

Mathématique et Pédagogie

Sommaire

• J. Navez, Editorial	2
• G. Noël, F. Pourbaix et P. Tilleuil, L'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire	3
• J.-P. Houben, J. Liesenborghs et J. Navez, Intervention de la délégation de la SBPMef à Tihange	23
• M. Kassab, Réflexions sur l'enseignement de la géométrie	25
• P. Marlier, La notion d'aire	33
• D. Justens, La résolution d'équations différentielles linéaires interprétée par les processus de capitalisation et d'épargne	54
• B. Baton, R. Giot & Y. Noël, Des difficultés de l'algèbre	58
• C. Rédaction, Bibliographie	71
• R. Graas, Les enfants d'Olympie	72
• C. Festraets, Des problèmes et des jeux	78
• C. Festraets, Olympiades	82

Editorial

J. Navez,

Je profite de la date de parution du présent numéro de la revue pour présenter à tous les lecteurs mes meilleurs vœux pour l'année nouvelle.

Bonne santé et bon courage à tous les fidèles membres de la Société, qui ont participé à sa vie en lui offrant leur temps pour l'organisation des différentes activités, en lui offrant des publications, des articles, des énoncés de problèmes, et aussi à tous ceux qui, par leur attention constante, forment la base solide sur laquelle notre Société repose.

A nos nouveaux lecteurs, je souhaite également que l'intérêt et le plaisir qu'ils éprouvent en faisant des mathématiques se développent encore et qu'ils rejoignent ceux qui essaient constamment d'améliorer leur enseignement.

Je termine en souhaitant aux responsables de l'éducation qu'ils aient la prise de conscience que les mathématiques font partie de la culture générale de l'honnête homme et qu'il n'est pas raisonnable de prévoir une formation tronquée pour les jeunes générations.

Jacques NAVEZ

L'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire

G. Noël, F. Pourbaix et P. Tilleuil,

1. Introduction

Le phénomène linéaire est présent dans le cours de mathématiques dès la fin de l'école primaire, par exemple dans les questions liées à la proportionnalité directe : pourcentages, intérêts, changements d'unités, dessins à l'échelle, emploi d'opérateurs fractionnaires, etc. Tout au long du premier et du deuxième degré de l'enseignement secondaire, le phénomène linéaire continue d'être présent en force : repérages, agrandissements et réductions, transformations du plan, projections parallèles, calculs en coordonnées, théorème de Thalès, fonctions, équations et inéquations du premier degré, moyennes, etc.

Mais si l'enseignement de l'algèbre linéaire durant les quatre premières années du secondaire peut raisonnablement procéder par accumulation de résultats, il vient un moment où une mise en ordre s'impose, où une synthèse doit être réalisée. Dans les programmes mis en application à partir de 1968, cette synthèse a reposé sur une explicitation de la structure d'espace vectoriel, présentée dès la quatrième année. Après quelques années d'application, on s'est rendu compte que l'introduction de cette structure était trop rapide, et trop souvent réalisée pour elle-même, sans liaisons suffisantes avec les applications.

Mais depuis cette époque, une habitude malencontreuse s'est instaurée, consistant à assimiler "algèbre linéaire" à "étude formelle de la structure d'espace vectoriel". Ce malentendu a finalement eu pour conséquence non seulement le rejet de l'étude formelle de la structure d'espace vectoriel, mais aussi le rejet de la plupart des concepts qui lui sont associés. En termes familiers, on a "jeté le bébé avec l'eau du bain".

Hélas, ce rejet n'a pas non plus été sans effets sur la préparation des jeunes gens qui abordent des études supérieures scientifiques, techniques, économiques ou même de sciences humaines, tant une bonne maîtrise des notions et des techniques de l'algèbre linéaire y est souvent indispensable.

A la lumière de ces expériences passées, il semble maintenant urgent de repenser en profondeur l'enseignement de l'algèbre linéaire.

C'est à cette entreprise que nous avons voulu apporter une contribution, dans le cadre d'un contrat de recherche financé par le Ministère de la Communauté Française à l'Université de Mons-Hainaut pendant l'année académique 1996-1997. Et c'est à un résumé du rapport final de cette recherche qu'est consacré le présent article.

Dans l'ensemble de tout le travail, notre but principal a été de mettre au point des séquences d'enseignement du niveau du troisième degré de l'enseignement secondaire, qui mènent progressivement les élèves des notions élémentaires de la géométrie aux concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire. A cet effet, nous nous sommes appuyés sur deux principes :

- en ce qui concerne le contenu : ne pas enseigner l'algèbre linéaire pour elle-même,
- en ce qui concerne les activités : mettre en évidence des analogies et laisser mûrir des notions.

Le rapport final comportant plus de 250 pages, il n'a pas semblé souhaitable d'en faire ici un résumé exhaustif. Cet article se limitera donc à fournir quelques points d'entrée dans le rapport, en laissant à qui le souhaite le loisir de l'étudier plus à fond.

2. La géométrie de l'algèbre linéaire

Le point de départ de notre recherche a été une analyse des problèmes rencontrés par l'enseignement de la géométrie dans l'espace, en particulier dans ses relations avec l'enseignement de l'algèbre linéaire.

Or, l'apprentissage de la géométrie dans l'espace recèle des difficultés plus importantes que celles rencontrées dans l'apprentissage de la géométrie plane ; pour n'en citer que deux : le problème de la représentation *plane* des objets de l'*espace*, et le problème des méthodes, sinon d'"une" méthode de résolution des problèmes.

Il semble clair en effet qu'avant de raisonner sur les objets de l'espace, l'élève doit en maîtriser quelques modes de représentation plane (perspective dite "cavalière" — projection parallèle serait plus correct —, perspective centrale, développements, projections cotées, ...).

Mais même dans les cas où le problème de représentation plane d'un objet spatial est résolu de façon satisfaisante, et même dans les cas où on a eu recours à un modèle matériel à trois dimensions, la complexité de l'objet

lui-même ne permet pas toujours de tirer de cette représentation tout le bénéfice qu'on pourrait en espérer.

Or, cette complexité est pour ainsi dire naturelle en géométrie de l'espace : il y a désormais trois dimensions à contrôler au lieu de deux. La conjonction des difficultés mathématiques propres au sujet, des difficultés inhérentes à la représentation plane des objets de l'espace et des difficultés d'appréhension des situations spatiales a alors souvent comme conséquence que l'enseignement de la géométrie de l'espace est moins ambitieux que celui de la géométrie plane, alors que la géométrie de l'espace, étant celle du monde où nous vivons, revêt une importance particulière.

Et cette situation paradoxale soulève l'autre question : celle de la "méthode" en géométrie. Car comment donner aux élèves suffisamment de moyens d'être créatifs en géométrie de l'espace alors que les difficultés y sont grandissantes, qu'il est nécessaire de relayer "imagination de l'espace", et que le dessin n'y suffit pas ?

C'est là que l'introduction des *méthodes* algébriques, et le développement d'un dialogue équilibré entre l'algèbre et la géométrie se révèle irremplaçable, comme l'histoire des mathématiques en témoigne d'ailleurs à l'envi.

Dans ce contexte, l'algèbre linéaire se révèle un outil privilégié. Elle permet de traiter avec aisance certaines situations géométriques qui ne pourraient être étudiées qu'avec difficultés par les méthodes synthétiques. Il en est ainsi par exemple des transformations de l'espace.

Malheureusement ce que nous avons appelé le "malentendu de l'algèbre linéaire" a eu pour conséquence de priver le cours de géométrie de l'espace du bénéfice des méthodes de l'algèbre linéaire. Dans l'état actuel des choses, il y a par conséquent un vide à combler entre l'enseignement de la géométrie de l'espace dans le secondaire et l'enseignement de l'algèbre linéaire dans les écoles supérieures et les universités. D'autant plus que ce vide se traduit par une formidable perte de sens, et handicape ainsi sérieusement l'apprentissage de l'algèbre linéaire par ceux-là mêmes qui sont amenés à devoir s'en servir concrètement dans des contextes divers.

De telles difficultés doivent pouvoir se dissiper si on en revient aux sources mêmes de l'algèbre linéaire. Il existe en effet des chemins qui vont de la géométrie vers l'algèbre linéaire, sans réduire pour autant le cours de géométrie à une illustration desséchée des notions d'algèbre linéaire.

A la suite de cette analyse, la majeure partie de notre travail a consisté à mettre au point un exposé qui éclaire les difficultés propres à l'enseignement de la géométrie de l'espace et contribue à les résoudre par l'introduction de notions d'algèbre linéaire, qui facilite la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur en ce qui concerne l'apprentissage des modes de pensée particuliers de l'algèbre linéaire, et dissipe ainsi les malentendus signalés plus haut.

En ce sens, on y entend parler sans arrêt des objets premiers de la géométrie : points, droites, plans, distances, angles, aires, volumes, directions, orientations, transformations, et des relations que tous ces objets entretiennent entre eux. Mais on y entend tout autant parler de la manière dont on amène tous ces objets à la portée du calcul, de la signification de ce calcul, et des avantages géométriques qu'on en retire.

Cet *a priori* géométrique une fois affirmé, une étude approfondie de la manière dont les notions et les méthodes de l'algèbre linéaire dérivent des notions et des résultats de bases de la géométrie dans l'espace a permis de dégager huit grands thèmes fondamentaux, fortement reliés entre eux, et qui forment le coeur de "la géométrie de l'algèbre linéaire". Il s'agit de :

- I. la géométrie d'incidence de l'espace,
- II. la géométrie vectorielle élémentaire,
- III. le produit scalaire,
- IV. les nombres complexes et les rotations du plan,
- V. les rotations de l'espace,
- VI. l'aire, le volume, le produit extérieur et les déterminants,
- VII. les systèmes d'équations linéaires géométriques,
- VIII. les matrices et la composition des transformations.

Une description plus détaillée de ces thèmes et de leur relations de dépendance mutuelle se retrouve dans le rapport aux pp. 25–45.

3. Un aperçu de la table des matières

Tous les thèmes n'ont pas été développés de la même manière dans les séquences d'enseignement.

Si les thèmes I, II et III ont été traités de manière exhaustive, les thèmes V, VI, VII et VIII n'ont été abordés — au niveau du rapport final — que partiellement, et le thème IV, classique au demeurant, n'a pas été abordé

du tout. D'autre part, si certaines parties des thèmes V et VI n'ont pas été détaillées dans le rapport, c'est que — toutes élémentaires qu'elles soient — elles s'écartaient des matières habituellement enseignées dans les deux dernières années du secondaire. Ces parties ont néanmoins fait l'objet de séminaires au C.D.S. de l'Université de Mons-Hainaut en mars 1997, et concernaient le corps des quaternions de Hamilton en tant que généralisation des nombres complexes adaptée à l'étude des rotations de l'espace, et la construction du produit extérieur comme linéarisation du calcul des aires et des volumes dans des espaces à au moins trois dimensions.

Si les thèmes se veulent l'ossature d'un cours "idéal", les séquences d'enseignement sont, quant à elles, plus directement orientées vers la pratique quotidiennes des classes. Elles sont regroupées en 6 sections, et comportent 17 fiches, réparties comme suit.

- Section A : la géométrie d'incidence de l'espace
 - Fiches 1 à 3 : incidence et parallélisme
- Section B : la géométrie vectorielle élémentaire
 - Fiche 4 : projections et coordonnées
 - Fiche 5 : équations vectorielles d'une droite
 - Fiches 6 : équations vectorielles d'un plan
- Section C : les systèmes d'équations linéaires et les formes linéaires
 - Fiche 7 : le point de percée d'une droite dans un plan
 - Fiche 8 : les équations cartésiennes d'un plan
 - Fiche 9 : les équations cartésiennes d'une droite
 - Fiche 10 : les projecteurs et les équations cartésiennes
 - Fiches 11 et 12 : les formes linéaires
- Section D : le produit scalaire
 - Fiche 13 : le produit scalaire
 - Fiche 14 : la sphère et ses plans tangents
- Section E : le produit vectoriel, le volume et le déterminant
 - Fiche 15 : le produit vectoriel, le volume et le déterminant
- Section F : les rotations de l'espace
 - Fiche 16 : les rotations cubiques
 - Fiche 17 : la représentation matricielle des rotations.

Il faut encore signaler que dans le style de leur présentation, ces fiches, organisées autour de plusieurs situations-problèmes, sont destinées aux professeurs, et seulement indirectement aux élèves.

Elles constituent plus de la moitié du rapport, des pp. 49 à 188.

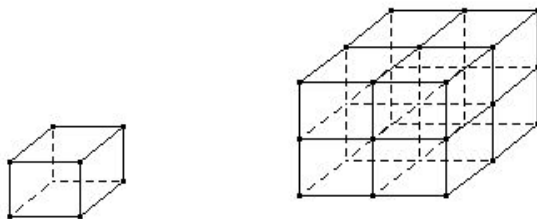
Deux exemples d'applications ont aussi été joints au rapport. L'un concerne une première étude de la stabilité électrostatique du réseau cristallin de NaCl (le sel de cuisine). L'autre est centré sur le calcul de la trajectoire de l'ombre de l'extrémité du style d'un cadran solaire (horizontal). On les trouve dans les pp. 192 à 220.

Enfin, diverses annexes clôturent le rapport. La plus importante est consacrée à la description d'un logiciel destiné à permettre aux enseignants de concevoir et d'imprimer les figures utiles à l'illustration et aux exercices des premières fiches des séquences d'enseignement (cfr. pp. 224-245). Les autres annexes concernent des études bibliographiques (cfr. pp. 248-262).

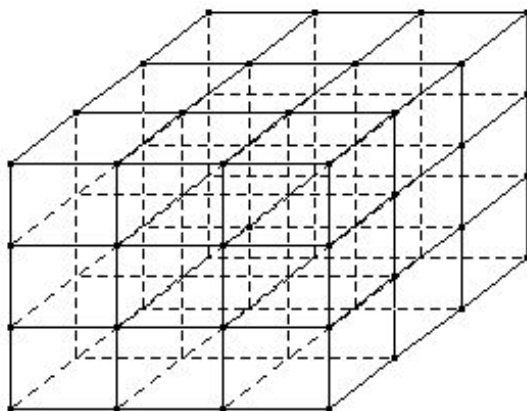
4. Un exemple : les réseaux cubiques

4.1. Qu'est-ce qu'un réseau cubique ?

Le réseau cubique a l'avantage d'être ancré intuitivement dans les esprits. Des cubes colorés de l'enfance jusqu'aux cités HLM, c'est une référence familière à tous les étudiants, et qui, en tant que telle, est d'un maniement plus immédiat que bien d'autres objets.

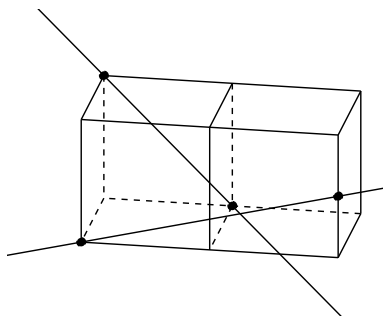


Une définition possible est de considérer un tel objet mathématique comme une figure géométrique *infinie* obtenue en translatant un cube donné par les trois translations associées à chacune de ses arêtes.

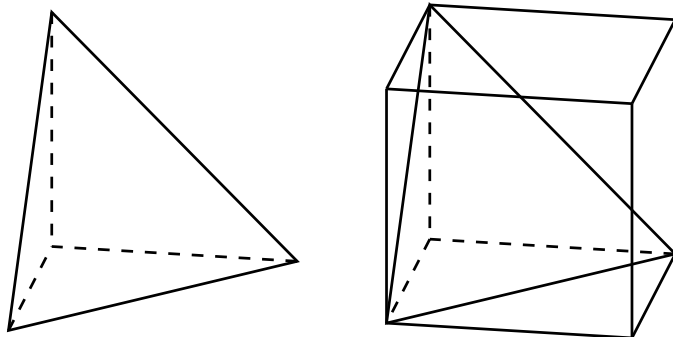


4.2. Pourquoi s'y intéresser ?

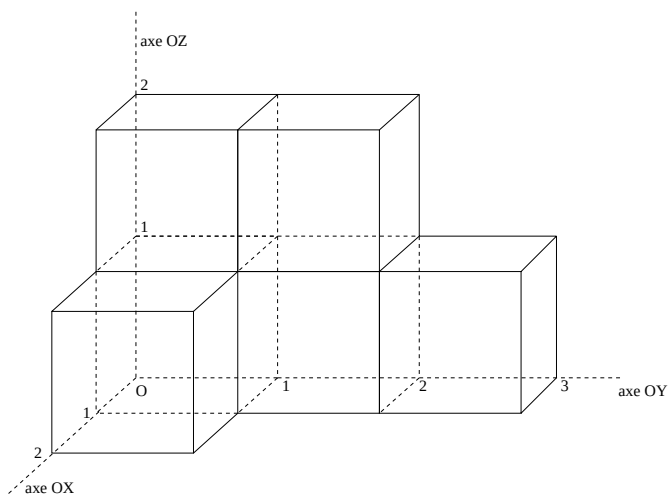
En choisissant bien un réseau cubique, on peut aider à favoriser la vision dans l'espace, ce qui n'est pas toujours chose aisée. Couchons deux droites de l'espace sur le papier. Sont-elles gauches ou se coupent-elles ? Impossible à deviner. Représenter ces droites dans le cadre d'un réseau cubique éclaircit la situation.



Le cube est très souvent, dans les cours de mathématique, représenté en perspective cavalière. Un réseau cubique peut faire office de figure de référence pour d'autres objets en perspective cavalière.



La structure des réseaux cubiques prépare géométriquement le travail en coordonnées spatiales en prolongeant l'esprit du quadrillage à deux dimensions que l'on rencontre dans les premières années du secondaire.

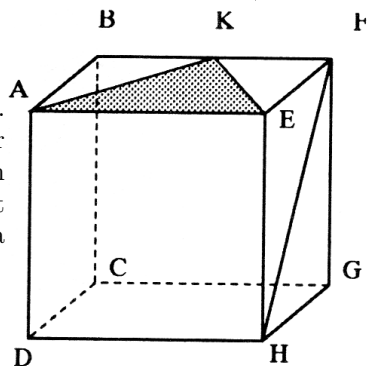


Cette structure permet également de suggérer des solutions à des problèmes de construction, comme nous allons le voir immédiatement dans des exemples tirés de nos fiches.

4.3. Une application en géométrie synthétique

Considérons l'énoncé suivant :

Soit K le milieu de l'arête $[BF]$. Construire l'ombre projetée par le triangle AKE sur le plan $CDGH$, les rayons du soleil étant orientés dans la direction de la droite FH .



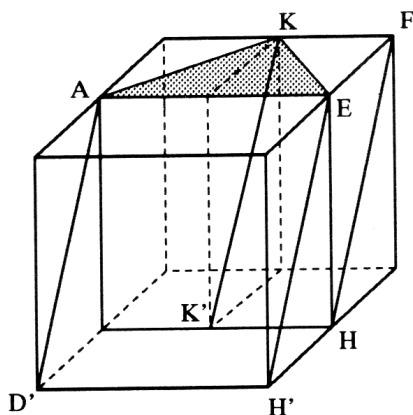
Nous construisons la solution en dessinant les ombres des points A , K et E , puis en les reliant pour connaître l'ombre du triangle AKE .

Les propriétés du réseau cubique sont ainsi utilisées de façon informelle.

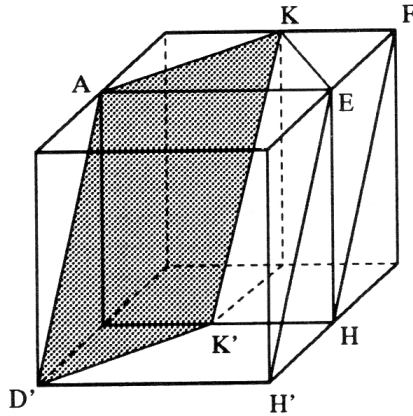
Créons un nouveau cube $A'B'C'D'E'F'G'H'$ sur la face $AEDH$ et notons K' le milieu du segment $[DH] = [C'G']$.

