

$Math\'ematique \ et$

P'edagogie

Sommaire

• J. Navez, Éditorial	2
• G. Haesbroeck – P. Salengros, Un modèle pour décrire les résultats de titrages chimiques	3
• R. Marquet, La régression linéaire	10
• D. Moens, Bibliographie	29
• Ch. Félix, A la recherche de la fonction de Strähle	3 0
• J. G. Segers, Le produit sur le cercle (suite)	<i>37</i>
• R. Graas, "La conique enfin laconique" Triste sort ou naufrage?	42
• D. Justens, Utilisations du calcul différentiel et intégral en gestion de stocks	44
• C. Festraets, Olympiades	53
• C. Festraets, Des problèmes et des jeux	5 9
• L. Lemaire, Le recrutement des professeurs de mathématique (une réponse à l'éditorial du Président J. Navez dans le n° 117)	67
• J. Bair et P. Paquay, Interpolation par des fonc- tions splines	70

Éditorial

J. Navez.

Je tiens tout d'abord à féliciter la commission "Congrès" de notre Société car elle a fait preuve d'un dévouement exemplaire pour que le Congrès de Floreffe soit une réussite. L'accueil efficace et chaleureux des autorités du Séminaire et en particulier de son directeur-adjoint a aussi largement contribué au succès de la manifestation.

De Floreffe, on retiendra bien sûr le site privilégié et l'architecture somptueuse de l'Abbaye dans laquelle nous nous trouvions, mais on retiendra aussi l'accueil sympathique que nous a réservé la "maïeuresse".

Le thème du Congrès était "nos difficultés au quotidien face aux programmes et aux compétences" et le débat qui a suivi notre assemblée générale a fait apparaître que certains professeurs n'ont pas pu aller au bout de la matière prévue pour le second degré. Les matières sacrifiées sont toujours les mêmes : la statistique et la géométrie. En contre-point, d'autres professeurs ont montré qu'une bonne organisation permettait d'aller au bout du programme.

L'assistance aux divers exposés, conférences et ateliers était remarquable et je suis sûr que le mauvais temps et les volées d'escaliers pour se rendre au bar n'y sont pour rien.

La cérémonie d'ouverture du congrès a été rehaussée par la présence du Ministre de l'Enseignement Supérieur, Monsieur William ANCION, qui a ainsi voulu marquer son soutien aux professeurs qui n'hésitent pas à consacrer un peu de leurs vacances pour leur formation continuée.

Le lieu où se tiendra le prochain congrès n'est pas encore connu mais d'ores et déjà, la Société souhaite que le congrès de l'an 2000 soit exceptionnel. En effet, l'UNESCO a déclaré que 2000 serait l'année des mathématiques et comme le congrès consitue un moment fort pour notre Société, nous voulons faire quelque chose de spécial à cette occasion.

Si vous avez des suggestions concernant le lieu, le déroulement, les expositions ou l'animation du Congrès 2000, n'hésitez pas à nous les communiquer.

Jacques NAVEZ

Un modèle pour décrire les résultats de titrages chimiques

G. Haesbroeck – P. Salengros, ULG – Institut Supérieur Industriel de Huy

Résumé. Dans cette note, nous nous proposons d'étudier le potentiel en fonction du volume lors de certains titrages chimiques; plus précisément, nous souhaitons modéliser le comportement d'une grandeur croissante dont l'évolution peut être représentée graphiquement par une courbe "sigmoïde", c'est-à-dire en forme de "S" incliné; à cet effet, nous exploiterons la classique fonction arctangente. Diverses variantes, ainsi que d'autres applications seront présentées brièvement en fin de travail.

Mots-clé: modélisation; courbe sigmoïde; fonction arctangente.

1. Position du problème

Lors de titrages chimiques basés sur une réaction acido-basique, de complexation, de précipitation ou rédox, les potentiels varient avec les volumes $[4,\,5]$: chaque mesure expérimentale donne naissance à un point $P_i=(x_i,y_i)$ du plan, où i désigne le numéro de la mesure (i variant de 1 à $n),\,x_i$ est le volume considéré et y_i le potentiel correspondant. Dans le cas particulier des réactions acido-basiques, le chimiste préfère observer une variation de pH à celle du potentiel E correspondant, ces deux grandeurs étant liées par la relation de Nernst:

$$E = E_0 - 0.059 \text{ pH}$$

(E_0 est une constante).

Lorsque ces points expérimentaux P_i sont reliés, on obtient une courbe très caractéristique puisqu'elle a l'allure d'une courbe sigmoïde [2, 3]: cela se traduit par une courbe qui croît entre deux asymptotes horizontales, étant d'abord convexe, puis concave et présentant de ce fait un point d'inflexion avant lequel la croissance est très faible pour les plus petites valeurs considérées du volume, mais augmente progressivement pour devenir même assez importante à l'inflexion, avant de diminuer petit à petit jusqu'à devenir très faible après le point d'inflexion.

En guise d'illustration, considérons le titrage de 100 ml d'une solution d'acide acétique 0.1 molaire par une solution 0.1 molaire de NaOH; on dispose des renseignements suivants

Volumes ml	x_i	90	92	94	96	98	99
рН	y_i	5.714	5.821	5.955	6.14	6.45	6.756
Volumes ml pH	y_i	99.5 7.059	99.9 7.755	100 8.73	100.1 9.702	100.5 10.395	101 10.695
Volumes ml	x_i	102	104	106	108		
рН	y_i	10.994	11.291	11.463	11.583		

Ces données peuvent être visualisées sur le graphique suivant :

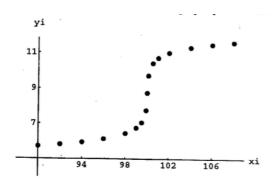


Figure 1

2. Problème mathématique

L'objectif est d'obtenir la forme analytique d'une fonction y=f(x) dont le graphe est une courbe sigmoïde qui ajuste au mieux les données expérimentales.

Les caractéristiques de cette fonction sont les suivantes : elle doit être dérivable et strictement croissante sur \mathbb{R} , admettre deux asymptotes horizontales en $-\infty$ et en $+\infty$, présenter un point d'inflexion avant (resp. après) lequel elle est convexe (resp. concave); en conséquence, la dérivée f', dont

les valeurs sont toujours positives, part de 0 en croissant jusqu'au point d'inflexion, à partir duquel elle décroît vers 0.

Nous allons déterminer une telle fonction f à partir de quelques valeurs caractéristiques des graphiques de f et de f', à savoir

$$\begin{array}{ll} - & m^* = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) \\ - & M^* = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) \\ - & x^* \text{ qui est l'abscisse du point d'inflexion} \\ - & v^* = f'(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f'(x) \end{array}$$

3. Modèle de l'arctangente

Parmi les fonctions élémentaires classiques, l'arctangente possède pour graphe une courbe sigmoïde comprise entre les asymptotes horizontales d'équations $y=-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et $y=\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, avec l'origine comme point d'inflexion, la fonction arctangente étant impaire, tandis que sa dérivée est paire. Il suffit dès lors de faire subir à ce graphe quelques transformations élémentaires pour satisfaire aux caractéristiques des graphiques de f et de f' énoncées ci-dessus.

Analytiquement, on fera appel à la fonction

$$f(x) = a + b \arctan[c(x - d)],$$

où a,b,c et d désignent des paramètres constants positifs qui peuvent être déterminés comme suit :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a - b\frac{\pi}{2} = m^*$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a + b\frac{\pi}{2} = M^*$$

$$f'(x) = \frac{bc}{1 + c^2(x - d)^2} , \quad f''(x) = \frac{-2bc^3(x - d)}{[1 + c^2(x - d)^2]^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x = x^* = d \text{ et } bc = v^*)$$

d'où

$$a = \frac{m^* + M^*}{2}, \quad b = \frac{M^* - m^*}{\pi}, \quad d = x^* \quad \text{et} \quad c = \frac{\pi v^*}{M^* - m^*}$$
$$f(x) = \frac{m^* + M^*}{2} + \frac{M^* - m^*}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{\pi v^*}{M^* - m^*} \left(x - x^* \right) \right].$$

4. Résolution du problème réel

Supposons les données expérimentales connues et rassemblées dans une série statistique double $S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$, avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et $y_1 < y_2 < \dots < y_n$; comme la vitesse de croissance est très faible aux valeurs extrêmes x_1 et x_n , on peut prendre $m^* = y_1$ et $M^* = y_n$.

De plus, il est aisé de construire les taux moyens Δ_i de croissance, à savoir

$$\Delta_i = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$
 , $\Delta_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

et, pour tout $i \in \{2, ..., n-1\}$,

$$\Delta_i = \frac{1}{2} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) ;$$

on détermine alors facilement la valeur x^* de la variable exogène x pour laquelle ces taux moyens cessent de croître pour commencer à décroître, la valeur maximale de ces Δ_i livrant le nombre v^* .

Ainsi, pour l'exemple chimique ci-dessus, on obtient le tableau et le graphique suivants

x_i	Δx_i	y_i	Δy_i	$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$	Δ_i
90		5.714			0.053
92	2	5.821	0.107	0.053	0.060
94	2	5.955	0.134	0.067	0.079
96	2	6.140	0.185	0.092	0.123
98	2	6.450	0.31	0.155	0.230
99	1	6.756	0.306	0.306	0.456
99.5	0.5	7.059	0.303	0.606	1.173
99.9	0.4	7.755	0.696	1.74	5.745
100	0.1	8.730	0.975	9.75	9.735
100.1	0.1	9.702	0.972	9.72	5.726
100.5	0.4	10.395	0.693	1.732	1.162
101	0.5	10.695	0.3	0.6	0.449
102	1	10.994	0.299	0.299	0.223
104	2	11.291	0.297	0.148	0.117
106	2	11.463	0.172	0.086	0.073
108	2	11.583	0.12	0.06	0.06

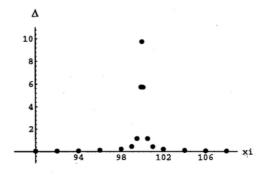


Figure 2

On peut donc prendre

$$m^* = 5.714, \quad M^* = 11.583, \quad x^* = 100, \quad v^* = 9.735$$

ce qui conduit au modèle suivant

$$f(x) = 8.645 + 1.86816 \arctan[5.211(x - 100)],$$

qui ajuste fort bien les données expérimentales ainsi que le montre la figure ci-dessous.

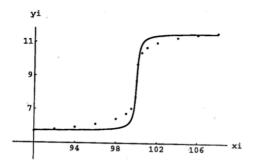


Figure 3

5. Variations et applications

Des croissances décrites par des courbes sigmoïdes se rencontrent fréquemment, par exemple en biologie pour décrire la croissance de certaines plantes, en démographie pour étudier la taille d'une population, en statistique avec les courbes de fréquences cumulées, en gestion pour caractériser l'évolution de flux financiers lors du lancement d'un produit neuf,...[1].

Par ailleurs, signalons la possibilité de modéliser des courbes sigmoïdes à l'aide de fonctions autres que l'arctangente mais qui possèdent les mêmes caractéristiques décrites en fin du deuxième paragraphe.

Citons la fonction logistique

$$f(x) = m^* + \frac{M^* - m^*}{1 + \exp\left[\frac{-4v^*}{M^* - m^*} (x - x^*)\right]}$$

la fonction de Gompertz

$$f(x) = m^* + (M^* - m^*) \exp\left\{-\exp\left[-\frac{ev^*}{M^* - m^*} (x - x^*)\right]\right\}$$

la fonction de Rayleigh

$$f(x) = m^* + (M^* - m^*) \left[1 - \left(\frac{M^* - y^*}{M^* - m^*} \right) \left(\frac{x - x_1}{x^* - x_1} \right)^{\frac{1}{1 + \ln\left(\frac{M^* - y^*}{M^* - m^*}\right)}} \right]$$

où
$$y^* = f(x^*)$$
.

Le lecteur intéressé par la construction de ces fonctions, ainsi que par leurs propriétés principales et la comparaison de ces modèles, trouvera dans [1] une étude plus poussée sur cette question.

Bibliographie

- [1] Bair J., Haesbroeck G., Salengros P., Modélisation de croissances décrites par une courbe sigmoïde, papier de recherche du Gemme, Université de Liège, n°9804, 1998.
- [2] Dagnelie D., Théorie et méthodes statistiques, I : la statistique descriptive et les fondements de l'inférence statistique, Presses Agronomiques de Gembloux, 1973.

- [3] Droesbeke J.J., *Eléments de statistique*, Editions de l'Université de Bruxelles Editions Ellipses, 1997.
- [4] Salengros P., Analyse des eaux : une méthode précise pour la détermination des points d'équivalence, *Tribune de l'eau*, vol. 48, n°574, 1995.
- [5] Salengros P., Analyse des eaux : le dosage volumétrique des chlorures, Bulletin de l'A.B.P.P.C., n°133, 1997, pp. 90–110.

Adresse des auteurs :

G. Haesbroeck

Université de Liège Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales Boulevard du Rectorat 7 Sart-Tilman - B31 4000 Liège

P. Salengros

Institut Supérieur Industriel Haute Ecole de Liège, Verviers, Huy, Gembloux Rue Saint-Victor 3 4500 Huy

La régression linéaire

R. Marquet, Professeur à l'Athénée Royal de Chênée

1. Introduction

L'apparition de ce chapitre totalement inédit dans le projet de programme du 3e degré du secondaire a certainement interpellé de nombreux professeurs. Les questions portent aussi bien sur le contenu que sur l'utilité de cette nouvelle partie du cours de statistique.

D'abord, au sujet du contenu, les notions théoriques de certaines matières des cours de 3e et de 4e telles que : polynômes, produits remarquables, droites, distances, centre de gravité, systèmes, moyenne, variance, écart-type, interpolation linéaire, loi du signe de la fonction du second degré, ont ainsi un prolongement naturel en 5e.

En introduisant le modèle mathématique linéaire, la méthode des moindres carrés utilise de façon pratique des notions nouvelles telles que la théorie de la dérivée première et de l'optimisation d'une fonction, la résolution théorique d'un système de deux équations du premier degré, l'usage des symboles sommatoires et la notion de barycentre.

Ce modèle linéaire peut avoir un prolongement en 6e dans l'étude de l'évolution démographique d'une population en montrant qu'une relation linéaire exprimée en logarithme peut se traduire finalement comme une relation exponentielle.

La justification de l'utilité de ce chapitre est que le modèle linéaire se rencontre facilement dans de nombreux domaines scientifiques ou économiques. On est loin des problèmes de billes de couleur et d'urnes. La présentation de problèmes réels modélisés, sur un certain domaine, par des segments de droites et permettant une interpolation et certaines prévisions doit susciter l'intérêt de l'élève et amener des questions ouvertes sur l'utilisation scientifique et politique des statistiques.

On peut aussi noter que l'investissement mathématique n'est pas énorme. S'il est bien nécessaire de savoir de quoi on parle, après une initiation théorique, on peut passer à l'usage de calculatrices graphiques, ce qui libère du temps pour la discussion citoyenne des problèmes.

Pour illustrer l'introduction de cette matière, un modèle inspiré de l'industrie agro-alimentaire : à quel moment un éleveur a-t-il intérêt de vendre son bétail? Il est évident que c'est à la fin de la phase de croissance de l'animal, vu qu'un nourrissage ultérieur n'amène plus d'augmentation du poids de l'animal et entraîne donc des frais inutiles.

Une étude statistique sur un très grand nombre d'animaux de même race et soumis aux mêmes conditions d'élevage, montre que la phase de croissance correspond à un nuage de points suivant un modèle linéaire. Ainsi, on peut prévoir le poids de l'animal en fonction de son âge et déterminer à l'avance les doses de médicaments, le type de soins à apporter et la date idéale d'abattage, et donc le rendement du troupeau.

Des écarts trop conséquents par rapport au modèle peuvent signaler l'apparition d'une maladie, l'effet inattendu de conditions climatiques, mais aussi permettre la sélection d'éléments particulièrement performants en vue de l'amélioration du cheptel.

2. Caisse à outils pour la régression linéaire

Polynômes, produits remarquables, valeur absolue, équations de droites, distances, centre de gravité et barycentre, système d'équations, déterminants, loi du signe de la fonction du second degré, moyenne pondérée, écart-type, variance, covariance, symbole sommatoire, dérivée première et optimisation.

$$P(x) = ax^{2} + bx + c$$

$$(a+b+c)^{2} = a^{2} + b^{2} + c^{2} + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$|u| = \sqrt{u^{2}}$$

$$y - y_{1} = a(x - x_{1})$$

$$G\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{i}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$$ax^{2} + bx + c \quad \rho, x', x'',$$

le signe de a, sauf à l'intérieur des racines, si elles existent

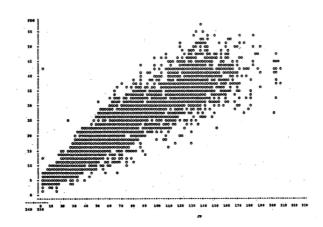
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad cov(x, y) = \overline{xy} - \bar{x}.\bar{y}, \quad var(x) = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \quad \sigma(x) = \sqrt{var(x)}$$

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

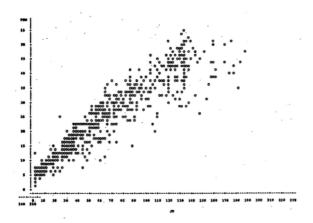
$$\sum_{i=1}^{n} (kx_i + c) = k \sum_{i=1}^{n} x_i + nc$$

3. Données expérimentales

Relation entre le poids (kg) et l'âge le jour de la pesée (JP) pour le matériel global (race Texel, 5787 pesées - Leroy et al. 1993) (matériel global = tous les sexes confondus).



