduire et rechercher de nouvelles notions,
- l'exposé des notions théoriques,
- des exercices expliquant la théorie, mais aussi cherchant à "aller plus loin".

En plus de ce "manuel" et du "cahier d'exercices et formulaires" existe un "complément pédagogique" comprenant le corrigé des exercices du manuel, un dossier de documents reproductibles avec des exercices de remédiation classés par thème, ainsi que le corrigé de ces exercices de remédiation.

La table des matières comprend les sujets suivants : compléments de calcul algébrique (radicaux, exposants fractionnaires, division par x-a, ...), cercles et angles, fonctions, droites (y compris le parallélisme et la perpendicularité), la trigonométrie du triangle quelconque, distances-cerclesparaboles, le second degré, lieux géométriques, constructions dans l'espace, calcul vectoriel, statistique et probabilité (indices de dispersion, calcul des probabilités).

Les idées maîtresses de ce livre sont conformes au nouveau programme de quatrième et à ses objectifs.

J. BAIR

Oh, moi les maths ... par Alain Desmarets, Benoît Jadin, Nicolas Rouche, Pierre Sartiaux, aux éditions Talus d'approche.

"Au commencement, il y a le problème, et le formalisme ne vint qu'après".

Ecole de la réussite, socle des compétences, missions de l'école, ...; autant de manifestations de recherche du renouveau dans l'enseignement de notre Communauté. Et les mathématiques dans tous ces bouleversements?

Quatre professeurs, qui enseignent dans le fondamental, le secondaire, le supérieur pédagogique et à l'université, se prêtent la plume pour exprimer,

chacun à sa manière : il n'y a pas d'apprentissage des mathématiques sans "problèmes". De nombreux exemples, expériences personnelles, situations-problèmes, appels à l'histoire, ..., rendent son sens à la discipline.

Le lecteur, ou mieux, l'utilisateur de ce petit (150 pages quand même) livre, sera architecte, chef de gare, fera des photocopies ou même des calculs, et trouvera la réponse à toutes ces questions sur les mathématiques, les mathématiques et l'enseignement, les mathématiques et la société : à quoi ça sert ? est-ce utile ? pour qui ? pour quoi ? ...

Ceux qui s'intéressent aux mathématiques liront ce livre, ceux qui liront ce livre s'intéresseront aux mathématiques.

J. J. HAESBROECK