La construction enchaîne les étapes suivantes :

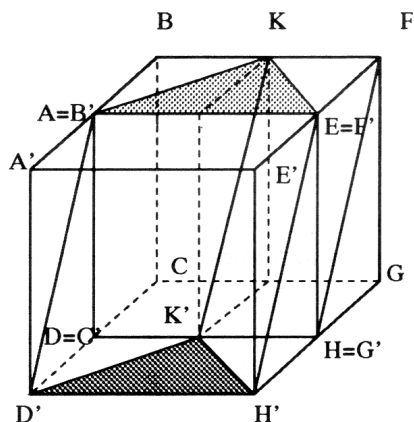
1. Tracer les diagonales $[AD']$ et $[EH']$. Les droites AD' , EH' et KK' sont parallèles à FH car elles se correspondent par translation au long d'arêtes du réseau cubique. Elles sont donc parallèles entre elles.



-
-
2. L'ensemble des parallèles à FH passant par les points de AK constitue le plan $AKK'D'$. C'est le plan PROJETANT de AK .



3. La projection de la droite AK sur $CGDH$ parallèlement à FH est la droite $D'K'$ car c'est l'intersection des plans $AKK'D'$ et $CGDH$.
4. La projection du segment $[AK]$ sur $CGDH$ parallèlement à FH est le segment $[D'K']$. En effet, dans le plan $AKK'D'$ comme dans tout autre plan, la projection d'un segment sur une droite parallèlement à une autre droite est un segment.
5. De même, les projections des segments $[KE]$ et $[AE]$ sont les segments $[K'H']$ et $[D'H']$, et la projection du triangle AKE est le triangle $D'K'H'$.



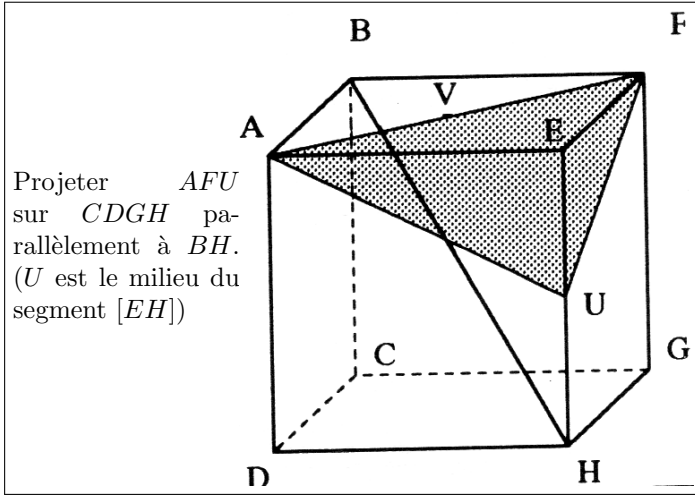
Et on répond ainsi à la question posée dans l'énoncé. Dans cette construction, nous avons utilisé des propriétés qui doivent être justifiées avec les élèves :

- les droites KK' , AD' , EH' et FH sont deux à deux parallèles.
- les parallèles à FH passant par les points de AK constituent un plan.

Ces justifications permettent d'introduire les premières propriétés de la géométrie d'incidence dans un contexte qui lui sied à merveille.

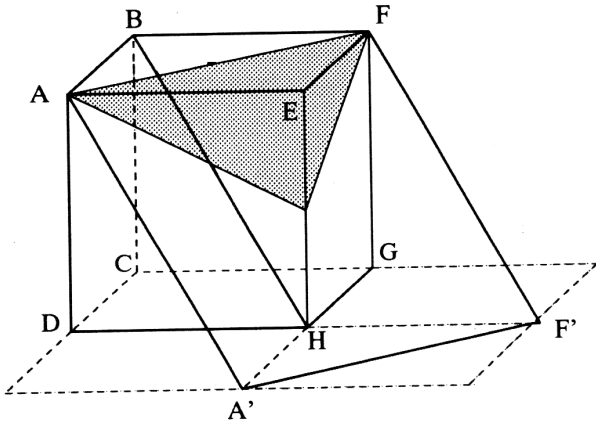
4.4. Une autre application en géométrie synthétique

Il s'agit ici de construire l'ombre au soleil d'un triangle dont les sommets sont situés sur les faces d'un cube.



Nous allons faire jouer le rôle de B à A et F . Pour ce faire, nous allons construire de nouveaux cubes sur les faces $AEDH$ et $EFGH$. Par translation, on trouvera les images des points A et F , donc l'ombre de $[AF]$.

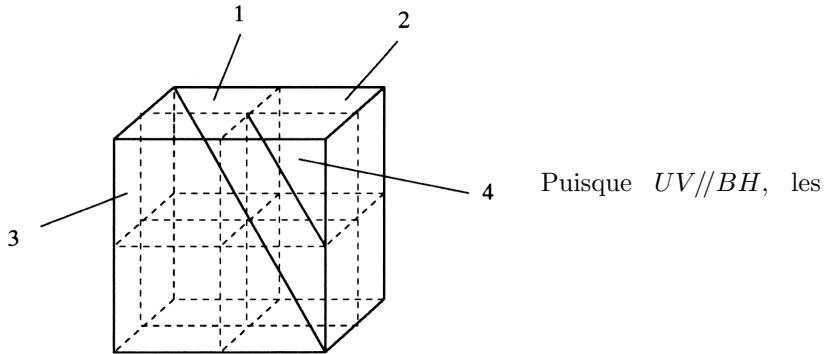
Remarquons qu'il n'est pas nécessaire ici de dessiner l'entièreté des nouveaux cubes et que leurs traces au sol (des carrés) sont suffisantes.



Notons V le milieu de $[AF]$ et remarquons, grâce au théorème de Thalès dans le plan BEH que la droite BH est parallèle à la droite UV .

Nous pouvons aussi visualiser ce résultat sur un réseau cubique plus fin que le premier, comme dans la figure ci-dessous à droite.

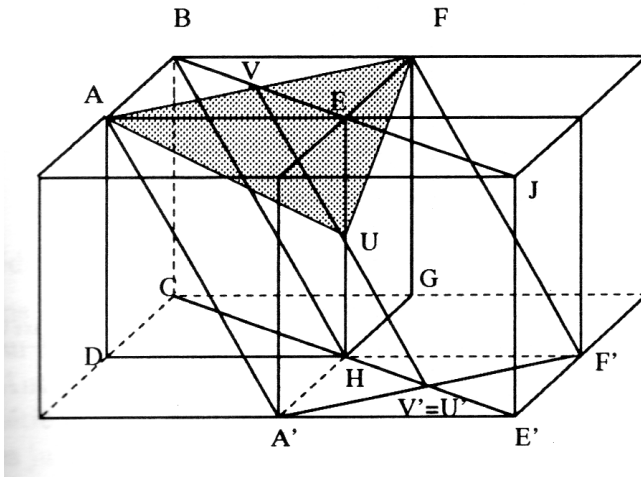
BH est la droite qui supporte la diagonale du petit cube 1. Par translation, cette diagonale est parallèle à la même diagonale du petit cube 4, qui n'est autre que UV .



points U et V ont la même ombre.

Or l'ombre de V , qui est le centre du carré $ABFE$, est le point V' , centre du carré $A'HFE'$. Cette ombre appartient donc à $[A'F']$.

Il en résulte que l'ombre du triangle AFU est le segment $[A'F']$.



4.5. Une application en calcul vectoriel

Nous allons à présent nous intéresser aux coordonnées des points que nous utilisons.

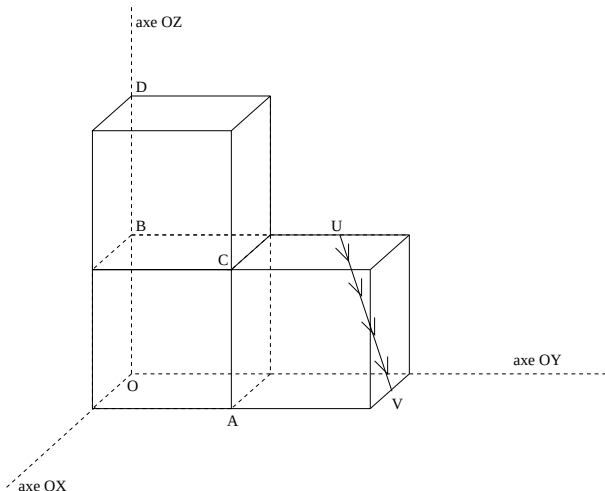
On donne les points $U = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des projections sur le plan OXY parallèlement au segment $[UV]$ des points suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En déduire une formule qui calcule les coordonnées de la projection d'un point quelconque.

Avant toute chose, visualisons la situation sur un réseau cubique.

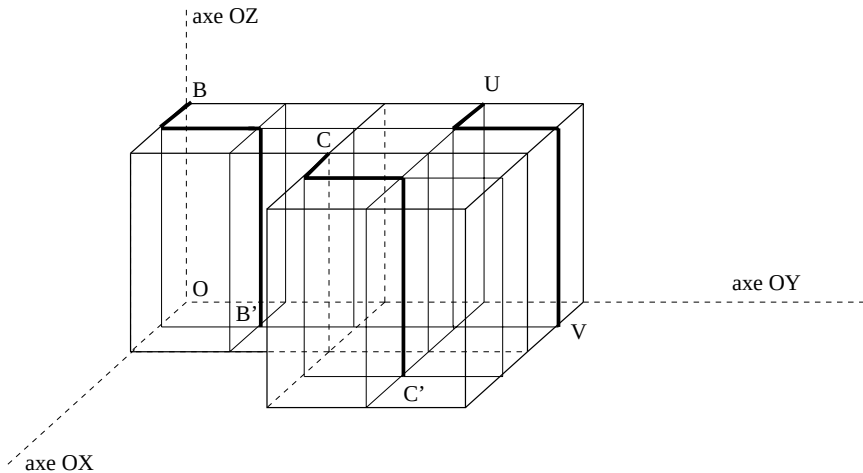


Le point A est confondu avec sa projection A' car il se trouve dans le plan OXY , donc

$$A' = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

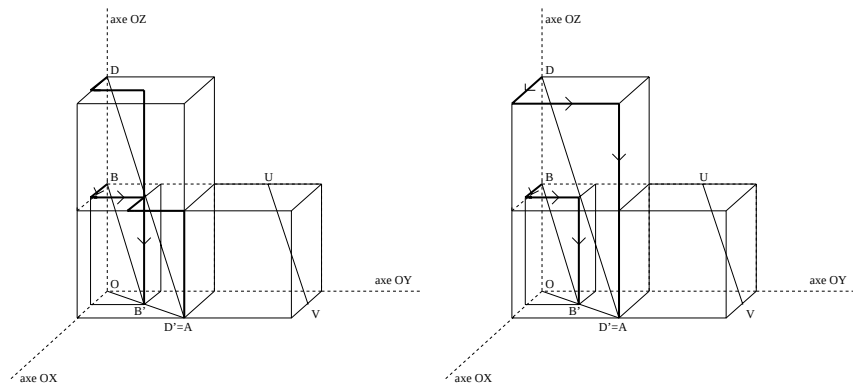
Les coordonnées des images des points de hauteur 1 (à savoir B , C et U) s'obtiennent *à chaque fois* en suivant un même chemin, encodé dans le prisme de diagonale $[UV]$:

- avancer de $\frac{1}{2}$ parallèlement à l'axe OX
- avancer de $\frac{1}{2}$ parallèlement à l'axe OY
- descendre de 1 (c'est-à-dire avancer de -1) parallèlement à l'axe OZ

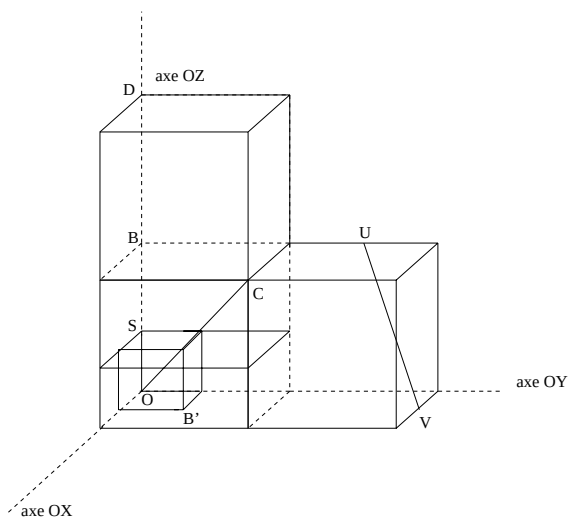


Ce procédé se généralise par homothétie à tous les points.

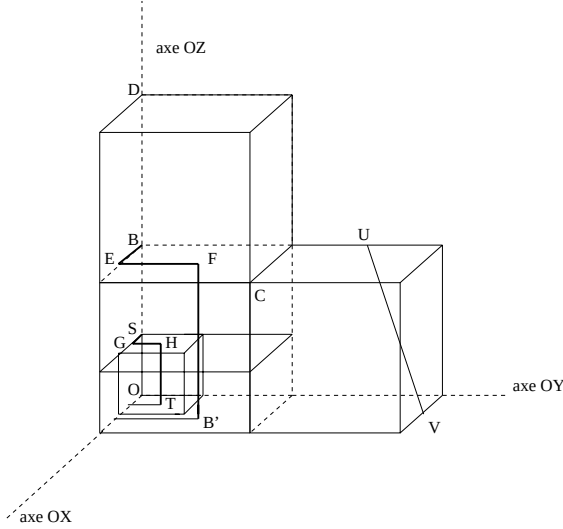
Regardons le point D . Puisque sa hauteur vaut 2, les coordonnées de sa projection sur le plan XOY s'obtiennent en effectuant deux fois le chemin précédent. Autrement dit, le chemin “parcouru par D ” est l'image par une homothétie de rapport 2 de celui parcouru par B . (Remarquons que, en classe, des justifications sont utiles pour expliquer que le chemin agrandi deux fois mène au même point que le chemin original appliqué deux fois de suite).



Prenons à présent un point S de l'axe OZ ayant une hauteur quelconque z .



L'homothétie de centre O et de rapport z amène le *cube unité* de diagonale $[OC]$ sur un cube dont S est un sommet.



Cette homothétie envoie le prisme de diagonale $[BB']$ sur le prisme de diagonale $[ST]$. La projection du point S est donc le point T .

On en déduit que la projection d'un point quelconque P de hauteur z s'obtient à partir de P par le même chemin que celui qui mène de S à T .

Des prolongements permettent d'obtenir en général les coordonnées de la projection parallèlement à UV du point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur le plan OXY par la formule :

$$\text{proj}_{OXY}^{//UV}(P) = P + z \cdot (V - U)$$

où z est la hauteur de P .

4.6. Le logiciel “RESEAU”

Afin d'aider à la construction et la manipulation de réseaux cubiques, un logiciel a été développé.

Les professeurs peuvent grâce à ce logiciel produire aisément des dessins pouvant servir de support aux problèmes, ou aider à leur résolution.

En outre, ils peuvent faire subir aux constructions des rotations dans l'espace et ainsi présenter plusieurs points de vue de la même figure.

De plus, le choix de la représentation en perspective cavalière, centrale, ou en projection orthogonale est laissé à l'utilisateur.

5. Quel enseignement d'algèbre linéaire ?

Comment les résultats de cette recherche peuvent-ils se traduire en propositions concrètes d'enseignement, et éventuellement, en termes de programmes ?

En réponse à cette question, une proposition a été esquissée, qui couvre le cours de mathématiques à 4 périodes/semaine des *deux* années du 3^{eme} degré de l'enseignement secondaire. L'idée qui est à la base de cette proposition est de mener de front les activités liées à l'algèbre linéaire et celles liées à la géométrie dans l'espace.

Pour l'essentiel, elle est construite comme suit.

- **Réseau cubique**

- Situer des objets géométriques simples (points, droites, plans, triangles, ...) dans un réseau cubique.
- Résoudre des problèmes d'incidence (intersection droite/plan, ...) pour des objets géométriques donnés dans un réseau cubique.
- Résoudre des problèmes simples de mesures de distances ou d'angles dans des sections planes appropriées d'un réseau cubique.

- **Calcul vectoriel et équations paramétriques d'une droite**

- Exprimer les coordonnées d'un point dans un réseau cubique.
- Ecrire les équations paramétriques d'une droite donnée dans un réseau cubique en suivant le modèle de l'équation d'une droite dans un plan : droite passant par l'origine, parallélisme de deux droites, droite quelconque, ...
- Déterminer l'intersection d'une droite avec les plans de coordonnées.
- Utiliser à ces occasions les notions de vecteurs (vecteurs-colonnes, vecteurs-points, ...) ainsi que les opérations qui s'y rapportent, comme unification et abréviation des procédures de calcul sur les trois coordonnées.

- **Equations cartésiennes d'un plan**

-
-
- Ecrire l'équation cartésienne d'un plan (non vertical), contenant l'origine, à partir de ses intersections $z = ax$ et $z = by$ avec les plans de coordonnées Oxz et Oyz : interpréter $z = ax + by$.
 - Ecrire une équation cartésienne d'un plan vertical passant par l'origine : interpréter $ax + by = 0$ dans un plan et dans l'espace.
 - Ecrire l'équation cartésienne d'un plan quelconque.
 - Caractériser le parallélisme de deux plans.
 - Interpréter algébriquement les problèmes d'incidence (plans, droites, ...) pour des objets géométriques donnés dans un réseau cubique.
 - **Produit scalaire**
 - Associer le produit scalaire de deux vecteurs à l'expression en coordonnées de la formule du cosinus (ou forme généralisée du théorème de Pythagore).
 - Résoudre des problèmes simples de mesure de distances ou d'angles pour des objets géométriques donnés.
 - Interpréter algébriquement des problèmes d'orthogonalité pour des objets géométriques donnés.
 - **Aire, volume et déterminant**
 - Associer un déterminant 2×2 à l'expression en coordonnées de l'aire d'un parallélogramme dans un plan.
 - Dédire de la formule du produit scalaire l'expression en coordonnées de l'aire d'un parallélogramme dans l'espace.
 - Associer un déterminant 3×3 à l'expression en coordonnées du volume d'un parallélépipède dans l'espace.
 - Expliciter les propriétés usuelles des déterminants en termes d'aire ou de volume.
 - **Matrices de transformations linéaires**
 - Représenter une transformation linéaire de l'espace par l'action d'une matrice 3×3 sur un vecteur-colonne. Ecrire en particulier les matrices des transformations élémentaires suivantes, à partir de leur représentation dans un réseau cubique :
 - homothéties,
 - symétries centrales, axiales (axes de coordonnées), dans un plan (plans de coordonnées),
 - symétries du cube, de l'octaèdre, du tétraèdre,
 - projections orthogonales (sur les axes et plans de coordonnées).

-
-
- Associer à la composition de deux transformations linéaires le produit des matrices de représentation, à partir de l'action sur un vecteur-colonne.
 - Associer l'inversion d'une matrice 3×3 à la résolution d'un système d'équations 3×3 , ainsi qu'à l'expression de la transformation inverse d'une transformation donnée.
 - Interpréter un système d'équations 3×3 en termes de combinaison linéaire de vecteurs-colonnes, en déduire les formules de Cramer à partir de l'interprétation du déterminant en termes de volume.

Signalons encore que dans l'état actuel de rédaction des programmes (septembre 1997), la géométrie d'incidence de l'espace (qui est couverte ici dans le paragraphe consacré au réseau cubique) est étudiée en 4^e année de l'enseignement secondaire.

Intervention de la délégation de la SBPMef à Tihange

J.-P. Houben, J. Liesenborghs et J. Navez,

Lors de la réunion organisée le 15 octobre 1997 au CAF à Tihange par les inspecteurs de mathématique, les représentants de la SBPMef ont insisté sur les points suivants.

