Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N° 121 *Mars – Avril 1999*

Éditorial

J. Navez,

Je voudrais revenir sur un sujet qui me tient particulièrement à cœur à savoir d'ouvrir dans notre revue un espace où les professeurs puissent s'exprimer non seulement sur le contenu des matières qu'ils doivent enseigner mais aussi sur les contraintes qu'ils ressentent en tant qu'enseignants.

En effet, des sujets comme l'organisation de l'enseignement, la politique de l'enseignement en ce qui concerne les mathématiques, les compétences initiales ou terminales, l'organisation de l'inspection ne doivent certainement pas laisser nos affiliés indifférents.

Nous ne cherchons sûrement pas la polémique, mais le brassage des idées ne peut qu'enrichir les suggestions que nous sommes à même de proposer aux autorités.

Il est assez intéressant de constater que par exemple l'article de Monsieur Jacques Bair intitulé« Échos de Congrès » nous a permis de recevoir pas mal de courrier avec des critiques, bien sûr en sens divers, mais qui permettent d'étoffer le débat.

J'espère que nous recevrons d'autres articles de la même veine et que l'on pourra aussi intensifier les échanges d'opinion avec nos affiliés.

Jacques NAVEZ

Avis relatif à l'évaluation des résultats des élèves en mathématiques (IEA - 1995)

Avis n° 56 - Conseil de l'Education et de la Formation, *Communauté Française de Belgique* [25]

Deuxième partie - Conseil du 4 septembre 1998

Deuxième partie
AVIS DU CONSEIL

Analyse et propositions

Comme il l'a fait pour l'enseignement des sciences, dans l'avis qu'il a rendu en mars 1998 [26] , le CEF souhaite être exhaustif dans l'examen des différents aspects de l'enseignement des mathématiques en Communauté française de Belgique.

Aussi son avis envisage-t-il successivement les objectifs, les contenus, les méthodes, les moyens humains, les moyens matériels et l'évaluation.

1. Les objectifs

1.1. Inscrire l'enseignement des mathématiques dans les missions de l'école

La formation mathématique doit contribuer de façon essentielle à la poursuite des objectifs généraux de l'enseignement, définis par le monde politique dans le décret-missions.

Comme les autres activités éducatives, cet enseignement visera donc à

— *Promouvoir la confiance en soi et le développement de la personne de chacun des élèves ;*

25. La première partie de cet article est parue dans Mathématique et Pédagogie, *n° 120, pp. 5–38 (1998).*

26. Conseil de l'Education et de la Formation, "Avis n°54 relatif à l'évaluation des résultats des élèves en sciences", 6 mars 1998.

— *Amener tous les élèves à s'approprier des savoirs et à acquérir des compétences qui les rendent aptes à apprendre toute leur vie et à prendre une place active dans la vie économique, sociale et culturelle ;*
— *Préparer tous les élèves à être des citoyens responsables, capables de contribuer au développement d'une société démocratique, solidaire, pluraliste et ouverte aux autres cultures ;*
— *Assurer à tous les élèves des chances égales d'émancipation sociale.*

Les analyses et propositions des experts, mentionnées dans le rapport au CEF, mettent particulièrement en évidence certains aspects de ces objectifs.

La formation du citoyen

L'enseignement des mathématiques, dans le Fondamental et dans le Secondaire, doit assurer à la fois des connaissances et des compétences spécifiques aux diverses disciplines, mais aussi réaliser une formation qui permette à l'élève aujourd'hui, et plus tard, à l'adulte, d'exercer pleinement ses responsabilités de citoyen. Cet aspect est précisément développé dans le rapport du CREM. Ses auteurs insistent notamment sur le rôle des mathématiques dans l'exercice d'une citoyenneté responsable dans une société démocratique. Il importe pour eux que les savoirs d'intérêt général ne soient pas réservés seulement à quelques-uns. Certes, tous les jeunes n'envisagent pas de faire carrière dans une discipline mathématique. Mais il est toutefois nécessaire que chacun soit équipé d'un "*savoir de base indispensable* ([27])" dans lequel la dimension mathématique est bien présente. C'est ce que les auteurs du rapport du CREM appellent le "*bagage minimum du citoyen*", constitué de connaissances susceptibles de se démultiplier.

Le Rapport DANBLON aborde aussi cet aspect, quand il propose de "*prévoir, pour chaque citoyen, de la maternelle jusqu'au terme de la scolarité obligatoire, un ensemble commun de connaissances et de capacités mathématiques fondamentales*". Cet ensemble serait pensé globalement à partir d'un unique noyau de base.

Cette préoccupation est présente aussi dans des pays étrangers (Etats-Unis et Land de Rhénanie-Westphalie en Allemagne ([28])).

L'acquisition de la confiance en soi

27. Avis du CEF relatif aux objectifs particuliers à l'enseignement secondaire (5 février 1992).
28. "Mathématiques de 10 à 14 ans ? Continuité et compétences", Cellule de pilotage, Secrétariat général du MERF, 1996 (référence : Mathématiques/96).

Pour acquérir la confiance en soi évoquée dans le premier objectif général, il faut résolument s'attaquer à la "peur des mathématiques" qu'éprouvent nombre de jeunes et d'adultes. Le Rapport du CREM, à ce propos aussi, prend clairement position : l'enseignement des mathématiques doit amener les élèves à s'intéresser à toutes les questions avec confiance, à vouloir expérimenter, essayer, questionner, chercher. Pour ce faire, les enseignants devront développer des attitudes d'ouverture, d'accueil aux initiatives des élèves, sans attendre d'eux l'application convergente d'une méthode imposée, sans exiger toujours la "bonne réponse prévue" alors que d'autres voies de résolution sont envisageables et acceptables.

L'appropriation, mieux, la construction des savoirs

L'objectif d'appropriation des savoirs occupe lui aussi une place importante dans les études récentes consacrées à l'enseignement des mathématiques en Communauté française. Dans l'esprit des objectifs généraux définis par le CEF en 1992, c'est même la "construction des savoirs" qui retient l'attention des experts.

Le rapport DANBLON l'évoque à propos de "l'enseignement en spirale". Il propose que l'éducation mathématique soit "*construite dans sa cohérence globale d'un bout à l'autre de la jeunesse, avec des passages et repassages aux points clés, et chaque fois un approfondissement, une généralisation, une vue plus large. C'est ce qu'on appelle souvent l'enseignement en spirale*".

Il recommande en outre d'articuler l'enseignement des mathématiques à la résolution de situations-problèmes, et de construire, et reconstruire avec les élèves les principaux concepts.

Le rapport du CREM abonde dans le même sens, lorsqu'il s'oppose à la transmission d'un "savoir achevé", mais invite à construire avec les élèves un savoir qui réponde à leurs interrogations, portant sur des situations-problèmes de la vie quotidienne. Dans cet esprit, il est essentiel que les élèves apprennent la pensée autonome, soient mis en situation de prendre des initiatives, d'agir, de réfléchir avec une "*intention personnelle*".

1.2. Une réflexion sur les objectifs repris aux socles de compétences [29]

Pour **l'enseignement primaire**, le cadre général précise que l'étude des mathématiques "*s'effectue au départ d'objets , de faits vécus et observés dans le réel. L'accent est mis, non sur une accumulation quantitative et répétitive d'exercices, mais sur une véritable formation mathématique au travers de la construction et du développement d'une compétence essentielle : relever des défis à l'intelligence, résoudre des situations problématiques et recourant tant à l'intuition qu'à la mise en évidence de liens logiques. La réflexion portée sur cette résolution de situations problématiques conduit à mathématiser le réel et à procéder à des abstractions au départ de celuici*".

Qu'elles soient d'intégration ou spécifiques, les compétences à acquérir s'articulent à la résolution de situations-problèmes et correspondent aux "*savoir-calculer, savoir-mesurer, savoir-structurer l'espace et ses composantes*".

Même s'ils insistent sur le recours à des situations-problèmes, les socles n'en présentent pas, se limitant à énumérer des compétences à atteindre telles qu'elles figurent généralement dans des programmes. Le rapport DANBLON (quand il suggère de disposer de "réserves de situations problématiques appropriées"), le rapport du CREM (qui propose que des chercheurs et des enseignants produisent ensemble des "curriculums") sont précis dans leur demande : il serait souhaitable que les groupes de travail chargés de rédiger les futurs socles s'en inspirent.

Au **premier degré de l'enseignement secondaire**, les Socles soulignent d'entrée de jeu que "*l'enseignement des mathématiques s'adresse à des élèves qui ont des acquis très variables, tant au niveau des notions disponibles que des démarches d'apprentissage*". Cette affirmation ne laisse pas d'étonner, quand on sait que l'enseignement fondamental n'est pas un enseignement qui se différencie par des choix possibles d'options et de filières. Il est connu ? mais cet aspect est généralement déploré ? que l'enseignement belge francophone est très hétérogène dans ses résultats, précisément parce qu'il pratique peu l'hétérogénéisation des publics.

Le texte des Socles poursuit en affirmant que "*Au départ de cette diversité, les établissements eux-mêmes déploient des projets et des méthodes*

29. "Socles de compétences dans l'enseignement fondamental et au premier degré de l'enseignement secondaire", MERF, 1994.

propres". On peut espérer qu'ils le font pour réduire les différences, puisque le texte ajoute "*Programmes et socles de compétences ont néanmoins pour but de donner à tous une base de formation commune*".

On retrouve sans doute ici les recommandations déjà formulées par le CEF, quand il introduit la notion de "savoir de base indispensable", à faire acquérir par tous les élèves au sortir de l'enseignement de base, ou le "bagage minimum du citoyen", cher au CREM. Il s'agit là d'un aspect essentiel, qu'il convient d'affirmer sans réticence.

Pour ce niveau d'enseignement, les socles détaillent aussi une série de compétences, à savoir :
— comprendre un message
— traiter, argumenter, raisonner
— communiquer
— appliquer
— généraliser, structurer, synthétiser.
Ces compétences, présentées dans un ordre différent, s'identifient à celles qui sont décrites dans les Socles pour l'enseignement scientifique. Pour celles-ci, le CEF a montré qu'elles ne correspondent pas totalement à la démarche scientifique ([30]).

Leur présentation juxtaposée ne fait pas apparaître leurs mutuelles relations, leur interdépendance. Par exemple, aucun lien n'est mis en évidence entre "appliquer" et "généraliser".

1.3. Au lieu d'un outil de sélection, faire des mathématiques un outil de promotion

Le titre de cette partie est emprunté à une récente interview de Nicolas ROUCHE, Directeur du CREM ([31]). Il reconnaît qu'actuellement, on utilise largement les mathématiques pour opérer une sélection entre les élèves, à tous les niveaux de l'enseignement. Il considère qu'on peut faire autre chose : "*en faisant des mathématiques qui ont du sens, qui donnent un pouvoir d'interprétation de situations diverses, que celles-ci se trouvent dans des disciplines extérieures aux maths ou dans les maths elles-mêmes. Car il y a des questions intéressantes et stimulantes aussi dans les mathématiques !*

30. Conseil de l'Education et de la Formation, "Avis n°54 relatif à l'évaluation des résultats des élèves en sciences", 6 mars 1998.

31. A-M. PIRARD, "Nicolas Rouche ? Apprendre les mathématiques du citoyen", L'Ecole 2000 ? janvier, février 1998, pp.4-5.

Ceux qui ont été éduqués de manière à aimer vivre avec une préoccupation mathématique ont une possibilité de bonheur intime : on réfléchit, on s'enfonce dans sa réflexion, on trouve un petit peu, un peu plus, davantage ? Tout cela est finalement très agréable. (?) Si vous donnez au citoyen ordinaire une maîtrise de son environnement, dans la mesure où celui-ci se prête à une approche mathématique, vous lui donnez une assurance, une clairvoyance dans la vie qu'il n'aurait pas eue autrement".

Pour remplacer la sélection par la promotion, il faut mettre fin à la "peur des mathématiques", en développant chez tous les élèves la confiance en leurs possibilités de comprendre les mathématiques, de trouver du plaisir à les pratiquer, de l'utilité à y recourir. Les enseignants ont un rôle majeur à jouer dans le revirement à opérer. Il en sera question plus loin, dans la partie consacrée aux moyens humains.

2. Les contenus

Il faut d'abord remarquer que, contrairement à la situation qui prévalait pour les sciences, les programmes de mathématiques de la Communauté française correspondent largement (85%) à la moyenne des programmes des autres pays. Cela n'empêche qu'il serait judicieux de revoir certains contenus, comme le suggère le point 2.1. ci-dessous.

Les analyses formulées par les inspecteurs de l'enseignement et celles qui sont contenues dans le Rapport DANBLON et dans l'étude du CREM convergent pour préconiser une formation mathématique cohérente sur l'ensemble de l'obligation scolaire. Cet aspect doit inspirer les propositions avancées.

2.1. Un noyau de base

Il faut apprendre aux jeunes des mathématiques élémentaires, pertinentes et utiles aujourd'hui. Pour certains d'entre eux, cette première étape de formation débouchera sur un approfondissement, conduisant par exemple à une carrière de chercheur. Pour beaucoup d'autres, qui n'adopteront pas cette voie, elle doit rendre possible un dialogue avec les premiers : les spécialistes et les simples citoyens doivent pouvoir établir des échanges, s'entendre et se comprendre.

Les différents programmes devraient être pensés à partir d'un unique "noyau de base", comportant un ensemble commun de connaissances et de capacités mathématiques fondamentales. Ce noyau pourra être complété, intégré dans un programme de formation plus vaste, donner lieu à des applications selon les orientations que choisiront les élèves, au terme de l'enseignement de base ou de l'enseignement secondaire.

Dans cette conception, il faut revoir en profondeur les contenus enseignés, de manière à circonscrire le noyau de base : écarter des programmes actuels certaines matières, devenues des "branches mortes", introduire des notions nouvelles. Ces modifications seront apportées en tenant compte de l'évolution de la recherche en mathématiques, mais aussi de leur utilité dans les activités humaines importantes, et comme instruments de pensée quotidiens.

2.2. Un enseignement de continuité

Cet aspect du contenu de la formation mathématique est souligné avec force par les inspecteurs et par les chercheurs. Les premiers regrettent particulièrement la rupture qui caractérise le passage primaire-secondaire (elle se manifeste notamment par les différences de langage entre instituteurs et régents).

Les chercheurs du CREM recommandent une conception globale de l'enseignement des mathématiques "*d'un bout à l'autre de la jeunesse*". Ils signalent aussi que cette conception est largement partagée, sur le plan international.

Le groupe de travail de la Cellule de pilotage ([32]) propose très concrètement d'entamer la continuité des apprentissages dès l'école maternelle. Intégré à des situations de vie, l'apprentissage "préscolaire" des mathématiques permet de construire une première approche de notions à travers des activités ludiques : apprentissage des nombres, des grandeurs, des formes, introduction du vécu, du représenté, du conceptualisé. Mais aussi "*acquisition d'un bon moral à l'égard des mathématiques*".

32. "Mathématiques de 10 à 14 ans ? Continuité et compétences", Cellule de pilotage, Secrétariat général du MERF, 1996 (référence : Mathématiques/96).

2.3. Aborder des situations-problèmes

Evoquée déjà dans les objectifs, à propos de la construction des savoirs, la résolution de problèmes constitue un contenu essentiel de la formation mathématique. Tous les experts, pédagogues et chercheurs, chez nous et dans d'autres pays partagent ce point de vue, comme cela figure dans la première partie de cet avis.

Pour l'enseignement fondamental, les socles de compétences ([33]) préconisent que l'étude des mathématiques s'effectue au départ d'objets, de faits vécus et observés dans le réel. "*L'accent est mis, non sur une accumulation quantitative et répétitive d'exercices, mais sur une véritable formation mathématique au travers de la construction et du développement d'une compétence essentielle : relever des défis à l'intelligence, résoudre des situations problématiques en recourant tant à l'intuition qu'à la mise en évidence des liens logiques. La réflexion portée sur cette résolution de situations problématiques conduit à mathématiser le réel et à procéder à des abstractions au départ de celui-ci*".

Pour le 1er degré de l'enseignement secondaire, les socles de compétences ([34]) proposent que "*Au départ, les thèmes et situations mettent en route une pédagogie de la recherche (?). Les activités des élèves, déclenchées par les situations proposées utiliseront et développeront des compétences spécifiques à la résolution de problèmes (?). Le travail de structuration, de généralisation et de synthèse consiste à dégager des activités, les matières qui figurent dans le noyau du programme*".

Une précision s'impose cependant. S'approprier les mathématiques en traitant des situations-problèmes ne signifie pas qu'on se limite à examiner les situations de la vie quotidienne des élèves. Il s'agirait là d'une dérive utilitariste, qui compromettrait fondamentalement l'acquisition des savoirs mathématiques. Lorsqu'on évoque des situations-problèmes, on envisage celles qui "font problème à l'élève". Elles se trouvent certes dans la vie personnelle des élèves, mais aussi dans d'autres disciplines scolaires et, nécessairement, dans le champ mathématique lui-même.

Ce type de contenu comporte deux phases de traitement. Il convient d'abord d'apprendre à "poser le problème", à l'identifier en formulant les bonnes questions. Ensuite, on pourra passer à la résolution du problème, en recherchant les bonnes réponses.

33. Page 53.
34. Page 128.

Pour concrétiser ces propositions, il faut réunir des conditions de réalisation, en matière de formation et d'accompagnement des enseignants, de matériel, de supports documentaires, d'organisation. Ces aspects seront abordés plus loin, lorsque seront examinés les moyens humains et matériels.

2.4. Les contenus spécifiques

Il n'appartient pas au CEF de décrire les différentes matières qui devraient intervenir dans les contenus de la formation mathématique de l'enseignement de base. Ces questions sont abordées de manière précise dans plusieurs des publications qui ont été utilisées pour rédiger cet avis. Il s'agit principalement du Rapport du CREM et du Rapport de la Cellule de pilotage du Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation (MERF). Ces deux documents, très riches et détaillés, sont tout à fait complémentaires : plusieurs personnes ont travaillé dans les deux équipes de rédaction. Composés de chercheurs en mathématiques et en pédagogie, d'inspecteurs, de membres de l'administration du MERF et d'enseignants du terrain, ils ont produit un travail remarquable qui mériterait une très large diffusion auprès des enseignants.

3. Les méthodes

3.1. La construction des savoirs et l'enseignement en spirale

Par un enseignement articulé à la résolution de problèmes, on met quotidiennement les élèves aux prises avec des difficultés à repérer, à analyser, à lever. En programmant judicieusement la succession des situations présentées, on peut conduire les élèves à édifier eux-mêmes, pas à pas, leur propre savoir. Il ne s'agira cependant pas de leur faire tout redécouvrir : ce serait impossible, et de toute façon peu efficace.

Cette construction procède selon un schéma général appelé "enseignement en spirale". Préconisé dans le Rapport DANBLON, il a été présenté dans la première partie de ce texte.

Une description intéressante en est fournie dans une publication récente du CREM ([35]) : "*Le savoir ainsi construit progressivement ne l'est pas comme un mur ou une maison, par l'adjonction, chaque fois définitive, d'une nouvelle brique. Les concepts s'élaborent à partir des notions quotidiennes, par ajustements successifs, pour servir dans des situations problématiques de plus en plus difficiles. Les ajustements permettent de franchir des obstacles nouveaux, les concepts s'élaborent techniquement pour répondre aux besoins des démonstrations. La rigueur n'est pas une exigence imposée a priori, comme propriété ou condition bien définie de la pensée mathématique. Au contraire, elle s'élabore aussi par paliers comme un moyen de cette pensée en progrès*".

3.2. La maîtrise des langages

Les inspecteurs de mathématiques, consultés par le CEF sont préoccupés par l'excès de formalisme qui caractérise souvent l'enseignement des mathématiques, et dans lequel le sens disparaît. On constate d'ailleurs que les élèves, invités à utiliser un langage mathématique fait de symboles et de signes spécifiques se montrent incapables d'établir des liens, une correspondance entre ce langage et leur propre langue. Or, "*le véhicule constant de la pensée mathématique est la langue naturelle. C'est pourquoi le professeur de mathématiques doit aussi être un professeur de français. Bien entendu, les symboles et formules sont très souvent utiles, voire nécessaires, mais ils doivent s'inscrire dans des phrases et des paragraphes qui reflètent la pensée* ([36])".

