Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N° 124 *Novembre – Décembre 1999*

Éditorial

J. Navez,

Le principal problème de cette dernière rentrée scolaire semble bien être la pénurie de professeurs dans certaines disciplines et particulièrement en mathématiques.

Diverses solutions ont été proposées pour pallier à cette insuffisance. On propose notamment de revoir les titres requis. Espérons que ceci ne porte pas un coup supplémentaire aux jeunes qui se destinent à une carrière pédagogique.

Si on tient compte, à diplôme égal, des perspectives de carrière dans l'enseignement qui sont bien moins lucratives que dans le privé et si on n'oublie pas la dévalorisation du statut moral des enseignants, il ne faudrait pas qu'au surplus les diplômes pédagogiques ne soient plus considérés comme vraiment nécessaires.

La situation au contraire devrait donner un coup d'aiguillon pour revoir et peut-être aménager les conditions d'obtention de l'AESI et de l'AESS, peut-être mieux uniformiser au niveau d'une agrégation de l'enseignement obligatoire.

On pourrait également s'inspirer de ce qui se fait dans les pays proches et parlant la même langue, la France, les cantons francophones de la Suisse et le Grand-Duché du Luxembourg. Cela permettrait une intégration à petit pas des diplômes pédagogiques européens.

Jacques NAVEZ

Une heuristique, calquée sur la méthode CBR (Case Based Reasoning), pour résoudre des problèmes de mathématiques

G. Haesbroeck, *Université de Liège - Belgique*

Mots-clés : heuristique, méthode CBR, problème mathématique, théorie des graphes

1. Introduction

De nos jours, de nombreux professeurs de mathématiques estiment qu'il est idéal et nécessaire de proposer à leurs élèves des problèmes à résoudre, c'est-à-dire des exercices nouveaux qui ne peuvent pas être traités par simple routine [2].

Dans la pratique, l'organisation d'un bon enseignement à base de problèmes se heurte à diverses difficultés [1]. Tout d'abord, les élèves craignent beaucoup de tels exercices ... qu'ils réussissent difficilement ; ils n'ont pas toujours la motivation nécessaire pour surmonter de tels obstacles et ignorent souvent que la progression dans leur formation intellectuelle doit passer par ces défis. Par ailleurs, les enseignants éprouvent des difficultés pour bien sélectionner les exercices ni trop faciles, ni trop difficiles, mais intéressants et adaptés à chaque étudiant ; de plus, ils manquent souvent de temps pour proposer de réels problèmes qui, nécessitant généralement une longue période de réflexion, doivent être traités individuellement au rythme de chaque apprenant : en effet, ils ont l'obligation de voir toute leur matière et les programmes scolaires sont chargés ; enfin, ils enregistrent par cette méthode des résultats aux examens et interrogations moins bons qu'en posant des exercices plus systématiques, ce qui est généralement mal perçu dans une société où est prônée la lutte contre l'échec.

La plus grosse difficulté, tant pour les élèves que les professeurs, réside dans le fait que chaque énoncé réclame une méthode particulière de résolution, ce qui rend impossible la systématisation si chère aux apprenants qui cherchent très souvent à exploiter par pure routine des procédés connus, et aux enseignants qui aiment donner des directives précises et efficaces.

Il semble difficile, en première approche, de donner une recette valable pour toutes les situations problématiques ou une méthode spéciale efficace en toute circonstance puisque chaque énoncé est inédit et doit être traité d'après l'espace idéal [3] de chacun, c'est-à-dire de ses connaissances, de son habilité, de ses motivations, ... Il est néanmoins possible de développer, d'une manière générale, les démarches mentales à suivre pour mener à bien toute recherche intellectuelle et notamment pour résoudre un problème. Cette façon idéale de travailler a été systématisée par les informaticiens s'occupant d'intelligence artificielle : dans les années 1980, ils ont introduit la méthode CBR, Case Based Reasoning en anglais ou *méthode basée sur l'étude de cas* en français. L'idée fondamentale consiste à imiter un expert qui donne une ou plusieurs "étiquettes" à chaque problème rencontré, puis mobilise systématiquement ses connaissances et métaconnaissances liées à ces étiquettes : savoirs, expériences, méthodes, ... [4].