Considérations générales

- Il est malaisé de se faire une idée sur un document qui contient une énumération de sujets sans ligne directrice forte.
- Quel que soit le nombre de périodes hebdomadaires que les élèves ont décidé de consacrer aux mathématiques dans leur formation générale, il est important de ne pas transiger sur la rigueur. Pour tous les élèves, et surtout pour ceux qui ne feront plus ou très peu de mathématiques dans leurs études ultérieures, il faut leur faire connaître ce que sont les mathématiques. Apprendre à démontrer, c'est-à-dire convaincre un autre d'une réalité non évidente. Un mathématicien doit être un homme honnête qui ne peut pas tricher et qui doit être convaincu de ce qu'il avance.
- Pour pouvoir faire des démonstrations, pour insister sur la rigueur, il est nécessaire que le programme ne soit pas trop chargé, il faudrait penser à l'alléger de certaines matières qui pourraient très bien être vues dans l'enseignement supérieur. Pour beaucoup d'élèves, il est plus important de savoir ce que c'est qu'un raisonnement mathématique plutôt que de disposer de beaucoup d'informations.

Cours à 4 périodes/semaine

- L'introduction du calcul matriciel en 5ème laisserait du temps pour pouvoir le pratiquer pendant deux ans et ici aussi le calcul matriciel et le calcul vectoriel viendront enrichir la géométrie dans l'espace. En analyse, il serait souhaitable de conseiller la limitation des fonctions étudiées aux fonctions rationnelles; leur étude est suffisante pour mettre en place les notions d'asymptote, dérivée, tangente, extrema, ...
- En algèbre, il faut prévoir la résolution des inéquations.

-
-
- En trigonométrie, comment va-t-on étudier les fonctions trigonométriques si on n'a pas établi les formules d'addition et de factorisation ?
 - En traitement des données, pourquoi a-t-on fait disparaître l'approche de la loi binomiale, l'utilisation de la loi normale et l'usage des tables ? Outre le fait que les étudiants qui ont choisi cette option peuvent rencontrer ces notions s'ils poursuivent des études en sciences, en économie, en psychologie, ..., il faut bien avouer que le recours aux statistiques et les interprétations souvent abusives qui en sont faites, notamment dans les médias, justifient notre insistance à les considérer comme faisant partie de la formation générale du citoyen.

Cours à 6 périodes/semaine

- L'apprentissage de la géométrie, du calcul vectoriel, du calcul matriciel et des systèmes d'équations, il nous paraît que ces matières devraient être vues de manière concomitante afin que les différents outils d'appréhension de l'espace puissent se conforter mutuellement au lieu de l'émiettement qui est proposé. Ceci demande de revoir la répartition des matières entre la 5ème et la 6ème.
- Il ne faut pas craindre d'introduire des outils plus modernes qui permettent des solutions élégantes à de nombreux problèmes, nous pensons que le produit vectoriel est un de ces outils.
- Le volet "statistique et probabilités" devrait inclure l'étude de la loi normale pour les mêmes raisons que celles explicitées plus haut.

Jean-Paul Houben, Jacqueline Liesenborghs, Jacques Navez

Réflexions sur l'enseignement de la géométrie

M. Kassab, *Institut agronomique et vétérinaire Hassan II (Rabat)*

Tout en constituant un plaidoyer pour une réhabilitation de la géométrie d'Euclide, les réflexions qui suivent tracent aussi la voie pour une meilleure exploitation de ses textes.

* * * * *

Quand, avec du recul, je me penche sur mes années d'élève du secondaire ainsi que sur les enseignements tirés d'une longue expérience d'enseignant de Mathématique, je ne peux que reconnaître et admettre que mon intérêt pour "les maths d'alors", je le dois tout particulièrement à la géométrie d'Euclide qui a permis à mon jeune esprit de s'éveiller, et ce pour la première fois, à l'art de réfléchir, de raisonner, voire de faire oeuvre d'imagination et de créativité, et ce, à l'heure où se prévalaient dans les autres branches, l'algèbre ou la trigonométrie par exemple, mnémotechnie, stéréotypie, automatisme et mémorisation des formules, des règles et des démarches.

C'est ainsi, une fois "prof. de Maths", pour me forger une opinion valable sur un élève, je recourais à ce que je crois être une bonne méthode d'évaluation qui est celle qui consiste à mettre l'élève face à un problème de géométrie en vue d'analyser et juger son approche de ce problème et ses recherches pour lui trouver une solution.

* * * * *

Certes, la géométrie d'Euclide souffre de lacunes et nombreuses sont ses imperfections ⁽¹⁾ sur le plan de la logique. Mais on aurait pu combler ses lacunes et remédier à ses imperfections, sans porter atteinte à des structures ayant fait leurs preuves, en formant pendant des siècles des générations de grands mathématiciens. Il est aisé de dénigrer l'oeuvre d'Euclide, mais nous a-t-on proposé à ce jour "autre chose" qui s'est avérée aussi fiable ? Il est permis d'en douter.

* * * * *

Des reproches, si reproches il y a, ne sont pas à adresser à la géométrie d'Euclide, mais à ces enseignants qui, n'ayant jamais soulevé devant nous,

1. Ne se sentant nullement concernés par ces imperfections logiques, les utilisateurs de cette géométrie n'ont qu'à se louer, par contre, de sa grande utilité et du vaste champ de ses applications.

ne fût-ce que brièvement, le problème de l'existence d'autres géométries, nous ont implicitement laissé croire qu'il n'en existait pas d'autres et l'on comprend pourquoi l'idée de la possibilité logique d'autres géométries, autrement dit, l'idée de la pluralité des géométries ne nous a jamais effleuré l'esprit. Comment reconnaître par ailleurs une géométrie quand on ne s'était même pas donné la peine de vous définir ce que c'est une géométrie ?

* * * * *

Pourtant, un modèle ⁽²⁾ de géométrie non-euclidienne ressortait clairement et directement des textes de la géométrie d'Euclide et il aurait fallu le cueillir afin de le présenter et l'offrir en cadeau de fin d'études secondaires, ce qui aurait valorisé et la géométrie d'Euclide et son enseignement.

Mais comment s'y prendre pour introduire un tel modèle ?

En procédant à une étude des droites et des triangles dans le plan euclidien α et sur une surface hémisphérique ouverte, notée S , on arrive à dresser le tableau ⁽³⁾ comparatif suivant, où l'on entend par droite, segment de droite et un triangle de la surface S , un demi grand cercle, un arc de grand cercle et un triangle sphérique convexe de cette surface.

2. A vrai dire, il y en a deux. Voir à ce sujet notre article paru du n°5 de *Mathématique et Pédagogies* sous le titre "Sur une esquisse, pour l'enseignement secondaire, d'un modèle euclidien de la géométrie hyperbolique plane de Lobatchevski", ou se reporter à l'annexe.

3. Ce tableau est quasiment tiré du "vieux" Dalle et de Waele avec le vocabulaire d'époque.

Le plan euclidien α	La surface hémisphérique S
– Le plan α est un ensemble infini de points, il est ouvert, il n'est ni fini, ni mesurable et il en est de même de ses droites. – Deux points distincts déterminent une droite et une seule. – Le plus court chemin entre deux points est le segment de droite reliant ces deux points. – D'un point extérieur à une droite, on peut mener une parallèle et une seule à cette droite. C'est à ce postulat dit d'Euclide ou des parallèles que le plan euclidien et sa géométrie doivent leur appellation. On dit géométrie euclidienne, mais aussi géométrie parabolique. – D'un point situé ou non sur une droite, on peut toujours mener une perpendiculaire et une seule à cette droite. – Dans tout triangle a) Un côté quelconque est inférieur à la somme des deux autres et supérieur à leur différence. b) Un côté aussi bien que la somme des côtés ne sont pas limités supérieurement. c) La somme des angles vaut deux droits.	– La surface S est un ensemble infini de points, elle est ouverte, finie et mesurable et il en est de même de ses droites dont la longueur commune est celle d'un demi grand cercle. – Deux points distincts déterminent une droite et une seule. – Le plus court chemin entre deux points est le segment de droite reliant ces deux points. - D'un point extérieur à une droite, on ne peut mener aucune parallèle à cette droite, deux droites distinctes de S y étant toujours sécantes. - La géométrie de S qui n'admet pas le postulat d'Euclide est une planimétrie d'une géométrie non euclidienne, appelée géométrie sphérique ou elliptique. – Du pôle d'une droite, on peut mener une infinité de perpendiculaires à cette droite; de tout autre point, une perpendiculaire et une seule. – Dans tout triangle a) Un côté quelconque est inférieur à la somme des deux autres et supérieur à leur différence. b) Un côté quelconque est inférieur à un demi grand cercle et la somme des côtés est moindre qu'un grand cercle. c) La somme des angles est supérieure à deux droits; elle est plus précisément comprise entre deux et six droits.

Le plan euclidien α	La surface hémisphérique S
d) Un angle extérieur vaut la somme des angles intérieurs non adjacents. – Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont :	d) Un angle extérieur est inférieur à la somme des angles intérieurs non adjacents. – Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont :
a) Un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.	a) Un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun et disposés de la même manière.
b) Un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.	b) Un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun et disposés de la même manière.
c) Les trois côtés égaux chacun à chacun.	c) Leurs côtés égaux chacun à chacun et placés dans le même ordre.
	d) Leurs angles égaux chacun à chacun et disposés semblablement.
On ne manque pas de relever que si deux triangles ont leurs angles égaux chacun à chacun, alors ils sont semblables et ils ne sont donc pas nécessairement égaux.	On ne manque pas de relever que si les éléments égaux dans deux triangles de S sont disposés dans des ordres inverses, alors ces triangles, sans être égaux, sont équivalents, c'est-à-dire ont même aire.

Remarques :

1. On peut, dans le cadre de l'axiomatique de Hilbert, établir l'équivalence du postulat d'Euclide ou axiome des parallèles avec la proposition : “dans tout triangle, la somme des angles vaut deux droits”.
2. La théorie des triangles rectilignes du plan euclidien α présente des analogies avec celle des triangles sphériques convexes de la surface hémisphérique S . Toutefois, les différences entre les deux théories sont grandes. C'est ainsi que les théorèmes découlant du postulat d'Euclide et notamment ceux ayant trait aux angles d'un triangle ou à la similitude des triangles n'ont pas d'analogues sur la surface S ; ils sont propres à la géométrie euclidienne. Il en est évidemment ainsi de la notion de rectangle.

Aire d'un triangle

S_{ABC} désignera l'aire du triangle ABC d'angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$; de côtés a, b, c et de demi-périmètre p . Cela étant, on sait que :

– Dans le plan euclidien α , un côté d'un triangle et la hauteur qui lui est associée n'étant pas limitée supérieurement, il en est de même de l'aire de ce triangle qui peut s'exprimer dans le cas du triangle ABC par

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

– Sur la surface hémisphérique S de rayon R , l'aire forcément limitée supérieurement de tout triangle de S tel que ABC s'exprime par

$$\frac{S_{ABC}}{2\pi R^2} = \frac{|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| - 2d}{4d}$$

ou

$$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| - \pi = \frac{1}{R^2} S_{ABC}.$$

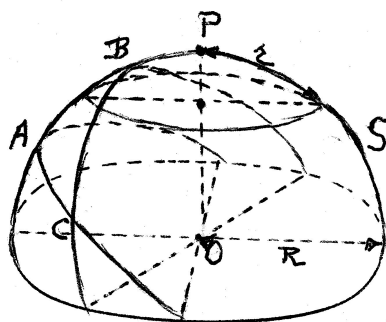
Il s'ensuit que l'excès sphérique $|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| - 2d$ d'un triangle ne dépend aucunement de sa grandeur absolue, mais de sa grandeur relative par rapport à l'aire de la surface S . Ainsi, un tout petit triangle, situé sur une toute petite sphère, peut avoir un important excès sphérique ; par contre, un tout grand triangle, d'une énorme ou gigantesque sphère, peut avoir un excès négligeable ou presque nul et la géométrie de ce triangle peut être valablement considérée comme euclidienne. Notons qu'il ne peut en être autrement, l'excès sphérique dépendant directement de l'incurvation de la surface hémisphérique S , c'est-à-dire de la courbure totale ρ ($\rho = \frac{1}{R^2}$) de cette surface ; cette dernière, avec un rayon qui va en croissant tend à s'aplanir et finit pour $R = \infty$; donc pour une courbure totale nulle et partant pour un excès sphérique nul, par épouser et le plan euclidien et sa géométrie. De ce point de vue, la géométrie d'Euclide est un cas particulier, un cas limite de la géométrie sphérique.

Cercles de la surface hémisphérique S

– Dans le plan euclidien α , le rayon r , $r \in \mathbb{R}^+$, d'un cercle pouvant être arbitrairement choisi, la longueur et l'aire de ce cercle n'ont donc pas de limite supérieure dans ce plan, où elles valent respectivement $2\pi r$ et πr^2 .

– Sur la surface hémisphérique S et en se limitant aux cercles de cette surface centrés sur son pôle P , on se rend de suite compte que le rayon r d'un cercle étant limité supérieurement à $\frac{1}{2} \pi R$, la longueur de ce cercle (respectivement son aire) est au plus égale à $2\pi R$ (respectivement $2\pi R^2$).

On ne manquera pas de relever que, dans le plan euclidien aussi bien que sur la surface hémisphérique, les cercles concentriques sont des courbes parallèles équidistantes les unes des autres et orthogonales aux faisceaux des droites issues de leurs centres respectifs.



Que conclure ?

Nous venons de prouver que les textes d'Euclide préparent bien à une bonne introduction aux géométries non-euclidiennes et ce, sans surcharge d'horaire ni de programme. En s'y dérobant, consciemment ou non, l'enseignant a failli à sa noble mission qui est celle de former plus que d'informer, de tirer le maximum d'un cours afin d'assurer à ses élèves la maîtrise d'un outil certes, mais aussi la richesse d'une information et d'une culture, plutôt que de leur faire ingurgiter des connaissances souvent mal enregistrées, mal assimilées et, de ce fait, mal reproduites.

ANNEXE

Sur les angles d'un triangle hyperbolique

Par plan hyperbolique, droite hyperbolique et triangle hyperbolique, on entend respectivement dans la suite, le demi-plan ouvert de bord Δ noté ω , tout demi-cercle de ω centré sur Δ et tout triangle curviligne de ω dont les côtés sont contenus dans des droites hyperboliques de ce plan. Cela étant, on arrive aisément à établir, en faisant appel aux propriétés suivantes de l'inversion :

1. La figure inverse d'un cercle qui comprend le pôle d'inversion est une droite perpendiculaire au diamètre de ce cercle passant par ce pôle.
2. La figure inverse d'un cercle qui ne comprend pas le pôle d'inversion est un cercle. En particulier, un cercle est son propre inverse si la puissance d'inversion est égale à celle du pôle par rapport à ce cercle.
3. L'inversion conserve les angles ⁽⁴⁾

cet important théorème.

Théorème. *Dans tout triangle hyperbolique, la somme des angles est inférieure à deux droits.*

De fait, l'inversion ayant pour pôle le point S , symétrique du sommet A par rapport à la droite Δ , et pour puissance, celle de ce point par rapport au cercle $\mathcal{C}_1$, applique le triangle hyperbolique ou curviligne ABC sur le triangle semi-curviligne $A'B'C'$ dont la somme des angles est, de toute évidence, inférieure à deux droits.

Plus précisément, on a

$$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = |\hat{A}'| + |\hat{B}'| + |\hat{C}'| = \pi - \theta,$$

avec $\theta(\text{mes } \widehat{B'C'}) \in]0, \pi[$ ⁽⁵⁾, l'arc $\widehat{B'C'}$ étant strictement contenu dans un demi-cercle.

4. Plus exactement, l'inversion respecte la grandeur des angles et non leur sens.

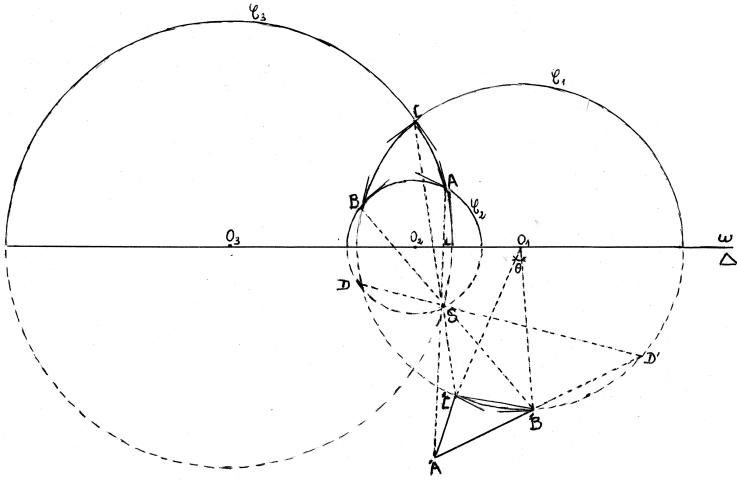
5. θ est le déficit angulaire du triangle ABC .

Corollaires. (Ils découlent directement de ce théorème et s'énoncent ainsi) :

1) *Dans tout triangle hyperbolique, un angle extérieur est supérieur à la somme des angles intérieurs non adjacents.*

2) *Il ne peut exister de rectangle, au sens euclidien, dans le plan hyperbolique ω .*

Somme des angles d'un triangle hyperbolique



On a : $|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = |\hat{A}'| + |\hat{B}'| + |\hat{C}'| = \pi - \theta < \pi$, vu que $\theta(\text{mes } \widehat{B'C'}) \in]0, \pi[$.

Adresse de l'auteur :

Moustapha KASSAB

Rue Gothale 7

4672 St-Remy

La notion d'aire

P. Marlier, Ancien professeur à la Haute Ecole
Liège-Verviers-Huy-Gembloux

Mots-clé : aire, mesurer une surface.

Introduction

Le document “SOCLES DE COMPETENCES ...” (p.55) dit que les compétences mathématiques spécifiques à acquérir à l'école primaire “... s'articulent autour de deux grands types d'approche du réel :

- l'approche quantifiable
- l'approche non quantifiable.

L'approche quantifiable du réel présente les compétences spécifiques relatives au savoir-calculer (le discontinu) et au savoir-mesurer (le continu).

L'approche non quantifiable du réel présente les compétences spécifiques relatives au **savoir-structurer l'espace et ses composantes.**”

Il n'est pas sûr du tout – que du contraire – que beaucoup de nos étudiants futurs instituteurs tirent un grand profit de ces lignes et se préparent à baser leur enseignement de la mathématique sur ces réflexions.

Avec tous les risques d'erreur qu'on peut trouver dans les synthèses ou raccourcis comme ce qui va suivre, il me semble que pour beaucoup, tout ce qu'on peut dire des segments est qu'on peut les mesurer grâce à une règle ou à un mètre, des surfaces (souvent entendues comme surfaces planes délimitées par des segments) qu'elles ont une aire qu'on calcule par des formules. De même pour les volumes des solides. Les questions posées hors de ce contexte paraissent saugrenues.

Si vous donnez par exemple des découpes de papier qui ont plus ou moins l'air d'être des carrés ou des losanges et que vous demandez de vérifier si c'en sont vraiment, en précisant que vous ne disposez que de ces découpes (donc ni règle, ni compas, ni mètre-ruban, ni moyen d'écriture, ni ...), dans la plupart des cas, vous allez laisser votre auditoire pantois. Si vos auditeurs savent que vous posez parfois des questions impossibles, vous en aurez probablement un certain nombre qui choisiront de vous répondre qu'il n'y a pas moyen de répondre. C'est que tous comprennent fort bien qu'il s'agit

(entre autres) de vérifier des identités de longueurs de segments et que dans leur esprit, la seule façon de comparer des segments est de les mesurer.

La situation-défi qui précède comporte un piège : la précision qu'il s'agit de découper *de papier* n'est pas innocente. Pour s'en rendre compte, il suffit de modifier la question : en faisant abstraction du fait que trois coins sont arrondis et le quatrième coupé, une disquette d'ordinateur est-elle un carré ? Même difficulté pour des figures qui apparaissent sur le géoplan.

La solution consiste bien sûr à avoir conscience qu'une feuille de papier est pliable et que des pliages adéquats vont éventuellement permettre les vérifications demandées. Ce qui change entre la situation "papier" et la situation "disquette", c'est que cette règle du jeu (cet axiome) qu'est la "pliabilité du support" est présente dans un cas mais pas dans l'autre ⁽¹⁾.