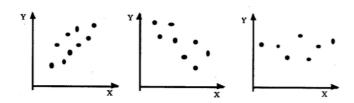
Relation entre le poids (kg) et l'âge le jour de la pesée (JP) pour les naissances de type mâle simple (race Texel - Leroy et al. 1993)



4. Développement théorique

Principe: Il s'agit de trouver l'équation de la droite qui traverse "au mieux" un nuage de points de coordonnées (x,y), "au mieux" signifiant que l'on veut MINIMISER la somme des carrés des écarts entre les valeurs réellement observées et les valeurs prévues par la droite "modèle", ces écarts étant pris parallèlement à l'un des axes de référence.

 ${\bf Intérêt}$: Décrire le phénomène obervé en utilisant un modèle mathématique. Prédire une valeur de y en fonction de x : interpoler et, avec prudence, extrapoler.

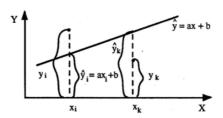


4.1. Droite de regression de y en x: écart des ordonnées

Soient les n couples observés (x_i,y_i) formant le nuage de points. On note l'équation de la droite modèle $\hat{y}=ax+b$, où \hat{y} est la prévision de la

13

variable y. Donc y_i est une valeur observée et \hat{y}_i est la valeur prévue par le modèle et vaut $ax_i + b$. L'erreur de prévision est l'écart $d_i = \hat{y}_i - y_i$ pris parallèlement à l'axe Y.



Ces écarts étant positifs ou négatifs, pour éviter un phénomène de compensation, on considère leurs carrés, et on veut ainsi minimiser la somme des carrés des écarts en ordonnée :

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2$$
$$S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

où (x_i, y_i) sont les couples de valeurs obervées.

Il s'agit de déterminer les valeurs des coefficients a et b pour lesquelles cette somme est minimum. Il faut donc annuler simultanément les deux dérivées partielles de S, par rapport à a et par rapport à b et montrer que les dérivées secondes sont positives. On a ainsi le système de deux équations à deux inconnues a et b:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0\\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

On développe le polynôme du second degré S(a, b):

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a^{2}x_{i}^{2} + b^{2} + y_{i}^{2} + 2abx_{i} - 2ax_{i}y_{i} - 2by_{i})$$

$$S = a^{2}\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} + nb^{2} + \sum_{i=1}^{n} y_{i}^{2} + 2ab\sum_{i=1}^{n} x_{i}$$

$$-2a\sum_{i=1}^{n} x_{i}y_{i} - 2b\sum_{i=1}^{n} y_{i}$$

Le système des dérivées partielles nulles est :

$$\begin{cases} 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0\\ 2nb + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \end{cases}$$

Si l'on suppose (voir ci-après) que la droite recherchée passe par le bary-centre (\bar{x}, \bar{y}) , la fonction à optimiser ne comprend qu'une seule variable (à savoir a). Il est possible de démontrer que ces valeurs pour a et b procurent bien le minimum (absolu) de la fonction S.

Mis sous forme canonique, le système de premier degré en a et b devient :

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i + n.b &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Les solutions de Cramer sont :

$$a = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i} \sum_{i=1}^{n} x_{i} \right|}{\left| \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} \sum_{i=1}^{n} x_{i} \right|} \quad \text{et} \quad b = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} \sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i} \right|}{\left| \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} \sum_{i=1}^{n} y_{i} \right|}}{\left| \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} \sum_{i=1}^{n} x_{i} \right|}$$

Donc,

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

et

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

N.B.: Ce calcul de b se fera plus facilement quand on aura démontré que la droite de régression passe par le point moyen du nuage (\bar{x}, \bar{y}) .

Or,
$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} = \overline{xy} \quad \text{moyenne des produits des coordonnées correspondantes}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \overline{x} \quad \text{moyenne des abscisses}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \overline{y} \quad \text{moyenne des ordonnées}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \overline{x^2} \quad \text{moyenne des carrés des abscisses}$$

On peut alors écrire :

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}.\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Donc, a est le rapport de "la moyenne des produits des coordonnées moins le produit des moyennes des coordonnées" à "la moyenne des carrés des abscisses moins le carré de la moyenne des abscisses".

Or, on note covariance (x, y) la moyenne des produits des coordonnées moins le produit des moyennes des coordonnées :

$$cov(x,y) = \overline{xy} - \bar{x}.\bar{y}$$

et on note variance (x) la moyenne des carrés des abscisses moins le carré de la moyenne des abscisses, c'est-à-dire que

$$var(x) = cov(x, x)$$
 , $var(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$

et on a ainsi le coefficient angulaire de la droite de régression cherchée :

$$a = \frac{cov(x, y)}{var(x)}.$$

a est appelé coefficient de régression de y en x (les écarts sont paralllèles à l'axe Y).

On trouve alors facilement le terme indépendant b si l'on sait que

"la droite de régression passe par le point moyen du nuage (\bar{x}, \bar{y}) ."

En effet, l'équation $S_b' = 0$ donne

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + n.b = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

c'est-à-dire

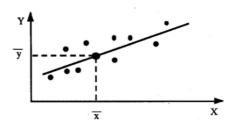
$$a\bar{x} + b = \bar{y},$$

ce qui signifie bien que le point moyen (\bar{x}, \bar{y}) est situé sur la droite de régression d'équation $\hat{y} = ax + b$.

Le calcul de b se fait alors simplement par $b=\bar{y}-a\bar{x},$ la valeur de a étant trouvée précédemment.

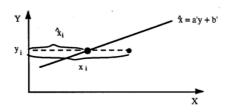
Analytiquement, la droite de régression passant par le point moyen (\bar{x}, \bar{y}) et de coefficient angulaire $\frac{cov(x,y)}{var(x)}$ peut s'écrire

$$y - \bar{y} = \frac{cov(x, y)}{var(x)} (x - \bar{x}).$$



4.2. Droite de régression de x en y: écarts des abscisses

Si on veut minimaliser la somme des carrés des écarts parallèlement à l'axe X, on obtient généralement une autre droite de régression de x en y.



Le modèle est alors

$$\hat{x} = a'y + b'.$$

Par un calcul analogue, on trouve la valeur de a'

$$a' = \frac{cov(x, y)}{var(y)}$$

et on montre que cette droite passe aussi par le point moyen (\bar{x}, \bar{y}) .

Analytiquement, l'équation de cette droite de régression est

$$x - \bar{x} = \frac{cov(x, y)}{var(y)} (y - \bar{y})$$

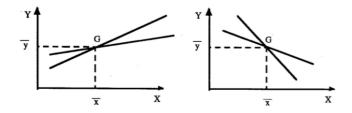
ou

$$y - \bar{y} = \frac{var(y)}{cov(x,y)} (x - \bar{x}),$$

son coefficient angulaire étant $\frac{1}{a'}$.

4.3. Les deux droites de régression

On vient de voir que les deux droites de régression, l'une minimalisant la somme des carrés des écarts selon Y et l'autre selon X, passent par le point moyen du nuage (\bar{x}, \bar{y}) et ont pour coefficient angulaire $\frac{cov(x,y)}{var(x)}$ et $\frac{var(y)}{cov(x,y)}$.



Les variances étant des nombres positifs, on voit que les coefficients angulaires des deux droites ont le même signe : celui de cov(x,y). Les deux droites sont donc inclinées de la même façon, toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes.

L'angle entre les deux droites de régression est fonction de l'intensité de la relation existant entre les deux variables.

4.4. Mesure de la corrélation : coefficient de corrélation linéaire

Lorsque le nuage de points prend une forme allongée en ligne droite, on peut soupçonner l'existence d'une corrélation entre les deux variables mesurées.

Le rapport des coefficients angulaires de deux droites de régression indique l'intensité de la corrélation

$$r^2 = \frac{a}{\frac{1}{a'}} = a.a' = \frac{(cov(x,y))^2}{var(x).var(y)}.$$

Ce nombre r^2 est inférieur à 1.

En effet, considérons, pour une série statistique double, l'expression positive

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (t(x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y}))^2.$$

En développant les carrés, cette expression peut s'écrire sous la forme d'un trinôme du second degré en $t\,$

$$t^2 var(x) - 2t.cov(x,y) + var(y)$$

où le coefficient de t^2 est positif.

Donc, pour que ce trinôme soit positif, il faut que son réalisant soit négatif ou nul. Or,

$$\rho = 4(cov(x, y))^2 - 4var(x).var(y).$$

On a donc

$$(cov(x,y))^2 - var(x).var(y) \le 0$$
 ou $(cov(x,y))^2 \le var(x).var(y)$.

C'est-à-dire que la covariance est toujours, en valeur absolue, inférieure ou égale au produit des écarts-types.

On a donc $r^2 \leq 1$.

On définit alors le coefficient de corrélation linéaire de deux variables par

$$r = \frac{cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$$
 avec $var(x) = \sigma^2(x)$ et $var(y) = \sigma^2(y)$.

On a l'encadrement

$$-1 \leqslant r \leqslant 1$$
.

Ce coefficient de corrélation mesure l'intensité de la relation entre les deux variables observées quand cette relation est approximativement linéaire. Si r est proche de 1 ou de -1, c'est l'indication d'une relation linéaire précise entre les deux variables. Si r est proche de 0, c'est l'indication d'une indépendance entre les variables.

4.5. En pratique

A partir des n couples de valeurs observées (x_i, y_i) , pour trouver les équations des deux droites de régression :

- 1. On calcule les sommes : $\sum_{i=1}^n x_i$; $\sum_{i=1}^n y_i$; $\sum_{i=1}^n x_i^2$; $\sum_{i=1}^n y_i^2$; $\sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- 2. On en déduit les moyennes : \bar{x} ; \bar{y} ; \bar{x}^2 ; \bar{y}^2 ; $\bar{x}\bar{y}$.
- 3. On détermine ainsi le point moyen du nuage : (\bar{x},\bar{y}) où se croisent deux droites.
- 4. On calcule les coefficients angulaires des droites de régression :
 - (a) de y en x (écarts selon les y)

$$a = \frac{cov(x, y)}{var(x)}$$

avec
$$cov(x,y) = \overline{xy} - \overline{x}.\overline{y}$$

= la moyenne des produits moins le produit
des moyennes

avec
$$var(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

= la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne

et, écart-type de
$$x : \sigma(x) = \sqrt{var(x)}$$
.

(b) de x en y (écarts selon les x)

$$\frac{1}{a'} = \frac{var(y)}{cov(x,y)}$$

avec
$$var(y) = \overline{y^2} - \overline{y}^2$$

= la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne

et, écart-type de
$$y : \sigma(y) = \sqrt{var(y)}$$
.

5. On en déduit alors les équations des deux droites de régression :

$$y - \bar{y} = \frac{cov(x, y)}{var(x)} (x - \bar{x})$$
 et $y - \bar{y} = \frac{var(y)}{cov(x, y)} (x - \bar{x}).$

6. On calcule le coefficient de corrélation linéaire des deux variables :

$$r = \frac{cov(x, y)}{\sigma(x).\sigma(y)}.$$

4.6. Expression des coefficients angulaires des deux droites en fonction de r

On sait que r^2 est le rapport des coefficients angulaires des deux droites de régression. On en tire

$$r = \frac{cov(x, y)}{\sigma(x).\sigma(y)}.$$

Pour la première droite, où on minimalise les écarts en ordonnées, le modèle est

$$\hat{y} = ax + b.$$

Et on a trouvé

$$a' = \frac{cov(x, y)}{\sigma^2(y)}.$$

Mais le coefficient angulaire de cette droite est $\frac{1}{a'}$ et il vaut

$$\frac{\sigma^2(y)}{cov(x,y)}$$
.

Donc, on a aussi

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)} = \frac{a}{r^2}.$$

Et l'équation de la seconde droite devient

$$y - \bar{y} = \frac{1}{r} \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)} \cdot (x - \bar{x}).$$

4.7. Remarques

1. Dans les séries chronologiques, il est évident que c'est le temps x qui influence la seconde variable y. Aussi, seule la droite de régression de y en x est importante.

Dans d'autres cas, les deux variables s'influencent mutuellement et il faut alors considérer les deux droites de régression pour conclure s'il y a ou non une relation de dépendance entre les deux variables observées.

- 2. Attention à une interprétation abusive d'un indice de corrélation élevé. Il n'y a pas nécessairement un lien de cause à effet entre les deux variables. Il se peut que leurs variations conjointes proviennent de l'influence d'une troisième variable non étudiée. La prudence s'impose quant aux conclusions sur les rapports entre les deux variables.
- 3. Changement d'unité et changement d'origine : échelle et translation. On a

$$x' = \alpha + \lambda x$$
 et $y' = \beta + \mu y$.

Pour les moyennes, on a

$$\overline{x'} = \alpha + \lambda \bar{x}$$
 et $\overline{y'} = \beta + \mu \bar{y}$.

Pour les variances et la covariance

- 1) le changement d'origine n'a pas d'influence
- 2) le changement d'unité a un effet multiplicateur.

$$var(x') = \lambda^2 var(x)$$
 $var(y') = \mu^2 var(y)$ $cov(x', y') = \lambda \mu cov(x, y)$.

En pratique, lorsque l'on place l'origine au point moyen (\bar{x}, \bar{y}) et que l'on fait la translation

$$x' = x - \bar{x} \quad \text{et} \quad y' = y - \bar{y},$$

il n'y a pas de modification des variances ni de la covariance et, donc, on conserve le coefficient de corrélation linéaire r.

4. Pondération.

Lorsque tous les points n'ont pas la même fréquence, il faut pondérer en minimisant la somme pondérée des carrés des écarts.

5. Variances, covariance et coefficient de corrélation.

On définit la variance comme étant "la moyenne des carrés des écarts à la moyenne"

$$var(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

et on démontre que $var(x) = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

On définit la covariance comme étant "la moyenne des produits des écarts par rapport aux moyennes"

$$cov(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

et on démontre que $cov(x, y) = \overline{xy} - \bar{x}.\bar{y}$.

On définit le carré du coefficient de corrélation comme étant "le rapport des coefficients angulaires des deux droites de régression"

$$r^2 = \frac{(cov(x,y))^2}{var(x)var(y)}.$$

On en tire le coefficient de corrélation

$$r = \frac{cov(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

et on démontre que

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma(x)} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma(y)} \right),$$

ce qui indique que le coefficient de corrélation de deux variables est "la moyenne des produits des variables centrées et réduites".

5. Illustration

A partir de l'exemple cité dans l'introduction, on peut construire le tableau suivant :

Age en mois	kilos de lait/305 j			
x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
22	4589	484	21 058 921	100 958
24	4698	576	22 071 204	112 752
28	4798	784	23 020 804	134 344
32	4842	1024	23 444 964	154 944
36	4897	1296	23 980 609	176 292
38	4876	1444	23 775 376	185 288
40	5038	1600	25 381 444	204 520
220	33 738	7208	162 733 322	1 066 098

Calcul des moyennes effectif : n = 7

1) moyenne des âges

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{220}{7} = 31,4286 \text{ mois}$$

2) moyenne des kilos de lait

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{33728}{7} = 4819,7143 \text{ litres}$$

3) moyenne des carrés des âges

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2}{n} = \frac{7208}{7} = 1029,7143$$

4) moyenne des carrés des kilos de lait

$$\overline{y^2} = \frac{\sum y_i^2}{n} = \frac{162733322}{7} = 23247617, 43$$

5) moyenne des produits des âges et des kilos

$$\overline{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} = \frac{1066098}{7} = 152299,7143.$$

On en déduit

1. les coordonnées du barycentre du nuage

$$G = (\bar{x}, \bar{y}) = (31, 4286 ; 4819, 7143)$$

2. la variance et l'écart-type des âges

$$var(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 1029,7143 - (31,4286)^2 = 41,9592$$

 $\sigma(x) = 65,4776 \text{ mois}$

3. la variance et l'écart-type des kilos de lait

$$var(y) = \overline{y^2} - \overline{y}^2 = 23247617, 43 - (4819, 7143)^2 = 17420, 7926$$

 $\sigma(y) = 131, 9879$ kilos de lait

4. la covariance de l'âge et du nombre de kilos de lait/305 jours

$$cov(x,y) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 1522299,7143 - 31,4286 \cdot 4819,7143$$

= 822,84145

5. l'équation de la droite de régression de y en x. La prévision du nombre de kilos de lait est donnée par

$$\hat{y} = ax + b$$
 avec $a = \frac{cov(x, y)}{var(x)} = \frac{822,84145}{41,952} = 19,6105$

ou

$$\hat{y} - \bar{y} = a(x - \bar{x})$$
 $\bar{y} - 4819,7143 = 19,6105(x - 31,4286)$ $\hat{y} = 19,6105x + 4203,3833$

Le tracé se fait en joignant deux points situés aux extrémités du domaine

$$\begin{array}{c|cccc} x & 20 & 45 \\ \hline y & 4595, 5933 & 5085, 858 \end{array}$$

Contrôle : il passe par G.