2. Description de la méthode proposée

S'inspirant de la conduite de raisonnements humains, la méthode CBR facilite l'exploitation méthodique des expériences antérieures pour parvenir à répondre à des questions actuelles. Elle permet, grâce à un système d'indexation, de retrouver des cas emmagasinés (avec leur solution) qui sont proches du problème traité. Les cas sélectionnés sont éventuellement modifiés pour adapter leur solution à la situation examinée. Si les cas passés diffèrent trop nettement du problème courant, l'intervention d'un expert humain est nécessaire pour imaginer un nouveau cas-type, utile pour la suite et qui sera ajouté au stock des cas connus [6].

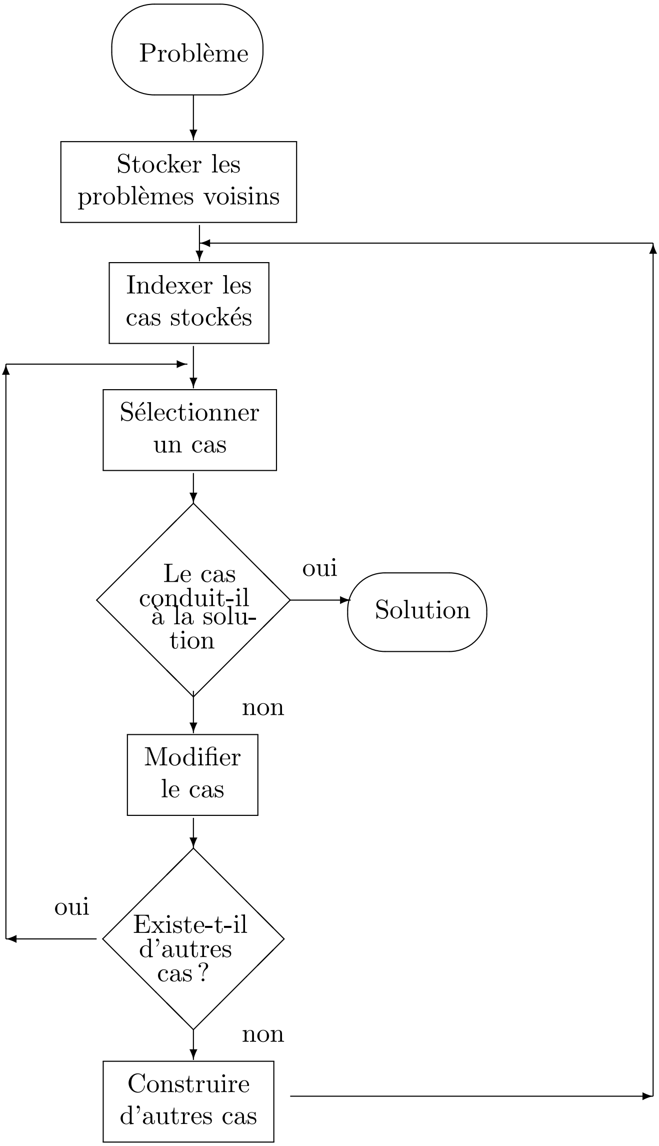


Figure 1

Cette technique peut être adaptée pour la résolution de problèmes mathématiques.

Pour résoudre un problème mathématique, on peut se référer à un stock des solutions apportées à des problèmes connus ou à toutes les connaissances théoriques dont on dispose. A la lecture de l'énoncé, l'élève doit essayer d'extraire de son savoir des éléments susceptibles de l'aider dans sa résolution. Il lui faut tout d'abord situer l'énoncé par rapport à la matière connue : c'est un peu comme s'il passait en revue la "table des matières" des notions connues jusqu'à tomber sur une situation déjà rencontrée et qui se rapproche de l'énoncé considéré. Il s'efforcera ensuite, à plusieurs reprises si nécessaire, d'appliquer la démarche suivie dans le cas connu ou bien de l'adapter. Bien entendu, ses choix seront guidés par son expérience personnelle et les méthodes heuristiques désormais classiques [2, 6, 7].