Il convient aussi d'insister sur la capacité de lire des textes mathématiques. Les élèves éprouvent souvent, en effet, des difficultés à lire un texte mathématique au langage précis et rigoureux.

Les enseignants doivent être attentifs à ces aspects, et en faire une exigence constante dans leur enseignement.

35. N. ROUCHE, "L'enseignement des mathématiques d'hier à demain", CREM a.s.b.l., mars 1995, p. 34.
36. Id. p. 35.

3.3. La préoccupation du sens

En relation immédiate avec le point précédent, il faut recommander, avec tous les experts consultés par le CEF, d'amener un supplément de sens dans les cours de mathématiques.

En effet, elles sont trop souvent enseignées dans leur forme déductive sans faire suffisamment de place à la genèse des théories, aux contextes problématiques dans lesquelles elles sont applicables ou explicables, à l'activité mathématique des élèves.

Des difficultés surgissent cependant dans la réalisation de cette volonté de modifier cette situation.

— Même si les appels au développement d'une pensée autonome chez les élèves se multiplient, il faut se rendre compte que nombre d'enseignants insistent encore sur l'inculcation de routines de calcul. "*Imposer l'exécution selon des règles invariables de calculs qui n'ont d'autres objectifs qu'eux-mêmes, c'est-à-dire qui ne répondent à aucune question dans aucun contexte, c'est placer les élèves à côté du sens. En ce faisant, on leur apprend l'insignifiance, on les prive d'occasions de penser sérieusement et on leur donne des mathématiques une idée fausse et affligeante* ([37])".

  N. ROUCHE étudie les causes ?- à ses yeux multiples ?- de cette véritable déviation de l'enseignement.

  Elle est liée à des conceptions que partagent des enseignants, et qu'ils ont généralement héritées de leurs années d'études. Ce sont par exemple :

  — Les mathématiques consistent à calculer juste.
  — Il faut savoir calculer sans faute pour faire des mathématiques avancées.
  — Il faut préparer les élèves à pouvoir suivre dans l'année suivante par un apprentissage intensif des techniques de calcul.

  Elle s'explique aussi par le fait qu'enseigner des routines de calcul est sécurisant, et ne fait courir aucun risque à l'enseignant. Ces activités permettent une cotation objective, quantitative. "*Mais à quoi sert de coter objectivement des acquisitions négligeables ?*"

  Le calcul n'est cependant pas en soi une activité inutile ou accessoire. "*Ce ne sont donc pas les calculs qu'il faut éviter, mais bien l'inculcation de règles de calcul hors des contextes où elles peuvent servir. Ces règles s'acquièrent de façon intelligente et durable par un usage*

37. Id. p. 36.

régulier dans des contextes significatifs, c'est-à-dire des contextes où les fautes de calcul portent à conséquence, où elles entravent le sens. Ce qui est dorénavant fondamental, c'est d'apprendre où, quand et comment il faut demander à une machine de calculer, c'est aussi de comprendre le sens des opérations qu'on lui demande et de les contrôler ([38])".

— Une seconde difficulté est liée à l'abandon, par certains enseignants, de toute considération des structures axiomatiques. Echaudés par l'expérience des mathématiques modernes, ils veulent faire travailler les élèves exclusivement dans leur univers quotidien. Le danger de cette démarche est de maintenir les élèves dans des mathématiques empiriques, de ne pas assez intégrer la théorie dans l'exercice de la pensée, dans la résolution de problèmes. "*Les concepts, les théories, les structures sont les instruments de la pensée efficace. Il faut donc y tendre sans cesse et les enseigner, moins comme objets de contemplation que, précisément, comme instruments de pensée* ([39])".

Remarque :

Si l'excès de formalisme, dénoncé notamment par les inspecteurs de l'enseignement secondaire, est effectivement condamnable, il faut toutefois rappeler la nécessité d'une certaine formalisation, qui facilite la réflexion et la communication. Pour que la formalisation soit assimilée et utile, il faut qu'il y ait matière à réfléchir et à communiquer, et que les difficultés de réflexion et de communication soient suffisamment importantes pour justifier d'introduire un nouveau vocabulaire et/ou de nouvelles notations. Dans ces conditions, la formalisation n'est pas gratuite, mais elle a du sens et facilite la poursuite du travail, notamment du travail de conceptualisation. L'introduire trop tard serait aussi mauvais que l'introduire trop tôt .

3.4. Une organisation générale de l'enseignement

Comme le CEF l'a déjà mentionné dans l'avis relatif à l'évaluation des résultats en sciences ([40]) , il convient d'articuler l'enseignement des mathématiques et des sciences, et d'établir des relations étroites entre théorie et pratique.

38. Id. p. 37.
39. Id. p. 38.
40. Avis n°54 : "Evaluation des résultats des élèves en sciences ", 6 mars 1998.

Le recours à la résolution de problèmes permet de concrétiser ces recommandations. Il ne faudrait cependant pas limiter la formation mathématique à la fourniture d'outils pour résoudre des problèmes à caractère scientifique : même si cette dimension est intéressante, elle n'est pas suffisante pour atteindre les objectifs du cours de mathématiques.

C'est probablement par la modélisation de situations réelles que des synergies entre sciences et mathématiques trouveront le mieux à se développer, de manière réellement coopérative. La démarche expérimentale, qui sous-tend l'enseignement des sciences que le CEF a recommandé, est tout à fait appropriée à l'enseignement des mathématiques, comme l'explique le Rapport du CREM (voir 1ère partie de cet avis, point 3.2.3.).

Les situations réelles, les "contextes" dans lesquels on propose de faire travailler les élèves peuvent relever de la vie quotidienne des élèves, ou d'autres disciplines scolaires (par exemples, les sciences et les techniques). Mais il ne faut pas négliger à cet égard les contextes qui relèvent du champ même des mathématiques, qui peut fournir des situations "posant problème pour l'élève".

Dans cette logique, le passage aux concepts ne doit pas être trop rapide : il faut éviter toute conceptualisation prématurée. On n'enseignera pas les concepts avant d'en montrer le véritable usage. Comme le propose le CREM, il vaut mieux commencer par les "objets mentaux", intermédiaires entre la pensée commune et les mathématiques constituées, et ne passer aux concepts que lorsqu'ils sont motivés par les progrès de la pensée.

4. Les moyens humains

4.1. Le rôle des enseignants

Dans un enseignement mathématique conçu en relation étroite avec la résolution de situations-problèmes, le rôle des enseignants est particulier. Ils doivent être d'abord des "facilitateurs d'apprentissage", accompagnant les élèves dans la construction de leurs savoirs, plus que des transmetteurs de connaissances.

Dans cet esprit, ils développeront aussi des collaborations avec leurs collègues : travailler dans des contextes rend nécessaire le recours à l'interdisciplinarité. De même, ils seront nécessairement amenés à ouvrir leur enseignement vers l'extérieur.

Il ne sera pas facile, pour les enseignants, de remplir ce rôle difficile. Comme l'évoque N. ROUCHE ([41]) , "*pour qu'un professeur puisse proposer des situations-problèmes à ses élèves, il faut qu'il ait lui-même l'habitude de travailler des questions ouvertes. Il faut qu'il ait une connaissance approfondie à la fois de la matière mathématique et de ses avatars dans un esprit de recherche. Le plus simple pour qu'il ait ces capacités-là serait qu'on les ait développées en lui tout au long de ses études. On est habituellement loin du compte. Et de plus on voit le paradoxe : pour que l'enseignement se renouvelle dans notre génération, il faudrait qu'il ait déjà été renouvelé dans la génération précédente*".

4.2. La formation des enseignants

Les différents experts que le CEF a consultés pour rédiger cet avis accordent une grande importance à la formation des enseignants, qu'elle soit initiale ou continuée. Cette partie de l'avis du CEF dresse l'inventaire des propositions émises par les inspecteurs et les chercheurs, telles qu'elles ressortent des analyses détaillées dans le première partie.

La formation initiale

Le Rapport DANBLON est explicite, en cette matière. Pour ses auteurs, les futurs enseignants doivent posséder des connaissances solides, être capables de pensée autonome, être rompus à la résolution de problèmes. Le CREM quant à lui insiste sur la nécessité de former les enseignants qui acceptent l'idée d'un apprentissage constructiviste, et reconnaissent une part suffisante d'autonomie aux élèves.

La formation des futurs instituteurs devrait donner lieu à une réflexion approfondie. Si certains restent très attachés à la polyvalence des instituteurs, d'autres considèrent qu'elle constitue un objectif quasi impossible. Pour ces derniers, il serait opportun de former deux sortes d'instituteurs, spécialisés dans des disciplines distinctes, qui travailleraient de manière collégiale avec les élèves. Ils justifient cette proposition par l'exigence, faite aux enseignants qui auraient recours systématiquement à la résolution de situations-problèmes, d'avoir une connaissance étendue et une compétence

41. N. ROUCHE, "L'enseignement des mathématiques d'hier à demain", CREM a.s.b.l., mars 1995, p. 38.

sans faille dans la matière enseignée. Cette exigence ne pourrait être réalistement posée pour l'ensemble des disciplines.

Le CEF considère que cette question devrait être examinée de façon générale, dans un cadre plus large que celui du présent avis.

Pour les étudiants de l'agrégation de l'enseignement secondaire inférieur, le programme devrait comporter une étude avancée des mathématiques élémentaires, sans se limiter à celles qui sont enseignées au degré inférieur. Leur formation devrait être placée sous la responsabilité d'une équipe diversifiée d'enseignants, ayant des expériences variées dans le niveau d'enseignement pour lequel ils les forment.

Il importe aussi qu'ils soient spécifiquement préparés à enseigner dans le technique et le professionnel. Ces filières concernent un grand nombre d'élèves de l'enseignement secondaire, or les futurs enseignants ne sont que rarement préparés à y enseigner. : "*la quasi inexistence actuelle d'une telle préparation est une lacune grave. Elle est une cause, parmi d'autres, de ce que bon nombre de professeurs enseignent à ces classes sans enthousiasme et demandent à les quitter*".

Des liens étroits devraient relier les départements d'enseignement supérieur pédagogique des Hautes Ecoles, et le terrain de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire inférieur ([42]) . En outre, pour assurer la continuité des apprentissages, il faudrait aussi décloisonner les niveaux du Fondamental et du Secondaire inférieur. Il s'agit là d'aspects par lesquels les inspecteurs sont très préoccupés.

Des relations devraient être établies sur différents plans :

— Les professeurs de l'enseignement supérieur devraient avoir une connaissance réelle du terrain pour lequel ils forment leurs étudiants. Cette connaissance pourrait s'opérer par le moyen de collaborations concrètes et ciblées entre enseignants du Fondamental et du Secondaire inférieur et enseignants du Supérieur pédagogique : élaboration de réserves de situations-problèmes, d'épreuves d'évaluation critériées, de documents pédagogiques ou de textes de référence. Ce faisant, l'enseignement supérieur serait amené, au-delà d'une meilleure connaissance du terrain, à accentuer son implication dans la recherche appliquée tandis que les enseignements fondamental et

42. L'évaluation IEA ayant été effectuée avec des élèves de 14 ans (fin du 1er degré de l'enseignement secondaire), le CEF a limité son analyse à l'enseignement de base. La formation des enseignants à l'Université n'est donc pas prise en compte dans cet avis.

secondaire bénéficieraient d'une assistance technique et pédagogique bienvenue.

— Des collaborations devraient également s'établir entre les corps d'inspecteurs des différents niveaux (fondamental, secondaire inférieur et supérieur pédagogique). Ils pourront ainsi favoriser et encourager les rapprochements préconisés ci-dessus.

— Des lieux de rencontre formalisés devraient être prévus pour réunir dans un travail commun les enseignants du Supérieur pédagogique des différentes sections (maternel, primaire, secondaire). Ce faisant, on pourrait rendre plus proches certains aspects de la formation initiale des futurs enseignants, avec la perspective de rendre plus probable leur future coopération sur le terrain. On pourrait profiter de ces rencontres pour souligner la nécessaire continuité verticale des apprentissages, notamment pour les mathématiques où les ruptures sont fréquentes et regrettables.

— Aux niveaux du primaire et du secondaire, l'enseignement des mathématiques est cloisonné, pour les actions de recherche ([43]) . La séparation des recherches relatives à ces niveaux justifie que trop peu de personnes, en Communauté française, s'efforcent de développer une vue cohérente de l'apprentissage des mathématiques depuis le plus jeune âge jusqu'à l'âge adulte. Cette lacune est dénoncée par la Commission DANBLON. Une manière d'y mettre fin consisterait à regrouper des enseignants et des chercheurs, intéressés aux différents niveaux d'enseignement, pour concevoir ensemble des outils à caractère didactique. Il y sera fait mention dans la suite du texte (moyens matériels).

La formation continuée

Les inspecteurs souhaitent que la formation continuée soit rendue accessible à tous les enseignants qui sont actuellement en activité de service, pour qu'à travers elle soient diffusées, expliquées, adoptées les innovations pédagogiques et les recommandations propices à améliorer la qualité de l'enseignement.

Ils insistent particulièrement sur l'articulation à opérer entre les prochains socles de compétences et la formation continuée des enseignants. Ils proposent qu'une politique coordonnée soit menée pour permettre aux

43. Les recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques sont menées séparément, pour le maternel et le primaire, en facultés de psychopédagogie, pour le secondaire dans les départements de mathématiques.

enseignants de s'approprier les socles, d'en comprendre l'utilité, d'en mesurer l'intérêt, d'en inspirer leur enseignement, et les amener à les considérer comme des objectifs à atteindre avec tous les élèves. Il est probable que la simple diffusion du document écrit ne produira ce résultat que dans un petit nombre de cas. Il faudrait donc soutenir, conjointement à la publication des nouveaux socles, l'organisation d'actions de formation continuée destinées à soutenir les enseignants dans la mise en ?uvre des prochains socles.

Deux axes de développement de la formation continuée sont évoqués par l'inspection :

La formation continuée classique (séquences de formation réunissant des enseignants et des formateurs, à l'extérieur de l'école) permet aux enseignants de se concentrer sur leur formation et de participer à des échanges de pratiques et des confrontations qui s'avèrent toujours enrichissantes. Toutefois, cette formule comporte un inconvénient important par le fait que les professeurs en formation, absents de leur établissement, n'y sont pas remplacés. Cet aspect mériterait une recherche de solution. Toutefois, il concerne des domaines beaucoup plus larges que le seul enseignement des mathématiques, et ne sera donc pas traité dans ce cadre-ci.

La concertation et le travail quotidien en équipe de collègues d'une même école ou d'écoles proches comporte une dimension formative sur laquelle les inspecteurs tiennent à mettre l'accent. Elle s'apparente à ce que préconise la Commission DANBLON. Ses membres considèrent que la formation continue la plus efficace est celle qu'acquièrent les enseignants lorsqu'ils travaillent en collaboration à la production des matériaux de leur propre enseignement.

Pour être efficace, la formation continue doit être reconnue comme un droit et être intégrée harmonieusement à l'exercice de la profession.

5. Les moyens matériels

5.1. Organiser les cours dans le temps

Pour l'enseignement des sciences, le CEF avait mis en évidence, dans l'enseignement fondamental, que les volumes horaires prévus pour certaines activités n'y étaient pas effectivement affectés. Cette situation n'est pas perceptible pour l'enseignement des mathématiques, considéré dans tout l'enseignement de base comme une matière importante, voire primordiale.

Toutefois, si les volumes prévus pour la formation mathématique y sont effectivement affectés, la question de l'organisation des apprentissages dans le temps (hebdomadaire et journalier) le concerne tout autant que les autres disciplines. L'enseignement est officiellement et légalement atomisé en séquences artificielles de 50 minutes dans le secondaire. Il semble que cette pratique contamine aussi l'enseignement fondamental, alors que la présence d'un enseignant unique pour la plupart des matières permettrait de concevoir un enseignement non cloisonné, intégrant l'ensemble des disciplines dans des activités interdisciplinaires.

La Commission des Rythmes Scolaires ([44]) avait attiré l'attention sur ces aberrations. Elle avait notamment dénoncé le saucissonnage des matières en séquences artificielles de 50 minutes, et leur dispersion dans la grille horaire, sans aucune logique pédagogique.

La succession artificielle d'un cours de mathématiques et d'un cours de français ou d'histoire, qui sera lui-même suivi d'une activité consacrée à une autre discipline, ne comporte aucune cohérence.

Pour réaliser un enseignement articulé à la réalité, intégrant les diverses disciplines en favorisant leur complémentarité, il faudrait revoir fondamentalement l'aménagement du temps scolaire. Renoncer au découpage en unités de 50 minutes, incompatibles avec le développement d'activités où les élèves sont acteurs. Organiser les horaires de manière à encourager la collaboration d'enseignants travaillant ensemble, avec les élèves, à la résolution de problèmes interdisciplinaires.

On pourrait adopter ?- au moins pour l'enseignement de base ?- une conception de l'enseignement articulée, non pas aux disciplines, mais aux thématiques problématiques dans la résolution desquelles ces disciplines interviennent.

Pour concrétiser des propositions de ce type, il n'est pas indispensable de légiférer : des marges de man ?uvre existent, dans l'organisation de l'enseignement. Elles seront exploitées si les chefs d'établissement, convaincus de leur intérêt, acceptent d'envisager une certaine souplesse dans l'organisation, et si les équipes pédagogiques envisagent l'innovation comme une amélioration possible, pas comme un danger probable.

44. Commission des Rythmes Scolaires, Rapport final (octobre 1991).

5.2. Disposer de locaux équipés

Le CREM considère que la conception d'un enseignement mathématique reposant sur la résolution de problèmes, lié à des contextes, requiert que des matériels divers soient mis à la disposition des élèves. A ce propos, un réel laboratoire est aussi nécessaire en mathématiques qu'en sciences. Le passage du maternel au primaire ne doit pas entraîner la relégation des activités manuelles et d'observation pour se concentrer sur une pensée mathématique exprimée surtout en symboles. La même remarque vaut pour le passage du primaire au secondaire. Il demeure primordial de construire, d'expérimenter, d'observer des choses matérielles.

Cela ne signifie pas nécessairement que des locaux spécifiques doivent être réservés aux activités mathématiques. En cette matière aussi, l'interdisciplinarité est de bon aloi, et des locaux et équipements communs peuvent être prévus, dans l'enseignement de base, pour les mathématiques, les sciences et la technologie.

5.3. Favoriser le travail personnel des élèves

Un enseignement des mathématiques édifié sur l'autonomie des élèves, la construction par eux de leur savoir, leur implication active dans la résolution de problèmes exige de leur part un travail personnel approfondi. En l'occurrence, comme cela a été mentionné dans la première partie, il importe de distinguer les notions de "travail personnel" et de "travail à domicile". S'il est indispensable, en mathématiques comme dans d'autres disciplines, de demander aux élèves d'effectuer un réel travail personnel, il n'est pas sain d'exiger d'eux qu'ils le réalisent à la maison. Le travail à domicile discrimine en effet les enfants qui disposent chez eux d'un local d'étude, d'un environnement documentaire, de l'aide d'adultes, voire de temps, et ceux qui ne possèdent pas ces éléments essentiels.

Il serait dès lors opportun de ménager des plages de temps, utilisables pour effectuer du travail personnel, dans les écoles (où locaux, livres, documents, aide des condisciples et des enseignants sont utilisables), pendant le temps scolaire ([45]).

45. Des propositions allant dans ce sens figurent dans le Rapport de la Commission des Rythmes Scolaires (octobre 1991).

5.4. Soutenir les enseignants par des matériaux pédagogiques

S'il faut effectivement renoncer à enseigner "les mathématiques toutes construites", mais s'inscrire dans une pédagogie où les élèves édifient eux-mêmes leur savoir, il faudra construire des curriculums compatibles avec cette conception. Il faudra aussi qu'ils s'appuient sur des outils méthodologiques compatibles avec cette conception.

