

Mathématique et Pédagogie

Sommaire

• J. Navez, Éditorial	2
• R. Graas, Pour une inspection respectueuse, régulatrice et stimulante	3
• Dr. J.-L. Ayme, Le théorème d'Erdős-Mordell par la méthode des aires	4
• J. Bair, C. Villers, Bibliographie	11
• J. Ooms, Pour une autre approche de l'équation et de la fonction du 2nd degré	18
• G. Noël, Humour	24
• F. Jaquet, Le courrier des lecteurs	26
• P. Paquay, Une étude vectorielle des courbes de Bézier	28
• J. G. Segers, L'équation du troisième degré. Nouvelle(?) méthode de résolution proposée par Dirk Danckaert, Duffel	44
• C. Villers, Revue des revues	55
• C. Festraets, Des problèmes et des jeux	58
• C. Festraets, Olympiades	65

Éditorial

J. Navez,

Notre Congrès de Morlanwelz, qui était le 25ème de la SBPMef, s'est magnifiquement déroulé. Il a commencé par un moment d'émotion lorsque le souvenir de Louis SERVAIS fut évoqué par Madame MA, Messieurs COURTOIS, WILMET et WARBECQ. La présence de Madame SERVAIS, entourée par des amis de son mari, a contribué à donner à cette cérémonie une note juste et émouvante.

Les différents exposés ont eu comme d'habitude un grand succès. Le Congrès a aussi été l'occasion de se revoir ou de nouer de nouveaux contacts.

Je voudrais remercier le nouveau Ministre de l'Enseignement Secondaire, Monsieur Pierre HAZETTE, d'avoir bien voulu nous faire l'honneur d'être présent lors de la séance d'ouverture. Il a adressé des paroles réconfortantes à l'égard des enseignants, en ce sens qu'il compte bien revaloriser moralement leur fonction. Il a aussi évoqué des choses dont on n'avait plus entendu parler depuis longtemps : la discipline et la pédagogie de l'effort. J'espère que ces bonnes intentions pourront se concrétiser.

Enfin, je voudrais remercier les membres de la commission "Congrès" pour l'excellent travail de préparation qu'ils ont accompli ainsi que les responsables de l'Athénée de Morlanwelz qui ont veillé à ce que nous soyons accueillis dans les meilleures conditions.

Jacques NAVEZ

Pour une inspection respectueuse, régulatrice et stimulante

R. Graas,

L'inspection dans les écoles a pris – et depuis longtemps – mauvaise presse mais avec des motifs qui ont fort varié. Au départ, il y a eu parfois des situations (in)délicates créées par des contraintes plus ou moins camouflées (méthodes, manuels, ...), voire des incivilités.

La première règle de l'inspection doit être d'apporter une aide *pacifique* par un contrôle toujours nécessaire et des conseils non indiscrets. Les professeurs doivent être respectés, surtout devant leurs élèves.

Le contrôle – cela vient d'être rappelé – demeure indispensable. On peut se tromper de programme (ce n'est pas inventé ...) ; on peut mal appliquer le bon programme : déséquilibres dans la répartition des matières et des heures. Il y a parfois une tendance perfectionniste (excès d'abstraction), voire l'une ou l'autre manie, ou, au contraire, trop peu d'organisation. Tout cela peut se voir dans les documents (journaux de classe, cahiers, travaux, examens où une juste proportion reste à garder). Ainsi, l'inspection devient *régulatrice*.

Elle se montrera *stimulante* si l'âge, la maladie, des problèmes relationnels, engendrent quelque lassitude. Il faudra alors réveiller et propulser.

Depuis quelques années, peut-être sous l'impulsion – à coup sûr bien intentionnée – d'experts en psychologie et/ou pédagogie, on a voulu substituer à l'"inspection-contrôle" (dont on vient de décrire le statut adéquat) une sorte de rase de recyclages dont le rôle subsistera surtout au rythme actuel de la vie. Mais cela ne corrigera pas les erreurs de tir dans les classes. Parfois, des mois voire des années après, des élèves en paieront la note et personne ne sera là pour assumer la vraie responsabilité. D'incroyables cas pourraient en témoigner qui ont changé la vie si on n'a pas pu rectifier à temps ... après coup. "En toute chose, il faut considérer la fin".

Adresse de l'auteur :

Robert GRAAS

Rue de Gembloux 35

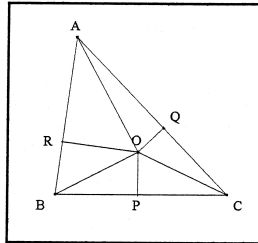
B-5002 St-Servais

Le théorème d'Erdős-Mordell par la méthode des aires

Dr. J.-L. Ayme, Lycée Lislet-Geoffroy
St-Denis-de-la-Réunion

La conjecture ⁽¹⁾ de Paul Erdős ⁽²⁾

Hypothèses
un plan géométrique
un triangle ABC non dégénéré du plan
un point O situé à l'intérieur du triangle
les projetés orthogonaux P, Q et R de O , respectivement sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$



Conjecture
$2.(OP + OQ + OR) \leq OA + OB + OC$

1. *American Mathematical Monthly*, juin-juillet 1935, problème 3740, p. 396.
2. Mathématicien hongrois.

Un point d'histoire

C'est peut-être en travaillant sur une généralisation de la relation d'Euler ⁽³⁾ que Paul Erdős a eu l'idée de cette conjecture et que le mensuel "American Mathematical Monthly" de juin-juillet 1935 l'a proposée à ses lecteurs dans la rubrique des problèmes à résoudre sous le numéro 3740. Presque deux années s'écoulèrent avant d'obtenir la première réponse. Curieusement, comme c'est souvent le cas dans le domaine de la découverte, deux mathématiciens, l'un britannique, Mordell de l'université de Manchester, l'autre américain, David Barrow de l'université de Géorgie, proposèrent chacun une solution dans le même mensuel ⁽⁴⁾ du mois d'avril 1937 ; si celle de Mordell ⁽⁵⁾ apparaissait comme une brève démonstration trigonométrique, celle de Barrow ⁽⁶⁾ se développait longuement autour de trois lemmes préliminaires avant de conclure ; ce dernier précisait au passage que l'inégalité se transformait en une égalité lorsque le triangle ABC est équilatéral et que le point O est le centre du triangle.

Dix ans plus tard, i.e. en 1945, le mathématicien russo-américain Donat Kazarinoff de l'université du Michigan proposait à son tour une nouvelle solution ⁽⁷⁾ basée sur l'idée de symétrie.

En 1953, l'allemand Toth réfléchissait sur les différentes solutions connues du théorème d'Erdős et suggérait dans son livre ⁽⁸⁾, la recherche

3. Euler Léonhard, mathématicien suisse, 1707-1783 ; le carré de la distance des centres du cercle circonscrit et inscrit à un triangle est égal au carré du rayon du cercle circonscrit diminué du double produit des rayons de ces deux cercles.

4. *American Mathematical Monthly*, avril 1937, p. 252-254.

5. Il considère la loi des cosinus et la loi des sinus dans le triangle ARQ pour calculer QR , puis décompose le radicaire en somme de deux carrés avant de la minorer, puis évalue le périmètre du triangle ABC et, enfin, minore cette somme en sachant qu'un réel strictement positif augmenté de son inverse est supérieur ou égal à deux.

6. Il commence par rappeler que si, d'un point situé hors d'une droite, on abaisse sur cette droite, une perpendiculaire et diverses obliques, alors la "perpendiculaire est plus courte que toute oblique" ; il affirme ensuite que la conjecture d'Erdős sera démontrée en remplaçant chaque perpendiculaire par la **bissectrice** intérieure des trois **angles** $\angle BOC$, $\angle COA$ et $\angle AOB$.

7. *Mathématiques*, Cours de Seconde, Delagrave, p. 113, 1991. Donat Kazarinoff commence par considérer la **bissectrice** intérieure de l'**angle** $\angle A$, puis le symétrique O' du point O par rapport à cette bissectrice, puis évalue les **aires** des triangles $O'AB$ et $O'AC$ qu'il majore d'abord et additionne ensuite pour trouver un minorant de OA ; de même, il trouve un minorant de OB et de OC , ajoute ces trois inégalités membre à membre et termine comme Mordell.

8. Toth, L.F., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Berlin, 1953, p. 12-14, 28.

d'une preuve simple et élémentaire qui pourrait être obtenue par la méthode de la géométrie synthétique.

En 1957, Donat Kazarinoff ⁽⁹⁾, revisitant sa solution, l'améliorait en se ramenant à une **situation du IV-ième siècle, la situation de Pappus**, tandis que son fils Nicolas Kazarinoff ⁽¹⁰⁾, professeur associé à l'université du Michigan et travaillant à cette période à l'institut Steklov de mathématique de l'académie des sciences à Moscou, la généralisait sous certaines conditions, à un tétraèdre.

Un an plus tard, le professeur Léon Bankoff ⁽¹¹⁾ de l'université de Los Angeles publiait la dernière solution du théorème d'Erdős.

Notons qu'à ce jour aucune généralisation ⁽¹²⁾ de ce théorème n'a été, à ma connaissance, trouvée dans le cadre d'un espace euclidien de dimension supérieure à 3.

La seconde solution de Donat Kazarinoff

A. Le théorème de Pappus d'Alexandrie ⁽¹³⁾

C'est un théorème général d'addition des parallélogrammes.

L'énoncé en est le suivant :

“si sur deux des côtés d'un triangle quelconque, on construit à l'extérieur (resp. à l'intérieur) des parallélogrammes quelconques ⁽¹⁴⁾ et si l'on prolonge, dans chacun des parallélogrammes construits sur les côtés adjacents à un sommet, les côtés opposés jusqu'à leur point de rencontre ;

9. Kazarinoff, D.K., A simple proof of the Erdős-Mordell inequality for triangles, *Michigan Math. J.*, vol. 4, 1957, p. 97-98.

10. Kazarinoff, N.D., Kazarinoff, D.K., Kazarinoff's inequality for tetrahedra, *Michigan Math. J.* vol. 4, 1957, p. 99-104.
Kazarinoff, N.D., *Geometric inequalities*, The Mathematical Association of America, 1961, p. 78-88.

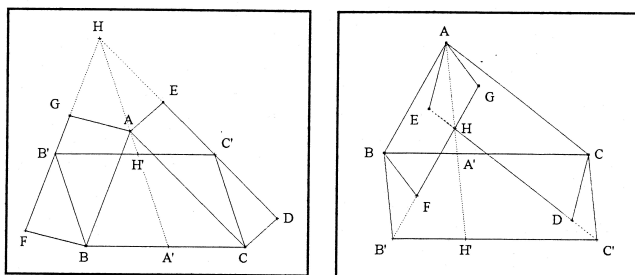
11. Bankoff, L., *American Mathematical Monthly*, volume 65, 1958, p. 521. Il considère les projetés orthogonaux Q' et R' des points Q et R sur la droite (BC) , puis s'intéresse à des triangles semblables...

12. Eggleston, H.G., A triangle inequality, *Math. Gazette*, vol. 42, 1958, p. 54-55.

13. **Mathématicien grec du IV-ième siècle, auteur de la Collection mathématique qui forme un ensemble de huit livres. C'est dans le livre IV que l'on trouve ce théorème qui apparaît comme une généralisation du théorème de Pythagore. On suppose aujourd'hui que ce résultat était connu de Héron d'Alexandrie qui vécut au I-ier siècle.**

14. Non dégénérés

si on relie ensuite le point de rencontre avec le sommet du triangle commun aux deux parallélogrammes et si, enfin, par les autres sommets du triangle, on mène deux parallèles à cette ligne de liaison, ces deux parallèles prolongées jusqu'à leur rencontre avec les côtés des deux parallélogrammes opposés aux côtés du triangle donnent deux points d'intersection tels que, si on les joint, on obtient un troisième parallélogramme, construit sur la base du triangle, qui est égal en aire à la somme des aires des deux premiers parallélogrammes”.



Démonstration dynamique ⁽¹⁵⁾

- aire ($AGFB$) = aire ($AHB'B$) = aire ($BA'H'B'$)
- aire ($ACDE$) = aire ($ACC'H$) = aire ($A'CC'H'$)
- aire ($AGFB$) + aire ($ACDE$) = aire ($BA'H'B'$) + aire ($A'CC'H'$)
= aire ($BCC'B'$).

B. L'idée de Kazarinoff

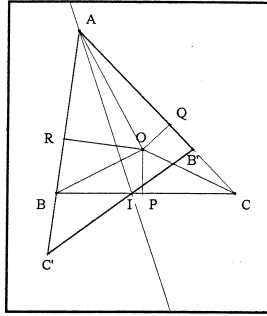
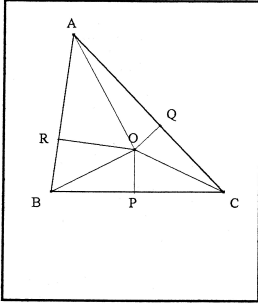
Armé des instruments de Platon ⁽¹⁶⁾, Donat Kazarinoff commence par tracer sur une feuille de papier, un triangle ABC puis, place O à l'intérieur ⁽¹⁷⁾ du triangle, ensuite, il construit la bissectrice intérieure de l'angle $\angle A$, puis de **délie** de sa démonstration de 1945, en symétrisant orthogonalement, non plus le point O , mais le triangle ABC par rapport à cette bissectrice ; enfin, et c'est là l'instant magique, il se **lie** à Pappus...

15. Elle a été initiée par le mathématicien Nasir-ed-din at-Tusi (1201-1274), lors de sa traduction en arabe des Eléments d'Euclide dans laquelle il présente une démonstration **dynamique** du théorème de Pythagore ; elle est dite dynamique car elle est basée sur l'équivalence de figures adjacentes.

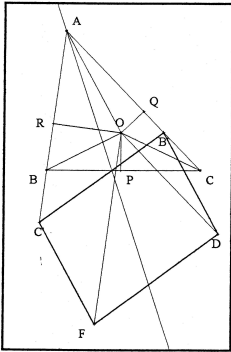
16. Philosophe grec du IV-ième siècle av. J.-C. ; il ne reconnaissait que la règle et le compas comme instrument en géométrie.

17. Notons que, dans le cas particulier où le point O est situé sur l'un des côtés du triangle, la démonstration de D. Kazarinoff devra être adaptée.

C. Démonstration



Soit $AB'C'$ l'image du triangle ABC par la symétrie orthogonale d'axe (AI)



- Construisons sur les côtés $[AB']$ et $[AC']$ du triangle $AB'C'$, les parallélogrammes $AC'FO$ et $AODB'$.

- Le quadrilatère $C'FDB'$ étant un parallélogramme, nous reconnaissons la situation de Pappus i.e.

$$\text{aire}(AC'FO) + \text{aire}(AODB') = \text{aire}(C'FDB').$$

- Posons : $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.

- L'égalité précédente conduit à l'inégalité suivante :

$$b.OR + c.OQ \leq a.OA$$

- d'où :

$$b/a.OR + c/a.OQ \leq OA \quad (1)$$

- En reprenant la même démarche avec la bissectrice intérieure de l'angle $\angle B$, puis avec celle de l'angle $\angle C$, nous obtenons les deux inégalités suivantes :

$$c/b.OP + a/b.OR \leq OB \quad (2)$$

$$a/c.OQ + b/c.OP \leq OC \quad (3)$$

- En additionnant membre à membre les inégalités (1), (2) et (3), nous avons :

$$\begin{aligned} (c/b + b/c).OP + (a/c + c/a).OQ + (b/a + a/b).OR \\ \leq OA + OB + OC \end{aligned} \quad (4)$$

- Sachant qu'un réel strictement positif augmenté de son inverse est supérieur ou égal à deux, nous obtenons par minoration du premier membre de l'inégalité (4), l'inégalité d'Erdős-Mordell

$$2.(OP + OQ + OR) \leq OA + OB + OC.$$

Conclusion

Nous venons de présenter la démonstration de Donat Kazarinoff et de rappeler au passage, les différentes démonstrations qui ont été proposées dans l'histoire de cette conjecture.

Nous noterons que les démonstrations proposées peuvent en définitive se regrouper en deux familles, la première, la plus nombreuse, procède par minoration à partir d'un terme du second membre avec la même technique de fin de calcul tandis que la deuxième qui se réduit à la seule démonstration de Barrow, procède par majoration à partir d'un terme du premier membre.

Souhaitons au terme de cet article, que des chercheurs passionnés puissent trouver d'autres solutions innovantes qui puissent enrichir le théorème d'Erdős.