6. le coefficient de corrélation linéaire de l'âge et du nombre de kilos de lait

$$r = \frac{cov(x, y)}{\sigma(x).\sigma(y)} = 0,96.$$

6. Usage de la calculatrice graphique

Par exemple, utilisation d'une calculatrice TI81.

1. Introduire la liste des données

$$2^{nd}$$
 STAT DATA Edit

2. Calcul des coefficients de la droite de régression de y en x

$$2^{nd}$$
 STAT CALC $2: \text{Lin Reg}$

 $\hat{y} = bx + a$

$$a = 4203, 28...$$

 $b = 19,6138$

r = 0,9477

3. Liste des divers résultats

VARS xy1) n:72) $\bar{x}:31,42857...$ 3) --4) $\sigma x:6,47759...$ 5) $\bar{y}:4819,71428...$ 6) --7) $\sigma y:134,05$

$$\sum_{i}$$

- 1) $\sum_{i=1}^{n} x_i : 220$ 2) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 : 7208$ 3) $\sum_{i=1}^{n} y_i : 33738$
- 4) $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 : 162733322$
- 5) $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i := 1066098$

LR

- 1) a:4203,28...
- 2) b:19,6138...
- 3) r:0,9477...
- 4) Reg EQ: 4203, 280156 + 19, 61381323x
- 4. Graphiques

$$2^{nd}$$
 STAT DRAW

- 1) histogramme
- 2) nuage de points SCATTER
- 3) xy Line
- 4) on trace en plus la droite de régression en l'entrant par y = 1, alors les deux graphiques se superposent et on voit la droite de régression traversant le nuage de points.

Exploitation

Le modèle mathématique étant établi, on peut

- 1) interpoler.
- 2) repérer les cas "bizarres" à analyser.
- 3) prévoir une situation ultérieure.
- 4) comparer deux situations.

Bibliographie

Azoulay E., Cohen D. - Statistique en pharmacie S.E.D.E.S. 1969.

Dagnelie P. - Théorie et méthodes statistiques, applications agronomiques. Presses agronomiques de Gembloux. 1973.

Darmont M. - Notes de cours de statistique. Enseignement supérieur économique de Jemeppe. 1997.

Hagège M. - Initiation à la statistique. O.C.D.L. 1966.

Labrousse C. - Statistique de l'économie. Dunod. 1972.

Leroy P, Farnir F. - Méthodes statistiques en médecine vétérinaire. ULg. 1997-1998.

Masiéri W. - Statistique et calcul des probabilités. Sirey. 1982.

Monfort F. - Eléments du calcul des probabilités et des méthodes statistiques. ULg. 1970.

Monjallon A. - Introduction à la méthode statistique. Vuibert. 1961.

Adresse de l'auteur :

René MARQUET
Rue des Ronces 7

4130 Tilff

Bibliographie

D. Moens.

Statistique descriptive par Maurice Lethielleux, collection "Express", DUNOD, 1998, 124 pages.

Cette petite brochure fait partie d'une collection qui se veut synthétique : la révision à grande vitesse. Dans ce contexte, elle est rédigée à l'intention des étudiants des facs économiques en France. Elle présente un bon aperçu de la statistique descriptive en 25 fiches pédagogiques. Chaque fiche comporte quatre rubriques : objectifs, l'essentiel à savoir, compléments, application. Au sommaire : généralités, les caractéristiques de tendance centrale ou de position, les caractéristiques de dispersion, indices, les séries statistiques a deux caractères, les séries chronologiques.

Bien que cette excellente brochure soit destinée aux étudiants français du supérieur, elle pourrait inspirer un cours de statistique dans notre secondaire. On va à l'essentiel, mais sans oublier les questions que le citoyen devrait se poser, par exemple : comment calcule-t-on une marge d'erreur lors de sondages? L'auteur parle de l'indice des prix à la consommation, du DOW JONES, de la prévision, ... La mise en pages et les graphiques sont clairs, on y découvre même, bien que très succinctement, des extraits d'utilisation d'un tableur. Bref, un petit livre plein de ressources pour concevoir le chapitre de statistique, à partir de la troisième.

A la recherche de la fonction de Strähle

Ch. Félix, Suisse

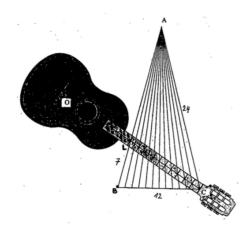
Mots- $cl\acute{e}$: fonction homographique, projection centrale, rapport anharmonique, ajustement, frette de guitare.

Dans un article précédent (*Mathématique et Pédagogie* n° 107), j'ai expliqué l'évolution des méthodes de construction des guitares et autres instruments de même type, en donnant les différentes erreurs qui en résultent si on compare les gammes obtenues et la gamme tempérée.

En nous basant sur la notion de projection centrale, nous allons déterminer une fonction "de Strähle" permettant de calculer la position des frettes sur la guitare.

Rappel de la construction de Strähle (1743)

On trace un segment BC de longueur 12 divisé en 12 intervalles égaux. On trace ensuite des segments AB et AC égaux à 24. On joint A aux 11 points de partage de BC. On place L sur AB de sorte que BL soit égal à 7. Puis on trace la droite CL et le point O tels que LO soit égal à CL. Si CO est la corde de la note de base, alors LO correspond à l'octave. Strähle proposa de considérer les 11 points d'intersection de CL avec les 11 rayons issus de A comme les positions des frettes donnant les demi-tons.



La fonction de Strähle est homographique

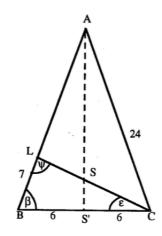
Dans l'article précédent, nous avons déterminé les mesures suivantes :

$$\beta = 75,52^{\circ} \quad \varepsilon = 33,47^{\circ} \\ LC = 12,288 \quad \psi = 71,01^{\circ}$$

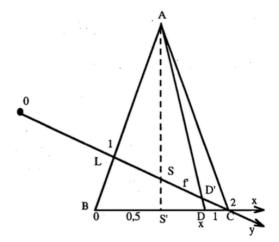
Par conséquent :

$$SC = \frac{6}{\cos \varepsilon} = 7,193$$

et
$$LS = 12,288 - 7,193 = 5,095$$



Plaçons sur BC un axe x de manière que les graduations 0 et 1 coïncident respectivement avec B et C et sur LC un axe y de manière que les graduations 1 et 2 coïncident respectivement avec L et C.



Déterminons la coordonnée de S sur y

$$\frac{LS}{LC} = \frac{5,095}{12,288} = 0,4146.$$

D'où la coordonnée de S=1,4146.

1) Essayons de déterminer la courbe \mathcal{C} qui contient les points (0;1), (1;2) et (0,5;1,4146).

Considérons une droite quelconque AD où D est sur l'axe x. Soit D' le point d'intersection de cette droite et de l'axe y. Appelons x la coordonnée de D et y la coordonnée de D' sur chacun des axes. Par la conservation du rapport anharmonique $(^1)$, nous obtenons :

$$\frac{DS'}{DB}:\frac{CS'}{CB}=\frac{D'S}{D'L}:\frac{CS}{CL}$$

ou encore

$$\frac{0,5-x}{0-x}:\frac{0,5-1}{0-1}=\frac{1,4146-y}{1-y}:\frac{1,4146-2}{1-2}.$$

Explicitons y comme fonction de x:

$$2(0,5-x)(1-y) = -x(1,4146-y)\frac{1}{0,5854}$$

$$1 - 2x - y + 2xy = -\frac{1,4146x}{0,5854} + \frac{xy}{0,5854}$$

$$\left(2 - \frac{1}{0,5854}\right)xy - y = \left(2 - \frac{1,4146}{0,5854}\right)x - 1$$

$$[(1,1708-1)x - 0,5854]y = (1,1708-1,4146)x - 0,5854$$

$$y = \frac{0,2438x + 0,5854}{-0,1708x + 0,5854}$$

ou, en multipliant les deux termes de la fraction par 40,9976 :

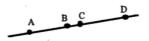
$$y = \frac{9,9952x + 24}{-7,0024x + 24}$$

et finalement (en arrondissant):

$$y = \frac{10x + 24}{-7x + 24} \, .$$

1. Et ant donné 4 points A,B,C,D sur un axe, dans un ordre quel conque, on appelle le rapport anharmonique (ou birapport) le nombre r:

$$r = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}, \text{ noté } (ABCD)$$



ici $r = \frac{5}{1,5} : \frac{9}{5,5} \cong 2,04.$

Propriété : le rapport anharmonique est conservé par projection centrale.

Il s'agit de la fonction homographique, dite de "Strähle".

2) Autre ajustement.

Ajustons maintenant la courbe en tenant compte de la valeur exacte, au sens de la gamme tempérée, pour sol bémol; les trois points utilisés sont alors : (0;1), (1;2) et $(0,5;\sqrt{2})$.

Soit $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ la fonction homographique. Pour x=0, nous avons $\frac{b}{d}=1,$ d'où b=d.

Les autres conditions sont

$$\begin{cases} \frac{0,5a+b}{0,5c+b} = \sqrt{2} \\ \frac{a+b}{c+b} = 2 \end{cases}$$
 ou bien
$$\begin{cases} \frac{a+2b}{c+2b} = \sqrt{2} \\ \frac{a+b}{c+b} = 2. \end{cases}$$

Posons $\frac{b}{a} = b'$ et $\frac{c}{a} = c'$, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{1+2b'}{c'+2b'} = \sqrt{2} \\ \frac{1+b'}{c'+b'} = 2 \end{cases}$$
 ou bien
$$\begin{cases} 1+2b' = \sqrt{2}(c'+2b') \\ 1+b' = 2(c'+b') \end{cases}$$

De la deuxième équation, nous tirons b' = 1 - 2c'. En remplaçant dans la première équation, nous obtenons

$$1 + 2(1 - 2c') = \sqrt{2}(c' + 2(1 - 2c'))$$
$$c' = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

et $b' = 1 + \sqrt{2}$.

Pour $a = 2 - \sqrt{2}$, on obtient $b = \sqrt{2}$ et $c = 1 - \sqrt{2}$ et

$$y = \frac{(2 - \sqrt{2})x + \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})x + \sqrt{2}}.$$

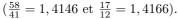
Remplaçons $\sqrt{2}$ par diverses valeurs approchées

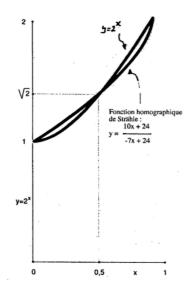
$$\sqrt{2} = 1,4142$$
 fournit $y = \frac{9,9411x + 24}{-7,0294x + 24}$

$$\sqrt{2} = \frac{17}{12} \text{ fournit } y = \frac{7x + 17}{-5x + 17} \cong \frac{10x + 24}{-7x + 24}$$

$$\text{C'est Strähle!!}$$

$$\sqrt{2} = \frac{58}{41} \text{ fournit } y = \frac{24x + 58}{-17x + 58} = \frac{9,9310x + 24}{-7,0345x + 24}$$





Graphe de la fonction homogaphique approchant la fonction $y=2^x$ sur l'intervalle des nombres x compris entre 0 et 1 et l'égalant pour les valeurs de $x:0,\,1/2$ et 1.

Comme le montre le tableau ci-dessous, la construction de Strähle se révèle être une très bonne construction.

Longueur de la corde

		Strähle	Gamme tempérée	$10^{5}x$
		$y = \frac{10x + 24}{-7x + 24}$	$y = 2^x$	Log erreur (2)
Do	$x = \frac{12}{12}$	2	2	0
$R\acute{e}_{\flat}$	$x = \frac{11}{12}$	1,88626	1,88775	-34
Ré	$x = \frac{10}{12}$	1,77981	1,78180	-48
$\mathrm{Mi}_{lat}$	$x = \frac{9}{12}$	1,68000	1,68179	-47
Mi	$x = \frac{8}{12}$	1,58621	1,58740	-33
Fa	$x = \frac{7}{12}$	1,49791	1,49831	-12
Sol_{\flat}	$x = \frac{6}{12}$	1,41463	$1,41421(\sqrt{2})$	13
Sol	$x = \frac{5}{12}$	1,33597	1,33484	36
La _b	$x = \frac{4}{12}$	1,26154	1,25992	56
La	$x = \frac{3}{12}$	1,19101	1,18921	66
$\operatorname{Si}_{\flat}$	$x = \frac{2}{12}$	1,12409	1,12246	63
Si	$x = \frac{1}{12}$	1,06050	1,05946	43
do	x = 0	1	1	0

Quant à savoir comment Strähle a eu l'idée de cette construction, c'est là une autre question \dots

Adresse de l'auteur :

Charles FELIX

La Perche

CH-2902 Fontenais, Suisse

35

(2) Calcul de l'erreur :

$$10^5 \times \log \left[\frac{\text{Str\"{a}hle}}{\text{temp\'er\'{e}e}} \right]$$

Le produit sur le cercle (suite)

J. G. Segers,

 $Mots\text{-}cl\acute{e}$: loi de composition sur un cercle, groupe commutatif, plan de Gauss.

Avec l'accord de M. Guido Lasters, je poursuis et approfondis ses réflexions présentées dans $Math\'{e}matique$ et $P\'{e}dagogie$ n°114, pp. 25 à 29. La figure g\'{e}ométrique sous-jacente au produit défini est un cercle C et une droite extérieure H situés dans un plan projectif P. H rappelle le mot "horizon", car H est l'image de la droite à l'infini du plan euclidien. Deux droites se coupant sur H sont les images de deux droites parallèles du plan euclidien.

Avant de poursuivre, corrigeons les petites erreurs du texte publié. — Dans la figure 4, le numéro V figure deux fois. Il faut lire VI pour la droite passant par a et $b \cdot c$. Ici, la droite de Pascal (1623-1662) sert en même temps de droite H. Il serait préférable que H soit extérieure à C, car sinon le statut des points de rencontre de H et C est pour le moins ambigu par rapport au calcul défini. Ce seraient des absorbants. — Dans le problème n°I entamé au bas de la p. 27, la dernière ligne comporte une coquille : le premier membre de la 3ème égalité comprend une dernière lettre s qu'il suffit de supprimer.

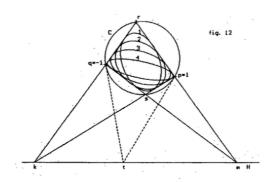
La construction de la fig. 7, p. 28 mérite quelques explications. Elle s'est faite comme suit : on a choisi un point $p \in C$ quelconque; on a tracé la tangente en p à C qui coupe H en un point t. Partant de t, on a mené l'autre tangente touchant C en un point q. On a attribué à p la valeur 1, ce qui veut dire selon la définition du produit, si une droite quelconque passant par t coupe C en deux points a et b, le produit des valeurs qui leur sont attribuées vaut 1; les valeurs a et b sont réciproques, $b = a^{-1}$. Pour q, on a donc $q^2 = 1$, ce qui implique q = -1, puisque le nombre +1 est attribué à p.

On constate ainsi que C, · est un groupe abélien ou commutatif. En effet, tel que le produit a été défini, il s'agit d'une loi de composition interne définie entre deux points quelconques de C; le produit est associatif selon la démonstration de la figure 4, il existe un élément neutre, p=1, unique bien entendu, et tout élément a un élément inverse, unique. De plus, la commutativité est comprise dans la définition.

Toujours dans la fig. 7, on a tracé la droite pq qui coupe H en un point m. Si une droite passant par m coupe C en deux points a et b, le produit des

nombres a et b vaut $1\cdot (-1)=-1$. Il s'ensuit que pour les deux tangentes mr et ms, on obtient $r^2=s^2=-1$, donc r=i et s=-i (ou le contraire, ce qui ne change rien). Le produit engendré par la droite qr vaut $-1\cdot i=-i$, et celui engendré par sp vaut $-i\cdot 1=-i$, ces deux droites doivent donc se couper sur H. De même, les droites qs et rp engendrent les produits respectifs $-1\cdot (-i)=i$ et $i\cdot 1=i$, elles se coupent également sur H. Le problème a donc été résolu, mais semblait n'avoir qu'une seule solution. – Remarquons que l'on avait tracé la droite rs. Elle engendre le produit $i\cdot (-i)=1$, elle passe donc par t. Les nombres i et -i sont en effet à la fois opposés et réciproques. Dans le corps des complexes, c'est la seule paire de nombres ayant ces deux propriétés.

Retournons au point de départ du problème et suivons la construction en fig. 12.

