

# *Mathématique et Pédagogie*

## *Sommaire*

- *J. Navez, Éditorial* 2
- *B. Baton, R. Giot et Y. Noël, Des difficultés de l'algèbre : en deuxième secondaire* 3
- *CDS de l'Université de Mons-Hainaut, Suggestions concernant les programmes du troisième degré* 15
- *M. Grand'Henry-Krysinska et P. Bolly, Comportement curieux de la touche  $y^x$*  31
- *J. Bair, Equations fonctionnelles et mathématique financière* 46
- *S. Courtois et F. Denis, Coup d'oeil actualisé sur la droite de Simson et sur la géométrie* 56
- *M. Fremal, Revue des revues* 68
- *C. Festraets, Des problèmes et des jeux* 75

## Éditorial

J. Navez,

Une visite toute récente dans le canton suisse du Jura m'a permis de découvrir l'organisation de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire dans les cantons francophones helvétiques ainsi que la manière dont est conçue la formation des maîtres en mathématiques. Dans un prochain numéro de *Mathématique et Pédagogie*, le rapport de la visite de la délégation de notre société dans le Jura détaillera ces deux points de manière précise.

Au delà des anecdotes révélatrices comme les maîtres qui donnent leurs cours en pantoufles ou les graffitis qui disparaissent dans l'heure, je voudrais mettre en exergue un problème qui se pose à nos amis et qui risque de survenir chez nous aussi, à savoir la difficulté de recruter des enseignants bien qualifiés en mathématiques.

Outre l'augmentation de la moyenne d'âge du corps professoral en mathématique, on observe dans notre pays une désaffection, aussi bien dans les écoles normales devenues hautes qu'à l'université, des filières qui conduisent à l'enseignement.

Au lieu de se poser des questions comme "les biologistes peuvent-ils donner des cours de mathématiques?" ou bien "faut-il encore diminuer le nombre total d'heures de mathématiques", ne pourrait-on pas se pencher sur le problème de rendre plus attractives les études qui conduisent au professorat en mathématique? Pour cela, il faut avoir le courage de reconsidérer sans tabous et sans préjugés toute la formation des maîtres du secondaire aussi bien au niveau inférieur qu'au niveau supérieur.

- Faut-il des formations distinctes par niveau?
- La formation scientifique est-elle suffisamment solide? Donne-t-elle une bonne culture générale et une ouverture suffisante sur des disciplines connexes plutôt que de jouer la carte de l'hyperspécialisation?
- La formation pédagogique est-elle à la hauteur des compétences que la société voudrait voir dévolues à nos enseignants?

Je me garde bien de prendre position sur ces questions, mais si vous le souhaitez, nous pouvons aussi ouvrir un débat sur ce sujet au sein de notre société.

Jacques NAVEZ

## Des difficultés de l'algèbre : en deuxième secondaire

B. Baton, R. Giot et Y. Noël, *Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut*

### 1. Introduction

Comme le texte publié dans le n° 116 de la revue, ce qui suit repose sur une recherche organisée par le CDS de l'Université de Mons-Hainaut. Comme prévu, nous donnons cette fois des informations relatives au test qui a été proposé en novembre 1995 à 259 élèves de deuxième année de l'enseignement secondaire répartis sur 15 classes. Nous reproduisons ci-dessous le questionnaire proposé. Comme pour les élèves du primaire, le but poursuivi n'était pas de contrôler une capacité de calcul ni de savoir si les élèves *réussissent* ou *ne réussissent pas* un certain type de question. Certaines réponses (à la question 8 par exemple) ne sont pas appréciables en termes de réussite ou d'échec. Nous souhaitons connaître — dans la mesure du possible — les réactions des élèves confrontés à des situations mettant en oeuvre

- la notion d'égalité
- la notion de nombre
- l'usage des lettres

Nous analyserons les réponses reçues suivant ces trois thèmes principaux et nous verrons que les mauvaises perceptions des notions de nombre et d'égalité sont souvent intimement liées. Nous commenterons ensuite

## 2. Le questionnaire

1. Complète par Vrai (V) ou Faux (F) :

A.  $1999 \neq 1999$  ☐

C.  $21 + 1 \neq 211$  ☐

B.  $35 + 72 \neq 100 - 7$  ☐

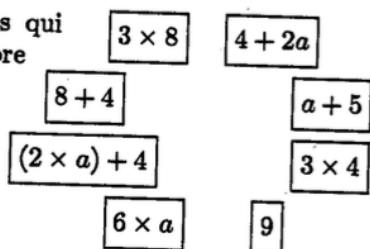
D.  $34 + 71 \neq 71 + 34$  ☐

2. A. En utilisant une seule fois chacun des deux nombres 2 et 3, construis le nombre le plus grand possible.

B. En utilisant une seule fois chacun des deux chiffres 2 et 4, construis le nombre le plus grand possible.

(Rm. L'item 2.B était inséré entre les questions 8 et 9.)

3. Si  $a = 4$ , relie les cadres qui représentent le même nombre



4. Complète par Toujours Vrai (TV), Toujours Faux (TF) ou Parfois Vrai, Parfois Faux (PP) :

A.  $u + 3 = 6$

C.  $21 = 12$

B.  $u + b = b + u$

D.  $128 = 96 + 32$

$$E. u \times b = u + b \quad \boxed{\phantom{00}}$$

$$F. 603 = 60 + 3 \quad \boxed{\phantom{00}}$$

5. Indique « Nombre » à droite des cadres dont le contenu est un nombre, et indique « Pas Nombre » à droite des cadres dont le contenu n'est pas un nombre.

A.  $\boxed{12}$

E.  $\boxed{4 - 4}$

I.  $\boxed{35 + 7}$

B.  $\boxed{=}$

F.  $\boxed{+}$

J.  $\boxed{35 + 7 = 42}$

C.  $\boxed{4}$

G.  $\boxed{0}$

K.  $\boxed{\frac{2}{3}}$

D.  $\boxed{\rightarrow}$

H.  $\boxed{4,98}$

L.  $\boxed{40 - 172}$

6. Vrai ou faux ?

Un nombre compris entre 100 et 672 s'écrit toujours en utilisant 3 chiffres.

☐

7. Complète par Vrai (V) ou Faux (F)

A.  $1^2 + 3^2 = (1 + 3)^2$  ☐

B.  $25^2 = 50$  ☐

8. Ecris un des mots Somme, Différence, Additionner, Soustraire à côté de chacun des cadres suivants :

A.  $\boxed{a + 5}$

E.  $\boxed{13 + 42 = 55}$

B.  $\boxed{78 - 6}$

F.  $\boxed{a + 3 = 5}$

C.  $\boxed{3 + 5 \rightarrow 8}$

G. 
$$\begin{array}{r} 13 \\ + 42 \\ \hline 55 \end{array}$$

D.  $\boxed{45 - 13 \rightarrow 32}$

9. Complète pour que les égalités soient toujours vraies :

$$\begin{array}{l|l|l} \text{A. } 195 + 42 = \dots + 17 & \text{C. } \dots + 2x = 3x - 1 & \text{E. } a + \dots = c \\ \text{B. } a \times \dots = 6a & \text{D. } x = \dots + 2x & \end{array}$$

10. A. Que vaut  $rs$  lorsque  $r = 4$   
et  $s = 30$  ?

C. Que vaut  $(x \times w) + x$  lorsque  
 $x = 0$  et  $w = 4$  ?

B. Que vaut  $2ab + a$  lorsque  $5 = a$   
et  $b = 8$  ?

D. Que vaut  $a + (b \times c)$  lorsque  
 $a = 2$  et  $b = 0$  ?

### 3. La notion de nombre

Dans les tableaux qui suivent, les nombres indiquent les pourcentages d'apparition de différentes réponses possibles.

La notion de nombre semble très fragile si nous observons les réponses aux questions 2, 5, 6 et 8.

**Q5 :** Indique « Nombre » à droite des cadres dont le contenu est un nombre, et indique « Pas Nombre » à droite des cadres dont le contenu n'est pas un nombre.

|                  | Nombre | Pas Nombre | Abstention | Autres |
|------------------|--------|------------|------------|--------|
| A. 12            | 93,82  | 2,70       | 3,47       | 0      |
| B. =             | 0,77   | 95,37      | 3,47       | 0,39   |
| C. 4             | 70,66  | 25,48      | 3,86       | 0      |
| D. $\rightarrow$ | 0,77   | 95,37      | 3,47       | 0,39   |
| E. $4 - 4$       | 39,77  | 54,44      | 3,86       | 1,93   |
| F. +             | 1,54   | 94,59      | 3,47       | 0,39   |
| G. 0             | 68,73  | 27,41      | 3,86       | 0      |
| H. 4,98          | 76,83  | 18,53      | 4,63       | 0      |
| I. $35 + 7$      | 55,21  | 39,00      | 3,86       | 1,93   |
| J. $35 + 7 = 42$ | 59,85  | 33,98      | 3,86       | 2,32   |
| K. $\frac{2}{3}$ | 36,29  | 58,69      | 5,02       | 0      |
| L. $40 - 172$    | 52,51  | 42,47      | 3,86       | 1,16   |

Seuls 12 et 4,98 sont considérés comme nombres par plus des trois quarts des élèves.

La chute pour 4 et 0 est peut-être une trace de la distinction entre NOMBRE et CHIFFRE. Cependant cette distinction n'apparaît pas à la question 2 puisque près de 96% des élèves produisent le même comportement de construction d'un nombre en réponse aux items 2A et 2B (les réponses les plus courantes étant soit 32 et 42, soit  $2^3$  et  $2^4$ ).

Il est remarquable de voir alors  $35 + 7 = 42$  se placer avant  $35 + 7$  et  $40 - 172$ . Ainsi, pour que le nombre QUARANTE DEUX soit reconnu, l'apparition de l'assemblage formé du chiffre 4 et du chiffre 2 est plus importante que l'expression globale proposée. Ce qui est perçu dans  $35 + 7$  et  $40 - 172$  semble être une opération à effectuer plutôt qu'un nombre. Ceci se confirme dans la question 8.

**Q8 :** *Ecris un des mots Somme, Différence, Additionner, Soustraire à côté de chacun des cadres suivants :*

|                                                           | Somme | Diff. | Addit. | Soust. | Abst. | Autres |
|-----------------------------------------------------------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|
| A. $a + 5$                                                | 7,34  | 1,93  | 89,58  | 0      | 1,16  | 0      |
| B. $78 - 6$                                               | 0,39  | 3,86  | 1,16   | 93,44  | 1,16  | 0      |
| C. $3 + 5 \rightarrow 8$                                  | 72,97 | 6,18  | 15,83  | 0,77   | 2,32  | 1,93   |
| D. $45 - 13 \rightarrow 32$                               | 6,56  | 71,43 | 0,77   | 16,99  | 1,93  | 2,32   |
| E. $13 + 42 = 55$                                         | 62,16 | 1,16  | 32,05  | 0      | 1,54  | 3,09   |
| F. $a + 3 = 5$                                            | 61,39 | 3,09  | 29,34  | 0,77   | 2,32  | 3,09   |
| G. $\begin{array}{r} 13 \\ + 42 \\ \hline 55 \end{array}$ | 50,58 | 1,54  | 42,08  | 0,39   | 1,93  | 3,47   |

Les items 8A et 8B suggèrent apparemment les actions d'additionner et de soustraire plutôt que les résultats de ces actions que sont la somme et la différence. L'utilisation de l'égalité en 8E et 8F fait opter les élèves pour « Somme » et « Différence ». Le remplacement du signe  $=$  par  $\rightarrow$  renforce encore cette tendance. Remarquons la répartition presque moitié-moitié en 8G : la disposition du calcul écrit suggère l'opération d'« Addition » mais le résultat est indiqué, de sorte que la tendance est tout aussi forte de parler de « Somme ».

Revenons à la question 5 : la comparaison des résultats pour  $4 - 4$  (5E) et 0 (5G) fait apparaître le même phénomène : une expression telle que  $4 - 4$  n'est pas perçue comme un nombre. Cependant, les élèves n'hésiteraient pas à écrire  $4 - 4 = 0$ . Nous y reviendrons à propos de la notion d'égalité.

---

---

Enfin,  $\frac{2}{3}$  n'est reconnu comme nombre que par 36% des élèves. Nous y reconnaissons l'impact de l'utilisation du mot FRACTION ... qui empêche pratiquement que  $\frac{2}{3}$  soit un nombre au même titre que 0, 6... Et ceci nous ramène à la notion d'égalité puisque  $\frac{2}{3} = 0,6...$  de même que  $4 - 4 = 0$ .

La question 6 montre que pour sept élèves sur dix, la phrase *les nombres compris entre 100 et 672* évoque l'ensemble des *naturels compris entre 100 et 672* alors que rien dans la question ne précise la restriction aux entiers :

**Q6 : Vrai ou faux ?**

*Un nombre compris entre 100 et 672 s'écrit toujours en utilisant 3 chiffres.*

La réponse « vrai » donnée par 69,50% des élèves nécessite de ne considérer que des nombres entiers. Parmi les réponses « faux » certaines sont justifiées en utilisant des non entiers comme 115,72 ; la majorité des réponses n'est pas argumentée. En posant cette question, nous nous demandions si des élèves joueraient sur la répétition de chiffres et affirmeraient par exemple que l'écriture de 121 n'utilise que deux chiffres. Ce type d'approche ne se perçoit explicitement sur aucune feuille mais l'absence d'explicitation ne permet aucune conclusion.

## 4. La notion d'égalité

Nous avons montré dans l'article précédent que le signe « = » est perçu dans l'enseignement primaire comme une commande d'exécution d'un calcul. Nous avons même constaté que certaines habitudes d'écriture comme  $345 + 37 = 345 + 30 = 375 + 7 = 382$  renforcent cette perception tout au long de l'enseignement primaire.

Les élèves savent que  $4 - 4 = 0$  et que  $35 + 7 = 42$ . Dès lors, si l'égalité était la relation symétrique et transitive dont les élèves ont besoin en algèbre, c'est-à-dire si « = » était le signe qui exprime que deux représentations différentes désignent un même objet, «  $4-4$  » et «  $35+7$  » auraient droit au statut de nombre au même titre respectivement que 0 et 42. La comparaison des pourcentages atteints en 5E et 5G d'une part, en 5A et 5I d'autre part montrent qu'il n'en est rien.

Il nous semble que la relation ... EST ÉGAL À ... peut acquérir son statut de relation si les élèves rencontrent en même temps sa négation ... EST DIFFÉRENT DE .... Regardons le tableau des réponses à la question 1 posée en cinquième primaire et en deuxième secondaire :



|                           | Deuxième secondaire |       | Cinquième primaire |       |
|---------------------------|---------------------|-------|--------------------|-------|
|                           | V                   | F     | V                  | F     |
| A. $1999 \neq 1999$       | 8,49                | 91,51 | 9,12               | 90,88 |
| B. $35 + 72 \neq 100 - 7$ | 83,01               | 16,99 | 62,81              | 37,19 |
| C. $21 + 1 \neq 211$      | 83,78               | 16,22 | 83,16              | 16,84 |
| D. $34 + 71 \neq 71 + 34$ | 11,20               | 88,80 | 18,25              | 81,75 |

La situation n'a pas évolué en A et C. Elle s'est par contre améliorée en B et D, les deux cas où les deux membres sont du type  $a * b$ . Nous pouvons donc espérer que les élèves progressent dans la perception de l'égalité comme comparaison entre deux expressions, se détachant ainsi du cliché opératoire  $a * b = c$  constaté dans le primaire (voir par exemple la question 4 en deuxième et cinquième primaire).

En deuxième secondaire, la réussite est nettement plus marquée sur les réponses Faux que sur les réponses Vrai. Nous n'en concluons pas que la double négation est maîtrisée. Les habitudes du langage courant peuvent expliquer une plus grande difficulté à répondre Vrai plutôt que Faux. En effet, dans le langage courant, Vrai et Faux sont relativement associés à Oui et Non (on entend souvent « oui, c'est vrai » ou « non, c'est faux » mais rarement « oui, c'est faux »). Si nous demandons à quelqu'un « Tu n'es pas fou? », il s'en défend par « NON, je ne suis pas fou! » et pas par « OUI, je ne suis pas fou! ». Cet usage renforce probablement la difficulté de répondre VRAI à une question posée négativement.

La remarque précédente est étayée par la comparaison des échecs aux items 1C et 4F. En effet 16,22% se trompent en évaluant  $21 + 1 \neq 211$  tandis que 5,4% évaluent mal  $603 = 60 + 3$ .

La question 3 permet de traiter d'égalité sans faire intervenir le signe  $=$ . Comme la question 1, elle montre un certain élargissement de la notion par rapport à la situation dans le primaire. En effet, les paires données par les élèves sont moins isolées dans le secondaire que dans le primaire : 40,15% des élèves relient d'une manière ou d'une autre les quatre représentations  $4 + 2a$ ,  $8 + 4$ ,  $(2 \times a) + 4$  et  $3 \times 4$  (nous tenons compte ici du fait que les quatre cases sont jointes par au moins trois traits, sans exiger que tous les liens possibles soient dessinés). De plus, 76,45% des élèves relient  $3 \times 8$  à  $6 \times a$  et  $a + 5$  à 9 alors que le premier couple n'est pas du type  $a * b = c$ .

La notion d'égalité reste pourtant étriquée dans la mesure où 26,64% des élèves ne donnent encore que des paires isolées. Exemple : ils relient

$8 + 4$  à  $3 \times 4$ ,  $4 + 2a$  à  $(2 \times a) + 4$ ,  $3 \times 8$  à  $6 \times a$  et  $a + 5$  à 9 sans donner aucun autre lien. Ainsi, même si elle devient une relation qui permet de comparer des expressions, nous craignons qu'elle n'ait pas acquis sa qualité de relation transitive.

## 5. L'usage de lettres

La lettre  $a$  glissée dans la question 3 pose sous une forme inhabituelle une question de calcul d'expressions littérales pour une valeur donnée à la variable. La réussite atteint 76,45% pour  $6 \times a$  et  $a + 5$ , ce qui permet de penser que l'idée de remplacer la lettre  $a$  par le nombre 4 est comprise par trois élèves sur quatre. Mais la situation se dégrade dès que l'écriture n'explicite plus totalement toutes les étapes du calcul à effectuer. La nécessité de ne pas imposer rapidement des conventions d'écriture propres aux expressions littérales est confirmée dans la question 10 :

**Q10 :** Que vaut ...

|                                                  | Réussite | Erreur | Abst. |
|--------------------------------------------------|----------|--------|-------|
| A. $rs$ lorsque $r = 4$ et $s = 30$              | 44,40    | 51     | 4,63  |
| B. $2ab + a$ lorsque $5 = a$ et $b = 8$          | 28,57    | 66,4   | 5,02  |
| C. $(x \times w) + x$ lorsque $x = 0$ et $w = 4$ | 77,22%   | 18,5   | 4,25  |
| D. $a + (b \times c)$ lorsque $a = 2$ et $b = 0$ | 60,23    | 31     | 7,72  |

En effet, la réussite reste supérieure à 60% pour les items 10C et 10D où l'agencement des calculs est explicite grâce aux parenthèses, et malgré la présence de 0 qui sème souvent le trouble dans les calculs. Au contraire, elle tombe à 44% dans l'évaluation de  $rs$  et sous 29% dans le calcul de  $2ab + a$ .