Bibliographie

- [1] *Les mathématiques par les problèmes*, Akkar, Sochepress, Casablanca, 1985.
- [2] *Mathématiques*, Cours de seconde, Delagrave, 1980.
- [3] Friedelmeyer, *Repères*, n° 31.

Adresse de l'auteur :

Jean-Louis Ayme

Lycée Lislet-Geoffroy

97400 St-Denis

La Réunion

Bibliographie

J. Bair, C. Villers,

Algèbre et trigonométrie avec géométrie analytique par Swokowski et Cole, traduction et adaptation française de la 9^{ème} édition américaine sous la direction de Conchita Neet-Sarqueda, De Boeck Université, 927 pages, 1998.

Algèbre, par Swokowski et Cole, traduction et adaptation française de la 9^{ème} édition américaine sous la direction de Conchita Neet-Sarqueda, De Boeck Université, 600 pages, 1998.

De nombreux lecteurs connaissent assurément l'important et réputé livre (comprenant 1160 pages et avec une couverture de couleur noire) *Analyse* par Swokowski et publié en 1993 par la maison d'édition De Boeck Université : il a été présenté dans la revue *Mathématique et Pédagogie* n° 97 en 1994, pp. 68–69.

Le même auteur, en collaboration cette fois avec Cole, a rédigé un livre, intitulé *Algèbre et trigonométrie, avec géométrie analytique*, en suivant les mêmes principes que pour le livre d'Analyse, chez le même éditeur, avec une présentation de qualité semblable.

Les chapitres abordés sont les suivants :

1. Concepts fondamentaux de l'algèbre.
2. Equations et inéquations.
3. Fonctions et graphiques.
4. Fonctions polynomiales et rationnelles.
5. Fonctions exponentielles et fonctions logarithmes.
6. Fonctions trigonométriques.
7. Trigonométrie analytique.
8. Applications de la trigonométrie.
9. Systèmes d'équations et d'inéquations.
10. Suites, séries et probabilités.
11. Thèmes de géométrie analytique.

Un deuxième livre, intitulé simplement *Algèbre* regroupe les cinq premiers chapitres, ainsi que les chapitres 9 et 10.

Cet ouvrage se propose de conduire le lecteur dans un environnement pédagogique très soigné et en ne faisant pas appel à d'importants pré-requis,

jusqu'à des notions avancées. Chaque concept est introduit de façon intuitive et motivée avant de faire l'objet d'une présentation plus rigoureuse.

La richesse de ce livre provient assurément de ses nombreuses figures qui contribuent à réduire la difficulté intrinsèque des concepts, ainsi que les nombreux exercices d'illustration, de révision, de réflexion et d'application.

Il convient de mettre en évidence les multiples exemples tirés de la vie courante, fort variés et bien présentés, qui permettent de montrer l'utilité de la théorie et de donner du sens et de la motivation pour l'apprentissage des mathématiques.

Ce livre s'adresse à tout professeur de mathématiques puisqu'il expose, en un seul volume, une partie importante des matières de base traditionnellement enseignées ; il contient de nombreuses idées pédagogiques et constitue une véritable mine d'applications diverses et fort bien documentées. Il est également tout indiqué pour les étudiants abordant l'algèbre et la trigonométrie à la fin des études secondaires ou au premier cycle de l'enseignement supérieur.

J. BAIR

Vers l'infini pas à pas : approche heuristique de l'analyse par le groupe aha (P. Bolly, A. Chevalier, M. Citte-Vanthemsche, M. Grand'Henry-Krysinska, C. Hauchart, O. Legrand, N. Rouche, M. Schneider-Gilot) De Boeck-Wesmael, 1999, 418 pages.

L'analyse est une matière classique figurant dans tous les programmes de mathématiques générales pour l'enseignement secondaire supérieur (ainsi que l'enseignement supérieur où les mathématiques sont enseignées).

La grande originalité de ce livre très intéressant consiste en une présentation heuristique de la matière : comme l'écrivent les auteurs, *on aborde les problèmes simples avec des moyens simples et on ne complique les concepts et les théories que lorsque cela devient nécessaire pour résoudre des questions plus difficiles* (p. 411).

Les titres des chapitres sont assez révélateurs de l'esprit dans lequel a été écrit cet ouvrage :

première rencontre avec l'infini,
observer, fabriquer et combiner des fonctions,
juste frôler une courbe,
mouvements et vitesse,
rencontre entre tangente, pente et vitesse,

comportements de fonctions à l'infini et problèmes d'optimisation,
objets tournants,
phénomènes de croissance et de décroissance,
premier regard sur les aires et volumes,
le grand carrefour de l'analyse,
les suites posent de nouvelles questions,
longueur et aire, nouvelles questions,
sur quels nombres baser l'analyse ?

Tout professeur de mathématiques enseignant le début de l'analyse classique trouvera dans ce livre une foule d'idées pour motiver et présenter une matière en insistant sur son sens, pour trouver une application pertinente et frappante.

Signalons que la présentation matérielle de cet ouvrage est excellente et que des synthèses et mots clés reprennent à la fin de chaque chapitre ce qui doit être assimilé par l'élève pour le préparer à un exposé plus déductif.

J. BAIR

Espace math 56 par A. Adam et F. Lousberg, De Boeck-Wesmael, 1999, 538 pages.

Ce livre fait partie de la bien connue collection **Espace math** : il s'agit cette fois du livre destiné aux élèves de la cinquième année du secondaire et qui suivent le programme fort de mathématiques (c'est-à-dire le programme donné sur 6 périodes par semaine). Comme tous les autres ouvrages de la collection, il est conforme au programme de mathématiques au troisième cycle du secondaire, les objectifs du cours de cinquième étant de *rendre capable de découvrir, rédiger, illustrer une argumentation dans un langage précis et concis*.

L'ouvrage comporte 16 chapitres : 6 d'analyse (fonctions et graphiques, suites et nombres réels, limites et asymptotes, continuité, dérivées, applications des dérivées), 2 de trigonométrie (formules de trigonométrie, équations et inéquations trigonométriques), 5 de géométrie (géométrie dans l'espace, calcul vectoriel dans l'espace, produit scalaire, transformation du plan et de l'espace, géométrie analytique de l'espace), 2 d'algèbre linéaire (matrices et déterminants, systèmes linéaires), 1 de probabilités et statistiques.

Chaque section présente des activités d'approche permettant de dégager les notions théoriques. De plus, de multiples exercices sont offerts : il s'agit d'exercices pour appliquer, pour s'autocontrôler, pour chercher et "venus

d'ailleurs" (souvent des questions posées à des examens d'entrée dans des Facultés de Sciences Appliquées).

A signaler encore la présence, très intéressante, de "Petits bouts d'histoire" remplaçant, dans leur contexte historique, les théories exposées et présentant quelques grands mathématiciens dont les noms sont liés aux sujets abordés.

Soulignons enfin l'excellente présentation matérielle de cet ouvrage scolaire.

J. BAIR

Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques par Georges Glaeser, Bibliothèque Recherches en Didactique des Mathématiques, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, 1999, format 140 × 220, 232 pages. ⁽¹⁾

Georges GLAESER est bien connu comme mathématicien et, tout spécialement depuis plus de 30 ans, comme didacticien des mathématiques ; en 1971, il avait d'ailleurs écrit un remarquable ouvrage intitulé *Mathématiques pour l'élève-professeur* (Hermann, Paris). Aujourd'hui, il dévoile ses idées en matière d'enseignement des mathématiques dans un nouveau livre qui reprend en réalité des extraits des cours donnés pendant plusieurs années dans le cadre d'un DEA (Diplôme d'Etudes Avancées) en didactique des mathématiques à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Divers textes d'auteurs connus dans le domaine, tels que Guy BROUSSEAU, François PLUVINAGE et Guy NOEL, complètent le livre.

Comme le laisse supposer le titre, l'auteur passe en revue les principaux aspects de ce qu'il appelle *la didactique expérimentale des mathématiques*. De façon plus précise, il aborde les chapitres suivants : la mathématique et son enseignement, racines historiques de la didactique des mathématiques, une théorie des situations didactiques (processus de courte durée), une conception génétique (processus de longue durée), épistémologie et didactique.

L'ouvrage est passionnant : il contient de nombreux exemples concrets de situations pédagogiques et, par certaines prises de position personnelles,

1. NDLR : La Maison des Editions La Pensée Sauvage n'ayant pas de diffuseur en Belgique, il sera difficile de trouver le livre en librairie ; l'ouvrage est disponible aux Editions La Pensée Sauvage, BP 141, 38002 Grenoble CEDEX, contre la somme de 160 FF + 8,40 FF de port.

soulève de multiples questions ou sujets de réflexion pour un professeur de mathématiques. En guise d'exemples choisis de façon tout à fait subjective et non exhaustive, donnons quelques idées exposées au sein du texte. ⁽²⁾

Les mathématiques sont localement inutiles, mais globalement indispensables (p. 29). Pour bien les enseigner, le professeur doit être lui-même convaincu de l'importance de la pensée mathématique (p. 27) ; il s'agit d'entraîner la gymnastique de l'intelligence, de l'esprit critique, de l'imagination créatrice, de la rigueur de pensée, d'encourager la curiosité, la recherche de l'autonomie intellectuelle et de l'effort persévérant (p. 33). L'inaptitude à la lecture ne pardonne pas en mathématiques (p. 35). L'idée d'un exposé unique valable pour tous les auditoires est absurde (p. 65). Comment l'enseignant peut-il communiquer à son élève quelque chose qu'il ne doit pas recevoir, mais construire ? La situation est analogue à celle que posent les catalyseurs en chimie. Comment se fait-il qu'une substance qui ne joue en apparence qu'un rôle de figuration passive, et se retrouve inchangée lors du bilan final, puisse néanmoins influencer une réaction chimique ? (p. 90). En mathématiques, il y a peu à apprendre et beaucoup à comprendre (p. 92). La part la plus importante de la résolution d'un véritable problème consiste à deviner, à tâtonner, à renoncer à de fausses pistes dans lesquelles on s'égare, à inventer, à découvrir, ... (p. 112). Pour nous, les problèmes, les situations génératives, les situations exemplaires, la lecture de textes mathématiques sont autant d'occasions conduisant à des activités heuristiques (p. 114). Une notion abstraite est difficilement accessible si on ne dispose pas de modèles maniables (p. 171).

Ces quelques extraits, choisis parmi beaucoup d'autres possibles, ont pour objectif "d'aiguiser l'appétit" de tout professeur de mathématiques, en lui montrant que l'ouvrage aborde des questions concrètes rencontrées par l'enseignant et propose des idées le plus souvent conformes à celles développées à maintes reprises par la SBPMef (voir à ce propos le Livre blanc sur l'enseignement des mathématiques en Communauté Française de Belgique, Ed. SBPMef, 1991).

Nous recommandons vivement ce livre qui invite le lecteur à réfléchir sur la pédagogie des mathématiques et, ainsi, qui l'aide à progresser dans son propre enseignement.

J. BAIR

2. Nous remercions les Editions de la Pensée Sauvage de nous avoir accordé l'autorisation de publier quelques extraits du livre.

Les maths en mémoire par Philippe Ancia
aux éditions Van In, Louvain-la-Neuve-Lierre

272 pages, broché - Edition de 1998

Dans un avant-propos, l'auteur explique comment il a été amené à rédiger ce livre dont il faut dire d'emblée que ce n'est certainement pas un manuel "pour donner cours".

En effet, on n'y trouve pas une matière exposée systématiquement et proche d'un quelconque programme ni, non plus, des batteries d'exercices.

Par contre, et c'est certainement là un de ses mérites, l'ouvrage peut – et je dirais même devrait – accompagner tout cours de mathématiques.

Il doit retenir l'attention des enseignants de tous les niveaux qui y trouveront une source non négligeable d'informations diverses sur le plan des origines des notions et sur leur évolution au cours du temps.

Il devrait également être recommandé aux élèves pour l'éclairage à la fois technique et culturel qu'il offre de cette mathématique qu'ils perçoivent trop souvent comme uniquement réduite à des techniques et des routines peu exaltantes.

Ce livre qui n'est, de l'aveu de l'auteur "ni un roman, ni un livre d'histoire, ni un livre scolaire" est le fruit de recherches donc de découvertes sur ce qui est certainement trop souvent absent dans un enseignement de matières, à savoir des renseignements sur des faits historiques concernant les notions mathématiques essentielles.

Il peut d'ailleurs être lu comme chacun l'entend, c'est-à-dire du début à la fin ou par chapitre en commençant par n'importe lequel de ceux-ci ou encore par thème en consultant un index de mots-clés.

L'auteur a délibérément opté pour une présentation "par thèmes". Les chapitres sont indépendants les uns des autres et leurs contenus sont accessibles au plus grand nombre. Des figures, des illustrations, des reproductions de documents anciens complètent agréablement le texte.

Certes, et par la force des choses, ce livre ne présente guère de nouveautés pour les enseignants qui manipulent les notions présentées mais il sera source de découvertes pour les élèves ou pour les débutants.

Six chapitres couvrent l'essentiel des notions rencontrées dans l'enseignement secondaire. Ils sont intitulés : Les nombres (68 pages), Le calcul

(28 pages), Des branches mathématiques (20 pages), Des notions importantes (28 pages), Des mathématiciens célèbres (51 pages) et Divers (15 pages).

Ce livre, constitue, à l'évidence, une source pratique d'informations pour les enseignants désireux de compléter l'information et la formation de leurs élèves.

Il devrait figurer en bonne place dans leur bibliothèque.

Un (gros) regret ! Le prix annoncé (810 BEF) !

Claude VILLERS

Pour une autre approche de l'équation et de la fonction du 2nd degré

J. Ooms, *Professeur honoraire à l'Athénée Royal de Chimay*

La démarche algébrique esquissée ci-après ne correspond pas aux directives de l'actuel programme de mathématique pour la classe de quatrième, mais nous pensons qu'elle constitue une alternative digne d'intérêt.

Nous laissons au lecteur le soin d'en critiquer les mérites.

1. Existence et calcul des racines réelles du polynôme $ax^2 + bx + c$ à coefficients réels

Si α est une racine du polynôme $ax^2 + bx + c$, alors le polynôme est divisible par $(x - \alpha)$ et il peut s'écrire $(x - \alpha)(\beta x + \gamma)$ (avec $\beta \neq 0$), $\beta x + \gamma$ étant le quotient de la division. On découvre ainsi l'existence d'une seconde racine $-\frac{\gamma}{\beta}$.

Première conclusion :

Si le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet une racine, il admet automatiquement une seconde racine (non nécessairement distincte de la première).

Désignant les racines supposées par x_1, x_2 , on obtient alors l'égalité

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \beta$$

le facteur β étant, par raison d'identité, égal au coefficient a du polynôme.

Il vient ainsi

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (1)$$

x_1 et x_2 étant les racines supposées du polynôme. Formule qui se réduit à

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2, \quad \text{si } x_2 = x_1, \quad (2)$$

l'unique racine étant, dans ce cas, qualifiée racine double, parce qu'elle intervient deux fois dans le processus de factorisation.

Développant le second membre de la formule (1), on obtient

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

D'où, par identification des deux membres :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} & (3)_S \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a} & (4)_P \end{aligned}$$

expressions rationnelles en a, b, c de la somme et du produit des racines, obtenues avant même d'avoir calculé ces dernières.

Et les conditions (3) et (4) ne sont pas seulement nécessaires, elles sont suffisantes en ce sens que leur système suffit à déterminer les racines.

On peut alors, légitimement, essayer de calculer les racines en résolvant le système (3,4) en les inconnues x_1 et x_2 .

Ici, l'algébriste "innocent" sera tenté de résoudre le système en éliminant l'une des inconnues, x_1 par exemple, par la méthode de substitution, ce qui conduit à la résolvante

$$ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \quad !$$

résolvante qui, en l'occurrence, ne résout rien car elle nous ramène au problème posé.

A ce stade de l'analyse, il est bon d'observer que l'élimination de x_2 aurait donné la même équation (écrite en x_1)

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0.$$

Cela tient évidemment à la symétrie des équations (3) et (4) en x_1, x_2 .

Pour individualiser x_1 et x_2 , il nous faudra donc rompre cette symétrie.

La combinaison $S^2 - 4P$ donne

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2},$$

d'où

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}, \quad \text{à condition que } b^2 - 4ac \geq 0 \quad (4)$$

résultante du système (3,4), elle-même symétrique en x_1, x_2 .

Mais, ici, nous pouvons rompre la symétrie en supposant $x_1 \geq x_2$, ce qui donne

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$$

soit encore,

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \quad \text{si } a > 0.$$

Le système (3,4) est alors équivalent au système d'équations linéaires

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \tag{5}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \tag{6}$$

si $a > 0$ et $x_1 \geq x_2$.

