Mathématique
et
Pédagogie

Sommaire

N° 120 ***Janvier – Février 1999***

Éditorial

J. Navez,

En espérant que vous ayez passé de joyeuses fêtes de fin d'année, je profite de ce numéro pour vous présenter, de ma part ainsi que de celle de tous les membres du conseil d'administration, nos meilleurs vœux pour l'année nouvelle.

Je me permets de formuler un souhait supplémentaire, celui-là à l'égard de nos pouvoirs organisateurs et des décideurs politiques. Les enseignants voudraient avoir un peu plus de considération morale pour le rôle éducatif et social qu'ils jouent.

Je suis persuadé que le dévouement et le bon sens d'une équipe éducative bien soudée sont de bien meilleurs garants pour l'avenir des jeunes que des règlements tatillons ou des menaces juridiques qui ne feront qu'engendrer un laxisme sécurisant, voire même un découragement des maîtres animés des meilleures intentions.

Jacques NAVEZ

Avis relatif à l'évaluation des résultats des élèves en mathématiques (IEA - 1995)

Avis n° 56 - Conseil de l'Education et de la Formation,
Communauté Française de Belgique

Première partie - Conseil du 4 septembre 1998

"Parmi les expérimentateurs les plus inspirés, je cite souvent le cas d'un jeune Scandinave du nom d'Ekman. Celui-ci, au début du siècle, regardait dériver les glaces sur la mer Baltique, au moment de la débâcle, avec un fort vent d'ouest. Les glaces dérivaient dans le lit du vent, mais Ekman, concentrant son attention sur elles, remarqua un détail extraordinaire : les glaces ne dérivaient pas exactement dans la direction du vent mais un petit peu plus à gauche. De retour chez lui, il a réfléchi et a fini par se convaincre que ce léger décalage devait être une manifestation de la rotation de la Terre, transmise par un milieu liquide, et il en a déduit ce qu'on appelle la Théorie des couches d'Ekman, prologue nécessaire à l'océanographie des grands courants. Mais ce qu'il convient de souligner dans cette démarche, c'est que le calcul n'a constitué que la partie triviale de l'affaire. N'importe qui aurait pu s'en charger ; le coup de génie, c'est d'avoir repéré que la banquise ne dérivait pas exactement dans la direction attendue".

Pierre-Gilles de GENNES, prix Nobel de Physique, 1991
"Les objets fragiles", Plon (1994), p.229.

Introduction

Les résultats obtenus, en mathématiques, par les élèves de la Communauté française sont supérieurs à la moyenne établie sur l'ensemble des pays. Ils prêtent donc moins à s'inquiéter que les résultats enregistrés en sciences. Ils justifient cependant qu'on les analyse avec attention. S'ils restent satisfaisants, ils manifestent cependant une tendance nette à s'infléchir, comme en témoignent les comparaisons faites à l'occasion d'enquêtes successives.

Le tableau ci-dessous reprend, pour quelques pays, les résultats standardisés lors des trois études de l'IEA en mathématiques.

Pays	**Etude de 1964**	**Etude de 1980**	**Etude de 1995**
Japon	+1.286	+2.000	+1.774
Belgique francophone	**+1.167**	**+0.476**	**+0.190**
Angleterre	+0.071	-0.500	-0.264
Ecosse	-0.083	-0.298	0.345
Pays-Bas	-0.500	+1.214	+0.607
France	-0.619	+0.786	+0.500
Etats-Unis	-1.119	-0.703	-0.345
Suède	-1.226	-1.381	+0.095
Belgique flamande	–	+0.786	+1.000

Les scores moyens sont indiqués en positif ou en négatif, par rapport à la moyenne.

Dans l'échantillon figurant au tableau, la Belgique francophone était 2ème sur 8 en 1964, 5ème sur 9 en 1980 et en 1995. Son score décroît au cours du temps. La même évolution est constatée pour l'Ecosse. Au contraire, les Etats-Unis sont en progression constante depuis 1964. Des pays ont progressé après l'enquête de 1964, pour régresser ensuite : le Japon, les Pays-Bas, la France. D'autres pays ont au contraire présenté un fléchissement après l'enquête de 1964, puis ont entamé leur redressement après l'enquête de 1980 : la Suède, l'Angleterre. Quant à la Belgique flamande, elle n'a pas participé à l'étude de 1964, et présente une progression dans les scores entre 1980 et 1995.

Il apparaît nécessaire au CEF d'examiner les résultats de l'enquête de 1995, afin de dégager des pistes de réflexion et d'action susceptibles de provoquer une amélioration de la situation.

Le CEF a organisé son analyse en deux parties.

Dans la première, il fait rapport sur les résultats enregistrés lors de l'enquête internationale, relaie les commentaires des chercheurs et des inspecteurs, présente des travaux d'évaluation interne en mathématiques réalisés sous l'égide de la cellule de pilotage du Ministère de l'Education. Il joue aussi son rôle de "caisse de résonance", en faisant état de travaux récents où est analysé l'enseignement des mathématiques pratiqué en Communauté française, et en relayant les propositions qu'ils présentent. Cette partie s'intitule "**Rapport au Conseil de l'Education et de la Formation**".

La deuxième partie correspond à l'**avis du Conseil**. Elle développe une analyse de l'enseignement des mathématiques en Communauté française de Belgique, en abordant successivement les aspects liés aux objectifs, aux contenus, aux méthodes, aux moyens, humains et matériels, et à l'évaluation. Pour chaque rubrique, des axes de proposition sont décrits. L'enquête de l'IEA étant consacrée aux résultats des élèves de 8ème année (2ème année de l'enseignement secondaire en Communauté française), le CEF a limité son examen à l'enseignement de base (les six années de l'école primaire et les deux premières années de l'enseignement secondaire) qui constitue la part de l'enseignement obligatoire commune à tous les élèves.

Première partie
RAPPORT AU CONSEIL DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Résultats et analyses

1. L'enquête de 1995

1.1. Résultats

Les questions posées couvrent **les diverses disciplines**, et concernent les connaissances, l'utilisation des procédures, la résolution de problèmes, le raisonnement et la communication.

Les tableaux ci-dessous reprennent les résultats obtenus par les élèves de la Communauté française de Belgique, et les résultats internationaux, pour les divers processus cognitifs.

processus cognitifs	résultats de la Belgique					
	1ère secondaire			2ème secondaire		
	min	max	$< M >$	min	max	$< M >$
connaissance	27,5	93,4	**63,5**	30,6	96,1	**68,4**
utilisation de procédures	8,1	94,9	**54,3**	19,0	93,2	**59,6**
résolution de problèmes	14,7	85,9	**53,1**	21,2	86,6	**56,9**
raisonnement	4,2	86,7	**29,2**	5,5	84,5	**32,5**
communication	12,6	95,6	**44,3**	13,1	91,2	**45,8**

processus cognitifs	résultats internationaux					
	1ère secondaire			2ème secondaire		
	min	max	$< M >$	min	max	$< M >$
connaissance	34,9	87,3	**57,3**	40,7	90,1	**62,7**
utilisation de procédures	20,3	85,9	**50,4**	24,5	86,7	**56,5**
résolution de problèmes	17,1	78,8	**46,4**	23,5	82,1	**52,2**
raisonnement	5,9	71,9	**27,8**	8,1	75,2	**32,8**
communication	12,4	82,1	**33,2**	17,8	84,0	**41,4**

Remarque : les trois premiers contenus ont été testés à travers plusieurs dizaines d'items (31 pour la connaissance, 70 pour l'utilisation de procédures et 48 pour la résolution de problèmes). Les deux derniers l'ont été sur 4 items.

Pour les élèves de 1ère secondaire, les résultats sont systématiquement supérieurs à la moyenne internationale. Il en est de même pour la 2ème secondaire, sauf pour le raisonnement.

Si l'on s'en tient aux résultats en valeur absolue, sans effectuer de comparaisons, il apparaît que nos élèves n'atteignent pas la moyenne, et présentent même des résultats très faibles pour les tests de raisonnement, et, dans une moindre mesure, pour la communication.

Comme le signale C. MONSEUR ([1]) , les résultats par processus cognitifs montrent que les items de connaissances sont plus souvent réussis : le

1. C. MONSEUR, "Résultats à une enquête internationale en mathématiques", *Mathématique et Pédagogie*, n°114, pp.5–12, 1997.

score est de 5.7 points plus élevé que la moyenne internationale, alors qu'il ne l'est que de 3.1 points pour les items d'utilisation de procédures.

Lors des deux précédentes études de l'IEA, les élèves francophones obtenaient déjà des résultats supérieurs à la moyenne internationale pour ces processus.

L'examen du tableau montre en outre que les résultats des élèves de la Communauté française augmentent, entre la 1ère et le 2ème secondaire, moins que ne le font les moyennes internationales.

Processus cognitifs	Différence entre les résultats de 1ère et de 2ème secondaire	
	en CFB	moyennes internationales
connaissance	3,1	5,4
utilisation de procédures	5,3	6,1
résolution de problèmes	3,8	5,8
raisonnement	3,3	5,0
communication	1,5	8,2

La comparaison internationale est plus favorable à la Communauté française lorsqu'on ne considère que les élèves de 1ère secondaire. Il y a donc une situation de "progrès insuffisant" qui est inquiétante.

Les élèves ont également été interrogés dans les différentes disciplines mathématiques. Les résultats enregistrés pour les élèves de 2ème secondaire figurent ci-dessous :

disciplines	Moyenne (CFB)	Moyenne internationale
nombres	62	58
géométrie	58	56
algèbre	53	52
représentation des données	68	62
mesure	56	51
proportionnalité	48	45

Comparativement aux résultats internationaux, il apparaît que nos élèves maîtrisent mieux les concepts d'arithmétique, de mesure, et la représentation de données que les concepts de géométrie et d'algèbre. L'analyse de C. MONSEUR ([2]) indique que "*en arithmétique, nos résultats sont particulièrement bons en ce qui concerne l'addition et la soustraction. Par contre, on*

2. C. MONSEUR, idem.

observe un déficit non négligeable pour la division de fractions ou de nombres décimaux. Les problèmes liés aux bases orthonormées suscitent également des difficultés pour nos élèves. Toutefois, ces derniers constats doivent être lus avec réserve car les questions portant sur ces contenus spécifiques ne sont pas très nombreuses".

La recherche renseigne sur le niveau acquis par les élèves de la Communauté française par rapport aux élèves de la même année d'étude, dans différents pays. Les résultats enregistrés dans cette étude dépendent aussi des caractéristiques spécifiques à chaque pays, notamment les contenus des programmes, le mode de progression des apprentissages, la formation des enseignants.

Dans ce travail, ce ne sont pas des chercheurs belges francophones qui ont rédigé les items soumis aux élèves, mais des experts étrangers. Certains items étaient donc formulés de façon inhabituelle pour les élèves. Les chercheurs belges l'avaient pressenti, et les résultats obtenus par les élèves ont confirmé cette intuition. Cela peut constituer une "information complémentaire", qui vient enrichir l'analyse. Elle semble indiquer que les élèves répondent plus correctement lorsque la question est formulée d'une manière qui leur est familière. Il leur est difficile, voire impossible, de s'adapter à une expression, une présentation différente.

Un autre aspect de la recherche est à épingler. Elle est organisée périodiquement, visant à rendre possibles les comparaisons au cours du temps.

A cet effet, des items d'ancrage sont introduits lors de chaque édition de l'enquête, ce qui permet de suivre l'évolution des performances.

Si l'on examine les pourcentages médians de réussite à la vingtaine d'items d'ancrage disponibles pour les deux Communautés belges, on observe qu'ils correspondent à 57% pour la Communauté française en 1995 (53% en 1984), et 65% pour la Communauté flamande (55% en 1984).

Rappelons que le pourcentage moyen de réussite (déterminé sur l'ensemble des items) est de 59% pour la Communauté française, et 66% pour la Communauté flamande. Il y a donc une bonne concordance entre les résultats d'ensemble et ceux des items d'ancrage.

1.2. L'étude IEA de 1995 : analyse des chercheurs

1.2.1. Des résultats meilleurs en mathématiques qu'en sciences

C. MONSEUR considère que les résultats des élèves sont encourageants en mathématiques : en deuxième année du secondaire, huit des quarante-et-un pays ayant participé à l'enquête obtiennent des résultats significativement supérieurs à ceux de nos élèves, et quatorze présentent des résultats proches (les différences ne sont pas statistiquement significatives). Dix-huit pays récoltent des résultats significativement inférieurs. "*En d'autres termes, la Communauté française de Belgique se situe légèrement au-dessus de la moyenne internationale. Toutefois, plus d'une année scolaire* ([3]) *nous sépare de la Communauté flamande* ([4])".

Ce sont les mêmes chercheurs qui, pour la Communauté française de Belgique, ont réalisé les études relatives aux mathématiques et aux sciences. Dans leurs analyses, ils insistent davantage sur les résultats, très faibles, enregistrés dans les matières scientifiques : en mathématiques, les résultats de nos élèves restent supérieurs à la moyenne internationale, et situent notre Communauté dans la première partie du classement. "*(...) si notre classement a tendance à se rapprocher de la moyenne internationale, il s'agit moins d'une diminution de niveau de performance de nos étudiants que d'une amélioration de quelques autres pays et de la venue de nouveaux participants* ([5])".

Ils remarquent cependant, en comparant les résultats obtenus lors des enquêtes de 1984 et de 1995 aux items d'ancrage, une légère augmentation (4%) des résultats belges francophones, alors que l'augmentation est plus importante (10%) chez les belges néerlandophones.

3. Les mêmes questions ont été posées à des élèves de 7ème année (1ère secondaire) et de 8ème année (2ème secondaire). La différence moyenne de score entre les résultats des deux années est de 29 points, en mathématiques. Cela signifie qu'en une année d'études, les élèves progressent en moyenne de 29 points. Cela veut dire aussi qu'un pays, présentant par rapport à un autre un écart de 29 points dans les résultats d'élèves de la même année, peut être caractérisé par un retard d'une année l'un par rapport à cet autre pays.

4. C. MONSEUR, "Nos élèves préfèrent Pythagore à Newton", PILOTINFO n°20, septembre 1997.

5. C. MONSEUR, "L'enseignement des sciences en Communauté française de Belgique est-il dans le 36ème dessous ? ? Résultats de la troisième étude internationale en mathématiques et en sciences de l'IEA", Janvier 1998 (Université de Liège).

1.2.2. Des différences significatives dans les résultats[4]

Selon les matières examinées, les résultats des élèves sont différents. "*Nos élèves maîtrisent mieux les concepts d'arithmétique, de mesure et la représentation des données que les concepts de géométrie et d'algèbre*".

On constate aussi que les élèves réussissent mieux quand ils doivent choisir la bonne réponse parmi plusieurs propositions que lorsqu'ils sont invités à produire un écrit.

Cette observation avait été faite également dans l'enquête relative aux sciences, où l'écart entre les deux types de réponses était de 10%. Il est de 18% pour les mathématiques. "*Les performances des élèves laissent donc le plus à désirer lorsqu'il leur est demandé de construire une réponse et de la rédiger*".

En outre, on observe que les élèves éprouvent de grandes difficultés à utiliser leurs connaissances pour résoudre un problème.

Dans l'analyse des résultats aux épreuves scientifiques, il a été mis en évidence que les programmes de sciences, en Communauté française de Belgique, ne présentent qu'un assez faible recouvrement avec ceux de nombreux autres pays. Cette donnée explique en partie les mauvais résultats observés. La situation est très distincte pour les mathématiques, où les objectifs poursuivis par nos programmes sont très comparables à ceux des autres pays. "*En effet, 85% des questions présentes dans les épreuves sollicitent des compétences que l'on retrouve dans nos programmes*".

1.3. Les résultats des tests d'évaluation externe effectués par la Communauté française

A l'initiative du secrétariat général, des évaluations externes (en français et en mathématiques) ont été menées au terme du premier, du deuxième et du troisième degré de l'enseignement primaire. Elles étaient mises au point par la Cellule de pilotage de l'enseignement du MERF. Leur visée était essentiellement diagnostique : elles devaient permettre aux enseignants de situer les résultats de leurs élèves, par rapport à différentes compétences examinées. Ce faisant, ils pouvaient évaluer les performances de leurs élèves, en regard de celles des autres élèves au profil comparable.

En 1996, l'évaluation externe a porté sur l'ensemble des classes de 1ère secondaire. Les résultats ont été publiés dans une brochure, adressée aux enseignants ([6]).

L'étude renseigne sur les résultats de l'enseignement fondamental, tel qu'il est assuré en Communauté française. Les questions proposées lors du test concernent les acquis de base que tous les élèves inscrits en 1ère A (ce sont ceux qui ont réussi une 6ème primaire ou une 1ère B) devraient maîtriser. Aussi pouvait-on légitimement s'attendre à des résultats élevés (de l'ordre de 80%). La faiblesse des résultats enregistrés doit dès lors interpeller les décideurs politiques sur la qualité de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Ceux-ci peuvent être mis en relation avec différentes caractéristiques de l'enseignement :
— quels sont les contenus qui sont approfondis ou esquissés ;
— quelles sont les méthodologies utilisées ;
— quelles sont les démarches qui sont développées avec les élèves ;
— quels sont les supports qui sont présentés ;
— quelles conceptions de l'apprentissage peuvent être portées par les enseignants.

Ainsi, on détecte par exemple une volonté, chez de nombreux enseignants, d'envisager la formation mathématique comme un apprentissage à résoudre des difficultés de la vie quotidienne (calculer le coût d'un repas, vérifier un ticket de caisse, etc.). Or, cette exploitation mathématique, limitée à quelques opérations simples, est très pauvre sur le plan de l'appropriation des mathématiques.

Les recommandations, faites par certains pédagogues (P. MEIRIEU, notamment), de construire un enseignement qui s'articule à la résolution de problèmes, est souvent comprise de manière restrictive par les praticiens. Il est possible de trouver, dans les mathématiques elles-mêmes, des situations qui "font problème à l'élève", sans qu'elles ne soient rattachées à leur vécu. Ces situations peuvent inciter l'élève à se mobiliser dans la résolution d'un problème en relevant un défi mathématique.

Les résultats de l'enquête invitent à se poser des questions de fond sur la conception de l'enseignement des mathématiques. Tous les acteurs de

6. "Evaluation externe des élèves de 1ère année du secondaire - Pistes didactiques Mathématique - Dossier pour les enseignants", Ministère de la Communauté française, Département de l'Education, de la Recherche et de la Formation, juin 1997.

cette formation devraient partager une position commune. Or, ce consensus n'existe visiblement pas.