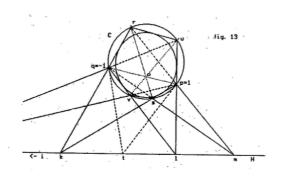


p a la valeur 1, q a la valeur -1. Pour trouver le quadrilatère cherché, il suffit de construire deux points dont les valeurs soient opposées. - Soit $r \in C$ **quelconque**, et traçons les droites rp et rq rencontrant H respectivement en m et en k et représentant les produits $r \cdot 1 = r$ et $r \cdot (-1) = -r$. La droite mq représente le produit r. Elle coupe C au point s pour lequel nous avons $r = -1 \cdot s$, soit s = -r. La droite kp donne le même résultat; elle coupe C au même point s. Les côtés opposés du quadrilatère prqs se coupent donc deux à deux sur H. Le point de départ r étant quelconque, le problème a une infinité de solutions.

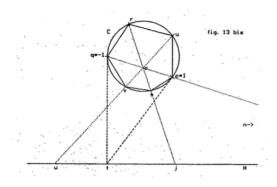
La démonstration de l'unicité du point s est purement algébrique. Il est difficile de désigner le point de rencontre de mq et C par s et de démontrer ensuite géométriquement que kp coupe C au même point. Il est plus facile de désigner par s le point d'intersection de mq et kp et de démontrer ensuite que

s appartient au cercle C. En effet, au lieu de considérer le quadrilatère prqs, remplaçons p et q par des segments infiniment petits pp' et qq' des tangentes pt et qt. Le quadrilatère devient alors un hexagone pp'rqq's satisfaisant au théorème de Pascal: pp' et qq' se coupent en t sur H, p'r et qs se coupent en m sur qs se coupent en qs sur qs sur qs sur qs se coupent en qs sur qs

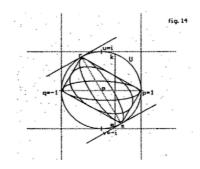
Cette solution du problème I permet d'en résoudre d'autres, par exemple tracer un hexagone inscrit dont les côtés opposés se coupent en H. Il est évident qu'il suffit de compléter la fig. 12 par une autre paire de points $\{u,v\}\subset C$ dont les valeurs soient opposées.



En étudiant la fig. 13, on constate que les côtés ru et sv se coupent sur H; en effet, les produits $r \cdot u$ et $s \cdot v$ sont égaux : $s \cdot v = (-r) \cdot (-u) = r \cdot u$ selon leur construction. On trouve donc facilement un hexagone, solution du problème posé. Mais on constate aussi que les diagonales pq, rs, uv sont concourantes en un point o, ce qui entraı̂ne d'après Brianchon qu'une conique peut y être inscrite.



Pour justifier ces constatations, il suffit de remonter au plan de Gauss (1777-1855) G (fig. 14) dont P est une image.



Pour inscrire dans le cercle unitaire U un quadrilatère à côtés opposés parallèles, il suffit de tracer un diamètre ; il relie deux points ou deux nombres opposés r et s=-r. Si on trace le quadrilatère prqs, on constate qu'il s'agit d'un rectangle dans lequel on peut inscrire autant d'ellipses que l'on veut. Le quadrilatère comprenant i et -i est un carré – cas particulier – dans lequel on peut inscrire un cercle, en plus des ellipses. – Par contre, deux nombres réciproques de U sont des complexes conjugués, $k=a+b\cdot i$ et $m=a-b\cdot i=k^{-1}$, situés sur une droite parallèle à la tangente en p=1, ce qui sur C correspond à une droite passant par t. – En fig. 14, les diagonales d'un hexagone inscrit à côtés opposés parallèles sont des diamètres, elles concourent au centre ; on peut y inscrire une conique selon Brianchon, elle sera unique. L'image de cet hexagone et de l'ellipse y inscrite se retrouve en fig. 13. – Les ellipses de fig. 12 sont inscrites dans le quadrilatère prqs et non dans l'hexagone ; pour cela, la conique devrait passer par p et par q en y

touchant les tangentes. On peut s'en approcher en construisant des ellipses de plus en plus minces dont les extrémités du grand axe se rapprochent de plus en plus de p et de q. Sur la fig. 12, on trouvera le début de cette progression.

Pour montrer que le point o en fig. 13 est l'image projective du centre de U en fig. 14, il suffit de comparer les **birapports** sur les diagonales de l'hexagone purqvs reproduit en fig. 13 bis avec ceux des diamètres correspondants en fig. 14. On trouve par le calcul que

sur U (fig. 14) on a évidemment

$$BR(q, p, o, \infty) = [(q - o)/(p - o)] : [(q - \infty)/(p - \infty)]$$

= $(q - o)/(p - o) = -1/1 = -1$

sur C (fig. 13 bis) on trouve

$$BR(q, p, o, n) = BR(r, s, o, j) = BR(u, v, o, w) = -1,$$

alors qu'ici, o n'est pas le milieu de pq. Ainsi, on voit qu'en effet, les cercles fig. 13 et 14 sont des images projectives l'une de l'autre.

En ce qui concerne la fig. 13, constatons que l'hexagone est inscrit dans C et circonscrit à une autre conique. Cela rappelle un théorème de Poncelet (1788-1867) : Etant données deux coniques situées l'une (I) à l'intérieur de l'autre (E), partons d'un point de E et traçons une tangente à I prolongée jusqu'à E; répétons cette construction à partir des points successifs trouvés sur E. Si ainsi on retombe sur le point de départ, c'est-à-dire si ainsi on construit un polygone fermé, alors un polygone fermé ex-inscrit du même nombre de côtés peut être tracé en partant de n'importe quel point de E.

Adresse de l'auteur :

Jack G. SEGERS Rue Hocheporte 107/063 4000 Liège 1

"La conique enfin laconique" Triste sort ou naufrage?

R. Graas, Inspecteur honoraire

Une fois encore, un titre "volé" (voir *Mathématique et Pédagogie*, n°116)! Et à Papy, cette fois! (¹)

Le Professeur Ballieu (UCL) disait que l'algèbre financière (élémentaire s'entend) était le martyre de la progression géométrique.

Pour la géométrie analytique (belge!), on peut bien aussi parler de martyre. Que doivent penser, dans l'éternité mathématique, les Professeurs Godeaux (ULg), Libois (ULB) et Delmez (UCL) – pour ne citer que trois noms – de ce qu'est devenue maintenant l'étude des coniques chez nous? Y a-t-il un sens à parler de polarité en référentiel orthonormé? (²) Le calcul matriciel utilisé ne risque-t-il pas d'être un simple manteau de Noé?

Les trois courbes du second degré gardent, dans des domaines très divers, une importance de haut niveau. Sous leur forme simple en équation : mécanique des solides et des fluides, résistance des matériaux, statistique, astronomie, . . .

Leur présentation unifiée dans l'équation générale du second degré permettait – avec les lieux et les faisceaux – d'innombrables exercices, parfois fort ingénieux dans leur brièveté (comme ceux du Professeur Godeaux lorsqu'il interrogeait pour l'admission à l'Ecole militaire).

La part des coordonnées polaires et des courbes grecques – aux applications techniques parfois bien inattendues $\binom{3}{-}$ n'y jouait qu'un trop maigre rôle.

Dans cette ligne de réflexion, comment ne pas évoquer le livre, déjà ancien, de Marcel Boll : "Le mystère des nombres et des formes" (4)?

^{1.} Merci à lui qui a bien voulu m'en envoyer un exemplaire [C.B.P.M. - BXL - 1968] qui révèle un autre monde \dots

^{2.} Quoique . . . un souvenir – que je n'ai pu contrôler – parle dans ce sens. Timoshenko, dans sa "Résistance des matériaux" (note en bas de page) applique ceci au noyau central dans une section de béton armé.

^{3.} Réglage par spirales d'instruments de géodésie ; écoulement de l'air le long des ailes d'avion ; brassage de la laine dans des bains ; problèmes d'acoustique dans des cavités ; structures de cristaux ; . . .

Larousse, Paris, 1941.

Les programmes actuels ne semblent plus être carcans. C'est peut-être une chance pour l'avenir en fonction d'une utilisation de l'Analyse infinitésimale et du calcul matriciel, surtout si on étend le domaine à l'espace à trois dimensions. Les potaches pourraient s'émerveiller sans trop de frais et avec grand profit pour les futurs scientifiques et techniciens. Et ceci n'aurait pas été vaine polémique . . .

Adresse de l'auteur :

Robert GRAAS
Rue de Gembloux 35
5002 Saint-Servais

UNICUIQUE SUUM ...

Des échos verbeux et écrits signalent que mes courts articles sont lus (peut-être vu leur brièveté...).

C'est le cas pour "Les Enfants d'Olympie" (n°116). Si Les olympiades sont "centralisées" à l'U.L.B. du fait de leurs Présidents successifs, elles demeurent une organisation de la S.B.P.M.ef qui la gère de façon exemplaire, chacun en conviendra.

R. GRASS

Utilisations du calcul différentiel et intégral en gestion de stocks

D. Justens, HEFF-Cooremans Bruxelles Université de Liège

Mots-clé: gestion de stocks; modélisation; intégration; limites.

1. Introduction

La gestion de stocks est l'un de ces domaines en économie et en gestion qui a donné naissance depuis quarante ans à une littérature des plus abondantes. Ceci s'explique et se comprend aisément, la multiplicité des situations rencontrées induisant forcément une grande diversité de modèles. Les plus souples et les plus facilement adaptables à une multitude de situations concrètes sont néanmoins très loin de se révéler universels. C'est cette localité dans l'espace, dans le temps et cette limitation des conditions d'utilisation qui nous intéressent. Nous tentons de montrer comment on peut passer, mathématiquement, d'un ensemble d'hypothèses à un autre, voisin, mais convenant à une situation différente. Plusieurs applications du calcul différentiel et intégral apparaissent naturellement et nous pensons que ce champ d'illustrations méritait d'être exploité.

Le problème est loin d'être trivial : la transcription en langage mathématique d'hypothèses réalistes pose souvent problème : complexité du modèle obtenu, non-unicité ou non-existence des solutions, inadaptation de la solution mathématique au problème économique, nécessité d'hypothèses simplificatrices non contrôlables sont quelques-uns des problèmes auxquels on se trouve confronté. Trop souvent encore, le recours à des techniques usuelles (dites confirmées) masque l'absence d'esprit critique relativement au modèle utilisé ou la volonté (absurde actuellement étant donné les logiciels disponibles) d'obtenir à tout prix une solution explicite, jugée plus esthétique. En économie, la seule esthétique acceptable est l'efficacité et l'adéquation.

2. Choix du contexte

Lorsque l'on se trouve confronté à un problème de gestion de stocks, il convient avant tout de déterminer dans quelle mesure la constitution du

stock s'avère indispensable. Les sociétés spécialisées dans le transport rapide se multiplient et, dans beaucoup de cas, la solution du *just in time* (flux tendus) est parfaitement envisageable.

Dès que le recours à la constitution d'un stock se justifie, il faut situer le contexte dans lequel on travaille : court terme ou long terme, déterminisme ou stochasticité. Le choix du modèle en dépend, sa complexité également. Le modèle à long terme doit inclure la notion d'actualisation des flux financiers; le modèle aléatoire présente généralement un plus grand nombre de variables et s'appuie sur des hypothèses non vérifiables comme le type de distribution de probabilité à utiliser. Il convient à chaque fois de critiquer tous les choix effectués, toutes les hypothèses avancées, et de mesurer leur impact sur la solution numérique retenue. Nous nous limitons au contexte déterministe dans ce premier article. Une publication ultérieure abordera le même problème en univers aléatoire.

Nous rappelons en quelques lignes les principaux éléments du modèle dit de Wilson (1916) qui figure en bonne place dans tous les manuels de management ou de gestion industrielle. Le modèle a été développé et modifié à de nombreuses reprises depuis. Nous en donnons une critique objective avant de montrer comment on peut l'adapter de manière à accroître son domaine de validité en tenant compte de l'actualisation.

3. Le modèle EOQ: Economic order quantity

3.1. Considérations théoriques

Malgré la présence (et la description souvent complète) du modèle dans tous les manuels, on constate une anarchie complète en matière de notations. Nous suivons ici l'ouvrage de Phillips et all. ([4]).

Considérons la gestion de l'approvisionnement et de l'écoulement d'un seul produit et notons T le temps $id\acute{e}al$ entre deux commandes successives. On fait ici l'hypothèse que le taux de demande (par unité de temps) dudit produit est constant (écoulement linéaire) et connu : d. La commande sur [0,T] vaut alors : Q=d.T. On cherche à déterminer la quantité à commander idéale, c'est-à-dire, par définition, celle occasionnant un coût global minimal. Deux types de coûts sont pris en considération : le coût par commande, constituant un flux impulsionnel (discret) supposé indépendant de la quantité commandée et noté a et les coûts de stockage dépendant explici-

tement de la quantité détenue en magasin et du temps (travail par densité de coût et donc continuité). Notons h le coût unitaire de stockage par unité de temps. L'hypothèse simplificatrice d'un taux de demande constant permet de travailler avec un $stock\ moyen$ égal à $\frac{Q}{2}$ (linéarité!). Sous ces hypothèses, le coût total par cycle de commande est :

$$C_c = a + \frac{Q}{2}.h.T$$

ou encore:

$$C_c = a + \frac{Q}{2}.h.\frac{Q}{d}$$

On vérifie que la résolution de $\frac{dC_c}{dQ}=0$ admet pour solution Q=0 dont l'absurdité n'échappe à personne. L'erreur n'est pas dans la mise en équation mais dans le raisonnement préalable. En travaillant par cycle, on tolère à la limite l'absence d'activité, le cycle de durée nulle, dont le coût de stockage (0) est inférieur à tout autre forcément strictement positif. Remarquons aussi que pour cette présentation, l'unité de temps choisie devient une variable implicite n'apparaissant pas dans la mise en équation. Travailler en horizon infini (avec ou sans facteur d'actualisation) conduit à un coût total non borné (sans actualisation) ou proportionnel au précédent (actualisation) et ne permet pas davantage l'obtention d'un résultat utilisable. Une solution au problème consiste à travailler avec le coût par unité de temps. On a alors (division par T et donc prise en compte de la variable implicite) :

$$C_t = \frac{C_c}{T} = \frac{a}{T} + \frac{Q}{2}.h$$

En remplaçant T par sa valeur dépendant de Q, on arrive à :

$$C_t = a.\frac{d}{Q} + \frac{Q}{2}.h$$

Cette représentation du coût total par unité n'est valable qu'en moyenne : une notion à définir dans le cas présent. Nous reviendrons plus loin sur la notion de stock moyen. On calcule $\frac{dC_t}{dQ}=0$ pour obtenir :

$$Q = \sqrt{\frac{2ad}{h}}$$

et

$$T = \sqrt{\frac{2a}{dh}}$$

Cette solution et son caractère *logique* sont susceptibles de plusieurs interprétations. Première constatation, la présence de la racine carrée est signe de robustesse du modèle. Les erreurs d'estimations sur les paramètres a, d, hse répercutent de manière atténuée sur la solution (erreur relative deux fois plus petite en première approximation). Il est intéressant de donner de la solution une présentation géométrique, et nous le ferons au paragraphe suivant dans le cadre d'un exemple numérique. Les coûts de commande par unité de temps sont représentés par une branche d'hyperbole, les frais de gestion par une droite de pente $\frac{h}{2}$. La solution mathématique correspond à l'intersection des deux courbes (égalité de coûts et donc situation d'équilibre). La solution retenue économiquement est généralement différente de la solution théorique. L'observation du graphe permet de constater une certaine asymétrie. Lorsque l'on retient la solution économiquement réaliste, il est souvent préférable de procéder à l'arrondissement par excès. Nous justifions ce point ultérieurement. On peut s'intéresser également au facteur 2 apparaissant dans la solution. Il est la conséquence de l'hypothèse d'écoulement uniforme.

3.2. La notion de stock moyen

Pour travailler rationnellement avec la notion de stock $moyen\ S_M$, il convient de le définir à partir de l'égalité des coûts de gestion par cycle. Notons $S_R(t)$ la fonction stock résiduel et U(q) le coût unitaire de stockage associé à un niveau q de stock. On a bien sûr $S_R(0)=Q,\ S_R(T)=0$ et $\frac{dS_R(t)}{dt}\leqslant 0$ de manière à travailler dans les conditions définies plus haut. Pour équilibrer les représentations, on doit avoir en travaillant continûment :

$$\int_0^T S_R(t)U(S_R(t))dt = \int_0^T S_MU(S_M)dt$$

On en tire:

$$S_M = \frac{\int_0^T S_R(t)U(S_R(t))dt}{U(S_M).T}$$

Dans le cas de l'écoulement linéaire et du coût unitaire constant, on retrouve le rapport $\frac{Q}{2}$. Le problème est plus complexe dans le cas du coût unitaire variable. Envisageons à présent un écoulement quadratique. Celui-ci correspond à la situation du produit à forte demande initiale diminuant progressivement (titres du hit-parade ou best-sellers en littérature).