D'où, par addition et soustraction,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si $a < 0$, alors les formules précédentes permutent entre elles et on obtient

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

si bien que la paire $\{x_1, x_2\}$ (si paire il y a) peut être définie globalement par $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dans les deux cas ($a > 0$ ou $a < 0$).

Bien entendu, a, b, c étant réels, les racines ne sont réelles que si $b^2 - 4ac \geq 0$.

Lorsque $b^2 - 4ac = 0$, la paire de racines dégénère en couple identique (x_1, x_1) avec $x_1 = -\frac{b}{2a}$, seule racine (double) de l'équation.

2. Détermination de l'extremum de la fonction $f : x \rightarrow ax^2 + bx + c$ et symétrie de la courbe représentative dans un repère O.N.

Pour obtenir l'extremum de la fonction

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c = y, \tag{7}$$

il suffit de déterminer l'image de f , c'est-à-dire le domaine de définition de f^{-1} .

Pour ce faire, on résout l'équation (7) en x :

$$ax^2 + bx + (c - y) = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a}$$

soit

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a} \quad (8)$$

qui est réel ssi $b^2 - 4ac + 4ay \geq 0$, ce qui donne $4ay \geq 4ac - b^2$ et, donc,

$$\begin{aligned} y &\geq \frac{4ac - b^2}{4a} = (\min y) && \text{si } a > 0 \\ y &\leq \frac{4ac - b^2}{4a} = (\max y) && \text{si } a < 0. \end{aligned}$$

Et on observe que l'extremum est atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$.

De plus, la formule (8) révèle que les points du graphe cartésien représentatif de la fonction f apparaissent par paires de points symétriquement disposés relativement à la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$, parallèle à l'axe des y .
(*)

3. Variations de la fonction

Enfin, une analyse de variation peut être tentée :

$$\text{si } x \mapsto x + h \quad (h > 0),$$

alors

$$ax^2 + bx + c \mapsto a(x + h)^2 + b(x + h) + c = (ax^2 + bx + c) + ah^2 + 2ahx + bh$$

c'est-à-dire que

$$y \mapsto y + h(ah + 2ax + b),$$

$h(ah + 2ax + b)$ représentant l'accroissement de y correspondant à l'accroissement h de x

$$h(ah + 2ax + b) > 0 \iff_{h>0} ah + 2ax + b > 0$$

et

$$ah + 2ax + b > 0 \iff_{\text{si } a>0} x > \frac{-b}{2a} - \frac{h}{2}$$

ce qui est vrai a fortiori si $x \geq \frac{-b}{2a}$ (h étant > 0).

La fonction est donc strictement croissante à droite de $x = -\frac{b}{2a}$ si $a > 0$ et, par raison de symétrie (cf. (*) ci-avant), strictement décroissante à gauche de $x = -\frac{b}{2a}$.

Et vice versa si $a < 0$.

4. Détermination de la tangente et du sens de la concavité

P et Q étant deux points de la courbe, d'abscisses respectives x et $x+h$, et α représentant l'angle (orienté) que fait la corde PQ avec l'axe X , le coefficient directeur de la corde PQ vaut

$$\text{tang } \alpha = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{h(ah + 2ax + b)}{h}$$

soit

$$\text{tang } \alpha = (2ax + b) + ah \quad (9)$$

dont la limite $(2ax + b)$ pour h tendant vers 0 représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe en P .

Et, selon que $a > 0$ ou que $a < 0$, la fonction (dérivée) $2ax + b$ est strictement croissante ou strictement décroissante si bien que la concavité de la courbe représentative est orientée vers les y positifs ou vers les y négatifs.

Au sommet, $x = -\frac{b}{2a}$, le coefficient directeur de la tangente $(2ax + b)$ s'annule (la tangente est donc parallèle à l'axe des x) et la formule (9) se réduit à

$$\text{tang } \alpha = ah \quad (10)$$

5. Réduction au modèle parabolique $Y = aX^2$

Si on translate le repère de telle manière que l'axe des abscisses (X) vienne coïncider avec la tangente au sommet et l'axe des ordonnées (Y) avec l'axe de symétrie de la courbe, on a, d'une part,

$$\text{tang } \alpha = aX \quad (\text{d'après (10)})$$

et, d'autre part, évidemment

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{Y}{X}$$

si bien que $\frac{Y}{X} = aX$, d'où $Y = aX^2$, forme canonique de l'équation d'une parabole !

Adresse de l'auteur :

Jean OOMS

Rue de Bourlers 22

6460 Chimay

Humour

G. Noël,

Dans l'ouvrage intitulé "Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf sieben Decimalen", publié en 1870 par C. Bruhns (Ed. Tauchnitz, Leipzig), figure un tableau de conversion vers le système métrique d'anciennes mesures de longueur :

	Unité de longueur	Mètres
Autriche	1 pied de Vienne = 12 pouces = 144 lignes	0.3161109
Baden	1 pied = 10 pouces = 100 lignes	0.3000000
Bavière	1 pied = 12 pouces = 144 lignes	0.2918592
Nurenberg	1 pied	0.3039730
Brème	1 pied	0.2893500
Brunswick	1 pied = 12 pouces = 144 lignes	0.2853624
Danemark	Le pied prussien	0.3138535
Angleterre	1 pied = 1/3 yard (imperial)= 12 pouces	0.3047945
France	1 pied (pied du Roi)	0.3248394
Francfort/Main	1 pied (Schuh)=12 pouces=144 lignes	0.2846104
Hambourg	1 pied	0.2865715
Hanovre	1 pied	0.2920947
Hesse-Cassel	1 pied normal = 11 pouces du Rhin	0.2876990
Hesse-Darmstadt	1 pied	0.2500000
Lubeck	1 pied = 12 pouces = 144 lignes	0.2876182
Mecklenburg	Le pied prussien	0.3138535
Rostock	1 pied = 11 pouces du Rhin	0.2876990
Naples	1 Paume= 10 décimes = 100 centimes	0.2645501
Nassau	1 pied (Werkmass)	0.3000000
	1 pied (Feldmass)	0.5000000
Pays-Bas	1 pied d'Amsterdam = 11 duimen et 8 Achtel	0.2831334
Portugal	1 pied = 1 1/3 paume	0.3300000
Prussie	1 pied = 12 pouces = 144 lignes	0.3138535
Rome	1 pied romain	0.2975867
Russie	1 pied anglais	0.3047945
Saxe	1 pied = 12 pouces	0.2831901
	1 pied de Leipzig = 12 pouces	0.2824975
Espagne	1 pied de Castille = 1/3 Vara = 1 1/3 paume	0.2783332
Suède	1 pied = 12 pouces (tum)	0.2969010
Suisse	1 pied de Baden	0.3000000
Wurtemberg	1 pied	0.2864903

On demande

-
-
- de déterminer la nationalité des élèves de la classe d’après la longueur de leur pied,
 - de rechercher quel est le pays dont les habitants ont le pied moyen,
 - d’étudier les données du tableau précédent en vue de donner des conseils à un marchand de chaussures qui doit renouveler son stock.

Le courrier des lecteurs

F. Jaquet,

Monsieur le Rédacteur,

En ouvrant le numéro 119 de *Mathématique et Pédagogie* (novembre-décembre 1998), j'ai découvert avec plaisir l'annonce d'un article "CIEAEM 50" dans la table des matières, sous votre signature. En tant qu'organisateur responsable de cette rencontre, j'étais bien évidemment content que votre revue y consacre un "Echo de congrès". Mais je dois dire que le plaisir a été de courte durée.

Que le niveau des exposés de la rencontre CIEAEM 50 ait été "fort inégal" est une affirmation difficilement contestable, vu qu'il y en avait près d'une centaine, présentés par autant de participants, dont vous-même, venus d'horizons fort différents. Prétendre le contraire et parler d'un niveau "égal" n'aurait d'ailleurs aucun sens car personne ne pourrait prétendre avoir entendu tous les exposés pour les juger "homogènes".

Dire que "le meilleur côtoyait... le moins bon", laisse entendre – par les trois points de suspension lourds de signification – que "le meilleur côtoyait le pire". C'est bien ce qu'il faut comprendre à la lecture des critiques que vous adressez aux deux exposés cités en exemple.

Si la CIEAEM parvient à réunir chaque année des centaines de participants : psychologues, pédagogues, didacticiens, mais surtout enseignants de tous les degrés, intéressés par l'enseignement des mathématiques, c'est parce qu'ils y trouvent l'occasion de parler de leurs problèmes communs, de présenter leurs expériences, d'exposer leurs interrogations. En cinquante ans, ces rencontres ont offert à des milliers de collègues un espace au sein duquel s'est créé un réseau d'informations professionnelles, d'échanges et d'amitiés personnelles, au bénéfice de l'amélioration de notre tâche commune.

Au sein de ce réseau, on peut trouver des opinions différentes, se sentir proche de certaines conceptions, être en désaccord avec d'autres, s'affronter dans des débats contradictoires, trouver des complémentaires, des convergences.

Mais les discussions s'y déroulent toujours selon les règles du débat scientifique et démocratique.

Or, votre article qui met en cause les auteurs de deux exposés se situe dans un contexte tout à fait différent. Vous dites éprouver des inquiétudes

et vous imaginez deux “dangers” pour l’enseignement des mathématiques. C’est votre droit, certes, mais les propos qui exposent vos craintes sont très durs et je me demande s’ils ne sont pas déformés par des interprétations personnelles ou des conceptions subjectives. Vous parlez d’affirmations “fausses et malveillantes” venant de “chercheurs-pédagogues” qui ne “connaissent pas toujours très bien les mathématiques et n’ont aucune expérience de l’enseignement de notre discipline”. Vous évoquez les “mathématiciens-didacticiens” qui “devraient tenir compte des dernières découvertes scientifiques et exploiter les technologies les plus récentes” plutôt que de se lancer dans de “vagues enquêtes sociologiques ou psychologiques”. Vos lecteurs n’ont pas d’autre information que votre point de vue sur les deux exposés et sur leurs auteurs que vous critiquez si vivement ? Même si vous concédez que vos réflexions sont “un peu provocatrices” et qu’elles “ont été rédigées à chaud”, vos abonnés n’ont pas de raison de mettre en doute les propos de leur rédacteur en chef !

La rencontre de la CIEAEM traitait des “liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques”. A vous lire, on aurait malheureusement tendance à évoquer un fossé plutôt que des liens, et à croire que “mathématique et pédagogie” ne peuvent faire bon ménage !

C’est de cette impossibilité matérielle, pour le lecteur, de se construire un jugement personnel sur les exposés critiqués que vient le déplaisir que j’ai eu à lire votre article. Cette procédure me semble aller à l’encontre des buts de la CIEAEM.

Les actes de la 50ème rencontre de la CIEAEM paraîtront prochainement ⁽¹⁾. J’espère que leur lecture, et en particulier celle des deux contributions qui suscitent vos craintes, permettront de rétablir l’équilibre et les conditions d’un réel débat à leur propos.

Veuillez agréer, Monsieur le rédacteur, mes salutations les meilleures.

François Jaquet
Neuchâtel (CH)
Organisateur de la rencontre CIEAEM 50

1. Les actes seront disponibles, dès mai 1999, au prix de souscription de CHF 25.- (CHF35.- dès juillet 1999) à l’adresse : CIEAEM 50, IRDP, C.P. 54, CH 2007 Neuchâtel 7. Internet : <http://www.unine.ch/irdp/cieaem/>

Une étude vectorielle des courbes de Bézier

P. Paquay, Université de Liège

Mots-clé : courbes de Bézier, combinaison convexe, barycentre, équation vectorielle.

1. Introduction

En 1970, Pierre Bézier, ingénieur chez Renault, a découvert une nouvelle méthode pour styliser les tôles des voitures Renault ; son but était de déterminer une courbe dans l'espace passant par deux points prédéterminés et contrôlée par un nombre arbitraire de points. Le résultat de ses recherches est une courbe “harmonieusement influencée” par les points de contrôle : les courbes de Bézier.

L'idée générale d'un problème d'interpolation est, disposant de $n + 1$ points $P_0, \dots, P_n$, de déterminer une fonction qui va passer par ces points et vérifiant certaines conditions de régularité. Un autre problème, qui est celui auquel Pierre Bézier fut confronté, serait de déterminer une courbe harmonieuse passant à proximité de ces points $P_0, \dots, P_n$.

Une courbe de Bézier est la trajectoire d'un point mobile qui part d'un point initial P_0 , évolue à proximité du contour polygonal déterminé par les points $P_1, \dots, P_{n-1}$ et s'arrête en P_n .

Nous allons maintenant nous attacher à voir que ces courbes peuvent être étudiées très facilement par le biais de la notion de combinaison convexe ; pour des raisons évidentes de simplicité, seul l'aspect courbe plane sera traité ici.

2. Quelques définitions

Définition 2.1 Une *portion de courbe* est l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{\overrightarrow{OX}(t) = (x_1(t), x_2(t)) : t \in I\}$$

où $x_i(t)$, $i = 1, 2$, est une fonction continue sur I intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Exemple 2.2 La portion de courbe paramétrisée par

$$\overrightarrow{OX}(t) = (r \cos t, r \sin t)$$

où r est fixé dans $]0, +\infty[$ et t parcourt $[0, \pi]$ est bien sûr le demi-cercle supérieur de rayon r et de centre 0.

Définition 2.3 Si $x_1, x_2 \in C_1(J)$ où J est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant I , on définit le vecteur tangent $\vec{v}$ à la courbe $\mathcal{C}$ par

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{d}{dt}x_1(t), \frac{d}{dt}x_2(t) \right)$$

où $t \in I$.

Exemple 2.4 Considérons, avec $r \in]0, +\infty[$,

$$\mathcal{C} = \{\overrightarrow{OX}(t) = (r \cos t, r \sin t) : t \in [0, \pi]\};$$

le vecteur tangent $\vec{v}$ à la courbe $\mathcal{C}$ est

$$\vec{v}(t) = (-r \sin t, r \cos t).$$

Définition 2.5 Soient n points $A_1, \dots, A_n$. On définit une t -combinaison convexe $\gamma_t(A_1, \dots, A_n)$ par le vecteur

$$\gamma_t(A_1, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \overrightarrow{OA_i}$$

avec $t \in [0, 1]$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) = 1$.

Remarque 2.6 Une t -combinaison convexe est parfois appelée *barycentre* par certains auteurs; voir [2].

Exemple 2.7 Examinons le cas particulier d'une t -combinaison convexe de deux points A et B , cas qui nous intéressera particulièrement par la suite; on a

$$\gamma_t(A, B) = (1 - t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

où $t \in [0, 1]$.

La figure ci-dessous nous montre le cas d'une $\frac{1}{2}$ -combinaison convexe de deux points A et B , il est clair que, dans ce cas, le point trouvé correspond au milieu du segment $[A, B]$.

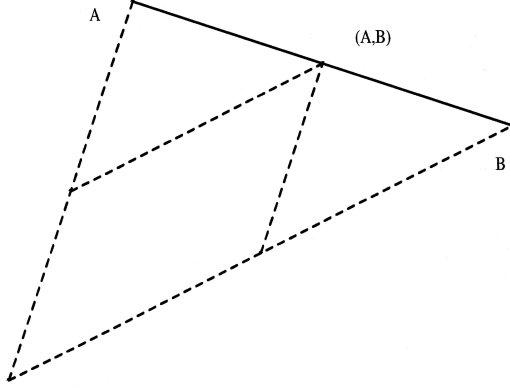


Figure 1

Plus généralement, les points $\gamma_t(A, B)$, décrivent le segment $[A, B]$ lorsque t parcourt $[0, 1]$.

Illustrons encore cette notion en construisant une t -combinaison convexe particulière de trois points A , B et C . Cherchons tout d'abord le point D tel que

$$\overrightarrow{OD} = (1 - t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB},$$

puis le point E défini par

$$\overrightarrow{OE} = (1 - t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$$

et enfin le point M tel que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= (1 - t)\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OE} \\ &= (1 - t)^2\overrightarrow{OA} + 2t(1 - t)\overrightarrow{OB} + t^2\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

Le point M est bien sûr une combinaison convexe des points A, B, C ; il appartient visiblement à l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{A, B, C\}$.

La figure suivante illustre le cas où $t = 1/4$.