Entre ceux qui privilégient la dimension utilitaire – voire utilitariste – des mathématiques, et ceux qui considèrent que les mathématiques sont, en elles-mêmes, un sujet d'étude, il n'y a rien de commun. Or, il est anormal que ce soit l'enseignant, dans sa classe, qui décide de la tendance de son enseignement.

Sans utiliser l'enquête pour repérer, contrôler, interpeller des enseignants –ce qui n'a jamais été son rôle et qui serait particulièrement inopportun– il convient de l'utiliser pour mettre en lumière les lacunes de notre enseignement, entamer le débat sur la conception de celui-ci et rechercher des solutions générales aux problèmes qu'il pose.

Parmi ces questions, on peut épingler :

— Quelle est la finalité de l'enseignement des mathématiques, dans l'enseignement primaire, dans l'enseignement de base, dans l'enseignement secondaire ?
— Quelle est la part de la connaissance dans cet enseignement ? Et quelle conception de la connaissance devrait-on avoir ?
— Quel recours au vécu des élèves, à la vie quotidienne faut-il envisager ?
— Quel gain, quel risque à “fonctionnaliser” l'apprentissage mathématique ?
— Quelle formation des instituteurs faudrait-il concevoir pour enseigner les mathématiques ? Le modèle de l'instituteur, maître unique et polyvalent, reste-t-il pertinent ?

1.4. Quelles conclusions peut-on tirer des deux études ?

L'analyse de l'étude du DERF est fouillée : elle dresse la liste des contenus pour lesquelles l'acquisition de compétences est forte ou faible. Ainsi, les auteurs pointent précisément les difficultés que rencontrent en moyenne les élèves de 1ère A : classement, placement sur une droite orientée, numération de position, détermination des multiples et des diviseurs, calcul et retrait d'un pourcentage d'un nombre donné, analyse d'un diagramme, calcul du périmètre et de l'aire de figures géométriques, questions relatives aux symétries, tri des données, choix d'une démarche cohérente, ...

En ce qui concerne l'enquête IEA ([7]), il apparaît que les questions de connaissance sont mieux réussies que les questions d'utilisation de procédures.

On signale en outre ([8]) que "*Nos élèves maîtrisent mieux les concepts d'arithmétique, de mesure, et la représentation de données que les concepts de géométrie et d'algèbre. (...) Les questions où l'élève doit choisir la bonne réponse parmi plusieurs propositions sont mieux réussies que celles nécessitant une production écrite. (...) Les performances des élèves laissent donc le plus à désirer lorsqu'il leur est demandé de construire une réponse et de la rédiger. (...) Nos élèves éprouvent des difficultés à utiliser leurs connaissances scientifiques pour résoudre un problème*".

Nous avons rencontré ensemble Christian MONSEUR (U.Lg), le chercheur qui a conduit l'enquête IEA, relayée dans le rapport de l'OCDE, et Jacques GREGOIRE (U.C.L.), responsable de l'évaluation externe conduite dans le cadre du pilotage de l'enseignement par le DERF. L'objectif de la réunion était de confronter ces deux recherches et d'examiner si elles pouvaient se corroborer.

1.4.1. En quoi se distinguent les deux études

L'étude DERF est une épreuve critériée, qui entend situer les résultats des élèves par rapport à des objectifs. Il s'agissait en effet de mesurer dans quelle proportion les élèves s'étaient approprié les acquis mathématiques jugés nécessaires à la poursuite de leur formation mathématique dans l'enseignement secondaire.

La recherche IEA repose sur une épreuve purement normative : les résultats n'ont de sens que dans la comparaison faite entre eux et ceux des autres pays. Au demeurant, les contenus qui ont fait l'objet des questions ne correspondent pas totalement aux programmes enseignés dans notre Communauté.

Les deux recherches se différencient aussi par les populations d'élèves qu'elles concernent. L'étude DERF a été menée avec des élèves de 1ère secondaire, la distinction étant faite, dans l'analyse des résultats, entre les populations de 1ère A et de 1ère B. L'enquête IEA portait sur des classes

7. "Résultats à une enquête internationale en mathématiques", C. MONSEUR, *Mathématique et Pédagogie*, n°114, pp. 5–12, 1997.
8. "Nos élèves préfèrent Pythagore à Newton", C. MONSEUR, Pilotinfo (mai 1997).

de 2ème secondaire, incluant les élèves de 2ème commune et de 2ème professionnelle. Des mesures ont porté aussi sur les réponses des élèves de 1ère A. Elles ne sont pas officiellement reprises dans le rapport OCDE, les populations de 1ère et de 2ème ne pouvant être comparées (absence des résultats de 1ère B, et différence de population entre la 1ère B(10%) et la 2P (20%).).

Les deux approches apportent chacune des informations intéressantes et utiles. Toutefois, elles ne peuvent être comparées qu'avec de grandes précautions et une extrême réserve.

1.4.2. Opportunité de comparer les deux recherches

Les résultats dégagés par les deux recherches ne peuvent pas être comparés en tant que tels. Leur logique de production est en effet trop distincte. Toutefois, il serait possible de sélectionner , dans les items de la recherche IEA ceux qui pourraient relever d'une conception comparable. Cela impliquerait la constitution d'une équipe de travail composée d'experts en mathématiques ("Pannel de juges"). Ils réaliseraient le tri des items.

Il s'agirait là d'un travail de recherche intéressant, mais lourd, impliquant l'intervention d'un chercheur qui devrait être rémunéré. Développer cette piste de travail n'entre pas dans les possibilités budgétaires du CEF.

Une autre piste, à moyen terme, reviendrait à introduire dans la prochaine édition de la recherche DERF en 1ère secondaire (prévue pour l'automne 1998) des items utilisés dans l'enquête IEA de 1995. On se donnerait ainsi un moyen d'établir des comparaisons valables, dans l'avenir.

2. L'analyse des inspections des enseignements fondamental et secondaire

Comme il l'avait fait déjà lors de l'analyse des résultats des élèves en sciences, le CEF a réuni ([9]) les responsables de l'inspection des enseignements fondamental et secondaire. Pour l'enseignement fondamental, Mme V. PIRON, Inspectrice générale de l'enseignement subventionné, et M. COLLIGNON, Inspecteur principal pour la Communauté française, assistaient à la réunion. Pour l'enseignement secondaire, M. l'Inspecteur général J. RAVEZ était présent, ainsi que les inspecteurs de mathématiques, MM. A.

9. La réunion a eu lieu le lundi 11 mai 1998 à Bruxelles.

BAJART, C. BENEDETTI, C. BOUCHER, P. BRZAKALA, L. COLOT, A. DUBOIS et R. MATHAR.

Le CEF avait aussi invité M. N. ROUCHE, Directeur du Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) et M. L. HABRAN, Inspecteur principal honoraire, qui participèrent aux travaux de la Commission DANBLON (*vide infra*), ainsi que M. M. DEMAL, professeur dans l'enseignement supérieur pédagogique de la Haute Ecole de la Communauté française du Hainaut.

La réflexion générale, conduite à partir des analyses des différents participants, a permis de dégager plusieurs idées qui sont développées ci-après.

2.1. Le sens de l'enseignement des mathématiques

L'enseignement des mathématiques se caractérise généralement par un excès de formalisme, dans lequel le sens a disparu.

A l'appui de cela, on signale que les jeunes éprouvent des difficultés, parfois insurmontables, à exprimer par des mots les concepts représentés sous forme de symboles mathématiques.

2.2. La continuité de l'enseignement des mathématiques

La rupture, souvent dénoncée, entre l'enseignement fondamental et l'enseignement secondaire, est particulièrement sensible en mathématiques. Elle apparaît notamment à travers les différences de langages entre instituteurs et régents.

On constate en outre que, dans le cursus des élèves se manifeste un passage trop brusque entre les "mathématiques de discipline", pratiquées dans les quatre premières années de l'école primaire, et les "mathématiques de démonstration" qui caractérisent l'enseignement secondaire, à partir de la deuxième année. Il y a donc une espèce de "trou" de trois années (de la 5ème primaire à la 1ère secondaire), un fossé où la transition ne s'effectue pas.

2.3. L'intérêt de recourir à la résolution de problèmes

L'enseignement des mathématiques devrait, comme celui des autres disciplines, amener les élèves à penser, les inviter à réfléchir. Dans cette perspective, il serait pertinent et sans doute efficace de placer les élèves en situation de résoudre des problèmes, d'apporter des réponses à de vraies questions. Ce type de démarche est préconisé, notamment dans les Socles de compétences.

Il faut cependant reconnaître que cette méthodologie exige, pour être valablement pratiquée, que plusieurs conditions de réalisation soient rencontrées :

— L'enseignant qui la met en ?uvre doit posséder une connaissance approfondie de sa discipline, alliée à une réelle culture dans celle-ci. Il ne s'agit plus seulement de se préparer à transmettre une matière : il faut être capable, en permanence, d'apporter des éléments de réponse ou de proposition face à des situations imprévues, nouvelles.

— Il doit aussi posséder une vraie confiance en ses possibilités de conduire de telles démarches : un enseignant inquiet, effrayé devant l'inconnu et l'imprévisible est incapable de développer avec ses élèves la résolution de situations-problèmes.

— Ce type d'enseignement demande une préparation importante de la part des enseignants, et aussi un travail personnel approfondi de la part des élèves. A ce propos, il convient de distinguer les notions de "travail personnel" et de "travail à domicile". S'il est indispensable, en mathématiques comme dans d'autres disciplines, de demander aux élèves d'effectuer un réel travail personnel, il n'est pas sain d'exiger que les élèves le réalisent à la maison. Le travail à domicile discrimine en effet les enfants qui disposent chez eux d'un local d'étude, d'un environnement documentaire, de l'aide d'adultes, voire de temps, et ceux qui ne possèdent pas ces éléments essentiels.

  Il est dès lors indispensable de ménager des plages de temps, utilisables pour effectuer du travail personnel, dans les écoles (où locaux, livres, documents, aide des condisciples et des enseignants sont utilisables), pendant le temps scolaire ([10]).

  A l'appui de ceci, M. DEMAL fait état d'une expérience pilote, menée dans la région du Borinage, avec des enfants pour partie issus de milieux favorisés, pour partie venant de milieux défavorisés. L'écart,

10. Des propositions allant dans ce sens figurent dans le Rapport de la Commission des Rythmes Scolaires (octobre 1991).

entre les résultats des deux groupes d'élèves n'apparaît pas dans l'acquisition en classe des concepts mathématiques, mais il se creuse avec l'intervention du travail à domicile.

— Il implique aussi le recours systématique à l'interdisciplinarité : les problèmes qui comportent des aspects mathématiques sont à examiner aussi sous l'angle d'autres disciplines. Il faut donc, pour le pratiquer, mettre en place des équipes d'enseignants, travaillant collégialement, tant pour préparer que pour conduire l'enseignement et pour l'évaluer.

— Pour réaliser un enseignement basé sur la résolution de problèmes, il faut disposer de temps, de souplesse dans l'organisation de l'enseignement. Il faut que les programmes soient compatibles avec cette souplesse. Il est indispensable aussi que les élèves puissent avoir accès à des sources d'information : livres de références, ressources documentaires variées.

2.4. La formation initiale des enseignants

Pour les inspecteurs, plusieurs problèmes sont décelables à ce propos :

— Les professeurs d'école normale connaissent de moins en moins souvent le niveau d'enseignement pour lequel ils forment leurs étudiants. De ce fait, ces derniers sont mal préparés à concevoir un enseignement réellement adapté aux élèves.
Des modifications, dans les exigences de titres et d'expérience pour enseigner dans le supérieur pédagogique expliquent cette évolution. Mais elle est aussi justifiée par la dissociation systématique et obligatoire de l'enseignement secondaire et de l'enseignement supérieur.

— Même si ce n'est pas le cas pour toutes les Ecoles Normales, il arrive fréquemment que les formations soient cloisonnées selon les niveaux d'enseignement (maternel, primaire, secondaire inférieur) : on forme distinctement les futurs instituteurs et les futurs régents. N'ayant pas été associés, dans le cadre de leur formation initiale, ils n'ont pas été incités à collaborer, ils ne sont pas sensibilisés à l'intérêt d'une continuité verticale des apprentissages.

— En outre, il n'existe pas de lieux de rencontre formalisés où les enseignants du primaire et du secondaire peuvent se retrouver et collaborer. Cette opportunité n'est pas davantage assurée aux professeurs d'Ecole Normale des différentes sections. Au demeurant, les inspecteurs qui interviennent dans l'enseignement secondaire ne sont pas les mêmes que ceux qui ont la responsabilité du supérieur pédagogique.

— Les étudiants qui entreprennent des études d'agrégé de l'enseignement secondaire inférieur (régendat) ont minoritairement choisi ces études d'emblée : il s'agit le plus souvent d'un deuxième choix, consécutif à un échec à l'université. Cela peut expliquer que ces étudiants soient parfois moins motivés, moins impliqués dans leurs études.

  Cette remarque, formulée par certains inspecteurs, n'est cependant pas spécifique à l'enseignement des mathématiques.

— La question de la polyvalence des instituteurs est posée. Si l'on veut développer un enseignement qui s'articule à la résolution des problèmes, il faut que les enseignants maîtrisent bien les concepts qui fondent leur discipline, qu'ils soient particulièrement compétents dans leur matière et confiants en leur capacité à l'utiliser en situation concrète. Est-ce possible d'atteindre ce niveau de maîtrise dans l'ensemble des disciplines de l'école primaire ? Ne serait-il pas opportun de renoncer à la polyvalence des instituteurs, de former des enseignants compétents dans une partie de celles-ci, à condition que des équipes stables et bien coordonnées d'enseignants soient mises à la disposition de chaque classe d'élèves ? Cette question devrait être étudiée dans un cadre plus large que celui-ci.

Pour apporter des éléments de solution à ces problèmes, des pistes sont avancées.

Les inspecteurs insistent d'abord sur la nécessité de reconsidérer le métier d'enseignant, de former les futurs enseignants à l'exercice d'un métier plus collectif qu'il ne l'est aujourd'hui.

Il s'agit de promouvoir la coopération :

— Une <u>coopération horizontale</u> doit s'établir entre enseignants qui travaillent au même niveau, avec la même classe. Elle est notamment indispensable à la mise en ?uvre d'un enseignement interdisciplinaire, étroitement lié à la résolution de problèmes.

— Une <u>coopération verticale</u> est nécessaire pour garantir la continuité des apprentissages. Elle sera basée sur la pratique systématique de l'évaluation continue : il importe de vérifier l'acquisition effective des compétences et des savoirs qui constituent la base pour les apprentissages ultérieurs. La réalisation d'un enseignement "en spirale" ([11]) s'inscrit aussi dans cette logique.

11. Voir plus loin, au point 3.1.12 (Rapport DANBLON).

Mais il faut aussi favoriser et faciliter la coopération entre l'enseignement supérieur pédagogique et le terrain de l'enseignement primaire et secondaire, où vont évoluer, dès la fin de leurs études, les étudiants d'Ecole Normale.

2.5. La formation continuée des enseignants

Les inspecteurs souhaitent que la formation continuée soit rendue accessible à tous les enseignants qui sont actuellement en activité de service. C'est à travers elle que pourront être diffusées, expliquées, adoptées les innovations pédagogiques et les recommandations propices à améliorer la qualité de l'enseignement.

Ils insistent notamment sur l'articulation indispensable à opérer entre les socles de compétences et la formation continuée des enseignants. Au moment où les socles sont remis sur le métier, où une nouvelle version, obligatoire, va succéder à la première mouture expérimentale, il importe de garantir leur impact. Une politique coordonnée devrait être menée pour que les enseignants du terrain puissent s'approprier les socles, en comprendre l'utilité, en mesurer l'intérêt, en imprégner leur enseignement, les considérer comme des objectifs à atteindre avec tous les élèves. La simple diffusion du document écrit ne conduira à ce résultat que dans un nombre limité de cas. Il faut donc soutenir, conjointement à la publication des nouveaux socles, l'organisation de séquences de formation continuée destinées à soutenir les enseignants dans leur mise en ?uvre.

Deux axes de développement de la formation continuée sont évoqués. Ils ne sont pas incompatibles et peuvent être combinés :

— La "formation continuée classique" consiste en séquences de formation réunissant des enseignants et des formateurs, à l'extérieur de l'école.
L'intérêt de cette formule est qu'elle permet aux enseignants de se concentrer sur leur formation puisque, pendant son déroulement, ils n'assurent pas leur charge. En outre, le rassemblement de professeurs issus de différentes écoles complète la formation par des échanges de pratiques et des confrontations qui s'avèrent toujours enrichissantes. Toutefois, cette formule comporte un inconvénient majeur : les professeurs en formation, absents de leur établissement, n'y sont pas remplacés. Cela crée chez eux une certaine culpabilité, à l'idée de ne pas assumer leur fonction. Cela complique aussi le travail des chefs d'établissements, qui se montrent dès lors réticents à autoriser la

participation des enseignants à des formations. Et surtout, cela ne constitue pas un facteur favorable à l'apprentissage des élèves.

— La concertation et le travail quotidien en équipe de collègues d'une même école ou d'écoles proches comporte une dimension formative sur laquelle les inspecteurs veulent mettre l'accent.
A cet égard, des réalisations concrètes sont décrites. Par exemple, ici dans une école, là dans un district pédagogique, l'ensemble des enseignants d'une même année d'études rédige en commun les questions d'examens ou de contrôles à soumettre indistinctement à tous leurs élèves. Outre que cette pratique contribue à une meilleure égalité des résultats de l'enseignement, en harmonisant les exigences entre tous les élèves, elle incite les enseignants à réfléchir à leur pratique, à la remettre éventuellement en question . Elle contribue aussi à rendre l'enseignement plus cohérent.

2.6. L'évaluation des apprentissages

Malgré les nombreuses publications, les formations, les initiatives des inspecteurs et des pouvoirs organisateurs, le militantisme des chercheurs en sciences de l'éducation, la pratique de l'évaluation formative n'est pas généralisée dans les classes. Dans nombre d'écoles, on a toujours recours à un "enseignement culpabilisant", où les "fautes" commises par les élèves sont sanctionnées, sans qu'un profit réel pour leur apprentissage n'en soit tiré. Les inspecteurs regrettent profondément le succès de ce modèle, auquel ils voudraient voir substitué un "enseignement responsabilisant", où les "erreurs" des élèves constituent des indications importantes pour moduler l'apprentissage et atteindre les objectifs éducatifs.