Mathématiquement, on peut poser:

$$S_R(t) = \frac{Q}{T^2} \cdot (t - T)^2$$

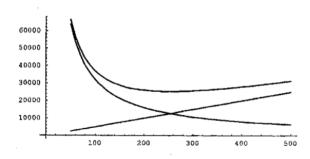
Le stock moyen devient alors sous hypothèse de coût unitaire constant :

$$S_M = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Q}{T^2} (t - T)^2 dt = \frac{Q}{3}$$

On vérifie que pour ce type de produits, les commandes sont plus rares et plus importantes. On comprend pourquoi les grandes surfaces les proposent à l'exclusion de tout autre à leur clientèle.

3.3. Un exemple numérique

Considérons la gestion en approvisionnement de rouleaux de papier d'une grande imprimerie travaillant sur commande et dont le carnet est plein pour les prochains mois (ceci justifiant le contexte déterministe). La consommation en rouleaux par semaine est de 320 (travail au maximum des possibilités). La livraison se monte à 10 000 (frais de livraison, comptabilité et manipulation) et le coût de stockage par rouleau par semaine (incluant l'amortissement du local, l'assurance et l'immobilisation financière) se monte à 100.



En cas d'écoulement uniforme, on détermine :

$$Q = \sqrt{\frac{2.320.10000}{100}} = 252.98$$

On constate que les livraisons se font idéalement après un intervalle de temps irrationnel (T de l'ordre de 0.8). Il y a donc un écart entre la solution mathématique optimale et la solution économiquement réalisable. De plus, l'écoulement se fait en principe à raison de 8 heures par jour et de 5 jours par semaine, ce qui rend l'hypothèse de linéarité assez peu réaliste. Les estimations de coût peuvent se faire sur base de jours ouvrables, ce qui dispense le gestionnaire de tenir compte des week-ends. L'hypothèse d'un écoulement uniforme conduit à un réapprovisionnement tous les 4 jours. La commande est alors de Q=256 rouleaux. Le coût réel sur 20 jours (4 semaines et 5 livraisons; on ne tient pas compte des week-ends) est donné par :

 $C = 50000 + \frac{256}{2}.100.4 = 101200$

Le minimum de la fonction coût total par unité de temps s'obtient théoriquement en :

$$C_m = \sqrt{2adh} = 25298.22$$

Sur un horizon de 4 semaines, on arrive à 101193. Dans le cas de cet exemple (bien choisi) l'écart entre la solution mathématique et la solution économiquement réalisable est acceptable. Voyons ce qui se passe dans le cas général.

En limitant à l'ordre 2 le développement en série de Taylor au voisinage de la solution optimale, on obtient comme estimation de coût :

$$C_{ap} = C_m + \frac{h}{Q_{opt}} \cdot \frac{\Delta Q^2}{2}$$

où ΔQ représente l'écart entre la solution mathématique et la solution économiquement réalisable. On vérifie que le reste est de l'ordre de $\frac{(\Delta Q)^3}{Q_{opt}^2}$. Le signe de la dérivée d'ordre 3 nous permet de mesurer l'ordre de grandeur de l'asymétrie et confirme ce que l'on avait observé empiriquement au niveau de l'erreur d'arrondi. Au pire, dans le cas qui nous occupe, l'erreur maximale correspond à la consommation de papier d'une demi-journée, soit 32 rouleaux. On a donc un écart maximal hebdomadaire de coût de 202.4, ce qui est toujours raisonnable.

3.4. Critique du modèle

Le choix du contexte déterministe est limitatif. L'hypothèse d'un écoulement uniforme est probablement valable en moyenne sur un horizon suffisant et pour une catégorie limitée de produits. Diverses modifications ont été apportées au modèle initial, autorisant notamment une demande supérieure à l'offre et introduisant conséquemment des coûts de pénurie. D'autres variantes existent encore (voir [4]) incluant notamment l'hypothèse de ristournes en cas de commandes plus importantes. L'hypothèse la plus contraignante est celle du déterminisme, mais la non prise en considération de facteurs d'actualisation limite l'utilisation du modèle au très court terme. Nous présentons une variante incluant l'inflation dans la gestion.

4. Construction d'un modèle incluant la notion d'actualisation

Le travail à long terme nécessite la prise en considération d'un facteur d'actualisation. Ce dernier complexifie la mise en équation. Soit r le taux d'intérêt $sans\ risque$ du marché, les autres notations et conventions demeurant identiques. On peut définir la notion de stock moyen tenant compte de la dépréciation monétaire. L'utilisation d'un modèle continu nous conduit à préférer l'actualisation continue. Sous hypothèse d'écoulement linéaire, l'équilibre des coûts nous conduit à l'équation :

$$\int_0^T \frac{Q}{T} (T-t)e^{-rt}dt = \int_0^T S_M e^{-rt}dt$$

Le membre de gauche nécessite une intégration par parties introduite au moyen d'un cas concret Elle se trouve donc justifiée. On calcule :

$$\int te^{-rt}dt = -e^{-rt}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{t}{r}\right] + K$$

L'équation d'équilibre devient :

$$\frac{Q}{r} \left[1 - e^{-rT} \right] - \frac{Q}{T} \left[\frac{1}{r^2} \left[1 - e^{-rT} \right] - \frac{T \cdot e^{-rT}}{r} \right] = \frac{S_M}{r} \left[1 - e^{-rT} \right]$$

Cette équation admet une interprétation financière. Elle exprime l'égalité entre une rente (décroissante) en progression arithmétique et une rente constante. On résoud aisément :

$$S_M = Q + Qe^{-rT} \left[\frac{1}{1 - e^{-rT}} \right] - \frac{Q}{rT}$$

avec $T=\frac{Q}{d}$. Dans les conditions pratiques de notre exemple et en choisissant un taux sans risque hebdomadaire (par unité de temps) de r=0.005, on calcule aisément $S_M=128.08545$, très proche de $\frac{Q}{2}$. On découvre ainsi un calcul de limite constituant un excellent exercice justifié concrètement. Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} \right] = -\frac{1}{2}$$

Comme plus haut, on calcule le coût par cycle :

$$C_C = a + S_M.h.\frac{1}{r}.[1 - e^{-rT}]$$

On vérifie dans ce cas que la limite de cette expression pour r tendant vers 0 donne bien la relation classique du modèle de Wilson (exercice très facile mais encore une fois justifié).

Le calcul d'un coût total *en moyenne* par unité de temps n'a de sens qu'à long terme. On a :

$$C_t = \frac{a}{T} + S_M \cdot \frac{h}{rT} \cdot [1 - e^{-rT}]$$

Après calculs et remplacement de T par $\frac{Q}{d}$, on trouve :

$$C_t = \frac{ad}{Q} + \frac{hd}{r} \cdot e^{\frac{-rQ}{d}} + \frac{hd}{r} \cdot \left[1 - e^{\frac{-rQ}{d}}\right] \cdot \left[1 - \frac{d}{rQ}\right]$$

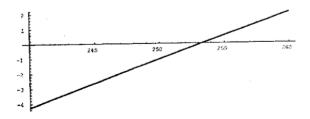
La dérivée est tout aussi élémentaire mais demande un peu d'attention de la part des étudiants :

$$\frac{dC_t}{dQ} = \frac{-ad}{Q^2} + \frac{hd}{rQ} \left[\frac{d}{rQ} \left(1 - e^{\frac{-rQ}{d}} \right) - e^{\frac{-rQ}{d}} \right]$$

Ici, encore, on peut vérifier que la limite pour r tendant vers 0 de cette expression donne bien la relation du modèle de Wilson. On vérifie en particulier (encore un exercice justifié) que $\forall d, Q$

$$\lim_{r \to 0} \frac{d^2 - d^2 \cdot e^{\frac{-rQ}{d}} - drQe^{\frac{-rQ}{d}}}{r^2 Q^2} = \frac{1}{2}$$

La résolution de l'équation se fait par exemple au moyen de Mathematica. Graphiquement, au voisinage de la solution du modèle de Wilson, on représente $\frac{dC_t}{dQ}$:



L'utilisation de l'opérateur "FindRoot" dans ce domaine donne Q=253.316 qui conduit à la même solution économique que le problème classique. La valeur optimale théorique est dans tous les cas strictement supérieure à celle obtenue au moyen du modèle de Wilson, les flux impulsionnels initiaux (commandes) demeurant constants, alors que les densités de coûts de stockages, différées, se retrouvent atténuées par le facteur d'actualisation.

Bibliographie

- [1] Ferret J. et Langlois G., Mathématiques appliquées, Foucher, Paris, 1979.
- [2] Fogarty-Hoffmann, Production and inventory management, South-Western Publishing Co, Cincinnati, 1983.
- [3] Justens D., Statistique pour décideurs, De Boeck, Bruxelles, 1990.
- [4] Phillips, Ravindran et Solberg, Operations Research, Principles and Practice, Wiley & sons, New-York, 1976.

Adresse de l'auteur

Daniel JUSTENS

Haute Ecole Francisco Ferrer Département Economique Type Long "Cooremans" Place Anneessens 11 1000 Bruxelles

Olympiades

C. Festraets,

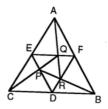
Dans ce numéro, vous trouverez d'abord les questions du 16ème test américain AIME; à vous d'en trouver les solutions et éventuellement de me les communiquer. Je vous rappelle que chaque réponse est un nombre entier compris entre 0 (inclus) et 999 (inclus). Ces réponses figurent dans un tableau à la fin de cet article.

Ensuite, vous trouverez les quatre problèmes posés à la finale "mini" de l'O.M.B. de 1998. Les solutions des problèmes 1, 3 et 4 sont celles de concurrents. Le problème 2, peut-être un peu difficile, n'a eu que des solutions incomplètes, intuitives, trop peu justifiées.

16th Annual American Invitational Mathematics Examination 1998 (AIME)

- 1. Pour combien de valeurs de k, 12^{12} est-il le plus petit commun multiple des entiers positifs 6^6 , 8^8 et k?
- 2. Trouver le nombre de paires ordonnées (x,y) d'entiers positifs satisfaisant $x \leq 2y \leq 60$ et $y \leq 2x \leq 60$.
- 3. Le graphe de $y^2 + 2xy + 40|x| = 400$ partage le plan en plusieurs régions. Quelle est l'aire de la région bornée?
- 4. Neuf cartes sont numérotées $1, 2, 3, \ldots, 9$ respectivement. Chacun des trois joueurs choisit au hasard trois cartes qu'il garde en main et il additionne leurs trois numéros. La probabilité que les trois joueurs obtiennent une somme impaire est $\frac{m}{n}$, où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux. Trouver m+n.
- 5. On définit $A_k=\frac{k(k-1)}{2}$ cos $\frac{k(k-1)\pi}{2}$. Trouver $|A_{19}+A_{20}+\cdots+A_{98}|$.
- 6. ABCD est un parallélogramme. On prolonge \overline{DA} au delà de A jusqu'à un point P, \overline{PC} rencontre \overline{AB} en Q et \overline{DB} en R. Si PQ=735 et QR=112, trouver RC.
- 7. Soit n le nombre de quadruples ordonnés (x_1, x_2, x_3, x_4) d'entiers positifs impairs satisfaisant $\sum_{i=1}^4 x_i = 98$. Trouver $\frac{n}{100}$.
- 8. Sauf pour les deux premiers termes, chaque terme de la suite 1000, x, 1000 x, . . . est obtenu en soustrayant le terme précédent de celui

- d'avant. Le dernier terme de la suite est le premier terme négatif rencontré. Quel est l'entier positif x qui produit la suite de longueur maximale?
- 9. Deux mathématiciens font une pause café chaque matin. Ils arrivent à la cafétéria de façon indépendante, au hasard entre 9 h et 10 h et y restent exactement m minutes. La probabilité que l'un arrive alors que l'autre est dans la cafétéria est de 40% et $m=a-b\sqrt{c}$ où a,b et c sont des entiers positifs et c n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier. Trouver a+b+c.
- 10. Huit sphères de rayon 100 sont placées sur une surface plane de telle sorte que chaque sphère est tangente à deux autres et que leurs centres se placent aux sommets d'un octogone régulier. Une neuvième sphère est placée sur la surface plane de telle sorte qu'elle soit tangente à chacune des huit autres sphères. Le rayon de cette dernière sphère est $a+b\sqrt{c}$ où a,b et c sont des entiers positifs et c n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier. Trouver a+b+c.
- 11. Trois des arêtes d'un cube sont appelées $\overline{AB}, \overline{BC}$ et $\overline{CD}, \overline{AD}$ est une diagonale intérieure. Les points P,Q et R se trouvent sur $\overline{AB}, \overline{BC}$ et \overline{CD} respectivement, de telle sorte que $AP=5,\ PB=15,\ BQ=15$ et CR=10. Quelle est l'aire du polygone défini par l'intersection du plan PQR et du cube?
- 12. On considère le triangle équilatéral ABC. D, E et F sont respectivement les milieux des côtés $\overline{BC}, \overline{CA}$ et \overline{AB} . Il existe des points P, Q et R respectivement sur $\overline{DE}, \overline{EF}$ et \overline{FD} tels que P est sur \overline{CQ}, Q est sur \overline{AR} et R est sur \overline{BP} . Le rapport des aires des triangles ABC et PQR est $a+b\sqrt{c}$ où a,b et c sont des entiers et c n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier. Que vaut $a^2+b^2+c^2$?



13. Si $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ est un ensemble de nombres réels indexés de telle sorte que $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$, sa "somme de puissances complexes" est définie par $a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + \cdots + a_ni^n$, où $i^2 = -1$. On définit S_n la somme des "sommes de puissances complexes" de tous les sous-ensembles non vides de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Etant donné que

 $S_8 = -176 - 64i$ et $S_9 = p + qi$ où p et q sont des entiers, trouver |p| + |q|.

- 14. Le volume d'une boîte rectangulaire $m \times n \times p$ vaut la moitié de celui d'une boîte rectangulaire $(m+2) \times (n+2) \times (p+2)$ où m,n et p sont des entiers tels que $m \le n \le p$. Quelle est la plus grande valeur possible de p?
- 15. Un domino est par définition une paire ordonnée de nombres entiers positifs distincts. Une suite propre de dominos est une liste de dominos distincts dans laquelle la première coordonnée de chaque paire après la première paire est égale à la seconde coordonnée de la paire la précédant et dans laquelle (i, j) et (j, i) ne peuvent apparaître ensemble pour tout i et j. Soit D_{40} l'ensemble de tous les dominos dont les coordonnées ne dépassent pas 40. Trouver la longueur de la plus grande suite propre de dominos qui peut être construite en utilisant les dominos de D_{40} .

Vingt-troisième Olympiade Mathématique Belge Mini finale 1998

1. Mathieu, qui vient de calculer $1-\frac{1}{2}$, puis $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, puis $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, s'écrie soudain : "Chic! Je sais donc calculer

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{1997 \times 1998}$$

sans aucune difficulté."

Que vaut cette somme?

Solution de Vincent MALMEDY, 2ème année, Institut Notre-Dame du Sacré-Coeur à Beauraing.

On peut transformer

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{1997 \times 1998}$$
en $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \dots + (\frac{1}{1997} - \frac{1}{1998})$.

En effet,
$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2}, \ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 3}, \dots, \frac{1}{1997} - \frac{1}{1998} = \frac{1}{1997 \times 1998}.$$

En généralisant, nous avons $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)}$.

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1997} - \frac{1}{1998}\right)$$

devient

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1997} - \frac{1}{1998}$$

car on peut introduire ou supprimer des parenthèses précédées du signe + sans changer les signes d'addition et de soustraction placés dans les parenthèses.

On peut regrouper les termes comme ceci :

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \dots - \left(\frac{1}{1997} - \frac{1}{1997}\right) - \frac{1}{1998}$$

car on peut introduire ou supprimer des parenthèses précédées du signe - à condition de changer les signes d'addition et de soustraction placés dans les parenthèses.

En effectuant, on obtient

$$1 - 0 - 0 - 0 - \cdots - 0 - \frac{1}{1998}$$

puis $1 - \frac{1}{1998}$ et finalement, $\frac{1997}{1998}$.

Conclusion: cette somme vaut $\frac{1997}{1998}$.

2. Une ligne de tram joint la place Albert au square Baudoin. A même intervalles réguliers, des trams partent des deux terminus, roulant à la même vitesse constante. Marchant le long de cette ligne, moi aussi à vitesse constante, je constate que je croise un tram toutes les 4 minutes et qu'un tram me dépasse toutes les 12 minutes. Quel intervalle de temps sépare deux départs de tram d'un terminus?

Solution

Supposons que les trams quittent leurs terminus toutes les x minutes.

1. Je viens de croiser un tram. Le suivant (qui va dans le même sens) arrivera à cet endroit x minutes plus tard, mais avant cela, il me croisera dans 4 minutes.

Donc, en x-4 minutes, il parcourt le même trajet que moi en 4 minutes.

2. Je viens d'être dépassé par un tram. Le suivant (qui va dans le même sens) arrivera à cet endroit dans x minutes et après cela, il me dépassera dans 12 minutes.