Des évaluations non demandées mais notées sur les cadres dans la question 3 et quelques calculs effectués dans le cadre prévu en fin de test montrent les erreurs les plus courantes :

- dans le calcul de  $4 + 2a$  lorsque  $a = 4$ ,  $2a$  devient 24 et  $4 + 24 = 28$
- dans le même calcul,  $4 + 2a$  devient  $4 + 2 + a$  et  $4 + 2 + 4 = 10$
- lorsque  $r = 4$  et  $s = 30$ ,  $rs$  est remplacé par  $r + s$  par 38,61% des élèves qui répondent 34. L'autre erreur la plus fréquente est 430. Ainsi, 5,79% d'élèves remplacent une juxtaposition de lettres par une juxtaposition de nombres.

Autre trace du manque de maîtrise d'une expression contenant des conventions d'écriture : 12,36% des élèves relient trois des cases parmi les quatre à relier entre elles dans la question 3. C'est alors  $4 + 2a$  qui est omis par une écrasante majorité.

Regardons la question 4 et les réponses obtenues :

**Q4 :** Complète par Toujours Vrai (TV), Toujours Faux (TF) ou Parfois Vrai, Parfois Faux (PP) :

|                         | TV    | TF    | PP    | Abstention |
|-------------------------|-------|-------|-------|------------|
| A. $u + 3 = 6$          | 11,2  | 5,79  | 80,69 | 2,32       |
| B. $u + b = b + u$      | 86,10 | 3,86  | 10,04 | 0          |
| C. $21 = 12$            | 3,47  | 88,03 | 8,49  | 0          |
| D. $128 = 96 + 32$      | 97,68 | 1,54  | 0,77  | 0          |
| E. $u \times b = u + b$ | 4,25  | 65,25 | 30,12 | 0,39       |
| F. $603 = 60 + 3$       | 2,70  | 94,59 | 2,70  | 0          |

Nous voyons que les items littéraux sont globalement moins bien réussis que les autres. En 4A, les 11% de réponse TV font craindre un manque de maîtrise pour aborder des équations. Nous nous demandons si le fait de devoir remplacer  $u$  par 3 dans  $u + 3$  n'a pas perturbé les élèves. Le voisinage des items 4B et 4C a peut-être suscité un rapprochement entre addition et juxtaposition et réduit la réussite en 4B. Enfin, la dégringolade de réussite en 4E n'a rien d'étonnant. En effet, l'égalité est *presque* toujours fausse et seules les substitutions  $u = b = 0$  et  $u = b = 2$  la rendent vraie. Non seulement les substitutions sont peu nombreuses mais elles sont particulières puisqu'il faut remplacer deux lettres *différentes* par le *même* nombre. Compte tenu de l'impact du graphisme rencontré dans les questions 5 et 8, il serait intéressant d'interroger les élèves pour savoir si certaines réponses TF en 4E ne sont pas liées à la perception d'une *multiplication* dans un membre et d'une *addition* dans l'autre. Dans ce cas, l'idée de *nombre*s à comparer serait absente.

Voyons les réponses à la question 9 :

**Q9 :** Complète pour que les égalités soient toujours vraies :

|                            | Réussite | Erreur | Abstention |
|----------------------------|----------|--------|------------|
| A. $195 + 42 = \dots + 17$ | 74,90    | 20,07  | 5,02       |
| B. $a \times \dots = 6a$   | 91,51    | 5,02   | 3,47       |
| C. $\dots + 2x = 3x - 1$   | 14,67    | 73,37  | 11,97      |
| D. $x = \dots + 2x$        | 28,96    | 54,44  | 16,60      |
| E. $a + \dots = c$         | 5,79     | 73     | 22,01      |

- Conformément à nos prévisions, seuls les items A et B sont réussis par la majorité des élèves. La fragilité du calcul numérique est apparente dans l'item A puisque près de la moitié des erreurs porte sur le report d'une centaine : 9,65% des élèves proposent 120 au lieu de 220. Pour l'item B, la non réussite est presque une fois sur deux une abstention : les élèves peuvent ne pas connaître la convention d'écriture proposée et nous avons placé le coefficient à droite de la lettre. Parmi les 5,2% d'erreurs (13 élèves sur 259), signalons la réponse 254 dans laquelle nous avons difficilement reconnu la somme des trois nombres donnés dans 9A. Ceci donne une idée des ressources variées d'un élève confronté à quelque chose qui n'a pas de sens pour lui ! D'autres réponses comme  $a$ , 3, 18, ... ont gardé tout leur mystère.
- Dans l'ordre des réussites, vient ensuite 9D avec 29% et les abstentions grimpent à 16,60%. La majorité des erreurs sont liées au besoin de faire disparaître le 2 dans  $2x$  pour obtenir  $x$ . En découlent 28,2% de réponses  $-2$  ou  $-2x$ . Nous retrouvons ici deux phénomènes repris dans toutes les recherches que nous avons consultées :
  - des erreurs liées à un BESOIN DE FERMETURE : les élèves exécutent tout ce qu'ils peuvent et comme  $-2 + 2 = 0$ , il ne reste rien devant le  $x$  de  $-2 + 2x \dots$  donc le résultat est  $x$ . Nous avons donc une conjonction de trois erreurs courantes (par exemple  $4 + 3a = 7a$  ou  $4a + 3b = 7ab$ , l'assimilation de 0 à rien et l'assimilation de l'absence de coefficient à rien). Le besoin de faire disparaître toute trace d'opération est profondément enraciné dans l'arithmétique. Dès lors, l'omission du signe de multiplication au début de l'algèbre est particulièrement dangereux.
  - la réponse  $-2x$  plutôt que  $-2$  conjugue l'idée précédente de faire disparaître 2 au souci d'ajouter des pommes à des pommes. Ce sont donc des élèves bien consciencieux qui choisissent  $-2x$ .
- L'item 9C provoque moins d'abstentions (12%) mais la réussite chute sous 15%. Les réponses 0 et  $0x$  dominent (39%). Elles s'expliquent

comme ci-dessus si  $3x - 1$  est assimilé à  $2x$ , conformément au besoin d'effectuer tout ce qui *peut* l'être. L'erreur la plus fréquente est ensuite  $x$  (15%). Dans ce cas, l'élève résout peut-être correctement mais partiellement sa tâche, tout en restant incapable d'assumer le travail sur les deux termes donnés. La seule observation des résultats écrits ne permet pas d'appréhender avec certitude les démarches des élèves.

- Enfin, l'item 9E confirme nos prévisions : 43,24% des élèves écrivent  $a + b = c$ , révélant ainsi un impact très important de leur environnement non mathématique (en l'occurrence l'ordre alphabétique), de même qu'un phénomène de régression à un stade prémathématique devant une question non familière.

## 6. Quelques commentaires

Nous avons tenté de structurer les commentaires en respectant les trois thèmes annoncés dans notre premier article. A cause de cela, nous avons dû passer d'une question à l'autre, rendant peut-être ainsi la lecture peu commode. Au contraire, nous aurions pu donner les résultats et commentaires question par question. Mais le fil conducteur de notre recherche s'y serait un peu perdu. Nous pensons que le lecteur intéressé aux tableaux de résultats question par question pourra les retrouver assez facilement à travers le texte. Nous donnons enfin un aperçu des réponses à la question 7. Elle visait l'attrait de certaines confusions bien connues en fin de secondaire.

**Q7 : Complète par Vrai (V) ou Faux (F)**

|                            | Vrai  | Faux  | Abstention |
|----------------------------|-------|-------|------------|
| A. $1^2 + 3^2 = (1 + 3)^2$ | 18,15 | 81,47 | 0,39       |
| B. $2^5 = 50$              | 21,24 | 78,76 | 0          |

Constatons que vers 13 ans, approximativement 8 élèves sur 10 ne se laissent pas abuser par les pièges visuels tendus ici. La zone réservée au brouillon des élèves a été fort peu utilisée mais nous y avons trouvé des calculs écrits de  $25 \times 25$  entachés d'erreurs et conduisant tout de même à une réponse correcte à l'item. De même, nous ne savons pas si les élèves qui considèrent comme vrai l'item A sont tentés par l'assimilation de  $a^2 + b^2$  avec  $(a + b)^2$  ou s'ils confondent « exposant 2 » et « multiplication par 2 » puisque  $(1 \times 2) + (3 \times 2) = (1 + 3) \times 2$ . Des interviews

---

---

seraient nécessaires pour connaître le comportement des élèves. Il serait intéressant de poser la même question à des élèves entre 16 ans et 18 ans, de manière à mesurer l'impact de la pratique vécue des *produits remarquables*. De même qu'une certaine pratique de calcul a introduit des parasites entre la deuxième et la cinquième primaire (voir la question 5 dans l'article précédent), l'apprentissage des produits remarquables parasiterait peut-être les réponses à cette question.

## 7. Conclusion

Pour le questionnaire repris dans cet article, nous ne disposons que des réponses écrites des élèves. Aucun entretien individuel sur le terrain n'a contrôlé les interprétations que nous donnons et la prudence s'impose évidemment. Mais beaucoup d'interprétations reposent sur une littérature très vaste couvrant un grand nombre de recherches effectuées dans de nombreux pays anglophones, hispanophones ou francophones. La cohérence et la répétition des mêmes erreurs à travers le temps et l'espace nous ont fortement interpellés. Nous sommes convaincus que l'apprentissage de l'algèbre nécessite des prérequis qui ne sont pas toujours assurés, que les connaissances (les propriétés des opérations par exemple) acquises dans le domaine numérique doivent pouvoir être transférées dans le domaine littéral. Mais ce transfert cache des pièges car certaines habitudes de calcul sur les nombres s'opposent à la pratique du calcul littéral : si  $2 + 5$  est toujours remplacé par 7, si  $2 + 5$  n'a pas acquis le statut de nombre, l'élève peut être mal à l'aise face à  $a + b$ . De plus, l'usage de lettres se fait dans des contextes très variés et rarement clairs pour les élèves.

Bref, le travail ne fait que commencer et vous pouvez nous aider. Merci de nous rejoindre si nous vous avons convaincus.

## Suggestions concernant les programmes du troisième degré

CDS de l'Université de Mons-Hainaut,

### 1. Introduction

Avant d'aborder les questions de fonds, il nous semble important de faire une remarque d'ordre méthodologique. Nous présentons dans ce qui suit une liste de matières, dont chaque élément est accompagné de commentaires. Pour la plupart, les sujets figurant dans la liste sont repris du document intitulé "options à 2,4,6 p./s. *Vue générale de la matière pour les options à 2, 4, 6 p./s.*" élaboré par la commission pluraliste des programmes de mathématique. Mais nous complétons ces sujets et nous les organisons d'une façon différente, en nous inspirant de principes énoncés ci-dessous. De plus, nous dépassons le stade du "canevas" en donnant plus de détails, dans le but de mettre en évidence la cohérence d'ensemble du projet.

Il en résulte un texte qui pourrait facilement être confondu avec une proposition de programme. Dans l'esprit des auteurs, lui attribuer une telle signification serait cependant prématuré. Leur intention n'a été que de tracer des pistes, parfois hors des sentiers battus. Dans l'état actuel de leur réflexion, ils pensent qu'aucun des points présentés ne serait déplacé en tant qu'élément d'un programme. Mais ils considèrent aussi que pour qu'un ensemble d'éléments potentiels d'un programme se transforme en un programme, il ne suffit pas que cet ensemble soit cohérent et inspiré par des principes pédagogiques sains. Il faut aussi qu'une large expérimentation ait porté sur la faisabilité de chacun des points en particulier, sur les articulations entre les différents points et sur l'ensemble du projet. Cette expérimentation devrait être menée avec beaucoup de minutie et sans *a priori*. Ses résultats devraient être analysés en profondeur, faire l'objet d'une publication largement diffusée et être soumis à la discussion. Alors seulement, il serait question de rédiger vraiment un programme.

La méthodologie que nous venons de proposer ne devrait pas seulement s'appliquer aux idées que nous déposons sur la table, mais à toute proposition de réforme de programme. Sans quoi, bien des décisions ne reposent que sur des impressions fragmentaires, biaisées et fugitives. Cette remarque liminaire étant faite, indiquons les principes qui ont inspiré notre démarche.

---

---

## 1. Un parcours en spirale.

Le principe de l'enseignement en spirale est bien connu et il n'est pas nécessaire que nous nous y attardions longuement. Insistons toutefois sur la nécessité de modifier le regard porté sur un sujet à chacune des rencontres que l'on en fait. Au début de la spirale, c'est essentiellement d'un point de vue procédural qu'un sujet va être traité. Au fur et à mesure que l'étude progresse, et en particulier à chaque tour de la spirale, c'est un point de vue de plus en plus conceptuel qui est adopté.

C'est ce point de vue qui inspire par exemple notre proposition relative à l'enseignement de l'analyse. La notion essentielle à introduire est celle de limite. Le point de vue procédural consistera à étudier d'abord des limites de suites, et cela, dans le cadre de problèmes de calculs de valeurs approchées (racines d'une équation, somme d'une suite géométrique, calcul de  $\pi$ , ...). De nombreuses manipulations de suites sont donc nécessaires. La définition de la limite d'une fonction à l'aide des limites de suites constitue une première conceptualisation. Une fois cette étape franchie, les activités soumises aux élèves consistent le plus souvent à calculer des limites de certaines fonctions à partir d'autres limites connues. Ces activités relèvent pour la plupart de la manipulation formelle d'expressions algébriques et ne contribuent à faire progresser le concept de limite d'une fonction que si les propriétés utilisées (limite d'une somme, d'un produit, d'une composée) sont explicitées et expliquées. Plus tard, on rencontrera peut-être la continuité, qui constitue un pas supplémentaire dans la conceptualisation.

Notons aussi que l'enseignement secondaire ne constituant pas nécessairement la fin des études des élèves, il est normal que certaines spirales entamées au secondaire se poursuivent dans l'enseignement supérieur. Les programmes du secondaire doivent tenir compte de ce fait. Ainsi, si la "spirale de l'analyse" se poursuit dans l'enseignement supérieur avec les limites et dérivées des fonctions de plusieurs variables, les équations différentielles, etc, il n'est pas pour autant anormal de rencontrer dès le secondaire une équation différentielle telle que  $y' = y$ , qui peut être résolue d'un point de vue strictement procédural et sans aucun développement théorique.

## 2. Établir des connections

La tendance des élèves à établir des cloisons entre les cours et au sein même d'un cours est reconnue comme une des plaies de l'enseignement (pas seulement secondaire). Pour lutter contre ce phénomène,



---

---

il peut s'avérer très utile de rapprocher des sujets ayant entre eux des connections étroites et de mettre celles-ci systématiquement en évidence.

Nous avons appliqué ce principe notamment dans notre approche des thèmes "*Algèbre linéaire*" et "*Géométrie*". Les élèves ont rencontré les débuts de la géométrie de l'espace en 4<sup>e</sup> année dans le cadre de la géométrie synthétique. Nous proposons d'attribuer notamment au troisième degré l'objectif de leur apprendre à traiter un problème de géométrie en utilisant la méthode la mieux adaptée, les trois méthodes de base étant les méthodes synthétique, vectorielle et analytique. C'est donc un exposé intégré d'algèbre linéaire et de géométrie que nous suggérons, la géométrie contribuant à conceptualiser les notions algébriques et l'algèbre fournissant des outils puissants de résolution de problèmes géométriques.

Dans un tel exposé, la géométrie ne peut être sacrifiée à l'algèbre. Ainsi, lorsqu'un sujet géométrique important — les homothéties par exemple — n'a malheureusement jamais été rencontré avant le troisième degré, une très grande attention doit lui être accordée en vue d'éviter qu'il ne se réduise à ses aspects algébriques. De même, des changements fréquents de registres et de cadres, la résolution de certains problèmes par plusieurs méthodes, devraient concourir à éviter l'écueil de la disparition du sens géométrique des manipulations algébriques. C'est un va-et-vient permanent entre manipulations dans l'espace, représentations sur ordinateur et calculs (vectoriels ou analytiques) qui assurera chez l'élève une vision géométrique et une capacité d'action sur les objets qui lui sont soumis.

Réciproquement, l'algèbre ne peut être sacrifiée à la géométrie. Par exemple, le fait que l'espace soit de dimension 3 ne doit pas empêcher que l'on rencontre des systèmes d'équations linéaires en plus de trois inconnues. Même dans ce cas, la résolution du système gagne à être formulée en termes géométriques qui permettent de mobiliser les connaissances acquises dans le cadre du plan ou de l'espace.

Cet exposé intégré d'algèbre linéaire et de géométrie a en grande partie fait l'objet en 1996–97 d'un travail de recherche financé par le Ministère de la Communauté française et réalisé par une équipe du CDS. Ce travail sera normalement publié dans le courant de cette année par le département de l'éducation (Organisation des Études). Dans le même ordre d'idées, le rapprochement du calcul matriciel, des nombres complexes et des similitudes planes doit permettre de provoquer chez l'élève le phénomène de compression des connaissances

---

---

relatives aux transformations géométriques. C'est alors qu'il deviendra capable d'exploiter ces transformations avec un maximum d'efficacité. La trigonométrie s'intègre aisément à ce schéma.

La mise au point d'un exposé mathématique cohérent et structuré, établissant des connexions étroites entre des sujets apparentés, fournit également un cadre adapté à la pratique de la démonstration. Pour les élèves qui se destinent à des activités utilisant intensivement la mathématique, il s'agit là d'une nécessité. Une démonstration n'a pas seulement pour objectif de convaincre qu'une propriété est vraie lorsqu'elle n'est pas évidente, mais aussi d'expliquer *pourquoi* elle est vraie, question qui peut se poser même quand elle est évidente. La compréhension des mécanismes des démonstrations permet de les transposer à des situations nouvelles. La construction cohérente d'un programme doit s'appuyer sur un ensemble de situations suffisamment riches pour que des questions motivantes se dégagent et justifient le recours fréquent à la démonstration.

### 3. Un choix de matières

Les principes précédents sont de nature pédagogique plus que mathématique. En ce qui concerne le choix des sujets, nous faisons nôtre le point de vue développé par la SBPMef qui propose de considérer "*Algèbre linéaire et géométrie*", "*Analyse*" et "*Probabilités et statistiques*" comme étant les thèmes les plus importants pour les étudiants des sections ayant le plus grand nombre d'heures de mathématique.

Il est aussi des élèves qui, sans être hostiles aux mathématiques, n'en font pas leur centre d'intérêt principal. Ils constituent un public très hétérogène dont les finalités sont peu claires. Pour eux, il nous semble surtout important de ne fermer aucune porte en leur assurant une formation s'inspirant des mêmes principes que ci-dessus, bien que la plupart des sujets soient rencontrés moins en profondeur.