3. Quelques exemples d'application

Le processus décrit ci-dessus peut être illustré par de multiples exemples, puisqu'il peut être mis en oeuvre lors de la résolution de nombreux problèmes. Nous allons nous contenter de l'illuster par deux exemples, qui nous paraissent typiques et différents. Ce sont des questions posées à des jeunes de 18-19 ans qui s'orientent vers des études universitaires en sciences appliquées ; elles portent respectivement sur de la géométrie et de l'analyse. Pour chacune de ces questions, nous décrivons, de manière assez systématique, la démarche suivie par un étudiant qui a été initié à la méthode préconisée ; nous ne reprenons toutefois pas ses (inévitables) hésitations, tâtonnements, fausses pistes, retours en arrière, ...

Exemple 3.1 Soient ABC un triangle et M, N, P les milieux de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Démontrer que, quel que soit X situé dans le plan déterminé par les trois points A, B et C, on a l'égalité suivante (où $|YZ|$ désigne la distance euclidienne du segment $[YZ]$) :

$$|XA|^2+|XB|^2+|XC|^2-(|XM|^2+|XN|^2+|XP|^2) = |MN|^2+|NP|^2+|PM|^2.$$

Résolution.

a) lire l'énoncé pour en dégager les hypothèses et la thèse ; éventuellement, tracer une figure pour visualiser la situation ;

b) situer le problème en géométrie plane élémentaire ;

c) penser à utiliser la notion de médiane (car l'énoncé fait appel aux milieux des côtés d'un triangle) ;

d) exploiter le théorème de la médiane ; en l'appliquant aux triangles XAB, XAC et XBC respectivement, il livre les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned} |XA|^2 + |XB|^2 &= 2|XM|^2 + \frac{1}{2}\ |AB|^2 \quad (1) \\ |XA|^2 + |XC|^2 &= 2|XP|^2 + \frac{1}{2}\ |AC|^2 \quad (2) \\ |XB|^2 + |XC|^2 &= 2|XN|^2 + \frac{1}{2}\ |BC|^2 \quad (3) \end{aligned}$$

e) effectuer quelques transformations algébriques pour se rapprocher de la thèse : une lecture de celle-ci suggère d'additionner membre à membre les trois égalités ci-dessus, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & 2(|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2) \\ = \ & 2(|XM|^2 + |XP|^2 + |XN|^2) + \frac{1}{2}(|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2) \quad (4) \end{aligned}$$

f) observer, par exemple sur la figure, que les segments de droite joignant les milieux de deux côtés du triangle ABC sont parallèles au troisième côté et en déduire que le théorème de Thales peut être utile : appliqué respectivement aux côtés $[BC], [AC]$ et $[AB]$, il fournit :

$$|MP| = \frac{1}{2}\ |BC|, \quad |MN| = \frac{1}{2}\ |AC|, \quad |NP| = \frac{1}{2}\ |AB| \qquad (5)$$

g) conclure en remplaçant les égalités () dans ().

Exemple 3.2 Trouver la forme générale de la dérivée $n^{\text{ème}}$ (n désignant un naturel arbitraire) de la fonction

$$f(x) = \frac{x+8}{2-x-x^2}.$$

Résolution.

a) connaissant la dérivée de polynômes et de quotients, calculer les premières dérivées successives de f ;

b) constater que ces premières dérivées ne conduisent pas à la forme générale souhaitée, puis penser à transformer la fonction f ;

c) se souvenir de la méthode de décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples qui serait utilisée pour primitiver f et l'appliquer dans ce problème ; on obtient

$$f(x) = \frac{3}{1-x} + \frac{2}{2+x};$$

d) calculer à nouveau les premières dérivées de f, à savoir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{(1-x)^2} + 2\,\frac{-1}{(2+x)^2} \\ f''(x) &= 3\,\frac{2}{(1-x)^3} + 2\,\frac{(-1)\times(-2)}{(2+x)^3} \\ f'''(x) &= 3\,\frac{2\times 3}{(1-x)^4} + 2\,\frac{(-1)\times(-2)\times(-3)}{(2+x)^4} \end{aligned}$$

e) conjecturer, à partir de ces cas particuliers, la forme générale recherchée :

$$f^{(n)}(x) = (n!) \times \left[\frac{3}{(1-x)^{n+1}} + 2 \times \frac{(-1)^n}{(2+x)^{n+1}}\right]$$

g) démontrer la conjecture par récurrence.