Dans la situation "disquette", la question me semble bien impossible si je dispose d'une seule disquette et de rien d'autre. Mais si j'ajoute à mon axiomatique que je dispose de plusieurs exemplaires de disquettes, le problème devient soluble : la multiplicité des exemplaires du même objet va permettre les superpositions qui entraîneront la conviction. Il en va de même si je prends cette autre axiomatique qui consiste à dire que je dispose de papier (éventuellement d'un crayon) et d'une paire de ciseaux, bref que je dispose des moyens de ramener la nouvelle situation à la situation précédente. Pour le travail au géoplan, la ficelle (non élastique) peut être un outil pédagogique intéressant pour reporter des longueurs ⁽²⁾.

On pourrait examiner de même si des quadrilatères donnés sont des rectangles ou des parallélogrammes.

Ces premiers exemples fort élémentaires laissent entrevoir ce qu'on peut entendre par "approche non-quantifiée", ainsi que certains avantages pédagogiques qu'on peut en espérer :

- l'enfant est amené à prendre en considération ou même à produire une vraie argumentation à la fois très logique et très intuitive.

1. On trouve dans certains manuels ou ouvrages destinés aux instituteurs l'idée que l'utilisation de la règle et du compas est motivée par un souci de précision. Rien n'est évidemment plus faux : il s'agit bel et bien d'exigences axiomatiques. Si vous avez la fibre plus pédagogique, vous exprimerez quelque chose de voisin en disant par exemple qu'il s'agit de préciser ses prérequis. On mettra peut-être tout le monde d'accord en parlant d'énoncer clairement les "règles du jeu".

2. La ficelle a cet avantage sur le compas qu'avec une ficelle, on voit le segment qu'on reporte ou "transporte", tandis qu'avec le compas, c'est la seule chose qu'on ne voit pas.

- les notions et les propriétés des médianes ou des diagonales (pour les exemples cités) se présentent assez naturellement (mieux, fonctionnellement) avec les liens qu'elles ont avec les caractéristiques des figures.

- l'idée exprimée par le CREM ⁽³⁾ que l'approche des figures "par familles" soit plus intéressante et plus féconde par l'approche du type monographique, reçoit une sorte de confirmation par simple mise en oeuvre.

- un tel enseignement fait appel dès le départ de façon naïve et spontanée à des notions ou outils mathématiques qui seront approfondis plus tard, en particulier, les isométries.

On peut encore ajouter, même si c'est peu apparent à partir de ces quelques exemples, que l'idée sous-jacente est la notion mathématique (très élaborée) de longueur comme classe d'équivalence de segments. Je doute que cette abstraction soit familière à la majorité des personnes qui enseignent des mathématiques, instituteurs, régents ou même licenciés. Aussi j'en propose volontiers la traduction suivante, qui comme toute traduction est au moins un peu trahison ⁽⁴⁾ : la longueur d'un segment est ce qu'il a en commun avec tous les segments qui lui sont superposables (par et uniquement par les manipulations ou constructions décrites dans les axiomes ou règles du jeu).

A première vue, cette "traduction" ne paraît peut-être pas un progrès décisif. Si vous y ajoutez une interprétation de cette "propriété commune" comme celle qui va suivre, on pourra considérer qu'on a établi un pont entre le point de vue mathématique très abstrait (très proche des manipulations initiales cependant) et le point de vue courant, peu satisfaisant pour le mathématicien, dans lequel il n'est pas rare de trouver une définition comme : la mesure d'un segment, c'est le nombre d'UL (Unités de Longueur) qu'il comporte (ou qu'il mesure (!) ou ...).

L'idée est de dire que si en plus de mes segments superposables (isométriques), je dispose d'une règle graduée, en unités arbitraires ou conventionnelles, et si je construis un segment superposable aux autres mais qui a une de ses extrémités sur le zéro de la règle graduée, quel que soit le segment-individu choisi pour faire ma construction, son autre extrémité se

3. CREM, LES MATHÉMATIQUES de la maternelle jusqu'à dix-huit ans, § 6.2.2 Explorer des familles de figures..., pp. 144 et sv.

4. Un ami m'a un jour repris avec quelque humeur : "Mais enfin quand tu fais des maths, abandonne donc tes habitudes de pensée philosophiques ou métaphysiques ! Astreins-toi à ne t'exprimer qu'en termes d'ensembles." Sur le fond, il a bien sûr raison : tout le progrès de la pensée mathématique accompli depuis un peu plus d'un siècle repose sur la volonté de s'imposer ce mode d'expression très restrictif mais très fécond.

trouvera sur (ou voisine de) la même barre de graduation de la règle. Cette barre de graduation étant identifiable par un codage numérique, le nombre qui est le nom de cette barre suivi (ou précédé) du nom de l'unité sera l'expression quantifiée de la mesure du segment.

Ceci suppose que les enfants sachent au moins un peu ce qu'est une règle. Des manipulations comme la mise bout à bout de segments permettent assez facilement de faire saisir ce qu'est la création d'une graduation sur une demi-droite en prenant comme donnée de départ un segment-unité. Pour la division en parties égales, la méthode de Thalès est bien difficile pour de jeunes enfants. Heureusement, une utilisation astucieuse de la ficelle (encore elle !) permet une mise en place assez accessible de la division en autant de parties égales que l'on veut d'un segment donné.

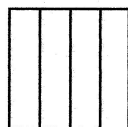
Pour terminer ces premières considérations, importantes du point de vue de la méthodologie, mais qui concernent la longueur alors que le sujet annoncé, c'est l'aire, remarquons encore que cette approche peut être menée avec succès avec de petits enfants parce que le vocabulaire requis n'est pas nécessairement très savant : y a-t-il vraiment des inconvénients à ce que les élèves disent que les segments sont “les mêmes” ou “égaux” plutôt que “isométriques”, “superposables” ou “de même longueur” ? Y a-t-il, pour leur imposer le vocabulaire savant, d'autres avantages que l'idée générale (discutable) selon laquelle mieux vaut apprendre (et utiliser) du premier coup le langage approprié puisque cela évite d'en changer plus tard ? S'il ne faut pas absolument bannir de notre arsenal pédagogique les “tu comprendras plus tard pourquoi”, il n'est pas dit non plus que ce soient des explications ou justifications du meilleur niveau.

1. De quelle autre surface celle-ci a-t-elle l'aire ?

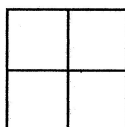
1.1. Couper des carrés en quatre

L'ouvrage du CREM déjà cité signale à plus d'une reprise que la notion de mesure est indissociable tant de la multiplication par des entiers que du fractionnement. Cette dernière opération est très étroitement liée à la notion de parts “égales”. On va voir que ce dernier mot, qui semble clair, requiert des précisions.

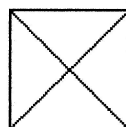
Supposons qu'à une fête d'anniversaire 12 enfants se trouvent autour d'une table et qu'ils vont se partager (en parts égales, bien sûr) 3 gâteaux carrés identiques. Chaque enfant recevra donc un quart de gâteau. Mais, fantaisie des parents, le premier gâteau (A) est divisé en tranches parallèles à un côté, le deuxième (B) selon les médianes du carré, le troisième (C) selon



A



B



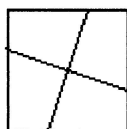
C

ses diagonales.

Remarquons que du point de vue du mathématicien, il y a une grande différence entre la situation (A) et les deux autres : la situation (A) se ramène à un problème de fractionnement de segment ; les deux autres sont des fractionnements de surfaces. Ceci apparaîtra encore plus clairement quand on remplacera le carré par un rectangle ou un parallélogramme (symbolisé en rectangle), ce qui est souvent le cas dans les classes primaires où il est question de partager une barre de chocolat ou de massepain. Cette abstraction de deux ou d'une dimension ne fait généralement pas difficulté à l'école primaire. On peut traiter les trois situations par des manipulations qui sont une mise en oeuvre de la méthode euclidienne parfois qualifiée de méthode "du puzzle".

Il est assez clair que les quatre enfants qui ont reçu un morceau de la découpe (A) ont reçu "la même chose". De même pour les autres découpes. Si on tient absolument à le faire valoir, on procédera par découpes dans du papier et superposition, c'est-à-dire qu'on montrera par les moyens adaptés aux acquis des enfants que pour chaque gâteau, il existe des isométries qui appliquent chaque morceau sur les autres.

Si on souhaite développer la pensée divergente, c'est-à-dire sortir un peu des sentiers battus, on peut imaginer des découpes plus fantaisistes du gâteau carré, par exemple celles-ci ou une infinité d'autres qu'on peut



D



E



F

imaginer.

Mais un morceau (A) est-il égal à un morceau (B) et à un morceau (C) éventuellement à un morceau (D), (E) ou (F) ? Que signifie d'ailleurs le mot "égal" dans ce contexte ?

On imagine l'idée qu'on souhaite faire acquérir aux élèves : ce qu'ont en commun une part de chacun de ces gâteaux, c'est le fait de pouvoir être superposées soit immédiatement, soit après découpe et recomposition. On dira que toutes ces parts du carré (du gâteau) ont **même aire**.

Que l'on ait ou non choisi de "diverger" vers (D), (E), (F) et autres découpes, on a donc une première définition de la notion d'aire : **deux figures (planes) ont même aire si elles sont superposables immédiatement (isométriques) ⁽⁵⁾ ou après découpe et recomposition.**

On ne manquera pas d'observer que cette définition NE dit PAS ce qu'est l'aire d'UNE figure ; elle énonce un premier critère permettant de dire quand deux figures ont même aire *sans qu'on sache ce qu'est l'aire de chacune d'elles*. Les mathématiciens y verront bien sûr en filigrane la notion d'aire comme classe d'équivalence ⁽⁶⁾.

Pour bien saisir la portée de la remarque qui précède, peut-être est-il utile de comparer la démarche proposée avec la manière beaucoup plus habituelle de procéder : l'aire d'une figure est le résultat d'un calcul qui utilise la formule appropriée. Quand on dit par exemple que l'aire d'un rectangle est, dans l'unité adéquate ⁽⁷⁾, le produit de la longueur par la largeur, on donne l'impression de formuler une propriété intrinsèque de chaque rectangle pris individuellement.

5. Je mets le mot "isométriques" entre parenthèses, parce que du point de vue logique, à ce stade, il n'est absolument pas indispensable. Qui tranchera de manière définitive (?) entre les deux positions antagonistes :

- puisque c'est le mot qu'ils utiliseront plus tard, pourquoi ne pas le leur apprendre dès maintenant ?

- puisque je n'en ai pas besoin maintenant, pourquoi ne pas se contenter des mots disponibles, surtout s'ils sont plus intuitifs ; ils découvriront plus tard les mots techniques dans des situations où ils en auront besoin ?

Je serais porté à penser que c'est seulement dans l'étude des solides qu'on aura vraiment besoin de la notion d'isométrie.

6. La remarque aurait pu être faite à propos de la longueur. Pour reprendre mon vocabulaire ^(*) "philosophique", la longueur d'un segment donné, c'est ce qu'il a en commun avec tous les segments qui sont superposables.

7. Le plus généralement, on omet de préciser que cela ne marche bien que si l'unité de longueur est la même dans toutes les directions du plan et si on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur. Sauf erreur de ma part, le pourtant excellent ouvrage du CREM déjà cité omet d'attirer l'attention là-dessus et je le regrette.

Cette première étape a déjà permis des mises au point : la notion d’“égalité” qu’une pensée naïve assez simple fait croire univoque, et qui s’exprime dans le langage des petits enfants par des expressions comme “c’est le même”, doit être affinée pour être adéquate à parler de situations pourtant assez banales. Ceci nous a menés à une première définition de la notion d’aire.

Personne n’imagine qu’on soit au bout de ses peines en ayant appris à couper des carrés en quatre. Le simple fait de poser la question du partage du carré en trois, en cinq, en six,... fait percevoir que le choix de la division en quatre n’était pas innocent : à des exceptions près (la division en huit, par exemple), il n’y a plus guère que la division “en bandes” qui fonctionne. C’est sans doute, comme on l’a dit précédemment, que la division “en bandes” ramène un problème de surface à un problème de longueur.

1.2. La figure s’allonge

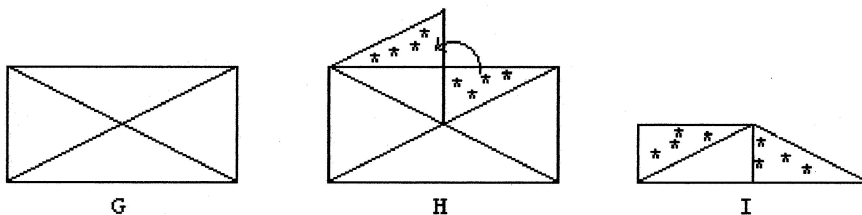
Voyons ce qui se passe si notre figure de base n’est plus un carré mais un rectangle.

Il n’y a guère de problème si on divise un rectangle en quatre selon ses médianes : il est assez évident que les parts sont “égales” au sens le plus élémentaire du mot, c’est-à-dire qu’elles sont superposables ou isométriques.

Il n’en va déjà plus tout à fait de même si on fait la découpe selon les diagonales. Dans une classe de 5e primaire, un de mes étudiants a posé la question de la découpe d’une pizza rectangulaire selon les diagonales. Une première réaction assez spontanée a été qu’il y avait deux parts pour les enfants et deux parts pour les grandes personnes ⁽⁸⁾. La plupart des élèves ont embrayé sur cette interprétation. Un d’entre eux a cependant fait remarquer que c’était douteux parce que si un des triangles (d’une moitié du rectangle) avait une base plus longue, sa hauteur était moindre ; il en concluait qu’il devait y avoir égalité, mais il

8. Ni mon étudiant ni moi-même n’ont malheureusement eu l’idée de demander aux enfants quelles étaient les grandes et les petites parts.

n'a guère eu l'occasion de justifier son point de vue de manière plus explicite.



L'étudiant a alors fait procéder à la découpe d'une feuille de papier selon les diagonales, puis à la découpe en deux selon la hauteur adéquate d'un des triangles obtenus pour faire apparaître, à la surprise générale, que les parts étaient égales.

Quelques remarques d'ordre didactique :

- aucun élève n'a protesté contre le fait que la "pizza" soit subitement devenue feuille de papier. Cela me donne à penser que si la présentation "concrète" était indispensable pour que les enfants s'intéressent à la question, ils ont tous admis sans hésitation que c'était d'une comparaison de formes géométriques abstraites qu'il s'agissait.

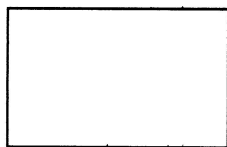
- cette conviction est confirmée par la remarque taquine d'un des élèves qui a dit que les parts n'étaient pas égales parce que telle (qu'il a montrée) avait une olive en plus.

- même si la chose a été immédiatement peu exploitée dans la classe en question, il me semble évident que les enfants ont été confrontés au problème de préciser leur notion de "parts égales" et donc de progresser à partir d'une situation d'évidence.

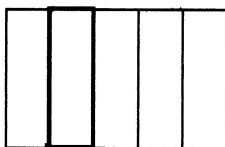
- ces manipulations permettent aussi de faire remarquer qu'une part de la découpe selon les diagonales est "égale" à une part de la découpe selon les médianes (figure I).

La découpe "en bandes" va ouvrir elle aussi d'autres horizons. Car d'une part, (c'était d'ailleurs déjà le cas pour le carré), elle permet la division en n parts égales, ce qui est une généralisation indispensable. Par ailleurs, cette division peut se faire de deux manières : en morcelant la longueur ou en morcelant la largeur. On rencontre de nouveau la question de l'égalité entre une part d'une découpe (K) et une part de l'autre découpe (L).

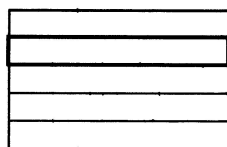
Supposons, pour pouvoir dessiner quelque chose, que $n = 5$



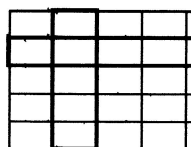
J



K



L



M

Si un élève fait observer que puisque les parts (K) sont égales entre elles, et de même les parts (L) et que par conséquent une part (K) ne peut qu'être égale à une part (L) puisque dans les deux cas il s'agit d'un cinquième du même tout, c'est qu'il a drôlement bien compris la notion de fraction comme opérateur et qu'il a une capacité d'abstraction bien au-dessus de la moyenne. S'il est bon de féliciter et d'encourager un tel élève, il n'est pas opportun de se fixer comme objectif d'amener tous les enfants de l'école primaire à ce niveau-là. C'est pourquoi une méthode comme la superposition des découpes (figure M), tout aussi logique, sera jugée plus intuitive et plus adéquate. De plus, elle peut amener une nouvelle définition de la notion d'aire : **deux figures planes ont même aire si elles sont “pavées” avec le même nombre de pièces identiques.**

Le détour par (M) apparaît ainsi comme bien autre chose qu'une concession à la faiblesse de certains élèves ; c'est le point de départ d'une autre interprétation de ce que peuvent avoir en commun certaines surfaces limitées.

1.3. On opère

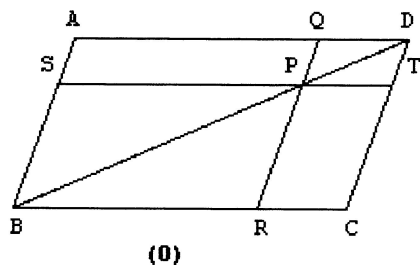
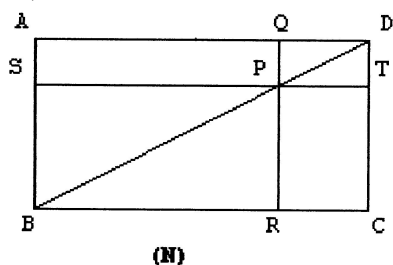
Au premier livre des *Eléments* d'Euclide ⁽⁹⁾, on trouve une figure dont (N) et (O) sont très voisines. Sur la diagonale $[BD]$ d'un rectangle ou d'un parallélogramme, on prend un point P . Par ce point, on trace les parallèles aux côtés du quadrilatère, ce qui fait apparaître diverses figures dont les rectangles ou parallélogrammes $AQPS$ et $PTCR$.

Ces figures vont nous intéresser à plus d'un point de vue.

En premier lieu, on peut y repérer un certain nombre des paires de triangles isométriques : ABD et BDC , BPS et BPR , PDQ et PDT .

9. EUCLID, The thirteen books of THE ELEMENTS, translated by Sir T.L. Heath, Dover, New York, 1956, Prop. 43

Ensuite, cette figure suggère fortement de faire appel à une opération d'addition : l'aire de la réunion de deux (ou plusieurs) surfaces disjointes est la somme des aires de ces surfaces.



Le mathématicien qui a étudié son sujet sait qu'il faut effectuer un certain nombre de vérifications pour s'assurer que tout cela est correct. Conformément au principe qu'avec des débutants, il faut éviter de démontrer des évidences, on prendra le travail des mathématiciens pour garant de telles évidences et on laissera les utilisateurs moins avertis écrire de manière naïve des équations comme

$$\text{aire de } ABD = \text{aire de } BPS + \text{aire de } PDQ + \text{aire de } AQPS \quad (1)$$

$$\text{aire de } BDC = \text{aire de } BPR + \text{aire de } PDT + \text{aire de } PTCT \quad (2)$$

Puisque

$$\text{aire de } ABD = \text{aire de } BDC,$$

on peut aussi écrire l'égalité entre les membres de droite des équations (1) et (2), puis simplifier pour obtenir

$$\text{aire de } AQPS = \text{aire de } PTCT.$$

Ce résultat est considérable parce qu'il n'y a aucune restriction sur les dimensions du rectangle ou du parallélogramme : les segments $[AB]$ et $[BC]$ peuvent fort bien être incommensurables, et le point P est quelconque sur sa diagonale.