La formation initiale et la formation continuée des enseignants devraient d'urgence développer la pratique de l'évaluation formative.

3. La conception et les finalités de l'enseignement des mathématiques

Des travaux récents ont été conduits, en Communauté française, pour élaborer des propositions visant à élaborer un meilleur enseignement des mathématiques.

Nous ferons plus particulièrement mention de trois études :

Le rapport "Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté française de Belgique", coordonné par Paul DANBLON ([12]).

Le rapport "Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans ? Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques", réalisé par le CREM a.s.b.l. ([13])

Le rapport "Mathématiques de 10 à 14 ans ? Continuité et compétences", réalisé par la Commission "Mathématiques" de la Cellule de pilotage du Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation ([14]).

3.1. Le "Rapport DANBLON"

La Commission scientifique d'Etude des Mathématiques et des Sciences a été créée par le Ministre YLIEFF en mai 1989. Elle a été chargée de rechercher le moyens d'exercer "le pilotage de notre enseignement vers des formations riches de contenus, humanistes et rentables".

De mai 1989 à juin 1990, la Commission s'est attachée à l'enseignement des mathématiques, faisant porter son analyse sur le programme et les personnes qu'il concerne. Elle a produit un rapport apportant surtout des indications et des recommandations.

3.1.1. Une conception des mathématiques

Apprendre des mathématiques revient à améliorer sa capacité à penser mathématiquement, à résoudre des problèmes, en mobilisant l'imagination, l'intuition, le flair, le sens esthétique, l'induction, la déduction, la logique.

Cet apprentissage des mathématiques ne peut se concevoir comme une accumulation de connaissances dont chacune serait "*définitivement acquise du premier coup*". C'est pourquoi il ne faut pas envisager l'éducation

12. Ministère de l'Education, Bruxelles, 1991.
13. Document élaboré dans le cadre de conventions de recherche passées entre le CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et le Ministère de la Communauté française de Belgique, 1995.
14. "Mathématiques de 10 à 14 ans ? Continuité et compétences", Cellule de pilotage, Secrétariat général du MERF, 1996 (référence : Mathématiques/96).

mathématique seulement selon les niveaux d'enseignement (maternel, primaire, secondaire inférieur, secondaire supérieur), ni selon les matières (géométrie, algèbre, trigonométrie, probabilités, analyse, ?), ni non plus indépendamment des autres disciplines. "*Elle doit être construite dans sa cohérence globale d'un bout à l'autre de la jeunesse, avec des passages et repassages aux points clés, et chaque fois un approfondissement, une généralisation, une vue plus large. C'est ce qu'on appelle souvent "l'enseignement en spirale".*".

Le problème majeur de l'enseignement des mathématiques est celui du sens. "*L'accident le plus fréquent, dans l'apprentissage des mathématiques est la perte du sens et le repli sur la forme sans contenu : ne plus penser et se contenter d'exécuter des algorithmes selon l'unique procédé permis devient rapidement insoutenable*".

3.1.2. Les programmes

Des reproches

La Commission formule à l'égard des programmes existants les reproches suivants :

— Il n'y a pas de coordination entre les programmes du primaire et ceux du secondaire. "*Il n'existe actuellement dans notre pays aucun organe chargé d'élaborer une vue coordonnée de l'enseignement des mathématiques, de la maternelle à l'université. C'est une lacune*".

— Les programmes du secondaire général et technique, pour les groupes d'élèves qui suivent un cours à peu d'heures de mathématiques, correspondent souvent à une réduction des programmes conçus pour un plus grand nombre d'heures (on en a retranché certaines matières, on en a retiré de la profondeur en supprimant par exemple les démonstrations).

— Les programmes du secondaire professionnel sont conçus "à part", pour des élèves dont on assure qu'ils ont un esprit plus pratique que théorique. Ce faisant, on feint d'ignorer que l'accès en professionnel résulte généralement de relégations suite à des échecs qui ont souvent une origine sociale. On exclut ainsi la possibilité de récupérer des élèves qui pourtant, sont récupérables.

Des propositions

La Commission détaille une série de propositions, propres à rencontrer les reproches énoncés :

— Il conviendrait de penser globalement les différents programmes à partir d'un unique noyau de base ([15]). Il s'agirait ainsi de "*prévoir, pour chaque citoyen, de la maternelle jusqu'au terme de la scolarité obligatoire, un ensemble commun de connaissances et de capacités mathématiques fondamentales. (?) Selon les filières d'enseignement, ces notions fondamentales seraient soit naturellement intégrées dans un programme plus vaste, soit complétées par l'adjonction de matières plus générales et d'applications plus poussées, soit enfin enseignées comme telles. Dans les filières où elles apparaîtraient comme particulièrement difficiles à atteindre, elles devraient demeurer comme un objectif dont on se rapproche le plus possible*".

— Les programmes devraient être élaborés en s'inspirant explicitement du principe de l'enseignement "en spirale". D'abord parce qu'aucune connaissance mathématique ne saurait être définitivement acquise du premier coup. Ensuite, parce qu'en refusant d'enchaîner linéairement les acquisitions, on permet à l'élève qui décroche d'avoir une nouvelle chance de s'approprier une notion non acquise d'emblée.

— Les programmes devraient insister sur la résolution de problèmes et la capacité de penser mathématiquement. "*Enseigner les concepts et les théories dans des contextes qui leur donnent du sens, qui exhibent leurs tenants et aboutissants dans les mathématiques et dans les autres disciplines*".

  Il y a lieu, à cet égard, de faire ressortir le statut particulier des mathématiques par rapport aux sciences de la nature et aux sciences humaines. "*Les modèles mathématiques de situations réelles sont souvent utiles, mais ont toujours un domaine d'application limité qu'il faut apprendre à cerner. Ceci implique que les programmes de mathématiques soient coordonnés avec ceux des autres disciplines, chose aussi importante que pratiquement difficile et qui n'a jamais été tentée dans notre pays*".

  En outre, si l'on souhaite que les enseignants amènent leurs élèves à travailler sur des problèmes, à construire et à reconstruire les principaux concepts, il sera nécessaire de mettre à leur disposition des réserves de situations problématiques appropriées. Comme l'expliquent les auteurs du rapport, "*Nous pensons que l'enseignement des mathématiques est trop important socialement pour qu'on puisse*

15. Il ne faut pas déduire de cette proposition qu'on pourrait regrouper tous les élèves pour acquérir le noyau de base, puis assurer des compléments séparément pour certains élèves. Il ne peut donc être question d'un tronc commun qui ne permettrait pas de rencontrer la spécificité des formations !

continuer à le gérer sans l'appui d'un ou plusieurs groupes de recherche chargés de le penser globalement, puis d'en concevoir et d'en expérimenter les modalités détaillées. Ce qui est fait actuellement dans les universités et les écoles normales avec des moyens de fortune est insuffisant".

— Le rapport aborde aussi la question des manuels scolaires. Pour les auteurs, "*il est essentiel d'enseigner les mathématiques dans leur unité, et donc de ne pas rompre les liens entre leurs diverses parties. (?) Il faudrait essayer, même si c'est difficile, de mettre entre les mains des élèves certains ouvrages destinés à être utilisés tout au long de leurs études et favorisant la cohérence et la continuité de leur apprentissage*".

3.1.3. La formation des enseignants

Les futurs enseignants doivent "*avoir des connaissances solides et se trouver à l'aise, capables de pensée autonome dans une mathématique nourrie de sens. Ils doivent être rompus à la résolution de problèmes*".

Ils doivent aussi être spécifiquement préparés à enseigner dans le technique et le professionnel, filières qui concernent un grand nombre d'élèves de l'enseignement secondaire : "*la quasi inexistence actuelle d'une telle préparation est une lacune grave. Elle est une cause, parmi d'autres, de ce que bon nombre de professeurs enseignent à ces classes sans enthousiasme et demandent à les quitter*".

Pour les agrégés de l'enseignement secondaire inférieur, le programme de formation initiale doit comporter une étude avancée des mathématiques élémentaires, sans se limiter à celles qui sont enseignées au degré inférieur. Leur formation, à l'école normale, devrait être assurée par une équipe diversifiée d'enseignants, ayant des expériences variées dans le niveau d'enseignement pour lequel ils les forment. "*Les étudiants tireraient bénéfice d'une telle variété de compétences et de la diversité des points de vue*".

Pour les agrégés de l'enseignement secondaire supérieur, les études devraient davantage développer la capacité de résoudre des problèmes et la pensée mathématique autonome.

En outre, la Commission suggère d'étudier l'organisation institutionnelle de l'enseignement obligatoire, de manière à ce que les instituteurs, les régents et les licenciés puissent réellement collaborer pour assurer une formation mathématique globale et cohérente.

En ce qui concerne la formation continuée, la Commission suggère d'en confier une partie substantielle à des groupes de recherche. "*L'expérience belge, confirmée par celle de divers pays étrangers a montré que la formation continue la plus efficace est celle qu'acquièrent les enseignants lorsqu'ils travaillent en collaboration à la production des matériaux de leur propre enseignement. Dans l'organisation de la formation continue, il importe de stimuler les demandes et de favoriser les projets. Des demandes peuvent provenir par exemple de professeurs qui veulent apprendre de nouvelles matières mathématiques, ou d'écoles préparant l'ouverture de nouvelles options, ou de pouvoirs organisateurs à la recherche d'une politique originale. Ensuite, la formation continue, hautement souhaitable, devrait dorénavant être reconnue comme un droit et être intégrée harmonieusement à l'exercice de la profession. Il nous semble opportun aussi qu'elle soit, de quelque façon, reconnue et valorisée dans la carrière*".

3.1.4. La recherche

Aux niveaux du primaire et du secondaire, l'enseignement des mathématiques est cloisonné, pour son organisation comme pour les actions de recherche ([16]).

La séparation des recherches relatives à ces niveaux justifie que "*beaucoup trop peu de personnes, dans notre pays, s'efforcent de développer une vue cohérente de l'apprentissage des mathématiques depuis le plus jeune âge jusqu'à l'âge adulte. Cette lacune est très regrettable*".

La Commission propose de créer des groupes de recherche sur l'enseignement des mathématiques. Ils seraient composés de personnes, compétentes par leur connaissance des différents publics d'élèves, et aussi des mathématiques, de leur histoire, de leur épistémologie, et encore de la conduite des classes et de l'administration de l'enseignement. Elle insiste particulièrement sur la présence de "*mathématiciens à culture mathématique large*", disposés à "*accorder aux problèmes d'apprentissage une attention persistante*".

16. Les recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques sont menées séparément, pour le maternel et le primaire, en facultés de psychopédagogie, pour le secondaire dans les départements de mathématiques.

De même, on devrait y trouver des instituteurs et des professeurs expérimentés, détachés à temps partiel (à mi-temps, par exemple), "*de façon à ce qu'ils conservent l'expérience intime de leur métier*".

La mission de base de ces groupes de recherche serait "*la production critique et l'expérimentation de matériaux pour enseigner (des curriculums). Ils devraient en outre maintenir un lien supplémentaire avec l'enseignement sur le terrain en étant associés à la formation initiale et continue des maîtres*".

3.2. Le "Rapport du CREM"

Le CREM a.s.b.l. (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) a pour missions principales la recherche sur l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte, et la formation continue des enseignants de mathématiques. Il a été chargé en 1993 par le ministère de l'éducation de rédiger un cadre global pour l'enseignement des mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans.

3.2.1. Des constats, des explications

A l'origine de la recherche du CREM on trouve l'observation que l'enseignement des mathématiques conduit trop souvent à l'échec et à la relégation d'élèves. Pour l'expliquer, les raisons suivantes sont avancées :

— Les mathématiques sont enseignées dans leur forme déductive sans faire suffisamment de place à la genèse des théories, aux contextes problématiques dans lesquelles elles sont applicables ou explicables, à l'activité mathématique des élèves.

— Elles se réduisent à un entraînement de routine, à l'application de règles strictes, sans prendre en compte leur origine et leur fonction dans la culture mathématique globale.

— L'enseignement mathématique n'est pas pensé comme un tout cohérent, mais par "*tranches horizontales étanches*". Les commissions de programmes fonctionnent séparément, sans coordination, aux niveaux maternel, primaire et secondaire. Les enseignants sont formés dans des filières distinctes, avec en plus un compartimentage entre le secondaire inférieur et le secondaire supérieur. Les recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques sont menées séparément, pour le maternel et le primaire, en facultés de psychopédagogie, pour le secondaire dans les départements de mathématiques.

3.2.2. Une recherche

La recherche du CREM consistait à élaborer un projet comprenant les grands axes de la formation mathématique. Il ne se confond pas avec un programme. Il constitue plutôt "*une base de discussion aisément accessible qui permette à chacun de situer son effort et de le coordonner à ceux des autres. (?) Enfin, last but not least, ce cadre global devrait aussi aider à reconnaître comment s'acquièrent et s'expriment, à travers la matière mathématique, les compétences de base qui font aujourd'hui l'objet de beaucoup d'attention dans l'enseignement*".

Son objectif était de rédiger, pour l'enseignement correspondant à l'obligation scolaire, un programme cadre comportant un noyau commun et une formation spécifique aux trois filières de l'enseignement général, technique et professionnel.

Que faut-il apprendre aux élèves ?

Les jeunes doivent s'approprier l'héritage des adultes et le marquer de leur empreinte pour l'avenir. Pour cela, il ne faut pas transmettre un "savoir achevé", mais construire un savoir en réponse à des interrogations, portant sur des situations-problèmes de la vie quotidienne. "*Débattre de telles questions avec des jeunes situe le savoir dans sa dimension éthique de patrimoine collectif, évoluant de génération en génération*".

Comme les élèves ne sont pas fixés sur leur avenir, il faut leur ménager la possibilité de mûrir leurs choix, culturels et professionnels, tout en cultivant avec eux "*la soif de savoir et la joie de connaître qu'on voit s'éveiller chez les enfants dès l'âge de deux ou trois ans*".

L'étude réalisée n'est pas un programme

Son objectif est de proposer des principes susceptibles d'aider à l'acquisition d'une réelle compétence en mathématiques : "*apprendre à penser mathématiquement*".

Pour l'atteindre, il faudra que la pratique des enseignants se modifie. "*Il ne suffira pas, pour y arriver, de documents tels que celui sur les socles de compétences, les nouveaux programmes ou la présente étude. Il faudra en plus d'authentiques curriculums au sens anglo-américain de ce terme, à savoir des recueils de situations-problèmes, mais accompagnés chapitre après chapitre d'une argumentation critique, d'exemples vécus dans des classes, de commentaires mathématiques et épistémologiques et d'indications méthodologiques, ainsi que de recommandations pour l'évaluation*".

Il s'agira donc de :

— produire des curriculums s'inscrivant dans une pédagogie de construction des savoirs, et de renoncer à enseigner la science toute construite. Ces curriculums ne pourront être construits par des mathématiciens seuls, ni par des enseignants seuls. "*Il y faudra l'effort conjoint d'enseignants expérimentés de tous niveaux et de mathématiciens intéressés par l'éducation*".

— former les enseignants pour qu'ils acceptent l'idée d'un apprentissage constructiviste, et reconnaissent une part suffisante d'autonomie aux élèves.

3.2.3. Les propositions du CREM

Le CREM propose une conception globale de l'enseignement des mathématiques, "*d'un bout à l'autre de la jeunesse*", ou encore, comment faire accéder les élèves de tous âges à une activité mathématique authentique.

La philosophie générale qui inspire cette proposition est largement partagée au plan international, ce qui n'était pas le cas pour la réforme des mathématiques modernes.

Trois grandes questions sont soulevées et traitées.

Première question : alors que la distance entre la pensée commune et les mathématiques vivantes (celles des chercheurs) s'accentue, comment ces dernières peuvent-elles et doivent-elles intervenir dans l'enseignement élémentaire ?

La réponse donnée à cette question est développée selon quatre axes :

Elaguer

Il faudrait écarter des programmes les matières devenues "*branches mortes des mathématiques*", à condition qu'elles ne contribuent pas, de façon essentielle, à la reconstruction des mathématiques et qu'elles ne soient pas utiles dans des activités humaines importantes, quoiqu'extérieures aux mathématiques ([17]).

Introduire des notions nouvelles

Les mathématiques ont produit naguère et produisent encore aujourd'hui des concepts simples et utiles, devenus des instruments de pensée quotidiens, et des outils indispensables dans la plupart des activités humaines. Ce fut le cas, dans le passé, pour les nombres décimaux à virgule, des fonctions, des graphiques, des nombres négatifs. Aujourd'hui, il s'agit plutôt des transformations et des algorithmes.

Aller plus loin

Des matières nouvelles (les vecteurs, les dérivées, les intégrales, les statistiques et les probabilités) devraient être enseignées de façon progressive

17. Le CREM évoque notamment à cet égard la multitude des propriétés des triangles, les très nombreux exercices sur les coniques, la recherche des lieux géométriques.

et dans des contextes qui leur donnent sens, aux élèves des trois dernières années du secondaire.

Privilégier les éléments indispensables

Certaines matières élémentaires disparaissent des mathématiques constituées ou sont absorbées dans un chapitre plus général, plus abstrait. Il ne faut pas pour autant les évacuer des programmes de l'enseignement obligatoire. Il faut ménager aux éléments indispensables à la formation la place qu'ils méritent et qu'ils ont largement perdue dans les programmes du primaire. Il s'agit de la manipulation des grandeurs, la géométrie qui étudie les propriétés des solides et des figures inscrits dans l'espace, la mesure des aires et des volumes.

En conclusion pour cette question, les auteurs du rapport considèrent que "*le système d'enseignement a la responsabilité d'apprendre à tous les jeunes les mathématiques élémentaires, pertinentes et utiles aujourd'hui. De plus, certains d'entre eux doivent être préparés efficacement à la carrière de chercheur. Et enfin, il importe que les autres, la grande majorité, aient la possibilité d'un dialogue avec les premiers et donc une idée honnête des mathématiques actuelles. Il est malsain pour la démocratie qu'une nation développe une intelligentsia trop à l'écart des citoyens ordinaires*".

Deuxième question : comment développer le sens, et exercer l'autonomie de la pensée en enseignant les mathématiques.

Deux aspects sont abordés, dans le cadre de cette question : la prise en compte de situations-problèmes, et celle du contexte.