4. Analyse graphique de la méthode

Dans toute activité intellectuelle, en particulier dans la résolution d'un problème mathématique, la clé du succès réside assurément dans une bonne organisation et une exploitation intelligente des connaissances.

Cette organisation peut être représentée par un graphe orienté, dont la structure est celle d'un ou de plusieurs arbres dont les noeuds sont les "étiquettes" des cas déjà traités et les arcs les liens possibles entre les divers chapitres ou paragraphes [4]. Par exemple, l'arbre traduisant les connaissances d'un élève en mathématiques a pour racine le noeud "mathématiques" qui donne naissance aux noeuds "géométrie", "algèbre", "analyse", "trigonométrie", ... ; la géométrie se subdivise en "géométrie plane", "géométrie dans l'espace", "géométrie analytique", ... ; la géométrie plane peut être découpée en diverses parties, à savoir "propriétés affines des figures rectilignes”, “propriétés métriques des figures rectilignes”, “circonférence et mesures des angles”, etc ...

La résolution d’un problème consiste à construire, au sein du graphe représentant les connaissances acquises, un chemin dont le dernier noeud permet de fournir la réponse recherchée. Idéalement, ce chemin doit être de longueur minimale ; par ailleurs, il peut ne pas être élémentaire et peut même comporter des circuits.

En guise d’illustration, examinons le chemin choisi par l’étudiant pour résoudre les deux exercices qui lui étaient proposés. Pour ne pas surcharger la figure, nous n’avons tracé qu’un fragment (obtenu en ne retenant que les noeuds et arcs exploités sur nos exemples) du graphe représentant l’état des connaissances mathématiques de l’élève, les noms attribués aux noeuds étant ceux des matières (disciplines, chapitres, paragraphes, théorèmes) connues ; il est bien entendu que ce graphe est complet et symétrique.

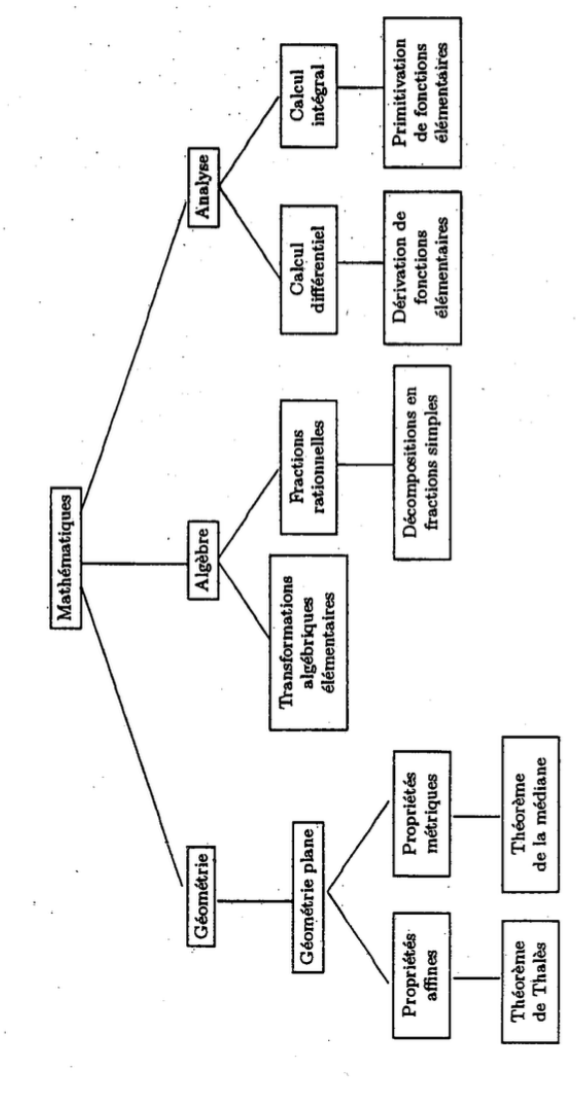


Figure 2

Pour résoudre le premier problème, l'étudiant a emprunté mentalement le chemin (pas entièrement tracé sur la figure) dont les noeuds sont, respectivement, “mathématiques”, “géométrie”, “géométrie plane”, “propriétés métriques des figures rectilignes", "théorème de la médiane", "transformations algébriques élémentaires", "propriétés affines des figures rectilignes", "théorème de Thalès" et "transformations algébriques élémentaires". Pour le second problème, le chemin suivi comporte, dans l'ordre, les noeuds suivants : "mathématiques", "analyse", "calcul différentiel", "dérivation de fonctions élémentaires", "primitivation de fonctions élémentaires", "décomposition de fractions rationnelles en fractions simples" et "primitivation de fonctions élémentaires".