On peut maintenant formuler une nouvelle et (provisoirement) définitive définition non-quantifiée de l'aire des figures planes rectilignes :

Deux figures planes rectilignes ont même aire

si

– elles sont isométriques

ou

– elles sont superposables “par morceaux”

ou

–elles sont “pavables” par le même nombre de pavés
identiques

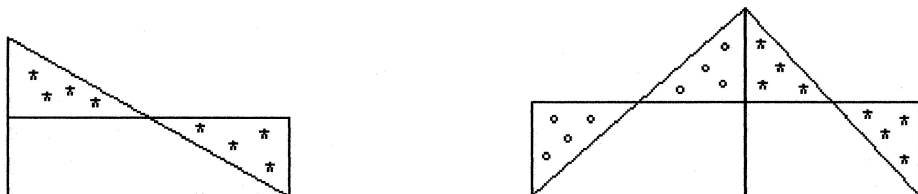
ou

– elles sont la somme ou la différence de figures de même aire
 (“aire” étant pris ici dans un des sens qui précèdent).

Rappelons encore une fois que cette définition ne dit en aucune façon ce qu’est l’aire d’une figure, mais qu’elle précise ce qu’ont en commun deux figures dont on dit qu’elles ont même aire. Ajoutons que pour traiter correctement de l’aire de figures planes non rectilignes ou de figures non planes, on aurait besoin de quelque chose comme le troisième axiome de Kolmogorov. Enfin, il reste à démontrer que ce qui précède suffit à étudier l’aire des figures planes rectilignes.

Pr 1.31 - *Construire un rectangle qui a même aire qu’un triangle donné.*

On imagine assez facilement la situation si le triangle est rectangle. S’il ne l’est pas, on le partage en deux par une de ses hauteurs; le triangle donné est donc la “somme” de deux triangles rectangles. Il suffit de faire deux fois le travail précédent.



Il existe une autre méthode couramment pratiquée : dupliquer le triangle pour obtenir un parallélogramme d’aire double; transformer ce parallélogramme en rectangle par découpe et translation; diviser ce rectangle en deux par une de ses médianes.

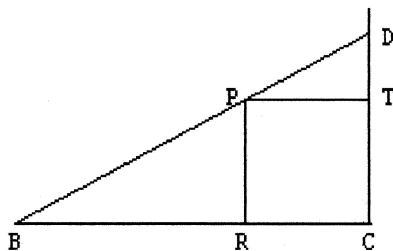
Quelle que soit la méthode retenue, il est clair qu'il y a plusieurs rectangles ayant même aire qu'un triangle donné.

Pr 1.32 - *Construire un rectangle ayant même aire qu'un rectangle donné et dont un des côtés est un segment donné.*

Dessiner le rectangle donné de manière qu'un de ses côtés soit dans le prolongement du segment donné. (Sur la figure, $[BR]$ est le segment donné et $RCTP$ le rectangle donné) Tracer les droites BP et TC ; leur intersection est D .

Il suffit de terminer la construction pour reproduire la figure (N) ci-dessus.

Le rectangle $AQPS$ (ou plus exactement un de ses translatés) est le rectangle demandé.



Pr 1.33 - *Construire un rectangle ayant pour aire la somme de deux rectangles donnés.*

La règle “naïve” d’addition des figures, déjà rencontrée, est la juxtaposition (sans recouvrement, évidemment). Ici on impose que le résultat soit un rectangle.

Si les deux rectangles ont une “dimension” commune, il suffit de les juxtaposer en utilisant cette dimension commune.

Sinon, selon la méthode du problème précédent, on crée sur un des côtés d’un des rectangles donnés un rectangle qui a même aire que l’autre rectangle donné.

Puisque toute figure rectiligne plane peut se décomposer en triangles et ceux-ci se transformer en rectangles qu’on peut additionner de manière à obtenir comme résultat un rectangle, on peut conclure que

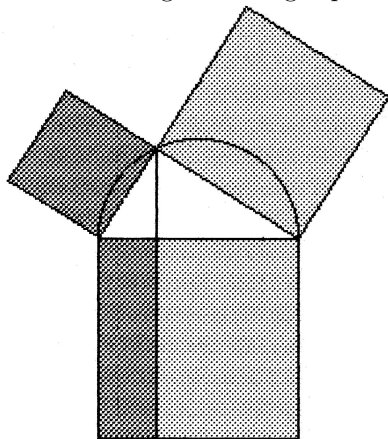
Deux figures rectilignes planes ont même aire
si
elles peuvent être transformées
(par les méthodes qu’on a dites)
en deux rectangles isométriques

On a donc à ce stade une notion non quantifiée d'aire qui convient pour toutes les figures rectilignes planes. On l'a dit, passer aux figures non rectilignes ou non planes est un autre problème d'envergure. Il ne retiendra pas notre attention ici.

2. Premier essai de quantification : la quadrature

Pourquoi s'intéresser tellement au rectangle, de préférence au triangle, par exemple ? Par ailleurs, ne serait-il pas plus intéressant de tout ramener au carré et de résoudre le problème de la quadrature qui consiste à construire un carré ayant même aire qu'une figure donnée ?

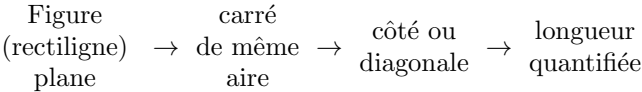
On sait que la démonstration du théorème de Pythagore qu'on trouve dans Euclide consiste à montrer que les surfaces hachurées de la même manière sur la figure ont même aire. Le théorème de Pythagore permet donc non seulement d'additionner deux carrés pour obtenir un carré (ou de soustraire un carré d'un autre pour obtenir un carré), mais de transformer un rectangle en un carré de même aire. Avec ce qu'on a vu précédemment, on a donc la quadrature de toute figure rectiligne plane, plus éventuellement



quelques autres.

En tenant compte du fait que le carré est une figure qui se définit par une seule donnée (outre le fait que ce soit un carré), et qu'il y a donc bijection entre les carrés du plan (à une isométrie près) et les points d'une demi-droite

qui sont eux en bijection avec les réels positifs, on voit que la méthode de la quadrature permet d'établir une application de l'ensemble des figures rectilignes planes (et certaines autres) dans les réels positifs, application qu'on peut résumer par le schéma suivant :



MAIS cette application N'est PAS une mesure au sens qu'on attribue à ce mot aujourd'hui, parce que "mesure" suppose que si A et B sont des parties disjointes d'un ensemble mesurable E, on ait

$$mes(A \cup B) = mes(A) + mes(B).$$

Dans le cas de la figure de Pythagore, on N'a évidemment

$$\begin{array}{l} \text{NI} \quad \text{côté de } A = \text{côté de } B + \text{côté de } C \\ \text{NI} \quad \text{diagonale de } A = \text{diagonale de } B + \text{diagonale de } C \end{array}$$

(par "côté", il faut bien sûr comprendre "longueur du côté", et de même pour "diagonale") ⁽¹⁰⁾.

C'est pourquoi, aussi géniale et séduisante qu'on puisse trouver cette théorie de la quadrature, ce n'est pas elle qu'on va retenir pour quantifier l'aire des figures planes. On préférera une méthode calquée, avec les modifications adéquates, sur celle qui a donné satisfaction dans la mesure des segments, c'est-à-dire la quantification des longueurs.

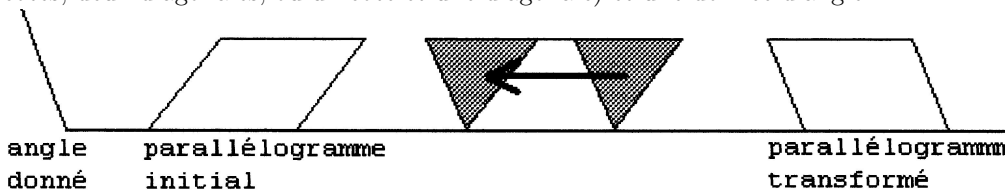
Mais avant d'y venir, il faut encore répondre à la première question de ce paragraphe : pourquoi pas le triangle comme figure de référence ?

On sait que le triangle est la figure de référence des isométries. Comme la notion d'aire est une notion plus faible que celle d'isométrie, il n'est pas

10. Si on ajoute une étape au processus indiqué et qu'on prend pour "mesure" de l'aire du carré le carré de la longueur de son côté, on échappe à cette objection. Cependant, on sait que si des quadratures importantes ont été réalisées, la quadrature du cercle a résisté à toutes les tentatives. Ce procédé n'est donc pas universel. La méthode des pavages, complétée par un axiome supplémentaire de passage à la limite, comme dans l'intégrale de Riemann, s'est révélée être un outil bien plus puissant et permet d'aborder la notion d'aire de figures délimitées par des lignes quelconques et pas seulement par des segments rectilignes. Comme elle n'est pas plus difficile que l'autre, c'est elle qu'on recommande d'adopter dans l'enseignement élémentaire.

invraisemblable que la figure de référence ne soit pas la même dans les deux cas. Mais ceci n'est pas vraiment un argument.

On a vu que l'idée d'additionner des surfaces est essentielle à la notion d'aire. Si nos problèmes **1.32** et **1.33** permettent de construire un rectangle (parallélogramme) qui a même aire que la somme de deux rectangles (parallélogrammes) donnés, je n'ai pas trouvé comment construire un triangle qui ait même aire que la somme de deux triangles donnés sans commencer par dupliquer ces triangles pour en faire des parallélogrammes et résoudre le problème sur ces figures doubles puis diviser le résultat par deux. Ceci indiquerait donc avec beaucoup plus de fiabilité que les problèmes d'aire sont liés au parallélogramme. A une isométrie près, un parallélogramme peut être défini par deux données de longueurs (deux côtés, deux diagonales, ou un côté et une diagonale) et une donnée d'angle.



La donnée d'angle n'est pas gênante : par découpe et recomposition, on construit facilement un parallélogramme de même aire et ayant l'angle qu'il faut. C'est bien pourquoi on va choisir systématiquement le parallélogramme ayant un (des) angle(s) droit(s) : le rectangle.

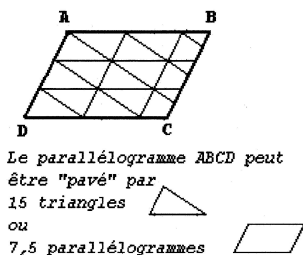
3. Nouvelle quantification : la “mesure” par dénombrement des “pavés”

3.1. Généralités

La mesure des segments, supposée acquise dans cet exposé, consiste à juxtaposer le long du segment à mesurer autant d'exemplaires qu'il faut du segment-unité pour qu'il y ait recouvrement complet sans chevauchement. La mise bout à bout correspond à l'addition ; le comptage des unités, augmenté des éventuelles fractions de l'unité nécessaires au recouvrement complet donne le nombre qui “mesure” le segment dans l'unité choisie.

Dans la mesure des surfaces, on procède de même : une unité ayant été choisie, on “pave” (c’est-à-dire qu’on recouvre complètement et sans chevauchement) la surface à mesurer et on compte le nombre de figures-unités nécessaires à ce “pavage”. Le fractionnement de l’unité n’est pas exclu, pas plus que la découpe suivie de recomposition ou toute autre transformation de l’unité qui conserve les aires ⁽¹¹⁾.

Dans l’exemple ci-contre, on voit qu’il a fallu procéder à un fractionnement du parallélogramme, à un fractionnement suivi de recomposition du triangle, pour parfaire le pavage. On voit aussi qu’une mesure comporte toujours deux éléments : un nombre et l’expression de l’unité.



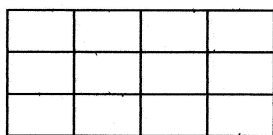
D’un point de vue théorique, le fait qu’on soit amené à admettre des transformations de l’unité (ou de la figure) qui conservent les aires justifie qu’on se restreigne pour la suite de l’étude à mesurer des rectangles en prenant des rectangles pour unité de surface. Le spécialiste apporte ainsi sa caution à la pratique de non-spécialistes qui, bien à raison, se limitent à des situations simples. Il l’apporte aussi en déclarant que cette approche correspond à ce que les mathématiciens appellent une “mesure”.

3.2. Ça tombe juste !

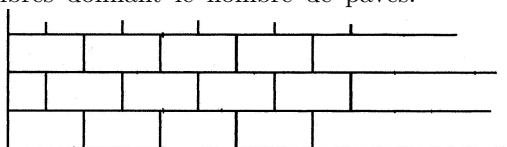
Tant qu’on s’en tient à des exemples très simples, comme (R), les comptages élémentaires, avec éventuellement numérotage des pièces, peuvent suffire. Si on envisage des situations comme (S) qui évoque un mur ou le pavement d’une cour de récréation, ou comme (T) qui peut évoquer un parquet, même en supposant dans un premier temps qu’aux extrémités non dessinées de la figure, “ça tombe juste”, la méthode de désignation des pièces une à une avec récit concomitant de la litanie numérique s’avérera vite impraticable. On inventera donc une stratégie qui consiste

11. Dans ce contexte où je suppose que je m’adresse à des personnes averties, je passe un peu rapidement sur la mise en oeuvre du procédé. Il va de soi que dans des classes primaires ou même à l’école normale, il faut prendre le temps de faire les manipulations, dessins ou considérations nécessaires à ce que ceux à qui on s’adresse réalisent bien de quoi il s’agit.

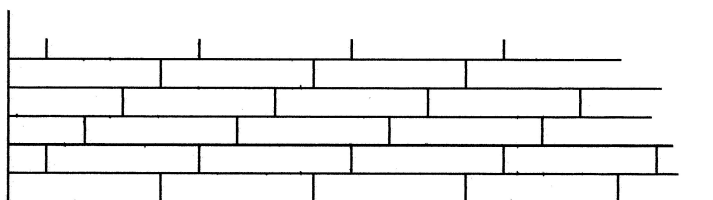
à compter le nombre de briques ou pavés d'une ligne ⁽¹²⁾ et le nombre de lignes, le produit de ces deux nombres donnant le nombre de pavés.



(R)



Un mur (S)



Un parquet (T)

Mais que dire (toujours en supposant que “ça tombe juste à toutes les extrémités”), si la figure (S) est un petit coin du terrain de basket dessiné dans la cour de récréation ou un petit coin d'un grand mur rectangulaire, ou si la figure (T) représente un petit coin du parquet de la salle de gymnastique, c'est-à-dire si le dénombrement élémentaire des lignes et des pavés d'une ligne n'est que difficilement praticable ⁽¹³⁾ ?

Il est probable que la stratégie de dénombrement qui sera inventée ou mise en oeuvre sera le comptage “par blocs”, c'est-à-dire à repérer sur une “ligne” la longueur d'un bloc de pavés (par exemple 10) et à reporter cette longueur sur la longueur du rectangle à mesurer. Ce faisant, ils auront mis en oeuvre ce qui s'appelle couramment “choisir des unités adéquates”. De même pour le comptage des colonnes. Comme précédemment, le nombre de pavés contenu dans le grand rectangle sera le produit des deux nombres obtenus.

12. Il serait plus correct de dire “bande élémentaire”, c'est-à-dire bande ayant pour largeur une seule largeur de brique. Pour des raisons évidentes de simplicité et parce qu'il ne me semble pas qu'il y ait grand risque de confusion, je continuerai d'employer ce vocabulaire.

13. Cette situation peut être facilement évoquée dans les classes : il existe dans le commerce, outre le papier quadrillé et le papier ligné du papier marqué d'un pavage rectangulaire. Il suffit d'y dessiner des rectangles représentant les situations évoquées et de demander aux enfants de compter le nombre de “petits” rectangles contenus dans ceux qui sont dessinés.

En réalité, c'est bien des mesures de longueur qui ont été opérées, mais il est important d'être conscient que, l'UA (Unité d'Aire) étant un rectangle, les UL (Unités de Longueur) étaient différentes sur les deux dimensions du "mur". Comme ces "mesures" ont servi au dénombrement du nombre d'UA par ligne et du nombre de lignes, le produit des deux nombres obtenus donne bien le nombre d'UA contenus dans le "mur".

Mais peut-être, surtout s'ils sont déjà habitués à mesurer des longueurs dans les unités conventionnelles, les enfants auront-ils suggéré de mesurer la longueur du "mur", puis la longueur d'une "brique" pour obtenir par division le nombre de briques d'une "ligne"; et de même pour obtenir le nombre de "lignes", le produit de ces deux nombres étant le nombre de pavés.

Dès que les élèves commencent à s'y retrouver dans la démarche précédente, selon le niveau de la classe, on pourrait leur proposer un des défis suivants :

Pr 3.21 - *Sur une feuille blanche (c'est-à-dire non lignée, non quadrillée, ...), on a dessiné des rectangles dont les longueurs des côtés sont un nombre entier de centimètres (ça tombe juste !). On demande aux enfants d'inventer un pavage tel que le calcul du nombre de pavés soit particulièrement simple.*

Pr 3.22 - *Même problème qu'en 3.21 mais les figures sont faites sur du papier quadrillé centimétriquement ou sur du papier quadrillé ordinaire en respectant les traits du quadrillage.*

Pr 3.23 - *Même problème que ci-dessus, mais le quadrillage centimétrique des figures à mesurer est fourni.*

De ces travaux, il ressortira sans doute qu'en choisissant pour Unité d'Aire le carré construit sur l'Unité de Longueur, on simplifie la méthode précédente, puisqu'on évite deux divisions. D'où les formulations habituelles dont la suivante, textuellement reprise de Dalle et De Waele ⁽¹⁴⁾ :

L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit de la mesure de sa base par la mesure de sa hauteur, lorsqu'on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur.

14. DALLE et DE WAELE, Géométrie plane, Namur, Wesmael-Charlier, 1944, pp. 178-179 (Livre III, Théorème XVI).

Cet énoncé est souvent résumé en

$$\text{Aire du rectangle} = \text{Longueur} \times \text{largeur}$$

ou quelque équivalent, comportant des symboles au lieu des mots.

Beaucoup croient que ce qui dérange les mathématiciens dans ces raccourcis, c'est le fait de dire "longueur" pour "mesure de la longueur", ... Mon opinion est que cela n'est pas bien gênant : il y a peu de chances que ces imperfections de langage soient la cause d'erreurs de compréhension. Par contre, il me semble regrettable d'omettre systématiquement la restriction relative aux unités. Toute la cohérence du système métrique repose sur cette adéquation des unités de longueur, d'aire et de volume, mais l'enseignement se contente souvent de le signaler en passant comme si cela allait de soi, à moins qu'il ne soit complètement muet sur le sujet.

Je préférerais donc une formulation comme :

**La mesure de l'aire du rectangle est le produit de
la mesure de sa longueur par la mesure de sa largeur**

**SI on mesure ces deux côtés avec la même unité
de longueur**

ET

**SI on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité
de longueur.**

Bien sûr, ceci est fort lourd et des raccourcis sont indispensables. Voyons quelques exemples qu'on pourrait trouver dans les formulaires affichés dans les classes (le fait qu'il s'agisse du rectangle est ici sous-entendu) :

(1) $\text{Aire} = L \times \ell$

(2) $\text{Aire (en UA)} = L \times \ell$

(3) $\text{Aire (en UA)} = L \times \ell \quad (L \text{ et } \ell \text{ en UL})$

(4) **$\text{Aire (en cm}^2\text{)} = L \times \ell \quad (L \text{ et } \ell \text{ en cm})$**

On aura deviné que cette quatrième formule est écrite en caractères gras parce que c'est celle qui a ma préférence : elle exprime le mieux le lien entre les unités ; la conversion dans d'autres unités ne devrait pas faire de difficulté. La formule (3) est plus générale, mais elle n'exprime pas que UA est le carré construit sur UL.

3.3. Ça ne tombe pas juste !

Si la surface à mesurer n'est pas pavable avec des UL^2 (carrés construits sur l'unité de longueur), il faudra envisager le fractionnement de l'unité pour parfaire le pavage, comme cela aura été fait pour couvrir un segment quelconque avec des UL . Peut-être les élèves proposeront-ils des demi-unités, ou des quarts, ou découvriront-ils les centièmes de l'UA s'ils ont déjà quelque familiarité avec la mesure métrique des longueurs.