Les situations-problèmes

Apprendre aux jeunes à penser mathématiquement ne peut se faire qu'en présence de situations qui y invitent, qui posent problème. Ces situations-problèmes "*doivent représenter pour chaque élève un défi mesuré, pas trop dur car ce serait décourageant, pas trop facile car il n'y apprendrait pas grand chose et ne serait pas stimulé*".

L'élève doit apprendre la pensée autonome : prendre des initiatives, agir, réfléchir avec une "*intention personnelle*". Cette perspective n'est pas propre à l'enseignement des mathématiques. Elle devrait traverser tout l'enseignement. "*Il n'est pas acceptable que, sous prétexte de préparation à la vie et aux professions, l'école transmette des savoirs dont le plein sens ne puisse* *apparaître qu'après l'école. Celle-ci prépare d'autant mieux à la vie qu'elle est elle-même une tranche de vie où chaque jour apporte sa part d'activités pourvues de sens dans le présent*" ([18]).

C'est en étant explicitement intégrée à la vie que l'école peut être pleinement motivante pour les élèves. Elle peut l'être encore en amenant les élèves à porter un regard curieux et profond sur les phénomènes apparemment banals : en supposant qu'ils ne vont pas de soi, on les met en cause par un questionnement approprié.

La pratique scientifique fait fréquemment appel à cette technique de distanciation qui stimule l'esprit.

Les contextes

Les situations-problèmes doivent se situer sur le terrain de l'élève, dans le domaine de son savoir quotidien et de ses acquis scolaires. "*Elles doivent faire sens pour lui et en même temps l'inviter à se dépasser*".

Les situations-problèmes trouvent leurs matériaux dans un contexte. On peut y développer trois types d'activités : l'exploration, l'extraction (se focaliser sur un phénomène particulier, le cerner, l'exprimer , le traduire en concepts donnant prise au raisonnement, conjecturer, formuler des hypothèses), et l'explication (vérifier les hypothèses). "*Il est important que ces trois registres soient exercés à tous les âges de la jeunesse, car ils sont ceux de la pensée mathématique au sens plein*".

Les contextes, dans lesquels les élèves sont invités à travailler relèvent du champ des mathématiques, mais aussi de la vie quotidienne et des autres disciplines scolaires. Pour ces dernières situations, "*une partie importante du travail consiste [dans ce cas-là] à mathématiser la situation, (?) à en construire un modèle mathématique. Le modèle doit représenter le mieux possible la réalité tout en demeurant traitable mathématiquement. Le compromis entre la fidélité et la commodité du modèle doit être mis au point par va-et-vient entre la situation réelle et son image mathématique*".

La modélisation de situations réelles est indispensable à l'apprentissage des mathématiques élémentaires car

— les mathématiques constituent une forme de pensée et un ensemble de moyens d'analyse largement applicables : cela doit s'apprendre.

18. Dans son premier avis, relatif aux objectifs généraux de l'enseignement et de la formation, le CEF défendait lui aussi cette idée : il préconisait de poursuivre les objectifs au présent (CEF, Rapport 1991-1992).

— elles "*puisent en partie leur substance en dehors d'elles-mêmes et leur compréhension profonde s'appuie sur des images, des analogies, des intuitions issues de la réalité*".

La conception d'un enseignement mathématique lié à des contextes requiert que divers matériels soient mis à la disposition des élèves ; en cette matière, un laboratoire est aussi nécessaire qu'en sciences. "*Le contact avec la réalité extérieure aux mathématiques est important à tous les âges. Les objets et les phénomènes réels sont toujours et pour tout le monde sources de questions et de clartés. Il n'est pas vrai que le passage du maternel au primaire implique que l'on relègue la plupart des activités manuelles et d'observation pour se concentrer sur une pensée mathématique exprimée surtout en symboles. La même remarque vaut pour le passage du primaire au secondaire, et pour celui du secondaire inférieur au supérieur. Il n'est jamais a priori infantilisant de construire, d'expérimenter, d'observer des choses matérielles*".

L'enseignement des mathématiques devrait donc associer, de manière équilibrée, la prise en compte du contexte qui pousse aux observations, aux manipulations, et la structuration déductive des mathématiques. Il conjugue la construction par étapes d'un savoir théorique ferme et son enracinement dans des contextes divers.

Troisième question : selon quelle progression peut-on réaliser la construction du savoir ? Quel type d'apprentissage assurer ?

Une progression est indispensable dans la construction des savoirs mathématiques. Il importe de commencer par les "objets mentaux" ; ce sont des notions de type mathématique qui, soit appartiennent à la pensée commune, soit sont intermédiaires entre celle-ci et les mathématiques constituées. Ce sont "*les instruments de la pensée mathématique en formation. Ils servent à comprendre et organiser la masse des phénomènes qui surgissent dès qu'on se pose, dans des contextes familiers, des questions qui vont "vers les mathématiques".*".

Le terme "d'objet mental" s'oppose à celui de "concept" ([19]). Pour les auteurs du rapport, "*on ne peut pas commencer l'enseignement par les concepts. Ceux-ci constituent un objectif, et les objets mentaux sont un chemin pour y parvenir*".

19. Concept : objet techniquement défini dans une théorie axiomatisée.

Si on tente d'enseigner les concepts sans passer par les objets mentaux, les élèves risquent de ne pas comprendre ce qu'on leur veut : ils vont considérer que les mathématiques sont une science arbitraire.

Un autre écueil consiste à enseigner des concepts importants, à forte connotation technique, dans des contextes pauvres : les élèves ne peuvent alors comprendre les raisons de la technicité : "*Ainsi, notre enseignement est assez souvent une entreprise de conceptualisation prématurée. (?) On enseigne souvent des concepts longtemps avant d'en montrer le véritable usage*".

Dès lors, les recommandations suivantes sont formulées : "*des objets mentaux avant des concepts, et des concepts motivés par les progrès de la pensée*".

L'apprentissage qui procède de cette logique se pratique "en spirale". Il s'agit d'un enseignement qui prend en compte et organise la construction (reconstruction) par étapes des mathématiques dans chaque esprit. "*Chaque question importante est étudiée plusieurs fois, et chaque fois on en découvre de nouvelles facettes, on l'élabore davantage. Il faut pour cela programmer des suites de situations-problèmes de complexité croissante et qui motivent à chaque étape la montée d'un degré dans l'échelle de sophistication mathématique*".

3.2.4. Les mathématiques du citoyen

Des connaissances sont nécessaires pour que chacun puisse non seulement agir à l'aise dans la société, mais encore pratiquer une citoyenneté responsable dans une société démocratique. "*Les citoyens doivent comprendre les rouages de plus en plus complexes de la société, car c'est d'eux que dépend son évolution. La démocratie serait menacée si les savoirs d'intérêt général avaient tendance à se concentrer dans une partie seulement de la situation*".

Les auteurs évoquent à ce propos la notion de "bagage minimum du citoyen", constitué non pas d'une "*boîte à outils à usages particuliers définis une fois pour toutes*", mais de "*connaissances susceptibles de se démultiplier*". Il s'agit de connaissances qui s'appuient sur des acquis antérieurs, s'y articulent pour former un tout structuré, contribuant ainsi à la capacité de penser mathématiquement et de progresser dans cette capacité. "*Certaines connaissances clés y contribuant plus que d'autres et sont comme des* *tremplins de départ vers de nouvelles acquisitions*". Il faut les identifier et les privilégier dans la formation initiale des citoyens.

Pour asseoir cette formation minimale, il convient de mettre fin à la "peur des mathématiques" que manifestent tant de personnes, mais à favoriser, chez chaque personne, l'aptitude à aborder toutes les questions avec confiance, à développer des réflexes d'exploration, d'expérimentation, de recherche, de questionnement. "*Cela implique de mettre fin à la pratique encore trop répandue qui consiste à enseigner les mathématiques comme une discipline où il faut toujours trouver l'unique bonne réponse par l'unique bonne méthode, celle que le professeur a exposée*".

3.3. Le "Rapport de la Cellule de pilotage" du Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation (MERF)

En 1996, la Cellule de pilotage du MERF rendait public un rapport intitulé "Mathématiques de 10 à 14 ans ? Continuité et compétences" ([20]).

Ce travail, produit par la Commission "Mathématiques" de la Cellule de pilotage, aborde "*la science ou l'art de trouver des solutions, la pensée mathématique en action et la superposition de vérités mathématiques depuis celles de l'école maternelle jusqu'à celles de l'école secondaire*".

<u>Objectifs poursuivis</u>

L'introduction du rapport décrit les objectifs poursuivis par ses auteurs :
— "*Montrer les mathématiques actuelles, décrire des continuités et des progressions entre 10 et 14 ans*;
— *Réunir les points de vue d'universitaires de la recherche pédagogique et d'inspecteurs du Fondamental et du Secondaire, à propos de contenus, d'activités, de compétences mathématiques*".

Dans cette perspective, les auteurs ont voulu privilégier la recherche de l'unité et de la continuité de l'enseignement mathématique de 10 à 14 ans, dans les matières et dans les pratiques pédagogiques.

L'étude s'appuie sur de nombreux exemples, qui illustrent les démarches d'une pensée mathématique en action. Elle montre comment, entre 10 et 14 ans, on part des modèles et des réalités et on y revient, chaque fois que c'est

20. Mathématiques de 10 à 14 ans ? Continuité et compétences", Cellule de pilotage, Secrétariat général du MERF, 1996 (référence : Mathématiques/96).

possible ou que l'intuition le réclame. Elle indique aussi comment amener les élèves à percevoir aussi les mathématiques comme une branche autonome, les notions s'éloignant des réalités et des besoins de la vie quotidienne par des généralisations, des abstractions, des raisonnements. "*Cette marche vers l'abstrait est un élément majeur de la progression entre 10 et 14 ans*".

On retrouve ici la préoccupation des inspecteurs, lorsqu'ils dénoncent le fossé qui s'est creusé, entre la 5ème primaire et la fin du 1er degré du Secondaire (*vide supra*, point 2.2.).

Des comparaisons internationales

Le Rapport consacre un de ses chapitres (chapitre 7, pp. 49-53) à la description des conceptions de l'enseignement des mathématiques entre 10 et 14 ans, en application dans différents pays.

Des constantes se dessinent nettement.

Les **objectifs généraux** correspondent, pour tous les pays examinés ([21]), à l'acquisition de connaissances, la contribution à la formation générale et l'apprentissage de la résolution de problèmes.

Pour certains d'entre eux ([22]), ils concernent aussi la construction d'une réelle relation entre les élèves et les mathématiques, et la participation au développement personnel des élèves.

Dans deux pays ([23]), l'accent est mis, à travers des objectifs socio-économiques sur les mathématiques citoyennes : rendre les travailleurs "*mathématiquement lettrés*", favoriser l'épanouissement de compétences sociales, la formation à l'indépendance et à la responsabilité dans une société démocratique.

Les méthodes présentent de nombreuses convergences. L'ensemble des pays s'accorde pour préconiser la résolution de problèmes, l'action, et situer l'apprentissage des mathématiques dans des contextes.

La Rhénanie-Westphalie parle d'enseignement en spirale (*vide supra*, dans le Rapport DANBLON, au point 3.1.). La Communauté flamande de Belgique, la Rhénanie-Westphalie et la France mettent en évidence la relation avec d'autres matières.

21. Communauté flamande de Belgique, Etats-Unis, Land de Rhénanie-Westphalie en Allemagne, Angleterre, Pays de Galles, France.

22. Communauté flamande de Belgique, Etats-Unis, Land de Rhénanie-Westphalie en Allemagne.

23. Etats-Unis, Land de Rhénanie-Westphalie en Allemagne.

Sur le plan des **contenus**, tous les pays accordent de l'importance aux manipulations, comparaisons, composition de grandeurs avant toute idée de mesure. Ils introduisent les calculatrices dès l'école primaire, sans pour autant renoncer au calcul mental ou écrit, remis à leur juste place.

Dans quelques pays ([24]), certaines étapes de l'algèbre sont abordées à l'école primaire, ainsi que des aspects de la géométrie (la représentation plane des solides). On y retrouve aussi au Secondaire une première approche des probabilités et des statistiques. Aux Etats-Unis, en Angleterre-Pays de Galles, le traitement des données a sa place en primaire.

à suivre ...

24. Etats-Unis, Angleterre et Pays de Galles, Land de Rhénanie-Westphalie en Allemagne.

L'illusion de la linéarité. Première partie : circonstances et commentaires

D. De Bock, *Economische Hogeschool Sint-Aloysius (EHSAL) Brussel*
Vliebergh-Senciecentrum K.U. Leuven

Mots-clé : *linéarité, grandeurs proportionnelles.*

A l'école élémentaire, on attache beaucoup d'importance à l'apprentissage de la représentation et de la solution de problèmes concernant des grandeurs qui possèdent entre elles un lien proportionnel (ou linéaire). Quoique ceci soit précieux et utile en soi, la médaille a un revers. En effet, on observe que de nombreux élèves appliquent les mêmes modèles ou raisonnements linéaires dans des situations où ceux-ci ne sont pas du tout appropriés. Dans cet article en deux parties, nous approfondirons cette "illusion de la linéarité". Dans la première partie, le phénomène sera décrit dans toute sa généralité à travers des exemples et des commentaires provenant de la littérature didactique des mathématiques. Dans la deuxième partie, qui paraîtra dans le numéro suivant, nous relaterons trois études sur l'illusion de la linéarité effectuées récemment à Leuven auprès d'élèves de 12–16 ans, confrontés avec des problèmes de longueur et d'aire de figures planes semblables.

1. Introduction

Les relations proportionnelles entre des grandeurs occupent une place centrale dans l'enseignement actuel des mathématiques, surtout au niveau élémentaire mais également au niveau secondaire. Que ces relations bénéficient d'autant d'attention est défendable en soi. En effet, les fonctions linéaires constituent, pour de nombreux problèmes pratiques tant que théoriques, le modèle mathématique sous-jacent. Selon plusieurs auteurs, l'expérience et la familiarité que les élèves acquièrent avec les modèles et les raisonnements linéaires possèdent également un inconvénient : les élèves sont enclins à utiliser ces modèles et ces raisonnements dans des situations où ils ne sont pas valables. Ce phénomène de l'application à tort d'un modèle linéaire (ou de certaines propriétés d'un tel modèle), est désigné dans la littérature par les termes "illusion de la linéarité ", "obstacle linéaire ", "piège de la linéarité ", "méprise linéaire ". Entre ces termes il y a des légères différences de sens et d'intention, qui renvoient aux différentes facettes du phénomène de l'application illicite de la linéarité.

Le terme “illusion de la linéarité ”, par exemple, possède une connotation visuelle (comme dans “illusion d'optique ”) ; de plus, ce terme suggère que l'on croit à la linéarité de la relation en question. Ces aspects peuvent, en effet, jouer un rôle dans des situations où les élèves raisonnent à tort de façon linéaire (par exemple, la perception visuelle peut être une des causes d'un raisonnement tel que “le volume d'un cylindre est doublé quand on double le diamètre de la base ” parce qu'un cylindre est perçu de face comme un rectangle dont l'aire est doublée quand on double sa base). Néanmoins, comme on verra plus loin, ceci n'est pas toujours le cas. Les dénominations “obstacle linéaire ” et “piège linéaire ” sont plus neutres mais aussi moins pertinentes. Finalement, le terme “méprise linéaire ” (misconception ou misbelief en anglais), bien courant dans la littérature de la psychologie de l'instruction, ne satisfait pas totalement pour qualifier le raisonnement linéaire erroné des élèves. En effet, ce n'est bien souvent pas une “méprise ” (une mauvaise compréhension de la situation) qui est à la base de leur raisonnement erroné, mais plutôt un “manque ” : ne disposant pas encore des modèles mathématiques (non linéaires) plus appropriés ou requis, ils généralisent les modèles familiers au-delà des limites de leur domaine d'application. Malgré ces différences subtiles de sens, nous utiliserons désormais sans distinction ces termes pour le phénomène qui constitue le sujet de cet article.

2. Exemples issus de différents domaines mathématiques

La littérature mentionne régulièrement des situations-problèmes dans lesquelles apparaît fréquemment l'illusion de la linéarité. Dans certains de ces exemples, l'expérience pratique joue un rôle important. Les élèves appliquent un raisonnement linéaire erroné parce qu'ils manquent de connaissance pratique ou parce que celle-ci n'est pas activée au moment où ils résolvent des problèmes appliqués dans un contexte scolaire. Quelques exemples :

> *“Il faut 15 minutes pour faire sécher 1 chemise à la corde à linge en plein air. Combien de temps faut-il pour faire sécher 3 chemises en plein air ? ”*
>
> *“L'expédition d'un paquet de 500 grammes coûte 80 francs. Combien coûte l'expédition d'un paquet de 1500 grammes ? ”*
>
> *“Le temps record de Jean sur le 100 mètres est de 14 secondes. En combien de temps court-il le 2000 mètres ? ”*

Quelqu'un qui tombe dans le piège linéaire du premier exemple déconnecte sa connaissance pratique lui disant que le temps de séchage ne dépend pas du nombre de vêtements à faire sécher, afin de jouer au “jeu des problèmes scolaires ” ([12]) dans lequel la “règle de trois ” est une des règles du jeu. Dans l'exemple des paquets, ceci est moins sûr : il se peut que l'élève qui raisonne de façon linéaire, ne soit pas au courant du fait que les tarifs postaux pour l'envoi des paquets ne correspondent pas à une fonction linéaire, mais à une “fonction en escalier ”. Par ailleurs, pour résoudre correctement le problème, il ne suffit pas de savoir cela mais il faut connaître les tarifs exacts, ou du moins pouvoir les rechercher. Le problème de la course à pied est en quelque sorte encore plus délicat, car il ne peut pas vraiment être résolu correctement. Un modèle mathématique adéquat permettant d'estimer de manière précise le temps de course, et tenant donc compte du temps requis pour accélérer ainsi que de la fatigue, n'est pas évident. Un élève à qui ce problème est proposé et qui réalise que la distance et le temps de course ne sont pas proportionnels est en fait posé devant un dilemme : ou bien il ne peut pas répondre, ou bien il donne une réponse surestimée par le biais d'un raisonnement proportionnel.