Pour d'autres, la valeur utilitaire de la mathématique sera relativement limitée. Ce sont souvent les notions de statistique et de probabilité qui les aideront le plus à interpréter et comprendre les phénomènes de la vie courante.

Pour tous les élèves, la mathématique doit aussi avoir une valeur culturelle, indépendante de tout aspect utilitaire. Les enseignants devraient donc pouvoir consacrer une partie (à déterminer) du temps disponible à des questions relevant de la culture générale (en abordant des questions historiques par exemple). Nous ne voyons pas de raison de faire des suggestions de sujets dans ce cadre.

---

---

Les principes qui viennent d'être énoncés conduisent à de nouvelles interrogations. Ainsi, la volonté de constituer un enseignement intégré d'algèbre linéaire et de géométrie et de rapprocher calcul matriciel, similitudes et nombres complexes, aboutit à la constitution d'un ensemble de matières fort volumineux. Le répartir sur deux années serait quelque peu contradictoire avec le principe même d'un enseignement intégré. Le concentrer sur une seule année amènerait à consacrer la cinquième à "*Algèbre et géométrie*" et la sixième à "*Analyse, Probabilités et Statistiques*".

Une telle répartition de la matière pourrait être techniquement possible, mais n'a jamais été envisagée dans le passé. Quels sont les avantages et les inconvénients de concentrer sur une seule année un sujet comme l'analyse ? Certains font remarquer qu'un tel sujet nécessite une période de maturation, et estiment que deux ans ne sont pas de trop à cet effet. Un des avantages de l'expérimentation dont nous avons dit plus haut qu'elle nous semblait indispensable, serait d'observer si la maturation peut éventuellement avoir lieu plus rapidement lorsque l'élève est soumis à des *stimuli* plus fréquents. Si c'était le cas, la concentration de l'analyse sur un an pourrait avoir des effets bénéfiques pour l'analyse elle-même. Nous ignorons si des questions de ce genre ont déjà été abordées par la recherche en didactique des mathématiques.

Nous pouvons aussi remarquer qu'il n'y aurait rien d'anormal à ce que la mise au point des programmes du troisième degré ait des répercussions sur ceux des années antérieures. La commission pluraliste des programmes de mathématique a de fait prévu une telle possibilité en ne donnant qu'un statut provisoire au nouveau programme du deuxième degré.

## 2. Algèbre linéaire et géométrie

### Repères cartésiens et coordonnées cartésiennes

*Un point de  $\mathbb{R}^3$  sera désigné par la colonne de ses coordonnées.*

### Projection sur un plan parallèlement à une droite, équations vectorielles et paramétriques d'un projecteur

*On exprimera une projection d'un point  $P$  parallèlement à la droite  $UV$  comme combinaison linéaire de  $P$  et  $V - U$ .*

---

---

## Équations vectorielles et paramétriques d'une droite et d'un plan, point de percée d'une droite dans un plan

*Une équation vectorielle de la droite passant par  $P$  et parallèle à une droite  $UV$  peut être obtenue en considérant l'ensemble des points ayant même projection que  $P$  parallèlement à  $UV$  (sur un plan non parallèle à  $UV$ ). Pour l'équation vectorielle d'un plan, on considère l'ensemble des points dont la projection parallèlement à une droite  $UV$  sur un plan non parallèle à  $UV$  appartient à une droite choisie dans ce plan.*

## Équations cartésiennes d'un plan

*On examine d'abord le cas des plans passant par l'origine. Par translation, on passe au cas général.*

## Équations cartésiennes d'une droite

*Toute équation linéaire qui est combinaison linéaire des deux équations déterminant une droite est celle d'un plan passant par la droite. On établira un critère permettant de vérifier que deux systèmes d'équations linéaires déterminent la même droite.*

## Systèmes de $n$ équations linéaires en les inconnues $x, y, z$ . Interprétation géométrique

*La méthode des combinaisons linéaires permet de résoudre les systèmes d'équations en s'appuyant sur l'intuition géométrique.*

## Projection sur une droite passant par l'origine, parallèlement à un plan, notion de forme linéaire

*En considérant la projection sur une droite  $d$  passant par l'origine, parallèlement au plan d'équation  $ax + by + cz = 0$ , on montre que la fonction*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow ax + by + cz$$

---

---

détermine l'abscisse de la projection sur  $d$  du point  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

## Produit scalaire dans le plan et l'espace. Distance de deux points. Orthogonalité

La relation fondamentale  $|OU| \cdot |OV| \cos \widehat{UOV} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ , si  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ , se déduit du théorème de Pythagore généralisé. On en déduit une nouvelle interprétation de l'équation  $ax + by + cz = 0$  d'un plan  $\alpha$  passant par l'origine :

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \alpha \Leftrightarrow P \perp \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

## Orthogonalité de droites et plans de l'espace. Rectiligne d'un dièdre

On établira en particulier le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan. Le rectiligne d'un dièdre est associé à l'angle de deux vecteurs perpendiculaires aux faces du dièdre.

## Distance d'un point à une droite du plan ou à un plan de l'espace. Équations normales d'une droite et d'un plan. Plan tangent à une sphère

Des problèmes de distances peuvent être utilisés pour traiter ces sujets.

## Volume orienté d'un parallélépipède, produit vectoriel $U \times V$ et produit mixte $(U \times V) \cdot W$

Il s'agit d'exprimer de façon vectorielle le volume d'un parallélépipède dont on sait qu'il est donné par la formule *aire d'une base*  $\times$  *hauteur correspondante*.

---

---

## Déterminant d'un système de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

*La valeur du déterminant du triple  $(U, V, W)$  apparaît comme le volume orienté du parallépipède construit sur ce triple. Les propriétés fondamentales du déterminant découlent de celles du produit vectoriel et du produit scalaire.*

## Rotations planes et produit scalaire, rotations de l'espace

*Une rotation de l'espace se ramène à une rotation plane dans chaque plan perpendiculaire à son axe. Comme les rotations planes, les rotations de l'espace conservent le produit scalaire.*

## Expression matricielle de transformations linéaires : isométries et homothéties du plan, projecteurs et rotations de l'espace. Composition des transformations et produit matriciel. Matrices inversibles

*L'association des matrices à des transformations géométriques permet d'assurer un sens au calcul matriciel. On rencontrera également d'autres situations se laissant modéliser à l'aide de matrices de tailles éventuellement différentes de  $2 \times 2$  ou  $3 \times 3$ . Sauf cas particuliers simples, on utilisera des calculatrices ou ordinateurs pour effectuer des calculs portant sur des matrices de taille supérieure à  $3 \times 3$ ,*

## Systèmes de $n$ équations linéaires en $p$ inconnues. Interprétation à l'aide d'applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ . Déterminant d'une matrice carrée, discussion de systèmes à un paramètre

*Résoudre un système de  $n$  équations en  $p$  inconnues revient à rechercher si le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  formé des termes indépendants est une combinaison linéaire des vecteurs-colonnes de la matrice du système ou encore si ce vecteur appartient à l'image de l'application linéaire associée au système. Si  $n = p = 3$ , de  $xU + yV + zW = K$ , on déduit les formules de Cramer :  $x \cdot (U \times V) \cdot W = (K \times V) \cdot W$ , etc, utilisées pour les discussions de systèmes paramétriques.*

---

---

## Nombres complexes, définition et opérations élémentaires. Plan de Gauss. Isomorphisme pour l'addition, de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$

*L'introduction des nombres complexes est l'occasion d'une première explicitation de l'idée d'isomorphisme. Celle-ci ne doit pas nécessairement être formalisée. Il suffit de mettre en évidence la bijection de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{C}$  et le fait que cette bijection transforme l'addition des complexes en celle des couples de réels.*

## Module (ou valeur absolue) et argument d'un nombre complexe, représentation trigonométrique. Module d'une somme et d'un produit. Équations paramétriques d'un cercle

*On identifie le module d'un nombre complexe à sa distance à l'origine. On en déduit l'inégalité triangulaire. On met également en évidence la bijection de l'ensemble des nombres complexes de module 1 sur le cercle unité et on l'associe aux équations paramétriques du cercle.*

## Interprétation géométrique des applications $z \rightarrow z + a$ et $z \rightarrow z \cdot \text{cis } \varphi$ . Formule $\text{cis } (\varphi + \psi) = \text{cis } \varphi \cdot \text{cis } \psi$ et son cas particulier, la formule de DE MOIVRE. Formules trigonométriques d'addition, de duplication et de Simpson. Structure de groupe

*La reconnaissance de l'application  $z \rightarrow z \cdot \text{cis } \varphi$  comme étant une rotation d'angle  $\varphi$  permet d'écrire immédiatement la généralisation de la formule de DE MOIVRE. On a ici un second exemple d'isomorphisme, pour la multiplication cette fois : du groupe des nombres complexes de module 1 sur le groupe des rotations centrées en l'origine. En exploitant la représentation matricielle des rotations, on obtient alors les formules trigonométriques classiques.*

## La fonction $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \rightarrow az + b$ et les similitudes directes. L'ellipse considérée comme la transformée d'un cercle par une affinité. Équation cartésienne réduite, équations paramétriques

*La représentation des similitudes directes sous la forme d'une fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  doit permettre de traiter diverses applications de géométrie et en particulier d'introduire l'ellipse. Les*

---

---

équations paramétriques d'une ellipse permettent d'en justifier la construction par la méthode des deux cercles.

### **Définitions bifocales de l'ellipse et de l'hyperbole, par foyer et directrice pour la parabole. Équation cartésienne réduite de l'hyperbole**

*Ces sujets sont classiques. Une autre approche intéressante consisterait à étudier les sections coniques en considérant par exemple l'ombre à la lampe d'un cercle sur un plan. On pratiquerait ainsi à nouveau le calcul vectoriel en déterminant des équations vectorielles de droites et des points de percée de droites dans un plan.*

## **3. Analyse**

### **Comparaison, description, construction de graphiques de fonctions obtenues par des sommes, produits et compositions de fonctions de référence. Fonctions réciproques, en particulier réciproques des fonctions trigonométriques**

*La construction de ces graphiques est l'occasion de mettre en œuvre les propriétés algébriques et géométriques rencontrées précédemment.*

### **Analyse combinatoire, binôme de Newton**

*Arrangements (simples et avec répétitions), combinaisons simples, permutations.*

### **Progressions arithmétiques et géométriques, suites arithmétiques et géométriques, suites numériques**

*Par “suite”, nous entendons toujours “suite infinie”. L'étude des suites arithmétiques et géométriques permet d'attirer l'attention, sans aucune formalisation, sur différentes vitesses de croissance. On pourra se référer utilement à des situations extraites*



---

---

d'autres disciplines. (Croissance d'une population, désintégration radioactive, etc.)

**Opérateur  $\Delta$ .** ( $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ ). **Caractérisation d'une suite arithmétique par l'équation  $\Delta x_n = \text{constante}$  et d'une suite géométrique par  $\Delta x_n = kx_n$ . Équations linéaires aux différences finies et à coefficients constants, d'ordre 1 ou 2. Structure d'espace vectoriel**

*Il n'est guère difficile de rencontrer des situations se modélisant par des équations du type  $x_{n+1} = ax_n$  ou  $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ , qui peuvent aussi se mettre sous la forme  $\Delta x_n = kx_n$  ou  $\Delta^2 x_n = a\Delta x_n + bx_n$ . On peut par exemple rencontrer la suite des nombres de Fibonacci qui vérifie l'équation  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ . Toute combinaison linéaire de solutions étant encore une solution, on a ici un nouvel exemple d'ensemble d'objets qui méritent d'être appelés des vecteurs.*

**Suites de valeurs approchées de la racine d'une équation, ou de constantes importantes (notamment  $\pi$ )**

*Différentes méthodes permettent d'approcher les racines d'une équation. On peut ainsi utiliser des valeurs approchées décimales, par défaut ou par excès, mais aussi mettre en œuvre graphiquement la méthode de bisection ou une méthode de point fixe. Cette dernière méthode est particulièrement indiquée pour des équations du second degré, (par exemple  $x^2 = x + 1$ ), ce qui fait la liaison avec les équations aux différences finies d'ordre 2 rencontrées au point précédent. Cette étude aura nécessairement un aspect heuristique, préparatoire à l'étude de la limite d'une suite.*

**Limite d'une suite. Toute suite croissante et majorée est convergente. (Toute suite monotone bornée est convergente.)**

*La notion de limite d'une suite de nombres est plus aisée à maîtriser que celle de limite de fonctions. Dans un premier temps, l'expression*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

---

---

conservera une signification intuitive : la différence  $|x_n - a|$  “**devient et reste**” aussi petite que l’on veut. On mettra en place progressivement la définition classique en  $\varepsilon, N$ . La propriété de convergence de toute suite croissante et majorée est équivalente à la complétion de l’ensemble des nombres réels. On l’admettra sans démonstration, mais on veillera à multiplier les exemples de suites convergentes qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.

### **Limite d’une somme ou d’un produit de deux suites. Formes indéterminées**

*Pour les formes indéterminées, on pourrait se limiter aux formes du type  $\infty - \infty$  et  $0 \cdot \infty$ .*

### **Limite d’une fonction. Signe d’une fonction au voisinage de sa limite. Asymptotes**

*La limite d’une fonction peut être introduite en faisant référence aux limites de suites :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell$  quelle que soit la suite  $x_n$  convergeant vers  $a$ . La relation “ $n$  assez grand” ayant alors la même signification que “ $x_n - a$  assez petit”, on pourra énoncer la définition de limite sous la forme classique en  $\varepsilon, \delta$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \neq 0$ , alors sur un intervalle  $[a - \delta, a + \delta]$  suffisamment petit, la fonction  $f$  conserve le signe de  $\ell$ . La définition des asymptotes d’une fonction est l’occasion d’établir l’équation d’une hyperbole rapportée à ses axes.*

### **Limite d’une somme, d’un produit et d’une composée. Limite en 0 des fonctions $\sin x$ , $\cos x$ et $\frac{\sin x}{x}$**

*Les démonstrations des théorèmes donnant les limites d’une somme, d’un produit et d’une composée ne présentent pas de difficultés particulières. Des valeurs approchées du nombre  $\pi$  ont été obtenues en quatrième année par la méthode d’Archimède en même temps qu’a été introduite la mesure des angles en radians. On en déduit que pour  $|x| < \frac{\pi}{2}$ , on a  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ . Le calcul des limites de  $\sin x$ ,  $\cos x$  et  $\frac{\sin x}{x}$  en résulte.*

---

---

**Dérivée d'une fonction en un point, interprétation géométrique et cinématique. Dérivées des fonctions trigonométriques. Vecteur tangent à une courbe définie par des équations paramétriques. Approximation locale d'une fonction par une fonction du premier degré**

*La notion de dérivée en un point nécessite uniquement de connaître la notion de limite d'une fonction. Les dérivées des fonctions trigonométriques se déduisent de la limite de  $\frac{\sin x}{x}$ . Le calcul du vecteur tangent à une ellipse permet de déterminer l'équation cartésienne d'une tangente à cette courbe. Un calcul analogue sera effectué après qu'auront été déterminées des équations paramétriques d'une hyperbole.*

**Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée**

*Les démonstrations reposent sur celles qui donnent les limites de somme, produit et composée de fonctions. En particulier, la formule donnant la dérivée d'une composée repose sur l'équivalence entre “ $f$  est dérivable en  $x_0$ ” et “il existe une fonction  $f_1$  ayant une limite en  $x_0$  telle que pour tout  $x$ ,  $f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0)$ ”.*

**Fonction dérivée d'une fonction. Croissance et décroissance, extrema locaux et points d'inflexion des fonctions dérivables. Formule des accroissements finis**

*On montre d'abord, AVEC démonstration, qu'une fonction dérivable est croissante sur un intervalle si sa dérivée est positive sur cet intervalle. Cette démonstration est la seule à ne pas être triviale. Elle utilise le fait qu'une suite croissante majorée est convergente. On en déduit la formule des accroissements finis sous la forme : si pour tout  $x \in [a, b]$ , on a  $m \leq f'(x) \leq M$ , alors  $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ .*

---

---

**L'équation différentielle  $y' = y$ . Le nombre  $e$ , les fonctions exponentielle et logarithme. Équations paramétriques de l'hyperbole**

On aborde l'équation différentielle  $y' = y$  en la discrétisant. On choisit un pas d'accroissement  $h > 0$ , on pose  $x_n = nh$  et on envisage l'équation approchée  $\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = y(x_n)$  ou encore  $y((n+1)h) = (1+h)y(nh)$ . La solution de cette équation aux différences finies d'ordre 1 est la suite géométrique  $y(nh) = (1+h)^n y(0)$ . Pour une valeur fixée de  $x$ , on considère la suite d'accroissements  $h_n = \frac{x}{n}$ . Il y correspond la suite de valeurs approchées de  $y(x)$  :  $y_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n y(0)$ . On montre que cette suite est croissante et majorée. Le passage à la limite pour  $n \rightarrow \infty$  fait apparaître le nombre  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$  et la fonction  $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ . La formule fondamentale

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

ne pose pas de problème, et permet de montrer que  $\exp(n) = e^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Q}$ , et donc d'écrire  $e^x$  plutôt que  $\exp(x)$ . La fonction logarithme est définie comme réciproque de l'exponentielle. Les fonctions hyperboliques  $\operatorname{ch} x$  et  $\operatorname{sh} x$  permettent d'écrire simplement des équations paramétriques de l'hyperbole  $x^2 - y^2 = 1$ .

**Intégrale d'une fonction en escalier ou d'une fonction élémentaire. Calcul numérique d'une intégrale définie. Théorème de la moyenne**

Il ne s'agit ici que d'une introduction heuristique aux intégrales. On illustre la démarche de définition d'une intégrale à l'aide de fonctions dont l'expression est suffisamment simple pour qu'on puisse déterminer explicitement une suite de fonctions en escalier qui en soient arbitrairement proches. L'intégrale est alors définie comme étant la limite de la suite des intégrales de ces fonctions en escalier. Le théorème de la moyenne peut facilement être obtenu sous la forme  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$  si pour tout  $x \in [a, b]$ , on a  $m \leq f(x) \leq M$ . Numériquement, on calcule des valeurs approchées d'intégrales par les méthodes des rectangles, des trapèzes et de Simpson.