Produire les curriculums et les outils nécessite la collaboration de chercheurs, en mathématiques et en pédagogie, et de praticiens de terrain.

Dans cette logique, la Commission DANBLON propose de créer des groupes de recherche sur l'enseignement des mathématiques. Ils seraient composés de personnes, compétentes par leur connaissance des différents publics d'élèves, et aussi des mathématiques, de leur histoire, de leur épistémologie, et encore de la conduite des classes et de l'administration de l'enseignement. Elle insiste particulièrement sur la présence de mathématiciens à culture mathématique large, disposés à accorder aux problèmes d'apprentissage une réelle attention. De même, on y trouverait des instituteurs et des professeurs expérimentés, détachés à temps partiel (à mi-temps, par exemple), de manière à ce qu'ils maintiennent l'expérience intime de leur métier.

La mission de base de ces groupes de recherche serait de produire et d'expérimenter des matériaux pour enseigner, susceptibles d'aider à l'acquisition d'une réelle compétence en mathématiques. Ils devraient être constitués d'authentiques curriculums au sens anglo-américain de ce terme, à savoir des recueils de situations-problèmes, accompagnés d'une argumentation critique, d'exemples vécus dans des classes, de commentaires mathématiques et épistémologiques et d'indications méthodologiques, ainsi que de recommandations pour l'évaluation. Ils devraient en outre maintenir un lien authentique avec l'enseignement sur le terrain en s'associant à la formation initiale et continuée des enseignants.

En plus, comme on souhaite que les enseignants amènent leurs élèves à travailler sur des problèmes, à construire et à reconstruire les principaux concepts, il sera nécessaire de mettre à leur disposition des réserves de situations problématiques appropriées. L'enseignement des mathématiques est socialement trop important pour qu'on le gère sans l'appui de groupes de recherche auxquels on demanderait de le penser globalement, puis d'en concevoir et d'en expérimenter les modalités.

5.5. L'environnement documentaire des élèves

La question des manuels scolaires est actuellement à l'ordre du jour. Elle dépasse largement la problématique de l'enseignement des mathématiques ([46]). Il faut pourtant souligner que le développement d'un enseignement qui s'articule à l'action autonome des élèves dans la résolution de situations-problèmes et dans la construction des savoirs s'accommode difficilement d'ouvrages tels que les manuels scolaires classiques. En la matière, des livres de référence, des ouvrages de synthèse reprenant la progression logique des concepts pourrait convenir davantage.

Le rapport DANBLON aborde cette question. Pour les auteurs, il est essentiel d'enseigner les mathématiques dans leur unité, et donc de ne pas rompre les liens entre leurs diverses parties. Il faudrait essayer, même si c'est difficile, de mettre entre les mains des élèves certains ouvrages destinés à être utilisés tout au long de leurs études et favorisant la cohérence et la continuité de leurs apprentissages.

6. L'évaluation

6.1. Développer une réelle évaluation formative

Lorsque les inspecteurs de mathématiques s'expriment à propos de l'évaluation, ils sont souvent inquiets, voire amers. Certains constatent que l'évaluation pervertit les apprentissages, comme si les objectifs de formation s'effaçaient devant les critères de jugement.

Malgré tout le travail de persuasion, de conviction, d'incitation mené à l'initiative des inspecteurs et des pouvoirs organisateurs, en dépit du militantisme des chercheurs en sciences de l'éducation, la pratique de l'évaluation formative n'est pas généralisée dans les classes. Dans beaucoup d'écoles, on pratique encore toujours un “enseignement culpabilisant”, où les élèves commettent des “fautes” qui sont sanctionnées, sans profit réel pour leur apprentissage. Les inspecteurs regrettent profondément la prééminence de ce modèle, qu'ils voudraient voir remplacé par un “enseignement responsabilisant”, où les “erreurs” des élèves constitueraient des indications utiles pour moduler l'apprentissage et atteindre les objectifs éducatifs.

46. Le CEF envisage de lui consacrer un avis dans les prochains mois.

Si l'on veut renverser la situation à cet égard, et favoriser une réelle évaluation formative responsabilisante, il faudrait mobiliser de l'énergie en faveur de la formation initiale et la formation continuée des enseignants.

6.2. Utiliser les enquêtes internationales comme des tremplins

La participation de la Communauté française de Belgique à des enquêtes internationales comme celle de l'IEA constitue une opportunité intéressante. Disposer des résultats d'une telle étude, pouvoir les comparer à ceux d'autres pays, aujourd'hui, à ceux des élèves de notre pays, il y a quelques années doit alimenter notre réflexion autocritique, favoriser l'émergence de pistes d'action, encourager notre remise en question, susciter des progrès potentiels.

Certes, les résultats en mathématiques des élèves de notre Communauté restent supérieurs à la moyenne. Mais ils manifestent une tendance nette à la diminution régulière, depuis 1964. Cette évolution invite à s'interroger. D'autre part, les résultats des épreuves d'évaluation conduites sous l'égide de la Cellule de pilotage du MERF suscitent aussi quelques inquiétudes.

L'ensemble de ces données doit donner lieu à une réflexion globale. Elle ne doit pas s'apparenter à l'autoflagellation, ni au refus de voir l'évidence. Le CEF, en s'intéressant à la question, en réunissant les différents partenaires concernés pour en débattre, en produisant un avis destiné à susciter réflexion et réaction, espère faire ?uvre utile. Ce faisant, il joue son rôle traditionnel de “caisse de résonance”. Mais ces initiatives n'auront une utilité que si son avis entre effectivement en résonance avec l'attention, l'ouverture d'esprit, la vigilance des décideurs, des acteurs.

Il leur appartient de choisir entre redresser la situation, ou se contenter de la satisfaction d'être encore, même de peu, au dessus de la moyenne.

Conclusion : synthèse des propositions

L'examen des résultats de l'enquête IEA de 1995 sur les résultats des élèves en mathématiques, ainsi que les travaux de la Cellule de pilotage du Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation incitent le CEF à recommander avec insistance que l'on réforme l'enseignement des mathématiques au niveau de l'enseignement de base.

Dans cette perspective, il formule principalement les propositions suivantes :

1. Une formation mathématique globale et citoyenne

Dans l'esprit des objectifs généraux de l'enseignement fixés par le décret-mission, l'enseignement des mathématiques assurera à chaque élève un ensemble commun de connaissances et de compétences fondamentales, pensé globalement autour d'un unique noyau de base. Cet acquis ?- correspondant à un savoir de base indispensable, ou “bagage minimum du citoyen” ?- sera constitué de savoirs susceptibles de se démultiplier.

La formation mathématique se déploiera de manière continue sur l'ensemble de la scolarité, sans rupture, dans une réelle cohérence.

2. Construction des savoirs et résolution des problèmes

La formation mathématique amènera les élèves à s'intéresser à toutes les questions avec confiance, à vouloir expérimenter, essayer, questionner, chercher, en dépassant la traditionnelle “peur des mathématiques”. Tout au long de la scolarité, elle impliquera la participation effective des élèves à la construction de leurs savoirs, et se fondera sur la résolution de situations-problèmes. La marche des apprentissages adoptera la forme d'une spirale, en pratiquant des ajustements successifs, en évoluant par paliers, en faisant progresser la pensée à son rythme. Ce faisant, l'enseignement des mathématiques cessera d'être un outil de sélection, pour s'inscrire dans la promotion de tous les élèves.

3. La préoccupation du sens

Il faut mettre fin à l'excès de formalisme qui se déploie souvent au détriment du sens. Au lieu d'enseigner les mathématiques dans leur forme déductive, il convient de les relier aux contextes problématiques dans lesquels elles sont applicables ou explicables, et favoriser une réelle activité mathématique des élèves, nourrie de pensée autonome. Ceux-ci devront être entraînés à traduire le langage des mathématiques en langage familier, et à utiliser aussi leur langue naturelle pour faire des mathématiques.

Dans cet esprit, les enseignants renonceront à inculquer aux élèves des routines de calcul hors des contextes où elles peuvent servir. Ils éviteront tout autant les dérives utilitaristes qui consisteraient à faire des mathématiques uniquement à partir des situations de la vie courante, ce qui en limiterait cruellement l'intérêt. Les situations-problèmes utilisées seront choisies dans la vie quotidienne, certes, mais aussi dans le domaine des autres disciplines scolaires et naturellement dans le champ des mathématiques elles-mêmes.

La conceptualisation ne sera jamais prématurée : il est intéressant de prendre d'abord en compte des "objets mentaux" intermédiaires entre la pensée commune et les mathématiques constituées, et ne passer aux concepts qu'au moment où leur utilisation s'impose logiquement.

4. Le rôle des enseignants et leur formation

Facilitateurs d'apprentissage, les enseignants accompagneront les élèves dans la résolution des situations-problèmes, et leur prêteront main forte dans la construction de leurs savoirs.

Pour exercer un tel rôle, ils devront posséder une connaissance étendue et une compétence exercée des mathématiques, au-delà de ce qui figure au programme de leurs élèves. Ils doivent être capables de pensée autonome, et être entraînés à la résolution de questions ouvertes. Il importe aussi qu'ils soient acquis à la perspective d'une enseignement constructiviste, et reconnaissent à leur élèves le droit à l'autonomie intellectuelle. Enfin, ils doivent être capables de travail en équipe avec des collègues d'autres disciplines, la résolution de problèmes étant par essence une activité interdisciplinaire. De plus, dans la volonté de réaliser un enseignement continu et cohérent, ils reconnaîtront la nécessité de coordonner leur action éducative à celle de tous leurs collègues de l'établissement.

Leur formation initiale les équipera pour remplir leur rôle si elle est clairement articulée au terrain de l'enseignement fondamental et secondaire. Il importe à cet égard que les professeurs de l'enseignement supérieur pédagogique connaissent bien ces niveaux d'enseignement. Il importe aussi que les sections d'école normale (maternelle, primaire, secondaire) soient décloisonnées, afin d'amener les futurs enseignants à se connaître mutuellement, et à collaborer dès leurs études.

La formation continuée, dont les modalités pratiques d'organisation devraient être étudiées sans retard, devra s'articuler à une politique coordonnée de promotion des réformes et innovations. Ainsi, la prochaine publication des nouveaux socles de compétences devrait être assortie de séquences de formation pour les enseignants qui devront les mettre en application. En outre, on insiste sur le caractère formatif des activités menées en équipe par des enseignants, que ce soit la confrontation d'expériences, l'échange de pratiques ou la réalisation en commun de questions ou de curriculums.

5. L'organisation générale de l'enseignement

Réaliser un enseignement ayant du sens implique aussi de l'organiser de manière sensée, en mettant fin à son caractère artificiel : saucissonnage des matières, horaires et succession des cours sans souci pédagogique, etc. Cette organisation, acceptable dans un enseignement de la transmission est en effet pratiquement incompatible avec un enseignement ouvert sur l'extérieur, centré sur la résolution de problèmes et la construction de savoirs. Dans l'aménagement du temps scolaire, on prévoira aussi des plages de temps où les élèves pourront s'adonner, à l'école, à des activités de travail personnel.

Des locaux équipés pour développer un enseignement appliqué, interdisciplinaire et concret seront nécessaires.

Les écoles devront se doter d'un environnement documentaire de qualité, à destination des élèves mais aussi des enseignants. Pour les élèves, la question des livres de référence doit être posée. Ils pourront, selon les cas, être constitués d'ouvrages de synthèse, ou de manuels scolaires. Dans ce dernier cas, il serait souhaitable qu'ils favorisent la continuité et la cohérence des apprentissages, et qu'en tout cas, ils n'introduisent pas les ruptures que l'on veut éviter. Pour les enseignants, des matériaux pédagogiques spécifiques devraient les soutenir dans la réalisation de l'enseignement préconisé ici. Ces outils pourraient être produits par des équipes pluridisciplinaires, associant des chercheurs en mathématiques et en pédagogie, et des praticiens de terrain. Ces équipes maintiendraient en outre un lien avec les utilisateurs des outils produits, en s'associant à la formation initiale et continuée des enseignants.

6. Pour une réelle évaluation formative

Il faut décidément remettre en question les pratiques d'évaluation culpabilisantes, où les fautes sont sanctionnées, pour mettre à l'honneur l'évaluation formative, responsabilisante, qui utilise les erreurs comme facteurs de progrès et de réussite. Pour ce faire, on préconise de mobiliser les acteurs de la formation initiale et de la formation continuée des enseignants.

Il importe aussi de prendre en considération les résultats des enquêtes internationales ou des évaluations externes dans un esprit d'évaluation formative. En examinant attentivement les indications qu'ils contiennent, nous pourrons tirer profit des nos erreurs pour améliorer nos performances et garantir la formation de tous nos élèves. Si nous ne le faisons pas, alors là, nous aurons commis une faute !

Remarque finale

On suggère que l'annexe, jointe à l'avis 54 du CEF relatif à l'enseignement des sciences, soit ajoutée aussi à cet avis-ci : elle explique en effet la motivation du CEF à traiter la problématique générale de l'évaluation des élèves, la démarche qu'il entend adopter et les vérifications qu'il a opérées avant d'aborder l'analyse.

L'illusion de la linéarité. Deuxième partie : trois études dans l'enseignement secondaire

D. De Bock, *Economische Hogeschool Sint-Aloysius (EHSAL) Brussel Vliebergh-Senciecentrum K.U. Leuven*

Mots-clés : problèmes de longueur et d'aire de figures planes semblables.

Dans la première partie de cet article, nous avons décrit l'illusion de la linéarité dans toute sa généralité, à l'aide d'exemples et de commentaires issus de la littérature didactique des mathématiques. Cette première partie comportait les paragraphes suivants :

1. *Introduction*
2. *Exemples issus de différents domaines mathématiques*
3. *L'effet d'un agrandissement (ou d'une réduction) linéaire sur l'aire et le volume.*

Dans cette deuxième partie, nous relaterons trois études de l'université de Leuven au sujet de l'illusion de la linéarité auprès d'élèves de 12–16 ans, confrontés avec des problèmes de longueur et d'aire de figures planes semblables. En gros, les résultats confirment de façon convaincante l'effet fort négatif de l'illusion de la linéarité auprès de ces groupes d'élèves. De plus, ils montrent clairement l'influence exercée par diverses formes d'aide sur l'intervention de cette illusion.

4. Etude 1 : une étude explorative auprès des 12–13 ans

4.1. Conception de la recherche et matériel recueilli

La première étude avait comme objectif d'étudier l'intensité de l'illusion de la linéarité auprès d'élèves de 12–13 ans, confrontés avec des problèmes de longueur et d'aire de figures planes semblables. En même temps, nous voulions examiner (1) l'effet de la nature de la figure en question, et (2) l'influence exercée sur ce phénomène par des dessins que les élèves produisent eux-mêmes ou qu'on leur offre.

L'étude fut menée au début de l'année scolaire 1995-1996, dans une première secondaire d'un lycée flamand qui recrute ses élèves parmi un large éventail d'écoles primaires situées aux alentours. 120 élèves participèrent à l'étude, répartis en trois groupes équivalents.

L'étude comportait deux phases. Dans la première phase, nous proposâmes à tous les 120 élèves – sans consignes spéciales préalables – le même test écrit, composé de 12 questions expérimentales et 3 questions-tampons (Test 1). Les 12 questions expérimentales portaient toutes sur l'agrandissement linéaire de figures planes et étaient rédigées autour de trois sortes de figures différentes : 4 questions sur des figures carrées (Ca), 4 sur des cercles (Ce) et 4 sur des figures irrégulières (Ir). Au sein de chaque catégorie de figures, il y avait chaque fois 2 questions proportionnelles et 2 non proportionnelles. Au tableau 1 nous montrons un exemple de chaque sorte de question : une question proportionnelle (1) et une non proportionnelle (2), chacune au sujet d'une figure carrée.

(1)	Pour creuser un fossé autour d'un champ carré de 100 mètres de côté, Gustave, un fermier, a besoin d'environ 4 jours. Combien de jours, environ, lui faut-il pour creuser un fossé autour d'un champ carré de 300 mètres de côté ? *(Réponse : 12 jours)*
(2)	Pour fertiliser une parcelle carrée de terre de 200 mètres de côté, Charles, fermier lui aussi, a besoin d'environ 8 heures. Combien de temps lui prendra, environ, la fumure d'une parcelle carrée de 600 mètres de côté ? *(Réponse : 72 heures)*

Tableau 1. Deux exemples de questions expérimentales.

Deux semaines après le premier test, les trois groupes d'élèves furent confrontés à un deuxième test (Test 2), une version parallèle du Test 1. Le groupe I, qui faisait fonction de groupe de contrôle, ne reçut – tout comme lors du premier test – aucune consigne ni aide supplémentaire. Aux élèves du groupe II on demanda de faire un dessin ou un croquis avant d'écrire la solution. Cette recommandation fut faite au début du test et fut illustrée par une question-exemple, qui n'était pas une question non proportionnelle, évidemment. Les élèves du groupe III, finalement, reçurent avec chaque question un dessin correct. Dans la figure 4 nous montrons, par exemple, le dessin relatif à la question non proportionnelle sur les carrés mentionnée dans le tableau 1.

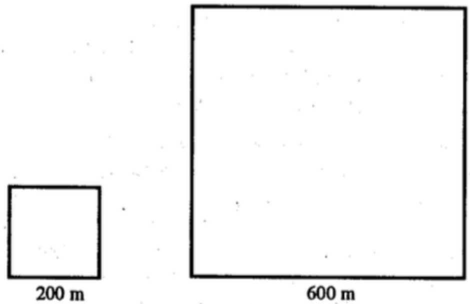


Figure 4.

4.2. Résultats

Le tableau 2 donne un aperçu des pourcentages de réponses correctes des trois groupes d'élèves (I, II et III) pour les questions proportionnelles et pour les non proportionnelles sur les carrés (Ca), les cercles (Ce) et les figures irrégulières (Ir), et ceci pour les tests 1 et 2.

Groupe	Test 1						Test 2					
	Questions proportionnelles			Questions non proportionnelles			Questions proportionnelles			Questions non proportionnelles		
	Ca	Ce	Ir	Ca	Ce	Ir	Ca	Ce	Ir	Ca	Ce	Ir
I	96	98	89	5	0	1	99	96	85	3	0	0
II	93	95	89	6	1	0	93	95	95	4	2	0
III	91	91	87	4	3	0	93	89	89	8	5	1

Tableau 2. Aperçu des résultats de l'étude 1.

Comme prévu, les réponses de ces 12–13 ans aux questions proportionnelles sont presque toujours exactes, tandis que celles aux questions non proportionnelles ne le sont presque jamais (pour les trois groupes et les deux tests mis ensemble, les pourcentages de réponses exactes aux questions proportionnelles et non proportionnelles s'élèvent respectivement à 92% et 2%). De plus, une analyse complémentaire montra que la majeure partie des fautes aux questions non proportionnelles correspond à l'application à tort d'un modèle ou raisonnement linéaire.

Les performances des élèves dépendent de la nature de la figure en question, en ce sens que le plus grand nombre de réponses correctes aux questions non proportionnelles furent données au sujet des figures carrées (Ca) et le plus petit nombre au sujet des figures irrégulières (Ir). Ce résultat s'explique de la façon suivante. Pour les questions non proportionnelles concernant les carrés (Ca), il existe trois stratégies adéquates de résolution : (1) "paver" le grand carré avec des petits carrés, (2) calculer l'aire des deux carrés avec la formule ("aire du carré = côté $\times$ côté") et (3) utiliser le principe général "si la longueur (le côté) est multiplié par r, alors l'aire est multipliée par r^2". Pour les cercles (Ce), la première stratégie (le pavage exact) est impossible et la deuxième stratégie est plus difficile (à cause de la complexité de la formule et à cause du fait que celle-ci est moins connue par les élèves). Pour les figures irrégulières (Ir), finalement, la deuxième stratégie disparaît également (car il n'y a plus de formule) et on ne peut s'appuyer que sur la troisième méthode, notamment l'application du principe général.