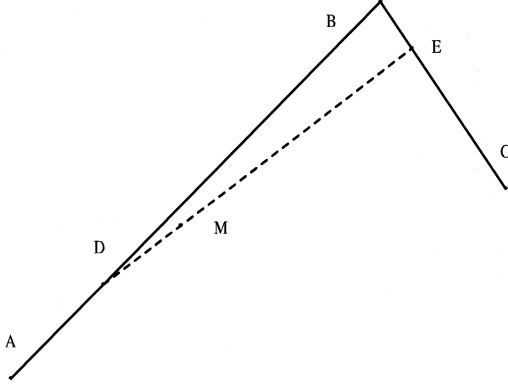


Figure 2

3. Construction des équations paramétriques d'une courbe de Bézier

Considérons $n + 1$ points de contrôle non tous alignés,

$$M_0^0, M_1^0, \dots, M_n^0.$$

Notre but est de trouver une courbe

$$\mathcal{C} = \{\overrightarrow{OX}(t) : t \in [0, 1]\}$$

avec $\overrightarrow{OX}(0) = \overrightarrow{OM}_0^0$ et $\overrightarrow{OX}(1) = \overrightarrow{OM}_n^0$.

Chaque couple de points (M_{i-1}^0, M_i^0) , $i = 1, \dots, n$, fournit une t -combinaison convexe $\overrightarrow{OM}_i^1$, définie par

$$\overrightarrow{OM}_i^1 = (1-t)\overrightarrow{OM}_{i-1}^0 + t\overrightarrow{OM}_i^0,$$

chaque couple de points (M_{i-1}^1, M_i^1) , $i = 2, \dots, n$, fournit aussi une t -combinaison convexe $\overrightarrow{OM}_i^2$ définie par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}_i^2 &= (1-t)\overrightarrow{OM}_{i-1}^1 + t\overrightarrow{OM}_i^1 \\ &= (1-t)^2\overrightarrow{OM}_{i-2}^0 + 2t(1-t)\overrightarrow{OM}_{i-1}^0 + t^2\overrightarrow{OM}_i^0. \end{aligned}$$

Il est alors possible, voir annexe, d'itérer le processus de construction, pour $k = 3, \dots, n$; on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_i^k} &= (1-t)\overrightarrow{OM_{i-1}^{k-1}} + t\overrightarrow{OM_i^{k-1}} \\ &= \sum_{j=i-p}^k B_k^{j-i+p}(t)\overrightarrow{OM_j^0}\end{aligned}$$

où

$$B_i^j(t) = C_i^j(1-t)^{i-j}t^j$$

et où $i = k, \dots, n$. Et ce jusqu'à l'obtention, de proche en proche, du point final M_n^n défini par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_n^n} &= (1-t)\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-1}} + t\overrightarrow{OM_n^{n-1}} \\ &= \sum_{k=0}^n B_n^k(t)\overrightarrow{OM_k^0}\end{aligned}$$

La courbe de Bézier est alors définie comme étant la trajectoire du point $M_n^n(t)$ lorsque t varie dans $[0, 1]$.

Nous sommes maintenant prêts à écrire les équations paramétriques de la courbe de Bézier $\mathcal{C}_B$. On a

$$\mathcal{C}_B = \left\{ \left(\sum_{k=0}^n B_n^k(t)x_1^k, \sum_{k=0}^n B_n^k(t)x_2^k \right) : t \in [0, 1] \right\}$$

avec

$$M_k^0 = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix}$$

où $k = 0, \dots, n$.

Etudions à présent les points de départ et d'arrivée de la courbe de Bézier. En $t = 0$, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_n^n}(0) &= \sum_{k=0}^n B_n^k(0)\overrightarrow{OM_k^0} \\ &= C_n^0\overrightarrow{OM_0^0} \\ &= \overrightarrow{OM_0^0},\end{aligned}$$

et en $t = 1$, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_n^t}(1) &= \sum_{k=0}^n B_n^k(1) \overrightarrow{OM_k^0} \\ &= C_n^n \overrightarrow{OM_n^0} \\ &= \overrightarrow{OM_n^0}.\end{aligned}$$

On constate donc bien que la courbe part du point M_0^0 pour se terminer en M_n^n lorsque t varie de 0 à 1.

4. Propriétés des tangentes aux courbes de Bézier

On a,

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\overrightarrow{OM_n^t}(t)}{dt} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{dB_n^k(t)}{dt} \overrightarrow{OM_k^0}.\end{aligned}$$

Or, en général, pour $t \neq 0, 1$,

$$\begin{aligned}\frac{dB_n^k(t)}{dt} &= C_n^k [-(n-k)(1-t)^{n-k-1}t^k + k(1-t)^{n-k}t^{k-1}] \\ &= C_n^k (1-t)^{n-k-1}t^{k-1} [-(n-k)t + k(1-t)] \\ &= (k-nt)C_n^k (1-t)^{n-k-1}t^{k-1},\end{aligned}$$

ainsi,

$$\vec{v}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(k-nt)}{t(1-t)} B_n^k(t) \overrightarrow{OM_k^0}.$$

Tandis qu'aux extrémités, on a, en $t = 0$,

$$\frac{dB_n^0(0)}{dt} = -n,$$

$$\frac{dB_n^1(0)}{dt} = n$$

et

$$\frac{dB_n^k(0)}{dt} = 0$$

pour $k = 2, \dots, n$. Cela étant, on a

$$\begin{aligned}\vec{v}(0) &= -n\overrightarrow{OM_0^0} + n\overrightarrow{OM_1^0} \\ &= n\overrightarrow{M_0^0M_1^0}.\end{aligned}$$

En $t = 1$,

$$\frac{dB_n^k(1)}{dt} = 0$$

pour $k = 0, \dots, n-2$,

$$\frac{dB_n^{n-1}(1)}{dt} = -n$$

et

$$\frac{dB_n^n(1)}{dt} = n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{v}(1) &= -n\overrightarrow{OM_{n-1}^0} + n\overrightarrow{OM_n^0} \\ &= n\overrightarrow{M_{n-1}^0M_n^0}.\end{aligned}$$

Nous voyons donc clairement que la courbe de Bézier est tangente au premier et dernier segments du contour déterminé par les points de contrôle aux extrémités.

Pour ce qui est de la tangente au point courant, il est possible de montrer (voir annexe) que la courbe est tangente au dernier segment formé par les avant-derniers points donnés par les t -combinaisons convexes.

5. Nature de la courbe

Il serait intéressant de déterminer la nature de la courbe. Nous allons voir qu'une courbe de Bézier à trois points de contrôle est un arc de parabole. Nous nous limitons ici volontairement à trois points de contrôle par souci de simplicité dans les développements.

Plaçons l'origine du repère en M_0^0 ; l'équation vectorielle de la courbe de Bézier prend alors la forme suivante,

$$\overrightarrow{OM_2^0}(t) = 2t(1-t)\overrightarrow{OM_1^0} + t^2\overrightarrow{OM_2^0},$$

nous en déduisons immédiatement les équations paramétriques de la courbe,

$$\begin{cases} x = 2t(1-t)x_1 + t^2x_2 \\ y = 2t(1-t)y_1 + t^2y_2 \end{cases},$$

avec

$$M_1^0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2^0 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Ces équations sont bien sûr de la forme

$$\begin{cases} x = a_1t^2 + b_1t \\ y = a_2t^2 + b_2t \end{cases},$$

avec $a_1 = x_2 - 2x_1$, $a_2 = y_2 - 2y_1$, $b_1 = 2x_1$ et $b_2 = 2y_1$. Remarquons que a_1 et a_2 ne peuvent être simultanément nuls, sinon

$$x_2 = 2x_1 \quad \text{et} \quad y_2 = 2y_1$$

et ainsi

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$$

et les points M_0^0 , M_1^0 et M_2^0 seraient alignés.

Divisons notre discussion en deux cas.

i) Si $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$, on a

$$y = \frac{a_2}{b_1^2}x^2 + \frac{b_2}{b_1}x \quad \text{ou} \quad x = \frac{a_1}{b_2^2}y^2 + \frac{b_1}{b_2}y,$$

dans ce cas, la courbe est bien une parabole d'axe Oy ou d'axe Ox .

ii) Si $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$, pour trouver les équations paramétriques de la courbe de Bézier, il suffit d'éliminer la paramètre t . Or, nous savons que

$$\begin{aligned} y - \frac{a_2}{a_1}x &= \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1}t \\ &= mt, \end{aligned}$$

avec $m = a_1b_2 - a_2b_1/a_1$; cela étant,

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 2y_1x_2 + 2x_1y_2$$

n'est pas nul puisque les points M_0^0, M_1^0, M_2^0 ne sont pas alignés.

En éliminant le paramètre t dans les équations paramétriques, on obtiendra l'équation cartésienne

$$x = a_1 \frac{(y - \frac{a_2}{a_1}x)^2}{m^2} + b_1 \frac{(y - \frac{a_2}{a_1}x)}{m}$$

$$\Leftrightarrow m^2x = a_1(y - \frac{a_2}{a_1}x)^2 + b_1m(y - \frac{a_2}{a_1}x)$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)^2x = a_1(a_1y - a_2x)^2 + b_1(a_1b_2 - a_2b_1)(a_1y - a_2x)$$

$$\Leftrightarrow (a_2x - a_1y)^2 - (b_2x - b_1y)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

qui est bien l'équation d'une parabole dont l'axe est donné par

$$y = \frac{a_2}{a_1}x.$$

Voici pour terminer quelques exemples typiques de courbes de Bézier.

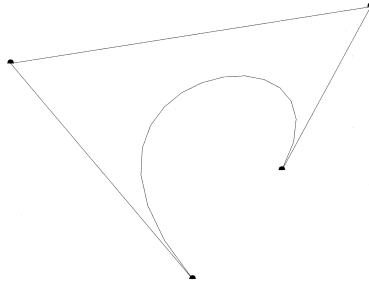


Figure 3

Dans les deux figures suivantes, nous avons alterné la hauteur des points de contrôle dans le but de “tordre” la courbe de Bézier.

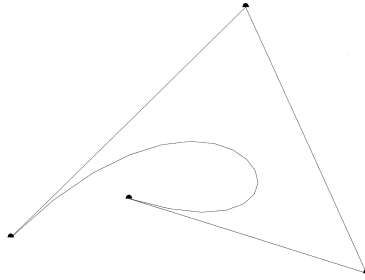


Figure 4

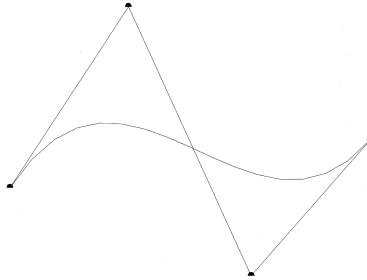


Figure 5

Remarque 5.1 *i)* La courbe est soumise à l'influence de tous les points de contrôle, la modification d'un seul de ces points entraîne la modification de toute la courbe.

ii) Pour renforcer l'influence d'un point de contrôle, il suffit de prendre en ce point plusieurs points de contrôle confondus.

La figure suivante montre le tracé d'une courbe de Bézier à trois points de contrôle.

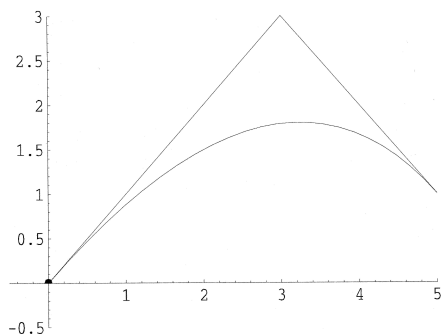


Figure 6

Dans la figure suivante nous renforçons l'influence du deuxième point de contrôle en prenant deux points de contrôle confondus en ces coordonnées.

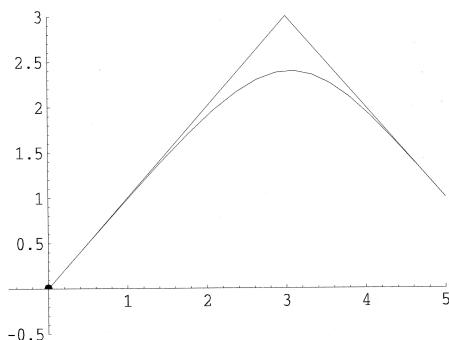


Figure 7

6. Utilisation des courbes de Bézier

Bien que les courbes de Bézier sont encore très utilisées dans la mise au point du design des carrosseries de voiture, c'est dans l'industrie informatique qu'elles ont gagné leurs lettres de noblesse.

Elles sont en effet la clé de voûte du codage "PostScript" utilisé dans les arts graphiques et qu'on emploie aujourd'hui pour coder vectoriellement

les caractères, les symboles, les logos et même certains schémas. Il est ainsi très facile de les reproduire sur papier dans une taille arbitraire.

A titre d'exemple, la figure ci-dessous montre la lettre 'C' représentée à l'aide de quatre courbes de Bézier.

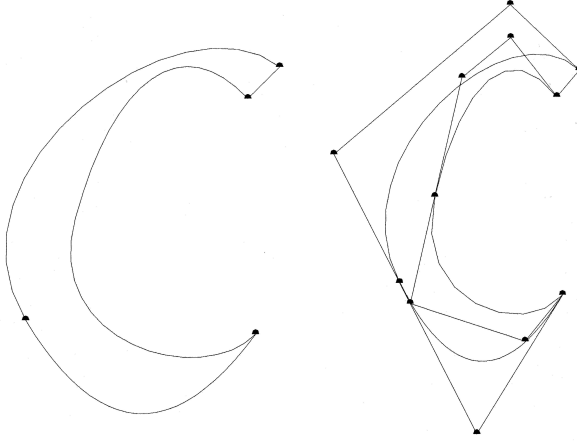


Figure 8

7. Annexe

Proposition 7.1 *Pour tout $p = 0, \dots, n$ et $i = p, \dots, n$, on a*

$$\overrightarrow{OM_i^p} = \sum_{k=i-p}^i B_p^{k-i+p}(t) \overrightarrow{OM_k^0}$$

où

$$B_i^k(t) = C_i^k(1-t)^{i-k}t^k \quad (i \geq k).$$

Démonstration. Procédons par récurrence.

a) Si $p = 0$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=i}^i B_0^{k-i}(t) \overrightarrow{OM_k^0} &= B_0^0(t) \overrightarrow{OM_i^0} \\ &= \overrightarrow{OM_i^0}.\end{aligned}$$

b) Soit p quelconque entre 1 et n ; supposons le résultat vrai pour $p-1$, $p=1, \dots, n$ et montrons qu'il le reste pour $p+1$. On a, pour $i=p, \dots, n$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_i^p} &= (1-t) \overrightarrow{OM_{i-1}^{p-1}} + t \overrightarrow{OM_i^{p-1}} \\ &= (1-t) \sum_{k=i-p}^{i-1} B_{p-1}^{k-i+p}(t) \overrightarrow{OM_k^0} + t \sum_{k=i-p+1}^i B_{p-1}^{k-i+p-1}(t) \overrightarrow{OM_k^0} \\ &= (1-t) B_{p-1}^0(t) \overrightarrow{OM_{i-p}^0} \\ &\quad + \sum_{k=i-p+1}^{i-1} [(1-t) B_{p-1}^{k-i+p}(t) + t B_{p-1}^{k-i+p-1}(t)] \overrightarrow{OM_k^0} \\ &\quad + t B_{p-1}^{p-1}(t) \overrightarrow{OM_i^0}.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}(1-t) B_{p-1}^0(t) &= (1-t) C_{p-1}^0 (1-t)^{p-1} t^0 \\ &= C_p^0 (1-t)^p \\ &= B_p^0(t),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}t B_{p-1}^{p-1}(t) &= t C_{p-1}^{p-1} (1-t)^0 t^{p-1} \\ &= C_p^p t^p \\ &= B_p^p(t).\end{aligned}$$

Posons

$$\vec{u} = [(1-t) B_q^{m+1}(t) + t B_q^m(t)] \overrightarrow{OM_k^0},$$

où $m \leq q$. Il vient alors,

$$\begin{aligned}\alpha &= [(1-t) B_q^{m+1}(t) + t B_q^m(t)] \\ &= (C_q^{m+1} + C_q^m) (1-t)^{q-m} t^{m+1} \\ &= C_{q+1}^{m+1} (1-t)^{q-m} t^{m+1} \\ &= B_{q+1}^{m+1}(t),\end{aligned}$$

ainsi,

$$\vec{u} = B_{q+1}^{m+1}(t) \overrightarrow{OM_k^0}.$$

Au total, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_i^p} &= B_p^0(t) \overrightarrow{OM_{i-p}^0} + \sum_{k=i-p+1}^{i-1} B_p^{k-i+p}(t) \overrightarrow{OM_k^0} + B_p^p(t) \overrightarrow{OM_i^0} \\ &= \sum_{k=i-p}^i B_p^{k-i+p}(t) \overrightarrow{OM_k^0}, \end{aligned}$$

ce qui suffit.