---

---

## Primitives d'une fonction. Lien entre primitives et intégrale définie

*Le théorème de la moyenne permet de montrer que la dérivée en  $x_0$  de la fonction  $x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$  est précisément  $f(x_0)$  lorsque  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . On dit alors que la fonction  $f$  est continue en  $x_0$ . Pour ces fonctions, on obtient donc le lien classique entre l'intégrale définie et une primitive.*

## Calcul de primitives, aires et volumes, travail d'une force

*Ce point est classique.*

## 4. Probabilités et statistiques

**Notion de probabilité. Probabilité d'une union (règle d'addition), probabilité de la composée de deux événements consécutifs (règle de multiplication)**

*Ces notions peuvent être rencontrées d'un point de vue procédural, à travers des problèmes et des jeux.*

**Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable. Propriétés élémentaires de la probabilité considérée comme fonction de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathbb{R}$**

*Sur un ensemble fini ou dénombrable  $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ , une probabilité est donnée par la suite des probabilités des "événements élémentaires", c'est-à-dire une suite de nombre positifs  $p_1, p_2, \dots$  de somme totale égale à 1. A toute partie  $A$  de  $E$  on associe alors une probabilité égale à la somme des probabilités des événements élémentaires appartenant à  $A$ . Les "axiomes de Kolmogorov" sont dans ce cas immédiats et n'ont pas à être présentés axiomatiquement.*

**Événement dépendant d'une partition et probabilités conditionnelles**

*L'idée d'événement dépendant d'une partition de l'univers  $E$  est plus naturelle que celle d'événement dépendant d'un autre*

---

---

événement. Elle peut être introduite à partir de statistiques variées portant sur des populations réparties en plusieurs classes et un caractère dont la fréquence dépend de la classe choisie. Une probabilité conditionnelle s'obtient en restreignant l'univers  $E$  à une de ses parties.

### **Variable aléatoire, moyenne, écart-type et variance. Loi binômiale et loi normale**

Une variable aléatoire n'est autre chose qu'une fonction définie sur un univers probabilisé. A ce titre, elle induit des événements du type  $f(x) \in A$  où  $A$  est un ensemble de nombres réels. L'étude des variables binômiales peut se faire à l'aide de situations à mathématiser. L'importance des variables normales dans les applications, y compris dans le vécu quotidien, est telle qu'elles méritent un minimum d'explications bien qu'elles sortent du domaine discret.

### **Régression linéaire et corrélation linéaire**

On expliquera avec soin le principe des approximations par moindres carrés qui est nouveau pour l'élève de sixième année et qui peut le dérouter par le fait qu'il s'agit d'approcher des données non avec une précision fixée *a priori*, mais uniquement en moyenne. Ce point peut aussi être rencontré en liaison avec l'étude des questions de distance et d'orthogonalité en géométrie de l'espace. Il est aussi l'occasion d'une (première ?) rencontre avec un espace de dimension supérieure à 3.

### **Test d'ajustement du $\chi^2$**

Ce sujet a surtout pour but de sensibiliser les élèves aux problèmes qui se rencontrent lors de l'interprétation de données recueillies par exemple à l'occasion de sondages. On pourra ainsi examiner la validité d'hypothèses de normalité de certaines populations de données (notes d'examen, mesures de paramètres économiques ou relevant de sciences naturelles, ...).

# Comportement curieux de la touche $y^x$

M. Grand'Henry-Krysinska et P. Bolly,

*Mots-clé* : apprentissage de la démonstration, conjectures, touche  $y^x$ , point fixe, convergence de suites.

A travers le problème développé dans cet article nous souhaitons contribuer à la discussion sur l'apprentissage de la démonstration par des élèves du secondaire.

Selon une conception largement répandue, la démonstration serait univoquement définie dans un système hypothético-déductif et surtout elle exclurait tout recours aux données empiriques.

Elaborer une démonstration, ce n'est pas seulement déduire. Dans un problème de recherche, c'est aussi formuler des conjectures et chercher leurs preuves même empiriques.

Plusieurs facettes de cette démarche sont présentes dans les problèmes liés au comportement de la touche  $y^x$ .

## 1. Exploration

*Avec la touche  $y^x$  et un nombre  $a$ , on peut fabriquer une suite de nombres de la forme*

$$a, a^a, a^{(a^a)}, a^{(a^{(a^a)})}, \dots$$

*Construisez de telles suites à l'aide de vos calculatrices pour quelques valeurs positives de  $a$ . Que pouvez-vous observer à leur sujet ? Formulez des conjectures <sup>(1)</sup>.*

### 1.1. Premiers calculs et observations

Pour  $a = 1$ , le résultat est évident.

Formons la première suite pour  $a = 2$ . La calculatrice affiche les trois premiers termes 2, 4 16 et après, elle signale *overflow*. Cela se comprend aisément : cette suite tend très vite vers l'infini.

*1. Une conjecture est une propriété que l'on a certaines raisons de croire vraie, mais dont on n'est pas entièrement sûr.*

Formons la deuxième suite pour  $a = 1,2$ . La calculatrice affiche les termes qui changent jusqu'à la 19ème étape. Par après, le nombre affiché reste le même : 1,257734.

Considérons encore une troisième suite pour  $a = 0,5$ . Les termes affichés ne changent plus à partir du 33ème qui est 0,64118574451.

Dans le cas des deux dernières suites, nous sommes tentés de dire qu'elles convergent vers des nombres dont l'approximation est fournie par la calculatrice quand l'affichage des termes de la suite se stabilise.

Pour des raisons encore obscures ou peut-être par analogie avec les suites géométriques de raison plus petite que 1, nous pouvons penser que les suites construites avec un nombre  $a < 1$  sont convergentes. Par contre, la même analogie avec le comportement des suites géométriques de raison plus grande que 1 ne tient pas la route : la suite formée à partir de 2 tend vers l'infini mais celle formée à partir de 1,2 paraît convergente.

Continuons à explorer les suites formées à partir d'autres valeurs de  $a$  comprises entre 1 et 2 et rassemblons les résultats dans un tableau (Tableau 1).

| $a$ | le nombre affiché<br>quand la suite paraît<br>stationnaire | le nombre d'étapes<br>avant la stabilisation<br>de la suite |
|-----|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1,1 | 1,11178201104                                              | 11                                                          |
| 1,2 | 1,25773454138                                              | 18                                                          |
| 1,3 | 1,47098896009                                              | 26                                                          |
| 1,4 | 1,88666330624                                              | 54                                                          |
| 1,5 | overflow                                                   | 13                                                          |
| 1,6 | overflow                                                   | 8                                                           |

Tableau 1

D'après les résultats récoltés dans le tableau 1, il serait pertinent de continuer à étudier la suite formée à partir des valeurs de  $a$  comprises entre 1,4 et 1,5, ce qui est fait dans le Tableau 2.



---

---

| $a$  | le nombre affiché<br>quand la suite paraît<br>stationnaire | le nombre d'étapes<br>avant la stabilisation<br>de la suite |
|------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1,41 | 1,962955821753                                             | 61                                                          |
| 1,42 | 2,05738816750                                              | 74                                                          |
| 1,43 | 2,18402922620                                              | 97                                                          |
| 1,44 | 2,39381174817                                              | 158                                                         |
| 1,45 | overflow                                                   | 42                                                          |

Tableau 2

La rupture entre la convergence et la divergence de la suite est maintenant mieux située ; elle a lieu quelquepart pour la valeur de  $a$  entre 1,44 et 1,45.

Formulons maintenant les premières conjectures et questions.

**Il semble exister un certain nombre pivot  $a_0$  situé entre 1,44 et 1,45 tel que**

- pour  $a > a_0$ , la suite est divergente vers l'infini ;
- pour  $a < a_0$ , la suite est convergente.

*Dans ce deuxième cas, comment la limite de la suite dépend-elle de  $a$  ? Cette limite peut-elle prendre n'importe quelle valeur ? Que se passe-t-il quand  $a = a_0$  ?*

Remarquons également que la suite est croissante pour  $a > 1$  et “oscillante” pour  $a < 1$ .

## 1.2. Une formulation technique

*Y a-t-il une formule algébrique exprimant la loi de formation de la suite ?*

La loi de formation de la suite

$$a, a^a, a^{(a^a)}, a^{(a^{(a^a)})}, \dots$$

peut être écrite sous forme de la formule de récurrence suivante :

$$x_0 = a, x_1 = a^{x_0}, \dots, x_{n+1} = a^{x_n}$$

ou encore à l'aide de la fonction  $f(x) = a^x$  comme une suite d'itérations successives

$$x_0 = a, x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n).$$

---

---

### 1.3. Une interprétation géométrique

*Illustrez la loi de formation de la suite à l'aide de la courbe d'équation  $y = a^x$  et de la droite  $x = y$  représentées dans un même repère.*

Pour fixer les idées, limitons-nous aux cas où  $a$  est égal à 2, 1,2 ou 0,5 (Figs. 1,2,3) et construisons graphiquement les premiers éléments de la suite (voir [1])

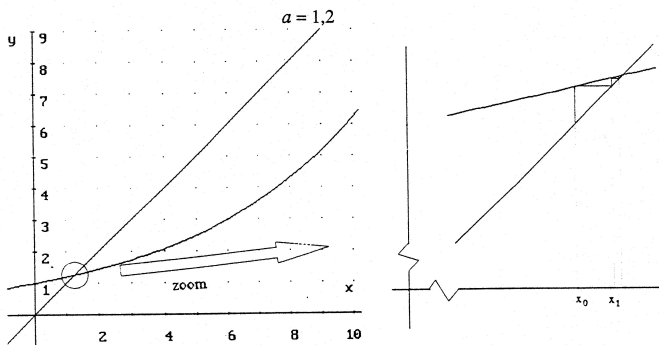
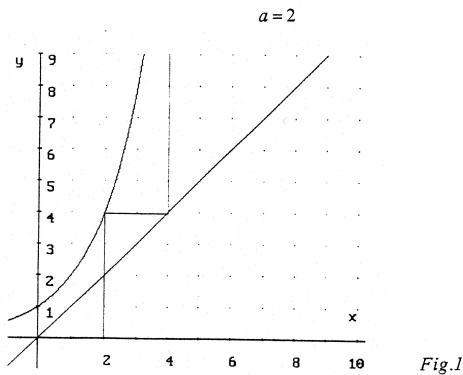


Fig. 2

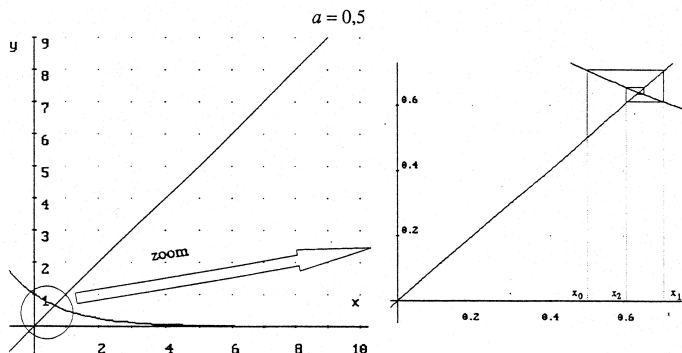


Fig. 3

L'interprétation géométrique ci-dessus nous amène aux constatations suivantes :

- la suite  $x = y$  semble tendre vers l'infini quand la courbe d'équation  $y = a^x$  ne coupe pas la droite  $x = y$ ,
- dans le cas contraire, la suite semble tendre vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite,
- la courbe d'équation  $y = a^x$  coupe toujours la droite  $x = y$  quand  $0 < a < 1$  et dans ce cas, la suite est toujours convergente,
- pour  $a > 1$ , la courbe d'équation  $y = a^x$  peut être sécante ou non avec la droite  $x = y$  ; cela dépend de la valeur de  $a$ .

A ce stade-là, l'interprétation géométrique permet de construire un raisonnement plausible expliquant des conditions de convergence ou de divergence de la suite. Elle permet également de formuler de nouvelles conjectures et de nouvelles questions.

### La suite est convergente quand l'équation

$$a^x = x \tag{1}$$

a au moins une solution.

La limite de la suite des  $x_n$  est une solution de l'équation (1).

Pour quelles valeurs de  $a$  la droite  $x = y$  et la courbe  $y = a^x$  sont-elles sécantes ?

---

## 1.4. D'autres explorations de graphiques

*Etudiez à l'aide de la calculatrice graphique, par exemple, les positions relatives de la droite  $x = y$  et des courbes  $y = a^x$  en fonction des valeurs de  $a$ .*

Nous avons déjà vu que des valeurs de  $a$  particulièrement intéressantes sont situées entre 1 et 1,5. Représentons donc quelques courbes correspondantes et regardons de plus près si elles coupent la droite  $y = x$  (Fig. 4).

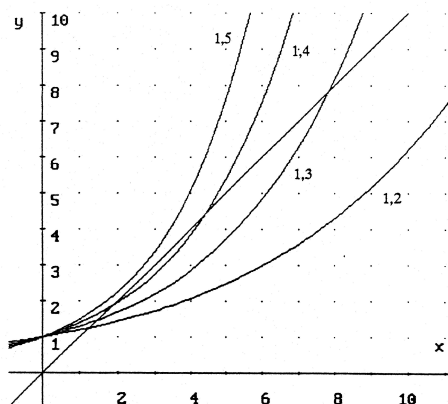


Fig. 4

On peut également dessiner les graphiques correspondant aux nombres 1,41, 1,42, 1,43, 1,44, 1,45. Mais leurs précisions permettent-elles de trancher lequel coupe la droite  $y = x$  ?

Cette nouvelle interprétation géométrique confirme et étend les résultats précédents. A cette étape, nous sommes pratiquement convaincus de faits qui suivent.

**La suite est convergente pour les valeurs de  $a$  comprises entre 0 et un nombre pivot situé entre 1,44 et 1,45. Cela est lié au fait que la courbe  $y = a^x$  et la droite  $y = x$  sont sécantes. La limite de cette suite est alors égale au nombre qui est la solution de l'équation  $a^x = x$ .**

---

---

**Pour toutes les valeurs de  $a$  supérieurs au nombre pivot, la suite tend vers l'infini. Cela s'explique par le fait qu'alors la courbe  $y = a^x$  ne coupe pas la droite  $y = x$ .**

*Peut-on en savoir plus au sujet du nombre pivot ?*

Pour les valeurs de  $a$  comprises entre 1 et le nombre pivot, la courbe  $y = a^x$  coupe la droite  $y = x$  en deux points. Pour les valeurs plus grandes que ce nombre pivot, la courbe ne coupe pas la droite. Pour la valeur de  $a$  égale au nombre pivot, la courbe est tangente à la droite en une certaine valeur de  $x$ , c'est-à-dire que la pente de la tangente pour cette valeur de  $x$  est égale à 1. On trouve cette valeur de  $x$  et le nombre pivot en résolvant le système

$$\begin{cases} a^x = x \\ (a^x)' = 1. \end{cases}$$

Comme la dérivée vaut

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^x,$$

le système devient

$$\begin{cases} a^x = x \\ \ln a \cdot a^x = 1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x \ln a = \ln x \\ x \ln a = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln a = \frac{1}{x} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = e \\ \ln a = \frac{1}{e} \end{cases}$$

ce qui donne finalement

$$\begin{cases} x = e \\ a = e^{\frac{1}{e}}. \end{cases}$$

La Figure 5 traduit des résultats obtenus.

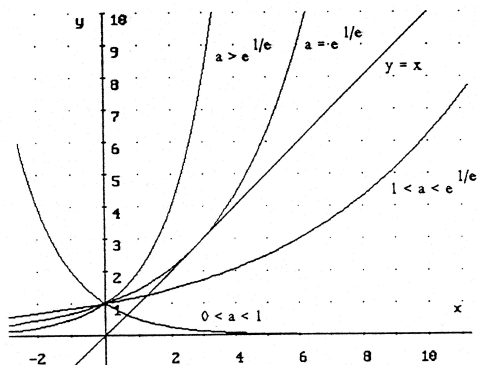


Fig. 5

Il nous semble qu'à ce stade-là, on a compris l'essentiel du problème car, à l'aide de raisonnements plausibles fondés expérimentalement, on a abouti à des explications convaincantes du phénomène. Néanmoins, on peut continuer à se poser des questions.

**Comment la limite d'une suite dépend de  $a$  ?**

**Tout nombre peut-il être la limite d'une telle suite ? Sinon, lequel est le plus grand ?**

Pour répondre à ces questions, on doit rentrer dans un raisonnement et des calculs de plus en plus "pointus". Pour un certain nombre d'élèves, ce niveau n'est plus accessible. Néanmoins, ceux-là ont pu accomplir un travail créateur également (même s'ils n'ont pas réussi à résoudre le problème jusqu'au bout).

Pour terminer cette première phase de résolution, citons Polya [2].

*En fait, dans la tâche du scientifique, formuler le problème constitue peut-être la meilleure part de la découverte et nécessite souvent plus de perspicacité et d'originalité que la résolution proprement dite. Ainsi, en permettant à vos étudiants de poser eux-mêmes, en partie, le problème, non seulement vous les incitez à travailler plus activement, mais aussi vous leur enseignez une excellente attitude intellectuelle.*

---

---

## 2. Construction des preuves formelles

Dans cette section, notre tâche principale sera d'étudier des solutions de l'équation  $a^x = x$  en fonction des différentes valeurs de  $a$ .

### 2.1. Premier problème auxiliaire

Pour pouvoir positionner la courbe  $y = a$  par rapport à la droite  $y = x$ , il suffit d'étudier le signe de l'expression  $a^x - x$ . Cela se fera à l'aide de l'étude de la variation de la famille des fonctions  $g_a(x) = a^x - x$ .

*Considérons la famille de fonctions*

$$g_a(x) = a^x - x \quad \text{où } a > 0$$

*Pour quelles valeurs de  $a$  une fonction  $g_a$  admet-elle un extremum ? Que vaut-il alors ? Quel est son signe ?*

*Y a-t-il une valeur de  $a$  telle que la fonction  $g_a$  admette un minimum égal à 0 ? Que vaut cette valeur de  $a$  ?*

*Quelle interprétation donner aux résultats obtenus, dans le contexte des positions relatives des courbes  $y = a^x$  et de la droite  $x = y$  ?*

Pour étudier les extrémés des fonctions  $g_a$ , nous allons étudier le signe de leur dérivée. Calculons donc  $g'_a$  :

$$g'_a(x) = (a^x - x)' = (e^{x \ln a} - x)' = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} - 1 = \ln a \cdot a^x - 1.$$

Cherchons les racines de  $g'_a$  :

$$g'_a(x) = 0$$

ou

$$\ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} - 1 = 0$$

ou

$$\ln a \cdot a^x = 1$$

ou

$$a^x = \frac{1}{\ln a}. \tag{1}$$

---

---

Pour pouvoir isoler  $x$  dans l'équation (1), il faut ajouter la condition que

$$\frac{1}{\ln a} > 0$$

ou que

$$\ln a > 0$$

ou que

$$a > 1.$$

**Cas :**  $a > 1$

L'équation (1) devient alors équivalente à

$$x \cdot \ln a = \ln \left( \frac{1}{\ln a} \right)$$

ou à

$$x \cdot \ln a = -\ln(\ln a)$$

ou à

$$x = \frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}.$$

Pour étudier le signe de la dérivée, remarquons que  $g'_a(x) = \ln a \cdot a^x - 1$  est une fonction croissante. En effet, pour  $a > 1$ , la fonction exponentielle  $a^x$  est croissante, de même son produit par une constante positive  $\ln a \cdot a^x$  et la différence  $\ln a \cdot a^x - 1$ . Puisque la dérivée s'annule pour  $x = \frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$ , elle est forcément négative à gauche de  $\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$  et positive à droite de  $\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$ . On en conclut qu'une fonction  $g_a$  est décroissante à gauche de  $\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$  et croissante à droite de  $\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$ , donc elle admet un minimum en  $x = \frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$ . Ce minimum vaut

$$\begin{aligned} g_a \left( \frac{-\ln(\ln a)}{\ln a} \right) &= a^{\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a} \\ &= e^{\ln a \left( \frac{-\ln(\ln a)}{\ln a} \right)} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a} \\ &= e^{-\ln(\ln a)} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a} \\ &= \frac{1}{e^{\ln(\ln a)}} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a} \end{aligned}$$



---

---


$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\ln a)} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a} \\
&= \frac{1}{\ln a} (1 + \ln(\ln a)).
\end{aligned}$$

Etudions maintenant le signe de  $\frac{1}{\ln a} (1 + \ln(\ln a))$ . Dans le cas envisagé de  $a > 1$ , le signe du facteur  $\frac{1}{\ln a}$  est positif. Pour déterminer le signe de  $1 + \ln(\ln a)$ , résolvons l'inéquation suivante en  $a$  :

$$1 + \ln(\ln a) \leq 0.$$

Cela donne

$$\begin{aligned}
1 &\leq -\ln(\ln a) \\
1 &\leq \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) \\
e &\leq \frac{1}{\ln a} \\
\frac{1}{e} &\geq \ln a \\
e^{\frac{1}{e}} &\geq a.
\end{aligned}$$

En résumé, cela veut dire que pour un  $a \leq e^{\frac{1}{e}}$ , le minimum est négatif ou nul et pour un  $a > e^{\frac{1}{e}}$ , le minimum est positif. Dans le premier cas, la différence  $a^x - x$  devient localement négative, donc la courbe  $y = a^x$  qui, en  $x = 0$ , est au-dessus de la droite  $y = x$ , passe au-dessous et la coupe en deux points quand on la regarde de gauche à droite. Dans le second cas, la courbe reste toujours au-dessus de la droite.