Les résultats de la recherche montrent que le recours aux dessins n'a pas été concluant : une analyse des variances montra qu'entre les deux tests le pourcentage de réponses correctes n'a augmenté de manière significative dans aucun des trois groupes, ni en général, ni en ce qui concerne les questions non proportionnelles. Ni la suggestion de faire un dessin (groupe II), ni les dessins offerts (groupe III) n'ont été capables de faire résister ces élèves de 12–13 ans à l'effet écrasant de l'illusion de la linéarité. Ce résultat nous a étonné car l'utilisation de dessins est généralement reconnu comme une heuristique importante pour la représentation et la résolution de problèmes en géométrie (voir également [5] et [7]).

Quelques éléments d'explication pour l'absence de soutien effectif des dessins émergèrent d'une analyse plus approfondie des feuilles-réponses des élèves. Il apparut que – pour les trois groupes au total – seulement 2% des réponses aux questions non proportionnelles de test 1 étaient accompagnées d'un dessin. Les élèves n'ont donc presque jamais fait, spontanément, un dessin ou croquis intégré dans leur processus de résolution des questions non proportionnelles.

Une analyse des notes des élèves du groupe II pour le test 2 montra que l'invitation explicite à faire un dessin n'a été suivie que pour 46% des questions non proportionnelles. De plus, les élèves qui ont suivi l'instruction ont produit le plus souvent un dessin de mauvaise qualité de représentation. (Pour un exemple d'un dessin de mauvaise et de bonne qualité de représentation, voir respectivement les dessins à gauche et à droite de la figure 5.)

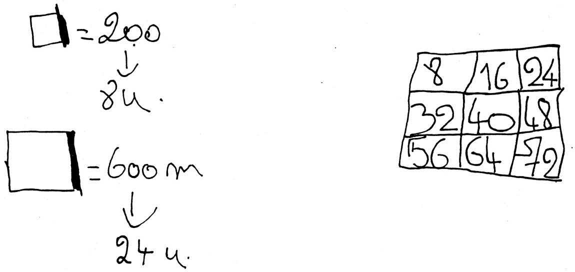


Figure 5.

Finalement, nous avons vérifié si les élèves du groupe III, lors du test 2, ont en quelque sorte “travaillé” les dessins offerts. Cette analyse montra que, pour les questions non proportionnelles, seulement 6% des dessins ont été travaillés. Ceci suggère aussi que, généralement, les élèves prêtent peu d'attention aux dessins offerts ou n'en font pas usage (probablement parce qu'ils sous-estiment fortement la difficulté des questions non proportionnelles).

4.3. Conclusion

L'effet négatif, très marqué, de l'illusion de la linéarité sur la résolution de problèmes de longueur et d'aire de figures semblables, se présente comme la conclusion la plus importante de l'étude 1. Cet effet se manifeste de façon différente selon la nature de la figure en question. Les résultats de la recherche montrent que les dessins produits par les élèves ou offerts à eux pour contrecarrer cette illusion ne se sont pas avérés concluants.

Le nombre infime de réponses correctes de ces 12–13 ans aux questions non proportionnelles évoque immédiatement la question de savoir ce qu'il advient de cette illusion auprès d'élèves plus âgés disposant d'un “bagage mathématique” beaucoup plus important. C'est pourquoi la première étude fut répétée auprès d'un groupe d'élèves de 15–16 ans.

5. Etude 2 : recherche poursuivie auprès d'élèves de 15–16 ans

5.1. Conception de la recherche et matériel recueilli

La deuxième étude fut menée à la fin de l'année scolaire 1995-1996 dans le même lycée que la première étude. Tous les 222 élèves de la quatrième année de cette école secondaire y ont participé. Ces élèves provenaient d'un large éventail de sections de l'enseignement secondaire général.

Contrairement à l'étude 1, le test ne fut pas répété deux fois, mais les élèves furent partagés directement en trois groupes équivalents selon plusieurs critères : le groupe I (sans aucune aide ni consigne), le groupe II (avec la consigne de faire d'abord un dessin) et le groupe III (où chaque question était accompagnée d'un dessin correct). Les mêmes questions que dans l'étude 1 furent utilisées (voir tableau 1).

5.2. Résultats

Le tableau 3 donne un aperçu des pourcentages de réponses correctes pour les trois groupes d'élèves de 15–16 ans (I, II et III) pour les questions proportionnelles et non proportionnelles sur les carrés (Ca), les cercles (Ce) et les figures irrégulières (Ir).

Groupe	Questions proportionnelles			Questions non proportionnelles		
	Ca	Ce	Ir	Ca	Ce	Ir
I	91	97	97	26	11	1
II	89	91	97	26	20	5
III	89	93	97	39	21	7

Tableau 3. Aperçu des résultats de l'étude 2.

L'étude 2 a montré que, globalement, les 15–16 ans se laissent moins tenter par l'application à tort de modèles ou raisonnements linéaires que les 12–13 ans : pour les trois groupes au total, les pourcentages de réponses correctes aux questions proportionnelles et aux non proportionnelles étaient, respectivement, de 93% et 17% (à comparer avec les 92% et 2% de l'étude 1).

Tout comme dans l'étude 1, les performances des élèves diffèrent selon la nature de la figure en question : le plus grand nombre de réponses correctes aux questions non proportionnelles a été donné au sujet des carrés (Ca), et le plus petit nombre au sujet des figures irrégulières (Ir). A notre surprise, on observe auprès des questions proportionnelles une tendance contraire : plus de réponses correctes aux questions Ir qu'aux questions Ca.

A nouveau, on n'a pas pu constater une vertu positive dans les dessins : ni dans le groupe II (dessins faits eux-mêmes), ni dans le groupe III (dessins offerts) ; les performances des élèves pour les questions non proportionnelles étaient significativement supérieures à celles du groupe I (groupe de contrôle). Ceci ne nous permet pas de conclure tout simplement que le travail sur un dessin n'a pas eu une influence positive aidant à trouver la bonne réponse aux questions non proportionnelles. En effet, comme nous l'avons décrit au sujet de l'étude 1, la consigne de faire un dessin (groupe II) n'a souvent pas été suivie et, apparemment, les dessins offerts ont été bien peu utilisés (groupe III). Afin de pouvoir conclure que les dessins n'auraient aucun effet, il faudrait démontrer, d'abord, qu'il n'y a pas de lien entre la production *effective* d'un dessin ou l'usage *effectif* d'un dessin offert, d'une part, et le fait de trouver la réponse correcte à une question non proportionnelle, d'autre part.

A cause des scores extrêmement faibles aux questions non proportionnelles et du très petit nombre de dessins faits spontanément ou "travaillés" dans la première étude, il n'était pas possible d'analyser (par la statistique) la corrélation entre "dessin" et "bonne réponse aux questions non proportionnelles". Dans l'étude 2, ceci fut possible grâce au nombre plus élevé de dessins faits par les élèves et/ou travaillés par eux ainsi que de réponses correctes aux questions non proportionnelles. A cet effet, nous avons établi, pour chacun des groupes, un tableau de contingence avec comme variables "dessin" et "réponse" et ensuite nous avons testé l'(in)dépendance de ces variables à l'aide d'un test χ^2. En guise d'exemple, nous donnons, dans le tableau 4, le tableau de contingence du groupe II.

	Dessin	Pas de dessin	Somme des lignes
Réponse correcte	65 (45)	12 (32)	77
	15% (10%)	3% (7%)	17%
Réponse incorrecte	196 (216)	171 (151)	367
	44% (49%)	39% (34%)	83%
Somme des colonnes	261	183	444
	59%	41%	100%

Tableau 4. Lien entre "dessin" et "solution" pour le groupe II.

En plus des fréquences et des pourcentages observés, il y a, dans les quatre cellules centrales, également les fréquences et les pourcentages attendus sous l'hypothèse nulle d'indépendance des deux variables (entre parenthèses). Les tests χ^2 ont montré que cette hypothèse nulle peut être rejetée dans les trois groupes. En outre, la comparaison des fréquences observées et des fréquences attendues a montré que le lien trouvé se dirige dans la direction prédite. En effet, il y a relativement plus de sujets dans les cellules de la diagonale principale, et relativement moins de sujets dans les cellules de la diagonale annexe, que ce que l'on pourrait prévoir si les deux variables étaient indépendantes. Il s'ensuit que tant la production (spontanée ou non) d'un dessin que l'usage effectif d'un dessin offert rendent plus probable que l'on découvre l'erreur d'un raisonnement stéréotypé et proportionnel au sujet d'une question non proportionnelle et, par conséquent, que l'on trouve la solution correcte. D'autre part, il s'ensuit également qu'il ne faut pas surestimer l'effet de ces dessins : faire ou utiliser un dessin ne suffit en aucun cas pour *garantir* la découverte de la bonne réponse.

Comme les 15–16 ans ont donné déjà plus de réponses correctes aux questions non proportionnelles, nous avons également pu, à travers l'analyse des notes des élèves, déterminer lequel des trois cheminements décrits plus haut – la méthode du pavage, celle du calcul avec la formule appropriée ou l'application du principe général – fut suivi le plus souvent par les élèves. On a observé que la stratégie la plus utilisée était l'application de la formule appropriée. Pour la question non proportionnelle sur la figure carrée du tableau 1, cela signifie calculer effectivement l'aire des deux carrés ($200 \times 200 = 40000$ m^2 et $600 \times 600 = 360000$ m^2) et ensuite faire la division $360000 : 40000 = 9$. Parmi les élèves qui ont répondu correctement à cette question, 90% ont appliqué cette deuxième méthode de solution (quelquefois en combinaison avec une des autres méthodes) ; des applications "pures" de la première et de la troisième méthode n'ont été rencontrées que dans, respectivement, 7% et 3% des cas. Ce qui nous a le plus étonnés, c'est la part minime de la stratégie du pavage, qui paraît ici pourtant si évidente. En fait, le pavage est une stratégie très simple, liée au contexte, pour laquelle très peu de connaissances scolaires sont requises. Le fait que si peu d'élèves ont eu recours à cette stratégie informelle et évidente est sans doute lié à l'idée très répandue parmi les élèves et constatée dans de nombreuses recherches selon laquelle la solution d'un problème mathématique consisterait surtout à trouver et appliquer la bonne formule (voir aussi [7] et [8]).

Finalement, nous revenons encore sur la constatation que les pourcentages de réponses correctes des 15–16 ans aux questions non proportionnelles vont dans la direction prévue (les plus hauts scores pour les questions Ca et les plus bas pour les questions Ir), tandis que les pourcentages de réponses correctes aux questions proportionnelles vont dans la direction opposée (les plus hauts scores pour les questions Ir et les plus bas pour les questions Ca). Une analyse approfondie de ces réponses fautives a montré que celles-ci étaient bien souvent dues à des raisonnements non proportionnels incorrects ! Manifestement, les élèves découvrent plus facilement le caractère non proportionnel d'une situation donnée quand il s'agit de figures carrées (et en moindre mesure, de cercles), que quand il s'agit de figures irrégulières. En revanche, c'est au sujet de ces figures-là (les carrés et les cercles) que les élèves hésitent plus facilement quant à l'utilité d'un modèle linéaire dans des situations-problèmes où un tel modèle convient. De plus, parmi les rares élèves de la première étude ayant résolu correctement au moins une question non proportionnelle, il y en avait quelques-uns qui (de ce fait ?) ont raisonné de manière non proportionnelle au sujet d'une ou plusieurs questions proportionnelles.

5.3. Conclusion

L'étude 2 montre que les 15–16 ans sont encore fort influencés par l'illusion de la linéarité, quoique de façon moins écrasante que les 12–13 ans. Les dessins, produits par les élèves ou offerts, n'ont eu aucun impact positif dans aucun des groupes, bien que les résultats auprès des 15–16 ans démontrent que la production *effective* d'un dessin augmente la probabilité de trouver la bonne réponse à ce genre de problèmes.

Quoique le processus de raisonnement fautif parcouru par les élèves soit facile à décrire – ces élèves raisonnent de façon proportionnelle dans des situations où ceci ne convient pas – il est bien plus difficile de déterminer quels éléments ont mené ces élèves sur la voie de l'erreur. En principe, plusieurs facteurs, agissant l'un sur l'autre ou non, peuvent en être rendus responsables. Un élément d'explication est le contexte dans lequel les élèves furent testés. A ce propos, nous nous sommes posé deux questions. Primo, les élèves ont-ils engagé dans ces études toutes leurs connaissances et tout leur savoir-faire disponibles ? Secundo, les illustrations utilisées dans ces études ont-elles soutenu sufisamment le processus de résolution des élèves ? Afin de clarifier ceci, une nouvelle recherche a été préparée, dans laquelle nous avons vérifié l'impact de deux sortes d'aide sur les performances des élèves :

(1) *une aide métacognitive* : on aide les élèves à se rendre compte qu'il faut engager toutes ses facultés cognitives pour accomplir la tâche et qu'il ne suffit certainement pas de travailler sous "pilotage automatique" ; et (2) *un soutien visuel* : on aide les élèves à travailler les énoncés de façon graphique et informelle (par exemple en mesurant des longueurs ou en pavant des aires).

6. Etude 3 : recherche de l'effet d'un soutien métacognitif et visuel sur la dissipation de l'illusion de la linéarité auprès d'élèves de 12 à 16 ans

6.1. Conception de la recherche et matériel recueilli

L'étude 3 fut effectuée fin février 1997 dans deux écoles secondaires flamandes d'une autre région géographique que celle du lycée où les deux études précédentes eurent lieu. Tous les élèves de la première et la quatrième année de ces écoles (260 élèves de 12–13 ans et 125 de 15–16 ans) ont participé à la recherche. Ils furent répartis en quatre groupes expérimentaux par la méthode "matching". Dans ces groupes, les élèves passèrent le même test écrit que lors des deux études précédentes (voir le tableau 1), mais l'aide offerte aux élèves était différente dans chacun des quatre groupes. Dans le groupe M-V- (= pas d'aide métacognitive ni d'aide visuelle), les élèves ne reçurent aucune aide métacognitive ni visuelle. Dans le groupe M+V- (= aide métacognitive), le test était précédé de l'énoncé non proportionnel suivant au sujet d'un cube :

> *"Un cube en bois de 2 cm de côté pèse 6 grammes. Combien pèse un cube en bois de 4 cm de côté ?"*

Pour ce problème, deux stratégies de résolution furent proposées : une solution incorrecte basée sur un raisonnement proportionnel (Guillaume dit : "4 cm est le double de 2 cm, donc la réponse est 6 grammes $\times$ 2 = 12 grammes") et la solution correcte basée sur un raisonnement non proportionnel (Stéphane : "Dans un cube de 4 cm de côté on peut faire entrer 8 petits cubes de 2 cm de côté, donc la réponse est 6 grammes $\times$ 8 = 48 grammes"). On demanda ensuite aux élèves d'indiquer la bonne réponse et de motiver leur choix. Dans le groupe M-V+ (avec aide visuelle), chaque énoncé était accompagné d'un dessin correct, mais contrairement aux études précédentes, ces dessins étaient présentés sur du papier quadrillé de sorte que les élèves puissent déterminer les longueurs et les aires plus facilement. Dans le groupe M+V+ (avec aide métacognitive et visuelle), les deux formes d'aides étaient combinées.

6.2. Résultats

Le tableau 5 donne un aperçu des pourcentage de réponses correctes des 12–13 ans et des 15–16 ans des quatre groupes expérimentaux (M−V−, M+V-, M-V+ et M+V+) pour les questions proportionnelles et non proportionnelles sur les carrés (Ca), les cercles (Ce) et les figures irrégulières (Ir).

Groupe	12–13 ans						15–16 ans					
	Questions proportionnelles			Questions non proportionnelles			Questions proportionnelles			Questions non proportionnelles		
	Ca	Ce	Ir	Ca	Ce	Ir	Ca	Ce	Ir	Ca	Ce	Ir
M-V-	92	98	95	8	5	1	90	94	98	32	15	2
M+V-	92	100	95	9	3	0	74	80	97	44	21	12
M-V+	95	98	90	19	8	2	82	87	97	29	18	3
M+V+	84	90	91	24	10	0	87	78	97	60	23	8

Tableau 5. Aperçu des résultats de l'étude 3.

L'étude 3 confirma, une fois de plus, l'influence très forte de l'illusion de la linéarité auprès des 12–16 ans confrontés avec des problèmes de calcul de longueur et d'aire de figures semblables. De plus, des effets analogues apparurent concernant le rôle de l'âge et concernant la nature de la figure en question.

En ce qui concerne l'influence de l'aide métacognitive et visuelle, l'étude montra que les deux formes d'aide ont un effet positif sur les performances des élèves pour les questions non proportionnelles. Les élèves des groupes M+ ont donné un nombre significativement plus élevé de bonnes réponses que les élèves des groupes M- (respectivement 18% et 12%). Dans les groupes V+, le pourcentage de bonnes réponses est également significativement plus élevé que dans les groupes V- (respectivement 17% et 13%). Quoique les deux formes d'aides aient un effet positif, il y a lieu de relativiser ce résultat : l'augmentation demeure, pour les deux formes d'aide, limitée à environ 5% et les scores pour les questions non proportionnelles ne dépassent pas les

20% ! Si l'influence de l'aide métacognitive était, tout compte fait, la plus importante, toutefois cet effet s'est manifesté surtout auprès des élèves de la quatrième année et pour les questions les plus simples au sujet des figures régulières. Par contre, l'effet (mineur) de l'aide visuelle s'est manifesté autant dans les deux groupes d'âge et pour les différents problèmes non proportionnels du test. Finalement, il apparaît que les deux formes d'aide ne se renforcent pas l'une l'autre : les scores du groupe M+V+ ne dépassent pas de façon significative ceux des groupes M+V- et M-V+.

Le revers de la médaille de ces résultats meilleurs aux questions non proportionnelles suite à l'aide offerte est que les scores aux problèmes proportionnels ont nettement reculé dans ces conditions. Le graphique de la figure 6 illustre, par exemple, l'interaction entre les variables "aide métacognitive" (les groupes M+ face aux groupes M-) et "proportionnalité" (questions proportionnelles face aux non proportionnelles) : la hausse déjà mentionnée des scores pour les questions non proportionnelles (de 12% dans les groupes M- à 18% dans les groupes M+) est accompagnée d'une diminution – significative elle-aussi – des scores pour les questions proportionnelles (de 93% dans les groupes M- à 89% dans les groupes M+).

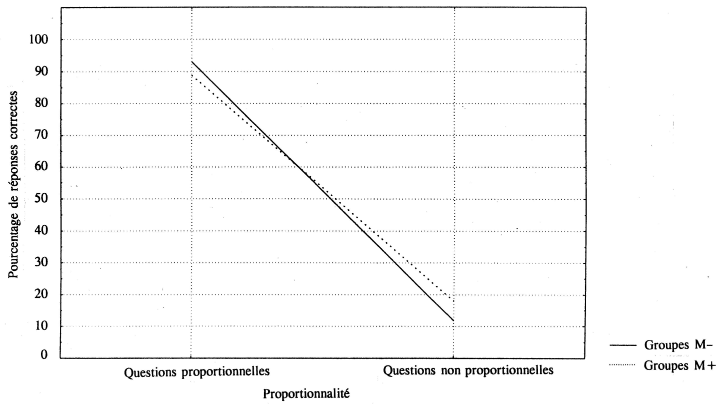


Figure 6.

Manifestement, grâce à l'aide appropriée, les élèves arrivent un peu plus facilement à comprendre qu'une situation donnée est non proportionnelle, mais suite à ceci ils ont tendance à raisonner également de façon non proportionnelle dans des situations proportionnelles. Rappelons qu'auprès des

15–16 ans, un effet semblable a été constaté dans l'étude 2 en ce qui concerne la nature de la figure (cf. 5.2).

6.3. Conclusion

L'étude 3 confirme l'énorme impact de l'illusion de la linéarité auprès d'élèves de 12 à 16 ans confrontés avec des problèmes appliqués concernant les longueurs et les aires de figures planes semblables. De plus, cette étude a mis au jour les effets significatifs de l'aide métacognitive et visuelle, mais quoique les deux formes d'aide influencent de façon positive les performances des élèves pour les questions non proportionnelles, l'ampleur de ces effets est, tout compte fait, très réduite. Ceci montre comme il est difficile de vaincre l'illusion linéaire et d'ouvrir ainsi la voie à l'acquisition de nouveaux modèles et leurs domaines d'application.