Proposition 7.2 *Si $\vec{v}(t)$ est le vecteur tangent au point courant $M_n^n(t)$, on a*

$$\vec{v}(t) = n \overrightarrow{M_{n-1}^{n-1} M_n^{n-1}}.$$

Démonstration. On a

$$\overrightarrow{OM_n^n} = (1-t) \overrightarrow{OM_{n-1}^{n-1}} + t \overrightarrow{OM_n^{n-1}}.$$

Ainsi, en dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM_n^n}}{dt} &= -\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-1}} + \overrightarrow{OM_n^{n-1}} + (1-t) \frac{d\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-1}}}{dt} + t \frac{d\overrightarrow{OM_n^{n-1}}}{dt} \\ &= \overrightarrow{M_{n-1}^{n-1} M_n^{n-1}} + (1-t) \frac{d\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-1}}}{dt} + t \frac{d\overrightarrow{OM_n^{n-1}}}{dt}. \end{aligned}$$

Or, nous savons que

$$\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-1}} = (1-t) \overrightarrow{OM_{n-2}^{n-2}} + t \overrightarrow{OM_{n-1}^{n-2}}$$

et

$$\overrightarrow{OM_n^{n-1}} = (1-t) \overrightarrow{OM_{n-1}^{n-2}} + t \overrightarrow{OM_n^{n-2}}.$$

Cela étant, on obtient

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \overrightarrow{M_{n-1}^{n-1}M_n^{n-1}} + (1-t)[- \overrightarrow{OM_{n-2}^{n-2}} + \overrightarrow{OM_{n-1}^{n-2}} + (1-t)\frac{d\overrightarrow{OM_{n-2}^{n-2}}}{dt} + t\frac{d\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-2}}}{dt}] \\
&+ t[- \overrightarrow{OM_{n-1}^{n-2}} + \overrightarrow{OM_n^{n-2}} + (1-t)\frac{d\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-2}}}{dt} + t\frac{d\overrightarrow{OM_n^{n-2}}}{dt}] \\
&= \overrightarrow{M_{n-1}^{n-1}M_n^{n-1}} + 2t(1-t)\frac{d\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-2}}}{dt} + (1-t)^2\frac{d\overrightarrow{OM_{n-2}^{n-2}}}{dt} + t^2\frac{d\overrightarrow{OM_n^{n-2}}}{dt} \\
&- (1-t)\overrightarrow{OM_{n-2}^{n-2}} - t\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-2}} + \overrightarrow{OM_n^{n-2}} + (1-t)\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-2}} \\
&= \overrightarrow{M_{n-1}^{n-1}M_n^{n-1}} + 2t(1-t)\frac{d\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-2}}}{dt} + (1-t)^2\frac{d\overrightarrow{OM_{n-2}^{n-2}}}{dt} + t^2\frac{d\overrightarrow{OM_n^{n-2}}}{dt} \\
&- \overrightarrow{OM_{n-1}^{n-1}} + \overrightarrow{OM_n^{n-1}} \\
&= 2\overrightarrow{M_{n-1}^{n-1}M_n^{n-1}} + \sum_{i=n-2}^n B_2^{-n+2+i}(t)\frac{d\overrightarrow{OM_i^{n-2}}}{dt}.
\end{aligned}$$

Exprimons à présent le vecteur $\overrightarrow{OM_i^{n-2}}$, $i = n-2, \dots, n$, à l'aide du vecteur $\overrightarrow{OM_i^{n-3}}$, nous obtenons après dérivation,

$$\vec{v}(t) = 3\overrightarrow{M_{n-1}^{n-1}M_n^{n-1}} + \sum_{i=n-3}^n B_3^{-n+3+i}(t)\frac{d\overrightarrow{OM_i^{n-3}}}{dt},$$

il suffit alors d'itérer ce processus jusqu'aux vecteurs $\overrightarrow{OM_i^0}$, $i = 0, \dots, n$ pour obtenir que

$$\vec{v}(t) = n\overrightarrow{M_{n-1}^{n-1}M_n^{n-1}},$$

puisque les dérivées

$$\frac{d\overrightarrow{OM_i^0}}{dt}$$

s'annulent.

Bibliographie

- [1] M-Y. Bachmann, H. Cottin, P. Epiney, F. Haeberli, G. Jenny, *Méthodes numériques*, Ed. du Tricornet, Genève, 1992.

-
-
- [2] Y. Haubry, *Présentation des courbes de Bézier*, Bulletin de l'APMEP, 390, Sept. 93, pp. 417-433.
- [3] P. Laubin, *Analyse numérique*, cours de candidature en sciences mathématiques, Université de Liège, 1993.

Pierre Paquay

Faculté d'Economie, de Gestion, de Sciences sociales
Bld. du Rectorat, 7, Bat. B31
4000, Liège

L'équation du troisième degré. Nouvelle(?) méthode de résolution proposée par Dirk Danckaert, Duffel

J. G. Segers,

On donne l'équation du troisième degré

$$\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x + \delta = 0, \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0. \quad (1)$$

On pose

$$P = \alpha\gamma - \beta^2 \quad ; \quad Q = \beta\gamma - \alpha\delta \quad ; \quad R = \beta\delta - \gamma^2 ;$$

ce sont les déterminants des mineurs de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

On pose aussi

$$\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

c'est une des trois racines cubiques de l'unité, dont les deux autres sont $\omega^2 = \omega^*$, la conjuguée complexe de ω , et $\omega^3 = \omega^0 = 1$.

1) Le cas $P = 0$ est trivial :

si on pose

$$\beta = \alpha\lambda,$$

alors $P = 0$ implique

$$\gamma = \alpha\lambda^2,$$

et l'équation devient

$$\alpha(x^3 + 3\lambda x^2 + 3\lambda^2 x) + \delta = 0,$$

ou

$$\alpha(x^3 + 3\lambda x^2 + 3\lambda^2 x + \lambda^3) = \alpha\lambda^3 - \delta,$$

ou encore

$$\alpha(x + \lambda)^3 = \alpha\lambda^3 - \delta.$$

La solution est triviale ; une racine est réelle ($n = 0$), les deux autres sont conjuguées complexes ($n = 1$ et $n = 2$) :

$$x_n = -\lambda + \omega^n \sqrt[3]{\lambda^3 - \frac{\delta}{\alpha}}, \quad \text{pour } n = 0, 1, 2.$$

Si le radicand est nul, les trois racines se réduisent à une racine triple réelle.

Exemple 1 : $x^3 + 6x^2 + 12x - 8 = 0$. Les coefficients sont 1, 2, 4, -8 . $P = 0$, $\lambda = 2$, radicand $= \lambda^3 - \frac{\delta}{\alpha} = 16$. $x_0 = 0,52$, $x_1 = -3,26 + 2,18i$, $x_2 = -3,26 - 2,18i$.

$P = 0$, radicand > 0 , 1 racine réelle, 2 racines complexes conjuguées.

Exemple 2 : $x^3 + 9x^2 + 27x + 72 = 0$. Coefficients 1, 3, 9, 72. $P = 0$, $\lambda = 3$, radicand $= -45$, $\chi_0 = -6,56$, $\chi_1 = -1,22 - 3,08i$, $\chi_2 = -1,22 + 3,08i$.

$P = 0$, radicand < 0 , 1 racine réelle, 2 racines complexes conjuguées.

Exemple 3 : $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$. Coefficients 1, -2 , 4, -8 . $P = 0$, $\lambda = -2$, radicand $= 0$, $\chi_0 = \chi_1 = \chi_2 = 2$.

$P = 0$, radicand $= 0$, une racine réelle triple.

2) Cas général $P \neq 0$

Soient a et b les racines de l'équation suivante que nous appellerons **résolvante**

$$Px^2 - Qx + R = 0.$$

Le discriminant Δ de cette équation est appelé le **discriminant cubique** de l'équation (1) donnée. Nous aurons

$$\Delta = Q^2 - 4PR = (\beta\gamma - \alpha\delta)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(\beta\delta - \gamma^2).$$

Constatons que ce discriminant est du quatrième degré par rapport aux coefficients de l'équation (1) qui est du troisième degré. Nous distinguerons les cas

$$\Delta = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \neq 0.$$

Jusqu'à présent, ces différentes définitions n'ont pas été justifiées. Voici comment nous proposons la résolution de l'équation donnée dans le cas général.

Posons

$$\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x + \delta = A(x-a)^3 - B(x-b)^3 \quad (\alpha \neq 0) \quad (2)$$

où a, b, A, B sont des grandeurs inconnues à déterminer. Si dans un premier temps, nous supposons avoir trouvé leurs valeurs, la solution de l'équation donnée se présentera comme suit. Etant donné qu'il faudra extraire les racines cubiques des nombres A et B , définissons S, T par

$$A = S^3, \quad B = T^3 ;$$

si A, B sont réels, on choisira S, T réels ; si A, B sont conjugués complexes, on choisira S, T conjugués complexes aussi. De cette façon, on aura successivement

$$\begin{aligned} A(x-a)^3 - B(x-b)^3 &= 0, \\ A(x-a)^3 &= B(x-b)^3, \end{aligned}$$

où A, B peuvent éventuellement être simplifiés s'ils présentent un facteur ou un diviseur commun ;

$$\begin{aligned} \omega^p S(x-a) &= \omega^q T(x-b), \\ (\omega^p S - \omega^q T)x &= a\omega^p S - b\omega^q T, \end{aligned}$$

$$x = \frac{a\omega^p S - b\omega^q T}{\omega^p S - \omega^q T}, \quad (3)$$

à condition que le dénominateur diffère de 0 et où p, q sont des naturels quelconques. Vu la nature de ω , seuls trois couples d'exposants donnent des résultats distincts, (0,0), (1,2) et (2,1) par exemple, auxquels on peut ramener tous les autres couples (p, q) , puisqu'on peut multiplier numérateur et dénominateur de la fraction par une puissance quelconque de ω , sans changer la valeur de la fraction.

Attaquons-nous au calcul des quatre grandeurs a, b, A, B définies en (2). Pour cela, nous identifions les coefficients des puissances consécutives de x . Nous obtenons un système très symétrique

$$\begin{cases} A - B &= \alpha & (E1) \\ Aa - Bb &= -\beta & (E2) \\ Aa^2 - Bb^2 &= \gamma & (E3) \\ Aa^3 - Bb^3 &= -\delta & (E4) \end{cases}$$

Vu les identités

$$\begin{cases} (Aa - Bb)(a + b) &= (Aa^2 - Bb^2) + (A - B)ab \\ (Aa^2 - Bb^2)(a + b) &= (Aa^3 - Bb^3) + (Aa - Bb)ab \end{cases}$$

le système $E1$ à $E4$ permet d'écrire les équations

$$\begin{cases} -\beta(a + b) &= \gamma + \alpha ab \\ \gamma(a + b) &= -\delta - \beta ab \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \alpha ab + \beta(a + b) + \gamma &= 0 & (E3') \\ \beta ab + \gamma(a + b) + \delta &= 0 & (E4') \end{cases}$$

En substituant dans $E3'$ les valeurs de α et β déterminées par $E1$ et $E2$, on retrouve $E3$, et de la même manière, retrouve-t-on $E4$ à partir de $E4'$ en substituant β et γ . On peut donc dans le système $E1-4$ remplacer les deux dernières équations par $E3'$ et $E4'$. Ces deux équations forment un système linéaire pour les inconnues ab et $a + b$, dont le déterminant est P , par hypothèse non nul. On a donc

$$\begin{cases} ab &= \frac{\beta\delta - \gamma^2}{\alpha\gamma - \beta^2} = \frac{R}{P} \\ a + b &= \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha\gamma - \beta^2} = \frac{Q}{P} \end{cases}$$

ce qui implique que les inconnues a, b sont les racines de l'équation du second degré déjà mentionnée

$$Px^2 - Qx + R = 0 \quad (\text{équation résolvante})$$

avec, pour discriminant, le discriminant cubique de l'équation (1) donnée. Il faut donc distinguer les cas $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, et $\Delta < 0$.

Si $\Delta \neq 0$, les équations $E1, E2$ forment un système linéaire avec le déterminant $(a - b) \neq 0$, dont la solution est

$$A = \frac{\alpha b + \beta}{b - a} \quad B = \frac{\alpha a + \beta}{b - a}. \quad (4)$$

Les valeurs trouvées ainsi pour a, b, A, B satisferont à la proposition de solution (2). D'après la remarque faite sur A et B après (2), ces grandeurs peuvent entre autres être débarassées de leur dénominateur commun.

2a) $\Delta > 0$

Le discriminant de la résolvante étant positif, ses solutions a, b sont réelles, A, B également, et une de leurs racines cubiques S, T aussi. Si l'on n'introduit pas ω dans la solution (3), la solution x_0 est réelle. En introduisant les deux solutions comprenant ω , on obtient deux racines conjuguées complexes x_1 et x_2 .

Exemple 4 : $8x^3 + 30x^2 + 24x + 10 = 0$, coefficients 8, 10, 8, 10. $\Delta = 5184$.
 $a = -1, b = 1, A = 18, B = 2, S = 2,6207, T = 1,2599, x_0 = -2,85,$
 $x_1 = -0,45 + 0,49i, x_2 = -0,45 - 0,49i$.
 $\Delta > 0$, 1 racine réelle, 2 racines complexes conjuguées.

2b) $\Delta < 0$

La résolvante, ayant un discriminant négatif, aura des racines a, b conjuguées complexes; A, B ne le sont pas, sinon leur différence serait imaginaire, alors qu'elle vaut α , qui est réel (E1). Mais il suffit de multiplier A, B par leur dénominateur imaginaire commun $(b - a)$ pour qu'ils deviennent conjugués complexes. Cette opération légitime faite, on peut calculer leurs racines cubiques S, T de manière qu'ils le soient aussi. La formule (3) suggère d'écrire toutes ces grandeurs sous forme trigonométrique : si $a = a_r + ia_i$, le module de a est ρ avec $\rho^2 = a_r^2 + a_i^2$, et l'argument est, si $a_r > 0$, $\varphi = \arctg(a_i/a_r)$, mais si $a_r < 0$, $\varphi = \arctg(a_i/a_r) + \pi$; si $a_r = 0$, on a $\varphi = \pi$ pour $a_i > 0$ et $\varphi = -\pi$ si $a_i < 0$. En résumé,

$$\begin{aligned} a &= \rho e^{i\varphi} & , & \quad b = \rho e^{-i\varphi} \\ A &= \rho_2 e^{i\theta} & , & \quad B = \rho_2 e^{-i\theta} \\ S &= \rho_3 e^{i\psi} & , & \quad T = \rho_3 e^{-i\psi} \\ \omega &= e^{\frac{2\pi i}{3}} & , & \quad \omega^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}. \end{aligned}$$

En introduisant ces grandeurs dans la formule (3), on aura

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{aS - bT}{S - T} = \frac{\rho\rho_3 e^{i(\varphi+\psi)} - \rho\rho_3 e^{-i(\varphi+\psi)}}{\rho_3 e^{i\psi} - \rho_3 e^{-i\psi}} \\
&= \rho \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin \psi} \\
x_1 &= \frac{a\omega S - b\omega^2 T}{\omega S - \omega^2 T} = \frac{\rho\rho_3 e^{i(\varphi+\psi+2\pi/3)} - \rho\rho_3 e^{-i(\varphi+\psi+2\pi/3)}}{\rho_3 e^{i(\psi+2\pi/3)} - \rho_3 e^{-i(\psi+2\pi/3)}} \\
&= \rho \frac{\sin(\varphi + \psi + \frac{2\pi}{3})}{\sin(\psi + \frac{2\pi}{3})} \\
x_2 &= \frac{a\omega^2 S - b\omega T}{\omega^2 S - \omega T} = \pm \text{idem} \\
&= \rho \frac{\sin(\varphi + \psi - \frac{2\pi}{3})}{\sin(\psi - \frac{2\pi}{3})}
\end{aligned}$$

Il est inutile de calculer ρ_2, ρ_3 ; par contre, les angles qui interviennent sont : $\varphi = \arg(a)$, $\theta = \arg(A)$, $\psi = \arg(S) = \frac{\theta}{3}$. On constate que les trois solutions sont réelles, alors que les calculs qui y mènent, passent par des nombres complexes.