Un domaine dans lequel plus d'un élève tombe (fréquemment) dans le piège linéaire, c'est la *géométrie*. Les problèmes concernant l'effet des similitudes sur l'aire et le volume sont bien connus dans la littérature. Grand nombre d'élèves (mais aussi d'adultes) utiliseraient spontanément le modèle linéaire, qui s'applique aux grandeurs de même dimension, pour des grandeurs de dimensions différentes. L'exemple le plus cité à cet égard est sans aucun doute la duplication du carré dans le dialogue “Ménon ” du philosophe grec Platon. Quand Socrate, le maître de Platon, montra à un esclave un carré de “deux pieds ” de côté et lui demanda le côté d'un carré dont l'aire est le double de l'aire du premier carré, l'esclave répondit : “il est évident, Socrate, que le côté doit être le double ”. L'esclave partait donc spontanément d'un rapport proportionnel entre la longueur et l'aire, et n'abandonna cette idée que lorsque Socrate lui eut montré, à l'aide d'un dessin, l'erreur de sa thèse. Dans le paragraphe suivant, nous entrerons dans les détails de cette problématique.

En géométrie, on observe que certains élèves utilisent régulièrement un modèle ou un rapport linéaire erroné dans des problèmes relatifs aux relations entre les angles et les côtés de figures planes. La figure 1, empruntée à [9], suggère des constructions fautives pour diviser un angle en deux (dessin de gauche) ou en trois (dessin de droite) parties égales.

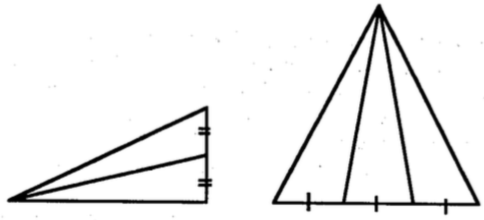


Figure 1.

La première construction suppose une relation linéaire entre un angle aigu et le côté opposé. La deuxième construction, qui est correcte pour la bissection mais pas pour la trisection d'un angle, suppose une relation linéaire entre l'angle au sommet et la base d'un triangle isocèle (ou entre l'angle au centre d'un cercle et la corde correspondante).

On rencontre d'autres exemples dans la thèse [2] de Christine De Block-Docq. En marge de son "analyse comparative de deux méthodes d'enseignement de la géométrie plane aux élèves de douze ans ", elle mentionne quelques raisonnements fautifs d'élèves, basés sur l'application illicite d'un rapport proportionnel ou inversement proportionnel entre grandeurs non proportionnelles.

> *"L'angle d'un dodécagone régulier est obtenu en divisant celui d'un hexagone régulier par six et en multipliant ce résultat par douze."*
>
> *"Pour construire un triangle équilatéral inscrit dans un cercle, il faut reporter trois fois le diamètre du cercle sur le périmètre ; pour construire un dodécagone régulier inscrit dans le cercle, on reporte douze fois la moitié du rayon sur le périmètre."*
>
> *"Si on peut partager un heptagone régulier en cinq triangles (en le triangulant à partir d'un sommet), on peut partager un 14-gone régulier en dix triangles."*

Le calcul des probabilités nous procure également de beaux exemples d'applications illicites de modèles linéaires. Confronté au problème suivant, plus d'un élève se laissera tenter par un raisonnement proportionnel :

> *"La probabilité de succès dans un jeu de hasard est égale à un dixième. Quelle est la probabilité d'au moins un succès lorsqu'on joue le jeu trois fois d'affilée ?"*

Mentionnons en outre deux problèmes historiques, que le Chevalier de Méré aurait proposés à son ami Pascal (voir p.e. [5]). De Méré savait (d'expérience ?) qu'il est avantageux de parier sur l'événement "au moins un six sur 4 lancées de dés (honnêtes)". Il en déduisit qu'il serait avantageux de parier sur "au moins un double-six sur 24 lancées de deux dés (honnêtes)". Car, ainsi raisonna-t-il, chacune des 6 possibilités en 4 lancées est équiprobable à chacune des 36 possibilités en 24 lancées, puisque $\frac{6}{4} = \frac{36}{24}$. Plus tard, lorsqu'il eut observé que, malgré son raisonnement, les paris sur le deuxième événement ne procuraient pas les gains attendus, il consulta son ami Pascal. La réponse (exacte) de Pascal fut la suivante : la probabilité d' "aucun six en une lancée" est $\frac{5}{6}$; la probabilité d' "aucun six en 4 lancées " égale donc $(\frac{5}{6})^4$ et la probabilité d' "au moins un six en 4 lancées" est $1 - (\frac{5}{6})^4 \simeq 0,5177$, autrement dit un peu plus qu'une chance sur deux. La probabilité d' "aucun double-six en une lancée" est $\frac{35}{36}$, la probabilité d'"aucun double-six en 24 lancées" égale donc $1 - (\frac{35}{36})^{24} \simeq 0,4914$, c'est-à-dire un peu moins qu'une chance sur deux.

Le deuxième problème que de Méré soumit à Pascal, c'est le "problème des partis".

Deux personnes, disons A et B, misent une même somme d'argent dans un jeu de hasard constitué de 9 manches (au maximum), chaque manche offrant la même probabilité de gagner à A et à B. Le premier joueur qui gagne cinq manches empoche la totalité des mises. A cause de circonstances indépendantes de leur volonté, ils sont contraints à interrompre leur jeu après seulement 7 manches. A cet instant, A a emporté 4 manches et B en a gagné 3. Comment partager honnêtement les mises ?

Le Chevalier de Méré proposa un raisonnement proportionnel basé sur les nombres qui figurent dans l'énoncé (3, 4 et 5), mais hésitait entre une proportion de 4 sur 3 et de $5-3$ sur $5-4$. Laquelle est correcte ? Aucune des deux, jugea Pascal ! Supposons que les joueurs jouent encore deux manches. Il y a alors quatre possibilités :

A gagne, A gagne ;
A gagne, B gagne ;
B gagne, A gagne ;
B gagne, B gagne.

Dans trois de ces quatre cas, A recevrait la totalité des mises, tandis que B ne la recevrait que dans un des cas. A a donc trois chances, contre une chance pour B. Les mises doivent donc être partagées selon une proportion de 3 à 1.

Finalement, on trouve également pas mal d'exemples d'illusions linéaires en algèbre et en analyse. Bien souvent, il ne s'agit pas ici de l'utilisation à tort du modèle linéaire tel quel, mais plutôt de ses propriétés, en particulier de l'accord avec la somme et la multiplication scalaire. Tout professeur du secondaire peut citer des exemples d'élèves qui appliquent des propriétés telles que "la racine carrée d'une somme est la somme des racines carrées", "le logarithme d'un multiple est le multiple du logarithme", ...Annie Berté [1] montre amplement et de divers points de vue comment on peut percer cet "obstacle linéaire" afin de libérer la voie pour l'acquisition de nouveaux modèles mathématiques et leurs domaines d'application. L'application erronée de la linéarité lors de la recherche de valeurs extrêmes est décrite dans [3].

La tendance à appliquer des modèles ou des raisonnements linéaires dans des situations non-linéaires soulève quelques commentaires. Certains auteurs suggèrent qu'à la base de l'illusion linéaire il y a non seulement le fait que les modèles linéaires sont bien connus et largement applicables, mais sans doute aussi leur simplicité et leur évidence.

> *"Linearity is such a suggestive property of relations that one readily yields to the seduction to deal with each numerical relation as though it were linear."* ([6], p. 267)
>
> *"C'est l'idée de proportionnalité qui vient d'abord à l'esprit, parce qu'il n'y a sans doute pas de fonctions plus simples que les linéaires."* ([8], p. 17)

Les stratégies de solution fautives de de Méré, basées sur l'application directe de la proportionnalité (voir plus haut), ont suscité auprès de Hans Freudenthal ([5], p. 585) le commentaire suivant (tranchant) relatif à l'enseignement des mathématiques :

> *"He* [de Méré] *applied the mathematics he knew, the kind of mathematics which in my childhood was called the rule of three ...Maybe he would have performed better if he had never learned mathematics at all! Then there would have been some chance that he would have applied not the mathematics he had learned but the mathematics that he would have to create himself."*

N'insistons pas davantage là-dessus pour l'instant. A la fin de (la deuxième partie de) cet article, nous proposerons une réflexion sur les causes du phénomène de l'illusion de la linéarité et les liens possibles avec l'enseignement mathématique (actuel).

3. L'effet d'un agrandissement (ou d'une réduction) linéaire sur l'aire et le volume

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le calcul des aires et des volumes de figures semblables constitue un contexte où beaucoup d'élèves tombent dans le piège linéaire. Les grandeurs de dimension 1, 2 et 3 subissent une modification différente lorsqu'on les agrandit ou rapetisse : un agrandissement (une réduction) linéaire de facteur r multiplie toutes les longueurs par un facteur r, les aires par un facteur r^2 et les volumes par un facteur r^3.

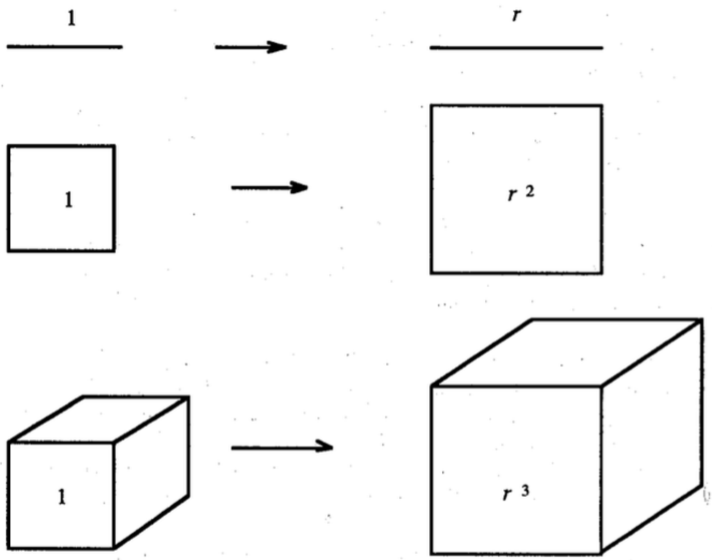


Figure 2.

Ces différents facteurs ne dépendent pas de la figure (qui peut être un carré, un cercle, une sphère, un cône, une figure irrégulière, ...), mais uniquement de la grandeur en question (longueur, aire, volume). Selon Freudenthal, ce principe est tellement fondamental qu'il doit recevoir la priorité, tant d'un point de vue didactique que mathématiquement parlant.

"This principle deserves, as far as the moment of constitution and the stress are concerned, priority above algorithmic computations and applications of formulae because it deepens the insight and the rich context in the naive, scientific and social reality where it operates." ([6], p. 401)

Apparemment, beaucoup d'élèves n'acquièrent ce principe que très lentement et péniblement et tombent régulièrement dans le piège linéaire. Dans les "Standards" américains, nous lisons par exemple :

"Most students in grades 5-8 incorrectly believe that if the sides of a figure are doubled to produce a similar figure, the area and volume also will be doubled." ([7], p. 114-115)

Des chercheurs du Freudenthal Instituut (Université d'Utrecht, Pays-Bas), qui ont développé des contextes réalistes pour l'enseignement de l'effet d'un agrandissement linéaire sur l'aire et le volume (voir p.e. [10] et [11]), ont constaté néanmoins que cette méprise peut facilement être vaincue par les élèves, même au niveau de l'école élémentaire. Adrian Treffers écrit à l'occasion d'une expérience d'enseignement dans une sixième primaire sur le thème des "Voyages de Gulliver" :

"This question [How many Lilliputian handkerchieves make one for Gulliver ?] *introduces the influence of linear enlargement on area. The pupils have no difficulty with the problem."* ([11], p. 5)

Ni la citation des "Standards", ni l'affirmation de Treffers ne sont appuyées par des données concrètes. A notre connaissance, ce phénomène n'a presque pas été examiné de façon systématique et empirique.

Ce qui surprend, c'est que, contrairement à certains autres domaines où les élèves tombent (fréquemment) dans le piège linéaire, on observe ici que l'expérience pratique ne suffit pas pour se rendre compte correctement de l'effet d'un changement d'échelle sur les longueurs, les aires et les volumes. Ainsi, Raf Feys ([4], p. 123) décrit l'expérience suivante avec ses étudiants d'école normale.

"Nous demandons aux étudiants d'école normale ce qu'il se passe quand on pose deux feuilles A4 l'une à côté de l'autre sur une photocopieuse afin de les réduire sur une seule feuille A4. A tous les coups, la réponse est que le texte ne sera plus lisible, la hauteur et la largeur des lettres (et des dessins) étant réduites de moitié."

La surprise des élèves face à l'*ampleur* de l'agrandissement (ou de la réduction) de l'aire et, a fortiori, du volume, est également caractéristique.

(Un géant qui est 10 fois plus grand qu'un homme adulte de 70 kg, pèse 70 tonnes ; un nain 10 fois plus petit que cet adulte, ne pèse que 70 grammes !). Un exemple bien connu à cet égard est le verre conique rempli jusqu'à la moitié (de la hauteur) : les élèves voient généralement que le volume est inférieur à la moitié du volume d'un verre plein, mais lorsqu'on leur demande d'estimer plus exactement quelle partie du volume est remplie, la réponse est presque toujours de loin supérieure à un huitième. (La tendance des élèves à surestimer ce volume est peut-être liée à la perception visuelle : de face, on voit un triangle dont l'aire est un quart du triangle qui représente le verre entier.)

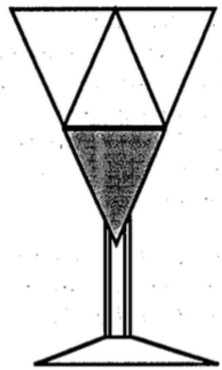


Figure 3.

Finalement, parfois la réalité elle-même induit en erreur. L'idée mathématique d'un agrandissement linéaire ne recouvre pas toujours la réalité physique et biologique du changement d'échelle. Les vieux arbres sont plus "grossiers" que les jeunes ; les pattes d'un tigre sont relativement plus grosses que celles d'un chat. Ces exemples d'agrandissements issus de la nature ne sont pas des agrandissements qui préservent la forme. Par conséquent, les relations décrites plus haut entre les dimensions linéaires, les aires et les volumes ne s'y appliquent pas. Les raisons ne sont pas d'ordre mathématique mais d'ordre physique et biologique. Expliquons par exemple pourquoi les grands arbres ont un tronc relativement plus gros que les petits arbres. Supposons que le tronc d'un arbre deux fois plus haut ne soit que deux fois plus gros. Alors le grand arbre ne pourrait pas porter son volume, augmenté par un facteur 8 ! En effet, la force portative d'un tronc (d'une colonne, d'une patte) est proportionnelle à l'aire de la section du tronc, et celle-ci ne serait que quadruplée. Afin de porter un arbre huit fois plus lourd, l'aire de la section devrait être huit fois plus grande, et donc le diamètre devrait être multiplié par un facteur $\sqrt{8}$ (ce qui revient presque à un agrandissement de facteur 3). Remarquons également que les nouveaux-nés ne sont pas des adultes réduits de façon linéaire : la tête et les os ont une part plus importante dans le poids, ce qui rend les nouveaux-nés relativement plus lourds que les adultes.

Par ailleurs, selon Freudenthal [6], ces dernières considérations ne sont que d'importance secondaire pour l'*apprentissage* des maths. Ce qui compte pour apprendre les mathématiques, ce n'est pas tellement le réalisme du contexte, mais plutôt sa richesse. Un *contexte riche*, selon Freudenthal, c'est une situation familière pour les élèves, qui ouvre suffisamment de perspectives pour une mathématisation verticale. Dans plusieurs publications, il mentionne le "grand bonjour de la part du géant" : au tableau, une main de géant est dessinée et les élèves estiment la taille du géant, de son journal, son poids, ...Ainsi, le monde du géant est relié au monde des humains. Ce contexte s'est avéré très stimulant pour les enfants ; ils étaient portés à agir, à réfléchir et à discuter. Pourtant, ce contexte n'est pas réaliste au sens étroit du mot : les nains et les géants comme sur l'île de Lilliput et Brobdingnag dans les "Voyages de Gulliver", copies linéairement agrandies ou réduites d'êtres humains, n'appartiennent certes pas à la "vraie" réalité (et ne *pourraient* pas y appartenir). Néanmoins, ils existent dans l'esprit de l'élève et ils peuvent ainsi constituer un contexte fascinant pour de véritables explorations mathématiques.

Bibliographie

[1] A. Berté, *Enseignement des mathématiques utilisant la "réalité"*. Tome 1, 2nde édition, IREM de Bordeaux, Bordeaux, 1992.

[2] C. De Block-Docq, *Analyse épistémologique comparative de deux enseignements de la géométrie plane vers l'age de douze ans*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, 1992.

[3] D. De Bock, Een verkeerde toepassing van lineariteit, *Uitwiskeling*, 1992, 8/3, 11-15.

[4] R. Feys, *Meten en metend rekenen*, in L. Verschaffel et E. De Corte (Red.), *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool*

en de basiseducatie. Deel 3 : Verder bouwen aan gecijferdheid, Studiecentrum Open Hoger Onderwijs (StOHO)/Acco, Brussel/Leuven, 1995, p. 99-135.

[5] H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, D. Reidel, Dordrecht, 1973.

[6] H. Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, D. Reidel, Dordrecht, 1983.

[7] National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, NCTM, Reston, VA, 1989.

[8] N. Rouche, *Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?*, in Commission inter-IREM Histoire et Epistémologie des Mathématiques, *La démonstration dans l'histoire*, IREM de Besançon et IREM de Lyon, Lyon, 1989, p. 8-38.

[9] N. Rouche, Review of "Why math ?", *Bulletin de la Société de Mathématique de Belgique (Série A)*, 1992, 44/2, 245-246.

[10] L. Streefland, Search for the roots of ratio : Some thoughts on the long term learning process (Towards ... a theory). Part I : Reflections on a teaching experiment, *Educational Studies in Mathematics*, 1984, 15, 327-348.

[11] A. Treffers, *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction. The Wiskobas project*, D. Reidel, Dordrecht, 1987.

[12] L. Verschaffel, Leren oplossen van reken/wiskundeproblemen in en buiten de school : enkele resultaten van recent onderzoek, *Wiskunde & Onderwijs*, 1993, 73, 19-32.

Adresse de l'auteur :

Dirk DE BOCK
EHSAL
Stormstraat 2
1000 Brussel

Etude solide des angles

J. Navez, *Université de Liège*

Mots-clé : angle solide, géométrie de l'espace.