7. Discussion

Les études effectuées ont procuré des données empiriques concernant l'ampleur et la ténacité de l'illusion de la linéarité lors de la résolution de problèmes de longueur et d'aire de figures planes semblables par des élèves de secondaire. La question qui ne peut évidemment pas être tranchée sur base de ces études, c'est celle de savoir si l'ampleur observée de l'illusion linéaire est caractéristique des problèmes de figures géométriques semblables, ou alors si cette illusion est également forte pour d'autres problèmes appliqués. Pour cela, il faudrait poursuivre les recherches en examinant l'ampleur relative de l'illusion de la linéarité pour différentes catégories de situations-problèmes.

Des recherches plus approfondies pourraient aussi éclairer les relations entre l'illusion de la linéarité et d'autres illusions ou méprises connexes décrites dans la littérature. Dans l'introduction (de la première partie), nous avons déjà mentionné le lien possible entre le raisonnement proportionnel erroné des élèves dans certaines situations et le phénomène de *l'illusion d'optique*. Une autre méprise, en quelque sorte plus primitive que l'illusion de la linéarité, consiste à raisonner de façon additive dans des situations où un raisonnement multiplicatif s'impose (par exemple, dans le contexte d'un agrandissement linéaire d'une figure, déduire que les longueurs sont additonnées - au lieu de multipliées - par une constante). Cette *illusion additive* a surtout été observée auprès d'élèves de l'école primaire qui passent des structures additives aux structures multiplicatives. Il y a un lien avec l'illusion linéaire en ce sens que, dans les deux cas, les élèves généralisent un modèle mathématique plus élémentaire au-delà des limites de son domaine d'application. Finalement, il y des points de contact possibles entre l'illusion de la linéarité et *l'illusion de la constance*, une illusion qui émerge régulièrement dans des problèmes concernant (les relations entre) les dimensions linéaires, l'aire et le volume de figures. De nombreux élèves (mais également plusieurs adultes) croient par exemple que deux figures planes de même périmètre ont aussi la même aire et que deux corps de même superficie latérale ont aussi le même volume. Ceux qui sont sujets à cette illusion de la constance croient probablement aussi que si l'on multiplie le périmètre (la superficie latérale) d'une figure par un facteur, l'aire (le volume) est multiplié par le même facteur. Emma Castelnuovo et Mario Barra [1] décrivent deux exemples classiques du phénomène de l'illusion de la constance. Le premier traite de l'aplatissement d'un carré ou d'un rectangle construit avec des pailles. Pendant le mouvement d'aplatissement, on obtient un parallélogramme de même périmètre que la figure originale. Si l'on n'aplatit la figure qu'un tout petit peu, la plupart des élèves croient que l'aire, aussi, reste la même. C'est seulement en montrant une situation extrême (la figure presque tout à fait aplatie) que tout le monde voit que l'aire diminue pendant l'aplatissement. Le deuxième exemple, c'est le problème bien connu des cylindres de Galilée. D'un morceau de tissus rectangulaire, on peut faire deux sacs de grains cylindriques différents : l'un large et bas, en cousant l'un à l'autre les côtés les plus courts, et l'autre étroit et haut, en cousant l'un à l'autre les côtés les plus longs. Le cylindre large et bas possède le plus grand volume, mais comme les deux cylindres ont la même superficie latérale, bien des gens croient ("mais pas les paysans du temps de Galilée") qu'ils ont le même volume.

Retournons au sujet des trois études relatées dans cet article. La question *pourquoi* les élèves tombent dans le piège de l'illusion de la linéarité, même dans les deux conditions d'aide de l'étude 3, reste ouverte. Afin de clarifier l'effet de la situation de test sur les performances décevantes de ces élèves, nous préparons en ce moment une quatrième étude, dans laquelle deux aspects nouveaux de ce contexte seront étudiés. Primo, nous nous demandons dans quelle mesure ces performances peuvent être une conséquence du caractère peu réaliste et peu attrayant des énoncés utilisés (voir tableau 1). Rappelons que Streefland et Treffers (voir la première partie de cet article) ont constaté que l'illusion de la linéarité est vaincue assez facilement par des élèves qui ont l'occasion d'explorer l'effet d'un agrandissement linéaire sur l'aire et le volume dans des contextes attrayants et réalistes. Secundo, nous nous demandons quelle est l'influence de la structure sémantique des questions sur le comportement de réponse des élèves. Les questions expérimentales utilisées dans les études précédentes (voir tableau 1) avaient toutes la structure d'un problème classique de proportion (trois nombres donnés, le quatrième nombre demandé). On peut se poser la question de savoir si les élèves à qui on présenterait des questions comparables mais coulées dans une autre structure (par exemple, une fois donné le facteur linéaire, on demande le facteur des aires) se laisseraient tenter tout aussi fort par des raisonnements proportionnels erronés.

Une deuxième catégorie d'éléments d'explication renvoie aux propriétés de l'enseignement que ces élèves ont (ou n'ont pas) parcouru. Une explication plausible de la manifestation extraordinairement forte de l'illusion de la linéarité auprès de ces élèves, c'est le fait que l'enseignement actuel des mathématiques attire de façon excessive l'attention sur les aspects techniques du calcul et sur la représentation stéréotypée des relations proportionnelles, tandis que l'adéquation, pour une situation-problème donnée, d'un modèle linéaire (par exemple en concurrence avec d'autres modèles mathématiques) n'est que rarement objet de réflexion et de discussion. Cependant, ceci devrait également être étudié dans une recherche scientifique, qui relaterait de façon plus explicite les performances et les difficultés des élèves aux caractéristiques de l'enseignement des mathématiques qu'ils ont parcouru jusqu'alors.

Finalement, il reste une question très importante : comment peut-on, mieux qu'à présent, protéger et/ou armer les élèves contre le piège de l'illusion de la linéarité, tant en général qu'en particulier pour des problèmes de longueur et d'aire de figures planes semblables. Dans le but de répondre à cette question, il faudra travailler à l'élaboration et l'évaluation de nouveaux matériels d'instruction. Dans ceux-ci, il faudra en tout cas attacher largement l'attention sur l'apprentissage de la construction d'un modèle mathématique pour une situation donnée. L'interprétation des résultats à la lumière d'un modèle appliqué devra, également, être un des thèmes importants. On trouve, à cet effet, des idées précieuses dans certains manuels récents de mathématiques (voir par exemple [2], [3] et [4]).

Notes

Cet article est la traduction d'une adaptation d'un texte néerlandais publié par l'auteur dans Wiskunde & Onderwijs 93 (p. 18-26) et 94 (p. 161-

173). L'auteur remercie cordialement M. Roelens qui s'est chargé de la traduction française.

Les études rapportées font partie d'un projet de recherche réalisé au Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie/Departement Didactiek de la K.U.Leuven et dirigé par les professeurs L. Verschaffel et D. Janssens.

Bibliographie

[1] E. Castelnuovo et M. Barra, *Mathématique dans la réalité*, Collection formation des maîtres en mathématiques 43, CEDIC, Paris, 1980.

[2] Groupe d'Enseignement Mathématique, *De question en question. Mathématiques 2*, Didier Hatier, Bruxelles, 1994.

[3] Lawrence Hall of Science, *Equals investigations. Flea-sized surgeons*, University of California, Berkeley, CA, 1994.

[4] National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series Grades 5-8. Understanding rational numbers and proportions*, NCTM, Reston, VA, 1994.

[5] G. Pólya, *How to solve it*, 2nd edition, Princeton University Press, Princeton, 1957.

[6] J. Rogalski, Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface), *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1982, 3/3, 343–396.

[7] A. Schoenfeld, *Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*, in D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan, New York, 1992, p. 334–370.

[8] L. Verschaffel et E. De Corte, *Word problems. A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school*, in T. Nunes et P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics : An international perspective*, Psychology Press, Hove, UK, 1997, p. 69–98.

Adresse de l'auteur :

Dirk DE BOCK
EHSAL
Stormstraat 2
1000 Brussel

Arithmétique sur des ensembles de nombres réels et sur des quantités floues

J. Bair, *Université de Liège*

Résumé. Notre objectif consiste à étudier les somme, différence, produit et quotient de sous-ensembles de nombres réels, en particulier d'intervalles de la droite numérique, et d'appliquer ces résultats en logique floue.

Mots-clé : opérations arithmétiques sur des ensembles de nombres, erreurs absolues, quantités floues, nombres flous, α-coupe.

1. Opérations arithmétiques sur les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Considérons tout d'abord la somme de deux sous-ensembles A et B de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels : elle est définie par

$$A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}.$$

Par exemple, si $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 3, 5\}$, alors

$$A + B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

car $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $0 + 3 = 3$, $1 + 3 = 4$, $0 + 5 = 5$ et $1 + 5 = 6$.

Tout ensemble E d'un référentiel R étant parfaitement caractérisé par sa fonction caractéristique f_E, définie par

$$f_E : x \in R \to f_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E \\ 0 \text{ si } x \in R \setminus E, \end{cases}$$

cherchons à décrire la fonction caractéristique f_{A+B} d'une telle somme $A +\ B$.

Si un nombre z appartient à $A + B$, on doit avoir $f_{A+B}(z) = 1$; or, dans ce cas, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $z = a + b$; on a dès lors $f_A(a) = f_B(b) = 1$, d'où $f_A(a) \wedge f_B(b) = 1$; si l'on regarde tous les couples (x, y) tels que $x + y = z$, on a donc

$$\sup_{x+y=z} (f_A(x) \wedge f_B(y)) = 1.$$

Par contre, pour un réel z n'appartenant pas à $A+B$, on a $f_{A+B}(z)=0$; dans ces conditions, chaque fois que l'on peut trouver deux réels a et b tels que $a+b=z$, on doit avoir $f_A(a)=0$ ou $f_B(b)=0$, soit $f_A(a)\wedge f_B(b)=0$; en conséquence,

$$\sup_{x+y=z}(f_A(x)\wedge f_B(y))=0.$$

Il apparaît donc que la fonction caractéristique de $A+B$ peut être définie comme suit pour tout réel z :

$$f_{A+B}(z)=\sup_{x+y=z}(f_A(x)\wedge f_B(y)).$$

Un raisonnement similaire peut être formulé à propos de toutes les opérations arithmétiques classiques.

Ainsi, si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et si $*$ désigne une quelconque des opérations d'addition $+$, de soustraction $-$, de multiplication $\times$ ou de division ./., l'ensemble $A\cdot B$, égal par définition à $\{a\cdot b : a\in A, b\in B\}$, possède (sous réserve d'existence) la fonction caractéristique suivante :

$$f_{A\cdot B}(z)=\sup_{x\cdot y=z}(f_A(x)\wedge f_B(y)) \text{ pour tout réel } z.$$

Remarquons que les ensembles $A+B$, $A-B$ et $A\times B$ sont définis quels que soient A et B ; par contre, $A./.B$ n'est défini que si 0 n'appartient pas à B.

2. Arithmétique sur des intervalles

Soient a,b,c,d quatre nombres réels tels que $a\leqslant b$ et $c\leqslant d$.

Considérons les intervalles compacts $A=[a,b]$ et $B=[c,d]$ (avec $A=\{a\}$ et $B=\{c\}$ quand, respectivement, $a=b$ et $c=d$).

Soit $*$ une des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, à savoir $*\in\{+,-,\times,./.\}$ (avec $0\notin B$ lorsque l'on divise A par B).

S'il existe, l'ensemble $A\cdot B$ est également un intervalle compact, à savoir

$$A\cdot B=[\alpha,\beta],$$

avec $\alpha=\min\{a\cdot c,\ a\cdot d,\ b\cdot c, b\cdot d\}$ et $\beta=\max\{a\cdot c, a\cdot d, b\cdot c, b\cdot d\}$.

De fait, quand elle est définie, la fonction à deux variables $f(x,y) = x \cdot y$ est continue sur le convexe compact $C = A \times B$ de $\mathbb{R}^2$ et admet dès lors, en vertu du théorème de Weierstrass, un minimum α et un maxiumum β ; de plus, grâce à la continuité de f et à la convexité de C, $f(C)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme f n'admet visiblement aucun extrémant local dans l'intérieur de C, ni sur les segments de droite $\{a\} \times]c,d[$, $\{b\} \times]c,d[$, $]a,b[\times \{c\}$ et $]a,b[\times \{d\}$, les extrema globaux de f sur C ne peuvent être atteints qu'en les sommets du rectangle C, c'est-à-dire aux points $(a,c),(b,c),(a,d),(b,d)$, d'où le résultat annoncé.

Par des inégalités élémentaires, on peut déterminer les nombres α et β dans les divers cas possibles, ce qui livre les résultats plus précis que voici :

$$\begin{aligned} A+B &= [a+c,\, b+d] \\ A-B &= [a-d,\, b-c] \end{aligned}$$

$$A \times B = \begin{cases} [ac,bd] & \text{lorsque } \ a,b,c,d \geqslant 0 \\ [bc,bd] & \text{lorsque } \ a,b,d \geqslant 0,\ c \leqslant 0 \\ [bc,ad] & \text{lorsque } \ a,b \geqslant 0,\ c,d \leqslant 0 \\ [ad,bd] & \text{lorsque } \ a \leqslant 0,\ b,c,d \geqslant 0 \\ [ad \vee bc,\ ac \vee bd] & \text{lorsque } \ a,c \leqslant 0,\ b,d \geqslant 0 \\ [bc,ac] & \text{lorsque } \ a,c,d \leqslant 0,\ b \geqslant 0 \\ [ad,bc] & \text{lorsque } \ a,b \leqslant 0,\ c,d \geqslant 0 \\ [ad,ac] & \text{lorsque } \ a,b,c \leqslant 0,\ d \geqslant 0 \\ [bd,ac] & \text{lorsque } \ a,b,c,d \leqslant 0. \end{cases}$$

Si $0 \notin B$,

$$A./.B = \begin{cases} \left[\frac{a}{d}, \frac{b}{c}\right] & \text{lorsque } \ a,b,c,d \geqslant 0 \\ \left[\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right] & \text{lorsque } \ a,b \geqslant 0,\ c,d \leqslant 0 \\ \left[\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right] & \text{lorsque } \ a \leqslant 0,\ b,c,d \geqslant 0 \\ \left[\frac{b}{d}, \frac{a}{d}\right] & \text{lorsque } \ b \geqslant 0,\ a,c,d \leqslant 0 \\ \left[\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right] & \text{lorsque } \ a,b \leqslant 0,\ c,d \geqslant 0 \\ \left[\frac{b}{c}, \frac{a}{d}\right] & \text{lorsque } \ a,b,c,d \leqslant 0. \end{cases}$$

Illustrons ces formules par quelques exemples numériques :

$$\begin{array}{ll} [1,3]+[2,4]=[3,7] & [1,3]-[2,4]=[-3,1] \\ [-1,3]+[-2,4]=[-3,7] & [-1,3]-[-2,4]=[-5,5] \\ [-1,3]\times[-2,4]=[-6,12] & [-3,1]\times[-2,3]=[-9,6] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} [1,3]\times[2,4] & = & [-3,-1]\times[-4,-2]=[2,12] \\ [1,3]\,./.\,[2,4] & = & [-3,-1]\,./.\,[-4,-2]=\left[\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right]. \end{array}$$

3. Application au calcul d'erreur

Dans la pratique, on travaille souvent avec des nombres connus approximativement. Par exemple, pour un remboursement par annuités constantes, le taux d'intérêt exact ne peut généralement pas être déterminé directement, mais des tables classiques d'annuités livrent "une fourchette" pour le taux véritable.

Soit a un *nombre exact* évalué approximativement par un *nombre approché* $\tilde{a}$ légèrement différent de a. L'*erreur absolue par défaut* ε (resp. l'*erreur absolue par excès* η), ε (resp. η) désignant un nombre positif, est telle que, si $\tilde{a} < a$ (resp. $\tilde{a} > a$), l'erreur commise $a-\tilde{a}$ (resp. $\tilde{a}-a$) n'excède pas ε (resp. η) ; ainsi, la valeur approchée $\tilde{a}$ se situe obligatoirement dans l'intervalle $[a-\varepsilon,\, a+\eta]$.

Considérons à présent deux nombres exacts a_1, a_2, dont les erreurs absolues par défaut (resp. par excès) sont $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (resp. η_1, η_2) respectivement ; désignons par a le résultat de l'opération arithmétique $a_1 \cdot a_2$ pour $* \in \{+,-,\times,./.\}$, par ε (resp. η) l'erreur absolue par défaut (resp. par excès) pouvant être commise sur a. Le paragraphe précédent permet de déterminer ε et η en fonction des $\varepsilon_i, \eta_i, a_i$ pour $i=1,2$. Voici, résumées dans un tableau, quelques formules qui s'obtiennent aisément à partir des résultats sur les intervalles ; les autres cas peuvent être traités de la même manière.

a	ε	η	
$a_1 + a_2$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$	$\eta_1 + \eta_2$	toujours valable
$a_1 - a_2$	$\varepsilon_1 + \eta_2$	$\varepsilon_2 + \eta_1$	toujours valable
$a_1 \times a_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 a_2 + \varepsilon_2 a_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 a_2 - \eta_2 a_1 + \varepsilon_1 \eta_2 \end{array} \right.$	$\begin{array}{c} \eta_1 a_2 + \eta_2 a_1 + \eta_1 \eta_2 \\ \eta_1 a_2 - \varepsilon_2 a_1 - \varepsilon_2 \eta_1 \end{array}$	si $a_1 - \varepsilon_1,\ a_2 - \varepsilon_2 \geqslant 0$ si $a_1 + \varepsilon_1 \leqslant 0,\ a_2 - \varepsilon_2 \geqslant 0$
$\dfrac{a_1}{a_2}$	$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a_1 \eta_2 + a_2 \varepsilon_1}{a_2(a_2 + \eta_2)} \\ \dfrac{a_2 \varepsilon_1 - a_1 \varepsilon_2}{a_2(a_2 - \varepsilon_2)} \end{array} \right.$	$\begin{array}{c} \dfrac{a_2 \eta_1 + a_1 \varepsilon_2}{a_2(a_2 - \varepsilon_2)} \\ \dfrac{a_2 \eta_1 - a_1 \eta_2}{a_2(a_2 + \eta_2)} \end{array}$	si $a_1 - \varepsilon_1 \geqslant 0,\ a_2 - \varepsilon_2 > 0$ si $a_1 + \varepsilon_1 \leqslant 0,\ a_2 - \varepsilon_2 > 0$

4. Notion de quantité floue

Dans la vie courante, on considère fréquemment des grandeurs dont les valeurs numériques sont imprévues ou vagues ; par exemple, on dit que “le taux d’inflation est d’environ 4%” ou que “tel parti politique aura entre 25% et 30% de voix lors des prochaines élections” ou encore que “la température de l’air est élevée”. De plus, il existe souvent une gradation dans le degré d’appartenance d’un élément à un ensemble ; par exemple, si une voiture est considérée comme chère dès que son prix de vente vaut au moins 500 unités monétaires (UM, en abrégé), il serait absurde d’affirmer qu’une auto de 501 UM est chère, alors qu’une autre de 499 UM ne serait pas chère.

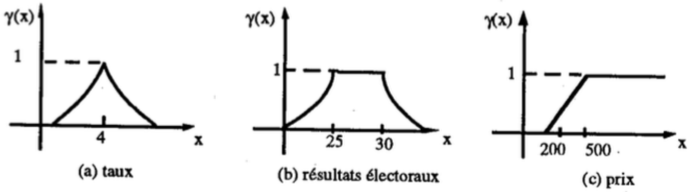
Pour quantifier des données approximatives ou imprécises, et traduire une certaine gradation dans l’appartenance à un ensemble, on associe à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ une *fonction d’appartenance* définie sur $\mathbb{R}$ et qui peut prendre n’importe quelle valeur dans l’intervalle [0,1] ; la valeur de cette fonction en un réel x est appelée le *degré d’appartenance* (ou, parfois, le *degré d’incertitude*) de x et rend compte du “degré de l’appartenance” de x à A : le degré d’appartenance de x à A sera égal à 1 (resp. 0) si on est “certain” que x est (resp. n’est pas) dans A, mais il vaudra, par exemple, 0,2 (resp. 0,8) si on “pense à 20%” (resp. à 80%) que x appartient à A.