Il va de soi que si le rapport des dimensions du rectangle est un irrationnel ⁽¹⁵⁾ (comme dans une feuille de papier de format DIN A4 ou un rectangle dont les "dimensions" seraient le côté d'un carré et la diagonale de ce même carré), il faut un processus infinitésimal pour résoudre le problème. Un tel processus permet aussi de calculer l'aire de figures qui ne sont pas délimitées par des segments rectilignes.

On devine qu'il y aurait bien plus à dire de ceci que ces quelques lignes. J'espère que personne ne m'en voudra de me refuser à tout traiter en une fois et de m'en tenir à une esquisse.

Conclusion

Tant l'axiomatique d'Euclide que celle des modernes (Papy, par exemple) disent que l'espace, les plans, les droites, les points sont des objets qui certes ont des liens entre eux (ces liens sont précisés dans les axiomes), mais que ce sont des objets de natures différentes.

Cependant des expressions comme "la ligne engendrée par un point qui se déplace" ou "le volume engendré par un triangle rectangle tournant autour d'un côté de son angle droit" nous portent à croire que dans certains cas à tout le moins, il y a une sorte de passage des objets les plus simples aux plus élaborés. L'idée que le produit de deux longueurs est (ou "donne") une surface est une de ces idées pseudo-intuitives (à moins que ce ne soit une pseudo-idée intuitive) qu'on estime généralement "difficile à faire passer". Et pour cause !

Le recours, généralement peu critique, à ce cul-de-sac mathématique qu'est le principe de Cavalieri est une de ces aberrations pédagogiques qui

15. Dans le langage d'Euclide, on dirait que ces côtés sont "incommensurables".

consistent à donner des explications qui n'expliquent rien mais reportent la difficulté ailleurs et en créent de nouvelles.

Un des principes sur lesquels repose la méthode proposée ici consiste à considérer que mesurer une surface, c'est la couvrir avec des surfaces prises pour unité et compter les unités ou éventuelles fractions d'unités nécessaires à ce recouvrement.

Cette méthode ne me semble pas exceptionnellement difficile ⁽¹⁶⁾ ; c'est une restriction à des cas limités de ce que les mathématiciens appellent une théorie de la mesure. C'est donc une bonne méthode pour l'enseignement de base.

Adresse de l'auteur :

Pierre MARLIER

Rue de Plainevaux 185/15

4100 SERAING

04/337.49.45

16. Elle l'est moins en tout cas que celle qui consiste à vouloir faire admettre qu'une juxtaposition de segments de largeur nulle "donne" une surface de largeur non-nulle, c'est-à-dire que la réunion d'ensembles de mesure nulle est ou peut être un ensemble de mesure non-nulle, c'est-à-dire encore que (dans certains cas) une "somme" de zéros peut donner un résultat autre que zéro.

La résolution d'équations différentielles linéaires interprétée par les processus de capitalisation et d'épargne

D. Justens, Haute École Francisco Ferrer-Bruxelles
Université de Liège

1. Introduction

Notre volonté d'illustrer des notions mathématiques au moyen d'exemples concrets trouve une fois encore dans le monde de l'économie et de la finance un support intéressant dont l'interprétation ne pourra que mener à une meilleure compréhension des méthodes mises en oeuvre. Notre propos est de présenter les problèmes de capitalisation et d'épargne dans un contexte continu et de les traiter dans le cadre de la résolution d'équations différentielles linéaires. Nous travaillons en univers déterministe et montrons que les problèmes de capitalisation pure à taux variable, sans épargne intermédiaire, correspondent aux équations homogènes. La considération d'une succession de versements à capitaliser conduit à la résolution d'une équation non homogène. Cet article est la réduction d'un texte plus technique étendant les propriétés qui viennent d'être présentées à l'univers stochastique. En univers financier instable, les équations différentielles linéaires stochastiques homogènes correspondent aux problèmes de capitalisation classiques (brownien dit *géométrique*). Le passage à l'étude de successions de versements indexés (et donc également aléatoires) conduit d'une manière similaire à la résolution d'équations différentielles stochastiques non homogènes.

2. Contexte déterministe continu

2.1. Équation de capitalisation

Les résultats qui suivent sont des *classiques*. La plupart des problèmes financiers peuvent être réduits à la comparaison de successions de flux différents d'échéances différentes. Pour y parvenir, il convient de donner de l'équation d'évolution d'un capital au cours du temps une description

correcte et interprétable. On obtient cette dernière de manière réaliste en imposant deux conditions sans caractère restrictif apparent.

Condition C1

On suppose que l'accroissement d'un capital est proportionnel au capital lui-même. Un capital plus important doit assurer une rémunération plus importante.

Condition C2

On suppose que l'accroissement est proportionnel au temps écoulé. Un placement plus long doit être rémunéré davantage.

Ces deux hypothèses *raisonnables* déterminent totalement l'équation évolutive d'un capital.

La condition C_2 n'a de sens que pour des intervalles de temps limités et postule (cas des actifs risqués) l'existence d'une tendance au moins pour le très court terme. Cette dernière condition n'est pas nécessairement vérifiée en univers aléatoire où les ruptures de tendance instantanées s'observent en permanence.

Mise en équation

Nous notons $C(t)$ la valeur d'un capital à l'instant $t \in \mathbb{R}$. $C(0)$ représente la valeur en $t = 0$ du capital. Nous supposons cette valeur connue.

(Problème de Cauchy ou condition initiale). En fait chaque flux financier intervenant dans un problème possède un 0 propre : l'instant auquel ce flux est connu.

Notons $r(t)$ le coefficient de proportionnalité intervenant dans les deux conditions imposées. $r(t)$ représente le taux instantané de croissance par unité de temps. L'accroissement de capital entre t et $t + \Delta t$ est

$$C(t + \Delta t) - C(t) = \Delta C = r(t) \times \Delta t \times C(t).$$

Cette description permet de considérer des taux variables. Lorsque la tendance (à la hausse ou à la baisse) est ressentie par l'univers économique, une telle attitude est possible. Si l'on se place dans un contexte d'investissement en actifs à risque, le coefficient $r(t)$ peut être négatif.

En vertu de l'égalité

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = r(t) \times C(t),$$

le passage à la limite (accroissement de validité de la condition C_2) donne finalement

$$C'(t) = r(t) \times C(t).$$

Cette équation linéaire homogène est aussi une équation à variables séparées qui se résout aisément :

$$\begin{aligned}\frac{dC}{C} &= r(t)dt \\ d[\ln C] &= r(t)dt \\ C(t) &= C(0) \times e^{\int_0^t r(s)ds}.\end{aligned}$$

Dans le cas particulier du taux constant r , on retrouve la relation de capitalisation continue

$$C(t) = C(0).e^{r.t}$$

Lorsque t prend des valeurs négatives, on parle généralement d'*actualisation* et non de capitalisation. Si l'on désire la valeur en $t = 0$ d'un capital connu $C(t)$ à l'instant t , on obtient

$$C(0) = C(t).e^{-\int_0^t r(s)ds}$$

Cette description n'a de sens que si l'on peut donner de la fonction $r(t)$ une formulation explicite réaliste. En univers stochastique, des problèmes d'*adaptation* vont se poser.

2.2. Épargne continue

Dans le cas où les épargnes sont nombreuses et échelonnées, il est commode de les représenter continûment. Notons $S(t)$ la fonction densité d'épargne. Cette dernière donne une description correcte de la réalité objective si et seulement si pour tout intervalle $[t_1, t_2]$ on peut exprimer la valeur en francs courants de l'épargne durant cette période par l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} S(t)dt$$

Dans le cas d'une épargne continue, l'équation d'évolution du montant total épargné capitalisé peut s'écrire en notant $C(t)$ la valeur totale capitalisée à l'instant t et $S(t)$ la densité d'épargne au même instant

$$dC(t) = r(t)C(t)dt + S(t)dt$$

dont l'interprétation est évidente. La quantité $S(t)dt$ représente l'épargne en francs courants échéant dans $[t, t + dt[$. On écrit encore

$$C'(t) = r(t)C(t) + S(t)$$

La méthode de variation des constantes (qui peut être généralisée à l'univers stochastique) postule l'existence d'une solution adoptant la forme

$$C(t) = K(t).e^{\int_0^t r(s)ds}$$

En introduisant cette expression dans l'équation, on obtient classiquement

$$K'(t).e^{\int_0^t r(s)ds} + K(t).r(t).e^{\int_0^t r(s)ds} = K(t).r(t).e^{\int_0^t r(s)ds} + S(t)$$

ou encore

$$K'(t) = S(t).e^{-\int_0^t r(s)ds}$$

On peut donc interpréter cette relation comme suit : la variation instantanée du processus perturbateur de capitalisation (épargne complémentaire) est égale à la valeur actuelle de l'épargne à cet instant. La solution générale est

$$C(t) = \left[K(0) + \int_0^t S(u)e^{-\int_0^u r(s)ds} du \right] .e^{\int_0^t r(s)ds}$$

Supposons un avoir initial $C(0) = C_0$. On en tire

$$C(t) = C_0.e^{\int_0^t r(s)ds} + \int_0^t S(u)e^{\int_u^t r(s)ds} du$$

On obtient comme solution générale la valeur capitalisée de l'actif initial augmentée de l'intégrale (somme) des épargnes successives capitalisées. Cette présentation dans un cadre particulier évident permet une interprétation de la solution générale d'une équation différentielle linéaire. Ces résultats et leur interprétation se généralisent en univers aléatoire.

Adresse de l'auteur

Daniel Justens

Haute École Francisco Ferrer

Département économique de niveau universitaire

Cooremans

Place Anneesens 11

1000 Bruxelles

Des difficultés de l'algèbre

B. Baton, R. Giot & Y. Noël, *Centre de Didactique des Sciences,
Université de Mons-Hainaut*

1. Introduction

Le texte qui suit résulte d'une recherche que nous avons effectuée durant l'année scolaire 1995–96 à propos des difficultés d'apprentissage de l'algèbre. Dès le départ, il nous a semblé que les difficultés rencontrées dans l'enseignement de la géométrie ont quelque peu détourné l'attention de l'algèbre. Pourtant, des erreurs se répètent de génération en génération. Quel enseignant n'a pas été confronté, par exemple, à des égalités du style $3a + 5 = 8a$, $3a + 5b = 8ab$, $2ab + 3ac + a = a(2b + 3c)$, $\dots$ ou au fait que $\frac{4}{x-2}$ vaut 4 lorsque x vaut 2 ? De telles erreurs sont parfois qualifiées d'incompréhensibles, d'aberrantes, parfois attribuées au manque d'attention dans le travail. En observant les démarches d'élèves dans l'enseignement secondaire, en leur demandant pourquoi ils répondent de cette façon, nous avons constaté que des erreurs peuvent provenir de comportements cohérents qui, eux-mêmes, reposent sur des bases totalement fausses. Des élèves résignés compensent leur manque de compréhension par une mémorisation dépourvue de sens et pensent que la mathématique est une suite de recettes à appliquer. Ils sont également souvent incapables d'utiliser des compétences techniques acquises dans le calcul algébrique pour résoudre des problèmes. La situation n'est pas plus brillante dans les autres pays, qu'ils soient de langue française ou autre, les nombreuses recherches en didactique en témoignent, et les problèmes rencontrés sont significativement semblables. Pour améliorer les performances des élèves, il est donc indispensable d'essayer de comprendre **pourquoi** certaines erreurs sont commises. Alors seulement aurons-nous une chance d'y remédier.

Sur base de notre vécu d'enseignants et des recherches consultées, il nous a paru nécessaire d'étudier trois sources principales de difficulté (qui ne sont pas sans rapport l'une avec l'autre) :

- la mauvaise compréhension de la signification du signe =
- la mauvaise compréhension de la notion de nombre
- la difficulté rencontrée lors du passage aux lettres.

Nous avons essayé de construire des questionnaires pouvant nous éclairer, à la fois sur la perception des notions précitées par les élèves et aussi sur

l'évolution dans le temps de cette perception. Nous ne voulions donc pas tester des performances d'élèves à un moment donné mais nous souhaitions connaître leurs réactions face à des situations parfois familières, parfois inhabituelles auxquelles le test les confrontait. Nous avons

choisi des nombres tels que les difficultés de calcul soient minimales, de manière à ce qu'elles influencent peu les résultats. Nous souhaitions qu'aucune indication ne soit fournie par les enseignants, et surtout pas dans le cas des situations non rencontrées précédemment dans les classes.

Nous avons choisi trois étapes dans le cursus scolaire : la deuxième année primaire, la cinquième année primaire et la deuxième année secondaire, les tests respectifs étant passés en début d'année scolaire. Nous avons commencé par la deuxième primaire car il nous semblait difficile d'exploiter un questionnaire dont les items devaient être lus par les enfants en première année ; nous avons poursuivi par la cinquième année où il nous paraissait qu'on pouvait raisonnablement supposer que le facteur "compétence en calcul" ne biaisait plus les résultats et où il nous semblait intéressant d'examiner la maturation des phénomènes décelés en deuxième. Enfin, nous avons terminé en début de deuxième secondaire, année où en principe se fait le passage "des nombres aux lettres" et où on considère généralement que débute l'algèbre.

Dans le présent article, nous présentons les résultats de la recherche effectuée dans les classes de l'enseignement primaire. Les deux tests proposés ont été construits parallèlement. Ils visaient l'examen de deux problèmes qui ne sont pas indépendants, comme les résultats le montrent :

- le statut du signe " $=$ "
- la perception de la notion de nombre.

En début de deuxième année, 348 élèves répartis en 19 classes dispersées géographiquement ont répondu au questionnaire. En cinquième année, 285 élèves répartis en 13 classes ont été concernés.

2. Les questionnaires en 2^e et 5^e primaires

Nous reproduisons ci-dessous les questionnaires en deux colonnes, de manière à faciliter la comparaison.

Deuxième primaire

1. Complète par = ou $\neq$

A. $2 + 3 \dots 3 + 2$

B. $5 \dots 2 + 3$

C. $4 + 1 \dots 4 - 1$

D. $3 + 1 \dots 4$

2. Colorie si c'est bon

A. $3 + 7 = 12 - 2$

B. $8 = 5 + 3$

C. $5 = 3 + 4$

D. $3 = 9 - 6$

3. Colorie si c'est bon

A. $4 \neq 4$

B. $3 + 7 \neq 6 - 4$

C. $5 + 2 \neq 7$

D. $3 + 7 \neq 7 + 3$

Cinquième primaire

1. Complète par = ou $\neq$

A. $13 + 48 \dots 48 + 13$

B. $19 \dots 21 - 2$

C. $486 + 78 \dots 486 - 78$

D. $75 + 13 \dots 88$

2. Complète par "Vrai" (V) ou "Faux" (F)

A. $30 \times 10 = 900 - 600$

☐

B. $128 = 96 + 32$

☐

C. $45 = 49 - 7$

☐

D. $21 + 1 = 211$

☐

E. $958 - 59 = 958 - 59$

☐

F. $50 - 50 = 2 \times 50$

☐

3. Complète par "Vrai" (V) ou "Faux" (F)

A. $1999 \neq 1999$

☐

B. $35 + 72 \neq 100 - 7$

☐

C. $21 + 1 \neq 211$

☐

D. $34 + 71 \neq 71 + 34$

☐

4. Relie les cadres qui représentent le même nombre.

$4 + 3$		50×2	
$4 + 1$	7	$36 + 90$	$25 + 75$
$8 - 1$	$2 + 5$	$300 - 200$	100
$1 + 3$		$28 + 32$	

5. Complète de plusieurs façons :

$$\begin{aligned} 4 + 5 &= \dots \\ 4 + 5 &= \dots \\ 4 + 5 &= \dots \end{aligned}$$

5. Complète de plusieurs façons :

$$\begin{aligned} 405 + 55 &= \dots \\ 405 + 55 &= \dots \\ 405 + 55 &= \dots \\ 405 + 55 &= \dots \end{aligned}$$

6. Remplace les $\cdot$ pour que ce soit bon. Tu peux utiliser les signes $+$ $-$ $=$

$$\begin{aligned} \text{A. } 9 &\cdot 5 \cdot 4 \\ \text{B. } 2 &\cdot 7 \cdot 9 \\ \text{C. } 8 &\cdot 3 \cdot 5 \\ \text{D. } 3 &\cdot 9 \cdot 6 \\ \text{E. } 4 &\cdot 2 \cdot 6 \\ \text{F. } 4 &\cdot 9 \cdot 5 \end{aligned}$$

6. Remplace les $\cdot$ par $+$, $-$, $\times$, $:$ ou $=$ pour obtenir des égalités.

$$\begin{aligned} \text{A. } 90 &\cdot 45 \cdot 2 \\ \text{B. } 200 &\cdot 700 \cdot 900 \\ \text{C. } 80 &\cdot 4 \cdot 20 \\ \text{D. } 33 &\cdot 99 \cdot 66 \\ \text{E. } 10 &\cdot 20 \cdot 200 \\ \text{F. } 2 &\cdot 90 \cdot 45 \\ \text{G. } 27 &\cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \\ \text{H. } 7 &\cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \end{aligned}$$

3. Quelques résultats et commentaires

Dans les tableaux qui suivent, les nombres indiquent les pourcentages d'apparition de différentes réponses possibles. Les trois premières questions ont un aspect "passif" par opposition aux suivantes qui font appel à plus de créativité et, nous l'avons constaté, gênent un peu les élèves par leur côté

“ouvert”. La question 4 est plus précisément consacrée à la perception de la notion de nombre.

3.1. Première question

Deuxième primaire

	=	≠	pas de réponse
A. $2 + 3 \cdots 3 + 2$	84,48	14,08	1,44
B. $5 \cdots 2 + 3$	72,13	24,43	3,45
C. $4 + 1 \cdots 4 - 1$	15,52	79,31	5,17
D. $3 + 1 \cdots 4$	75,86	20,98	3,16

Cinquième primaire

	=	≠	divers
A. $13 + 48 \cdots 48 + 13$	98	0,7	1,4
B. $19 \cdots 21 - 2$	96,5	2,5	1
C. $486 + 78 \cdots 486 - 78$	6,3	93,3	0,4
D. $75 + 13 \cdots 88$	96,8	2,8	0,4

En deuxième année, c’est l’item B qui est le moins bien réussi : c’est le seul item qui fait appel à une égalité du type $a = b * c$, le signe “=” apparaissant à gauche et non à droite comme c’est le cas lorsque les élèves complètent des colonnes de calcul (c’est-à-dire dans des égalités du type $a * b = c$). L’item B met les élèves dans l’impossibilité d’interpréter le signe “=” comme “indicateur de l’arrivée d’une réponse à un calcul”. Cet obstacle semble avoir disparu en cinquième année **dans cette situation** puisque les réussites en 1B et 1D sont très semblables ...mais nous le verrons réapparaître ailleurs.

Pour tous les élèves, l’item le mieux réussi est le A. On peut supposer qu’il s’agit d’une reconnaissance d’une propriété rencontrée dans le cursus scolaire et reconnue. Aucune trace de calcul n’apparaît sur les feuilles et nous ne savons pas si les élèves effectuent un calcul pour répondre ou s’ils sont conscients qu’aucun calcul n’est nécessaire.

L'item C semble perturbateur : tout en n'étant pas le moins bien réussi en deuxième année, c'est lui qui provoque le plus d'abstentions et en cinquième année, il est le moins bien réussi des quatre items de la question 1.

Presque toutes les réponses classées en "divers" représentent

- des "ou" donnés en 1A, 1B ou 1D (Ainsi, quatre élèves donnent "13 + 48 ou 48 + 13" ; un seul élève donne "75 + 13 ou 88")
- des "ou" ou ">" donnés en 1C (On trouve "486 + 78 > 486 - 78" ... et aussi "486 + 78 ou 486 - 78").

Il semble que, dans les classes, les instituteurs aient plutôt tendance, lorsqu'une égalité n'est pas vraie, à préférer les relations $<$, $>$ à $\neq$. D'autre part, on peut remarquer que la réponse "ou" apparaît en cinquième année alors qu'elle n'était pas présente en deuxième.