5. Conclusions

La méthode proposée n'est évidemment pas révolutionnaire puisqu'elle ne fait que présenter méthodiquement la voie que les chercheurs scientifiques suivent souvent de façon inconsciente.

L'utilisation de cette méthode donne une bonne initiation au traitement abstrait de l'information qui est assurément au coeur de la société post-industrielle [4]. Les problèmes mathématiques se prêtent d'ailleurs fort bien à cet apprentissage car les situations rencontrées, tout du moins au niveau scolaire, sont élémentaires, tandis que le langage et les raisonnements y sont précis. Ainsi, en apprenant, lors de la résolution de problèmes mathématiques, à devenir méthodique, à trier puis analyser et gérer les informations disponibles, l'élève développe des qualités réclamées dans de nombreuses occupations professionnelles de notre époque.

Cette méthode constitue également un excellent outil en didactique même des mathématiques.

En effet, à la simple lecture d'un problème, les apprenants se trouvent vite "désarçonnés", ce qui provoque quelquefois un véritable "blocage psychologique" pouvant être paralysant [1]. Initiés à une telle méthode, les élèves qui reçoivent un problème à résoudre lisent attentivement l'énoncé pour en dégager les hypothèses et la thèse, puis passent en revue leur "espace idéal" à la recherche de situations déjà rencontrées et se rapprochant de celle considérée ; ils sont dès lors de suite actifs sur le plan intellectuel car ils savent comment démarrer leurs recherches, ce qui les motivera certainement et leur donnera confiance pour la suite de leurs investigations.

De même, les enseignants sont trop souvent enclins à transmettre leur savoir bien structuré. Cette pédagogie est employée principalement parce qu'elle sécurise les professeurs qui prennent ainsi d'emblée l'initiative dans la classe en présentant leur matière d'une manière incontestable. Malheureusement cette méthode ne donne aux étudiants qu'une fausse image du travail de recherche à effectuer en mathématiques. Il est plus difficile pour un enseignant d'adopter une pédagogie par problèmes. L'obstacle majeur réside souvent dans des sentiments de malaise et d'inefficacité qu'éprouve alors le professeur. S'il adopte l'heuristique proposée, le pédagogue pourra aisément guider ses élèves en leur rappelant des leçons antérieures ou en leur suggérant l'exploitation de techniques déjà rencontrées ; il se sentira dès lors plus utile dans son rôle de "formateur-guide".

Bibliographie

[1] Bair J., Haesbroeck G. : Etude statistique sur la perception des problèmes mathématiques dans l'enseignement, *Actes du 15ème Colloque AIPU*, 1997, pp. 615-624.

[2] Bair J., Haesbroeck G., Haesbroeck J.J. : *Formation mathématique par la résolution de problèmes*, en préparation.

[3] Bair J., Hamende G. : *Mathématiques générales, problèmes résolus*, De Boeck Université, 1992.

[4] Kuntz G. : Conjectures sur l'utilité d'une formation mathématique pour la vie économique et sociale, *Repères - IREM*, 18, 1995, pp. 5-34.

[5] Mason G. : *L'esprit mathématique*, De Boeck Université, Bruxelles, 1997.

[6] Medsker L.R. : *Hybrid Intelligent Systems*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[7] Polya G. : *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod, Paris, 1965.

Adresse de l'auteur :

Gentiane HAESBROECK
Université de Liège,
Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales,
Boulevard du Rectorat 7, Bâtiment B31
4000 Liège
Belgique
E-mail : G.Haesbroeck@ulg.ac.be

Les démonstrations : une vision génétique et en spirale

F. Buekenhout, *Université libre de Bruxelles*

1. Introduction

1.1. D'abord des références (mais pas toutes)

Voici quelques livres qui m'ont longuement ou brièvement inspiré et qu'il me semble intéressant de faire circuler. Ce n'est pas à proprement parler la bibliographie de mon exposé et encore moins celle de mon sujet. L'ordre adopté est aléatoire.