Quand  $a = e^{\frac{1}{e}}$ , le minimum vaut 0 et la courbe n'a qu'un point de contact avec la droite ; Le nombre  $e^{\frac{1}{e}}$  est la valeur pivot de  $a$ . La calculatrice fournit 1,44466786101 comme valeur approchée de ce nombre.

**Cas :  $a < 1$**

La dérivée n'a pas de racines et elle est négative, donc la fonction est décroissante sur son domaine (de  $x > 0$ ) et il n'y a pas d'extrémés. De plus, la différence  $a^0 - 0$  est positive et la différence  $a^1 - 1$  est négative, la fonction  $g_a(x) = a^x - x$  doit s'annuler (une seule fois car elle est décroissante) : la courbe coupe la droite en un seul point.

---

---

Tous les résultats obtenus dans cette section sont plus précis par rapport à ceux obtenus précédemment. On peut les résumer ainsi : la suite qui correspond à une valeur de  $a$  est convergente quand

$$0 < a < e^{\frac{1}{e}}.$$

La méthode utilisée ici pour étudier l'existence et le nombre des solutions de l'équation  $a^x = x$  est généralisable à toutes les équations du type  $f(x) = x$ .

## 2.2. Second problème auxiliaire

*Considérons la suite correspondante à un  $a$  compris entre 0 et  $e^{\frac{1}{e}}$ . Que vaut sa limite ?*

Dans le cas particulier de  $a = e^{\frac{1}{e}}$ , l'équation

$$(e^{\frac{1}{e}})^x = x$$

admet une solution unique. Cette solution est égale à  $e$ , en effet

$$(e^{\frac{1}{e}})^e = e.$$

Ce cas particulier nous suggère une conjecture pour le cas général : **la limite de la suite construite à partir de la touche  $y^x$  et correspondant à un nombre  $a$  positif est un nombre  $r$  tel que**

$$r^{\frac{1}{r}} = a.$$

Cette conjecture peut être confrontée avec des résultats numériques de la section 1.1. Par exemple, la suite formée à partir de 1,2 s'est stabilisée autour du nombre  $r = 1,25773454138$ . Ce nombre peut être considéré comme la valeur approchée de la limite de cette suite. Le calcul de  $1,25773454138^{\frac{1}{1,25773454138}}$  donne 1,2.

D'une manière générale, dès que  $r^{\frac{1}{r}} = a$ , on a que  $a^r = r$ . Mais est-il toujours possible de représenter un nombre  $a$  sous forme de  $r^{\frac{1}{r}}$  ? Pour répondre à cette question, il faut résoudre le problème auxiliaire suivant.

*Etudiez la variation de la fonction  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ .*

*Quels renseignements peut-on en tirer au sujet des limites des suites considérées ?*

---

---

La fonction  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$  est définie pour tous les  $x > 0$ . Considérons donc son domaine égal à  $\mathbf{R}_0^+$ . On peut alors remplacer l'expression  $x^{\frac{1}{x}}$  par  $e^{\frac{1}{x} \ln x}$ .

On établit facilement que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Calculons  $f'(x)$  : cela donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\frac{1}{x} \ln x})' \\ &= \left( \frac{1}{x} \ln x \right)' e^{\frac{1}{x} \ln x} \\ &= \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \ln x \right) e^{\frac{1}{x} \ln x} \\ &= \frac{1}{x^2} (1 - \ln x) e^{\frac{1}{x} \ln x}. \end{aligned}$$

Comme les facteurs  $\frac{1}{x^2}$  et  $e^{\frac{1}{x} \ln x}$  sont positifs, le signe de la dérivée est celui de  $1 - \ln x$ . Résolvons l'inégalité  $1 - \ln x \geq 0$ . Cela donne  $1 \geq \ln x$  ou  $e \geq x$ . Ainsi la dérivée est positive pour  $x \leq e$  et négative pour  $x \geq e$ . Il en résulte que la fonction  $f$  admet un maximum en  $x = e$ , il vaut  $e^{\frac{1}{e}}$  !

La figure 6 représente le graphique de cette fonction.

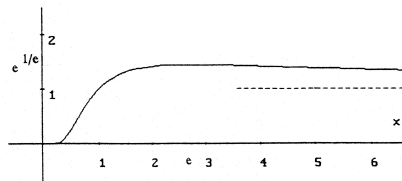


Fig. 6

On peut l'interpréter ainsi : tout nombre entre 0 et  $e^{\frac{1}{e}}$  peut être représenté sous forme  $r^{\frac{1}{r}}$ . De plus, pour des nombres inférieurs à 1, cela est possible

---

---

d'une manière et pour des nombres supérieurs à 1, de deux manières. Faisons le rapprochement entre ce résultat et le fait que les courbes  $y = a^x$  et la droite  $y = x$  sont sécantes pour toutes les valeurs de  $a$  comprises entre 0 et  $e^{\frac{1}{e}}$  : en un point quand  $0 < a < 1$ , en deux points quand  $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ . Dans ce dernier cas, c'est l'abscisse du premier point d'intersection qui correspond à la limite de la suite : cette abscisse ne dépasse pas le nombre  $e$ .

### 2.3. Preuves de la convergence de la suite

Pour  $a < e^{\frac{1}{e}}$ , la dérivée de  $a^x$  est strictement inférieure à 1 (en valeur absolue) pour des valeurs de  $x$  comprises strictement entre 0 et  $e$ , et dans ce cas, la convergence de la suite est assurée par le théorème du point fixe [1].

Pour  $a = e^{\frac{1}{e}}$ , la suite des  $x_n$  est strictement croissante et majorée par  $e$  (ceci se démontre facilement par récurrence) ; elle est donc convergente.

## 3. Retour au point de départ

*Comment calculer la limite  $r$  de la suite associée à un nombre  $a$  ?*

Dans la section précédente, nous avons établi que la limite de la suite est un nombre  $r$  tel que  $r^{\frac{1}{r}} = a$ . Cette équation en  $r$  est équivalente à l'équation  $a^r = r$ . Or, il n'y a aucune méthode algébrique permettant de la résoudre : pour la plupart des valeurs de  $a$ , les solutions sont des nombres irrationnels, donc des nombres connus uniquement par leurs approximations. Une des méthodes possibles est celle qui consiste à construire une suite de  $x_n$  tels que  $x_{n+1} = f(x_n)$ , ce que nous avons fait au début de la section 1.1. Ce procédé s'appelle méthode du point fixe. Nous avons pu voir qu'à partir d'une certaine étape, le nombre affiché ne changeait plus. Ce nombre est la meilleure approximation de  $r$  que nous puissions obtenir à l'aide d'une calculatrice.

Il y a d'autres méthodes numériques permettant de résoudre l'équation  $a^r = r$ . La méthode de Newton donne très rapidement une approximation de la racine de la fonction  $g_a(x) = a^x - x$ . Par exemple, pour  $a = 1,4$ , il faut plus de cinquante étapes à la méthode du point fixe pour stabiliser les dix premières décimales de la limite (1,886663306) alors qu'il ne faut que cinq étapes à la méthode de Newton.

---

---

## Bibliographie

- [1] G. Haesbroeck - V. Wathieu, Stabilité des points fixes hyperboliques dans les systèmes dynamiques discrets, *Mathématique et Pédagogie*, 114, 1997, pp. 13–24.
- [2] G. Polya, *La découverte des mathématiques*, Ed. Dunod, Paris, 1967.
- [3] N. Rouche, Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications, in : *Démonstration Mathématique dans l'Histoire*, Actes du 7ème Colloque Inter-REM, Epistémologie et Histoire des Mathématiques, IREM de Besançon, 1989.

Adresse de l'auteur :

**Mariza Krysinska**

Rue du Rondia 10

1348 Louvain-La-Neuve

Tél. 010/450650

# Equations fonctionnelles et mathématique financière

J. Bair, Université de Liège

*Résumé.* Notre objectif est de montrer comment les concepts fondamentaux de la mathématique financière peuvent être introduits fort simplement à l'aide d'équations fonctionnelles non différentielles qui sont de la sorte interprétées à la lumière d'un problème concret.

*Mots-clé :* mathématique financière, valeur acquise, intérêt, équations fonctionnelles.

## 1. Introduction

La mathématique financière a pour objet principal l'étude de l'évolution temporelle de la valeur d'un capital et, par suite, celle des intérêts générés par ce capital.

Considérons un capital, souvent appelé le *principal*, de valeur  $C$  à l'instant initial  $t = 0$ . En un temps  $t$  quelconque (mesuré avec une période de référence, par exemple l'année), ce capital a une valeur qui dépend bien entendu de la valeur initiale  $C$  et du temps  $t$  : nous noterons  $F(C, t)$  ou  $V_C(t)$  cette valeur qui est souvent appelée la *valeur acquise* par  $C$  au temps  $t$  ; nous supposons que cette fonction  $F$  est partout continue et telle que  $F(C, 0) = C$ .

L'*intérêt* généré par le principal  $C$  entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  est noté  $I_C(t_1, t_2)$  : il est, par définition, égal à la différence entre les valeurs acquises par  $C$  aux temps  $t_1$  et  $t_2$ , soit, plus précisément :

$$I_C(t_1, t_2) = V_C(t_2) - V_C(t_1).$$

Notons que, dans ces définitions, les nombres  $C, t, t_1$  et  $t_2$  peuvent être des réels quelconques.

Il est bien connu que l'évolution d'un capital peut être décrite à l'aide d'équations différentielles simples [5]. Rappelons brièvement, avec nos notations, les notions fondamentales des théories de l'intérêt simple et de l'intérêt composé.

La théorie de l'intérêt simple suppose que l'intérêt généré est proportionnel au temps écoulé et au principal  $C$  ; dans ce cas, on a pour tout

---

---

instant  $t$  et toute variation temporelle  $\Delta t : I_C(t + \Delta t, t) = iC\Delta t$ , où le facteur de proportionnalité  $i$  est le *taux périodique d'intérêt simple* égal à l'intérêt engendré par un principal unitaire pendant un accroissement de temps unitaire à partir de n'importe quel instant. On a donc

$$\frac{V_C(t + \Delta t) - V_C(t)}{\Delta T} = iC;$$

en passant à la limite pour  $\Delta t$  tendant vers 0, et bien entendu sous réserve d'existence de cette limite, il vient

$$\frac{d}{dt} V_C(t) = iC.$$

La solution de cette équation différentielle, moyennant la condition initiale  $V_C(0) = C$ , est donnée par  $V_C(t) = C(1 + it)$ .

Dans la théorie de l'intérêt composé, on suppose que l'intérêt  $I_C(t + \Delta T, t)$  dépend encore de  $\Delta T$  mais, cette fois, de la valeur acquise à l'instant  $t$ , soit  $V_C(t)$  au lieu du principal  $C$  : on a cette fois

$$I_C(t + \Delta t, t) = jV_C(t)\Delta T,$$

d'où

$$\frac{V_C(t + \Delta t) - V_C(t)}{\Delta T} = jV_C(t),$$

où la constante de proportionnalité  $j$  est le *taux d'intérêt périodique instantané*. Par un nouveau passage à la limite dont l'existence est encore supposée, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} V_C(t) = jV_C(t),$$

avec  $V_C(0) = C$  ; la solution en est donnée par  $V_C(t) = Ce^{jt} = C(1 + i)^t$  avec  $j = \ln(1 + i)$  ou  $i = e^j - 1$ .

Nous nous proposons à présent de présenter ces notions fondamentales de la mathématique financière à l'aide d'équations fonctionnelles non différentielles ; plus précisément, nous allons voir qu'elles sont des solutions  $f(x)$  d'équations très simples de la forme

$$f(x + y) = \varphi[f(x), f(y)], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

pour des *opérateurs*  $\varphi$  adéquats qui ne font appel qu'à des opérations fondamentales de l'arithmétique ; les fonctions  $f$  recherchées seront constamment supposées continues sur  $\mathbb{R}$ .

---

---

## 2. Equations fonctionnelles

Considérons tout d'abord le cas où l'opérateur  $\varphi$  est simplement l'addition entre deux réels : on a donc  $\varphi(x+y) = x+y$  et  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  pour tous réels  $x$  et  $y$ . En particulier, on a  $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ , d'où  $f(0) = 0$  et, par conséquent,  $f(-1) = -f(1)$  puisque  $f(1-1) = f(1) + f(-1)$ ; de plus, pour tout entier  $n$  naturel,

$$f(n) = f(1+1+\cdots+1) = nf(1)$$

et

$$f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

soit  $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} f(1)$ ; plus généralement, pour tout nombre rationnel  $\frac{p}{m}$ , avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$f\left(\frac{p}{m}\right) = \frac{1}{m} f(p) = \frac{p}{m} f(1);$$

si  $\alpha$  est un nombre irrationnel, il est possible de construire une suite  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , composée de nombres rationnels  $q_i$ , qui converge vers  $\alpha$  : grâce à la continuité de  $f$ , on obtient par passage à la limite

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f(q_i) = f\left(\lim_{i \rightarrow +\infty} q_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} q_i f(1),$$

ou encore  $f(\alpha) = \alpha f(1)$ . Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = xf(1)$  et  $f$  est une fonction linéaire en  $x$ .

L'équation fonctionnelle  $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$  peut encore s'écrire  $f(x+y) - 1 = [f(x) - 1] + [f(y) - 1]$ , de sorte que la fonction  $f(x) - 1$  vérifie l'équation précédente : il existe donc une constante  $k$  telle que  $f(x) = 1 + kx$  pour tout réel  $x$ .

De même, l'équation  $f(x+y) = f(x) + f(y) + 1$  est équivalente à  $f(x+y) + 1 = [f(x) + 1] + [f(y) + 1]$  : on peut dès lors trouver une constante  $k$  telle que  $f(x) = kx - 1$  pour tout réel  $x$ .

L'équation  $f(x+y) = f(x) - f(y)$  n'offre guère d'intérêt ; de fait, on doit avoir  $f(x+y) = f(y+x) = f(x) - f(y) = f(y) - f(x)$ , d'où  $f(x) = f(y)$ , et  $f(x+0) = f(x) = f(x) - f(0)$ , de sorte que la fonction  $f$  est identiquement nulle.

Plus intéressant est le cas pour lequel l'opérateur  $\varphi$  est la multiplication entre deux réels : on a donc  $\varphi(x,y) = x.y$  et  $f(x+y) = f(x).f(y)$  pour tous



---

---

réels  $x$  et  $y$ . Dès lors, quel que soit  $x$ ,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0.$$

Si la fonction  $f$  n'est pas identiquement nulle, il existe un réel  $x^*$  tel que  $f(x^*) > 0$ , d'où, pour  $x$  arbitraire,  $f(x) > 0$  puisque

$$f(x^*) = f(x + (x^* - x)) = f(x) \cdot f(x^* - x) \neq 0.$$

Un passage aux logarithmes népériens livre, dans ce dernier cas,  $\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y)$  : il existe donc une constante  $k$  pour laquelle  $\ln f(x) = kx$ , d'où, en vertu de ce qui précède,  $f(x) = e^{kx}$ , ou encore  $f(x) = (1+i)^x$  pour tout réel  $x$  et une constante  $i$  supérieure à  $-1$  puisque  $i = e^k - 1$ .

L'équation fonctionnelle  $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x) \cdot f(y)$  peut encore se mettre sous la forme

$$1 - f(x+y) = [1 - f(x)][1 - f(y)],$$

de sorte que la fonction  $1 - f(x)$  vérifie la dernière équation traitée. Il existe donc un réel  $i$  supérieur à  $-1$  tel que  $f(x) = 1 - (1+i)^x$  pour tout  $x$ , à moins que la fonction  $f$  soit identiquement égale à 1.

De même, l'équation  $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x) \cdot f(y)$  est équivalente à  $1 + f(x+y) = [1 + f(x)][1 + f(y)]$  : ou bien la fonction  $f$  est identiquement égale à  $-1$ , ou bien il existe un réel  $i$  supérieur à  $-1$  tel que  $f(x) = (1+i)^x - 1$  pour tout  $x$ .

Enfin, le cas où l'opérateur  $\varphi$  est la division, en supposant bien entendu que la fonction  $f$  ne s'annule jamais, ne présente aucun intérêt puisque pour tout réel  $x$ , on a

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{f(\frac{x}{2})}{f(\frac{x}{2})} = 1.$$

Les résultats précédents sont résumés dans ce tableau récapitulatif :

|                                                                                           |                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| si la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour tous réels $x$ et $y$ | alors, pour tout réel $x$                                                                     |
| (1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$                                                              | il existe une constante $k$ telle que $f(x) = kx$                                             |
| (2) $f(x + y) = f(x) + f(y) - 1$                                                          | il existe une constante $k$ telle que $f(x) = 1 + kx$                                         |
| (3) $f(x + y) = f(x) + f(y) + 1$                                                          | il existe une constante $k$ telle que $f(x) = kx - 1$                                         |
| (4) $f(x + y) = f(x) - f(y)$                                                              | $f(x) = 0$                                                                                    |
| (5) $f(x + y) = f(x).f(y)$                                                                | $f(x) = 0$ ou il existe une constante $i$ supérieure à $-1$ telle que $f(x) = (1 + i)^x$      |
| (6) $f(x + y) = f(x) + f(y) - f(x).f(y)$                                                  | $f(x) = 1$ ou il existe une constante $i$ supérieure à $-1$ telle que $f(x) = 1 - (1 + i)^x$  |
| (7) $f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x).f(y)$                                                  | $f(x) = -1$ ou il existe une constante $i$ supérieure à $-1$ telle que $f(x) = (1 + i)^x - 1$ |
| (8) $f(x + y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ , $f$ ne s'annulant jamais                             | $f(x) = 1$                                                                                    |

### 3. Lien entre la valeur acquise et le principal

Admettons que n'importe quel principal peut être placé au moment initial. Fixons le temps  $t$  et analysons la variation de la valeur acquise  $F(C, t)$  par rapport à la seule variable  $C$ .