Exemple 5 : $5x^3 - 3x^2 - 15x + 8 = 0$, coefficients 5, -1, -5, 8. $\Delta = -2207$.
 $a = 0,67 - 0,90i = 1,13 \exp(-0,93i)$, $b = 0,67 + 0,90i = 1,13 \exp(0,93i)$,
 $A = 2,37 + 4,52i = 5,10 \exp(1,09i)$, $B = 2,37 - 4,52i = 5,10 \exp(-1,09i)$,
 $S = 1,61 + 0,61i = 1,72 \exp(0,36i)$, $T = 1,61 - 0,61i = 1,72 \exp(-0,36i)$,
 $x_0 = -1,7068$, $x_1 = 0,5265$, $x_2 = 1,7803$.
 $\Delta < 0$, 3 racines réelles et distinctes.

2c) $\Delta = 0$

En ce cas, on a $a = b$ et les équations $E1$ à $E4$ sont contradictoires. En effet, $E1$ à $E3$ deviennent

$$\begin{cases} A - B &= \alpha \\ (A - B)a &= -\beta \\ (A - B)a^2 &= \gamma \end{cases}$$

dont on déduit immédiatement

$$P = \alpha\gamma - \beta^2 = 0$$

ce qui contredit notre hypothèse $P \neq 0$.

Il s'ensuit qu'un polynôme du troisième degré de la forme (1) et dont le discriminant cubique est nul alors que le déterminant P n'est pas nul, ne peut être mis sous la forme (2). Mais, en partant de la situation $\Delta \neq 0$, on peut imaginer un passage à la limite de manière que le discriminant devienne nul. En effet, toutes les grandeurs A, B, a, b, P , etc. sont des fonctions continues des coefficients $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Supposons que ces coefficients donnent $\Delta \neq 0$ et que $P \neq 0$ même si Δ tend vers 0. Alors, faisons le passage à la limite

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \rightarrow (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$$

et posons $a - b = \varepsilon$.

Puisque $\Delta \rightarrow 0$, on a $a \rightarrow b$, donc $\varepsilon \rightarrow 0$. En substituant b par $a - \varepsilon$, $E1$ et $E2$ deviennent

$$\begin{cases} A - B = \alpha \\ Aa - Bb = (A - B)a + B\varepsilon = \alpha a + B\varepsilon = -\beta \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$B\varepsilon \rightarrow -\beta_0 - \alpha_0 a$$

et

$$A, B \rightarrow \infty, \quad B\varepsilon^2 \rightarrow 0, \quad B\varepsilon^3 \rightarrow 0$$

en comparant avec (4).

Reprenons la proposition (2) et voyons ce qu'elle devient :

$$\begin{aligned} & A(x - a)^3 - B(x - b)^3 \\ &= A(x - a)^3 - B(x - a + \varepsilon)^3 \\ &= A(x - a)^3 - B(x - a)^3 - 3B\varepsilon(x - a)^2 + O(\varepsilon^2) \\ &= (A - B)(x - a)^3 - 3B\varepsilon(x - a)^2 + O(\varepsilon^2) \\ &= \alpha(x - a)^3 + 3(\beta + \alpha a)(x - a)^2 + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Après le passage à la limite, le terme $O(\varepsilon^2)$ disparaît et l'expression devient

$$(x - a)^2(\alpha_0 x + 3\beta_0 + 2\alpha_0 a)$$

dont les zéros sont

$$\begin{aligned}x_0 &= -2a - 3\frac{\beta_0}{\alpha_0} \\ x_1 &= x_2 = a.\end{aligned}$$

Exemple 6 : $3x^3 + 3x^2 - 24x - 36 = 0$, coefficients 3, 1, -8, -36. $\Delta = 0$.
 $a = b = -2,00$, $\chi_0 = 3,00$, $\chi_1 = \chi_2 = -2,00$.

Une racine simple et une racine double, soit 3 racines réelles.

Tous les exemples ont été traités par le programme Turbo-Pascal-7 ci-joint. Si on tient à une plus grande précision des résultats, il suffit de modifier la limitation du nombre de décimales qui est en général fixé à quatre, et d'indiquer cinq, six ou plus, le maximum étant 15 décimales si on supprime toute limitation.

NOTE : Ce texte est la traduction et l'adaptation d'un article paru dans *Wiskunde & Onderwijs* nr. 95 (1998), revue de l'Association flamande des Professeurs de Mathématique ⁽¹⁾, et rédigé par M. Dirk DANCKAERT, professeur à l'Institut Saint Norbert à Duffel, entre Malines et Liege. Cette méthode de résolution d'une équation du troisième degré est différente de celle de *Scipione Ferro* et *Cardano*, en ce sens que l'on n'est pas obligé de transformer avant tout l'équation donnée en une autre ne contenant pas de terme du second degré. Les extractions de racine cubique sont beaucoup plus simples, et dans certains cas inutiles. M. DANCKAERT n'est pas sûr que cette méthode soit entièrement nouvelle, et demande qu'on lui fasse connaître éventuellement des précurseurs ayant publié cette méthode ou une autre qui s'approche de celle-ci. Personnellement, je lui ai communiqué les références d'un article de G.-H. HALPHEN de 1885, qui présente une résolution originale des équations des 3ème et 4ème degrés par le Hessien des polynômes donnés.

Adresse de l'auteur :

Jack G. SEGERS

Rue Hocheporte 107/063

4000 Liège

1. La rédactrice en chef de la revue *Wiskunde & Onderwijs* a donné l'autorisation de publier une adaptation en français de l'article original.

```

program EQUACUBI; {$N+}{cubic equation} {Jack G. SEGERS 071298}
uses crt ;
label F, G ;
const pi = 3.14159 ;
var a, ai, al, Am, Ami, Amr, ar, b, be, bi, Bm, Bmi, Bmr, br, de, Dm, ga: real ;
    la, nei, ner, omi, omr, ph1, ph2, ph3, Pm, Qm, r3, ra, rh1, rh2, rh3: real ;
    Rm, si, Sm, Smi, Smr, sr, ti, Tm, Tmi, Tmr, tr, x, x0, x0i, x0r, x1: real ;
    x1i, x1r, x2, x2i, x2r, yi, yr, zai, zi, zar, zr: real ;
    omega, omega2: string ;
procedure message ;
begin writeln ; writeln ;
    writeln ('Division by zero is impossible!') ;
    writeln ('Verify your data and begin again!') ;
    halt ;
end ;
procedure mult (var gr,gi,hr,hi,jr,ji:real) ;
begin jr := gr*hr - gi*hi ; ji := gr*hi + gi*hr ;
end ;
procedure divi (var gr,gi,hr,hi,jr,ji: real) ;
begin if hr*hr + hi*hi = 0 then message ;
    jr := (gr*hr + gi*hi)/(hr*hr + hi*hi) ;
    ji := (gi*hr - gr*hi)/(hr*hr + hi*hi) ;
end ;
procedure rhopfi (var gr, gi, md, ag: real) ;
begin {md=module,ag=argument}
    md := sqrt(gr*gr + gi*gi) ;
    if gr > 0 then ag := arctan(gi/gr) ;
    if gr < 0 then ag := pi + arctan(gi/gr) ;
    if gr=0 then if gi<0 then ag := -pi/2 else ag := pi/2 ;
end ;
procedure radp ;{P=0}
begin r3 := exp(1/3*ln(ra)) ; x0 := -la + r3 ;
    writeln ('x0 = ',x0:2:4) ;
    writeln ('x1 = ', -la:2:4, ' + ', omega, '**', r3:2:4) ;
    x1r := -la + cos(2*pi/3)*r3 ; x1i := sin(2*pi/3)*r3 ;
    writeln ('x2 = ', -la:2:4, ' + ', omega2, '**', r3:2:4) ;
    writeln ('or'); writeln ('x0 = ',x0) ;
    writeln ('x1 = ',x1r:2:4, ' + ', x1i:2:4, '*i') ;
    writeln ('x2 = ',x1r:2:4, ' - ', x1i:2:4, '*i') ;
end ;
procedure radn ;{P=0}
begin r3 := exp(1/3*ln(-ra)) ; x0 := -la - r3 ;
    writeln ('x0 = ',x0:2:4) ;
    writeln ('x1 = ', -la:2:4, ' - ', omega, '**', r3:2:4) ;
    writeln ('x2 = ', -la:2:4, ' - ', omega2, '**', r3:2:4) ;
    writeln ('or'); x1r := -la - cos(2*pi/3)*r3 ;
    x1i := -sin(2*pi/3)*r3 ; writeln ('x0 = ',x0:2:4) ;
    writeln ('x1 = ',x1r:2:4, ' - ', x1i:2:4, '*i') ;
    writeln ('x2 = ',x1r:2:4, ' + ', x1i:2:4, '*i') ;
end ;

```

```

end ;
procedure P_zero ; label H ;
begin   la := be/al ; ra := la*la*la - de/al ;
        writeln ('radicand = ',ra:2:4) ;
        if ra > 0 then radp ; if ra > 0 then goto H ;
        if ra < 0 then radn ; if ra < 0 then goto H ;
        if ra = 0 then x0 := - la ;
        writeln ('x0 = x1 = x2 = ',x0:2:4) ;
H:      end ;
procedure D_pos ;
begin a := (Qm + sqrt(Dm))/2/Pm ; b := (Qm - sqrt(Dm))/2/Pm ;
        writeln ('a = ',a:2:4) ; writeln ('b = ',b:2:4) ;
        Am := al*b + be ; Bm := al*a + be ;
        writeln ('A = ',Am:2:4) ; writeln ('B = ',Bm:2:4) ;
        if Am > 0 then Sm := exp(1/3*ln(Am)) ;
        if Am < 0 then Sm := -exp(ln(-Am)/3) ;
        if Bm > 0 then Tm := exp(1/3*ln(Bm)) ;
        if Bm < 0 then Tm := - exp(1/3*ln(-Bm)) ;
        writeln ('S = ',Sm:2:4) ; writeln ('T = ',Tm:2:4) ;
        x0 := (a*Sm - b*Tm)/(Sm-Tm) ; writeln ('x0 = ',x0:2:4) ;
        writeln('x1 = (a*S*omega - b*T*omega2)/(S*omega - T*omega2)');
        writeln('x2 = (a*S*omega2 - b*T*omega)/(S*omega2 - T*omega)');
        writeln ('or') ; writeln('x0 = ',x0:2:4) ;
        zar := (a*Sm-b*Tm)*cos(2*pi/3) ;
        zai := (a*Sm+b*Tm)*sin(2*pi/3) ;
        ner := (Sm-Tm)*cos(2*pi/3) ; nei := (Sm+Tm)*sin(2*pi/3) ;
        divi(zar, zai, ner, nei, x1r, x1i) ;
        writeln ('x1 = ',x1r:2:4,' + ',x1i:2:4,'*i') ;
        zai := - zai ; nei := - nei ;
        divi(zar, zai, ner, nei, x2r, x2i) ;
        writeln ('x2 = ',x2r:2:4,' + ',x2i:2:4,'*i') ;
end ;
procedure D_neg ;
begin ar := Qm/(2*Pm) ; br := ar ; ai := sqrt(-Dm)/(2*Pm) ;
        bi := -ai ; writeln('a = ',ar:2:4,' + ',ai:2:4,'*i') ;
        writeln('b = ',br:2:4,' + ',bi:2:4,'*i') ;
        rhophi(ar, ai, rh1, ph1) ; writeln ('or') ;
        writeln('a = ',rh1:2:4,'*exp(',ph1:2:4,'*i)') ;
        writeln('b = ',rh1:2:4,'*exp(',ph1:2:4,'*i)') ;
        writeln ; Amr := al*ar+be ; Ami := -al*ai ;
        Bmr := al*ar+be ; Bmi := al*ai ;
        writeln ('A = ',Amr:2:4,' + ',Ami:2:4,'*i') ;
        writeln ('B = ',Bmr:2:4,' + ',Bmi:2:4,'*i') ;
        rhophi(Amr, Ami, rh2, ph2) ; writeln ('or') ;
        writeln('A = ',rh2:2:4,'*exp(',ph2:2:4,'*i)') ;
        writeln('B = ',rh2:2:4,'*exp(',ph2:2:4,'*i)') ;
        writeln ; rh3 := exp(ln(rh2)/3) ; ph3 := ph2/3 ;
        writeln('S = ',rh3:2:4,'*exp(',ph3:2:4,'*i)') ;
        writeln('T = ',rh3:2:4,'*exp(',ph3:2:4,'*i)') ;

```

```

writeln('or') ; Smr := rh3*cos(ph3) ; Tmr := Smr ;
Smi := rh3*sin(ph3) ; Tmi := -Smi ;
writeln ('S = ',Smr:2:4,' + ',Smi:2:4,'*i') ;
writeln ('T = ',Tmr:2:4,' + ',Tmi:2:4,'*i') ;
writeln ; mult (ar, ai, Smr, Smi, sr, si) ;
mult (br, bi, Tmr, Tmi, tr, ti) ;
zar := sr - tr ; zai := si - ti ;
ner := 0 ; nei := 2*Smi ; divi (zar, zai, ner, nei, x0r, x0i) ;
writeln ('x0 = ',x0r:2:4) ; mult (sr, si, omr, omi, yr, yi) ;
sr := yr ; si := yi ; zar := sr - tr ; zai := si - ti ;
mult (Smr, Smi, omr, omi, zr, zi) ;
ner := zr - Tmr ; nei := zi - Tmi ;
divi (zar, zai, ner, nei, x1r, x1i) ; writeln ('x1 = ',x1r:2:4) ;
mult (sr, si, omr, omi, yr, yi) ; sr := yr ; si := yi ;
zar := sr - tr ; zai := si - ti ;
mult (zr, zi, omr, omi, yr, yi) ;
ner := yr - Tmr ; nei := yi - Tmi ;
divi (zar, zai, ner, nei, x2r, x2i) ; writeln ('x2 = ',x2r:2:4) ;
end ;
procedure D_zero ;
begin a := Qm/(2*Pm) ; b := a ; writeln ('a = b = ',a:2:4) ;
x0 := -2*a-3*be/al ; x1 := a ; x2 := a ;
writeln ('x0 = ',x0:2:4) ; writeln ('x1 = x2 = ',a:2:4) ;
end ;
BEGIN clrscr ; omega := '(cos(2pi/3)+i*sin(2pi/3))' ;
omega2 := '(cos(2pi/3)-i*sin(2pi/3))' ;
omr := cos(2*pi/3) ; omi := sin(2*pi/3) ;
writeln ('Given a cubic equation of following type:') ;
writeln ('alpha*x3 + 3*beta*x2 + 3*gamma*x + delta = 0.') ;
writeln ('Solution by the Dirk-Danckaert-Method and by this') ;
writeln ('TP7-program imagined by Jack Segers in 1998.') ;
writeln('omega = ',omega) ; writeln('omega square = ',omega2) ;
writeln('Go on!') ; repeat until keypressed ; clrscr ;
writeln ('Introduce the values of the coefficients with alpha not zero!') ;
F: write ('alpha = ') ; read (al) ;
if al = 0 then writeln ('alpha not zero!') ; if al = 0 then goto F ;
write ('beta = ') ; read (be) ; write ('gamma = ') ; read (ga) ;
write ('delta = ') ; read (de) ; Pm := al*ga - be*be ;
Qm := be*ga - al*de ; Rm := be*de - ga*ga ;
writeln ('P = ',Pm:2:4) ; if Pm = 0 then P_zero ; if Pm = 0 then goto G ;
Dm := Qm*Qm - 4*Pm*Rm ; writeln ('cubic discriminant D = ',Dm:2:4) ;
if Dm > 0 then D_pos ; if Dm < 0 then D_neg ; if Dm = 0 then D_zero ;
G: repeat until keypressed ;
end .

```

Revue des revues

C. Villers,

Bulletin de l'APMEP (France), n°420 - Janvier-Février 1999

Dans l'éditorial de ce bulletin, le Président de l'APMEP, François Dusson, rappelle une des vocations de l'association qu'il préside à savoir s'intéresser à l'apprentissage des mathématiques à tous les âges. Il s'interroge sur les fils conducteurs possibles reliant les mathématiques proposées aux différents niveaux et propose quelques pistes de réflexion.

Outre, comme c'est l'habitude, les rubriques *Avis de recherche*, *Nouvelles brèves*, *Les problèmes de l'APMEP*, *Matériaux pour une documentation*, et des informations de type administratif, cette livraison comporte des articles fort intéressants parmi lesquels on relève plus particulièrement :

Des jeux et des mathématiques de la maternelle au CM2 par Pierre Eyseric est un article qui s'adresse plus particulièrement aux enseignants de maternelle et du primaire.

Figures et Contraintes par Marie Lattuati. L'auteur y montre comment elle a pu enrichir, sans trop d'investissement mais plutôt avec de l'imagination, des exercices classiques de géométrie de manière à en faire des activités. Des exemples accompagnent le texte et utilisent essentiellement les théorèmes de Pythagore et de Thalès.