– Imre Lakatos. 1976. Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery. Cambridge University Press.

  Un grand classique. Passionnant. Le dialogue des arguments et des définitions qui s'adaptent pour que les démonstrations fonctionnent. En filigrane, une belle histoire des polyèdres. Tout à fait dans l'esprit "génétique et en spirale". Existe en traduction française (référence*).

– Lee V. Stiff et Frances R. Curcio (éditeurs). 1999. Developing mathematical reasoning in Grades K-12. 1999 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics.

  Un livre qui tombe bien à propos et qui couvre le raisonnement de 5 à 17 ans. Constitué d'articles indépendants élaborés pour la plupart par des professeurs ayant fonctionné sur le terrain. D'une richesse considérable. Notamment par la foule de références qu'il sera cependant difficile de réunir chez nous.

– Daniel J. Velleman. 1994. How to prove it. A structural approach. Cambridge University Press.

  Un cours pour apprendre à démontrer. Au niveau de la fin du secondaire et du supérieur. Met l'accent sur le fait qu'une démonstration, tout comme un programme informatique, possède une structure qu'il est possible et utile de faire apparaître dans son exposé.

– André Antibi. 1988. Étude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions. Thèse du Doctorat d'État. IREM de Toulouse.

Très intéressant. Concerne l'enseignement des démonstrations pour un large public d'élèves et étudiants à la fin du secondaire et au début du supérieur.

Merci à Alfred Warbecq qui me l'a fait découvrir.

– Commission Inter-Irem "Histoire et épistémologie des mathématiques". 1989. La démonstration mathématique dans l'histoire. IREM de Besançon et IREM de Lyon.

  Un livre essentiel par la richesse de la documentation historique analysée en 1ère main par de nombreux auteurs et par la pertinence de la réflexion. Avec, en tête d'affiche, notre Nicolas Rouche et sa conclusion qui vaut le détour génétique et en spirale, citée plus loin dans le présent texte.

– A.G. Hamilton. Logic for mathematicians. 1978. Cambridge University Press.

  Très clair et abordable. Pour l'enseignement supérieur.

– Harold P. Fawcett. 1938. The nature of proof. A description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof. National Council of Teachers of Mathematics.

  Un livre bien intéressant élaboré sur le terrain et qui a mon âge. Toujours disponible au NCTM et pas cher.

– Roger B. Nelsen. 1993. Proofs without words. Exercises in visual thinking. Mathematical Association of America.

  Un "must" ... Les démonstrations par l'image et sans texte. Il y a un deuxième volume que je ne possède pas.

– Pour la Science. 1990. La mathématique des jeux. Belin. Paris.

  Passionnant. Pour nous rappeler que la logique, le raisonnement et les démonstrations peuvent s'exercer très simplement à l'occasion de jeux que tous les enfants pratiquent à l'insu de leurs profs pendant les vacances et les jours de pluie.

– Martine Cnudde et Georges Delande. 1992. Apprendre à démontrer au cours de géométrie. 200 exercices résolus à l'usage des degrés d'observation et de transition de l'enseignement secondaire et des écoles normales. Éditions Erasme.

  Cocorico ! C'est du belge et du bon. Un livre conçu sur le terrain de nos classes avec un bon équilibre tenant compte des possibilités d'adolescents et des nécessités de la rigueur. Un outil utilisable aujourd'hui et trop peu connu. Usage direct possible dans les classes malgré l'apparition de nouveaux programmes entretemps.

– Monique Parker. 1994. Plaidoyer pour une logique informelle. Math. Péda. 95, 53-64.

  D'accord, ceci n'est pas un livre mais c'est la faute à Magritte. Un petit article qui peut rendre bien des services. La logique fut longtemps formelle dans son enseignement. Il importe qu'elle se transmette et se constitue chez l'élève de manière informelle.

– Michel Demal. 1998. Géométrie des transformations à l'école primaire. CREM, Nivelles.

  Pas un livre, mais un texte fondamental pour notre sujet dans lequel l'auteur expose en 30 pages les traits essentiels de l'enseignement qu'il a développé avec des collaboratrices pour de nombreuses classes de la 1ère à la 6ème primaire et ce depuis environ 15 ans.