Formellement, un *sous-ensemble flou* $\underline{A}$ de $\mathbb{R}$ est un couple $\underline{A} = (A, \gamma_{\underline{A}})$, avec $A \subset \mathbb{R}$, $\gamma_{\underline{A}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ et $\gamma_{\underline{A}}(x) = 0$ dès que $x \notin A$; $\underline{A}$ est souvent appelé *ensemble flou* (sous-entendu, au sein de $\mathbb{R}$).

Ainsi, la fonction d’appartenance remplace, en logique floue, la traditionnelle fonction caractéristique d’un ensemble en logique classique ; si la fonction d’appartenance possède ses valeurs uniquement dans la paire $\{0,1\}$, $\gamma_{\underline{A}}$ redonne la fonction caractéristique f_A, de sorte que les sous-ensembles de la théorie classique, encore qualifiés d'*ordinaires*, de *nets* ou, en anglais, de “crisp”, peuvent être en quelque sorte “assimilés” à des ensembles flous (appelés “fuzzy” en anglais).

Une *quantité floue* est, par définition, un sous-ensemble flou normalisé de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un ensemble flou $\underline{A} = (A, \gamma_{\underline{A}})$ pour lequel existe un élément a de A tel que $\gamma_{\underline{A}}(a) = 1$.

En guise d'illustrations, représentons graphiquement des fonctions d'appartenance se référant à “un taux d'environ 4%” (Figure 1.a), à des résultats électoraux se situant dans la fourchette de 25% à 30% (Figure 1.b), à “un prix de voiture élevé” (Figure 1.c).



Figures 1. Quelques quantités floues.

Des quantités floues très fréquemment utilisées sont les *nombres flous de type* $G-D$; ils sont caractérisés par une fonction d'appartenance γ qui peut se mettre sous la forme suivante, pour deux réels positifs ε, η et un réel a quelconque :

$$\gamma(x) = \begin{cases} G(\frac{a-x}{\varepsilon}) & \text{si} \quad a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a \\ D(\frac{x-a}{\eta}) & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant a + \eta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

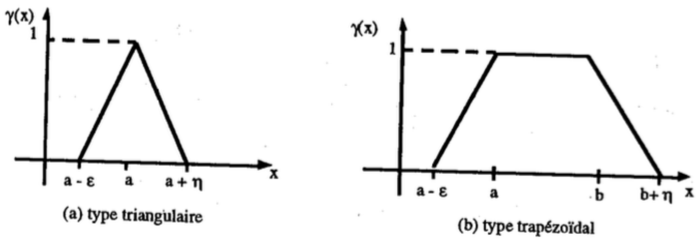
où G et D sont deux fonctions de référence ([1]) qui sont supposées décroissantes et continues sur [0,1], à valeurs dans [0,1], telles que $G(0) = D(0) = 1$ et $G(1) = D(1) = 0$. Les nombres ε et η sont appelés les *étendues* à gauche et à droite du nombre flou qui est noté $(a, \varepsilon, \eta)_{GD}$ et qui traduit une donnée imprécise relative à une grandeur valant approximativement a, l'intervalle $[a - \varepsilon,\ a + \eta]$ représentant en quelque sorte un “encadrement” du réel a, les étendues jouant alors le rôle d'“erreurs de mesure”. En particulier, si

1. la lettre G (resp. D) est mise pour le mot “gauche” (resp. “droite”) ; en anglais, on parle de nombre flou de type $L - R$.

$G(x) = D(x) = 1 - |x|$, on obtient un nombre flou de *type triangulaire*, noté simplement (a, ε, η) (Figure 2.a). On pourrait définir de la même manière un *intervalle flou de type trapézoïdal* par la fonction d'appartenance

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{a-x}{\varepsilon}\right| & \text{si} \quad a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a \\ \\ 1 - \left|\frac{x-b}{\eta}\right| & \text{si} \quad b \leqslant x \leqslant b + \eta \\ \\ 1 & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

cet intervalle, noté $(a, b, \varepsilon, \eta)$, donne intuitivement une “fourchette” pour la grandeur considérée (Figure 2.b)



Figures 2. Nombres flous particuliers.

Il est intéressant d'étudier des ensembles flous au moyen de sous-ensembles ordinaires. Une façon très simple de procéder consiste à fixer une limite inférieure, notée α, aux degrés d'appartenance pris en considération.Pour tout *seuil* α appartenant à l'intervalle unitaire [0,1], on associe donc à la quantité floue $\bar{A} = (A, \gamma_{\underline{A}})$ le sous-ensemble ordinaire ${}^{\alpha}\underline{A}$ de $\mathbb{R}$ en sélectionnant tous les nombres réels x dont le degré d'appartenance est au moins égal à α ; ainsi, plus on est exigeant sur la notion d'appartenance, plus on augmente le seuil α, et moins il existe d'éléments satisfaisant à cette condition d'appartenance. Plus précisément, pour tout réel α de [0,1], on définit la α-coupe de la quantité floue $\underline{A} = (A, \gamma_{\underline{A}})$ par

$${}^{\alpha}\underline{A} = \{x \in \mathbb{R} : \gamma_{\underline{A}}(x) \geqslant \alpha\}$$

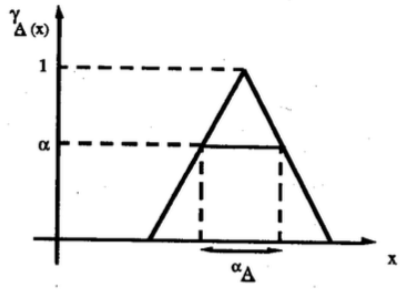


Figure 3. α-coupe d'un nombre flou de type triangulaire.

Notons qu'un 1-coupe de $\underline{A}$ n'est rien d'autre que le *noyau*, c'est-à-dire l'ensemble des x tels que $\gamma_{\underline{A}}(x) = 1$, tandis que la 0-coupe redonne toute la droite numérique $\mathbb{R}$. Il est évident que la connaissance de toutes les α-coupes équivaut à celle de la quantité floue elle-même.

Nous supposerons dans la suite que toutes les α-coupes des quantités floues considérées sont des intervalles (ce qui revient à supposer quasi-concave la fonction d'appartenance) qui seront compacts pour $\alpha > 0$; cette hypothèse est vérifiée pour tous les nombres (et intervalles) flous de type $G - D$.

5. Arithmétique des quantités floues

Considérons deux quantités floues $\underline{A} = (A, \gamma_{\underline{A}})$ et $\underline{B} = (B, \gamma_{\underline{B}})$ dont les fonctions d'appartenance sont continues sur $\mathbb{R}$.

Il est possible d'introduire l'addition $\underline{A} + \underline{B}$, la soustraction $\underline{A} - \underline{B}$, la multiplication $\underline{A} \times \underline{B}$ et la division $\underline{A}./.\underline{B}$ comme étant une nouvelle quantité floue obtenue en reprenant la caractérisation des opérations correspondantes sur des ensembles ordinaires (cf. paragraphes 1 et 2), mais en remplaçant les fonctions caractéristiques par les fonctions d'appartenance. De façon précise, pour $* \in \{+, -, \times, ./.\}$, on définit

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{C} = (C, \gamma_C), \quad \text{où } C = A \cdot B$$

et

$$\gamma_{\underline{C}}(z) = \sup_{x \cdot y = z} \{\gamma_{\underline{A}}(x) \wedge \gamma_{\underline{B}}(y)\}, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Sans entrer dans les détails de cette théorie, signalons néanmoins que certaines propriétés classiques des opérations arithmétiques sur les nombres réels sont conservées pour les opérations correspondantes portant sur des quantités floues : par exemple, c'est le cas pour la commutativité de l'addition, pour l'existence d'un élément neutre pour la multiplication, ... Au contraire, d'autres propriétés classiques ne sont pas conservées en logique floue, par exemple, la distributivité de la multiplication floue par rapport à l'addition floue, ...

Contentons-nous donc de donner une propriété des opérations arithmétiques floues qui, dans la pratique, s'avère intéressante pour le calcul dans la mesure où toute α-coupe d'une opération floue n'est rien d'autre que le résultat de la même opération sur les α-coupes : on ramène de la sorte le problème de l'arithmétique des quantités floues à celui de l'arithmétique sur des intervalles (voir paragraphe 2).

De fait, si $\alpha \in]0,1]$ et $* \in \{+,-,\times,./.\}$, montrons que ${}^{\alpha}\underline{C} = {}^{\alpha}\underline{A} \cdot {}^{\alpha}\underline{B}$, où $\underline{C} = (C, \gamma_{\underline{C}}) = \underline{A} \cdot \underline{B}$.

Considérons tout d'abord un élément arbitraire z de ${}^{\alpha}\underline{A} \cdot {}^{\alpha}\underline{B}$: il existe $x^* \in {}^{\alpha}\underline{A}$ et $y^* \in {}^{\alpha}\underline{B}$ tels que $z = x^* \cdot y^*$. Partant,

$$\begin{aligned}\gamma_{\underline{C}}(z) &= \sup_{z=x\cdot y} \left[\gamma_{\underline{A}}(x) \wedge \gamma_{\underline{B}}(y)\right] \\ &\geqslant \gamma_{\underline{A}}(x^*) \wedge \gamma_{\underline{B}}(y^*) \geqslant \alpha.\end{aligned}$$

Il en résulte l'inclusion suivante :

$${}^{\alpha}\underline{A} \cdot {}^{\alpha}\underline{B} \subseteq {}^{\alpha}\underline{C}.$$

Réciproquement, considérons un élément quelconque z de ${}^{\alpha}\underline{C}$; on a donc

$$\gamma_{\underline{C}}(z) = \sup_{z=x\cdot y} \left[\gamma_{\underline{A}}(x) \wedge \gamma_{\underline{B}}(y)\right] \geqslant \alpha.$$

Dès lors, pour tout entier n supérieur à $\frac{1}{\alpha}$, il existe x_n et y_n tels que $z = x_n \cdot y_n$ et pour lesquels

$$\gamma_{\underline{A}}(x_n) \wedge \gamma_{\underline{B}}(y_n) > \alpha - \frac{1}{n} \geqslant 0,$$

ce qui entraîne $x_n \in {}^{\alpha-\frac{1}{n}}\underline{A}$ et $y_n \in {}^{\alpha-\frac{1}{n}}\underline{B}$.

Fixons notre attention sur les deux suites ainsi construites $X = (x_n)$ et $Y = (y_n)$. Comme $\alpha - \frac{1}{n} < \alpha - \frac{1}{n+1}$,

$$^{\alpha-\frac{1}{n+1}}\underline{A} \subseteq {}^{\alpha-\frac{1}{n}}\underline{A} \quad \text{et} \quad {}^{\alpha-\frac{1}{n+1}}\underline{B} \subseteq {}^{\alpha-\frac{1}{n}}\ \underline{B},$$

les deux suites X et Y sont situées, à partir d'un certain rang, dans les intervalles compacts $^{\alpha-\frac{1}{n+1}}\underline{A}$ et $^{\alpha-\frac{1}{n+1}}\underline{B}$ respectivement. En vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $X' = (x_{n,i})$ convergeant vers un point x_0 de $^{\alpha-\frac{1}{n+1}}\underline{A}$; de même, la sous-suite correspondante $Y'(y_{n,i})$ admet une sous-suite $Y'' = (y_{n,i,j})$ convergeant vers un point y_0 de $^{\alpha-\frac{1}{n+1}}\underline{B}$ et la sous-suite correspondante $X'' = (x_{n,i,j})$ converge encore vers x_0.

Nous avons donc construit deux sous-suites X'' et Y'' telles que $x_{n,i,j} \cdot y_{n,i,j} = z$, $\lim_{j\to+\infty} x_{n,i,j} = x_0$ et $\lim_{j\to+\infty} y_{n,i,j} = y_0$; par continuité de l'opération $*$, on a de plus

$$\lim_{j\to+\infty}(x_{n,i,j} \cdot y_{n,i,j}) = \lim_{j\to+\infty} x_{n,i,j} \cdot \lim_{j\to+\infty} y_{n,i,j} = x_0 \cdot y_0 = z.$$

Par ailleurs, comme $\gamma_{\underline{A}}(x_{n,i,j}) > \alpha - \frac{1}{n_{i,j}}$ et $\gamma_{\underline{B}}(y_{n,i,j}) > \alpha - \frac{1}{n_{i,j}}$, on obtient par continuité de fonctions d'appartenance

$$\gamma_{\underline{A}}(x_0) = \gamma_{\underline{A}}\left(\lim_{j\to+\infty} x_{n,i,j}\right) = \lim_{j\to+\infty} \gamma_{\underline{A}}(x_{n,i,j}) \geqslant \lim_{j\to+\infty}\left(\alpha - \frac{1}{n_{i,j}}\right) = \alpha$$

et

$$\gamma_{\underline{B}}(y_0) = \gamma_{\underline{B}}\left(\lim_{j\to+\infty} y_{n,i,j}\right) = \lim_{j\to+\infty} \gamma_{\underline{B}}(y_{n,i,j}) \geqslant \lim_{j\to+\infty}\left(\alpha - \frac{1}{n_{i,j}}\right) = \alpha.$$

Nous avons donc trouvé $x_0 \in {}^{\alpha}\underline{A}$ et $y_0 \in {}^{\alpha}\underline{B}$, avec $x_0 \cdot y_0 = z$; en conséquence, $z \in {}^{\alpha}\underline{A} \cdot {}^{\alpha}\underline{B}$.

Au total, on a donc bien $^{\alpha}(\underline{A} \cdot \underline{B}) = {}^{\alpha}\underline{A} \cdot {}^{\alpha}\underline{B}$.

Notons la possibilité de prouver que, dans les conditions de l'énoncé, la fonction $\gamma_{\underline{C}}$ est continue. Par ailleurs, mentionnons que certains auteurs définissent (sous réserve d'existence) les opérations arithmétiques $*$ à l'aide des égalités $^{\alpha}(\underline{A} \cdot \underline{B}) = {}^{\alpha}\underline{A} \cdot {}^{\alpha}\underline{B}$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$.

En guise d'applications, considérons les deux nombres flous de type triangulaire $\underline{A} = (1, 2, 2)$ et $\underline{B} = (3, 2, 2)$; les fonctions d'appartenance et les coupes sont données par

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\underline{A}}(x) &= \begin{cases} 0 & \forall x \in \,]-\infty,-1[\,\cup\,]3,+\infty[\\ \frac{x+1}{2} & \forall x \in [-1,1] \\ \frac{3-x}{2} & \forall x \in [1,3] \end{cases} \\
\gamma_{\underline{B}}(x) &= \begin{cases} 0 & \forall x \in \,]-\infty,1[\,\cup\,]5,+\infty[\\ \frac{x-1}{2} & \forall x \in [1,3] \\ \frac{5-x}{2} & \forall x \in [3,5] \end{cases} \\
{}^{\alpha}\underline{A} &= [2\alpha-1,\ 3-2\alpha] \\
{}^{\alpha}\underline{B} &= [2\alpha+1,\ 5-2\alpha].
\end{aligned}
$$

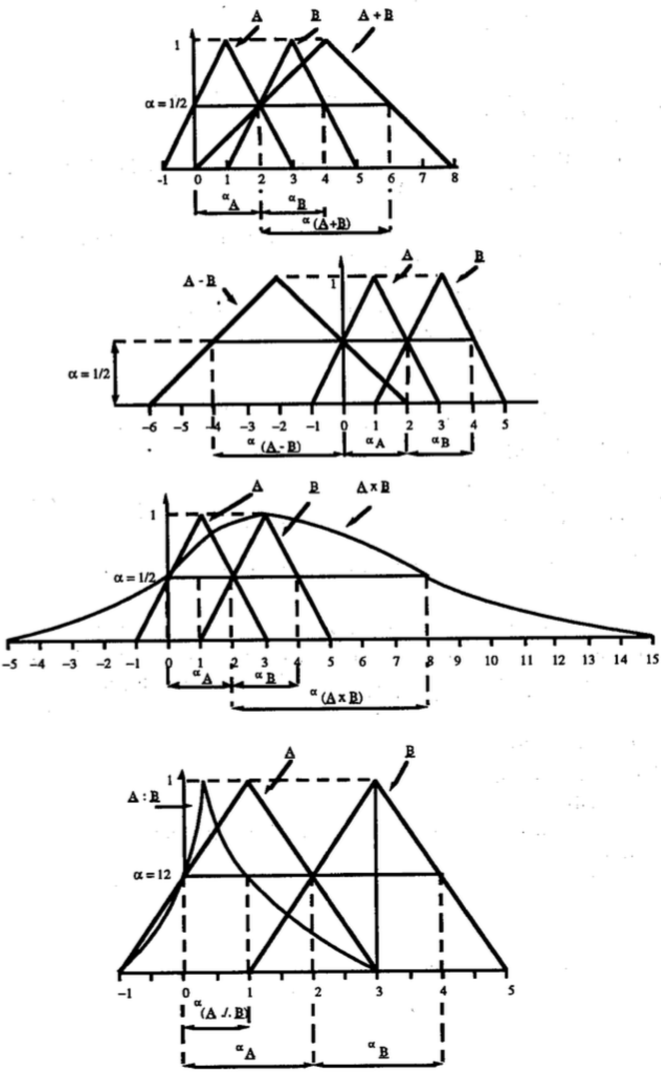
Les nombres flous en résultant sont définis par :

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\underline{A}+\underline{B}}(x) &= \begin{cases} 0 & \forall x \in \,]-\infty,0[\,\cup\,]8,+\infty[\\ \frac{x}{4} & \forall x \in [0,4] \\ \frac{8-x}{4} & \forall x \in [4,8] \end{cases} \\
\gamma_{\underline{A}-\underline{B}}(x) &= \begin{cases} 0 & \forall x \in \,]-\infty,-6[\,\cup\,]2,+\infty[\\ \frac{x+6}{4} & \forall x \in [-6,-2] \\ \frac{2-x}{4} & \forall x \in [-2,2] \end{cases} \\
\gamma_{\underline{A}\times\underline{B}}(x) &= \begin{cases} 0 & \forall x \in \,]-\infty,-5[\,\cup\,]15,+\infty[\\ \frac{3-\sqrt{4-x}}{2} & \forall x \in [-5,0] \\ \frac{\sqrt{1+x}}{2} & \forall x \in [0,3] \\ \frac{4-\sqrt{1+x}}{2} & \forall x \in [3,15] \end{cases} \\
\gamma_{\underline{A}./.\underline{B}}(x) &= \begin{cases} 0 & \forall x \in \,]-\infty,-1[\,\cup\,]3,+\infty[\\ \frac{x+1}{2-2x} & \forall x \in [-1,0] \\ \frac{5x+1}{2x+2} & \forall x \in [0,\frac{1}{3}] \\ \frac{3-x}{2x+2} & \forall x \in [\frac{1}{3},3] \end{cases}
\end{aligned}
$$

En utilisant la formule ${}^{\alpha}(\underline{A}\cdot\underline{B}) = {}^{\alpha}\underline{A}\cdot{}^{\alpha}\underline{B}$, ainsi que les formules relatives à l'arithmétique des intervalles compacts, on a pour tout $\alpha \in \,]0,1]$:

$$
\begin{aligned}
{}^{\alpha}(\underline{A}+\underline{B}) &= [4\alpha,\ 8-4\alpha] \\
{}^{\alpha}(\underline{A}-\underline{B}) &= [4\alpha-6,\ 2-4\alpha] \\
{}^{\alpha}(\underline{A}\times\underline{B}) &= \begin{cases} \left[-4\alpha^2+12\alpha-5,\ 4\alpha^2-16\alpha+15\right] & \forall \alpha \in \,]0,0.5] \\ \left[4\alpha^2-1,\ 4\alpha^2-16\alpha+15\right] & \forall \alpha \in \,]0.5,1] \end{cases} \\
{}^{\alpha}(\underline{A}./.\underline{B}) &= \begin{cases} [(2\alpha-1)/(2\alpha+1),\ (3-2\alpha)/(2\alpha+1)] & \forall \alpha \in \,]0,0.5] \\ [(2\alpha-1)/(5-2\alpha),\ (3-2\alpha)/(2\alpha+1)] & \forall \alpha \in \,]0.5,1]\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Remarquons que la somme et la différence de nombres flous de type triangulaire sont encore des nombres flous de type triangulaire, au contraire des produits et quotients correspondants qui ne sont qu'approchés par des nombres flous de type triangulaire (voir Figures 4). Plus généralement, de telles considérations peuvent être émises pour tout nombre flou de type GD [Dubois-Prade].