3.2. Deuxième question

Deuxième primaire

	cadre colorié	cadre non colorié
A. $3 + 7 = 12 - 2$	62,36	37,64
B. $8 = 5 + 3$	94,83	5,17
C. $5 = 3 + 4$	10,34	89,66
D. $3 = 9 - 6$	80,46	19,54

Cinquième primaire

	Vrai	Faux	Pas de réponse
A. $30 \times 10 = 900 - 600$	91,23	8,77	0
B. $128 = 96 + 32$	96,84	3,16	0
C. $45 = 49 - 7$	1,4	98,6	0
D. $21 + 1 = 211$	0,35	99,65	0
E. $958 - 59 = 958 - 59$	85,61	13,68	0,7
F. $50 - 50 = 2 \times 50$	3,16	96,84	0

Les items A, B et C sont semblables dans les deux tests. Pour tous les élèves, l'item A est le moins bien réussi des trois. Nous en voyons au moins trois explications :

- Des évaluations incorrectes peuvent être dues à des interprétations tronquées des données, $3 + 7 = 12$ en deuxième et $30 \times 10 = 900$ en cinquième. Cette mauvaise lecture éventuelle peut être induite par le sens de déclencheur d'un calcul lié au signe "=" et nous retrouverons le phénomène dans la question 5 en cinquième année.
 - L'incapacité de percevoir $3+7$ et $12-2$ comme deux écritures différentes du nombre 10 est une deuxième source d'erreur. Dans ce cas, "l'addition" du premier membre serait perçue comme différente de "la soustraction" du second membre.
 - Enfin, la moins bonne réussite en deuxième année aux items A et D, par rapport à B et C, pourrait être liée à la présence de la soustraction, opération moins bien maîtrisée que l'addition.
- Nos précautions pour éviter des erreurs de calcul n'ont peut-être pas été suffisantes. Ou bien la chute en D est-elle liée à la position de l'item dans la question ?

Si on compare les pourcentages de réussite aux items 1C et 2C, il faut tenir compte du fait que la formulation de l'énoncé ne permet pas de distinguer l'abstention de la volonté de ne pas colorier. La réponse globale à la question 2 fait cependant penser qu'il y a peu d'abstentions.

Les résultats meilleurs en cinquième pour l'item 2A restent significatifs d'une mauvaise interprétation du signe "=" pour près de 9% des élèves. Ce manque de perception de l'égalité comme une relation est très claire dans l'item E que plus de 14% des élèves jugent faux ...ou n'osent pas juger ! C'est le seul des cinq items proposés qui provoque des abstentions, mettant en évidence le fait que des réponses relèvent plus d'un conditionnement à certaines utilisations du signe "=" qu'à la signification profonde de la notion d'égalité.

3.3. Troisième question

Deuxième primaire

	cadre colorié	cadre non colorié
A. $4 \neq 4$	23,85	76,15
B. $3 + 7 \neq 6 - 4$	40,23	59,77
C. $5 + 2 \neq 7$	50,57	49,43
D. $3 + 7 \neq 7 + 3$	37,07	62,93

Cinquième primaire

	Vrai	Faux
A. $1999 \neq 1999$	9,12	90,88
B. $35 + 72 \neq 100 - 7$	62,81	37,19
C. $21 + 1 \neq 211$	83,16	16,84
D. $34 + 71 \neq 71 + 34$	18,25	81,75

La question est évidemment plus difficile que les précédentes pour plusieurs raisons :

- le signe “ $\neq$ ” est peu familier
- il peut être psychologiquement difficile d’affirmer qu’ “il est vrai que quelque chose est faux”
- affirmer qu’une **inégalité** est **fausse** relève d’une double négation.

Nous avons été étonnés du taux de réussite obtenu. Il est à relativiser en deuxième année parce que les bonnes réponses en ne coloriant pas ne se distinguent pas des abstentions et que trois items sur les quatre n’étaient pas à colorier. Contrairement à ce qui s’est passé pour la question 2, nous avons eu l’impression d’un nombre non négligeable

d’absences globales de réponse à la question 3. Par contre, cette confusion n’existe pas en cinquième année et nous constatons que les élèves ne s’abstiennent pas et que la réussite la plus faible atteint près de 63 %. De plus, c’est sur une double négation en 3A que la réussite est la meilleure (91%). En 3A et 3B, il semble que la difficulté soit franchie par plus de huit élèves sur dix !

3.4. Quatrième question

Il est impossible de donner les résultats complets à cette question en un tableau succinct. Quelques comportements apparaissent clairement :

- 49% des élèves de deuxième privilégient l’écriture “7” et 32% privilégient “100” en cinquième. Cela signifie qu’ils ne donnent que des liens du type $x * y = 7$ ou $x * y = 100$, sans donner par exemple $4 + 3 = 2 + 5$ ou $50 \times 2 = 300 - 200$. Très peu d’élèves relient les quatre cadres désignant le nombre sept (moins de 9%) ou les quatre cadres désignant le nombre cent (2%).

-
-
- En deuxième et cinquième années, environ 12% des élèves ne donnent que des couples isolés. En deuxième année, 3,5% ne donnent qu'un seul couple.
 - En deuxième année, pratiquement aucune réponse ne donne *explicitement* trace de la transitivité. En cinquième, un tiers des élèves respectent cette propriété (c'est-à-dire qu'ils dessinent le couple (a, c) s'ils ont dessiné les couples (a, b) et (b, c)). Nous devrions plutôt parler de paires puisque presque aucun lien n'a été orienté).

Nous constatons donc qu'une écriture comme $4 + 3$ n'est pas perçue comme le nombre 7, que l'impact du "calcul à effectuer" domine. De plus, ayant trouvé une liaison $a = b$, plus de 10% des élèves ne lient ni a ni b à autre chose, aussi bien en deuxième qu'en cinquième. Peut-être est-ce l'impact des situations qui sont presque toujours à réponse unique. On peut penser que la question est généralement bien comprise puisque peu d'élèves donnent un lien incorrect (2,5% en cinquième)

3.5. Cinquième question

En deuxième année, voici les faits principaux relevés :

- 52,30% donnent trois fois la réponse "9"
- 17,53% donnent trois réponses correctes différentes
- 20,69% écrivent au moins une égalité incorrecte
- 6,32% introduisent au moins un signe = superflu
($5 + 4 = 3 + 6 = 9$ par exemple).

Ainsi, plus de la moitié des élèves ne donnent **que** la réponse "9", montrant par là un conditionnement : le signe "=" est placé à droite et commande l'exécution d'un calcul. Moins de deux élèves sur dix donnent trois réponses différentes et moins d'un élève sur dix fait intervenir une opération autre que l'addition. S'agit-il d'une réticence à utiliser la soustraction (elle serait moins bien maîtrisée que l'addition) ou d'une difficulté à s'écarter du modèle donné dans le premier membre de l'égalité? Une analyse plus fine des résultats montrera peut-être un rapprochement avec les items 1C, 2A et 3B.

Un autre effet pervers nous semble être l'espèce de supériorité qu'acquiert 5 par rapport à $4 + 1$, comme étant l'étape ultime de l'égalité. Ainsi, 4 + 1 n'est pas considéré comme un nombre, seul 5 ayant droit à cet honneur. Ces constatations sont à rapprocher du statut privilégié donné à l'écriture 7 dans la question précédente.

En cinquième année,

- 6,7% donnent la réponse “460” , parfois répétée quatre fois, parfois non répétée et suivie de trois abstentions, parfois suivie d’une ou même deux autres réponses correctes mais sans que quatre réponses soient fournies.
- 3,5% fournissent uniquement des réponses du type 460 ; 460,0 ; 46D (nous supposons qu’il faut interpréter 46 dizaines) ; 4600d (signifiant 4600 dixièmes, à notre avis) ; ...
- 64,9% donnent quatre expressions correctes et différentes.
- 47,7% font intervenir au moins une opération autre que l’addition.
- Beaucoup de réponses semblent liées à la pratique du calcul dit mental. Exemples :

$$405 + 55 = (405 + 5) + 50 = 460$$

(avec le résultat intermédiaire souvent noté en dessous ou au-dessus de $405 + 5$).

$$405 + 55 = (405 + 60) - 5 = 460$$

(idem pour le résultat 465)

- 62,1% introduisent au moins un signe = superflu. C’est spécialement fréquent chez les élèves qui ne proposent que des réponses du type ci-dessus. Cela arrive aussi sous la forme

$$405 + 55 = 55 + 405 = 460.$$

- 27,4% donnent des réponses comportant au moins une erreur. La plupart du temps, celle-ci est liée à une écriture incorrecte d’un enchaînement de calculs. En voici deux exemples :

$$405 + 55 = 400 + 55 = 455 + 5 = 460$$

~~$405 + 55 = (55 + 5) + (400 + 60) = 460.$~~
Il semble que certains élèves, confrontés à la double tâche d’organiser un calcul global et d’effectuer un calcul partiel, ne maîtrisent pas la difficulté de noter correctement une démarche qui les conduit au bon résultat.

La réussite globale à la question passe donc de 18% en deuxième à 65% en cinquième et près de la moitié des élèves font cette fois intervenir une opération autre que l’addition. Mais cette amélioration du résultat ne reflète pas une amélioration de la compréhension de la notion d’égalité ou de la notion de nombre aussi importante qu’on pourrait le croire à première vue. Nous constatons en effet que beaucoup de réponses sont conditionnées par des techniques liées au calcul mental, les élèves restant impérativement tenus

d'exécuter des calculs ...et près de trois élèves sur dix écrivant au moins une égalité incorrecte. On perçoit clairement une succession d'étapes de calcul qui ne conduit pas à la structuration de la notion d'égalité. Probablement la contrecarre-t-elle dans la mesure où elle fournit un résultat correct tout en maltraitant l'égalité.

3.6. Sixième question

Voici les tableaux des principaux résultats :

Deuxième année

	égalité correcte	égalité incorrecte	aucune égalité	abstention
A. 9 · 5 · 4	73,85	4,89	18,39	2,87
B. 2 · 7 · 9	67,24	10,34	19,25	3,16
C. 8 · 3 · 5	70,11	8,05	16,95	4,89
D. 3 · 9 · 6	24,14	48,28	17,82	9,77
E. 4 · 2 · 6	62,93	12,93	16,95	7,18
F. 4 · 9 · 5	22,70	47,41	18,97	10,92

Cinquième année

	égalité correcte	égalité incorrecte	aucune égalité	abstention
A. 90 · 45 · 2	88,07	2,81	8,07	1,05
B. 200 · 700 · 900	90,18	4,56	4,91	0,35
C. 80 · 4 · 20	93,68	0,70	4,91	0,70
D. 33 · 99 · 66	54,04	28,77	9,82	7,37
E. 10 · 20 · 200	92,28	2,81	3,51	1,40
F. 2 · 90 · 45	49,12	37,54	8,42	4,91
G. 27 · 10 · 9 · 8	76,84	7,37	10,18	5,61
H. 7 · 7 · 7 · 7	82,81	5,26	9,12	2,81

Dans les deux questionnaires, les items A et C permettent deux réponses différentes tandis que les items B, D, E et F ne peuvent être complétés que d'une seule façon.

Nous constatons à la fois des effets semblables et des effets différents selon l'âge des élèves.

-
-
- Voyons les différences : le plus grand nombre de possibilités de réponse semble entraîner une meilleure réussite aux items A et C en deuxième année tandis que la réussite aux items A, B, C et E en cinquième n'est peut-être pas significative. La moins bonne réussite en E pour la deuxième année ne se produit pas en E en cinquième. Les élèves plus jeunes sont-ils plus “fragiles” à la position d'un item dans un test ?
 - Et les ressemblances : la chute de réussite est nette aux items D et F. Ceci nous semble significatif de la réticence à “placer le signe = à gauche”. En deuxième année, la découverte d'une égalité nécessite une soustraction et nous avons vu dans d'autres questions que cette opération restait peut-être mal maîtrisée et cet effet peut s'être cumulé à l'impact opératoire du signe “=”. En détaillant les réussites aux items A et C, nous pouvons mesurer mieux l'envie de placer le signe d'égalité à droite : sur 74% d'élèves de deuxième qui inventent une égalité correcte en A, 51% donnent $9 - 5 = 4$ et 23% donnent $9 = 5 + 4$, malgré l'intervention d'une soustraction dans la première réponse ! L'écart est encore plus marqué à l'item C. Le phénomène persiste en cinquième où par exemple 65% donnent $80 : 4 = 20$ alors que 29% proposent $80 = 4 \times 20$. L'attrait du “= à droite” conduit 22% des élèves à proposer $33 - 99 = 66$ en D et 31% des élèves à proposer $2 : 90 = 45$ en F.

4. A suivre ...

Dans un prochain article, nous aborderons l'examen des réponses obtenues en deuxième secondaire.

5. Remerciements

Nous tenons à remercier tous les collègues qui ont collaboré à la recherche en participant à l'élaboration et l'organisation des tests ou en acceptant de les faire passer dans leurs classes. Sans eux et leurs élèves, notre travail aurait été impossible.

Adresse des auteurs :

B. Baton, R. Giot, Y. Noël
Université de Mons-Hainaut
Centre de Didactique des Sciences
Avenue Maistriau 15
7000 Mons

Bibliographie

C. Rédaction,

Mathématiques : corrigés (détaillés) de cinq concours : CAPL2 interne 1997, CAPL2 externe 1997, CAPES interne 1997, CAPES externe 1997, Agrégation interne 1996, Brochure A.P.M.E.P. n° 117 - 1997.

En France, sont organisées, chaque année, les épreuves écrites des concours de recrutement d'enseignants de mathématiques.

L'APMEP, dans un souci constant d'améliorer la formation des enseignants pour le plus grand bénéfice des élèves qui leur sont confiés, a décidé de présenter les corrigés détaillés et commentés de cinq épreuves très récentes. Ces concours sont d'un "bon niveau" et les questions requièrent du temps.

Par la rédaction soignée des solutions proposées, les réflexions qui les accompagnent, ainsi que par un index détaillé de références mathématiques et une bibliographie commentée, cet ouvrage aidera efficacement les collègues et futurs collègues dans leur formation éventuellement continuée.

Les enfants d'Olympie

R. Graas, *Inspecteur honoraire*

Ce titre – “volé” ici – est celui d’un très intéressant livre récent ⁽¹⁾ donnant l’histoire de jeux olympiques locaux organisés, depuis la Révolution Française, en France et dans divers pays d’Europe. Ce courant a culminé avec DE COUBERTIN, par les Jeux Olympiques d’Athènes en 1896 dont on connaît la suite jusqu’à nos jours.

En Belgique, les Olympiades Mathématiques existent, dans un statut officiel et un centre situé à l’ULB, depuis 1976.

Ici aussi cependant, il a existé pendant des années une forme “artisanale” de ce concours au Luxembourg et en Belgique. Pour moindre que son domaine ait été, son action mérite d’être retenue.

C’est grâce au Professeur (puis Directeur de Collège) Lucien KIEFFER à Luxembourg que le “Test Américain” – toujours utilisé au deuxième stade de nos O.M. – était traduit et diffusé. Ce questionnaire émanait du “Brooklyn Institute of Technology” (USA) sous la direction du sympathique Professeur SALKIND. Celui-ci envoyait des médailles pour les meilleurs scores obtenus ici.

Les archives de cette entreprise sont, hélas, dispersées. Peut-être en reste-t-il assez pour qu’une recherche soit entreprise ? Cela conduirait à un autre “Enfants d’Olympie” manifestant la fécondité d’un long travail obscur, mais non dépourvu de panache !

1. Auteur : Al. Arvin-Berod. Editeur : Cerf Paris. 1996–255 pages.

Revue des Revues

C. Villers et M. Frenal

Bulletin de l'APMEP (France), n°410 - 1997

Ce numéro particulièrement copieux (208 pages) est entièrement consacré aux Journées Nationales d'Albi 1996. Ces journées constituent des moments particulièrement forts pour l'APMEP.

Le lecteur intéressé trouvera donc dans les pages de cette livraison les synthèses des nombreuses conférences, toutes de grande qualité, ainsi que les résumés de contenu ou d'ambiance de 22 ateliers (parmi beaucoup d'autres) qui ont animé les journées précitées.

Un compte-rendu d'une réunion-débat sur le thème Mathématique et Société complète ce numéro 410.

Bulletin de l'APMEP (France), n°411 - juillet 1997

Au sommaire de ce numéro, nous trouvons

- *L'Editorial* du Président Jean-Pierre Richeton.
- *Etude des processus de vérification mis en oeuvre par les élèves de Première S* par Sylvie Coppé.

L'auteur y présente les résultats d'une recherche à propos des processus de vérification mis en oeuvre par les élèves concernés, au cours de deux situations différentes sur les plans des enjeux institutionnels et de la gestion du temps.

- *Graphique, démonstration et rigueur : quelques réflexions* par André Autibi.

Le dessin devrait faciliter l'enseignement des mathématiques en le rendant moins abstrait et plus accessible à la masse. Ce rôle est-il joué pleinement ? Voilà la question qui est ici traitée.

- *Comment diviser un angle θ en n parties égales (avec un compas et une règle flexible)* par Aldolreza Moghadassi.
- *Un anneau de Moebius développable* par Jean-Pierre Truong.

Une question intéressante y est abordée. C'est : "Peut-on trouver une équation d'un anneau de Moebius qui puisse être développé comme le modèle en papier" ?

- Un article de C. Jeanbrau qui s'interroge sur ce que peut être une formation mathématique, ce qu'on en attend, qui elle vise et comment l'évaluer.

L'auteur y commente des énoncés d'exercices de diverses provenances (niveau Baccalauréats).

- *Calcul du taux de croissance moyen* par Yves Husset.
- *Le Jipto : un nouveau jeu intellectuel de poursuite* par Tatiana et Grigori Tomski.

C'est la présentation et l'étude d'un jeu de poursuite, pour tous.

- *Topologie et manipulation directe dans les logiciels de construction* par Serge Hocquenghem.

Les logiciels de constructions géométriques permettent de manipuler les objets géométriques, dont des droites et des points. L'auteur montre que le cas des droites est différent de celui des points et expose la situation-problème ainsi créée.

- *Lire entre les lignes* de K. Mizar.

En outre, ce numéro contient, bien entendu, les traditionnelles rubriques que sont : *Les Problèmes de l'APMEP*, *Avis de Recherche*, *Nouvelles brèves*, *Matériaux pour une documentation*, *Vie de l'Association*, *Tribune libre*, *Courrier des lecteurs*.

Claude VILLERS

Bulletin de l'APMEP (France), n°412-Septembre-Octobre 1997

Dans cette livraison, nous trouvons des textes de

- Jean-Pierre Richeton, "*Avec de spécifiques réserves ...*"
Dans cet éditorial, le Président de l'association exprime son opinion au sujet du CAPES et plus particulièrement sur les diverses variantes de ce certificat d'aptitude pédagogique.
- Jacqueline Euriat "*De la maternelle au CM2 : à propos des nouveaux programmes*"
Dans ce dossier consacré à l'école élémentaire, l'auteur nous éclaire sur les nouveaux programmes en vigueur à l'école primaire.
Pourquoi de nouveaux programmes ? L'action de l'APME, une présentation des programmes et l'articulation école-collège sont les points développés dans les pages (17) consacrées au sujet.
- Marie Berroudo-Agrell s'interroge. "*Qu'est ce que les Mathématiques concrètes ?*". On parle souvent de "*Mathématiques concrètes*".
L'auteur tente de répondre à cette question en distinguant
 - a) le problème posé sans terme mathématique,
 - b) le problème où l'on utilise une représentation matérielle,
 - c) l'art de suivre un algorithme précis.
- Paul-Louis Hennequin traite de "*l'enseignement des mathématiques en classes préparatoires pour les élèves de la fin du XXème siècle*".
C'est un compte-rendu d'un article de Philippe Royer, professeur à Lille.
- Yves Husset traite lui de "*la formule fondamentale des intérêts composés*"
Après avoir décrit comment Herman Laurent l'a établie il y a près d'un siècle, l'auteur prend comme exemple, le livret A des Caisses d'Epargne Françaises.
- Edith Kosmanek présente "*Un exercice émoustillant de calcul des probabilités*".
- C. Jeanbran complète son article n° 412, par une présentation commentée d'exercices proposés dans des concours japonais.
- Le groupe Math-Eco de l'IREM de Strasbourg expose son point de vue critique sur un exercice du baccalauréat série ES (en 1996).
- La rubrique "*Problèmes de l'APMEP*" propose, une fois encore, des énoncés choisis pour leur originalité et accueille des solutions des correspondants.
- "*Avis de recherche*" est une rubrique destinée à recevoir des questions de tout ordre et les réponses y apportées par les lecteurs.