1. Introduction

L'étude des angles solides a disparu des programmes du secondaire depuis déjà pas mal de temps. Cette notion est-elle encore utilisée dans la pratique ? Pour le savoir, nous avons utilisé un moteur de recherche sur Internet, à savoir "ALTAVISTA", et nous avons obtenu 2.384 sites qui faisaient référence à la notion d'angle solide. Ce qui est un nombre assez conséquent pour une notion mathématique. A y regarder de plus près, on constate que la majorité de ces sites sont plutôt constitués par des laboratoires de recherche en physique appliquée (notamment la NASA et le GODDARD Space Center) et qu'à part la référence au texte d'EUCLIDE, on ne trouve pas d'autre texte purement mathématique.

Un fil conducteur possible pour l'étude des angles solides est de voir dans quelle mesure ceux-ci peuvent apparaître comme une généralisation des angles plans. Etant donné la position prise dans l'article "Etude superficielle des angles" ([1]), nous essayerons de donner aux angles solides une définition telle qu'un angle plan puisse apparaître comme une section d'un angle solide par un plan passant par son sommet. Comme pour l'angle plan, nous avons privilégié la définition basée sur la portion de plan, nous privilégierons pour l'angle solide la définition basée sur la portion d'espace.

Si nous considérons un angle plan défini comme secteur angulaire (éventuellement un représentant d'une classe d'équivalence), nous disons qu'un angle plan est une des deux portions du plan limitées par deux demi-droites de même origine et la généralisation la plus immédiate dans l'espace reviendrait à considérer un angle comme une des deux régions de l'espace limitées par deux demi-plans de même frontière (ou origine). Il s'agit là de ce que

1. J. NAVEZ, *Etude superficielle des angles*, Mathématique et Pédagogie, n° 115, 17-34, 1997.

nous appellerons **angle dièdre**. Mais on peut considérer aussi un angle plan comme la **trace** de la section par un plan passant par son sommet, d'un **corps pyramidal**, ou d'un **corps conique**.

La définition d'un angle plan comme paire de demi-droites de même origine suscite déjà beaucoup de difficultés (voir article cité ci-dessus), de même une définition d'angle solide comme n demi-droites de même origine dans l'espace ne paraît pas facilement praticable à partir de $n = 4$; en effet, on ne privilégie alors aucune partie de l'espace, la notion de "face" n'a de sens qu'en considérant les C_n^2 plans déterminés par les demi-droites, ce qui fait beaucoup et enfin la figure a peu de chances d'être convexe.

2. Dans la littérature

Voici quelques extraits de la littérature qui sont révélateurs de la disparité des définitions possibles pour un angle solide.

<u>EUCLIDE</u> : (IIIe s. B.C.) Les éléments, livre XI.

<u>Définition 11</u> : *Un angle solide est l'**inclinaison mutuelle** constituée par plus de deux lignes qui sont concourantes et qui ne sont pas situées sur une même surface. C'est-à-dire qu'un angle solide est celui qui est délimité par plus de deux angles plans qui ne sont pas situés dans le même plan et qui ont leur sommet en commun.*

Les deux définitions qui se trouvent sous la rubrique précédente ne sont pas équivalentes. Dans la première, les lignes qui y sont mentionnées, ne sont pas spécifiées comme étant des droites et les surfaces ne sont pas forcément des plans. Dans la seconde, comme les surfaces spécifiées sont des plans et que des plans sécants se coupent selon des droites, il s'ensuit que les lignes doivent être des droites. De plus, au contraire de la première définition qui parle d'inclinaison mutuelle, la seconde dit "est celui qui est délimité par ...".

<u>Définition 12</u> : *une **pyramide** est une figure solide délimitée par des plans concourants.*

L'intention est claire même si la définition est abrégée.

CAMBIER A., LAMBOT O. : Eléments de Géométrie, De Boeck, 1922, Bruxelles.
HADAMARD J. : Leçons de Géométrie, II, Géométrie dans l'Espace, 13e édition, 1947 (1ère édition : 1901), Armand Collin, Paris.

Plusieurs plans passant par un même point et limités à leurs intersections successives déterminent une surface qui divise l'espace en deux régions dont chacune est un angle solide ou ***angle polyèdre****.*

Les intersections successives sont des demi-droites nommées ***arêtes****; leur origine commune est le* ***sommet****; les angles compris entre les arêtes consécutives sont les* ***faces*** *ou angles plans de l'angle solide; les dièdres formés par les faces consécutives deux à deux, sont les* ***dièdres de l'angle solide****.*

La définition d'angle solide est restreinte à celle d'angle polyèdre. Mais cet angle polyèdre possède deux "nappes".

Il s'agit bien d'une portion de l'espace.

Le concept d'ordre circulaire dans les faces (ou les arêtes) est suggéré par les mots "successives" et "consécutives".

GUION A. : Géométrie Elémentaire, tome III, Géométrie dans l'espace et compléments de géométrie plane, De Boeck, 3e édition, 1959, Bruxelles.

Définition : *on appelle* ***angle polyèdre*** *ou angle solide, la figure formée par plusieurs demi-droites issues d'un même point mais non situées trois à trois dans un même plan.*

Définition : *on appelle* ***angle dièdre*** *la figure formée par deux demi-plans issus d'une même droite.*

Un dièdre est dit convexe (concave) s'il ne contient pas (contient) les demi-plans opposés à chacune de ses faces.

Avec ces définitions, l'angle dièdre n'est pas de même nature que l'angle polyèdre.

En appliquant strictement les définitions, seul le dièdre plat pourrait contenir les demi-plans opposés à chacune de ses faces et serait donc le seul dièdre convexe.

A priori, l'angle polyèdre possède C_n^2 faces mais on retrouve plus loin : "*les angles plans formés par deux arêtes **consécutives** sont les faces angulaires ...*".

DALLE A., DE WAELE C. : Géométrie dans l'espace avec Compléments, 20e édition, 1958, Wesmael - Charlier, Namur.

Les définitions d'angle polyèdre et d'angle dièdre sont identiques à celles ci-dessus mais les auteurs ajoutent un commentaire significatif.

*Un dièdre peut être regardé comme engendré par un demi-plan qui tourne autour de la droite qui lui sert d'arête ; tous les points contenus successivement dans ce demi-plan mobile sont dits **intérieurs** au dièdre, tous les autres **extérieurs**.*

Si le prolongement d'une face du dièdre est extérieur au dièdre, celui-ci est dit convexe et dans le cas contraire, il est concave.

Ce qui fait immanquablement penser à la notion de balayage.

BOUVIER A., GEORGE M., LE LIONNAIS F. : Dictionnaire des Mathématiques, 4e édition, 1993, Presses Universitaires de France, Paris.

Angle solide : *étant donné un point O et une sphère $\sum$ de centre O, on appelle angle solide le **volume** engendré par les demi-droites Ox d'origine O qui rencontrent un domaine D de la sphère.*

Dans cette définition, le corps conique apparaît clairement.

GIMOND : Workshop on solid angles, 1998
(http ://probe.oem.fit.edu/workshop/gimond/solid-angle.html)

Un angle est défini par $W = \frac{A}{R^2}$ où W est l'angle solide d'une sphère (exprimé en stéradians), A est la surface sous-tendue par l'angle solide *(exprimée en m^2) et R la distance du sommet à la surface d'aire A (exprimée en m).*

Schéma EPICENTRE : v. 2.1, 1996, MOBIL, Houston, Texas.
PCA-Field of View : NASA, GODDARD Space Center, Space Services Directorate

Angle solide = angle représentant l'extension angulaire d'un corps conique tridimensionnel.

3. Essai d'unification

L'angle solide apparaît dans trois types de définitions essentiellement : le dièdre, l'angle polyèdre et le corps conique.

Notre objectif est de donner une définition de l'angle solide aussi générale que possible et qui comprenne comme cas particulier les autres définitions. Pour cela, nous allons nous baser sur le corps conique.

Nous n'atteindrons pas une généralisation aussi grande que celle proposée par EUCLIDE. En effet, dans la première partie de la définition 11, EUCLIDE propose de considérer une espèce de corps conique dont les génératrices seraient remplacées par des courbes concourantes au sommet.

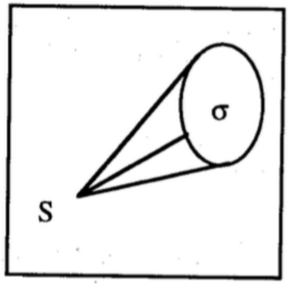
Corps conique : on appelle corps conique le solide engendré par une droite passant par un point fixe et s'appuyant sur une surface.

Le point fixe s'appelle **sommet** du corps conique, la surface s'appelle **directrice** du corps conique et les droites s'appellent **génératrices**.

Cette directrice est soumise à certaines conditions de régularité, on la suppose union finie de portions régulières de surface, les changements de paramètres d'une portion à l'autre étant des changements de variables réguliers. On considère généralement que les génératrices qui s'appuient sur le bord de la directrice font partie du corps conique.

Angle solide : on appelle angle solide le corps engendré par une demi-droite d'origine fixe qui s'appuie sur une surface fermée.

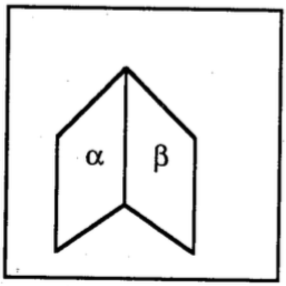
Les conditions de régularité s'appliquent encore à cette surface.
En quelque sorte l'angle solide est un demi-corps conique.
Nous allons montrer que cette définition généralise suffisamment les autres concepts.



4. Dièdres

Définition : on appelle angle dièdre une des deux régions de l'espace déterminée par deux demi-plans de frontière (origine) commune.

La frontière commune s'appelle *arête du dièdre*, les deux demi-plans s'appellent les *faces du dièdre*. On considère que les faces font partie du dièdre.
Si les deux demi-plans sont opposés, le dièdre est dit *plat*.
Si le dièdre contient les demi-plans opposés à chacune de ses faces, on dit que le dièdre est **rentrant**, s'il ne les contient pas, on dit qu'il est **saillant**. Un dièdre saillant est **convexe**, au sens général, et un dièdre rentrant est **concave**.



On peut considérer la relation "être isométrique" dans l'ensemble des dièdres de l'espace, cette relation est une relation d'équivalence et par abus de langage, chaque classe d'équivalence s'appelle **angle dièdre** ou **dièdre**.

Les points de l'espace situés dans un dièdre et n'appartenant pas aux faces du dièdre sont dits **points intérieurs**, les points de l'espace situés hors du dièdre sont dits **points extérieurs**.

Deux dièdres sont dits adjacents lorsqu'ils ont l'arête commune, une face commune et lorsqu'ils sont situés de part et d'autre de cette face commune (c'est-à-dire si l'intersection des points intérieurs est vide).

On peut faire la somme des deux angles dièdres en considérant leurs représentants en position telle qu'ils soient adjacents. La somme de deux dièdres saillants est toujours possible, celle d'un saillant et d'un rentrant l'est parfois et la somme de deux dièdres rentrants non plats ne l'est jamais.

L'addition des dièdres n'est donc pas une opération partout définie.

Le dièdre rentrant dont les deux faces sont confondues s'appelle *dièdre plein* ou *dièdre total*. Le dièdre saillant dont les deux faces sont confondues s'appelle *dièdre nul*.

Le dièdre est un cas particulier de l'angle solide tel qu'il a été défini plus haut. En effet, si on considère dans un plan ω une bande déterminée par deux parallèles a et b et un point S situé en dehors de ω, les demi-droites issues de S projetant les points de la bande forment un angle solide saillant dont les faces sont situées dans les plans (S, a) et (S, b), les faces du dièdre étant les demi-plans de frontière $(S, a) \cap (S, b)$ et contenant respectivement les droites a et b. Si on désire un dièdre rentrant, il faut alors projeter les points situés à l'extérieur de la bande et si on désire obtenir un dièdre plat, il faut élargir la bande à tout le plan ω (voire même à $\bar{\omega}$).

Nous reviendrons au cas des dièdres lorsqu'il sera question de mesure.

5. Angle polyèdre

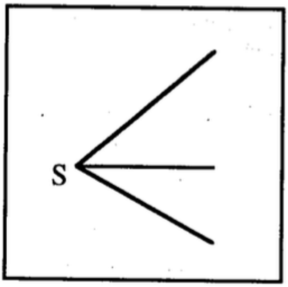
Pour trouver une définition que l'on juge agréable pour l'angle polyèdre, il faudrait déterminer un cahier des charges. Que veut-on ?

- un solide
- limité par des faces angulaires de sommet commun
- que l'on puisse parler de faces "consécutives" ou "successives"
- que l'on arrive facilement à un solide convexe.

Définition : Etant donné n ($\geqslant 3$) secteurs angulaires saillants orientés (un secteur angulaire est dit orienté si on a déterminé un ordre pour ses côtés) donnés dans un ordre circulaire (ans un ordre circulaire, le premier suit le dernier et n'importe quel élément peut être pris comme premier élément) précis tels que :

i. leur sommet soit commun,
ii. deux secteurs consécutifs ne soient pas coplanaires,
iii. le deuxième côté de l'un soit le premier côté du suivant,
iv. deux secteurs non consécutifs soient d'intersection réduite au sommet commun, ces n secteurs partagent l'espace en deux régions dont chacune est un angle polyèdre.

Dans cette définition, le fait que les secteurs soient orientés n'est pas vraiment indispensable, puisque si on "retourne" un des secteurs, on obtiendra la même figure, mais il permet une expression plus facile. Si on se borne à des secteurs saillants, c'est pour éviter des figures pas trop biscornues mais on pourrait les considérer.



Les angles plans ou **faces** d'un angle polyèdre sont les secteurs angulaires donnés ; les **arêtes** d'un angle polyèdre sont les côtés des secteurs angulaires et le **sommet** d'un angle polyèdre est le sommet commun à tous les secteurs.
Un angle polyèdre qui ne contient aucune des demi-droites opposées à chacune de ses arêtes est dit **saillant** sinon il est dit **rentrant**.
Cela ne suffit malheureusement pas pour le rendre convexe.

Un angle polyèdre saillant est dit **convexe** s'il est entièrement du même côté du plan déterminé par une quelconque de ses faces.

On se borne généralement à la considération des angles polyèdres convexes.

<u>Un angle polyèdre convexe est un angle solide</u>

En effet, la section d'un angle polyèdre convexe par un plan ne passant pas par son sommet est un polygone plan fermé et convexe ; le polyèdre apparaît donc bien comme l'angle solide obtenu en projetant à partir de son sommet la surface polygonale.

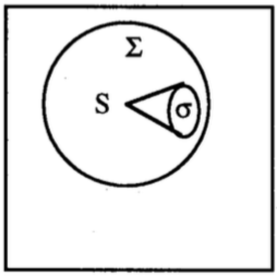
On peut encore dans l'ensemble des angles polyèdres, considérer la relation "être isométrique", ce sera une relation d'équivalence dont les classes seront appelées par abus de langage **angle polyèdre**.

6. Mesure d'un angle solide

Pour mesurer un angle solide, on utilise une sphère $\sum$ de rayon R centrée au sommet de l'angle solide et la section de l'angle solide par la sphère est une certaine surface sphérique σ que nous admettrons connexe.

On appelle **stéradian** l'angle solide qui détermine sur la sphère une surface σ d'aire R^2.

Si un angle solide détermine sur la sphère une surface σ de mesure A, la mesure de cet angle solide vaut $\frac{A}{R^2}$ stéradians. Cette définition est intrinsèque car si on utilise une sphère de rayon R', les aires homothétiques étant entre elles comme le carré du rapport d'homothétie qui vant $\frac{R'}{R}$, on a $\frac{A}{R^2} = \frac{A'}{R'^2}$.



<u>Exemples</u> :

1. la mesure de l'angle solide plein vaut 4π stéradians.
2. la mesure de l'angle solide convexe déterminé par un trièdre trirectangle vaut $\frac{\pi}{2}$ stéradians.
3. la mesure d'un angle dièdre droit vaut π et plus généralement, si l'angle d'un fuseau vaut ω, alors son angle solide vaut 2ω stéradians.
4. si on considère un angle plan de mesure ω ($\leqslant \pi$) radians tournant autour d'un de ses côtés, il engendre un angle solide Ω de mesure $4\pi \sin^2 \frac{\omega}{2}$ stéradians.

Cas particulier du dièdre

On prend souvent pour mesure du dièdre son **rectiligne** qui est l'angle plan section du dièdre par un plan perpendiculaire à son arête.

La formule de passage est simple :

Mesure de l'angle solide du dièdre (en stéradians) = 2 x mesure du rectiligne (en radians)

Adresse de l'auteur :

J. NAVEZ
Institut de mathématique
Grande Traverse, 12
Sart-Tilman, Bât. B37
4000 LIEGE

Etude d'une obligation au moyen de sa duration et de sa convexité

J. Bair, *Université de Liège*

Mots-clé : mathématique financière, obligation, duration, convexité, formule de Taylor.

Un emprunt est qualifié d'*indivis* quand un seul prêteur met à la disposition du débiteur la somme convenue. Lorsque l'emprunteur ne peut pas trouver un créancier disposant à lui seul des fonds demandés, il doit faire appel à plusieurs prêteurs, appelés des *obligataires*, qui se partagent le montant de l'emprunt en parts égales appelées *obligations* (ou *titres obligataires*) : on parle alors d'emprunt *obligataire*.

Une obligation est donc une valeur mobilière représentative d'un emprunt contracté (le plus souvent) par un pouvoir public ou une société, pour une durée et un montant déterminés, et à revenu fixe ou variable [3]. Elle se caractérise fondamentalement par sa *valeur nominale* V_n (encore appelée *le pair*) qui est le montant inscrit sur le titre et sur lequel est calculé l'intérêt qui porte le nom de *coupon* lorsqu'il est calculé sur une période (généralement une année) ; le taux τ de cet intérêt est qualifié de *nominal* (ou *facial*). Pour ne pas compliquer inutilement cet exposé introductif, nous ne traiterons ici que le cas d'une obligation estimée (ou cotée) et remboursée *au pair*, ce qui revient à dire que la valeur nominale coïncide avec la somme effectivement payée par l'obligataire (ou *valeur d'émission* V_e) et aussi avec la somme payée au souscripteur au moment du remboursement (ou *valeur de remboursement* V_r) ; dans la pratique, on a souvent $V_e \leqslant V_n \leqslant V_r$ (1). La *maturité* d'une obligation est, par définition, sa durée de vie résiduelle, tandis que le taux (supposé ici fixe (2)) du marché est appelé le *taux de rendement actuariel*.