Figures 4. Illustration des opérations arithmétiques.

Bibliographie

[1] ALVAREZ I., *La logique floue et la gestion*, dossier du G.E.M.M.E., n°5, Université de Liège, 1997.

[2] BOUCHON-MEUNIER B., *La logique floue et ses applications*, Editions Addison-Wesley France, 1995.

[3] DUBOIS D. - PRADE H., Fuzzy real algebra : some results, *Fuzzy Sets and Systems*, 2, 1979, pp. 327–348.

[4] DUBOIS D. - PRADE H., Operations on fuzzy members, *Int. J. Systems Sci.*, vol. 9, n°6, 1978, pp. 613–626.

[5] KLIR G., *Fuzzy sets and fuzzy logic*, ...

[6] McNEILL M. - THRO E., *Fuzzy logic, a practical approach*, AP Professional Cambridge, 1994.

[7] MIZUMOTO M. - TANAKA K., The four operations of arithmetic on fuzzy members, *Systems computers controls*, vol. 7, n°5, 1976, pp. 73–81.

[8] TONG-TONG J.R., *La logique floue*, Hermes, Paris, 1995.

N.B. Ces derniers temps, de nombreux articles originaux sont encore consacrés aux nombres flous ; par exemple, la réputée revue “Fuzzy Sets and Systems” vient de sortir un numéro spécial intitulé “Fuzzy Arithmetic” (volume 91, n° 2, October 16, 1997).

Adresse de l'auteur :

Jacques BAIR
Université de Liège
Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales
Boulevard du Rectorat 7
4000 Liège

Une démonstration du théorème de Pascal obtenue en généralisant le produit sur le cercle

M. Boffa,

Mots-clé : groupes, coniques, hexagone de Pascal.

Dans le n°114 de *Mathématique et Pédagogie* (1997, p.25-29), Guido Lasters définit un produit sur un cercle quelconque C à partir d'une droite H ne coupant pas C et d'un point f de C. Il obtient ainsi un groupe commutatif $C, \bullet$ dont l'élément neutre est f. Le produit $a \bullet b$ de deux points de C est le point c de C tel que les droites ab, cf et H soient concourantes. Cette loi $\bullet$ provient de la "loi de groupe d'une cubique" (bien connue en géométrie algébrique) appliquée à la cubique (dégénérée) formée par C et H.

Dans le n°118 (1998, p.40-44), Jack G. Segers remarque que si H coupait C alors les points de rencontre seraient des absorbants pour la loi $\bullet$. Je vais montrer que si C est une conique quelconque (non dégénérée), H une droite quelconque et f un point quelconque de $C - H$ (l'ensemble des points de C qui n'appartiennent pas à H), alors on a le résultat général suivant :

Théorème. $(C - H, \bullet, f)$ *est un groupe commutatif. Plus précisément :*

(i) Si H ne coupe pas C, il est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

(ii) Si H est tangente à C, il est isomorphe au groupe additif des nombres réels.

(iii) Si H coupe C en 2 points distincts, il est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres réels non nuls.

Démonstration (les calculs sont laissés au lecteur).

Dans le cas (i), on peut trouver un système de coordonnées pour lequel

$$\begin{cases} C \text{ a pour équation } x^2 + y^2 = 1, \\ H \text{ est la droite à l'infini}, \\ f \text{ est le point } (1, 0), \end{cases}$$

et alors le produit $\bullet$ s'écrit

$$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Dans le cas (ii), on peut trouver un système de coordonnées pour lequel

$$\begin{cases} C - H \text{ a pour équation } y = x^2, \\ H \text{ est la droite à l'infini,} \\ f \text{ est le point } (0,0), \end{cases}$$

et alors le produit $\bullet$ s'écrit

$$(x_1, x_1^2) \bullet (x_2, x_2^2) = (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2).$$

Dans le cas (iii), on peut trouver un système de coordonnées pour lequel

$$\begin{cases} C - H \text{ a pour équation } y = 1/x, \\ H \text{ est la droite à l'infini,} \\ f \text{ est le point } (1,1), \end{cases}$$

et alors le produit $\bullet$ s'écrit

$$(x_1, 1/x_1) \bullet (x_2, 1/x_2) = (x_1 x_2, 1/x_1 x_2).$$

L'intérêt du théorème précédent est qu'il conduit facilement au

Théorème de Pascal. *Soient P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 six points (distincts) d'une conique (non dégénérée) C. Alors les trois points $P_1P_2 \cap P_4P_5$, $P_2P_3 \cap P_5P_6$ et $P_3P_4 \cap P_6P_1$ sont alignés.*

Démonstration.

Soit H la droite joignant les deux premiers de ces trois points et soit f un point quelconque de $C - H$. Dans le groupe $(C - H, \bullet, f)$, on a donc $P_1 \bullet P_2 = P_4 \bullet P_5$ et $P_2 \bullet P_3 = P_5 \bullet P_6$. Il en résulte que $(P_2 \bullet P_3) \bullet (P_4 \bullet P_5) = (P_5 \bullet P_6) \bullet (P_1 \bullet P_2)$, d'où (en simplifiant par P_2 et P_5) $P_3 \bullet P_4 = P_6 \bullet P_1$, cqfd.

Remarque. Les résultats précédents sont formulés en termes de coordonnées réelles, mais on peut les généraliser en remplaçant le corps des nombres réels par un corps commutatif quelconque.

Adresse de l'auteur :

Maurice Boffa
Université de Mons-Hainaut
Institut de Mathématique et d'Informatique
"Le Pentagone"
Avenue du Champ de Mars 6
B 7000 Mons

La règle des "4 C"

R. Graas, *Inspecteur honoraire*

Le frère Octave, professeur de 5ème moderne (en ce temps-là), s'avérait être un personnage folklorique et dynamique que suivait avec ardeur sa quarantaine de potaches de 13-14 ans, stimulés qu'ils étaient par ses bonnes et mauvaises notes, lancées un peu à la volée.

D'un air inspiré, l'index droit levé, il lui arrivait de proférer un "Mon fils", suivi de quelque apophtegme. De ceci, un exemple typique était la règle des 4 C : "COURT, CLAIR, CORRECT, COMPLET". Quel programme, surtout en mathématiques !

Le Professeur F. Simonart à Louvain rapportait, en se rengorgeant, que De La Vallée Poussin rédigeant son magistral cours d'analyse, avait, au fil des rééditions, concentré de plus en plus le chapitre des enveloppes.

Economie de temps et de place : un idéal pour les professeurs dans leurs cours et pour les étudiants dans leurs compositions si la clarté subsiste et s'il ne manque rien.

Ces consignes – qui rappellent les contraintes du sonnet – devraient faire éviter autant le foisonnement de Charybde que l'hermétisme de Scylla.

Adresse de l'auteur

Robert GRAAS
Rue de Gembloux 35
5002 Saint-Servais

PS : Illustration bien inattendue de ceci : dams ma notule "Unicuique suum . . . " (M.P. n°118), une coquille a remplacé verb<u>a</u>ux par verb<u>e</u>ux. Les lecteurs qui m'ont honoré par leurs réactions respectaient tous le laconisme préconisé par le premier C . . .

Bibliographie

J. Bair et D. Moens,

Pourquoi ont-ils inventé les fractions ? par Nicolas ROUCHE, Editions Ellipses, Collection L'Esprit des Sciences, Paris, 1998.

Ce petit livre (de 126 pages, en format A5) a pour objectif d'expliquer, en allant du concret vers l'abstrait, les nombreux phénomènes que les fractions servent à exprimer.

L'auteur traite en premier lieu du fractionnement, qui est le partage d'une grandeur en parts égales suivi du prélèvement d'un certain nombre de parts. Il étudie ensuite les rapports qui sont déjà plus abstraits. Puis, il explique le problème de la commune mesure entre grandeurs, pour en arriver au problème des quantités incommensurables. Il expose ensuite l'idée de proportionnalité qui débouche sur celle de linéarité. Il en arrive enfin à expliquer le calcul sur les fractions, dont l'utilité apparaît surtout en calcul des probabilités et dans la manipulation des exposants.

Au travers de nombreux exemples fort bien choisis, l'auteur nous montre toute la richesse (et parfois la difficulté) de notions fondamentales en mathématique. En particulier, il met parfaitement en évidence le fait que certaines questions élémentaires et de base peuvent "conduire bien loin dans les mathématiques". Par exemple, il aborde des sujets comme les symétries de figures, les figures semblables, les probabilités, les problèmes de troc, ...

Ce livre ne présente pas nécessairement la manière d'enseigner, pour la première fois, les fractions, car il ne va pas toujours du facile au difficile. Il s'adresse essentiellement à des adolescents et des adultes qui souhaitent reconstruire leur savoir en insistant sur le pourquoi des choses, en se basant sur le bons sens et en partant du vécu quotidien de chacun. A ce titre, sa lecture doit être chaleureusement recommandée à tous les professeurs de mathématique, spécialement à ceux qui ont la périlleuse et importante mission d'enseigner à notre jeunesse les fondements de notre belle discipline.

J. BAIR

Probabilités par Maurice Lethielleux, Collection "Express", DUNOD, 1998, 138 pages.

Cette petite brochure fait partie d'une collection qui se veut synthétique : la révision à grande vitesse ! Dans ce contexte, elle est rédigée à l'intention des étudiants des facs économiques en France. Elle présente un bon aperçu de la théorie des probabilités en 24 fiches pédagogiques. Chaque fiche comporte quatre rubriques : objectifs, l'essentiel à savoir, compléments, application. Au sommaire : principes de base, variables aléatoires discrètes et continues, lois classiques, convergences, estimation statistique.

Cette excellente brochure suit celle que je vous présentais dans le n° 118 de notre revue. Elle est destinée aux étudiants français du supérieur, mais peut apporter un éclairage complémentaire aux enseignants du secondaire. Certaines fiches sont effectivement d'un niveau supérieur ; néanmoins, l'auteur va à l'essentiel et permet de comprendre à quoi mènent les notions qui sont abordées en cinquième ou sixième. La mise en pages et les graphiques sont clairs. Bref, à nouveau, un petit livre plein de ressources.

D. MOENS

La brochure "Olympiade Mathématique Belge, n°4"

Le quatrième recueil des questions posées aux Olympiades Mathématiques Belges est disponible.

Les trois premières brochures (1976-1981, 1982-1987 et 1988-1993) couvraient toutes des périodes de 6 années. Le détriplement de l'Olympiade depuis 1996 a eu pour conséquences une augmentation substantielle du nombre des questions proposées. Ce quatrième tome de la série ne couvre donc que 5 années d'Olympiades Mathématiques Belges.

Dans ce recueil numéro 4, toutes les questions des Olympiades des années 1994 à 1998 ont été regroupées par sujet et présentées, autant que faire se pouvait, selon un ordre croissant de difficultés.

Toutes ont été réparties selon les trois catégories Mini, Midi et Maxi. Les questions des deux seules catégories existant en 1994, 1995 ont été distribuées au mieux dans les trois catégories actuelles. Des notations évidentes indiquent à l'utilisateur à quel stade de l'épreuve les questions furent proposées. Des tableaux fournissent les réponses attendues. Tout cela doit donc permettre d'exploiter cette brochure aussi bien dans le cadre d'une préparation à l'Olympiade que dans celui du cours de mathématique dispensé dans les classes. Les Professeurs et leurs élèves tireront le plus grand profit de cette brochure utilisable pendant toutes les années de l'enseignement secondaire.

Les énoncés des problèmes proposés aux **finales** terminent cet ouvrage.

Revue des revues

C. Villers,

Bulletin de l'APMEP (France), *n*°419 – Novembre-Décembre 1998.

Dans l'éditorial de cette livraison, le Président de l'APMEP, François Dusson, plaide pour que l'enseignement "rende actifs d'autres visages du travail scolaire". Par son propos, l'auteur souhaite relever un des maux du système scolaire qui consiste à attribuer trop d'importance à l'évaluation du travail scolaire par rapport à d'autres aspects trop peu relevés et développés comme :

- le fait d'apprendre ensemble avec les échanges que cela suppose,
- la lecture et la relecture qui évite l'enfermement scolaire,
- une recherche de la qualité qui demande la pratique de l'effort est source de plaisir mais demande du temps,
- le souci de cohérence interdisciplinaire qui favorise le développement d'attitudes scientifiques à toute occasion.

Ce numéro propose en outre des articles fort intéressants parmi lesquels nous avons relevé plus particulièrement :

A la découverte du cercle au cours moyen par une commission "premier degré", qui propose un scénario d'étude du cercle en utilisant la communication établie entre deux classes d'élèves. Le travail proposé consiste à analyser une figure donnée de manière à arriver à la reconstruire.

Fractions au collège par un groupe de travail "activités mathématiques au collège". Le groupe de travail propose des activités "clés en main" utilisables en classe. Ces documents sont accompagnés de remarques d'ordre pédagogique.

Quel est le prix de revient d'une page imprimée ? par Michel Rousselet. Cet article décrit comment on peut apprendre à utiliser un tableur de manière efficace. Cela est réalisé par l'étude comparative des prix de revient d'une page imprimée par diverses imprimantes courantes.

Un exemple d'utilisation en statistique de la distance d'un point à un plan par Catherine Dufossé. L'auteur y décrit une manière de montrer comment on peut interpréter géométriquement un problème d'optimisation de fonctions de deux variables en minimisant la distance d'un point à un plan.

Comment définir un trapèze isocèle ? par Marie-Jeanne Perrin-Glorian. Le but de cet article est de proposer un accord sur la définition du "Trapèze isocèle".

Les coniques et Cabri-Géomètre par Saddo Ag Almouloud, Vincent Bongiovanni et Tânia Mendonça Campos (Brésil). La disparition de la notion de lieu géométrique dans les manuels scolaires brésiliens a pour conséquence que les élèves ne semblent retenir des coniques que la forme des courbes étudiées, en perdant de vue les propriétés géométriques et analytiques qui les définissent. Ce constat a conduit les auteurs à proposer des études lieux en utilisant Cabri-Géomètre. Ils relatent ici cette expérience.

Les pentatextes par François Drouin. Il s'agit de la description d'un jeu. Les pièces d'un pentamino comportent des lettres. Leur juxtaposition doit permettre de retrouver une phrase.

Actualité de l'utopie : les mathématiques comme tests, instrument et symbole du progrès humain par Jean-Pierre Kahane. L'auteur aborde divers aspects du rôle des mathématiques dans la société et dans son développement.

A bas le calcul algébrique par Daniel Reisz.

Les polynômes d'Ehrhart par Philippe Claus. C'est la suite de l'artice paru dans le numéro précédent.

Ce numéro du Bulletin de l'APMEP comporte, comme d'habitude, les rubriques *Avis de recherche, Nouvelles brèves, Les problèmes de l'APMEP, Matériaux pour une documentation*, et des informations de type administratif.

Claude VILLERS

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

Faites la différence problème n° 208 de M. et P. n° 118.

Parmi toutes les différences de la forme $36^m - 5^n$, où m et n sont des naturels non nuls, trouver celle qui a la plus petite valeur absolue.

Solution de B. LOISEAU de Mouscron.

Pour $m = 1$ et $n = 2$, on obtient $36-25 = 11$. Nous allons montrer que la différence ne peut être plus petite en valeur absolue. Pour cela, nous allons déterminer la classe de congruence modulo k de $36^m - 5^n$ pour différentes valeurs de k.

- Modulo $5, 36^m - 5^n \equiv 1^m - 0^n \equiv 1 - 0 \equiv 1$.
- Dès lors, cette différence peut valoir $1, 6, 11, 16, \ldots$ (inutile d'aller plus loin), ou bien $-4, -9, -14, \ldots$ (inutile d'aller plus loin).

Nous allons montrer que les valeurs $1, 6, -4, -9$ sont impossibles.

- La différence $36^m - 5^n$ est clairement toujours impaire (car m et n sont non nuls, il s'agit donc bien de la différence de deux nombres, l'un pair et l'autre impair). Les valeurs 6 et -4 sont donc exclues.
- Modulo 6, on a $36^m-5^n \equiv 0^m-(-1)^n \equiv \pm 1$, et $-9 \equiv 3$. La différence $36^m - 5n$ ne peut pas valoir -9.
- Modulo 7, on a $36^m-5^n \equiv 1^m-5^n \equiv 1-5^n$. Pour avoir $36^m-5^n = 1$, il faudrait que modulo 7 on ait $1 - 5^n \equiv 1$, soit $5^n \equiv 0$, ce qui est impossible (5^n ne peut être un multiple de 7 puisque 5 ne l'est pas).

On en conclut que la plus petite valeur possible en valeur absolue pour la différence demandée est bien 11.

J. ANSEEUW de Roeselaere, N. BERCKMANS de Waterloo, P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek, M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre, H.-J. SEIFFERT de Berlin et C. VAN HOOSTE de Marbaix-la-Tour ont envoyé des solutions à peu de chose près similaires à celle de B. LOISEAU.

Partage des points problème n° 209 de M. et P. n° 118.

On donne $2n+3$ ($n \geqslant 1$) points dans le plan tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés et quatre d'entre eux ne sont pas concycliques. Démontrer qu'il existe un cercle passant par trois de ces points et tel que, parmi les $2n$ points restants, n soient à l'intérieur du cercle et les n autres à l'extérieur.

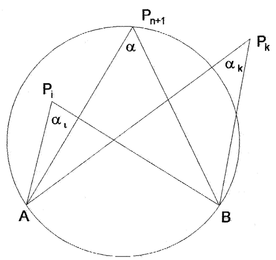
Solution de M. LARDINOIS de Haine-Saint-Pierre.

Considérant l'enveloppe convexe de l'ensemble des points, il suit que l'on peut toujours trouver deux points A et B tels que les $2n+1$ points restants sont du même côté de la droite AB.

Appelons ces $2n+1$ points $P_1, P_2, \ldots, P_{2n+1}$, avec $\widehat{AP_1B} \leqslant \widehat{AP_2B} \leqslant \cdots \leqslant \widehat{AP_{2n+1}B}$.

Si jamais il y avait une égalité, disons $\widehat{AP_iB} = \widehat{AP_jB}$, alors les quatre points A, P_i, P_j, B seraient concycliques. Donc, tous les angles sont différents.

Et alors, le cercle cherché est celui passant par A, P_{n+1}, B, les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont situés à l'extérieur de ce cercle tandis que $P_{n+2}, P_{n+3}, \ldots, P_{2n+1}$ sont situés en son intérieur.



$$\alpha_k < \alpha, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$
$$\alpha_i > \alpha, \quad i = n+2, n+3, \ldots, 2n+1.$$

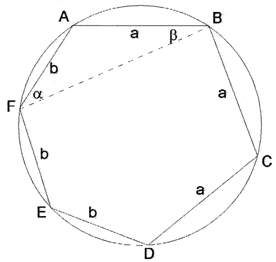
Bonnes solutions de N. BERCKMANS de Waterloo, de B. LOISEAU de Mouscron et de C. VAN HOOSTE de Marbaix-la-Tour.

$\boxed{\text{Un petit calcul}}$ problème n° 210 de M. et P. n° 118.

Un hexagone inscrit dans un cercle a trois côtés consécutifs de longueur a et les trois autres de longueur b. Que vaut le rayon du cercle ?

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek.