Composées d'homothéties et théorèmes de Ménélaüs par Richard Blavy.

Voyage hasardeux dans un filtre réjecteur par le Groupe Mathématique du Signal - IREM d'Aquitaine. C'est l'étude critique d'un sujet proposé en Bac Pro. Enoncé, corrigé officiel et remarques étayées sont suivis d'une proposition de rédaction nouvelle du sujet avec son corrigé.

Quelle géométrie pour l'élève architecte ? par F. Bonafé et T. Berthomier. C'est la présentation des résultats dégagés des réponses obtenues à un test proposé, dès le premier jour de la rentrée, aux étudiants de première année en Ecole d'Architecture à Montpellier. Le but poursuivi était de cerner le profil et les lacunes de ces étudiants de manière à définir un contenu et des méthodes pour l'enseignement de la géométrie.

Un enseignement des probabilités en premier cycle de la filière A.E.S. par Yves Ducl et Homblin Languereau.

A.E.S. = Administration Economique et Sociale.

Cet article propose une réflexion portant sur l'enseignement des probabilités en première année de la filière. Si le programme proposé apparaît essentiellement technique pour sa mise en oeuvre, il est aussi l'occasion d'une sensibilisation à la problématique de la modélisation.

Les quatre heures au collège par Pascal Hairault. L'auteur y exprime ses opinions au sujet de la revendication de quatre heures de mathématiques par semaine pour tous les élèves au collège.

Bulletin de l'APMEP (France), n° 421-Mars/Avril 1999

Dans l'éditorial du Président, François Dusson s'exprime sur les difficultés que les enseignants peuvent vivre au quotidien dans leurs classes.

Suit alors un texte de P.L. Hennequin, hommage à la mémoire d'André Lichnerowicz décédé le 11 décembre 1998. Les travaux de ce grand mathématicien et son apport à la vie de l'association sont décrits dans ce qu'ils ont d'essentiel.

S. Ricou propose un texte décrivant des séries de séquences sur la réalisation d'un cadran solaire analemmatique avec des élèves des classes élémentaires.

P. Augier, B. Charentus, A.-M. Crozet, A. Pasini, T. Combrun et S. Pivodori proposent un compte-rendu d'une activité autour du thème "Aire et périmètre en grandeur nature". Les objectifs étaient d'assimiler les notions de périmètre et d'aire par la mesure sur le terrain de figures en grandeur nature et de travailler sur des problèmes d'échelle et de représentation géométrique.

Cette activité s'adressait à des élèves en classe de collège.

Marc Laura propose un texte sur la manière de reproduire un élément architectural (rosace) en utilisant des transformations étudiées en classe.

Richard Blavy donne une démonstration du théorème de Céva par l'emploi de composées d'homothéties.

Deux textes figurent dans un dossier intitulé "Autour de la démonstration".

- Denise Haugazeau traite de "Démonstration et Argumentation" et présente une expérience interdisciplinaire qui en a fait assimiler les différences.
- Jean Mainguené et Marie-France Roy traitent de la démonstration automatique en géométrie. Après un rappel historique, les auteurs

présentent la méthode de Wu et l'illustrent par un exemple tiré d'un manuel scolaire. Ils terminent en présentant les résultats récents concernant les inégalités en géométrie élémentaire par le calcul formel.

Bernard Parsysz donne des approches variées pour un même phénomène : la datation au radiocarbone.

En prenant prétexte de l'épreuve d'analyse du CAPES 1997, François Gramain donne des indications sur le fonctionnement des calculettes et sur le calcul des erreurs d'arrondi.

Gérard Chevin propose un texte intitulé "Mise en évidence du rôle de l'excentricité dans la détermination des coniques".

Gérard Kuntz traite de "L'enseignement des mathématiques à l'ère des autoroutes de l'information". Il montre que les nouvelles technologies de l'information représentent une chance de repenser et de rééquilibrer l'enseignement des mathématiques et plaide pour que le système éducatif puisse former les jeunes à acquérir une certaine autonomie face à la connaissance.

Dans un article "Codage et Cryptage", Dany-Jack Mercier présente quelques activités sur les problèmes récents de codage et de chiffrement.

Ce numéro comporte enfin les rubriques habituelles que sont : Avis de recherche, Les problèmes de l'APMEP, Matériaux pour une documentation, Pour un inventaire et Vie de l'association.

Claude VILLERS

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

Sureprenant et amusant

 problème n°214 de M.P. n°120

On écrit la suite des multiples entiers positifs de $\sqrt{2}$ en ignorant la partie fractionnaire et immédiatement en-dessous les nombres manquant dans la première suite

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 11 & \dots \\ 3 & 6 & 10 & 13 & 17 & 20 & \dots \end{array}$$

La différence entre le n^e terme de la 2^e suite et le n^e terme de la 1^e suite est $2n$. Le démontrer.

Solution de P. DASSY de Liège

Désignons par $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Si $x \notin \mathbb{Z}$,

$$0 < x - E(x) < 1 \quad (1)$$

et d'autre part, si $a \in \mathbb{Z}$, $x \notin \mathbb{Z}$ et $0 < x - a < 1$, alors

$$a = E(x). \quad (2)$$

Soit a_n la n^e terme de la première suite (A), d'où $a_n = E(n\sqrt{2})$, et soit b_n le n^e terme de la seconde suite (B).

La thèse est donc $b_n - a_n = 2n$.

De (1), $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$0 < n\sqrt{2} - a_n < 1 \quad (3)$$

$$0 < (n+1)\sqrt{2} - a_{n+1} < 1 \quad (3')$$

Multiplions par -1 les trois membres de cette double inégalité

$$-1 < a_{n+1} - (n+1)\sqrt{2} < 0 \quad (4)$$

et additionnons (3) et (4), il vient

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad & -1 < a_{n+1} - a_n - \sqrt{2} < 1 \\ & -1 + \sqrt{2} < a_{n+1} - a_n < 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

et a fortiori

$$0 < a_{n+1} - a_n < 3$$

or $a_{n+1} - a_n \in \mathbb{N}_0$, d'où

$$a_{n+1} - a_n = 1 \text{ ou } 2. \quad (5)$$

Si $a_{n+1} - a_n = 1$, il n'y a pas de b_p entre a_{n+1} et a_n .

Si $a_{n+1} - a_n = 2$, il y a un seul b_p entre a_{n+1} et a_n et on a

$$b_p = a_n + 1 = a_{n+1} - 1. \quad (6)$$

Dans ce cas, ajoutons $-2 + \sqrt{2}$ aux membres de (3) :

$$-2 + \sqrt{2} < (n+1)\sqrt{2} - a_n - 2 < -1 + \sqrt{2}$$

d'où

$$-2 + \sqrt{2} < (n+1)\sqrt{2} - a_{n+1} < \sqrt{2} - 1$$

et en tenant compte de (3')

$$0 < (n+1)\sqrt{2} - a_{n+1} < \sqrt{2} - 1;$$

ajoutons $\sqrt{2} - 1$ aux membres de cette dernière inégalité :

$$\sqrt{2} - 1 < (n+2)\sqrt{2} - (a_{n+1} + 1) < 2\sqrt{2} - 2$$

d'où

$$0 < (n+2)\sqrt{2} - (a_{n+1} + 1) < 1$$

et en appliquant (2), ceci montre que

$$E((n+2)\sqrt{2}) = a_{n+1} + 1$$

ou encore

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 1.$$

Il n'y a donc pas de b entre a_{n+1} et a_{n+2} , ce qui signifie que $b_{p+1} > a_{n+2} = a_{n+1} + 1 = b_p + 2$ (par (6)) et donc $b_{p+1} - b_p > 2$.

Ceci entraîne que la différence entre deux termes non consécutifs de B est strictement supérieure à 4 et que, si la différence entre deux termes de B est 3 ou 4, ceux-ci sont nécessairement consécutifs.

Reprenons la relation (3), $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 0 < n\sqrt{2} - a_n < 1$, multiplions par $1 - \sqrt{2}$, il vient

$$\begin{aligned}
1 - \sqrt{2} &< (n\sqrt{2} - a_n)(1 - \sqrt{2}) < 0 \\
1 - \sqrt{2} &< n\sqrt{2} - a_n - 2n + a_n\sqrt{2} < 0 \\
1 - \sqrt{2} &< (n + a_n)\sqrt{2} - (2n + a_n) < 0 \\
2 - \sqrt{2} &< (n + a_n)\sqrt{2} - (2n + a_n - 1) < 1 \\
0 &< (n + a_n)\sqrt{2} - (2n + a_n - 1) < 1
\end{aligned} \tag{7}$$

d'où, par (2),

$$E \left[(n + a_n)\sqrt{2} \right] = a_{n+a_n} = 2n + a_n - 1. \tag{8}$$

(7) peut aussi s'écrire

$$0 < (n + a_n + 1)\sqrt{2} - (2n + a_n + 1) < \sqrt{2} - 1$$

ou

$$0 < (n + a_n + 1)\sqrt{2} - (2n + a_n + 1) < 1,$$

d'où, par (2),

$$E \left[(n + a_n + 1)\sqrt{2} \right] = a_{n+a_n+1} = 2n + a_n + 1. \tag{9}$$

En comparant (8) et (9), on voit que $2n + a_n$ est le terme manquant dans la suite A entre les deux termes consécutifs a_{n+a_n} et a_{n+a_n+1} .

$2n + a_n$ est un certain b_p et on démontre de même que $2(n + 1) + a_{n+1}$ est un certain b_q .

$$\begin{aligned}
b_q - b_p &= 2(n + 1) + a_{n+1} - 2n - a_n \\
&= 2 + a_{n+1} - a_n \\
&\leq 2 + 2 = 4 \quad (\text{par (5)}).
\end{aligned}$$

Cette différence étant inférieure ou égale à 4, b_p et b_q sont deux termes consécutifs de B , c'est-à-dire $q = p + 1$.

Ainsi la suite $(B') = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n, \dots)$ où $b'_n = 2n + a_n$ est une sous-suite de termes consécutifs de (B) .

Or $b'_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 = b_1$, d'où (B') coïncide avec (B) et $b_n = a_n$.

Ce problème n'a pas eu beaucoup de succès, une seule autre solution m'est parvenue, celle de N. BERCKMANS de Waterloo.

Triangles et carrés problème n°215 de M. et P. n°120

Sur les côtés d'un triangle ABC , on construit extérieurement trois carrés de centres D, E, F . Démontrer que les milieux des côtés du triangle ABC sont les centres des carrés construits intérieurement sur les côtés du triangle DEF .

Solution de N. BERCKMANS de Waterloo

Hypothèses

On donne un triangle ABC .

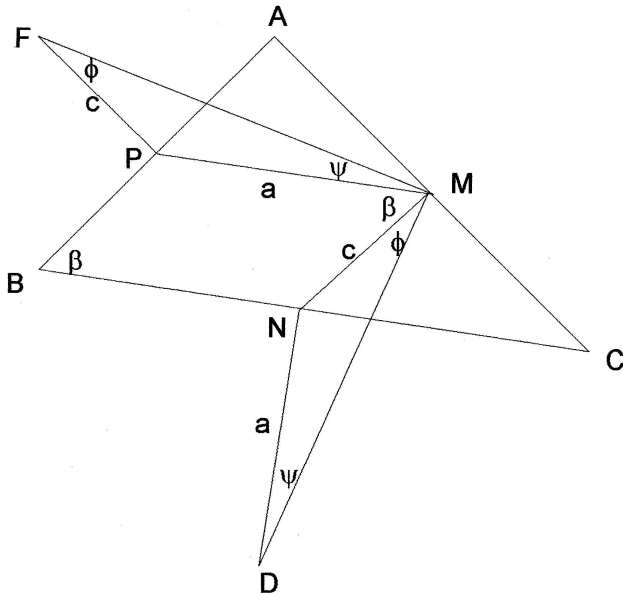
F centre du carré construit sur AB extérieurement au triangle ABC .

D centre du carré construit sur BC extérieurement au triangle ABC .

M milieu de AC .

Thèse

M est le centre d'un carré construit sur FD .



Démonstration

Soit N milieu de BC et P le milieu de AB . Notons $2a = BC$, $2c = AB$, β l'angle ABC , ψ l'angle NDM et ϕ l'angle MFP .

Les droites PM et MN joignant les milieux des côtés du triangle ABC , on a

$$PM = a \quad \text{et} \quad MN = c.$$

Ces droites étant parallèles à BC et AB , on a

$$\text{l'angle } APM = \text{l'angle } MNC = \text{l'angle } PMN = \beta.$$

Puisque F est le centre du carré construit sur AB extérieurement au triangle ABC , on a : la droite PF est perpendiculaire au côté AB

$$PF = c.$$

Des conclusions analogues s'obtiennent pour D centre du carré construit sur BC extérieurement au triangle ABC : la droite DN est perpendiculaire au côté BC

$$DN = a.$$

Les triangles PMF et NDM sont isométriques car

$$PM = ND = a$$

$$PF = NM = c$$

$$\text{l'angle } FPM = \text{l'angle } DNM = \beta + 90^\circ.$$

Dès lors, $MF = MD$, l'angle $FMP = \psi$ et l'angle $NMD = \phi$.

Puisque, dans le triangle FMP , $90^\circ + \beta + \phi + \psi = 180^\circ$, on en déduit que

$$\text{l'angle } FMD = \phi + \beta + \psi = 90^\circ.$$

Le triangle isocèle MFD étant rectangle en M , M est bien le centre d'un carré construit sur le segment FD .

Bonnes solutions de P. DASSY de Liège, J. JANSSEN de Lambermont, A. PATERNOTTRE de Boussu, J. FINOULST de Diepenbeek et J. RASSE de Mean.

Déterminer toutes les fonctions polynômes f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(2x) = f'(x) \cdot f''(x)$.

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek

La fonction f définie par $f(x) = 0$ satisfait l'hypothèse. Si f est une fonction polynôme de degré n , de l'égalité des degrés des deux membres de la relation $f(2x) = f'(x) \cdot f''(x)$, on obtient

$$n = (n - 1) + (n - 2)$$

d'où $n = 3$.

On peut écrire

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

La relation donnée devient

$$\begin{aligned} 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d &= (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b) \\ &= 18a^2x^3 + 18abx^2 + (4b^2 + 6ac)x + 2bc. \end{aligned}$$

L'identification des deux membres donne

$$a = \frac{4}{9}, \quad b = c = d = 0.$$

D'où la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{4}{9}x^3.$$

N. BERCKMANS de Waterloo, P. DASSY de Liège, A. PATERNOTTRE de Boussu et H.-J. SEIFFERT de Berlin ont envoyé des solutions similaires.

Je signale que J. ANSEEUW de Roeselare a répondu correctement aux problèmes 211, 212 et 213, mais ses solutions me sont parvenues trop tard pour que je puisse citer son nom dans le numéro précédent de M. et P.

Les solutions des problèmes suivants devront me parvenir avant le 1er janvier 2000.

223. Jeu de lettres

Soit f une fonction de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_0^+$ telle que $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}_0$:

$$\begin{cases} f(ab, c) = f(a, c) \cdot f(b, c) \\ f(c, ab) = f(c, a) \cdot f(c, b) \\ f(a, 1 - a) = 1 \end{cases}$$

Démontrer que :

1) $\forall a \in \mathbb{Q}_0 : f(a, a) = f(a, -a) = 1$

2) $\forall a, b \in \mathbb{Q}_0 : f(a, b) \cdot f(b, a) = 1.$

224. Jeu de cordes

Dans un cercle de rayon 5, on trace deux cordes sécantes AB et CD , C étant situé sur le plus petit arc AB . AB est coupée en deux parties égales par CD et $|CD| = 6$ et on suppose que AB est l'unique corde partant de A qui est coupée en deux parties égales par CD . Démontrer que le sinus de l'angle au centre interceptant le plus petit arc AC est un nombre rationnel et déterminer ce nombre.

225. Jeu de jetons

Une collection de n^2 jetons comprend n jetons marqués 1, n jetons marqués 2, $\dots$, n jetons marqués n . Est-il possible de disposer ces jetons sur une droite de manière qu'entre un jeton marqué x et le jeton le plus proche marqué x , il y ait exactement x jetons et ce pour tout $x \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$?

Olympiades

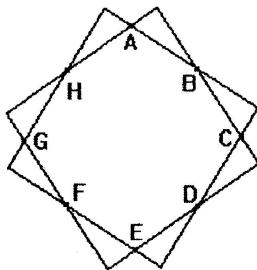
C. Festraets,

Voici les quinze problèmes du 17e AIME. Les étudiants ayant obtenu au moins 100 sur 150 à la demi-finale de l'Olympiade Mathématique Belge ont été invités à participer à ce test le 18 mars à Namur. Le meilleur résultat, 7/15, a été obtenu par Han Zhe, élève de 6ème année à l'Institut Saint Boniface Parnasse.