Par exemple, pour une obligation de valeur nominale 10000 F, remboursable au pair, de maturité 3 ans, assortie d'un taux nominal de 14,5% et pour un taux du marché fixe de 14,2%, l'obligataire recevra un coupon de $10000 \times 0,145 = 1450$ F à la fin de chacune des trois années ; de plus, à la fin des trois ans lui sera remboursée la valeur nominale de 10000 F, de sorte que

1. On dit alors que l'émission est au-dessous du pair et que le remboursement est au-dessus du pair.

2. Cela suppose que la structure des taux d'intérêts est plate et immobile pendant toute la période considérée[7].

la valeur globale actualisée de ces montants est, au moment initial, égale à

$$\frac{1450}{1,142} + \frac{1450}{(1,142)^2} + \frac{1450}{(1,142)^3} + \frac{10000}{(1,142)^3} = 10069,42$$

cette valeur représente le montant réel à prêter aujourd'hui à l'emprunteur pour avoir le droit de détenir une obligation.

Plus généralement, nous allons considérer une obligation de maturité n (3) donnant des coupons annuels C_i au terme de la i-ème année et qui est remboursable *in fine* et au pair (c'est-à-dire au terme de la n-ième année et à sa valeur nominale V_n). Nous étudierons le *prix* (ou *valeur de marché*) P de cette obligation qui est défini comme étant la somme des valeurs actualisées des cash flows (4) générés par l'obligation sur la durée de vie, le taux d'actualisation étant le taux, noté x (et supposé fixe), du marché. On a donc

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+x)^t} + \frac{V_n}{(1+x)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(1+x)^t}$$

en posant $A_j = C_j$ pour $j = 1, \ldots, n-1$ et $A_n = C_n + V_n$.

En raison de la forte instabilité des taux d'intérêt, il est utile d'analyser l'influence du taux du marché sur le prix d'une obligation. Mathématiquement, cela revient à étudier la fonction

$$f(x) = \sum_{t=1}^{n} A_t \times (1+x)^{-t}$$

sur l'ensemble $E = [0, +\infty]$.

La fonction f est continue et indéfiniment dérivable sur E ; ses deux premières dérivées sont données par

$$f'(x) = -\sum_{t=1}^{n} t \times A_t \times (1+x)^{-t-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{t=1}^{n} t \times (t+1) \times A_t \times (1+x)^{-t-2}$$

qui sont respectivement négatives et positives sur E, de sorte que f est une fonction strictement décroissante et strictement convexe. En conséquence, le prix d'une obligation varie de manière opposée au taux d'intérêt en vigueur sur le marché : plus ce taux baisse (resp. augmente), plus l'obligation prend (resp. perd) de la valeur ; de plus, pour une même augmentation du taux, la

3. Le nombre n est supposé ici entier.
4. Terme anglais signifiant, dans ce contexte, une entrée ferme de fonds [3].

diminution du prix décroît en valeur absolue lorsque le taux de rendement augmente.

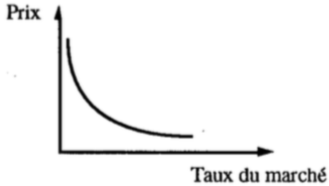


Figure 1. Courbe de prix en fonction du taux du marché.

Examinons plus en détail ces deux premières dérivées de f.

Considérons la valeur actualisée de chaque flux divisée par le prix de l'obligation, à savoir, pour tout $t = 1, 2, \ldots, n$, l'expression notée p_t, suivante :

$$p_t = \frac{A_t}{P \times (1+x)^t}.$$

On a, bien entendu,

$$0 \leqslant p_t \leqslant 1, \ \forall t = 1, \ldots, n, \quad \sum_{t=1}^{n} p_t = 1 \text{ et } f'(x) = -\frac{P}{1+x} \times \sum_{t=1}^{n} t \times p_t.$$

En posant

$$D = \sum_{t=1}^{n} t \times p_t = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} t \times A_t \times (1+x)^{-t}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} A_t \times (1+x)^{-t}},$$

la variation ΔP du prix correspondant à une petite modification Δx du taux vaut approximativement :

$$\Delta P \approx -\frac{P}{1+x} \times D \times \Delta x.$$

L'expression D, appelée la *duration* (au sens de Macaulay) de l'obligation, est une grandeur mesurée en unités de temps : il s'agit d'une durée qui représente, en fait, la vie moyenne des flux actualisés au taux du marché, cette moyenne étant pondérée par les valeurs actualisées des flux relativisées par le prix. Ainsi, l'accroissement du prix correspondant à de petites variations du taux est proportionnel à la duration. Dès lors, le produit financier considéré sera d'autant plus sensible à ces variations de taux que sa duration est grande.

Par exemple, dans le cas d'un zéro-coupon ([5]), la duration est égale à $n \times p_n$, avec $p_n = 1$, d'où $D = n$: en conséquence, la duration d'un zéro-coupon est égale à sa maturité.

A la notion de duration est souvent préférée celle de *duration modifiée*, notée D_m et définie par

$$D_m = \frac{f'(x)}{P} = -\frac{D}{1+x} :$$

on retrouve le concept (appelé ici *volatilité*) d'élasticité du prix par rapport au taux. On a donc

$$f'(x) = D_m \times P,$$

expression qui porte parfois le nom de *variabilité* et mesure la variation marginale du prix de l'obligation par rapport au taux.

Une première estimation (linéaire) de la variation relative du prix peut être donnée, à savoir :

$$\frac{\Delta P}{P} \approx D_m \times \Delta x.$$

Géométriquement, cette approximation consiste à remplacer la courbe de prix P par sa tangente de coefficient angulaire égal à la volatilité correspondante.

Il est possible de trouver deux obligations différentes, mais possédant même duration (pour un taux x déterminé), ce qui revient à dire que les deux courbes de prix possèdent une tangente commune, mais ne coïncident néanmoins pas car la variation de la pente de la tangente (c'est-à-dire la convexité de la courbe) diffère.

5. Un zéro-coupon est par définition une obligation pour laquelle tous les flux A_t sont nuls sauf le dernier A_n.

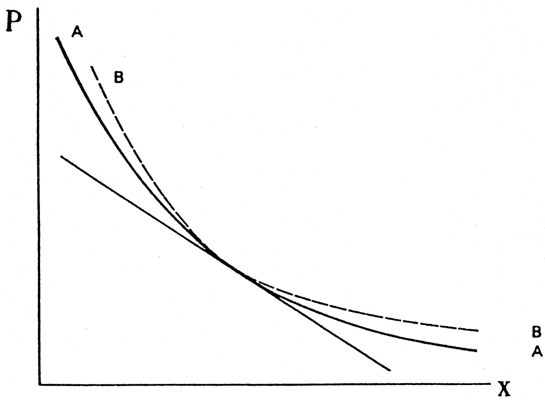


Figure 2. Obligations ayant même duration [5].

Pour bien gérer des portefeuilles d'obligations, il est donc utile de savoir comment varie la duration par rapport aux variations du taux de rendement actuariel. A cet effet, il convient de calculer la dérivée de la duration D par rapport à la variable x ; on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{dD}{dx} \\
&= \frac{P \times \left[\sum_{t=1}^{n} -t^2 \times A_t \times (1+x)^{-t-1}\right] + \frac{1}{1+x} \times \left(\sum_{t=1}^{n} t \times A_t \times (1+x)^{-t}\right)^2}{P^2} \\
&= \frac{-1}{1+x} \times \left[\sum_{t=1}^{n} p_t \times t^2 - D^2\right].
\end{aligned}$$

En posant

$$\sigma^2 = \sum_{t=1}^{n} p_t \times t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} p_t \times t\right)^2 = \sum_{t=1}^{n} p_t \times (t-D)^2,$$

l'on peut encore écrire

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{1}{1+x} \times \sigma^2.$$

L'on en déduit qu'une augmentation du taux provoque une diminution de la duration puisque la dérivée de cette dernière est négative. Par ailleurs, pour de petites variations Δx du taux, on obtient cette approximation de la variation de la duration :

$$\Delta D \approx -\frac{1}{1+x} \times \sigma^2 \times \Delta x.$$

La valeur absolue de cette dérivée $\frac{dD}{dx}$ s'appelle la *convexité*; elle est notée c et vaut donc

$$c = \frac{\sigma^2}{1+x}.$$

D'un point de vue financier, la relation $\Delta D \approx -c \times \Delta x$ signifie, par exemple, que la duration sera d'autant plus sensible aux variations de taux que la convexité est plus élevée.

Comme σ^2 n'est rien d'autre que la variance de la variable aléatoire dont les valeurs sont les temps t avec les probabilités correspondantes p_t, la convexité peut encore être interprétée comme étant fonction de la dispersion dans le temps des cash flows générés par l'obligation : pour une duration identique, plus les rentrées de fonds sont étalées dans le temps, plus la convexité sera élevée [8, p.92]. Par exemple, la convexité d'une obligation zéro-coupon est nulle et donc moins importante que celle d'une obligation donnant droit à des coupons annuels, cette dernière ayant elle-même une convexité inférieure à une obligation donnant droit à des coupons semestriels, etc.

On vérifie aisément cette égalité :

$$c = \frac{(1+x) \times f''(x)}{P} - \frac{D \times (D+1)}{1+x} \ ;$$

partant, à duration fixée, le graphe de la fonction $f(x)$ est d'autant plus convexe que la convexité de l'obligation est plus élevée.

La notion de convexité peut être un outil efficace de gestion. A titre d'exemple, considérons deux obligations A et B caractérisées par la même duration et le même rendement à l'échéance, mais par des convexités différentes, la courbe de prix pour B étant "plus convexe" que celle pour A (voir la figure 2). Si un investisseur prévoit une forte variation des taux d'intérêt, il aura intérêt à choisir l'obligation B puisqu'elle donne des prix supérieurs à ceux de A (la courbe relative à B étant située au-dessus de l'autre). En conséquence, l'investisseur pourra être amené à verser un supplément de prix pour acquérir l'obligation B (dont le rendement sera ainsi amoindri) au lieu de A : cette prime est appelée généralement le “prix à payer pour la convexité”.

Les concepts de duration et de convexité permettent de donner une bonne estimation de la variation du prix d'une obligation due à une variation finie du taux de rendement actuariel. En effet, par la formule de Taylor, on trouve cette relation donnant la variation du prix en fonction des variations du taux :

$$\Delta P = \frac{dP}{dx} \times \Delta x + \frac{1}{2} \times \frac{d^2 P}{dx^2} \times (\Delta x)^2 + \cdots$$

d'où l'on tire cette deuxième approximation (quadratique) :

$$\Delta P \cong -\frac{P \times D}{1+x} \times \Delta x + \frac{P}{2 \times (1+x)} \times \left(c + \frac{D^2 + D}{1+x} \right) \times (\Delta x)^2$$

que l'on peut encore écrire plus simplement en faisant appel à la duration modifiée D_m et à la *convexité modifiée* c_m définie par

$$c_m = \frac{f''(x)}{2 \times P} = \frac{1}{2 \times (1+x)} \times \left(c + \frac{D^2 + D}{1+x} \right)$$

à savoir :

$$\frac{\Delta P}{P} \cong D_m \times \Delta x + c_m \times (\Delta x)^2.$$

Géométriquement, la duration permet donc d'approcher la courbe réelle du prix par une droite, tandis que la convexité l'estime par une parabole. Dans la pratique, les erreurs commises par ces deux types d'approximation sont relativement minimes ainsi qu'en atteste ce cas concret [7] :

	Hausse de 1%	Baisse de 1%
Prix P	1,11509	1,24897
Estimation linéaire (erreur en % de P)	1,11253 (0,229 %)	1,24625 (0,217 %)
Estimation quadratique (erreur en % de P)	1,11517 (-0,00704 %)	1,24889 (0,00661 %)

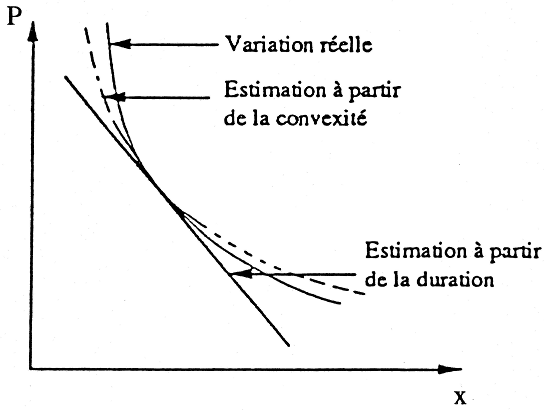


Figure 3. Approximations linéaire et quadratique de la courbe de prix [9].

Bibliographie

[1] Bianchi S., *Utilisation de la duration dans la gestion de portefeuilles obligataires*, mémoire présenté pour l'obtention du grade de licencié en sciences commerciales et financières, HEC, Liège, 1995.

[2] Bonneau P., *Mathématiques financières*, Dunod, Paris, 1988.

[3] Denis M., *Lexique de l'économie et de la gestion*, Editions Labor-F. Nathan, Bruxelles, 1976.

[4] Douglas L.G., *Bond risk analysis : a guide to duration and convexity*, New York Institute of Finance Ed., New York, 1990.

[5] Fabozzi J. et T., *Bond markets, analysis and strategies*, Ed. Prentice-Hall Intern., New Jersey, 1989.

[6] Janssen J., *Traité de mathématique appliquée pour l'assurance, l'économie et la finance, 2. Fonctions*, Office International de Librairie, Bruxelles, 1993.

[7] Matère C., *Optimisation passive d'un portefeuille d'obligations linéaires*, mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de licencié et maître en administration des affaires, Université de Liège, 1995.

[8] Minguet A., *Les techniques de gestion du risque d'intérêt*, Presses Universitaires de France, Paris, 1993.

[9] Navatte P., *Eléments de gestion obligataire*, Ed. Sirey, Paris, 1992.

Adresse de l'auteur :

Jacques BAIR
Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales
Université de Liège
Boulevard du Rectorat 7 - Bât. B31
4000 Liège

Revue des revues

C. Villers,

Bulletin de l'APMEP, *n*°418, Septembre – Octobre 1998.

Dans l'éditorial de ce bulletin, qui marque la transition entre deux responsables de la revue, le Président François Dusson s'interroge sur les orientations à donner à la revue. Il est important d'y favoriser les équilibres entre "les articles qui se lisent facilement et d'autres que l'on garde pour plus tard", entre les textes qui concernent les différents niveaux, entre les articles de pédagogie et ceux de mathématiques. Mais François Dusson insiste surtout sur le fait que c'est aux adhérents à apporter leurs idées, à proposer des thèmes d'étude, à fournir des articles, ..., bref à contribuer à la rédaction de la revue. Ces considérations me paraissent tout à fait applicables à notre revue "Mathématiques et Pédagogie" et les appels à nos collègues Français sont transférables à notre propre situation. Alors, appel à tous.

Outre cet éditorial, la livraison de ce numéro comporte également

— *Problèmes Ouverts*
Il s'agit d'un appel à la création d'une nouvelle rubrique où seraient réunis des énoncés de problèmes qui ne soient pas des applications directes d'une matière bien cernées. Le public visé est constitué des enseignants du premier degré de l'école élémentaire.

— *Recette pour découper un dodécagone régulier en trois carrés identiques* par Michel Rousselet
L'auteur nous indique une manière de procéder pour arriver au but signalé.

— *Egalités – Equations* par Raymond Raynaud
Dans cet article, l'auteur montre le danger que crée la confusion entre égalité et équation. Il propose une pratique scolaire plus rigoureuse dans ce domaine et accompagne son texte d'exemples édifiants.

— *La Suite de Fibonacci – le Zéro et l'Infini* par Gérard Kuntz
L'auteur propose une situation qui permette de bien comprendre les divergences qui apparaissent souvent entre les démarches théoriques et des démarches "informatiques" lors de l'étude de limites de suites. Il propose d'utiliser la suite de Fibonacci. L'article décrit dans le détail le déroulement du travail réalisé avec les élèves d'une classe de terminale S. En conclusion, l'auteur montre que l'outil informatique ne dispense certainement pas de réfléchir.

— *Simulation d'un exercice de probabilité* par Bruno Lovat et Daniel Vagost
Il s'agit d'une proposition alternative à un problème de probabilité résolu dans un précédent numéro. Les auteurs proposent une approche qui est constituée par une simulation de la situation par l'emploi de Dérive.
— *"Les maths c'est pas la réalité" ou De la modélisation en mathématiques* par Jean Claude Girard et Bernard Parsysz
Les auteurs montrent l'importance qu'il y a à alerter les élèves qu'un modèle n'est pas la réalité et qu'il est important de réfléchir à propos de la modélisation mathématique que l'on peut donner à des problèmes "concrets".
— *Modélisation - Passage d'un problème réel à un problème mathématique* par J. Bair et G. Haesbroeck
Dans ce texte, illustré de quelques exemples, les auteurs proclament que le sens est le véritable moteur de la construction et de l'appropriation des savoirs.
— *Mais que disons-nous de l'essence ?* par Jean Aymes
L'auteur s'interroge sur les conceptions de la discipline mathématique auxquelles il est possible de se référer en tant que professeur. Il se base sur des réponses à un questionnaire dispensé à des professeurs stagiaires.
— *Sur les extensions et les utilisations en informatique d'un résultat mathématique - les polynômes d'Ehrhart* par Philippe Clauss.
Les polynômes d'Ehrhart permettent d'exprimer le nombre de solutions entières d'un système d'équations et d'inéquations rationnelles et paramétriques. L'auteur montre qu'Eugène Ehrhart a posé les bases d'un domaine d'investigations aussi bien en mathématique qu'en informatique où l'application de ses résultats permet d'augmenter sensiblement les possibilités des ordinateurs.

Cette livraison du bulletin de l'APMEP comporte également les rubriques habituelles (et non moins intéressantes) que sont : *Nouvelles brèves, les Problèmes de l'APMEP, Matériaux pour une documentation, La vie de l'association.*

Claude Villers

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

$\boxed{\text{Curieux !}}$ problème 205 de M. et P. n°117

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *le système*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2} + \dfrac{z^2}{x^2} = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Solution de H.-J. SEIFFERT de Berlin.

Soient x, y, z des nombres réels non nuls satisfaisant aux deux équations.

Puisque, par la 1ère équation, la moyenne arithmétique des nombres positifs $\frac{x^2}{y^2}$, $\frac{y^2}{z^2}$, $\frac{z^2}{x^2}$ est égale à leur moyenne géométrique

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y^2}{z^2} \cdot \frac{z^2}{x^2}} = 1,$$

nous avons

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2}{z^2} = \frac{z^2}{x^2}$$

d'où

$$x^2z^2 = y^4, \qquad y^2z^2 = x^4, \qquad x^2y^2 = z^4$$

ou encore,

$$x^2y^2z^2 = x^6 = y^6 = z^6.$$

Dès lors, $x = \pm y$ et $y = \pm z$.