Soit $ABCDEF$ l'hexagone inscrit, avec $|AB| = |BC| = |CD| = a$ et $|DE| = |EF| = |FA| = b$. Posons α et β les angles inscrits interceptant les cordes de longueur a et b respectivement



On trouve facilement les angles de l'hexagone :

$$\hat{A} = \hat{D} = 2\alpha + 2\beta,\ \hat{B} = \hat{C} = \alpha + 3\beta,\ \hat{E} = \hat{F} = 3\alpha + \beta.$$

Comme la somme des angles d'un hexagone vaut 4π, on a :
$12\alpha + 12\beta = 4\pi$ ou $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$.

Dans le triangle FAB :

$$\begin{array}{rcll} |BF|^2 & = & a^2 + b^2 - 2ab\cos\dfrac{2\pi}{3} & \text{(relation des cos)} \\ & = & a^2 + b^2 + ab & \\ \text{et } \dfrac{|BF|}{\sin\dfrac{2\pi}{3}} & = & 2R & \text{(relation des sin),} \end{array}$$

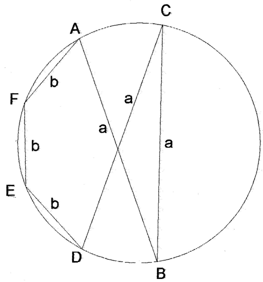
R étant le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone.

D'où

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}}.$$

Si l'hexagone est régulier, on retrouve $R = a = b$.

C. VILLERS de Hyon remarque que l'on peut aussi envisager le cas où $ABCDEF$ est non convexe.



Si, par exemple, $ABCD$ est croisé et $DEFA$ convexe, par un calcul analogue au précédent, on obtient

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - ab}{3}}.$$

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselaere, N. BERCKMANS de Waterloo, P. DASSY de Liège, J. DILLIES de Le Bizet, J. GOLDSTEINAS de Bruxelles, M. LARDINOIS de Haine-St-Pierre, B. LOISEAU de Mouscron, A. PATERNOTTRE de Boussu, H.-J. SEIFFERT de Berlin, C. VAN HOOSTE de Marbaix-la-Tour, et M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles.

Voici trois nouveaux problèmes ; les solutions doivent me parvenir au plus tard le 1er septembre 1999.

217. La suite infernale

Trouver un nombre entier A, le plus grand possible, qui divise deux éléments consécutifs (au moins) de la suite $1988 + N^2$.

(problème transmis par M. LARDINOIS et extrait de Jeux Mathématiques et Logiques, Championnat de France, vol. 1).

Les trois cercles

C_1, C_2, C_3 sont trois cercles situés dans le même plan et tels que les tangentes extérieures communes à C_2 et C_3 se coupent en P, celles communes à C_3 et C_1 se coupent en Q et celles des communes à C_1 et C_2 se coupent en R.

Démontrer que P, Q, R sont collinéaires.

Palindromes

Trouver tous les nombres naturels n écrits en base 10 et ne comportant pas de chiffre 0 tels que n et n^2 soient tous deux des palindromes.

CATALAN

La SBPMef a édité un livre qui devrait figurer dans la bibliothèque de chacun.

François JONGMANS : Eugène Catalan, géomètre sans patrie, républicain sans république.

Ce livre relate la vie du mathématicien français Eugène Catalan, né et mort en Belgique où il passa une partie importante de sa vie, ayant notamment enseigné à l'Université de Liège.

223 pages + 10 illustrations hors-texte ; 1996 ; livre, format 18 × 24 cm ;
membres SBPMef FB 400, non membres FB 500 ;
+ frais de port, à savoir : Belgique : 90 FB, CEE : 90 FB, reste de l'Europe : 130 FB, reste du monde : 330 FB
Pour passer commande, verser la somme adéquate au CCP 000-0728014-29 de la SBPMef - Rue de la Halle 15, B-7000 MONS, en indiquant clairement le motif du paiement.

Olympiades

C. Festraets,

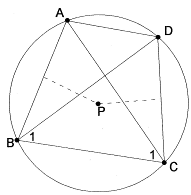
Voici les solutions des trois premiers problèmes proposés à l'Olympiade Mathématique Internationale de 1998.

Problème 1. *Dans un quadrilatère convexe $ABCD$, les diagonales AC et BD sont perpendiculaires et les côtés opposés AB et DC ne sont pas parallèles. On suppose que le point P, intersection des médiatrices de AB et de DC, se trouve à l'intérieur de $ABCD$. Prouver que le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible si et seulement si les triangles ABP et CDP ont même aire.*

Solution

Dans ce qui suit, je désignerai l'aire d'un polygone P par $[P]$.

1) Si le quadrilatère est inscriptible dans un cercle de rayon r, le point P, intersection des médiatrices de AB et de DC est le centre de ce cercle.



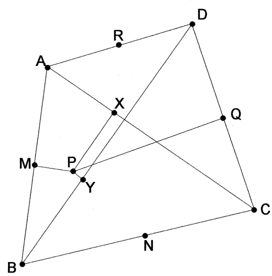
$$\begin{aligned}[APB] &= \frac{1}{2}\, AP.BP \sin\widehat{APB} = \frac{1}{2}\, r^2 \sin 2\widehat{C}_1 \\ [DPC] &= \frac{1}{2}\, DP.CP \sin\widehat{DPC} = \frac{1}{2}\, r^2 \sin 2\widehat{B}_1.\end{aligned}$$

Or les diagonales AC et BD du quadrilatère sont perpendiculaires, donc $\hat{B}_1$ et $\hat{C}_1$ sont des angles complémentaires, $2\hat{B}_1 + 2\hat{C}_1 = 180°$ et $\sin 2\hat{B}_1 = \sin 2\hat{C}_1$.

D'où $[APB] = [DPC]$.

2) Soient M, N, Q, R les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD], [DA]$

$$\begin{aligned}
[AMPR] &= \frac{1}{2}\,[APB] + \frac{1}{2}\,[APD] = \frac{1}{2}\,[ABPD] \\
&= \frac{1}{4}\,BD.AX \\
&\ (X \text{ étant le pied de la perpendiculaire de } P \text{ sur } AC) \\
[BMPN] &= \frac{1}{2}\,[APB] + \frac{1}{2}\,[BPC] = \frac{1}{2}\,[ABCP] \\
&= \frac{1}{4}\,AC.BY \\
&\ (Y \text{ étant le pied de la perpendiculaire de } P \text{ sur } BD)
\end{aligned}$$



D'autre part, si $[APB] = [CPD]$, alors

$$\begin{aligned}
[AMPR] &= [DQPR] &&= \frac{1}{2}\,[MADQP] \\
[BMPN] &= [CQPN] &&= \frac{1}{2}\,[MBCQP] \\
[AMPR] &+ [BMPN] &&= \frac{1}{2}\,[MADQP] + \frac{1}{2}\,[MBCQP] \\
& &&= \frac{1}{2}\,[ABCD] \\
& &&= \frac{1}{4}\,AC.BD
\end{aligned}$$

Donc $BD.AX + AC.BY = AC.BD.$ (1)

$$\begin{array}{llcl} \text{Supposons} & AP & > & CP, \text{ alors } AX > CX \\ & BP & = & AP \text{ et } DP = CP, \end{array}$$

d'où $BP > DP$ et alors $BY > DY$.

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} BD.AX + AC.BY &> BD.CX + AC.DY \\ 2(BD.AX + AC.BY) &> BD.CX + AC.DY + BD.AX + AC.BY \\ &> BD.AC + AC.BD \\ &> 2AC.BD; \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec la relation (1).

De même en supposant $AP < CP$.

D'où $AP = CP = BP = DP$ et le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle de centre P.

Problème 2. *Une compétition regroupe a participants et b examinateurs, où $b \geqslant 3$ est un nombre entier impair. Chaque examinateur attribue à chaque participant une des mentions "réussi" ou "échoué". On suppose que le nombre k est tel que : pour deux examinateurs quelconques, leurs décisions coïncident pour au plus k participants. Prouver que*

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

Solution

Puisqu'il y a $\binom{b}{2}$ paires d'examinateurs et que, pour chaque paire, leurs décisions coïncident pour au plus k participants, le nombre total de décisions qui coïncident est au plus

$$k\binom{b}{2} = k\,\frac{b(b-1)}{2}.$$

Supposons que le ième participant ($1 \leqslant i \leqslant a$) ait réussi pour x_i examinateurs et échoué pour y_i examinateurs, avec $x_i + y_i = b$.

Le nombre de paires d'examinateurs qui sont d'accord pour ce candidat est

$$\begin{aligned}\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2} &= \frac{x_i(x_i-1)}{2}+\frac{y_i(y_i-1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(x_i^2-x_i+y_i^2-y_i\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(x_i^2+y_i^2-b\ \right).\end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned}\frac{x_i^2+y_i^2}{2} &\geqslant \sqrt{x_i^2y_i^2} \qquad \text{(moyenne arith. $\geqslant$ moyenne géom.)}\\ x_i^2+y_i^2 &\geqslant 2x_iy_i\\ 2x_i^2+2y_i^2 &\geqslant 2x_iy_i+x_i^2+y_i^2=(x_i+y_i)^2\\ x_i^2+y_i^2 &\geqslant \frac{1}{2}\,b^2.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2} &\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,b^2-b\right)\\ &\geqslant \frac{1}{4}(b^2-2b)\\ &\geqslant \frac{1}{4}\left((b-1)^2-1\right)\\ &\geqslant \frac{1}{4}(b-1)^2-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Comme b est impair, $(b-1)^2$ est multiple de 4 et $\frac{1}{4}\,(b-1)^2$ est un entier ; l'inégalité peut donc s'écrire

$$\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}\geqslant\frac{1}{4}(b-1)^2.$$

Dès lors,

$$k\,\frac{b(b-1)}{2}\geqslant\sum_{i=1}^{a}\left(\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}\right)\geqslant\frac{a}{4}(b-1)^2$$

et

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

Problème 3. *Pour tout entier n strictement positif, $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n (y compris 1 et n).*

Trouver tous les entiers strictement positifs k pour lesquels il existe n tel que :

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k.$$

Solution

Pour $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$, les p_i étant des nombres premiers distincts, on a

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2\alpha_1+1}{\alpha_1+1} \cdot \frac{2\alpha_2+1}{\alpha_2+1} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{2\alpha_t+1}{\alpha_t+1}.$$

Comme le numérateur est un produit de facteurs impairs, k doit être impair.

Démontrons par induction que tout nombre impair convient.

1) Pour $k = 1$

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = 1 \quad \text{est vrai pour } n = 1.$$

2) Si, pour tout k impair strictement inférieur à m impair, il existe n tel que $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$, alors c'est aussi vrai pour $k = m$.

En effet, posons $m + 1 = 2^r m_0$ où m est un entier impair. Comme $m_0 < m$, il existe n_0 tel que $\frac{d(n_0^2)}{d(n_0)} = m_0$.

$$\begin{aligned} \text{Posons } x_0 &= (2^r - 1)m_0 - 1 \\ \text{et } x_i &= 2x_{i-1} \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

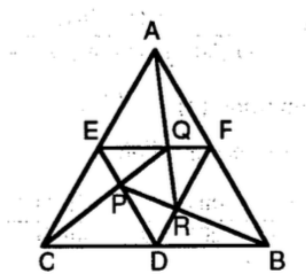
Soient $p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}$ des nombres premiers distincts ne divisant pas n_0 et considérons le nombre n tel que

$$\begin{aligned}
n &= p_0^{x_0} \cdot p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_{r-1}^{x_{r-1}} \cdot n_0 \\
\frac{d(n^2)}{d(n)} &= \frac{2x_0+1}{x_0+1} \cdot \frac{2x_1+1}{x_1+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2x_{r-1}+1}{x_{r-1}+1} \cdot \frac{d(n_0^2)}{d(n_0)} \\
&= \frac{x_1+1}{x_0+1} \cdot \frac{x_2+1}{x_1+1} \cdot \ldots \cdot \frac{x_r+1}{x_{r-1}+1} \cdot m_0 \\
&= \frac{x_r+1}{x_0+1} \cdot m_0 = \frac{2^r x_0+1}{x_0+1} \cdot m_0 \\
&= \frac{2^r\left(\left(2^r-1\right)m_0-1\right)+1}{\left(2^r-1\right)m_0} \cdot m_0 \\
&= 2^r m_0 - 1 = m.
\end{aligned}$$

* * * * * * * *

Des solutions aux problèmes 12 et 14 du 16ème AIME (voir M. et P. n° 118) m'ont été envoyées par J. LIEVENS de Liège. Je vous les soumets.

12. On considère le triangle équilatéral ABC. D, E et F sont respectivement les milieux des côtés $\overline{BC}, \overline{CA}$ et $\overline{AB}$. Il existe des points P, Q et R respectivement sur $\overline{DE}, \overline{EF}$ et $\overline{FD}$ tels que P est sur $\overline{CQ}$, Q est sur $\overline{AR}$ et R est sur $\overline{BP}$. Le rapport des aires des triangles ABC et PQR est $a + b\sqrt{c}$ où a, b et c sont des entiers et c n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier. Que vaut $a^2 + b^2 + c^2$?



Solution

Cette question ne serait qu'un banal exercice de trigonométrie si la perversion de l'énoncé (et son intérêt) n'était de demander la solution sous la forme $a + b\sqrt{c}$.

Désignons par α l'amplitude de $\widehat{DBR}$ et par β celle de $\widehat{DCP}$.

On obtient successivement les amplitudes des angles en $D(60^\circ)$, en $R(120^\circ - \alpha$ et $60^\circ + \alpha)$, de $\widehat{DPR}(60^\circ - \alpha)$, de $\widehat{ECP}(60^\circ - \beta)$, de $\widehat{CPD}(120^\circ - \beta)$.

Une rotation de 120° autour du centre du triangle ABC applique $\widehat{DBR}$ sur $\widehat{ECP}$. La condition d'existence du triangle PQR est donc

$$\alpha = 60^\circ - \beta \tag{1}$$

Il reste à calculer $|PR|$ en fonction de $|BC|$ en tenant compte de la condition (1).

1) Calcul de $|PR|$

Pour la commodité des écritures, posons $|DB| = |CD| = 1$.

Dans BDP : $\frac{|PD|}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(60^\circ - \alpha)}$, d'où

$$|PD| = \frac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)}. \tag{2}$$

Dans RDP : $\frac{|PR|}{\sin 60^\circ} = \frac{|PD|}{\sin(60^\circ + \alpha)}$, d'où

$$|PR| = \frac{\sin 60^\circ \sin\alpha}{\sin(60^\circ + \alpha)\cdot\sin(60^\circ - \alpha)}. \tag{3}$$

2) utilisation de la condition (1)

Dans CPD : $\frac{|PD|}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin(120^\circ - \beta)}$, d'où

$$|PD| = \frac{\sin\beta}{\sin(120^\circ - \beta)} = \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin(60^\circ + \alpha)}.$$

Compte tenu de (2) :

$$\frac{\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin(60^\circ+\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ-\alpha)}. \tag{4}$$

Résolvons cette équation en α, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\sin^2(60^\circ-\alpha) &= \sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)\\
-\frac{1}{2}(\cos(120^\circ-2\alpha)-\cos 0) &= -\frac{1}{2}(\cos(60^\circ+2\alpha)-\cos 60^\circ)\\
-\cos(60^\circ+2\alpha)-1 &= \cos(60^\circ+2\alpha)-\frac{1}{2}\\
\cos(60^\circ+2\alpha) &= -\frac{1}{4},\ \text{ d'où } \sin(60^\circ+2\alpha)=\frac{\sqrt{15}}{4}.
\end{aligned}$$

Il suffit de calculer α (on trouve $\alpha = 22^\circ 14' \ldots$) et de le porter dans (3), puis de faire le rapport $\frac{4}{|PR|^2}$. Mais on n'obtient pas un nombre de la forme $a+b\sqrt{c}$. Comme nous n'avons besoin que de $|PR|^2$, reprenons (3) et calculons $\sin\alpha$, $\sin(60^\circ+\alpha)$ et $\sin(60^\circ-\alpha)$.

De (4) : $$\begin{aligned}
\cos(60^\circ+2\alpha) &= -\frac{1}{4}\\
\cos(120^\circ-2\alpha) &= \frac{1}{4}\\
1+\cos(120^\circ-2\alpha) &= 2\cos^2(60^\circ-\alpha)=\frac{5}{4}\\
\cos^2(60^\circ-\alpha) &= \frac{5}{8}\\
\\
\sin^2(60^\circ-\alpha) &= \frac{3}{8}\\
\cos 2\alpha &= \cos((60^\circ+2\alpha)-60^\circ)\\
&= \cos(60^\circ+2\alpha)\cdot\cos 60^\circ\\
&\quad +\sin(60^\circ+2\alpha)\cdot\sin 60^\circ\\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{5}}{8}
\end{aligned}$$

et $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)=\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}$.

De (4) : $\sin^2(60^\circ+\alpha)=\dfrac{\sin^4(60^\circ-\alpha)}{\sin^2\alpha}=\dfrac{9}{64}\cdot\dfrac{16}{9-3\sqrt{5}}=\dfrac{9+3\sqrt{5}}{16}$.

$$\text{De (3) : } |PR|^2 = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{9-3\sqrt{5}}{16}}{\frac{9+3\sqrt{5}}{16} \cdot \frac{3}{8}} = 7 - 3\sqrt{5}.$$

Enfin,

$$\frac{|BC|^2}{|PR|^2} = \frac{4}{7-3\sqrt{5}} = 7 + 3\sqrt{5} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 83.$$

14. *Le volume d'une boîte rectangulaire $m \times n \times p$ vaut la moitié de celui d'une boîte rectangulaire $(m+2) \times (n+2) \times (p+2)$ où m, n et p sont des entiers tels que $m \leqslant n \leqslant p$. Quelle est la plus grande valeur possible de p ?*

Solution

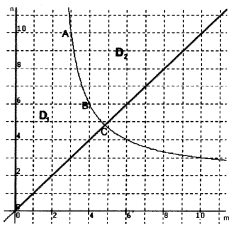
La condition est équivalente à

$$2(mn + np + pm) + 4(m + n + p) + 8 - mnp = 0$$

où

$$p = 2\,\frac{mn + 2(m+n) + 4}{mn - 2(m+n) - 4}.$$

Etudions la fonction $p(m, n)$ restreinte au domaine $m > 0$, $n > 0$ et $m \leqslant n$, c'est-à-dire au secteur D encadré en gras.



Le numérateur de p est positif ; examinons le signe du dénominateur

$$mn - 2(m+n) - 4 = 0 \text{ si et seulement si } n = 2 + \frac{8}{m-2}.$$

Le graphique de n, fonction de m, est une branche d'hyperbole dont les asymptotes sont $m = 2$ et $n = 2$. Elle comprend les points $(A(3, 10), B(4, 6)$

et $C(2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ et partage le domaine D en deux régions $D1$ et $D2$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial m} &= 2\frac{(mn-2(m+n)-4)(n+2)-(mn+2(m+n)+4)(n-2)}{(mn-2(m+n)-4)^2} \\ &= 2\ \frac{-4n(n+2)}{(mn-2(m+n)-4)^2} < 0 \ \text{ pour } n > 0.\end{aligned}$$

Pour n fixé, p est donc strictement décroissante.

Etant donnée la symétrie de p en m et n

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 2\ \frac{-4m(m+2)}{(mn-2(m+n)-4)^2} < 0 \ \text{ pour } m > 0.$$

Pour m fixé, p est donc strictement décroissante.

Pour $m = 0,\ p = 2\ \frac{2n+4}{-2n-4} = -2$; p est donc négative dans D_1 et tend vers $-\infty$ quand (m, n) tend vers un point de H dans D_1. p ne peut donc être positive que dans D_2.

Par hypothèse, m, n, p sont des nombres naturels ; restreignons D_2 à ses points d'abscisse et ordonnée naturelles, lesquels forment un quadrillage.

Le maximum de p sera obtenu en un point de ce quadrillage où on ne peut aller ni vers le bas, ni vers la gauche sans sortir de D_2. Espérons qu'en ces points p est entier. On en trouve seulement trois : $(3, 11), (4, 7)$ et $(5, 5)$. On obtient $p(3, 11) = 130,\ p(4, 7) = 54$ et $p(5, 5) = 98$. Le maximum demandé est donc 130.