Donc, en 12-x minutes, il parcourt le même trajet que moi en 12 minutes.

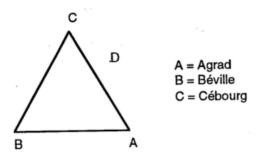
Ce qui donne

$$\frac{x-4}{4} = \frac{12-x}{12}$$
$$3x-12 = 12-x$$
$$x = 6.$$

Les trams quittent leurs terminus toutes les 6 minutes.

3. Agrad, Béville et Cébourg sont trois cités qui occupent les sommets d'un triangle équilatéral de 200 km de côté. Un fabricant de parfum se fournit en roses chez quatre producteurs, Pol, Quentin, Rolf et Samuel, qui lui en procurent quotidiennement 300 kg chacun. Pol habite Agrad et Quentin Béville, tandis que Rolf et Samuel sont installés à Cébourg. Pour ses transports, ce parfumeur utilise un hélicoptère qui peut transporter au maximum 300 kg de marchandise; les frais de transport sont proportionnels à la distance à parcourir. Où le parfumeur doit-il construire sa nouvelle usine pour les minimiser?

Solution de Cédric TROESSAERT, 1ère année, Institut Centre Ardenne à Libramont.



Il la construira à Cébourg parce que s'il s'installe ailleurs, par exemple D, il fera 4 fois [CD], 2 fois [DA] et 2 fois [DB]. Donc, c'est comme s'il faisait 2 fois [CA] par un détour et 2 fois [CB] par un détour et il ne ferait pas le chemin le plus court qui est la ligne droite.

4. Deux dactylos doivent se partager la frappe d'un rapport. La plus expérimentée des deux mettrait 2 h pour effectuer seule ce travail, tandis que l'autre mettrait 3 h. Elles se sont partagé le travail de manière qu'il soit achevé le plus rapidement possible. Combien de temps cela demandera-t-il?

Solution de Thomas DE BROUWER, 2ème année, Collège Saint Pierre à Bruxelles.

Pour aller le plus rapidement, les deux dactylos doivent se répartir le temps nécessaire à 50 % chacune.

Comme la 1ère va $\frac{3}{2}$ fois plus vite que la 2ème, elle fait 3y pendant que l'autre fait 2y.

L'une va donc faire les $\frac{3}{5}$ du travail et l'autre les $\frac{2}{5}$.

2 h = 120 min et 3 h = 180 min.

Dactylo n° 1 : $\frac{3}{5} \times 120 \text{ min} = 72 \text{ min}.$

Dactylo n° 2 : $\frac{2}{5} \times 120 \text{ min} = 72 \text{ min}.$

Les deux dactylos emploieront chacune 72 min de leur temps pour finir le travail en le moins de temps possible.

Réponses du test AIME

1	2	3	4	5
025	480	800	017	040
6	7	8	9	10
308	196	618	087	152
11	12	13	14	15
525	083	368	130	761

Des problèmes et des jeux

C. Festraets.

Certains lecteurs m'ont fait parvenir leurs solutions trop tard pour qu'elles puissent être publiées; il s'agit de J. FINOULST (problème 195), S. LEROY (problèmes 196 et 197), B. LOISEAU (problèmes 197 et 198) et M. PONCHAUX (problèmes 194 et 196). Je les remercie et tiens à leur signaler que leurs solutions sont tout à fait correctes.

Je rappelle que, dorénavant, une date limite est indiquée avant les énoncés des problèmes.

Racines en folie problème n° 190 de M. et P. n° 115.

Soit n un naturel non nul et $x \in \mathbb{R}$. On définit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \sqrt{x+k}$. Pour quelle(s) valeur(s) de n l'équation $f_n(x) = n$ admet-elle une (des) solution(s) rationnelle(s)? réelles?

Solution de M. PONCHAUX de Lille.

Définissons la fonction $g_n(x)$ sur $[-1, +\infty[$ par $g_n(x) = f_n(x) - n$. g_n est dérivable sur $[-1, +\infty[$ et sa dérivée donnée par

$$g'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{x+k}}$$

est strictement positive.

Donc, sur $[-1, +\infty[$, g_n est strictement croissante, de

$$g_n(-1) = \sum_{k=1}^n \sqrt{-1+k} - n$$

à

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x+k} - n \right) = +\infty.$$

1) Remarquons que, pour $n \ge 4$,

$$g_n(-1) \geqslant g_4(-1) = \sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - 4 > 0$$

donc, pour $n \ge 4$, l'équation $g_n(x) = 0$, ou $f_n(x) = n$, n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

- 2) Pour n=1, l'équation à résoudre est $\sqrt{x+1}=1$. Sur $[-1,+\infty[$, elle est équivalente à x+1=1 et admet l'unique solution rationnelle x=0.
- 3) Pour n=2, l'équation s'écrit $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=2$. Après deux élévations au carré, on obtient 16x=-7 et l'équation $f_4(x)=4$ admet donc l'unique solution rationnelle $x=\frac{-7}{16}$.
 - 4) Enfin, pour n=3, nous avons à résoudre dans \mathbb{R} l'équation $g_3(x)=0$.

Or l'étude initiale a montré que sur $[-1, +\infty[$ la fonction g_3 est strictement croissante de $g_3(-1) = \sqrt{1} + \sqrt{2} - 3 < 0$ à $+\infty$. La continuité de g_3 sur cet intervalle entraı̂ne que l'équation $g_3(x) = 0$ admet une seule solution réelle α . Comme $g_3(0) = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - 3 > 0$, α appartient à l'intervalle]-1,0[.

Montrons que α n'est pas rationnelle.

$$g_3(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} - 3.$$

L'équation $q_3(x) = 0$, après plusieurs élévations au carré nous conduit à

$$9x^4 - 180x^3 + 1110x^2 - 1716x - 2231 = 0.$$

Soit $\frac{a}{b}$ une solution rationnelle de cette équation $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$. a doit diviser 2231 = 23.97 et b doit diviser g = 3.3, de plus $-1 < \frac{a}{b} < 0$. D'où les seules possibilités : $\frac{a}{b} = \frac{-1}{3}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{-1}{9}$.

On constate facilement que ces deux valeurs ne sont pas solutions de $g_3(x) = 0$:

$$g_3\left(-\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{8}{3}} - 3$$

$$= \frac{1}{6}(\sqrt{6} + \sqrt{15} + \sqrt{24}) - 3 > \frac{1}{3}(2+3+4) - 3 = 0$$

$$g_3\left(-\frac{1}{9}\right) = \sqrt{\frac{8}{9}} + \sqrt{\frac{17}{9}} + \sqrt{\frac{26}{9}} - 3 > \frac{1}{3}(2+4+5) - 3 > 0.$$

L'équation $f_3(x)=3$ n'a qu'une solution réelle α et celle-ci n'est pas rationnelle. A la calculatrice, on obtient la valeur approchée -0,813 à 10^{-3} près.

Outre celle de l'auteur du problème M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre, j'ai aussi reçu une bonne solution de B. LOISEAU de Mouscron.

Pythagore voit double problème n°199 de M. et P. n°115.

Trouver toutes les solutions du système

(S)
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ c^2 + b^2 = d^2 \end{cases}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

Solution.

Lorsque j'ai lu cet énoncé, envoyé par B. LOISEAU de Mouscron, il m'a paru familier. Après quelques recherches dans mes documents, j'ai retrouvé l'énoncé suivant qui, traduit algébriquement, conduit au même système pour $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$:

"Soit ABCDEFGH un parallélipipède rectangle dont les faces opposées ABCD et EFGH sont des carrés. Démontrer que si les côtés du parallélipipède ont des longueurs entières, la diagonale AF d'une face et la diagonale intérieure AG ne peuvent avoir simultanément des longueurs entières."

A côté de cet énoncé, j'avais mis un commentaire "propriété bien connue". A vrai dire, ma mémoire était totalement défaillante et je n'avais plus la moindre idée de l'origine de cette propriété. J'ai donc consulté quelques livres et finalement découvert l'énoncé suivant dû à FERMAT.

"Si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure. Par le même raisonnement, on aura ensuite une somme plus petite que celle déduite de la première, et en continuant indéfiniment, on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisant aux mêmes conditions. Mais cela est impossible puisqu'un nombre entier étant donné, il ne peut y avoir une infinité de nombres plus petits" (J. ITARD, Arithmétique et théorie des nombres, PUF).

On reconnaît là la méthode dite de "descente infinie" qui est celle que nous allons utiliser ci-dessous.

- Si a, c ou d est nul, alors la seule solution est a = b = c = d = 0.
- Si b est nul, alors a = c = d et on a une infinité de solutions de la forme (n, 0, n, n) avec $n \in \mathbb{N}$.
- Si a, b, c, d sont non nuls, on peut les supposer premiers entre eux deux à deux.

En effet, si deux de ces nombres ont un diviseur premier p commun, p divise aussi les deux autres et l'équation peut être simplifiée par p^2 . Par exemple, si p divise a et d, alors p^2 divise $b^2 - c^2$ et $b^2 + c^2$, donc divise $2b^2$ et $2c^2$, donc divise b^2 et c^2 et c^2

Parmi les quatre nombres a, b, c, d, un au plus est pair, puisque nous les avons supposés premiers entre eux deux à deux.

On sait que, modulo 4, tout carré est congru à 0 ou à 1. La seule possibilité est

$$\begin{cases} 1+0 \equiv 1 \\ 1+0 \equiv 1 \end{cases}$$

pour que le système ait une solution. Donc b est pair, tandis que a,c,d sont impairs.

Les solutions de la première équation sont de la forme

$$\begin{cases} a = m^2 - n^2 \\ b = 2mn \\ c = m^2 + n^2 \end{cases}$$

avec $m, n \in \mathbb{N}^*$ et (m, n) = 1.

Les solutions de la deuxième équation sont de la forme

$$\begin{cases} c = u^2 - v^2 \\ b = 2uv \\ d = u^2 + v^2 \end{cases}$$

avec $u, v \in \mathbb{N}^*$ et (u, v) = 1. D'où mn = uv et

$$m^2 + n^2 = u^2 - v^2 (1)$$

On peut poser m=xy, n=zt, u=xz et v=yt avec $x,y,z,t\in\mathbb{N}^*$ et x,y,z,t premiers entre eux deux à deux.

L'équation (1) s'écrit alors

$$x^2y^2 + z^2t^2 = x^2z^2 - y^2t^2 (2)$$

Modulo 4, on doit avoir soit $1 + 0 \equiv 1 - 0$

soit
$$0 + 1 \equiv 1 - 0$$

c'est-à-dire soit x, y, z impairs et t pair soit x, z, t impairs et y pair.

Dans le premier cas, l'équation (2) devient

$$y^2(x^2 + t^2) = z^2(x^2 - t^2)$$

(y,z) = 1 et $(x^2 + t^2, x^2 - t^2) = (2x^2, 2t^2) = 1$ car $x^2 + t^2$ et $x^2 - t^2$ sont impairs, donc

$$y^2 = x^2 - t^2$$

et $x^2 + t^2 = z^2$

On obtient ainsi un système

$$\begin{cases} y^2 + t^2 = x^2 \\ x^2 + t^2 = z^2 \end{cases}$$

de la même forme que le système donné, mais avec $t \leq n < 2mn = b$.

Dans le second cas, l'équation (2) devient

$$t^2(z^2 + y^2) = x^2(z^2 - y^2)$$

et, de la même façon, nous conduit à

$$\begin{cases} t^2 + z^2 = y^2 \\ y^2 + z^2 = x^2 \end{cases}$$

avec $z \leq n < 2mn = b$.

D'où la "descente infinie" et on peut conclure que, lorsque a, b, c, d sont non nuls, le système (S) n'a pas de solution.

Il s'agissait là d'un problème assez difficile et il n'a guère eu de succès auprès de mes lecteurs. Cependant, en plus de celle de l'auteur de l'énoncé, j'ai reçu une bonne solution de M. PONCHAUX de Lille.

Deux, un, zéro, ... problème n°200 de MP. n°115.

Pour n naturel, on note g le nombre de chiffres 1 de l'écriture binaire de n et h l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui divise n!. Prouver que g + h = n.

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek.

Nous savons que l'exposant h de la plus haute puissance de 2 qui divise n! est égal à

 $h = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \cdots$

En notation binaire, le nombre n s'écrit comme la somme de g puissances de $2\,$

$$n = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \dots + 2^{\alpha_i} + \dots + 2^{\alpha_g}$$

Le nombre de facteurs 2 de n! et qui correspondent à un terme quelconque 2^{α_i} est égal à

$$2^{\alpha_i-1} + 2^{\alpha_i-2} + \dots + 2^2 + 2 + 1 = 2^{\alpha_i} - 1$$

La somme de ces nombres pour les g termes de n vaut

$$h = (2^{\alpha_1} - 1) + (2^{\alpha_2} - 1) + \dots + (2^{\alpha_g} - 1) = n - g$$

d'où on a n = g + h.

Bonnes solutions de l'auteur M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre (évidemment) et aussi de P. DASSY de Liège, J. JANSSEN de Lambermont, J. LIEVENS de Liège et B. LOISEAU de Mouscron.

Triangle et inégalités problème n°201 de M. et P. n°115.

a,b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle

$$R = a^2 + b^2 + c^2$$
 et $S = (a + b + c)^2$

Démontrer que

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{R}{S} < \frac{1}{2}$$

et que, dans cette inégalité, $\frac{1}{2}$ ne pourrait pas être remplacé par un nombre plus petit.

Solution de P. DASSY de Liège.

1) On a
$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{R}{S}$$

$$\Leftrightarrow 3R \geqslant S$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$$

ce qui est manifestement vrai.

2) On a
$$\frac{R}{S} < \frac{1}{2}$$

 $\Leftrightarrow S > 2R$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca > 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

 $\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 > 0$

Or on a a+b>c et b+c>a, d'où

$$(a+b-c)(b+c-a) > 0$$

 $b^2-c^2-a^2+2ca > 0$

et par permutation circulaire sur a, b, c

$$c^2 - a^2 - b^2 + 2ab > 0$$

 $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc > 0$

et en additionnant membre à membre ces trois dernières inégalités, on obtient

$$2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 > 0.$$

3)
$$\frac{R}{S} - \frac{1}{2} = \frac{2R - S}{2S} = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2}{2(a + b + c)^2}$$

Si a tend vers 0, alors c tend vers b et on a

$$\lim_{a \to 0} \left(\frac{R}{S} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2(b^2 + b^2) - (b+b)^2}{2(b+b)^2} = 0$$

Donc, dans l'inégalité $\frac{R}{S} < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ ne pourrait pas être remplacé par un nombre plus petit.

Bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek, J. JANSSEN de Lambermont, M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre, J. LIEVENS de Liège, B. LOISEAU de Mouscron, M. PONCHAUX de Lille et C. VILLERS de Hyon.

Les solutions des problèmes ci-dessous sont à envoyer avant le 1/2/99.

208. Faites la différence

Parmi toutes les différences de la forme $36^m - 5^n$, où m et n sont des naturels non nuls, trouver celle qui a la plus petite valeur absolue.

209. Partage des points

On donne 2n+3 $(n \ge 1)$ points dans le plan tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés et quatre d'entre eux ne sont pas concycliques. Démontrer qu'il existe un cercle passant par trois de ces points et tel que, parmi les 2n points restants, n soient à l'intérieur du cercle et les n autres à l'extérieur.

210. Un petit calcul

Un hexagone inscrit dans un cercle a trois côtés consécutifs de longueur a et les trois autres côtés de longueur b. Que vaut le rayon du cercle?

Le recrutement des professeurs de mathématique (une réponse à l'éditorial du Président J. Navez dans le n° 117)

L. Lemaire,

Dans son éditorial, J.Navez se demande s'il faudrait rendre plus attractives les études qui conduisent au professorat en mathématique, afin d'attirer plus de jeunes vers la profession.

Depuis une dizaine d'années, j'ai travaillé spécifiquement sur le problème du recrutement des étudiants en mathématique à l'université, et mon opinion est claire : ce ne sont pas les études qui découragent les jeunes, mais le métier d'enseignant lui-même, ou plus précisément les conditions dans lesquelles ce métier doit être exercé aujourd'hui.

Sans disserter longuement sur le prestige perdu de l'enseignement dans notre société, je reprendrai quelques faits précis.

En 1989, le journal "Le Soir" publiait un article sous le titre évocateur "Alerte, il n'y a plus de matheux", montrant par une étude précise réalisée à l'ULB que les licenciés en mathématiques des 10 dernières années avaient tous trouvé du travail, et que l'enseignement n'occupait qu'un tiers d'entre eux (les autres travaillant dans le privé - banque et compagnie d'assurances - ou dans la recherche).

Cet article - repris un peu partout - amenait une augmentation significative du nombre d'étudiants, essentiellement parce qu'il montrait que ces études menaient à d'autres débouchés que l'enseignement.

Toutefois, la carence en professeur de mathématiques annoncée dans l'article attirait à l'université un bon nombre d'étudiants visant cette carrière.