- Les rubriques habituelles que sont Olympiades, Nouvelles Brèves, Matériaux pour une documentation, Pour un inventaire, Tribune libre et Vie de l'association complètent ce numéro 412.

Claude VILLERS

Math-Ecole (revue suisse), n°171-Février 1996

Au sommaire :

- Michel Brêchet, *Editorial*
- Jean-Paul Reding, *Les n'ombres chinoises (deuxième partie)*
Cet article aborde les thèmes suivants :
 - les grandes étapes de la pensée mathématique chinoise,
 - quelques exemples tirés des classiques mathématiques : le théorème de Pythagore, le calcul de π , le calcul par “fausse position”,
 - la diffusion et la nature du savoir mathématique chinois.
- M. Becchere, L. Grugnetti, R. Tazzioli, E. Uselli, *Sens commun et concept de volume*

Les auteurs ont mené une recherche en vue de comprendre et puis de décrire les conceptions d'élèves de 8 à 18 ans, d'étudiants universitaires et d'adultes sur le concept de volume. Un même test a été soumis à tous les groupes d'âge. Les réponses sont analysées et comparées. La manière dont les manuels scolaires introduisent et développent le concept de volume a été analysée. L'école contribue souvent à la construction d'un sens commun du concept de volume qui ne correspond pas toujours au savoir savant. Le concept de volume nécessite plusieurs approches didactiques.

- Alicia Bruno, Antonio Martinó, *Problèmes additifs (1) = d'états*
Premier article d'une série de trois sur les problèmes additifs. Les auteurs s'intéressent aux problèmes où trois nombres x, y et z (positifs ou négatifs) sont en jeu. Parmi ces trois nombres deux sont connus, le troisième est inconnu. La relation mettant en rapport ces trois nombres est :

$$x + y = z.$$

Les auteurs ont surtout centré leur attention sur trois aspects : structure, position de l'inconnue et forme sémantique.

Ce premier article traite des problèmes additifs d'états qui font référence à trois types de problèmes :

- combinaison des états

- état partiel 1 + état partiel 2 = état total,
- variation des états
état initial + variation = état final,
- comparaison des états
état 1 + comparaison = état 2.
- Hervé Schild, *Etoile magique*
L'auteur présente une activité numérique qui s'est déroulée avec des élèves de 2ème niveau 1.
- *Notes de lecture*
 - Le Trésor de tonton Lulu par J. Lubczanski, G. Chaumeuil et B. Chareyre (Editions Archimède)
- *10ème championnat international des jeux mathématiques et logiques*
Quelques problèmes extraits des quarts de finale individuels sont proposés.
- *Courrier des lecteurs*
- Caroline Joseph, *Math-Adore ... le retour (1)!*
Une nouveauté neuchâteloise : un concours interclasses en mathématique pour les degrés 4 et 5 de l'école primaire. Les énoncés des trois premiers problèmes sont suivis de différentes démarches proposées par les élèves pour résoudre le premier.

M. FREMAL

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

Gardons nos distances problème n° 193 de M. et P. n° 113

Sur un segment $[AB]$, on donne $2n$ points deux à deux symétriques par rapport au milieu M de $[AB]$. On colorie n de ces points en bleu et les n autres en rouge. Prouver que la somme des distances de A aux n points rouges est égale à la somme des distances de B aux n points bleus.

Solution de J.-Y. LE CADRE de Vannes (France)

1) Si deux points d'une paire symétrique sont de couleurs différentes, en appelant A' le point rouge et B' le bleu, on a $AA' = BB'$, et en les enlevant, on ne change donc rien au problème. (Et il reste autant de rouges que de bleus, parmi les points symétriques).

2) On est donc ramené à des paires de points symétriques de même couleur, avec autant de paires rouges que de bleues, et dont la somme des distances à A , pour une paire rouge est AB , de même que pour la somme des distances à B pour une paire bleue. D'où l'égalité cherchée.

Deux lecteurs ont proposé une solution identique à la précédente, il s'agit de J. JANSSEN de Lambermont et de B. LOISEAU de Mouscron.

J'ai aussi reçu de bonnes (mais plus longues) solutions de J. FINOULST de Diepenbeek, M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre, J.F. MACQ de Virelles, C. VILLERS de Hyon.

Deux lecteurs ont mal interprété l'énoncé en supposant que chaque point rouge était le symétrique d'un point bleu par rapport à M .

Un peu d'harmonie problème n° 194 de M. et P. n° 113

Soit $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{N_n}{D_n}$ où N_n et D_n sont des entiers positifs premiers entre eux.

Déterminer tous les nombres premiers $p \geq 5$ tels que p est un diviseur de N_{p-4} .

Solution de J.F. MACQ de Virelles

Soit $p \geq 5$ un nombre premier.

$$\frac{N_{p-4}}{D_{p-4}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-4} = \frac{\sum_{i=1}^{p-4} \frac{(p-4)!}{i}}{(p-4)!}$$

et il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} k \cdot N_{p-4} = \sum_{i=1}^{p-4} \frac{(p-4)!}{i} \\ k \cdot D_{p-4} = (p-4)! \end{cases}$$

p est premier, donc ne divise pas $(p-4)!$ et donc ne divise pas k .

Dès lors, p divise N_{p-4} ssi p divise $\sum_{i=1}^{p-4} \frac{(p-4)!}{i}$, ssi p divise $2 \sum_{i=1}^{p-4} \frac{(p-4)!}{i}$ car $p \geq 5$ donc est impair. Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^3 \frac{(p-4)!}{i} + \sum_{i=4}^{p-4} \left(\frac{(p-4)!}{i} + \frac{(p-4)!}{p-i} \right) &\equiv 0 \pmod{p} \\ 2(p-4)! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \sum_{i=4}^{p-4} \left(\frac{(p-4)!}{i} + \frac{(p-4)!}{-i} \right) &\equiv 0 \pmod{p} \\ 2(p-4)! \frac{11}{6} &\equiv 0 \pmod{p} \\ 11 &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

La seule solution est donc $p = 11$.

Deux lecteurs, M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre et H.J. SEIFFERT de Berlin, me signalent que ce problème est une version affaiblie du théorème de Wolstenholme : “pour nombre premier $p \geq 5$, p^2 est un diviseur de N_{p-1} ”.

Il est à remarquer que la solution présentée ci-dessus suppose implicitement $p \geq 7$, mais que le cas $p = 5$ est trivial puisque la fraction $\frac{N_{5-4}}{D_{5-4}}$ se réduit à 1 et 5 n’est pas diviseur de 1.

J. FINOULST de Diepenbeek, B. LOISEAU de Mouscron et J. RONDOU de Heverlee ont aussi trouvé la bonne solution.

Racines problème n° 195 de M. et P. n° 113

Prouver que les racines de l'équation

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

ne peuvent être toutes réelles si $2a^2 < 5b$.

Solution de P. DASSY de Liège

Soient x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 les racines de cette équation, qui s'écrit aussi

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = 0.$$

Le coefficient de x^4 est

$$-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = a.$$

Le coefficient de x^3 est

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 \\ + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 = b. \end{aligned}$$

L'inégalité $2a < 5b$ est équivalente successivement à

$$\begin{aligned} 2 \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right)^2 &< 5 \sum_{i,j=1}^{i<j} x_i x_j \\ 2 \sum_{i=1}^5 x_i^2 + 4 \sum_{i,j=1}^{i<j} x_i x_j &< 5 \sum_{i,j=1}^{i<j} x_i x_j \\ 4 \sum_{i=1}^5 x_i^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{i<j} x_i x_j &< 0 \\ \sum_{i,j=1}^{i<j} (x_i - x_j)^2 &< 0 \end{aligned}$$

ce qui est impossible si toutes les racines sont réelles.

Bonnes solutions de J. GOLDSTEINAS de Bruxelles, M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre, B. LOISEAU de Mouscron, J.F. MACQ de Virelles et M. PONCHAUX de Lille.

On considère le trapèze isocèle $ABCD$ où $AB \parallel DC$. Les points M et N sont les pieds des perpendiculaires abaissées de D sur AB et sur AC respectivement. Démontrer que si M, N et P milieu de $[CD]$ sont colinéaires, alors l'angle ACB est droit.

203. Nous progressons

Déterminer toutes les valeurs positives du paramètre m pour lesquelles les solutions non négatives de l'équation

$$\cos((18m - 3)x) = \cos((14m + 5)x)$$

forment une progression arithmétique.

204. Prenons le bus

La carte d'une ville a la forme d'un polygone convexe. Chaque diagonale du polygone est une rue et les points d'intersection de ces diagonales sont des carrefours (les côtés du polygone ne sont pas des rues et ses sommets ne sont pas considérés comme carrefours). Des lignes d'autobus parcourent la ville. Chaque ligne va de l'extrémité d'une rue à l'autre extrémité et a un arrêt à chaque carrefour et à chacune des deux extrémités. A chaque carrefour, deux rues seulement se coupent et au moins l'une d'elles possède une ligne d'autobus. Montrer que l'on peut aller de tout carrefour à tout autre carrefour en effectuant au plus deux changements d'autobus.

Olympiades

C. Festraets,

voici la suite des solutions aux problèmes de l'Olympiade Mathématique Internationale de 1997. La première est due à Eric VANDENBUSSCHE et lui a valu le maximum des points.

4. Une matrice carrée à n lignes et n colonnes, à éléments dans l'ensemble $S = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ est appelée une matrice d'argent si, pour tout $i = 1, \dots, n$, la réunion de la i -ème ligne et de la i -ème colonne contient tous les éléments de S . Montrer que

(a) il n'existe pas de matrice d'argent pour $n = 1997$

(b) il existe des matrices d'argent pour une infinité de valeurs de n .

Solution.

(a) Chaque élément non diagonal appartient à une ligne et à une colonne de numéros différents. Chaque élément diagonal appartient à une ligne et une colonne de même numéro. Si on prend toutes les réunions, les éléments diagonaux sont pris une fois et les autres deux fois. Tous les nombres de 1 à n doivent avoir été pris n fois. Pour n impair différent de 1, c'est impossible.

Chaque élément doit être pris un nombre impair de fois, donc doit occuper un nombre impair de places diagonales car les autres places comptent pour 2. Chaque élément doit occuper au moins une place diagonale, or il n'y a que n places pour $2n - 1$ éléments.

(b) Exemples

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si M est une matrice d'argent $n \times n$, alors la matrice M' , $2n \times 2n$, suivante est une matrice d'argent

$$M' = \begin{pmatrix} M & A \\ B & M \end{pmatrix}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2n & 2n+1 & \dots & 3n-1 \\ 3n-1 & 2n & \dots & 3n-2 \\ 3n-2 & 3n-1 & \dots & 3n-3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2n+1 & 2n+2 & \dots & 2n \end{pmatrix}$$

et

$$B = A + n \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Chaque réunion d'une ligne et d'une colonne de M' de même numéro a ses éléments de 1 à $2n-1$ dans sa partie M , de $2n$ à $3n-1$ dans sa partie A et de $3n$ à $4n-1$ dans sa partie B .

S'il existe une matrice d'argent $n \times n$, alors il en existe une $2n \times 2n$. Comme il en existe une pour $n = 1$, il en existe pour tout $k = 2^n$ et donc une infinité.

5. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers $a \geq 1$, $b \geq 1$ vérifiant l'équation

$$a^{(b^2)} = b^a.$$

Solution

Soit d le plus grand commun diviseur de a et b et posons $a = d\alpha$ et $b = d\beta$, les entiers α et β étant premiers entre eux.

L'équation donnée est équivalente à

$$(d\alpha)^{(d\beta)^2} = (d\beta)^{d\alpha}$$

ou encore

$$(d\alpha)^{d\beta^2} = (d\beta)^\alpha \quad (1)$$

1) si $d\beta^2 = \alpha$, alors de l'équation (1), il vient $\alpha = \beta$. Or α et β sont premiers entre eux, donc $\alpha = \beta = 1$ et comme $d\beta^2 = \alpha$, on a $d = 1$, ce qui nous fournit la solution $a = b = 1$.

2) si $d\beta^2 > \alpha$, alors l'équation (1) peut s'écrire

$$d^{d\beta^2-\alpha} \cdot \alpha^{d\beta^2} = \beta^\alpha$$

α et β étant premiers entre eux, cette égalité n'est possible que pour $\alpha = 1$, ce qui donne

$$d^{d\beta^2-1} = \beta. \quad (2)$$

Pour $d = 1$, on a $\beta = 1$ et l'inégalité $d\beta^2 > \alpha$ est fausse. Pour $d \geq 2$,

$$d^{d\beta^2-1} \geq 2^{2\beta^2-1} \geq 2^{2\beta-1} > \beta$$

ce qui est en contradiction avec l'égalité (2).

3) si $d\beta^2 < \alpha$, alors l'équation (1) peut s'écrire

$$\alpha^{d\beta^2} = d^{\alpha-d\beta^2} \cdot \beta^\alpha$$

α et β étant premiers entre eux, cette égalité n'est possible que pour $\beta = 1$, ce qui donne

$$\alpha^d = d^{\alpha-d}. \quad (3)$$

Comme $d < \alpha$, il faut que $\alpha - d > d$, c'est-à-dire $\alpha > 2d$.

α et d ont les mêmes diviseurs premiers ; soit p l'un d'eux et p^k la plus haute puissance qui divise α , p^t la plus haute puissance qui divise d .

De (3),

$$kd = t(\alpha - d)$$

or $\alpha - d > d$, donc $k > t$ et d est un diviseur de α .

Posons $\alpha = sd$ (avec $s \geq 3$, car $\alpha > 2d$) et substituons dans (3) :

$$(sd)^d = d^{sd-d}$$

d'où

$$s = d^{s-2}. \quad (4)$$

Si $s = 3$, alors $d = 3$, $\alpha = 9$, $a = 27$, $b = 9$.

Si $s = 4$, alors $d = 2$, $\alpha = 8$, $a = 16$, $b = 2$.

Si $s \geq 5$, alors $d^{s-2} \geq 2^{s-2} > s$, ce qui contredit l'égalité (4).

L'équation proposée admet donc trois solutions (1,1), (16,2) et (27,9).

6. Pour tout entier strictement positif n , $f(n)$ désigne le nombre de façons de représenter n comme une somme de puissances de 2 à exposants

entiers positifs ou nuls. Deux représentations qui ne diffèrent que par l'ordre des termes de la somme sont considérées comme les mêmes. Par exemple, $f(4) = 4$ car le nombre 4 peut être représenté par les quatre façons suivantes : 4, $2 + 2$, $2 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$,

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Solution

Parmi les représentations de $2k$, on distingue

1) celles où tous les termes sont pairs ; en divisant par 2, on obtient les représentations de k ;

2) celles comprenant des termes égaux à 1 ; en y enlevant $1 + 1$, on obtient les représentations de $2k - 2$.

D'où

$$\forall k \geq 1 : f(2k) = f(k) + f(2k - 2) \quad (1)$$

Les représentations de $2k + 1$ comprennent toutes au moins un terme égal à 1. Enlevons un terme "1", on obtient les représentations de $2k$.

D'où

$$\forall k \geq 1 : f(2k + 1) = f(2k) \quad (2)$$

Remarquons que f est croissante, en effet

$$\forall k \geq 1 : f(2k + 1) = f(2k) = f(k) + f(2k - 2) > f(2k - 2) = f(2k - 1).$$

Dans ce qui suit, on posera $f(0) = 1$.

A) En utilisant la relation (1), on a

$$\begin{aligned} f(2^n) &= f(2^n - 1) + f(2^n - 2) \\ f(2^n - 2) &= f(2^{n-1} - 1) + f(2^n - 4) \\ f(2^n - 4) &= f(2^{n-1} - 2) + f(2^n - 6) \\ &\vdots \\ f(4) &= f(2) + f(2) \\ f(2) &= f(1) + f(0). \end{aligned}$$

Additionnons

$$f(2^n) = f(2^{n-1}) + f(2^{n-1} - 1) + f(2^{n-1} - 2) + \cdots + f(2) + f(1) + f(0) \quad (3)$$

$f(1) + f(0) = 1 + 1 = 2 = f(2)$, donc

$$\begin{aligned} f(2^n) &= f(2^{n-1}) + f(2^{n-1} - 1) + f(2^{n-1} - 2) + \cdots + \cdots + f(2) + f(2) \\ &< 2^{n-1} \cdot f(2^{n-1}) \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ &< 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} f(2^{n-2}) \\ &\dots \\ &< 2^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} \cdot f(2) \\ &< 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 = 2^{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1} \\ &< 2^{\frac{n^2}{2}} \quad \text{pour } n \geq 3. \end{aligned}$$

B) En utilisant la relation (2), l'égalité (3) devient

$$f(2^n) = f(2^{n-1}) + 2f(2^{n-1} - 2) + 2f(2^{n-1} - 4) + \cdots + 2f(2) + 2f(0).$$

De (1), on a

$$\begin{aligned} f(2^{n-1} + 2i + 2) &= f(2^{n-3} + i + 1) + f(2^{n-2} + 2i) \\ f(2^{n-2} - 2i - 2) &= f(2^{n-2} - 2i) - f(2^{n-3} - i). \end{aligned}$$

Additionnons

$$\begin{aligned} &f(2^{n-2} + 2i + 2) + f(2^{n-2} - 2i - 2) \\ &= f(2^{n-2} + 2i) + f(2^{n-2} - 2i) + f(2^{n-3} + i + 1) - f(2^{n-3} - i) \\ &\geq f(2^{n-2} + 2i) + f(2^{n-2} - 2i) \end{aligned}$$

car $f(2^{n-3} + i + 1) \geq f(2^{n-3} - i)$, l'égalité ayant lieu pour $i = 0$. D'où

$$\begin{aligned} f(2^{n-1}) + f(0) &> f(2^{n-1} - 2) + f(2) > f(2^{n-1} - 4) + f(4) > \cdots \\ &> f(2^{n-2} + 2) + f(2^{n-2} - 2) = 2f(2^{n-1}) \end{aligned}$$

ce qui, dans (4), nous donne

$$\begin{aligned} f(2^n) &= (f(2^{n-1}) + f(0)) + 2(f(2^{n-1} - 2) + f(2)) \\ &\quad + \cdots + 2(f(2^{n-2} + 2) + f(2^{n-2} - 2)) + 2f(2^{n-2}) + f(0) \\ &> 2f(2^{n-2}) + 4f(2^{n-2}) + \cdots + 4f(2^{n-2}) + 2f(2^{n-1}) + f(0) \\ &> (2 + 4(2^{n-3} - 1) + 2) \cdot f(2^{n-2}) + 1 \\ &> 4 \cdot 2^{n-3} f(2^{n-2}) + 1 \\ &> 2^{n-1} \cdot f(2^{n-2}) \end{aligned}$$

Si n est pair :

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1}.2^{n-3}.\dots.2^3.2^1.f(2^0) \\ &> 2^{\frac{1}{2}n.\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n^2}{4}}. \end{aligned}$$

Si n est impair :

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1}.2^{n-3}.\dots.2^2.f(2^1) \\ &> 2^{\frac{1}{2}(n+1)\frac{n-1}{2}}.2 = 2^{\frac{n^2-1}{4}}.2 = 2^{\frac{n^2+3}{4}} \\ &> 2^{\frac{n^2}{4}}. \end{aligned}$$

Ce dernier problème, fort difficile, n'a été résolu complètement que par 10 étudiants sur un total de 460 participants à l'O.M.I. !