Vous trouverez les réponses à la fin de cette rubrique.

17th Annual American Invitational Mathematics Examination 1999 (AIME)

1. Trouver le plus petit nombre premier qui est le cinquième terme d'une suite arithmétique croissante, les quatre termes précédents de la suite étant aussi premiers.
2. Considérons le parallélogramme dont les sommets sont $(10,45)$, $(10,114)$, $(28,153)$ et $(28,84)$. Une droite passant par l'origine divise le parallélogramme en deux polygones isométriques. La pente de la droite est m/n , où m et n sont des entiers premiers entre eux. Trouver $m + n$.
3. Trouver la somme de tous les entiers positifs n pour lesquels $n^2 - 19n + 99$ est un carré parfait.
4. Les deux carrés représentés ci-dessous ont même centre O et leurs côtés sont de longueur 1. La longueur de $\overline{AB}$ est $43/99$ et l'aire de l'octogone $ABCDEFGH$ est m/n où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m + n$



-
-
5. Pour tout entier positif x , soit $S(x)$ la somme des chiffres de x et soit $T(x)$ la quantité $|S(x+2)S(x)|$. Par exemple,

$$T(199) = |S(201) - S(199)| = |3 - 19| = 16.$$

Combien de valeurs $T(x)$ ne dépassent pas 1999 ?

6. Une transformation du premier quadrant du plan cartésien applique chaque point (x, y) sur le point $(\sqrt{x}, \sqrt{y})$. Les sommets du quadrilatère $ABCD$ sont $A = (900, 300)$, $B = (1800, 600)$, $C = (600, 1800)$ et $D = (300, 900)$. Si k est l'aire de la région limitée par l'image du quadrilatère $ABCD$, trouver le plus grand entier qui ne dépasse pas k .
7. On a un ensemble de 1000 interrupteurs, chacun d'eux ayant 4 positions appelées A, B, C, D . Les seuls changements de positions autorisés pour un interrupteur sont de A vers B , de B vers C , de C vers D et de D vers A . Initialement tous les interrupteurs sont en position A . Les interrupteurs ont chacun un numéro d'identification différent dont la forme est $2^x 3^y 5^z$ et où x, y et z prennent les valeurs $0, 1, \dots, 9$. L'étape i du processus, qui comporte 1000 étapes, consiste à changer l'interrupteur i ainsi que tous les interrupteurs dont le numéro d'identification est un diviseur du numéro d'identification de l'interrupteur i . Après réalisation de l'étape 1000, combien d'interrupteurs seront en position A ?
8. Appelons T l'ensemble des triples ordonnés (x, y, z) de nombres réels non négatifs appartenant au plan $x + y + z = 1$. Nous dirons que (x, y, z) *supporte* (a, b, c) quand exactement deux des trois inégalités $x \geq a$, $y \geq b$, $z \geq c$ sont vérifiées. Soit S l'ensemble des triples de T qui supportent $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$. L'aire de S divisée par l'aire de T est m/n où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.
9. Une fonction f est définie sur les nombres complexes par $f(z) = (a + bi)z$, où a et b sont des nombres réels positifs. Cette fonction a la propriété que l'image de chaque point du plan complexe est équidistante de ce point et de l'origine. Sachant que $|a + bi| = 8$ et que $b^2 = m/n$, où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux, trouver $m + n$.
10. On donne un ensemble de 10 points dans le plan dont trois quelconques ne sont pas collinéaires. On choisit au hasard quatre segments distincts joignant des paires de points de cet ensemble (tous les segments ont la même chance d'être choisis). La probabilité que

-
-
- trois des segments choisis forment un triangle dont les sommets sont parmi les 10 points est m/n , où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m + n$.
11. Sachant que $\sum_{k=1}^{35} \sin 5k = \tan \frac{m}{n}$, où les angles sont mesurés en degrés et où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux qui satisfont $\frac{m}{n} < 90$, trouver $m + n$.
 12. Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent à $\overline{AB}$ en P et son rayon est 21. Sachant que $AP = 23$ et $PB = 27$, trouver le périmètre du triangle.
 13. Quarante équipes participent à un tournoi dans lequel chaque équipe rencontre toutes les autres équipes exactement une fois. Il n'y a pas de match nul et chaque équipe a une chance sur deux de gagner tout match auquel elle participe. La probabilité qu'il n'y ait pas deux équipes ayant gagné le même nombre de matchs est m/n , où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux. Trouver $\log_2 n$.
 14. Le point P est situé à l'intérieur du triangle ABC de telle sorte que les angles PAB , PBC et PCA sont égaux. Les longueurs des côtés du triangle sont $AB = 13$, $BC = 14$ et $CA = 15$ et la tangente de l'angle PAB est m/n , où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m + n$.
 15. Considérons un triangle de papier dont les sommets sont $(0,0)$, $(34,0)$ et $(16,24)$. Les sommets de son *triangle médian* sont les milieux de ses côtés. Une pyramide triangulaire est réalisée en pliant le triangle le long des côtés de son triangle médian. Quel est le volume de cette pyramide ?

Les questions suivantes sont celles du “test américain”. Il y a quelques années, nous utilisions ce questionnaire pour la demi-finale maxi de l’O.M.B. Nous avons dû y renoncer pour des problèmes de dates des épreuves américaine et belge qui ne concordaient plus et de communication trop facile des questions par internet. J’espère que vous pourrez y puiser des exercices intéressants à proposer à vos élèves.

1. $1 + 2 + 3 - 4 + \cdots - 98 + 99 =$

A -50	B -49	C 0	D 49	E 50
---	---	---	--	--
2. Laquelle des affirmations suivantes est fausse ?

A Tous les triangles équilatéraux sont congruents l’un à l’autre.
B Tous les triangles équilatéraux sont convexes.

-
-
- ☐ C Tous les triangles équilatéraux sont équiangles.
- ☐ D Tous les triangles équilatéraux sont des polygones réguliers.
- ☐ E Tous les triangles équilatéraux sont semblables l'un à l'autre.
3. Le nombre se trouvant à mi-chemin entre $1/8$ et $1/10$ est
- ☐ A $\frac{1}{80}$ ☐ B $\frac{1}{40}$ ☐ C $\frac{1}{18}$ ☐ D $\frac{1}{9}$ ☐ E $\frac{9}{80}$
4. Trouver la somme de tous les nombres premiers compris entre 1 et 100 qui s'écrivent chacun comme multiple de 4 augmenté de 1 et comme multiple de 5 diminué de 1.
- ☐ A 118 ☐ B 137 ☐ C 158 ☐ D 187 ☐ E 245
5. Le prix affiché d'un livre était 30% moins élevé que le prix de vente officiel. Alice a acheté ce livre pour la moitié du prix affiché lors des "Ventres du Cinquantenaire". Quel pourcentage du prix de vente officiel Alice a-t-elle payé ?
- ☐ A 25% ☐ B 30% ☐ C 35% ☐ D 60% ☐ E 65%
6. Quelle est la somme des chiffres du produit $2^{1999} \cdot 5^{2001}$ en notation décimale ?
- ☐ A 2 ☐ B 4 ☐ C 5 ☐ D 7 ☐ E 10
7. Quel est le plus grand nombre d'angles aigus qu'un hexagone convexe puisse avoir ?
- ☐ A 2 ☐ B 3 ☐ C 4 ☐ D 5 ☐ E 6
8. A la fin de l'année 1994, l'âge de Willy correspondait à la moitié de l'âge de sa grand-mère. La somme de leurs années de naissance est égale à 3838. Quel sera l'âge de Willy à la fin de l'année 1999 ?
- ☐ A 48 ☐ B 49 ☐ C 53 ☐ D 55 ☐ E 101
9. Avant qu'Amandine ait fait sa promenade de trois heures, le compteur kilométrique de sa voiture affichait 29792, un nombre palindrome. (Un nombre palindrome peut être lu de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche, sans changer de valeur). Après la promenade, la compteur affiche un autre nombre palindrome. Si Amandine n'a jamais dépassé la limitation de vitesse de 75 km/h, laquelle des valeurs suivantes correspond à la plus grande vitesse moyenne possible (en km/h) ?
- ☐ A $33 + \frac{1}{3}$ ☐ B $53 = \frac{1}{3}$ ☐ C $66 + \frac{2}{3}$ ☐ D $70 + \frac{1}{3}$ ☐ E $174 + \frac{1}{3}$
10. Une enveloppe scellée contient une carte sur laquelle un seul chiffre est noté. Parmi les affirmations suivantes, trois sont vraies et l'autre est fausse.

-
-
- (i) Le chiffre est 1.
(ii) Le chiffre n'est pas 2.
(iii) Le chiffre est 3.
(iv) Le chiffre n'est pas 4.

Laquelle des affirmations suivantes est nécessairement exacte ?

- ☐ A (i) est vrai. ☐ B (i) est faux. ☐ C (ii) est vrai.
☐ D (iii) est vrai. ☐ E (iv) est faux.
11. Les armoires des étudiants au Lycée Olympique sont numérotées consécutivement à partir de 1. Les chiffres en PVC utilisés pour marquer les numéros des armoires coûtent 2 “cents” (centièmes d’euro) chacun. Ainsi par exemple, le numéro 9 coûte 2 cents et le numéro 10 coûte 4 cents. S’il faut payer 137,94 euros pour marquer toutes les armoires, combien d’armoire y a-t-il au Lycée ?
☐ A 2001 ☐ B 2010 ☐ C 2100 ☐ D 2726 ☐ E 6897
12. Quel est le plus grand nombre de points d’intersection des graphes de deux polynômes distincts $y = p(x)$ et $y = q(x)$, chacun étant du quatrième degré et à coefficient de x^4 égal à 1 ?
☐ A 1 ☐ B 2 ☐ C 3 ☐ D 4 ☐ E 8
13. La suite de nombres réels $a_1, a_2, a_3, \dots$ est définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1}^3 = 99a_n^3$ pour tout $n \geq 1$. Alors, a_{100} est égal à
☐ A 33^{33} ☐ B 33^{99} ☐ C 99^{33} ☐ D 99^{99} ☐ E une autre valeur
14. Lors d’un concert, quatre filles – Marie, Aline, Tina et Anne – ont chanté des chansons en trios (pendant chaque pièce, l’une d’elles ne chantait pas). Anne a chanté 7 chansons ; elle a chanté davantage que les autres filles. Marie a chanté 4 chansons ; elle a chanté moins que les autres filles. Combien de chansons les trios ont-ils chantées au total ?
☐ A 7 ☐ B 8 ☐ C 9 ☐ D 10 ☐ E 11
15. Soit x un nombre réel tel que $\frac{1}{\cos x} - \tan x = 2$. Alors $\frac{1}{\cos x} + \tan x =$
☐ A 0,1 ☐ B 0,2 ☐ C 0,3 ☐ D 0,4 ☐ E 0,5
16. Quel est le rayon d’un cercle inscrit à un losange dont les diagonales mesurent 10 et 24 ?
☐ A 4 ☐ B $58/13$ ☐ C $60/13$ ☐ D 5 ☐ E 6
17. Soit $P(x)$ un polynôme tel que le reste de la division de $P(x)$ par $x - 19$ vaut 99, et le reste de la division de $P(x)$ par $x - 99$ vaut 19. Quel est le reste de la division de $P(x)$ par $(x - 19)(x - 99)$?
☐ A $-x + 80$ ☐ B $x + 80$ ☐ C $-x + 118$ ☐ D $x + 118$ ☐ E 0

18. Combien de zéros la fonction $f(x) = \cos(\log(x))$ admet-elle sur l'intervalle $0 < x < 1$?

☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 10 ☐ E une infinité

19. Considérons tous les triangles ABC qui vérifient les conditions suivantes : $AB = AC$, D est un point de $|AC|$ tel que $|BD| \perp |AC|$, AD et CD sont des entiers, et $BD^2 = 57$. Parmi tous ces triangles, la plus petite valeur possible pour AC est

☐ A 9 ☐ B 10 ☐ C 11 ☐ D 12 ☐ E 13

20. La suite $a_1, a_2, a_3, \dots$ vérifie $a_1 = 19$, $a_9 = 99$, et pour tout $n > 3$, a_n est la moyenne arithmétique des $n - 1$ premiers termes de la suite. Déterminer a_2 .

☐ A 29 ☐ B 59 ☐ C 79 ☐ D 99 ☐ E 179

21. Un cercle est circonscrit à un triangle de longueurs de côtés 20, 21 et 29. La région intérieure du cercle est subdivisée en quatre parties par le triangle. Soient A , B et C les aires des trois régions non triangulaires, avec C étant la plus grande. Alors

☐ A $A + B = C$ ☐ B $A + B + 210 = C$ ☐ C $A^2 + B^2 = C^2$
☐ D $20A + 21B = 29C$ ☐ E $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{C^2}$

22. Les graphes de $y = -|x - a| + b$ et $y = |x - c| + d$ ont les points d'intersection $(2; 5)$ et $(8; 3)$. Déterminer $a + c$.

☐ A 7 ☐ B 8 ☐ C 10 ☐ D 13 ☐ E 18

23. L'hexagone équiangle convexe $ABCDEF$ est tel que $AB = 1$, $BC = 4$, $CD = 2$ et $DE = 4$. L'aire de l'hexagone vaut

☐ A $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ ☐ B $9\sqrt{3}$ ☐ C 16 ☐ D $\frac{39}{4}\sqrt{3}$ ☐ E $\frac{43}{4}\sqrt{3}$

24. Six points sont fixés sur un cercle. Parmi toutes les cordes reliant les paires de ces six points, on en choisit quatre au hasard. Quelle est la probabilité que ces quatre cordes forment un quadrilatère convexe ?

☐ A $\frac{1}{15}$ ☐ B $\frac{1}{91}$ ☐ C $\frac{1}{273}$ ☐ D $\frac{1}{455}$ ☐ E $\frac{1}{1365}$

25. Il existe des entiers uniques $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ tels que

$$\frac{5}{7} = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \frac{a_5}{5!} + \frac{a_6}{6!} + \frac{a_7}{7!},$$

où $0 < a_i < i$ pour $i = 2, 3, \dots, 7$. Déterminer $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$.

☐ A 8 ☐ B 9 ☐ C 10 ☐ D 11 ☐ E 12

26. Soient trois polygones réguliers plans tels qu'aucun ne recouvre un autre, deux au moins sont congruents et tous trois ont des longueurs

de côtés égales à 1. Les polygones se rencontrent en un point A tel que la somme des trois angles intérieurs en A vaut 360° , de sorte que les polygones forment un autre polygone ayant A comme point intérieur. Quel est le périmètre le plus grand possible que ce nouveau polygone puisse avoir ?

- ☐ A 12 ☐ B 14 ☐ C 18 ☐ D 21 ☐ E 24

27. Dans le triangle ABC , on a $3 \sin \hat{A} + 4 \cos \hat{B} = 6$ et $4 \sin \hat{B} + 3 \cos \hat{A} = 1$. Alors la mesure de $\hat{C}$ (en degrés) vaut

- ☐ A 30 ☐ B 60 ☐ C 90 ☐ D 120 ☐ E 150

28. Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ une suite d'entiers telle que

(i) $-1 \leq x_i \leq 2$ pour $i = 1, 2, 3, \dots, n$;

(ii) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 19$; et

(iii) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 99$.

Soient m (resp. M) la plus petite (resp. la plus grande) valeur possible de $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$. Alors M/m vaut

- ☐ A 3 ☐ B 4 ☐ C 5 ☐ D 6 ☐ E 7

29. Un tétraèdre avec quatre faces triangulaires équilatérales admet une sphère inscrite et une sphère circonscrite. Pour chacune des quatre faces, il existe une sphère tangente de l'extérieur à la face en son centre et à la sphère circonscrite. Un point P est choisi au hasard dans la sphère circonscrite. La probabilité que P se trouve à l'intérieur de l'une des cinq sphères plus petites a comme meilleure approximation

- ☐ A 0 ☐ B 0,1 ☐ C 0,2 ☐ D 0,3 ☐ E 0,4

30. Le nombre de couples d'entiers $(m; n)$ vérifiant $mn \geq 0$ et

$$m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$$

est égal à

- ☐ A 2 ☐ B 3 ☐ C 33 ☐ D 35 ☐ E 99

Réponses du 17e AIME

1 29	2 118	3 38	4 185	5 223
6 314	7 650	8 025	9 259	10 489
11 177	12 345	13 742	14 463	15 408