A partir de $x + y + z = 3$, on obtient alors facilement les seules solutions

$$(1, 1, 1),\ (-3, 3, 3),\ (3, -3, 3),\ (3, 3, -3).$$

Bonnes solutions de N. BERCKMANS de Waterloo, P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek, M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre, B. LOISEAU de Mouscron et J.F. MACQ de Virelles.

$\boxed{\text{Borne}}$ problème 206 de M. et P. n°117.

Trouver le plus petit réel k tel que

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant k$$

quel que soit le naturel non nul n.

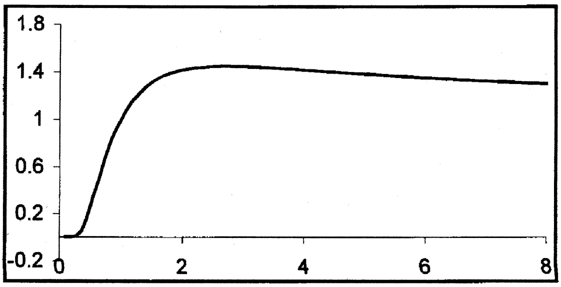
Solution de N. BERCKMANS de Waterloo.

La fonction $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$, définie et dérivable sur $]0, \rightarrow [$, admet un maximum en $x = e$

$$\left(f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} \right).$$

Par conséquent, la suite $\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \ldots$ est décroissante et tend vers 1, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

D'autre part, on sait que $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ car $1 < 8 < 9$. La réponse est donc $k = \sqrt[3]{3}$.



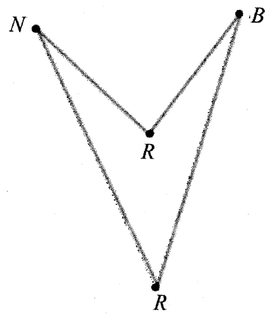
P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek, J. GOLDSTEINAS de Bruxelles, M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre, B. LOISEAU de Mouscron, J.F. MACQ de Virelles, B. MERSCH de Wannebecq et H.-J. SEIFFERT de Berlin ont envoyé de bonnes solutions, la plupart semblables à celle ci-dessus.

$\boxed{\text{Colorions}}$ problème 207 de M. et P. n°117.

Chaque sommet d'un polygone est colorié de manière telle que deux sommets ne sont jamais de même couleur. On utilise pour ce coloriage au moins trois couleurs distinctes. Démontrer que ce polygone peut être partagé en triangles par des diagonales non sécantes de telle sorte que les trois sommets de tout triangle soient de couleurs différentes.

Solution de B. LOISEAU de Mouscron.

Tel quel, cet énoncé est trivial, car si deux sommets ne sont jamais de même couleur, si on triangularise le polygone – ce qui est toujours possible, si du moins il s'agit d'un polygone non croisé, ce qui, j'imagine, est sous-entendu –, les trois sommets de tout triangle sont alors bien de couleurs différentes ! Je suppose donc qu'il fallait préciser : deux sommets **consécutifs** ne sont jamais de la même couleur. Mais si on précise cela, l'énoncé devient faux, comme le montre l'exemple suivant :



Les sommets de ce polygone sont bien coloriés avec au moins trois couleurs, deux sommets consécutifs ne sont jamais de la même couleur, mais il est impossible de trianguler ce polygone de façon telle que les trois sommets de tout triangle soient toujours de couleurs différentes. Je propose donc d'ajouter à l'énoncé l'hypothèse que le polygone est **convexe**.

(Note de la rédaction : il est vrai que le mot “voisin” a malencontreusement été omis dans l'énoncé, “deux sommets voisins ne sont jamais de même couleur” ; il est vrai aussi que le mot “partagé” était sans doute mal choisi, une autre formulation de l'énoncé permettrait d'envisager dans la figure ci-dessus la diagonale NB et les deux triangles NRB qu'elle détermine.)

*Chaque sommet d'un polygone **convexe** est colorié de manière telle que deux sommets **consécutifs** ne sont jamais de même couleur. On utilise pour ce coloriage au moins trois couleurs distinctes. Démontrer que ce polygone peut être partagé en triangles par des diagonales non sécantes de telle sorte que les trois sommets de tout triangle soient de couleurs différentes.*

PREUVE

Nous prouvons l'énoncé par récurrence sur le nombre n de côtés du polygone.

Pas initial : $n = 4$.

L'une au moins des diagonales du polygone a ses sommets de couleurs différentes, sinon le coloriage n'utilise que deux couleurs. Partageons le polygone en deux triangles selon une telle diagonale : les trois sommets de ces triangles sont forcéments de couleurs différentes (que les sommets de l'autre diagonale soient de même couleurs ou non).

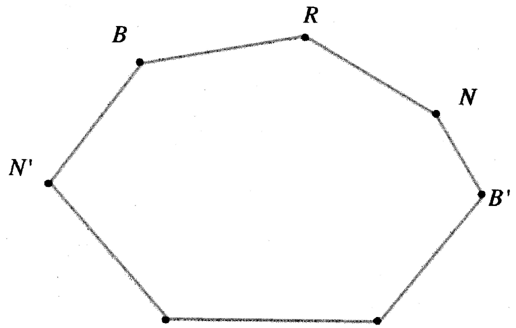
Pas récurrent : si c'est vrai pour n, c'est vrai pour $n + 1$.

Supposons que l'énoncé soit vrai pour tout polygone convexe à n côtés, et supposons qu'un polygone convexe à $n + 1$ côtés ait ses sommets coloriés comme dans l'énoncé.

Je dis qu'il est possible de trouver trois sommets consécutifs de ce polygone qui sont de couleurs deux à eux différentes.

En effet, si ce n'était pas le cas, le polygone ne pourrait être colorié qu'en deux couleurs : si, par exemple, un premier sommet est bleu et le suivant est noir, alors le suivant est forcément bleu (il ne peut être noir, et s'il n'était pas bleu, il y aurait trois sommets consécutifs de couleurs deux à deux différentes). De même, le sommet suivant serait bleu, puis le suivant noir, etc. : seuls le bleu et le noir seraient utilisés.

Maintenant, je dirais même plus : il est possible de trouver trois sommets consécutifs tels que si on ôte le sommet du milieu parmi ces trois, les sommets qui restent sont encore coloriés avec au moins trois couleurs (seule condition de l'énoncé que le polygone à n sommets obtenu en ôtant le sommet en question ne vérifie pas automatiquement). En effet, supposons qu'on trouve trois sommets consécutifs de couleurs différentes, disons Bleu, Rouge, Noir dans cet ordre : il s'agit des sommets B, R, N sur le dessin. Si le polygone obtenu en ôtant ce sommet rouge R a ses sommets coloriés en trois couleurs au moins, tout va bien. Sinon, tous ses sommets sont forcément bleus ou noirs. Et il en a au moins quatre. Le sommet qui précède le sommet bleu B de départ est forcément noir, et il est distinct de N. Appelons-le N'. De même, le sommet qui suit le sommet N est forcément bleu et distinct de B ; appelons-le B'.



(Peu importent le nombre et la couleur des points entre N' et B' ; il peut n'en exister aucun.)

Le triangle $N'BR$ est bien colorié en trois couleurs, et si on enlève le sommet B, le polygone obtenu $RNB' \ldots N'$ est bien colorié en trois couleurs au moins (en fait, en trois couleurs exactement dans ce cas-ci).

Soit donc, dans le cas le plus général, un sommet dont les deux sommets adjacents sont de couleurs distinctes et tel que le polygone obtenu en ôtant ce sommet ait bien ses sommets coloriés en trois couleurs au moins. Par hypothèse de récurrence, ce polygone peut être triangularisé de façon que tous les triangles aient leurs sommets de trois couleurs distinctes, et, en y ajoutant le premier triangle, on obtient une triangularisation convenable pour le polygone de départ.

Un autre lecteur a corrigé l'énoncé et fourni une bonne solution, il s'agit de J.F. MACQ de Virelles.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir avant le 1er juillet 1999.

214. Surprenant et amusant

On écrit la suite des multiples entiers positifs de $\sqrt{2}$ en ignorant la partie fractionnaire et immédiatement en-dessous les nombres manquant dans la première suite

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 11 \ \dots \\ 3 & 6 & 10 & 13 & 17 & 20 & \dots & \end{array}$$

La différence entre le n-ième terme de la 2ème suite et le n-ième terme de la 1ère suite est $2n$. Le démontrer.

(issu de l'article "Are These the Most Beautiful" de D. WELLS paru dans *The Mathematical Intelligencer*, vol. 12, n°3, 1990 et communiqué par J.G. SEGERS de Liège).

215. Triangles et carrés

Sur les côtés d'un triangle ABC, on construit extérieurement trois carrés de centres D, E, F. Démontrer que les milieux des côtés du triangle ABC sont les centres des carrés construits intérieurement sur les côtés du triangle DEF.

216. Fonctions polynômes

Déterminer toutes les fonctions polynômes f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(2x) = f'(x) \cdot f''(x).$$

Olympiades

C. Festraets,

Un lecteur m'a demandé la solution du problème 15 du 18ème AIME (énoncés parus dans le n°118 de *Mathématique et Pédagogie*).

Un domino est par définition une paire ordonnée de nombres entiers positifs distincts. Une suite propre de dominos est une liste de dominos distincts dans laquelle la première coordonnée de chaque paire est égale à la seconde coordonnée de la paire la précédant et dans laquelle (i, j) *et* (j, i) *ne peuvent apparaître ensemble pour tout* i *et* j*. Soit* D_{40} *l'ensemble de tous les dominos dont les coordonnées ne dépassent pas 40. Trouver la longueur de la plus grande suite propre de dominos qui peut être construite en utilisant les dominos de* D_{40}*.*

Solution.

Toute suite propre de dominos peut être représentée par un graphe ; par exemple, la suite (1,3), (3,5), (5,2), (2,4), (4,1) est représentée par

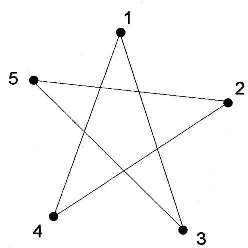


Figure 1

Pour l'ensemble D_{40} des dominos, le graphe aura 40 sommets. Si l'on joint deux à deux ces sommets, on obtient

$$\binom{40}{2} = 20.39 = 780$$

arêtes.

De chacun des sommets partent 39 arêtes. On sait (Euler, problème des ponts de Koenigsberg) qu'il n'est possible de dessiner d'un seul trait un

graphe à n sommets que dans les deux cas
– les n sommets sont d'ordre pair ;
– $n-2$ sommets sont d'ordre pair et 2 sommets sont d'ordre impair.

Puisqu'il nous faut la plus longue suite possible de dominos, gardons deux sommets impairs et en chacun des 38 autres sommets, supprimons une arête.

Chaque arête joint deux sommets, donc nous supprimons 19 arêtes. Il en reste $780 - 19 = 761$.

Ce graphe peut être dessiné d'un seul trait, il correspond à une suite de 761 dominos.

$* * * * * *$

Voici les solutions des problèmes MAXI de la finale de l'O.M.B. 1998.

Aucun élève n'a résolu complètement le premier problème, j'en donne une solution "officielle". Les solutions des problèmes 2, 3 et 4 ont été choisies parmi les meilleures réponses fournies par les élèves.

1. Soit $ABCD$ un rectangle du plan (les sommets étant cités dans l'ordre cyclique), d'aire S, et M un point intérieur à ce rectangle.

(a) Montrer que $S \leqslant \|AM\| \cdot \|CM\| + \|BM\| \cdot \|DM\|$.

(b) Dans quel(s) cas S est-elle égale à $\|AM\| \cdot \|CM\| + \|BM\| \cdot \|DM\|$?

Solution

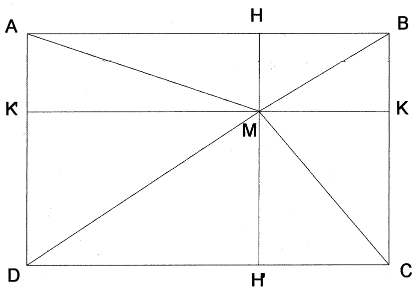


Figure 2

Appelons H et H' les projections orthogonales de M sur AB et CD, K et K' les projections orthogonales de M sur BC et DA respectivement.

La somme des aires des rectangles $HBKM$ et $H'DK'M$ est égale à

$$\begin{aligned}
&KM.HM + K'M.H'M\\
&= CM\cos\widehat{CMK}.AM\cos\widehat{AMH} + AM\sin\widehat{AMH}.CM\sin\widehat{CMK}\\
&= CM.AM(\cos\widehat{CMK}\cos\widehat{AMH} + \sin\widehat{AMH}\sin\widehat{CMK})\\
&= CM.AM\cos(\widehat{CMK} - \widehat{AMH})\\
&\leqslant CM.AM.
\end{aligned}$$

De même, la somme des aires des rectangles $KCH'M$ et $K'AHM$ est $\leqslant DM.BM$.

En additionnant, on obtient

$$\text{aire } ABCD \leqslant CM.AM + DM.BM.$$

On voit aisément qu'on a l'égalité lorsque M est un des sommets du rectangle ou lorsque celui-ci est un carré et que M est son centre.

2. Autour d'une table ronde se trouvent n personnes ($n \geqslant 3$). Toutes les heures, chacune vote à voix haute par "oui" ou par "non", sur une proposition de résolution. Les participants à cette réunion ont tous décidé d'adopter *le même comportement : "Si, à un tour du scrutin, l'un au moins de mes deux voisins a voté de la même manière que moi, je conserverai le même vote au tour suivant ; si au contraire, mes deux voisins ont voté de manière opposée à mon vote, alors au tour suivant, je changerai mon vote".*

(a) Si $n = 25$, existe-t-il, pour toute répartition initiale des votes, un moment où les votes ne changeront plus ?

(b) Qu'en est-il pour d'autres valeurs de n ?

Solution de J.C. LEYDER de l'Athénée Royal de Liège

(b) Si, au départ, il y a une suite (c'est-à-dire au moins deux réponses identiques côte à côte), les réponses des personnes de cette suite ne changeront pas puisqu'elles sont voisines et ont le même vote.

Deux possibilités se présentent alors

— soit cette suite est accolée à une autre suite et dans ce cas, chacune des suites garde sa réponse ;
— soit cette suite est accolée à une réponse isolée et au prochain vote, cette réponse va changer, donc deviendra identique aux réponses de la suite, ce qui lui permettra de s'y intégrer.

Cela continue jusqu'à ce que toutes les réponses isolées aient été intégrées dans les suites contiguës et alors les votes ne changent plus.

Si, au départ, il n'y a pas de suite, c'est-à-dire qu'il y a une alternance de "oui" et de "non", alors

— au 1er vote, toutes les réponses se modifient et il y a toujours alternance.
— au 2ème vote, les réponses se modifient à nouveau et on se retrouve dans la position de départ.

Il s'agit du seul cal où il n'y a pas de moment où les votes ne changent plus.

Donc, quel que soit n, il y aura un moment où les votes ne se modifient plus sauf si, au départ, il y a une alternance de "oui" et de "non", ce qui n'est possible que pour n pair.

(a) Si $n = 25$, n est impair, il y aura nécessairement au moins une suite de deux réponses identiques au départ et donc un moment où les votes ne changeront plus.

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{1}{2}\, f(xy) + \frac{1}{2}\, f(xz) - f(x)f(yz) \geqslant \frac{1}{4}$$

pour tous réels x, y et z.

Solution de A. VIGIER du Lycée Français J. Monet de Bruxelles.

Si $x = y = 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,f(0) + \frac{1}{2}\,f(0) - f^2(0) \geqslant \frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow\ f^2(0) - f(0) + \frac{1}{4} \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow\ \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow\ f(0) - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{(un carré ne peut être négatif)}\\
&\Leftrightarrow\ f(0) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Si $x = y = z = 1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,f(1) + \frac{1}{2}\,f(1) - f^2(1) \geqslant \frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow\ f^2(1) - f(1) + \frac{1}{4} \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow\ \left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow\ f(1) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Si $y = z = 1$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,f(x) + \frac{1}{2}\,f(x) - f(x)\cdot f(1) \geqslant \frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow\ f(x) - f(x)\cdot\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow\ f(x) \geqslant \frac{1}{2}\text{pour tout } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Si $y = z = 0$

$$\frac{1}{2}\,f(0) + \frac{1}{2}\,f(0) - f(x).f(0) \geqslant \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-f(x).\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow f(x) \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$f(x) \geqslant \frac{1}{2}$ et $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}$ est l'unique fonction qui vérifie l'inégalité.

4. En combien de régions 1998 grands cercles partagent-ils la surface de la sphère sur laquelle ils sont tracés,si trois quelconques d'entre eux ne sont jamais concourants ? (Un grand cercle est une section de la sphère par un plan contenant le centre de celle-ci.)

Solution de D. PINTO de l'Ecole Européenne de Luxembourg.

Supposons qu'il y ait $n-1$ grands cercles sur la sphère ($n > 1$).

Pour tracer le n-ième cercle, je dois couper chacun des $n-1$ cercles en deux points ; il aura donc $2(n-1)$ nouveaux points d'intersection que nous désignerons par $I_1, I_2, \ldots, I_{2n-2}$.

Tous ces points sont distincts (sinon, il existerait trois cercles passant par le même point).

En passant de I_1 à I_2, le n-ième cercle coupe une région existante en deux nouvelles régions. De même, en passant de I_2 à I_3, de I_3 à I_4, ..., de I_{2n-2} à I_1.

$2n-2$ nouvelles régions sont créées lorsqu'on trace le n-ième cercle ($n > 1$).

Quand un seul cercle est sur la sphère, il y a deux régions.

Quand 1998 cercles sont sur la sphère, il y en a

$$\begin{aligned} 2+\sum_{n=2}^{1998}(2n-2) &= 2+\sum_{n=1}^{1998}(2n-2) \\ &= 2+2\sum_{n=1}^{1998} n-\sum_{n=1}^{1998} 2 \\ &= 2+2\frac{1998.1999}{2}-2.1998 \\ &= 3990002 \end{aligned}$$

Le nombre de régions est 3990008.