Nous allons démontrer que, pour tous réels  $C_1$  et  $C_2$ ,

$$F(C_1 + C_2, t) = F(C_1, t) + F(C_2, t).$$

Sinon, il existerait deux principaux  $C_1$  et  $C_2$  pour lesquels  $F(C_1 + C_2, t)$  serait supérieur (resp. inférieur) à  $F(C_1, t) + F(C_2, t)$ ; dans ce cas, les capitaux  $C_1$  et  $C_2$  (resp. le capital  $C_1 + C_2$ ) ne seraient jamais placés (resp. ne serait jamais placé), car il serait évidemment possible de les réunir en un

---

---

seul capital  $C_1 + C_2$  (resp. de les scinder en deux capitaux  $C_1$  et  $C_2$ ) pour obtenir une plus grande valeur acquise. Une théorie qui n'admettrait pas cette égalité n'aurait aucune portée pratique.

En conséquence, la fonction  $F(C, t)$ , pour tout  $t$  fixé, vérifie l'équation fonctionnelle (1) du tableau récapitulatif, de sorte qu'il existe une constante  $k$  telle que  $F(C, t) = kC$ ; cette constante  $k$  est égale à  $F(1, t)$  et varie donc avec  $t$ ; pour plus de simplicité, nous la noterons par la suite  $V(t)$  : il s'agit de la valeur acquise au temps  $t$  par une unité monétaire placée au moment initial  $t = 0$ ; on a bien entendu  $V(0) = 1$ .

Ainsi, la valeur acquise est proportionnelle au principal; en formule,

$$V_C(t) = CV(t);$$

en corollaire, l'intérêt est également proportionnel au principal puisque

$$I_C(t_1, t_2) = C[V(t_2) - V(t_1)].$$

Par la suite, nous noterons simplement  $I(t)$  l'intérêt au temps  $t$  généré par un principal unitaire placé au moment initial; on a donc  $I_1(0, t) = I(t)$ , d'où  $I_C(0, t) = CI(t)$ .

## 4. La notion d'intérêt simple

Dans la théorie de l'intérêt simple, les intérêts ne produisent pas d'intérêt, ce qui entraîne que les intérêts sont simplement dûs au principal et ne dépendent que de la durée réelle du placement; en formule, on a, pour tout  $C$  et tous réels  $t_1$  et  $t_2$ , avec  $t_1 < t_2$  :

$$I_C(t_1, t_2) = CI_1(t_1, t_2) = CI_1(0, t_2 - t_1) = CI(t_2 - t_1);$$

de plus, pour tout  $t_3$  compris entre  $t_1$  et  $t_2$

$$I_C(t_1, t_2) = I_C(t_1, t_3) + I_C(t_3, t_2)$$

ce qui permet d'écrire

$$I(t_2 - t_1) = I(t_3 - t_1) + I(t_2 - t_3)$$

soit encore, en prenant  $t_2 - t_1 = x + y$ ,  $t_3 - t_1 = x$ , d'où  $t_2 - t_3 = y$

$$I(x + y) = I(x) + I(y).$$

---

---

Il est donc naturel d'admettre que la fonction  $I$  vérifie l'équation fonctionnelle (1) : il existe une constante, qui sera notée  $i$ , telle que  $I(t) = it$  pour tout réel  $t$  ; on retrouve le taux périodique d'intérêt simple puisque  $i = I(1)$ .

Il résulte de ce qui précède que la valeur acquise au temps  $t$  par un principal unitaire obéit à l'équation fonctionnelle (2). Ainsi, la valeur acquise au temps  $t$  par un principal  $C$  vaut

$$V_C(t) = CV(t) = C(1 + it).$$

Cette formule, pourtant utilisée en pratique [1, 2], ne correspond pas à la réalité. En effet, la personne qui place son argent au moment initial cherche à lui faire rapporter le plus possible au temps  $t$  ; elle a donc intérêt à retirer son avoir au temps  $\frac{t}{2}$ , puis de replacer le tout (capital et intérêts) aussitôt de sorte que le capital, en  $t$ , sera de

$$C \left(1 + i \frac{t}{2}\right)^2 > C(1 + it);$$

plus généralement, il lui sera plus avantageux de diviser l'intervalle de temps  $[0, t]$  en sous-intervalles  $[t_{j-1}, t_j]$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$  avec  $t_0 = 0$  et  $t_n = t$ , de placer son capital  $C$  sur l'intervalle  $[0, t_1]$ , ce qui donnera en  $t_1$  une valeur acquise de  $C(1 + it_1)$ , de retirer en  $t_1$  ce montant pour le replacer immédiatement après pendant le temps  $[t_1, t_2]$ , et ainsi de suite ; au temps  $t$ , la valeur acquise sera égale à

$$C \prod_{j=1}^n [1 + i(t_j - t_{j-1})].$$

## 5. La notion d'intérêt composé

Pour éviter au prêteur les inconvénients provoqués par la loi de placement à intérêt simple qui le pousserait à retirer de nombreuses fois le montant de son capital (principal et intérêts) et de le replacer aussitôt pour une nouvelle période fort courte, les financiers ont introduit une prime de fidélité et utilisent alors, à long terme, la loi de l'intérêt composé selon laquelle les intérêts produisent eux-mêmes des intérêts ; d'une façon plus précise, l'intérêt produit par un principal unitaire dans un intervalle de temps quelconque est égal à la valeur acquise au terme par l'intérêt déjà

---

---

formé à un instant arbitrairement choisi et supposé placé à cet instant, majorée de l'intérêt acquis au terme par le principal également supposé placé à cet instant. Dès lors, pour tous  $t_1, t_2, t_3$ , on doit avoir

$$I_1(t_1, t_2) = I_1(t_1, t_3) + I_1(t_3, t_2) + I_1(t_1, t_3)I_1(t_3, t_2),$$

ce qui peut encore s'écrire comme suit :

$$I(t_2 - t_1) = I(t_3 - t_1) + I(t_2 - t_3) + I(t_3 - t_1)I(t_2 - t_3)$$

ou encore, en prenant  $t_2 - t_1 = x + y$ ,  $t_3 - t_1 = x$  et  $t_2 - t_3 = y$ ,

$$I(x + y) = I(x) + I(y) + I(x).I(y).$$

Ainsi, la fonction  $I(t)$  vérifie l'équation fonctionnelle (7), d'où, si l'on rejette la possibilité d'avoir la fonction  $I$  identiquement égale à  $-1$ ,  $I(t) = (1+i)^t - 1$  où  $i$  désigne le *taux périodique d'intérêt composé*.

Quant à la valeur acquise au temps  $t$  par un principal unitaire, elle obéit à l'équation fonctionnelle (5), d'où, puisque  $V$  ne peut pas être constante,  $V(t) = (1+i)^t$  où  $i$  est encore le taux périodique d'intérêt composé. Avec les notations précédentes, on peut alors écrire

$$V_C(t) = CV(t) = C(1+i)^t = C \prod_{j=1}^n (1+i)^{t_j - t_{j-1}};$$

concrètement, il est identique pour le prêteur de laisser son argent placé pendant le temps  $t$  ou de le retirer  $n$  fois avant de le replacer immédiatement après au temps  $t_j$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$ .

## 6. Les lois d'intérêt simple et d'intérêt composé sont limites l'une de l'autre

Considérons tout d'abord le cas de placements à intérêt simple, avec un principal  $C$  placé au moment initial pendant un temps  $t$  au taux périodique  $i$ . Si, aux instants  $\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \frac{3t}{n}, \dots, \frac{(n-1)t}{n}$ , on peut retirer le capital acquis et le replacer immédiatement selon la même loi, la valeur acquise au temps  $t$  sera donnée par

$$C \left( 1 + \frac{it}{n} \right)^n.$$

---

---

Lorsque  $n$  s'accroît indéfiniment, on obtient à la limite comme valeur acquise la somme de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C \left( 1 + \frac{it}{n} \right)^n = Ce^{it} = C(1+j)^t$$

où  $j = e^i - 1$ .

De la sorte, le placement à intérêt simple (au taux périodique  $i$ ) est devenu, à la limite, un placement à intérêt composé (au taux périodique  $j$ ), ce qui était prévisible puisque les intérêts déjà acquis aux points de retrait ont été rendus productifs d'intérêts et que le nombre de ces retraits s'est "accru indéfiniment".

Envisageons à présent le cas de placements à intérêt composé, avec un taux périodique  $i$ . Soit un principal  $C$  placé au moment initial pendant un temps  $t$ . Si, aux instants  $\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \frac{3t}{n}, \dots, \frac{(n-1)t}{n}$ , on retire du placement la valeur acquise et qu'on la remplace par un capital égal au capital initial soumis à la même loi, tandis que la différence n'est pas remplacée, la valeur acquise par  $C$  au temps  $t$  sera donnée par

$$C \left[ (n-1) \left( (1+i)^{\frac{t}{n}} - 1 \right) + (1+i)^{\frac{t}{n}} \right] = C \left[ n \left( (1+i)^{\frac{t}{n}} - 1 \right) + 1 \right].$$

Si  $n$  tend vers l'infini, on obtient à la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C \left[ n \left( (1+i)^{\frac{t}{n}} - 1 \right) + 1 \right] = C [1 + t \ln(1+i)] = C(1+j)t$$

où  $j = \ln(1+i)$ .

Ainsi, le placement à intérêt composé (au taux périodique  $i$ ) est devenu, à la limite, un placement à intérêt simple (au taux périodique  $j$ ), ce qui est normal puisque les intérêts déjà acquis aux points de retrait sont devenus improductifs d'intérêts et que le nombre de ces retraits est devenu arbitrairement grand.

## Bibliographie

- [1] Bair J., Haesbroeck G., Justens D., Rosoux J., *Modèles mathématiques en finance : de l'incohérence à l'incertitude et au chaos*, Editions Ferrer, Bruxelles, 1998.
- [2] Bair J., Hinnion R., Justens D., *Applications économiques au service de la mathématique*, éd. de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, 1989.

- 
- 
- [3] Beunier M., Base mathématique de la théorie de l'intérêt, *Bulletin de l'Institut de Recherches Economiques et Sociales de l'Université de Louvain*, année XIII, n°1, 1947, pp. 5–51.
- [4] Husset Y., Remarques à propos de la formule fondamentale des intérêts composés, *Bulletin A.P.M.E.P.*, n°412, 1997, pp. 622–628.
- [5] Justens D., Utilisation des équations différentielles en finance et en gestion, *Mathématique et Pédagogie*, 82, 1991, pp. 5–22.
- [6] Justens D., Rosoux J., *Introduction à la mathématique financière*, 3e édition, De Boeck Université, Bruxelles, 1995.

Adresse de l'auteur :

**Jacques BAIR**

Université de Liège

Faculté d'Economie, de Gestion et des Sciences Sociales

Boulevard du Rectorat 7 (Bât. B31)

4000 Liège - Belgique

E-mail : J.Bair@ulg.ac.be

## Coup d'oeil actualisé sur la droite de Simson et sur la géométrie

S. Courtois et F. Denis, *Inspecteurs honoraires*

Robert Simson, mathématicien écossais, 1687-1768

*Mots-clé* : géométrie, droite de Simson, CABRI.

Cette propriété, attribuée à Robert Simson, figure ainsi dans l'ouvrage "Géométrie plane" par Dalle et De Waele :

**Les pieds des perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un triangle par un point de la circonférence circonscrite à ce triangle, sont en ligne droite.**

Nous montrerons d'abord comment les tracés de Cabri II suggèrent des éléments pour la démontrer et pour l'étendre dans une voie originale.

Nous montrerons ensuite la puissance des transformations pour en prouver une extension qui trouve son idée dans l'ombre au soleil d'un triangle, de son cercle circonscrit et de la droite de Simson.

Enfin, l'énoncé euclidien classique étant passé à une forme affine, nous proposons au lecteur de réfléchir à un point de vue projectif.

### 1. Des premiers essais à l'aide de CABRI à la démonstration

- Sur la figure 1, construite à l'aide du logiciel, mesurer des angles, modifier la position du point sur le cercle et relever des égalités qui sont conservées.
- Mouvoir le point  $P$  en dehors du cercle circonscrit et voir si la propriété d'alignement des pieds des perpendiculaires semble se reproduire.



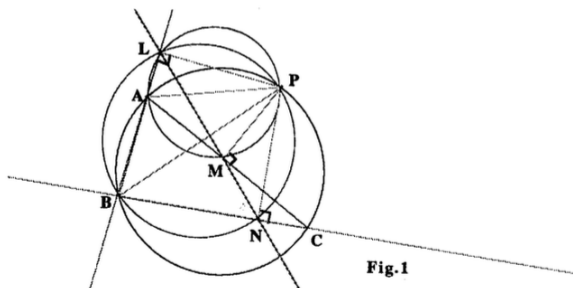


Fig.1

On en retire deux idées :

La première, de démontrer la propriété en se basant sur les quadrilatères inscrits et sur les égalités d'angles inscrits dans un cercle.

$$\begin{aligned}
 \widehat{PLM} &= \widehat{PAM} \text{ dans le quadrilatère inscrit } PLAM, \\
 \widehat{PAM} &= \widehat{PAC}, \\
 \widehat{PAC} &= \widehat{PBC} \text{ dans le quadrilatère inscrit } PABC, \\
 \widehat{PBC} &= \widehat{PBN}, \\
 \widehat{PBN} &= \widehat{PLN} \text{ dans le quadrilatère inscrit } PLBN, \\
 \widehat{PLM} &= \widehat{PLN} \text{ exprime que } L, M, N \text{ sont alignés.}
 \end{aligned} \tag{1}$$

La seconde, d'observer que l'égalité (1) est liée à l'appartenance de  $P$  au cercle circonscrit à  $ABC$  et que la propriété de la droite de Simson peut donc s'énoncer en termes de

- **condition nécessaire et suffisante** pour qu'un point soit sur le cercle circonscrit à un triangle ;
- **lieu géométrique** des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois côtés d'un triangle soient alignés.

A chaque position du point sur la circonférence, correspond une droite joignant les pieds des perpendiculaires ; c'est pourquoi on parle de **droite de Simson**, liée à tout point du cercle circonscrit à un triangle donné.

---

## 2. La droite de Simson a elle-même des propriétés

Dans la première moitié du siècle, les manuels de géométrie proposaient régulièrement des exercices mettant en application la droite de Simson ; celle-ci devenait pratiquement une propriété à connaître. En voici un :

- Une parallèle à la droite de Simson du triangle passe par les trois points symétriques de  $P$  par rapport aux côtés du triangle.

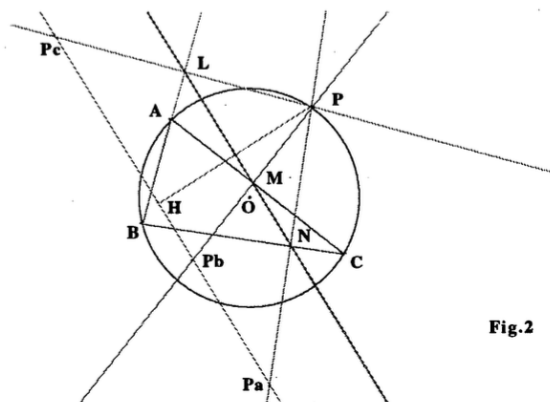


Fig.2

Pour le prouver, il suffit de considérer cette droite comme étant l'image de la droite de Simson par l'homothétie de centre  $P$  et de rapport 2.

- L'orthocentre est sur cette parallèle, il est point fixe de cette droite quand  $P$  décrit le cercle. (Le lecteur peut l'observer sur la figure fournie par CABRI et le démontrer en considérant les angles en  $H$ ). Cette propriété qui rattache la droite de Simson aux hauteurs et à l'orthocentre, nous incite à écrire l'énoncé en se référant aux hauteurs du triangle. On en verra l'utilité plus loin.

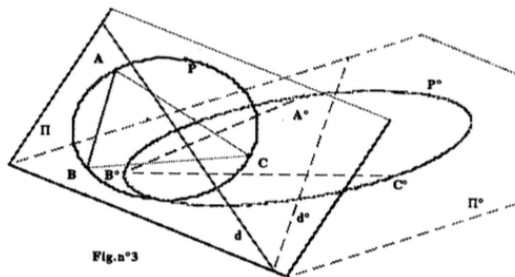
**Etant donné un triangle, ses trois hauteurs et un point  $P$  de son cercle circonscrit, les parallèles aux hauteurs issues du point  $P$  coupent les bases de celles-ci en trois points en ligne droite.**

---

### 3. Extensions de la propriété de la droite de Simson

**William Wallace**, mathématicien écossais (1768-1843) a généralisé la propriété en remplaçant les perpendiculaires issues de  $P$  par des droites isoclines, c'est-à-dire faisant le même angle orienté avec les côtés du triangle. Nous n'y reviendrons pas. Nous aborderons une extension ne faisant plus appel aux angles et aux perpendiculaires, mais bien à celle de parallélisme, en appliquant une transformation affine (linéaire) de la configuration de Simson.

- L'ombre au soleil d'une configuration de Simson tracée sur papier transparent fournit un modèle de cette transformation. Dans l'espace, il s'agit d'une projection parallèle du plan  $\pi$  de la figure sur un plan  $\pi^\circ$  qui coupe le premier.



- Dans le plan de la figure, on transforme cette configuration par l'affinité déterminée par  $ABC$  et son image, un triangle quelconque  $A^\circ B^\circ C^\circ$

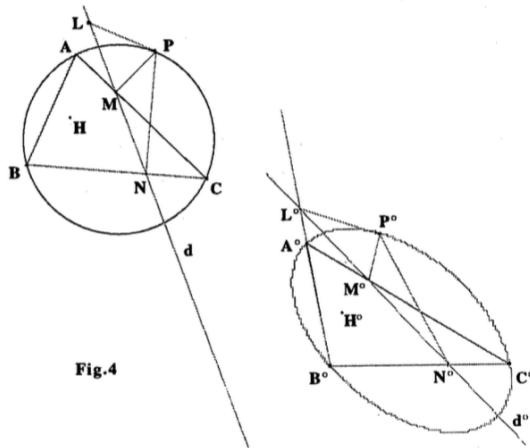


Fig.4

Les résultats sont prévisibles. Les propriétés angulaires et de perpendicularité sont perdues. Les symétries orthogonales deviennent des symétries obliques. L'incidence, l'alignement des points, le parallélisme des droites, le milieu des segments de droites, le rapport des segments de même direction sont conservés. Ces invariants découlent essentiellement du théorème de Thalès.