Avant même qu'ils ne finissent leurs études, une première vague de restrictions menait à la plus longue grève qu'ait connu l'enseignement - et les places annoncées disparaissaient.

Les présidents des deux partis au pouvoir signaient alors l'engagement solennel de mettre l'enseignement dans les priorités de leur programme de gouvernement.

Quatre ans après, les mêmes partis, toujours au pouvoir, supprimaient 3000 postes de professeurs sans se soucier ni de l'atteinte à la qualité de

l'enseignement, ni du problème des régents et licenciés qui avaient prévu d'y faire carrière (après tout, c'est l'état fédéral et non la Communauté qui doit financer le chômage, même si en fin de compte c'est toujours le contribuable).

Les mêmes partis nous disent aujourd'hui que la Communauté Française est remise sur les rails, et que tout compte fait elle survivra à 1999. On ne peut qu'espérer que lorsque de nouveaux postes suivront des départs à la retraite, ils ne seront pas supprimés par une nouvelle vague de rigueur budgétaire...

Mais si les restrictions budgétaires portent atteinte au niveau de l'enseignement, d'autres décisions politiques - qui n'amènent aucune économie mais sont simplement démagogiques - auront des effets aussi graves.

En bref, si un professeur estime qu'un élève doit travailler (ou simplement laisser travailler les autres) mais si l'élève est de l'avis contraire, tout est fait pour donner raison à l'élève.

Comme il amène avec lui sa part de subsidiation à l'école, la direction voudra le satisfaire.

Comme le pouvoir politique brandit le slogan de "l'école de la réussite", il a introduit un système de recours qui permettra aux parents de se retourner contre l'école ou le professeur, s'ils estiment le travail trop difficile.

En fait, l'école n'est plus organisée comme un service public mais comme une entreprise où le client a toujours raison, le client étant le parent. Et on suppose - à tort ou à raison - qu'il souhaite simplement que son enfant obtienne un diplôme, indépendamment des connaissances réellement acquises.

Un autre point, directement lié au recrutement, est un problème d'organisation. Dans une école, récemment, un agronome donnait cours de mathématique (à contre-coeur) pendant qu'un mathématicien donnait cours de physique (tout aussi à contre-coeur), alors même que les physiciens ont souvent des difficultés à trouver un emploi dans leur branche.

C'est qu'il est plus facile de répartir quelques heures de physique sur des mathématiciens présents dans l'école que d'introduire un nouvel enseignant.

Les remarques suivantes ne concerneront que le cas que j'ai étudié - celui des licenciés. J'espère que le cas des régents sera envisagé par d'autres.

Si tous les licenciés en mathématique entraient dans l'enseignement, il n'y aurait aucun problème de recrutement.

Mais même parmi ceux qui étudient les mathématiques pour enseigner, un bon nombre se découragent, parfois simplement en découvrant lors de l'agrégation la situation réelle dans certaines classes.

Selon moi, il faudrait informer les rhétoriciens de la variété des carrières s'ouvrant aux licenciés en mathématique, pour qu'ils entrent dans ces études sachant que quatre ans après ils pourront choisir un métier (par exemple l'enseignement, mais pas uniquement) en connaissance de cause, et en fonction du marché de l'emploi à ce moment là (et pas quatre ans avant).

Par ailleurs, il faudrait améliorer la gestion du personnel de telle sorte qu'un enseignant puisse commencer sa carrière par une sorte d'année probatoire, lui donnant la responsabilité complète de certaines heures, et non par de brefs intérims. Après un an, aussi bien l'inspection que lui-même jugerait en connaissance de cause du choix de cette carrière.

On dira certainement que ceci n'est pas réalisable - or cette proposition est une variante d'un système qui fonctionne depuis longtemps au Luxembourg (3 ans de stages rémunérés avec garantie d'un poste ensuite en cas de réussite).

En résumé:

- Nous ne sortirons pas de sitôt des problèmes budgétaires : nous devrons dans les 20 ou 30 ans qui viennent rembourser les 10.000.000.000.000 Bef que les gouvernements successifs ont empruntés (un million par habitant!). L'enseignement est un investissement à long terme, qui dépasse toujours l'échéance des prochaines élections. Il ne sera donc pas prioritaire.
- Dans ce cadre budgétaire, nous devons tout faire pour convaincre la société qu'on tue son avenir en institutionnalisant la réussite scolaire sans travail et sans véritable acquis. Alors qu'on dit et qu'on répète qu'une formation poussée est le seul avenir pour l'Europe, toutes les mesures récentes sont des obstacles au travail des professeurs.
- Pour recruter des mathématiciens il faut qu'il y en ait suffisamment sur le marché de l'emploi, et paradoxalement il faut qu'ils sachent qu'il y a un éventail de carrières, et qu'ils pourront choisir au moment même, et ne pas être engagés définitivement par leur choix d'études. Je pense qu'on pourrait aujourd'hui doubler le nombre d'étudiants entrant en mathématique sans saturer le marché de l'emploi, ni dans l'enseignement secondaire, ni dans le supérieur, ni dans le privé.

Luc LEMAIRE, Av. de Caters 21 1310 La Hulpe

Interpolation par des fonctions splines

J. Bair et P. Paquay, Université de Liège

Mots-clé: interpolation, polynôme de Lagrange, spline.

1. Position du problème

Il importe souvent de construire l'expression analytique d'une fonction dont on ne connaît que quelques points du graphe. L'utilité de cette démarche est grande : en connaissant explicitement la fonction, on peut chercher à interpoler, c'est-à-dire estimer la fonction pour des valeurs de la variable intermédiaires aux valeurs repérées et, même, extrapoler, c'est-àdire évaluer la fonction au-delà des valeurs connues ...ce qui est beaucoup plus délicat et suppose implicitement que la loi découverte reste valable là où se fait l'extrapolation. Par exemple, à partir de statistiques donnant le nombre d'habitants d'un pays au début de chaque décennie de ce siècle, c'est-à-dire le premier jour des années 1900, 1910, 1920, ..., 1990, on peut estimer "raisonnablement" le nombre d'habitants que comprenait le pays à tout moment de ce siècle, ce qui est un problème d'interpolation; on peut également essaver de prévoir le nombre d'habitants dans 20 ans en supposant que l'évolution de la population suivra la même tendance dans le futur que par le passé; bien entendu, la solution d'un problème d'extrapolation sera évidemment moins "certaine" que pour un cas d'interpolation.

2. Polynôme de Lagrange

D'un point de vue analytique, les problèmes d'interpolation ont déjà été traités au 18e siècle par Lagrange, qui a construit une fonction polynomiale dont le graphe passe par n+1 points donnés $P_i=(x_i,y_i)$ pour $i=0,1,\ldots,n$; nous supposerons, pour fixer les idées, que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$: il s'agit du polynôme de Lagrange défini par

$$L(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} + \cdots$$

$$+y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

$$= \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0}^{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

Le polynôme L est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n dont le graphe passe par tous les n+1 points P_i . De fait, L est visiblement de degré au plus n et on a $L(x_i)=y_i$ pour $i=0,1,\ldots,n$; s'il existe un polynôme P, de degré inférieur ou égal à n, tel que $P(x_i)=y_i$ pour $i=0,1,\ldots,n$, alors la différence D(x)=L(x)-P(x) s'annule en tous les n+1 points P_i tout en étant un polynôme de degré inférieur ou égal à n, ce qui n'est possible que si D(x) est identiquement nul, d'où P(x)=L(x) pour tout x réel.

Il résulte de cette unicité du polynôme de Lagrange que l'on peut écrire

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k},$$

où les coefficients a_0, a_1, \ldots, a_n vérifient les n+1 équations du système cramérien (en les n+1 inconnues a_0, a_1, \ldots, a_n) suivant

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n = y_0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_1 + a_n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_n + a_n = y_n. \end{cases}$$

Les différentes méthodes d'interpolation que nous présenterons seront illustrées par un même jeu de données : nous avons choisi délibérément un nombre restreint de points "bien situés" dans le plan, de manière à pouvoir exécuter les calculs sans le recours à une calculatrice électronique. Il s'agit de rechercher une fonction dont le graphe passe par les quatre points $P_0 = (0,0), P_1 = (1,4), P_2 = (2,0)$ et $P_3 = (3,1)$. Le polynôme de Lagrange construit sur ces quatre points est donné par

$$L(x) = 0 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)(-3)} + 4 \frac{x(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)} + 0 \frac{x(x-1)(x-3)}{2(-1)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3 \times 2}$$
$$= \frac{x(x-2)(13x-37)}{6} = \frac{13}{6} x^3 - \frac{21}{2} x^2 + \frac{37}{3} x.$$

Le polynôme de Lagrange possède certes des avantages : il est facile à construire et son graphe est très régulier puisque tout polynôme est indéfiniment dérivable. Toutefois, le graphe de ce polynôme ne correspond pas à ce que l'intuition suggère, car il s'écarte parfois d'un tracé "raisonnable" entre les points P_i ; de plus, ce polynôme est peu "robuste" car il est extrêmement sensible à la modification de l'une ou l'autre donnée. Ainsi, sur l'exemple ci-dessus, la courbe paraît bien construite sur l'intervalle [1,2], mais ne paraît pas "très bonne" dans [0,1], où elle semble "monter trop haut" et surtout dans [2,3] où elle descend de façon peu "naturelle" sous l'axe horizontal de base; de plus, on constate que le seul remplacement de P_1 par $P_1^* = (1,-1)$ livre un polynôme, à savoir $\frac{x(x-2)(-x+4)}{3}$, dont le graphe est fort différent de L(x).

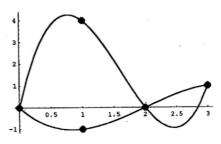


Figure 1.

3. Notion de spline

L'unicité et les inconvénients du polynôme de Lagrange nous incitent à rechercher, comme fonction dont le graphe relie "au mieux" les points donnés, plusieurs polynômes dont les graphes "se raccordent" plus ou moins bien aux n+1 points P_i .

Intuitivement, tout se passe comme si, aux points P_i , étaient plantés des piquets servant à délimiter une région plane dont la frontière peut être "matérialisée" par une "languette" (ou *spline*, en anglais) plus ou moins rigide; on doit trouver une fonction dont le graphe décrit cette frontière. Si la languette est une ficelle tendue, on obtient comme frontière une succession de segments de droite; par contre, une latte de bois flexible donne naissance à une courbe plus "lisse".[1]



Figure 2.

D'un point de vue mathématique, on va construire sur l'intervalle $I = [x_0, x_n]$ une fonction spline de degré p, c'est-à-dire une fonction $S: I \to \mathbb{R}$ qui est (p-1) fois continûment dérivable sur I, ce qui se note $S \in C_{p-1}(I)$, qui coıncide avec un polynôme de degré au plus p sur chaque intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$, et telle que $S(x_i) = y_i$ pour tout $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Une fonction spline de degré p consiste donc en des polynômes raccordés de telle manière que leurs valeurs ainsi que leurs p-1 premières dérivées coıncident en chaque abscisse x_j .

4. Spline linéaire

En première approximation, on peut faire appel à une fonction spline de degré 1 ou spline linéaire, notée S_{ℓ} : il s'agit d'une fonction affine par morceaux, mais continue sur I, définie analytiquement par

$$S_{\ell}(x) = y_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + y_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Le graphe de S_{ℓ} est constitué de la réunion des segments de droite $[P_{i-1}, P_i]$ pour tout $i=1,2,\ldots,n$. Le spline linéaire, qui correspond intuitivement au cas où la languette passant par les points P_i est une corde bien tendue, est dans la réalité souvent utilisé : par exemple, par les infirmières qui indiquent sur un graphique les relevés de la température ou des pulsations d'un malade, par des financiers qui décrivent l'évolution d'un indice boursier ; cette interpolation linéaire est également exploitée dans la lecture de certaines tables numériques (tables pour des lois de probabilité, pour des fonctions logarithmiques, ...) : elle consiste essentiellement à interpoler au moyen de la classique "règle de trois".

L'inconvénient majeur de ce spline linéaire est que la fonction S_{ℓ} n'est évidemment pas dérivable aux abscisses x_i , ce qui se traduit par le fait que

les points P_i sont "anguleux" et que la courbe n'est dès lors pas "lisse". Le graphe de S_{ℓ} peut s'écarter assez bien de celui de L, tout en "serrant" de plus près les points P_i (voir la figure 3 relative à l'exemple-type).

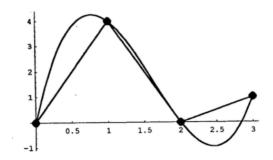


Figure 3.

5. Spline quadratique

Pour éviter pareils inconvénients, on peut faire appel à une fonction spline de degré 2, ou spline quadratique S_q dont le graphe est formé d'une succession de n paraboles \P_i passant par les deux points consécutifs P_{i-1} et P_i pour $i=1,2,\ldots,n$, les deux paraboles \P_i et \P_{i+1} ayant même tangente en P_i pour $i=1,2,\ldots,n-1$.

La *i*-ème parabole \P_i est d'équation $y = f_i(x)$, où f_i est un polynôme du second degré et sa dérivée f_i' est une fonction du premier degré. Posons $p_i = f_i'(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et $p_0 = f_1'(x_0)$. En vertu du raccord des dérivées premières en les points P_i , on a, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$f_i'(x_{i-1}) = p_{i-1} ;$$

dès lors, le graphe de f'_i est une droite passant par les points (x_{i-1}, p_{i-1}) et (x_i, p_i) , d'où

$$f'_i(x) = p_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + p_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$
;

par primitivation, on trouve

$$f_i(x) = p_{i-1} \frac{(x-x_i)^2}{2(x_{i-1}-x_i)} + p_i \frac{(x-x_{i-1})^2}{2(x_i-x_{i-1})} + q_i,$$

 q_i étant une constante d'intégration.

Pour construire la fonction S_q , il nous faut donc trouver les 2n + 1 inconnues $p_0, p_1, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$ pour lesquelles les différentes courbes \P_i passent par les points P_{i-1} et P_i ; de façon précise, on doit avoir

$$f_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$$
 et $f_i(x_i) = y_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$

ou, de façon équivalente,

$$p_{i-1}\frac{x_{i-1}-x_i}{2}+q_i=y_{i-1}$$
 et $p_i\frac{x_i-x_{i-1}}{2}+q_i=y_i$, $\forall i=1,2,\ldots,n$.

Comme il y a seulement 2n équations pour 2n+1 inconnues, on peut donner une valeur arbitraire à l'une des variables, par exemple à p_0 .

Ainsi, pour notre exemple-type, on doit avoir $-\frac{1}{2}$ $p_0+q_1=0$, $\frac{1}{2}$ $p_1+q_1=4$, $-\frac{1}{2}$ $p_1+q_2=4$, $\frac{1}{2}$ $p_2+q_2=0$, $-\frac{1}{2}$ $p_2+q_3=0$ et $\frac{1}{2}$ $p_3+q_3=1$. Si p_0 est choisi égal à la pente en O de la tangente à la parabole passant par les trois points P_0,P_1 et P_2 , à savoir la courbe d'équation $y=-4x^2+8x$, d'où $p_0=8$, on trouve $p_1=0$, $p_2=-8$, $p_3=10$, $q_1=q_2=4$ et $q_3=-4$; en conséquence, on obtient

$$S_q(x) = \begin{cases} -4x^2 + 8x & \forall x \in [0, 2] \\ 9x^2 - 44x + 52 & \forall x \in [2, 3]. \end{cases}$$

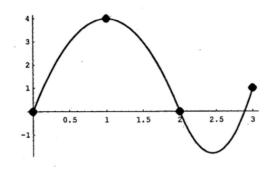


Figure 4.

Observons que le graphe de S_q est encore situé nettement sous l'axe horizontal dans l'intervalle [2,3].

D'une manière générale, le graphe de la fonction S_q s'écarte souvent d'un tracé "fidèle". Ceci est dû au fait qu'une même parabole tourne toujours sa concavité dans le même sens, à savoir vers le haut ou vers le bas selon que le coefficient de son terme de degré 2 est positif ou négatif. En conséquence, les points d'inflexion pour S_q coı̈ncident obligatoirement avec les points P_i de raccordement, ce qui n'est pas toujours "idéal".

De plus, la forme de la courbe peut dépendre fortement de la condition initiale p_0 ; ainsi, pour notre exemple, en prenant $p_0 = 2$, on obtient le nouveau spline quadratique S_q^* défini par

$$S_q^*(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x, & \forall x \in [0, 1] \\ -10x^2 + 26x - 12, & \forall x \in [1, 2] \\ 15x^2 - 74x + 88, & \forall x \in [2, 3] \end{cases};$$

les graphes de S_q et S_q^* passent bien par les quatre points P_0 à P_3 , mais s'éloignent assez fort l'un de l'autre entre ces points (voir Figure 5).

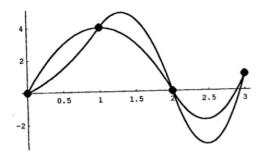


Figure 5.