Le cercle est transformé en une ellipse passant par  $A^\circ, B^\circ, C^\circ$  dont chaque point jouit de la propriété suivant la modalité suivante.

Dans le triangle  $A^\circ B^\circ C^\circ$ , les trois hauteurs du triangle  $ABC$  ont pour images trois droites  $A^\circ H^\circ, B^\circ H^\circ, C^\circ H^\circ$ , concourantes au point  $H^\circ$  qui a perdu la qualité d'orthocentre du triangle. Les droites  $P^\circ L^\circ, P^\circ M^\circ, P^\circ N^\circ$  restent parallèles à  $C^\circ H^\circ, BH^\circ, A^\circ H^\circ$  et les points  $L^\circ, M^\circ, N^\circ$ , alignés.

## 4. Démonstration de l'extension affine de la propriété de Simson

*Remarques préalables :*

a) Contrairement aux triangles isométriques ou semblables, deux triangles ne sont soumis à aucune condition relative aux côtés ou aux angles, pour que l'un soit image de l'autre par exactement une affinité.

Etant donné un couple quelconque  $(A, B, C), (A', B', C')$  de triangles, l'affinité qui applique le premier sur le second se définit par la construction de l'image d'un point quelconque, en se fondant sur la conservation de l'alignement, du rapport de section et du parallélisme des droites.

$M$  sur le bord du triangle, sur  $[BC]$  par exemple a pour image  $M'$  sur  $[B'C']$  tel que

$$\frac{BM}{MC} = \frac{B'M'}{M'C'}$$

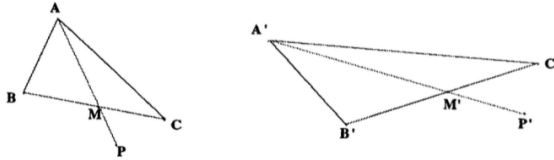


Fig.5a

$P$  hors du bord du triangle a pour image  $P'$  tel que  $\frac{AP}{PM} = \frac{A'P'}{P'M'}$ .

La transformation s'illustre à l'aide de deux quadrillages dont les mailles sont des parallélogrammes construits sur  $ABC$  et  $A'B'C'$ . Elle se définit évidemment par la conservation des coordonnées en passant du repère  $(B, BC, BA)$  au repère  $(B', B'C', B'A')$ .

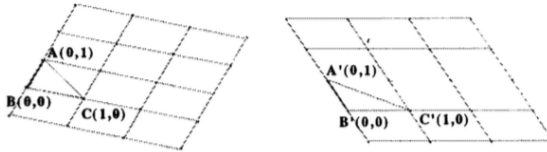


Fig.5b

b) L'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$ , formé de trois droites sécantes deux à deux, se situe dans une des quatre régions I, II, III, IV. Son image  $H^\circ$ , par une affinité, se situe dans la région correspondante du triangle image. Un point  $Q^\circ$ , dans le plan du triangle  $A^\circ B^\circ C^\circ$ , peut être image de l'orthocentre  $H$  d'un triangle  $ABC$  par une affinité seulement s'il est situé dans une des régions définies ci-dessus.

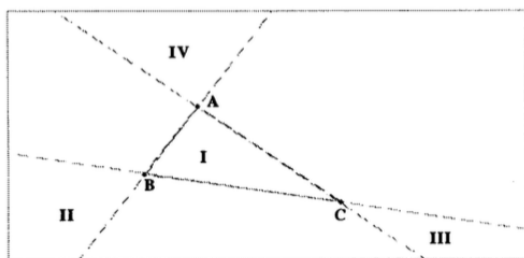


Fig.5c

Etant donné un triangle  $A^\circ B^\circ C^\circ$  et un point  $Q^\circ$  situé dans une des quatre régions I, II, III, IV.

Par un point  $P^\circ$  appartenant au plan  $A^\circ B^\circ C^\circ$ , on mène les parallèles à  $A^\circ Q^\circ$ ,  $B^\circ Q^\circ$ ,  $C^\circ Q^\circ$  qui coupent respectivement  $B^\circ C^\circ$ ,  $C^\circ A^\circ$ ,  $A^\circ B^\circ$  en  $L^\circ$ ,  $M^\circ$ ,  $N^\circ$ .

**On demande le lieu de  $P^\circ$  pour que  $L^\circ, M^\circ$  et  $N^\circ$  soient alignés.**

Pour déterminer ce lieu, nous allons définir une affinité  $f$  telle que le triangle  $A^\circ B^\circ C^\circ$  ait pour image un triangle  $ABC$ , non choisi au hasard, mais **construit de manière à ce que son orthocentre  $H$  soit l'image de  $Q^\circ$**  et nous montrerons **que le lieu de  $P^\circ$  est l'ellipse image par  $f^{-1}$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .**

Soit  $B$  et  $C$  deux points quelconques.

Soit  $D^\circ$  et  $E^\circ$  les points d'intersections des droites  $B^\circ Q^\circ$  et  $C^\circ Q^\circ$  avec les droites  $C^\circ A^\circ$  et  $B^\circ A^\circ$ . Les images des segments  $[B^\circ D^\circ]$  et  $[C^\circ E^\circ]$  doivent être les hauteurs  $[BD]$  et  $[CE]$  du triangle  $ABC$ , donc  $D$  et  $E$  appartiennent au cercle de diamètre  $[BC]$ . D'autre part, compte tenu de la conservation du rapport des longueurs de segments de même direction, on doit avoir :

$$\frac{B^\circ A^\circ}{B^\circ E^\circ} = \frac{BA}{BE} \quad \text{et} \quad \frac{C^\circ A^\circ}{C^\circ D^\circ} = \frac{CA}{CD}.$$

Il suffit donc de choisir comme point  $A$  un des deux points d'intersection des deux cercles images du cercle de diamètre  $[BC]$  par les homothéties de centre  $B$  et de rapport  $\frac{B^\circ A^\circ}{B^\circ E^\circ}$  et de centre  $C$  et de rapport  $\frac{C^\circ A^\circ}{C^\circ D^\circ}$ .

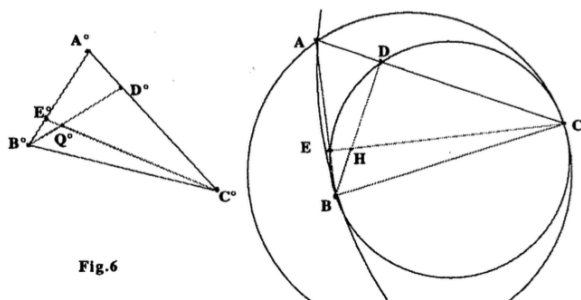


Fig.6

(Remarque : Ces cercles coïncident si  $Q^\circ$  est en  $A^\circ$  ; dans ce cas, tout triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  permet de terminer la construction).

On peut achever la construction du triangle  $ABC$  et le munir de son cercle circonscrit, de ses hauteurs et de la droite de Simson attachée à tout point  $P$  du cercle.

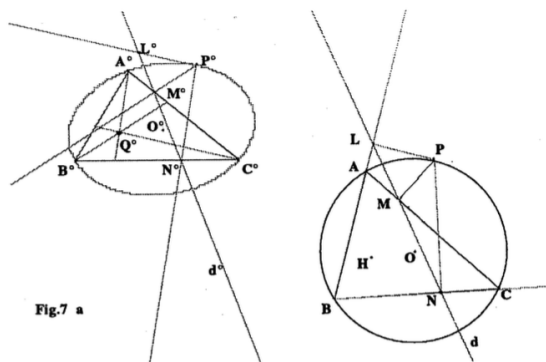


Fig.7 a

Fig. 7a : On donne un triangle  $A^\circ B^\circ C^\circ$  et un point  $Q^\circ$  intérieur au triangle.

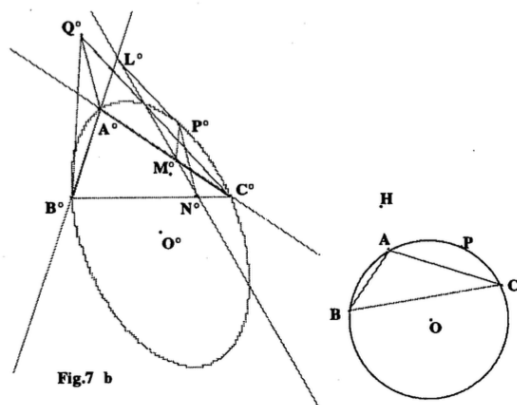


Fig. 7b : Le point  $Q^\circ$  est extérieur, mais “bien situé”.

Par  $f$  ou  $f^{-1}$ , les éléments suivants se correspondent :

|                                              |                                                                            |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $H$ orthocentre                              | $Q^\circ$ “bien localisé”,                                                 |
| parallèles à $AH, BH, CH$                    | parallèles à $A^\circ Q^\circ, B^\circ Q^\circ, C^\circ Q^\circ$ ,         |
| cercle de centre $O$ , circonscrit à $ABC$   | ellipse de centre $O' = f^{-1}(O)$ passant par $A^\circ B^\circ C^\circ$ , |
| pieds des perpendiculaires $L, M, N$ alignés | intersections $L^\circ, M^\circ, N^\circ$ alignées.                        |

L’affinité  $f$  étant bijective, le lieu de  $P^\circ$  est l’image du lieu de  $P$ , qui est l’ensemble des points tels que les parallèles aux hauteurs issues de  $P$  coupent les bases de celles-ci en trois points en ligne droite, il s’agit de l’ellipse de centre  $O^\circ$  passant par  $A^\circ B^\circ C^\circ$ .

Il serait avantageux de pouvoir construire cette ellipse à partir des données  $A^\circ, B^\circ, C^\circ, Q^\circ$  sans devoir recourir à une affinité et à un triangle auxiliaire  $ABC$  ; ce serait d’ailleurs une manière de mettre en évidence le fait que le lieu de  $P^\circ$  ne dépend pas de l’affinité  $f$ .

C’est possible, grâce à la droite d’Euler (1707-1783), si simple selon Coxeter : “Mais comment Euclide n’y avait pas pensé?”.



---

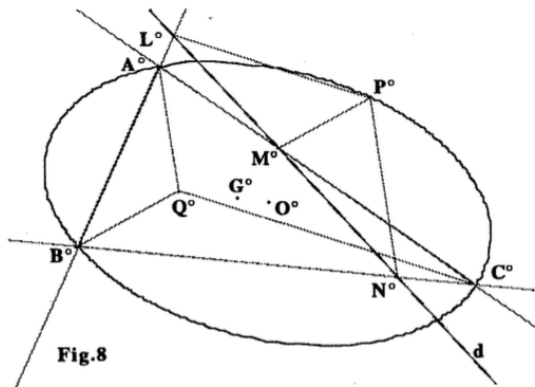
---

## 5. Détermination directe du centre de l'ellipse, sans passer par l'affinité

L'affinité conserve les médianes et le centre de gravité. Elle applique le centre  $O$  du cercle circonscrit, le centre de gravité  $G$ , l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$ , respectivement sur le centre  $O^\circ$  de l'ellipse, sur le centre de gravité  $G^\circ$  et sur le point  $Q^\circ$  du triangle  $A^\circ B^\circ C^\circ$ .

Dans le triangle  $ABC$ , les positions de  $H$ ,  $G$  et  $O$  sont liées par la relation d'Euler,  $\vec{HG} = 2\vec{GO}$ . Cette relation vectorielle est conservée par  $f$  dans le triangle  $A^\circ B^\circ C^\circ$  :  $Q^\circ G^\circ = 2G^\circ O^\circ$ .

Dans le triangle  $A^\circ B^\circ C^\circ$  donné,  $Q^\circ$  étant donné,  $G^\circ$  étant constructible, la relation  $G^\circ O^\circ = \frac{1}{2} Q^\circ G^\circ$  détermine la position de  $O^\circ$ .



L'ellipse recherchée est donc déterminée par son centre  $O^\circ$  et trois de ses points  $A^\circ$ ,  $B^\circ$ ,  $C^\circ$ .

## 6. En guise de conclusion

L'enseignement de la géométrie est toujours à revisiter.

Des propriétés de figures mises en évidence il y a 100, 200 ... ans et qui furent l'objet de multiples études font encore partie du patrimoine. Obsolètes, inutiles, peut-être...

---

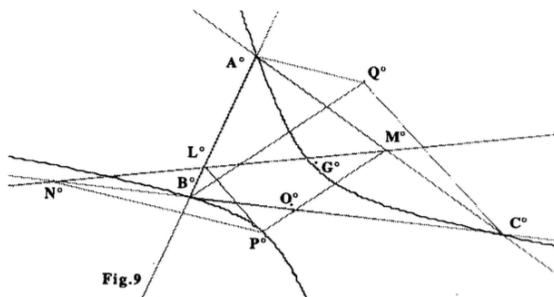
---

On peut pourtant y trouver des défis pour mettre en oeuvre des moyens modernes de modélisation ainsi qu'une vision actuelle de la géométrie.

L'étude d'une question en se plaçant tantôt d'un point de vue métrique, tantôt d'un point de vue affine, le recours à des transformations relèvent de cette vision moderne de la géométrie. Nous espérons l'avoir illustré ci-dessus.

## 7. Et après ... pour votre sagacité et pour encore généraliser

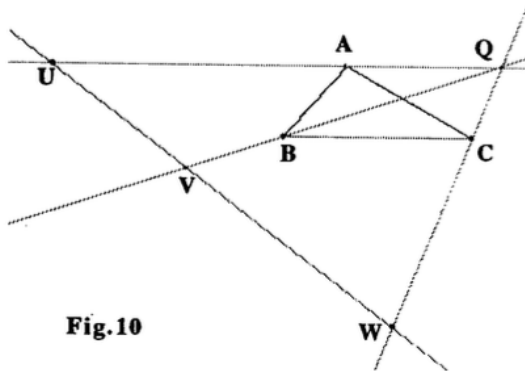
La figure 9 obtenue avec CABRI suggère que la propriété d'alignement pourrait être conservée lorsque  $Q^\circ$  est en dehors des régions I à IV, le lieu de  $P^\circ$  serait alors une hyperbole.



Monsieur Guy Noël, à qui on avait soumis la question, nous a adressé le commentaire suivant :

“Je crois que le cadre naturel de cette question est la géométrie projective et qu'il est possible de remplacer les conditions de parallélisme par la condition classique de colinéarité des intersections de paires de droites. La variante projective du problème serait la suivante :

**Problème :** On donne un triangle  $ABC$ , une droite  $d$  et un point  $Q$ . On note  $U$ ,  $V$  et  $W$  les points d'intersection de  $QA$ ,  $QB$ ,  $QC$  avec  $d$ . Trouver le lieu des points  $P$  tels que les points d'intersection  $L$  de  $PU$  et  $BC$ ,  $M$  de  $PV$  et  $AC$ ,  $N$  de  $PW$  et  $AB$  soient alignés.



**Fig.10**

De la variante projective, on pourra déduire facilement la propriété affine, dans tous les cas, tout simplement en considérant une transformation projective qui envoie la droite  $d$     l'infini".

Monsieur Francis BUEKENHOUT que nous avons sollicité, a traité la question dans une base projective en choisissant le système de coordonnées homogènes  $A = [0, 0, 1]$ ,  $B = [0, 1, 0]$ ,  $C = [1, 0, 0]$ ,  $Q = [1, 1, 1]$ . Il obtient comme lieu une cubique décomposable en  $d$  et une conique qui est le lieu recherché et il montre que cette conique qui passe par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  peut effectivement être une hyperbole.

Il relève que la situation étudiée est basée sur une configuration abstraite de 11 points ( $A, B, C, Q, U, V, W, L, M, N, P$ ) et 11 droites dans laquelle tout point appartient à trois droites et toute droite comprend trois points.

Il ajoute : "Le chemin parcouru avec Simson est vraiment surprenant !".

Adresse des auteurs :

**Francis DENIS**  
rue Duch  ne 9  
4120 NEUPRE

**Sylvain COURTOIS**  
Raatshovenstraat 83  
3400 LANDEN

## Revue des revues

M. Fremal,

### Bulletin de l'APMEP (France), n°413-Décembre 1997

- Dans l'éditorial de ce numéro, le Président Jean-Pierre Richeton cède la “plume” à un adhérent, Tadion Szwed qui, en quelques lignes bien écrites, plaide pour que l'on demande “de l'ambition pour les élèves”, surtout “pour ceux qui ont besoin qu'on en ait pour eux, pour ceux qui se sentent battus d'avance parce que dans leur milieu social, on n'est pas très souvent vainqueur”.  
A méditer, très certainement.
- Jean-Louis Piednoir traite du sujet “*Les Statistiques, le calcul des probabilités et l'enseignement professionnel*”.  
Dans cet article, l'auteur poursuit l'objectif de proposer une approche de la statistique et du calcul des probabilités proche des préoccupations de l'enseignement professionnel.  
Après avoir explicité les a-priori de départ, il expose des propositions concernant les programmes, les situations aléatoires, la modélisation, la loi normale et la sensibilisation à la notion de hasard. La statistique est ensuite traitée selon le découpage suivant :
  - L'observation des moeurs de la tribu des statisticiens,
  - Les réactions de la vie courante,
  - La démarche statistique,
  - La statistique descriptive,
  - La statistique inductive.
- Jacqueline Raux présente et commente un questionnaire destiné aux Lycées Professionnels.
- Anne Gavois traite du problème de l'évaluation en lycée professionnel.
- Corinne Hahn expose les résultats d'une recherche sur l'utilisation du concret dans l'enseignement mathématique en lycée professionnel.
- Marcel Jay et Paul-Louis Hennequin présentent une étude théorique de la loi de probabilité du quotient de deux variables gaussiennes indépendantes.
- Robert Ferréol traite de “*Serpentins et Tubes*” dans lequel il relie périmètre, aires et volumes.
- Annick Boisseau et Gwenola Madec exposent leur point de vue, étayé de statistiques sur le sujet de société “*Femmes et Mathématiques*”.

---

---

La revue comporte encore une partie substantielle réservée aux rubriques traditionnelles que sont :

- Avis de recherche (sujets mathématiques divers) (9 pages)
- Les problèmes de l'APMEP (12 pages)
- Nouvelles brèves et Matériaux pour une documentation (14 pages)
- Le courrier des lecteurs
- Tribune libre
- La vie de l'association.

**Claude Villers**

## **Math-Ecole (revue suisse), n°171-février 1996.**

Au sommaire :

- **Michel Brêchet**, *Editorial*
- **Jean-Paul Reding**, *Les n'ombres chinoises* (deuxième partie)  
Cet article aborde les thèmes suivants :
  - les grandes étapes de la pensée mathématique chinoise,
  - quelques exemples : le théorème de Pythagore, le calcul de  $\pi$ , le calcul pour "fausse position"
  - la diffusion et la nature du savoir mathématique chinois.
- **M. Becchere, L. Grugnetti, R. Tazzioli, E. Uselli**, *Sens commun et concept de volume*

Les auteurs ont mené une recherche en vue de comprendre et puis de décrire les conceptions d'élèves de 8 à 18 ans, d'étudiants universitaires et d'adultes sur le concept de volume. Un même test a été soumis à tous les groupes d'âge. Les réponses sont analysées et comparées. La manière dont les manuels scolaires introduisent et développent le concept de volume a été analysée. L'école contribue souvent à la construction d'un sens commun du concept de volume qui ne correspond pas toujours au savoir savant. Le concept de volume nécessite plusieurs approches didactiques.