6. Spline cubique

Pour avoir des points d'inflexion aux emplacements les plus adéquats et obtenir un modèle "robuste", on fait appel à une fonction spline de degré 3 ou spline cubique S_c . Le graphe de S_c est composé de n courbes cubiques \mathbb{C}_i , d'équation $y=f_i(x)$, pour $i=1,2,\ldots,n$, chaque f_i étant un polynôme du troisième degré, de la forme $f_i(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i$. Il existe donc

4n coefficients à déterminer, à savoir a_i, b_i, c_i et d_i pour i = 1, 2, ..., n. Mais la courbe \mathbb{C}_i passe par P_{i-1} et P_i , ce qui fournit 2n équations linéaires; de plus, il faut imposer le raccord des dérivées premières et secondes aux points P_i : de façon précise, on doit avoir

$$f'_i(x_i) = f'_{i+1}(x_i)$$
 et $f''_i(x_i) = f''_{i+1}(x_i)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$,

ce qui livre 2(n-1) nouvelles équations linéaires. Ainsi, au total, on dispose d'un système linéaire de 4n-2 équations à 4n inconnues. De manière à obtenir autant d'équations que d'inconnues, on impose généralement une des conditions suivantes :

- a) $S_c''(x_0) = S_c''(x_n) = 0$: le spline est dit naturel;
- b) lorsque $y_0 = y_n$, $S'_c(x_0) = S'_c(x_n)$ et $S''_c(x_0) = S''_c(x_n)$: le spline est qualifié de périodique;
- c) $S'_c(x_0) = p_0$ et $S'_c(x_n) = p_n$ pour des valeurs données p_0, p_n .

Moyennant ces conditions, on dispose de 4n équations à 4n inconnues : on peut démontrer que ce système linéaire est cramérien et admet dès lors une seule solution (voir preuve en annexe).

En pratique, il est possible de réduire fortement les calculs lors de la résolution de ce système. A cet effet, posons $f_i''(x_i) = \alpha_i$ pour i = 1, 2, ..., n, avec, de plus, $f_1''(x_0) = \alpha_0$. Considérons un indice quelconque compris entre 1 et n et posons $x_i - x_{i-1} = h_i$. Comme f_i est un polynôme du troisième degré et en tenant compte de l'égalité $f_i''(x_{i-1}) = \alpha_{i-1}$ provenant du raccord des dérivées secondes, le graphe de f_i'' est une droite passant par les points (x_{i-1}, α_{i-1}) et (x_i, α_i) , d'où

$$f_i''(x) = \alpha_{i-1} \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \alpha_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$
$$= \frac{1}{h_i} \left[\alpha_{i-1} (x_i - x) + \alpha_i (x - x_{i-1}) \right].$$

Une double intégration livre, pour des constantes β_i et γ_i :

$$f_i(x) = \frac{1}{h_i} \left[\alpha_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6} + \alpha_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6} \right] + \beta_i x + \gamma_i.$$

Mais, on sait que $f_i(x_i) = y_i$ et $f_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$, d'où

$$\alpha_i \frac{h_i^2}{6} + \beta_i x_i + \gamma_i = y_i$$
 et $\alpha_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + \beta_i x_{i-1} + \gamma_i = y_{i-1}$,

et l'on en tire

$$\beta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \frac{h_i}{6}$$

$$\gamma_{i} = y_{i} + (x_{i} - h_{i}) \frac{h_{i} \alpha_{i}}{6} - \alpha_{i-1} \frac{x_{i} h_{i}}{6} - \frac{(y_{i} - y_{i-1})}{h_{i}} x_{i}$$

$$= y_{i} + \frac{h_{i}}{6} (x_{i-1} \alpha_{i} - \alpha_{i-1} x_{i}) - \frac{(y_{i} - y_{i-1})}{h_{i}} x_{i}$$

puis, après quelques calculs algébriques élémentaires,

$$\begin{split} f_i(x) &= \frac{\alpha_{i-1}}{6h_i} \left(x_i - x \right)^3 + \frac{\alpha_i}{6h_i} \left(x - x_{i-1} \right)^3 \\ &+ \left(\frac{y_i - 1}{h_i} - \alpha_{i-1} \frac{h_i}{6} \right) \left(x_i - x \right) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \alpha_i \frac{h_i}{6} \right) \left(x - x_{i-1} \right), \end{split}$$

cette expression ne contenant plus que les seules inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Or, nous avons en plus le raccord des dérivées premières aux points intérieurs, soit

$$f'_i(x_i) = f'_{i+1}(x_i)$$
 pour $i = 1, 2, ..., n-1$;

comme

$$f_i'(x) = -\frac{\alpha_{i-1}}{2h_i} (x_i - x)^2 + \frac{\alpha_i}{2h_i} (x - x_{i-1})^2 + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{(\alpha_i - \alpha_{i-1})h_i}{6},$$

on obtient

$$\begin{split} &\frac{\alpha_i h_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{(\alpha_i - \alpha_{i-1}) h_i}{6} \\ &= -\frac{\alpha_i (x_{i+1} - x_i)^2}{2h_{i+1}} + \frac{y_{i+2} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{(\alpha_{i+1} - \alpha_i) h_{i+1}}{6} \\ &= -\frac{\alpha_i h_{i+1}}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{(\alpha_{i+1} - \alpha_i) h_{i+1}}{6} \end{split}$$

c'est-à-dire, pour tout i = 1, ..., n - 1,

$$h_i \alpha_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})\alpha_i + h_{i+1}\alpha_{i+1} = \frac{6}{h_{i+1}} (y_{i+1} - y_i) + \frac{6}{h_i} (y_{i-1} - y_i),$$

soit n-1 équations pour n+1 inconnues α_j .

Pour construire le spline cubique naturel, on impose $\alpha_0 = \alpha_n = 0$: dans ces conditions, les n-1 inconnues restantes, à savoir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, forment une solution du système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \dots & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & h_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 2(h_{n-1}+h_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

où

$$c_i = \frac{6}{h_{i+1}} (y_{i+1} - y_i) + \frac{6}{h_i} (y_{i-1} - y_i).$$

Ainsi, pour notre exemple de référence, le système à résoudre pour construire le spline naturel est

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ 30 \end{pmatrix}$$

qui admet pour solution $\alpha_1=-\frac{74}{5}$ et $\alpha_2=\frac{56}{5}$; S_c est dès lors défini comme suit :

$$S_c(x) = \begin{cases} -\frac{37}{15} x^3 + \frac{97}{15} x, & \forall x \in [0, 1] \\ \frac{13}{3} x^3 - \frac{102}{5} x^2 + \frac{403}{15} x - \frac{102}{15}, & \forall x \in [1, 2] \\ -\frac{28}{15} x^3 + \frac{84}{5} x^2 - \frac{713}{15} x + \frac{214}{5}, & \forall x \in [2, 3]. \end{cases}$$

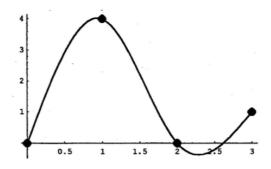


Figure 6.

Comme on le voit sur cette figure, le spline cubique n'a plus les inconvénients des splines de degré 1 ou 2 car il relie les points par une courbe qui se rapproche assez fort de segments de droite, mais qui est parfaitement lisse; en fait, cette courbe est celle décrite par une languette rigide passant entre les points P_i .

Il est rare, en pratique, de faire appel à des splines de degré supérieur à 3. En effet, les splines cubiques sont ceux qui raccordent "au plus juste" les points considérés tout en fournissant une courbe bien lisse. On peut en

effet démontrer que pour toute fonction f au moins deux fois dérivable sur $[x_0, x_n]$ et dont le graphe passe par les n + 1 points P_0, P_1, \ldots, P_n , on a

$$\int_{x_0}^{x_n} (S_c''(x))^2 dx \leqslant \int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx,$$

ce qui revient à dire que le spline cubique est la fonction f pour laquelle $\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx$ est minimum (voir annexe pour la preuve). Ce résultat, d'une grande importance, peut être interprété aisément. De fait, le nombre f''(x) peut être positif ou négatif et traduit toujours la plus ou moins grande "courbure" du graphe de f au point (x, f(x)), cette dernière étant rigoureusement définie par l'expression $f''(x)[1+(f'(x))^2]^{-3/2}$ mais vaut pratiquement f''(x) lorsque la dérivée première n'est pas trop grande; ces propriétés peuvent être visualisées en examinant le cas particulier de polynômes du second degré. Il s'agit, intuitivement, de minimiser la "courbure globale"; mais il convient de faire abstraction du signe de cette courbure, pour ne pas que des courbures "positives" compensent des "négatives" : nous allons dès lors travailler sur le carré de f''(x) (tout comme on a défini la variance d'une série statistique pour mesurer la dispersion autour de la moyenne arithmétique). Ainsi, le spline cubique définit la courbe lisse passant par les n+1 points P_i et qui est la "plus linéaire" possible; de façon moins intuitive, il s'agit de la fonction de classe C_2 dont la norme L_2 de la courbure est minimale. En ce sens, le spline cubique minimise les oscillations parmi toutes les fonctions dont le graphe passe par les points donnés. On peut de plus démontrer que les splines cubiques d'interpolation convergent toujours vers la fonction que l'on échantillonne. Pour toutes ces raisons, le spline cubique est le plus souvent utilisé dans les problèmes d'interpolation.

Il est, par exemple, exploité de plus en plus dans le graphisme sur ordinateur; l'infographie, qui tend à remplacer les instruments habituels de dessin comme le pistolet, a d'ailleurs beaucoup contribué au développement récent des méthodes d'interpolation; de même, le design, qui se propose de rechercher de nouvelles formes esthétiques et fonctionnelles pour les objets, a également participé à la construction de nouvelles théories d'interpolation.

La notion de spline est également souvent exploitée en statistique [3, 4, 6].

7. Annexe : quelques démonstrations

Théorème 1. Posons $f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$; considérons 2(n+1) nombres réels $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_n$, les nombres x_i étant deux à deux distincts; construisons le système linéaire \S , en les 4n inconnues a_i, b_i, c_i, d_i pour $i = 1, 2, \ldots, n$, à l'aide des équations suivantes:

```
1) f_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \forall i = 1, 2, ..., n

2) f_i(x_i) = y_i \forall i = 1, 2, ..., n

3) f'_i(x_i) = f'_{i+1}(x_i) \forall i = 1, 2, ..., n-1

4) f''_i(x_i) = f''_{i+1}(x_i) \forall i = 1, 2, ..., n-1
```

- $5)\ \ l'une\ des\ conditions\ suivantes:$
 - a) $f_1''(x_0) = f_n''(x_n) = 0$
 - b) si $y_0 = y_n$, $f_1'(x_0) = f_n'(x_n)$ et $f_1''(x_0) = f_n''(x_n)$
 - c) $f'_1(x_0) = p_0$ et $f'_n(x_n) = p_n$ pour des valeurs données p_0, p_n .

Dans ces conditions, le système § est cramérien.

Preuve. Observons tout d'abord que, dans chacun des trois cas envisagés, le système \S est carré en ce sens qu'il comporte autant d'équations que d'inconnues. Or, un système linéaire carré, écrit matriciellement sous la forme AX=B, est cramérien si et seulement si la matrice A est régulière, c'est-à-dire de déterminant non nul, ou encore si et seulement si le système linéaire homogène associé, à savoir AX=0, possède l'unique solution X=0.

Considérons dès lors le système linéaire homogène \S^* associé à \S , ce qui revient à supposer nuls les nombres y_0, y_1, \ldots, y_n , ainsi que les nombres p_0 et p_n pour le troisième cas; désignons par f le spline cubique défini par \S^* . En utilisant des propriétés élémentaires du calcul intégral et en exploitant les hypothèses, on trouve successivement

$$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_j''(x) f_j''(x) dx$$

$$= \sum_{j=1}^n \left\{ \left[f_j''(x) f_j'(x) \right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_j'''(x) f_j'(x) dx \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ f_{j}''(x_{j}) f_{j}'(x_{j}) - f_{j}''(x_{j-1}) f_{j}'(x_{j-1}) - \int_{x_{j-1}}^{x_{j}} 6a_{j} f_{j}'(x) dx \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ f_{j}''(x_{j}) f_{j}'(x_{j}) - f_{j}''(x_{j-1}) f_{j}'(x_{j-1}) - 6a_{j} [f_{j}(x)]_{x_{j-1}}^{x_{j}} \right\}$$

$$= f_{n}''(x_{n}) f_{n}'(x_{n}) - f_{1}''(x_{0}) f_{1}'(x_{0}) - \sum_{j=1}^{n} 6a_{j} [f_{j}(x_{j}) - f_{j}(x_{j-1})]$$

$$= 0.$$

Par conséquent, f''(x) = 0 pour tout $x \in [x_0, x_n]$; il existe donc des constantes α et β telles que $f(x) = \alpha x + \beta$ pour tout $x \in [x_0, x_n]$. Comme $f(x_0) = f(x_n) = 0$, on doit avoir $\alpha = \beta = 0$, d'où la fonction f est identiquement nulle et le système homogène \S^* est bien cramérien.

Théorème 2. Considérons n+1 points $P_j=(x_j,y_j)$, pour $j=0,1,\ldots,n$, tels que $x_0< x_1< \cdots < x_n$.

a) Parmi toutes les fonctions f de classe C_2 dans l'intervalle I dont le graphe passe par les n+1 points P_0, P_1, \ldots, P_n , le spline naturel est celle pour laquelle

$$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx$$

est minimum.

- b) Si $y_0 = y_n$, le spline périodique est la fonction qui rend cette intégrale minimale parmi toutes les fonctions périodiques de période $x_n x_0$, de classe C_2 dans $[x_0, x_n]$ et dont le graphe passe par les n + 1 points P_0, P_1, \ldots, P_n .
- c) Le spline cubique S_c tel que $S_c'(x_0) = p_0$ et $S_c'(x_n) = p_n$ rend l'intégrale minimale parmi toutes les fonctions de classe C_2 dans $[x_0, x_n]$, dont le graphe passe par P_0, P_1, \ldots, P_n et dont les dérivées prennent les valeurs p_0 et p_n en p_0 et p_0

Preuve. Démontrons simultanément les trois parties de cet énoncé.

Désignons par f une fonction arbitraire vérifiant les conditions considérées et par S le spline correspondant.

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_{x_0}^{x_n} S''(x) (S''(x) - f''(x)) dx$$

$$= [S''(x)(S'(x) - f'(x))]_{x_0}^{x_n} - \int_{x_0}^{x_n} S'''(x) (S'(x) - f'(x)) dx.$$

Vu le choix de f et S, on a, dans les trois cas,

$$S''(x_n)(S'(x_n) - f'(x_n)) = S''(x_0)(S'(x_0) - f'(x_0)),$$

d'où l'on tire

$$\int_{x_0}^{x_n} (S''(x))^2 dx - \int_{x_0}^{x_n} S''(x) f''(x) dx = -\int_{x_0}^{x_n} S'''(x) (S'(x) - f'(x)) dx.$$

Or, S étant un spline cubique, $S^{\prime\prime\prime}$ est constant dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, d'où il existe des constantes γ_i telles que

$$\int_{x_0}^{x_n} S'''(x)(S'(x) - f'(x))dx = \sum_{i=1}^n \gamma_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (S'(x) - f'(x))dx$$
$$= \sum_{i=1}^n \gamma_i [S(x) - f(x)]_{x_{i-1}}^{x_i}$$
$$= 0,$$

puisque $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ pour i = 0, 1, ..., n; dès lors,

$$\int_{x_0}^{x_n} (S''(x))^2 dx = \int_{x_0}^{x_n} S''(x) f''(x) dx.$$

En conséquence,

$$\int_{x_0}^{x_n} (S''(x) - f''(x))^2 dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} (S''(x))^2 dx + \int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx - 2 \int_{x_0}^{x_n} S''(x) f''(x) dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx - \int_{x_0}^{x_n} (S''(x))^2 dx,$$

d'où la conclusion

$$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx \geqslant \int_{x_0}^{x_n} (S''(x))^2 dx$$

puisque l'intégrale du premier membre est celle d'une fonction non négative sur $[x_0, x_n]$ et est de ce fait positive ou nulle.

Bibliographie

- [1] Arbenz K., Bachmann O., *Eléments d'analyse numérique et appliquée*, 7, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1992.
- [2] Bachmann M.-Y., Cottin H., Epiney P., Haeberli F., Jenny G., *Méthodes numériques*, Ed. du Tricorne, Genève, 1992.
- [3] Etienne P., Quelques aspects et applications de la théorie des fonctions splines, mémoire de licence en sciences mathématiques, Université de Liège, 1987.
- [4] Greville T.N.E., Theory and Applications of Spline Functions, Academic Press, New York London, 1969.
- [5] Laubin P., Analyse numérique, cours de candidature en sciences mathématiques, Université de Liège, 1993.
- [6] Solheid J., Sur une méthode du lissage à l'aide de fonctions splines, mémoire de licence en sciences mathématiques, Université de Liège, 1989.

Adresse des auteurs :

Université de Liège Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales Boulevard du Rectorat 7 - B31 4000 Liège