- **Alicia Bruno, Antonio Martín**, *Problèmes additifs (1) : d'états*  
Premier article d'une série de trois sur les problèmes additifs. Les auteurs s'intéressent aux problèmes où trois nombres  $x, y, z$  (positifs ou négatifs) sont en jeu. Parmi ces trois nombres, deux sont connus, le troisième est inconnu. La relation mettant en rapport ces trois nombres est :

$$x + y = z.$$

Les auteurs ont surtout centré leur attention sur trois aspects : structure, position de l'inconnue et forme sémantique.

---

---

Ce premier article traite des problèmes additifs d'états qui font référence à trois types de problèmes :

- combinaison des états  
état partiel 1 + état partiel 2 = état total,
- variation des états  
état initial + variation = état final,
- comparaison des états  
état 1 + comparaison = état 2.

L'article est illustré par des exemples de chaque type.

- **Hervé Schild**, *Etoile magique*

L'auteur présente une activité numérique qui s'est déroulée avec des élèves de 2ème niveau 1.

- *Notes de lecture*

- Le Trésor de tonton Lulu par J. Lubczanski, G. Chaumeuil et B. Chareyre (Editions Archimède)

- *10ème championnat international des jeux mathématiques et logiques*  
Quelques problèmes extraits des quarts de finale individuels sont proposés.

- *Courrier des lecteurs*

- **Caroline Joseph**, *Math-Adore... le retour (1)!*

Une nouveauté neuchâteloise : un concours interclasses en mathématique pour les degrés 4 et 5 de l'école primaire. Les énoncés des trois premiers problèmes sont suivis de différentes démarches proposées par les élèves pour résoudre le premier.

## Math-Ecole (revue suisse), n°172-avril 1996.

Au sommaire :

- **Jacques-André Calame**, *Editorial*
- **Chantal Richter**, *Mathématiques... sportives ?*
- **Caroline Joseph et J.-André Calame**, *Math-Adore... le retour (2)!*

Des élèves des degrés 4 et 5 de l'école primaire ont participé à un concours interclasses regroupant septante classes neuchâteloises. Deux problèmes sont présentés, les énoncés sont suivis de différentes démarches de résolution proposées par les élèves. Le premier consistait en une activité de pavage, le second était l'occasion de calculer mentalement et d'utiliser la calculette.

- **Michel Chastellain**, *CABRidées*

---

---

Cette nouvelle rubrique proposera régulièrement des activités pour lesquelles le logiciel Cabri-géomètre représente un support pédagogique intéressant.

Le problème suivant :

“Quelle est l’aire maximale d’un triangle dont le périmètre mesure 6 cm ?”

a été proposé à des élèves de 7<sup>ème</sup> année scientifique. Différentes démarches proposées par les élèves sont présentées.

- **Luc-Olivier Pochon**, *Des automates cellulaires pour créer des “rideaux”*

Le “jeu de la vie”, proposé par le mathématicien J. H. Conway, est un exemple d’automate cellulaire. Dans le cadre de l’exposition “les nombres et les plantes” qui s’est déroulée à Neuchâtel, un poste de travail permettait aux visiteurs de construire des figures à partir d’automates cellulaires. Après une brève introduction théorique, l’article propose des travaux réalisés par les participants.

- **Alicia Bruno, Antonio Martínón**, *Problèmes additifs (2) : de variations*

Deuxième article d’une série de trois sur les problèmes additifs. Dans l’article précédent, il était question des problèmes additifs d’états.

Ce deuxième article traite des problèmes additifs de variations qui font référence à quatre types de problèmes :

- combinaison de variations successives  
première variation + seconde variation = variation totale,
- combinaison de variations  
variation partielle 1 + variation partielle 2 = variation totale,
- variation de variations  
variation initiale + variation = variation finale,
- comparaison de variations  
variation 1 + comparaison = variation 2.

L’article est illustré par des exemples de chaque type.

- **Michel Chastellain**, *Maturité professionnelle et mathématiques*  
Quelques informations à propos de l’enseignement des mathématiques dans le cadre de la maturité professionnelle.
- **Anne Meyer**, *Comment atteindre la lune ou la permanence du nombre*

L’auteur est membre du GEPALM (Groupement d’étude psychopathologique des activités mathématiques) créé par Madame Jaulin-Mannoni. Des enfants de 6 ans 3 mois à 8 ans 6 mois sont observés pendant une semaine. Cette observation socio-cognitive portait sur

---

---

plusieurs thèmes, dont la permanence du nombre. L'auteur présente ses observations.

- **François Jaquet**, *Solutions des problèmes*

Quelques problèmes extraits des quarts de finale individuels du 10ème championnat international des jeux mathématiques et logiques et leurs solutions sont présentés. Des commentaires sur les problèmes, leurs procédures de résolution, leurs exploitations dans les classes sont proposés.

- *Notes de lecture*

- Dessiner l'espace ou comment employer Cabri-géomètre dans l'espace par Michel Rousselet (Editions Archimède, 1995)

- Cabri-Classe : apprendre la géométrie avec un logiciel par LSD2 et al., (Editions Archimède, 1994)

- *Convegno del Decennale*

- *Les problèmes du 4ème Rallye mathématique romand*

Les problèmes de la deuxième épreuve du Rallye mathématique d'avril 1996 sont proposés.

## **Math-Ecole (revue suisse), n°173-août 1996.**

Au sommaire :

- **Michel Chastellain**, *Y a-t-il une vie après l'école ?*

Tout au long de ce numéro, le lecteur découvrira des dessins humoristiques extraits d'un recueil intitulé *Barrigue à l'école*.

- **Michel Chastellain**, *CABRidées : "MIN-IJ"*

L'auteur présente une activité vécue avec des élèves de 8ème année. La consigne donnée aux élèves était la suivante :

"On se donne un triangle  $abc$  rectangle en  $a$  et un point  $m$  appartenant au segment  $[bc]$ . Le point  $m$  est projeté perpendiculairement sur  $[ab]$  au point  $i$  et projeté perpendiculairement sur  $[ac]$  en  $j$ . Déterminer la position du point  $m$  pour que la longueur du segment  $[ij]$  soit minimum."

Le "temps perdu" à l'origine pour l'apprentissage du logiciel est largement compensé par la richesse des démarches vécues par les élèves (élaboration d'une figure géométrique fondée sur des invariants, observation de propriétés, justification, écriture d'un compte rendu).

- **François Jaquet**, *Rallye mathématique, la finale*

La finale du 4ème rallye mathématique romand s'est déroulée en juin 1996. Cette compétition est réservée aux élèves des degrés 3, 4 et 5 de l'école primaire. Les douze problèmes de cette finale sont présentés.

- **Simone Forster**, *Pestalozzi, l'homme des intuitions mathématiques*



---

---

L'auteur présente la vie et l'oeuvre du pédagogue suisse Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827). Pour Pestalozzi, il faut partir de l'enfant, de son vécu et de ses représentations. Face à l'avènement d'une nouvelle société industrielle, Pestalozzi eut l'intuition de l'importance de l'enseignement des mathématiques. Les tableaux de calcul inventés par Pestalozzi sont présentés.

- **Samuel Roller**, *L'enseignement moderne de la mathématique*

Cet article est le texte d'une conférence donnée en 1967 par Samuel Robert. Le professeur Robert était alors directeur du service de la recherche pédagogique de Genève. Il n'était pas mathématicien mais il se considérait comme un "instituteur". Il était l'auteur du bulletin "Les nombres en couleurs".

- **Alicia Bruno, Antonio Martínón**, *Problèmes additifs (3) : de comparaisons*

Dans les deux articles précédents, les problèmes additifs d'états et de variations ont été étudiés. Ce troisième article traite des problèmes additifs de comparaisons qui font référence à quatre types de problèmes :

- combinaison de comparaisons contigües  
comparaison 1 + comparaison 2 = comparaison 3,
- combinaison de comparaisons  
comparaison partielle 1 + comparaison partielle 2 = comparaison totale,
- variation de comparaisons  
comparaison initiale + variation = comparaison finale,
- combinaison de comparaisons  
comparaison 1 + comparaison = comparaison 2.

L'article est illustré par des exemples de chaque type.

- **Jacqueline Brandt**, *A propos de l'équivalence*

Cet article s'inspire des travaux du GEPALM, il traite de la notion importante d'équivalence chez de jeunes enfants en difficultés. L'auteur propose plusieurs situations permettant la mise en place de cette structure logico-mathématique.

- **Luc-Olivier Pochon**, *Calcul et botanique : atelier de création d'images fractales*

Dans le cadre de l'exposition "les nombres et les plantes" qui s'est déroulée à Neuchâtel, un poste de travail permettait aux visiteurs de voyager dans le monde des paysages et de la botanique virtuels.

- **G. Sarcone et M. J. Waeber**, *Le puzzle, un outil didactique*

---

---

Les auteurs ont créé une ligne de puzzles, dont le but est de jouer avec les paradoxes de la géométrie. Un échantillon de puzzle Quadrix et les explications pour en fabriquer un sont proposés.

**M. FREMAL**

## Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

Certains lecteurs peuvent s'étonner de ne pas trouver leur nom dans la liste de ceux qui ont envoyé une solution correcte. Il est probable que leur texte me sera parvenu trop tard, les délais de composition et d'impression de cette revue étant assez longs.

De manière à éviter ce désagrément, vous trouverez dorénavant une date limite pour me faire parvenir vos solutions. Cette date figurera juste avant les trois énoncés que je propose à votre sagacité.

Pas facile problème n° 196 de M. et P. n° 114.

*Soit  $ABC$  un triangle dont les mesures des côtés sont  $a, b, c$ , les mesures des angles en radian sont  $A, B, C$  et le demi-périmètre est  $p$ . Démontrer que*

$$1) \sum \frac{b+c-a}{A} \geq \frac{6p}{\pi}$$

$$2) \sum \frac{b+c-a}{aA} \geq \frac{9}{\pi}.$$

Solution de F. BURTON de Liège

### Lemme

Pour tous les réels  $x, y, z, l, m, n$ , les conditions

$$\begin{aligned} (1) \quad & x \geq y \geq z > 0 \\ \text{et } (2) \quad & 0 < \frac{\ell}{x} \leq \frac{m}{y} \leq \frac{n}{z} \end{aligned}$$

entraînent  $\frac{\ell}{x} + \frac{m}{y} + \frac{n}{z} \geq \frac{3(\ell+m+n)}{x+y+z}$ .

On a

$$\frac{\ell}{x} + \frac{m}{y} + \frac{n}{z} - \frac{3(\ell+m+n)}{x+y+z} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \ell xy + \ell y^2 z + \ell y z^2 + m x^2 z + m x y z + m z^2 x \\ & + n x^2 y + n x y^2 + n x y z - 3 \ell x y z - 3 m x y z - 3 n x y z \geq 0 \end{aligned}$$

---

---


$$\Leftrightarrow \ell y^2 z + \ell y z^2 + m x^2 z + m x z^2 + n x^2 y + n x y^2 \\ - 2 \ell x y z - 2 m x y z - 2 n x y z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(m z^2 + n y^2 - m y z - n y z) + y(\ell z^2 + n x^2 - \ell x z - n x z) \\ + z(\ell y^2 + m x^2 - \ell x y - m x y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(n y(y - z) - m z(y - z)) + y(n x(x - z) - \ell z(x - z)) \\ + z(m x(x - y) - \ell y(x - y)) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(y - z)(n y - m z) + y(x - z)(n x - \ell z) + z(x - y)(m x - \ell y) \geq 0,$$

ce qui est vrai, car c'est une somme de trois produits de facteurs tous positifs ou nuls en vertu des conditions (1) et (2).

1) Appliquons ce lemme en remplaçant  $x, y, z$  par  $A, B, C$  et  $\ell, m, n$  par  $b + c - a, c + a - b, a + b - c$ .

On peut a priori supposer  $A \geq B \geq C > 0$  (condition 1). On sait qu'alors  $a \geq b \geq c (> 0)$ .

On sait aussi que  $b + c > a$ , d'où  $\ell = 2p - 2a > 0$ , de même  $m = 2p - 2b > 0$  et  $n = 2p - 2c > 0$ .

De plus,  $a \geq b \geq c \Rightarrow p - a \leq p - b \leq p - c$   
et

$$\begin{cases} 0 < b + c - a \leq c + a - b \leq a + b - c \\ A \geq B \geq C > 0 \end{cases}$$

entraîne, par division membre à membre,

$$0 < \frac{b + c - a}{A} \leq \frac{c + a - b}{B} \leq \frac{a + b - c}{C} \quad (\text{condition 2})$$

et donc, par application du lemme,

$$\sum \frac{b + c - a}{A} \geq \frac{3((b + c - a) + (c + a - b) + (a + b - c))}{A + B + C} = \frac{6p}{\pi}.$$

2) Appliquons maintenant le lemme en remplaçant  $x, y, z$  par  $a, b, c$  et  $\ell, m, n$  par  $\frac{b+c-a}{A}, \frac{c+a-b}{B}, \frac{a+b-c}{C}$ .

---

---

Avec les mêmes hypothèses que dans la 1ère partie ci-dessus, on a

$$0 < \frac{b+c-a}{A} \leq \frac{c+a-b}{B} \leq \frac{a+b-c}{C}$$

et

$$a \geq b \geq c > 0 \quad (\text{condition 1}),$$

d'où, par division membre à membre,

$$\frac{\frac{b+c-a}{A}}{a} \leq \frac{\frac{c+a-b}{B}}{b} \leq \frac{\frac{a+b-c}{C}}{c} \quad (\text{condition 2})$$

et enfin, par application du lemme et de la 1ère inégalité démontrée :

$$\sum \frac{b+c-a}{aA} = \sum \frac{\frac{b+c-a}{A}}{a} \geq \frac{3 \sum \frac{b+c-a}{A}}{\sum a} \geq \frac{3 \frac{6p}{\pi}}{2p} = \frac{9}{\pi}.$$

Bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek, J.-F. MACQ de Virrelles et H.-J. SEIFFERT de Berlin.

Petit Fermat problème n° 197 de M. et P. n° 114.

*Si  $p$  est un nombre premier, alors  $2^p + 3^p$  ne peut être mis sous la forme  $n^k$  où  $n$  est un naturel et  $k$  est un naturel strictement supérieur à 1.*

Solution de P. DASSY de Liège

Si  $p = 2$ , alors  $2^p + 3^p = 4 + 9 = 13$  et n'est pas de la forme  $n^k$  avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

Si  $p$  est premier et différent de 2, alors  $p$  est impair et on a

$$\begin{aligned} 2^p + 3^p &= 2^p + (5 - 2)^p \\ &= 2^p + 5^p - C_p^1 2.5^{p-1} + C_p^2 2^2.5^{p-2} - \dots + C_p^{p-1} 2^{p-1}.5 - 2^p \\ &= 5(5^{p-1} - C_p^1 2.5^{p-2} + C_p^2 2^2.5^{p-3} - \dots + C_p^{p-1} 2^{p-1}). \end{aligned}$$

La présence du facteur 5 implique que l'expression entre parenthèses doit être multiple de 5, donc  $C_p^{p-1} 2^{p-1} = p.2^{p-1}$  doit être divisible par 5.

D'où  $p = 5$ .

Or, pour  $p = 5$ ,  $2^p + 3^p = 32 + 243 = 275 = 5^2.11$  et n'est pas de la forme  $n^k$ .

---

---

Bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek, J. GOLDSTEIN de Diepenbeek, J.-F. MACQ de Virelles, M. PONCHAUX de Lille et H.-J. SEIFFERT de Berlin.

Polynôme ? problème n° 198 de M. et P. n° 114.

*Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant l'équation fonctionnelle*

$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$

*pour tout  $x$  réel.*

Solution de N. BERCKMANS de Waterloo.

En posant  $y = 1 - x$  dans l'équation  $x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$ , on obtient  $(1 - y)^2 f(1 - y) + f(y) = 2(1 - y) - (1 - y)^4$ . Puisque ces deux équations doivent être vérifiées  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , on peut en conclure que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$

et

$$(1 - x)^2 f(1 - x) + f(x) = 2(1 - x) - (1 - x)^4.$$

Si l'on fixe  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , ce système est un système linéaire de deux équations à deux inconnues  $f(x)$  et  $f(1 - x)$ . Il admet une et une seule solution si

$$x^2(1 - x)^2 - 1 \neq 0,$$

c'est-à-dire  $x^2 - x - 1 \neq 0$ .

Les racines de  $x^2 - x - 1$  sont  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Dès lors, en résolvant ce système pour  $x \neq a$  et  $x \neq b$ , on trouve

$$f(x) = 1 - x^2.$$

Pour  $x = a$ ,  $1 - x = 1 - a = b$ , le système

$$\begin{cases} a^2 f(a) + f(b) = 2a - a^4 \\ b^2 f(b) + f(a) = 2b - b^4 \end{cases}$$

est indéterminé. En effet, en tenant compte que  $a^2 = a + 1$ ,  $b^2 = b + 1$ ,  $ab = -1$ ,  $a + b = 1$ , il se transforme en

$$\begin{cases} (a + 1)f(a) + f(b) = -a - 2 \\ (b + 1)f(b) + f(a) = -b - 2 \end{cases}$$

---

---

en multipliant la 2ème équation par  $(a + 1)$ , on retrouve la 1ère équation, car

$$\begin{aligned}(a + 1)(b + 1)f(b) + (a + 1)f(a) &= (a + 1)(-b - 2) \\ (ab + a + b + 1)f(b) + (a + 1)f(a) &= -ab - 2a - b - 2 \\ f(b) + (a + 1)f(a) &= -a - 2.\end{aligned}$$

### Conclusion

$$\forall x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad f(x) = 1 - x^2.$$

$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$  et  $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$  sont deux nombres réels quelconques liés par la relation

$$(3 + \sqrt{5})f\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 2f\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = -5 - \sqrt{5}.$$

Solutions complètes de J.-F. MACQ de Virelles et de H.-J. SEIFFERT de Berlin, solutions partielles de P. DASSY de Liège, M. PONCHAUX de Lille et J. FINOULST de Diepenbeek qui n'ont envisagé que la solution polynomiale.

Date limite pour l'envoi des solutions des trois exercices suivants :  
**1er novembre 1998.**

205. Curieux !

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  le système

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

206. Borne

Trouvez le plus petit réel  $k$  tel que  $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq k$  quel que soit le naturel non nul  $n$ .

207. Colorions

---

---

Chaque sommet d'un polygone est colorié de manière telle que deux sommets ne sont jamais de même couleur. On utilise pour ce coloriage au moins trois couleurs distinctes. Démontrer que ce polygone peut être partagé en triangles par des diagonales non sécantes de telle sorte que les trois sommets de tout triangle soient de couleurs différentes.