1.2. Les mathématiques traversent un âge d'or.

C'est le constat d'un des grands mathématiciens de Belgique actuels : Pierre van Moerbeke, professeur à l'UCL que j'ai entendu sur ce sujet il y a quelques années.

Ce constat est largement partagé. Des grands résultats spectaculaires "tombent" régulièrement et ce mouvement s'accélère. Il suffit de penser dans le désordre au théorème de Fermat, à la classification des groupes simples finis, aux théorèmes de Gödel, au théorème des 4 couleurs, à la conjecture de Kepler et à une foule d'autres résultats. Il ne serait pas hasardeux d'élaborer une liste prestigieuse comprenant au moins un grand résultat par an depuis 1900. L'expliquer serait autre chose.

Et ce siècle aura vu la naissance de l'informatique, science nouvelle et véritable rouleau compresseur. Science mathématique ?! Il aura vu aussi la naissance et le développement de la Recherche Opérationnelle, la discipline strictement mathématique possédant le plus d'applications avec la Statistique.

Dans cette explosion, la démonstration occupe une place centrale, incontournable, omniprésente. Elle figure parmi l'essentiel des mathématiques. Avec les concepts ! Et avec quelques aspects que je ne cherche pas à cerner ici. La démonstration est la grande méthode d'investigation par excellence des mathématiques.

A vrai dire, l'informatique a fait exploser en mathématique une autre méthode scientifique essentielle qui est l'expérimentation, pratiquée depuis toujours mais aujourd'hui accessible à grande échelle. De plus, elle intervient de manière spectaculaire et massive dans une foule de démonstrations. Peut-on vraiment parler d'un théorème des 4 couleurs ? Du théorème de Hales (1998) prouvant la conjecture de Kepler ? On peut voir dans l'avènement de l'outil informatique dans la mathématique, l'annonce d'un nouvel âge d'or selon les uns et de l'apocalypse selon d'autres. Ce n'est pas l'objet de mon exposé.

La démonstration quant à elle, s'est fortifiée. Elle a permis d'établir plus solidement et souvent de dépasser de nombreux résultats du passé. Prenant sans cesse plus de confiance, des individus ou des collectifs ont élaboré des démonstrations de plus en plus longues et de plus en plus difficiles. Les dizaines de pages sont une banalité et il n'est pas rare de se trouver dans les centaines voire plus. La classification des groupes simples finis, un monstre évalué à 15.000 pages par D. Gorenstein, le "prophète" de cette croisade, est soumise depuis quelques années à une révision, à une preuve de deuxième génération qui fera baisser le nombre de pages à 5000 environ dans quelques années. Il existe d'importants développements de troisième génération. On apprendra à évaluer les longueurs de démonstrations en termes plus fins qu'un nombre de pages.

1.3. Une invention des Grecs.

L'usage écrit explicite et systématique des démonstrations apparaît dans l'Antiquité Grecque. De manière précise, elle éclate soudain dans les Éléments d'Euclide et dans d'autres oeuvres de ce mathématicien, vers - 300 pour autant que nous puissions en juger fidèlement sur base de textes parvenus jusqu'à nous.

Des travaux récents de Karine Chemla (CNRS, Paris) montrent que des démonstrations écrites explicites apparaissent également (de manière supposée indépendante du courant grec) dans les travaux du grand mathématicien chinois Liu Hui (vers +260).

Par ailleurs, il me semble qu'un large consensus se dégage pour penser que des travaux mathématiques plus anciens que nous possédons par écrit ou non, ont donné lieu à des démonstrations transmises par voie orale ou non explicitées. C'est une donnée à manier prudemment mais d'une importance cruciale pour mon sujet à savoir le développement d'une conception génétique des démonstrations. Il existe des travaux permettant de concevoir, prudemment je le répète, une préhistoire des démonstrations. L'essentiel ici est de noter que ce point de vue requiert effectivement une conception non figée de ce qu'est une démonstration.

1.4. Quand y a-t-il démonstration ?

Dès qu'il y a un raisonnement déductif. Un seul suffit. Au point de vue génétique et au point de vue de la logique mathématique.

1.5. Le point de vue génétique

Il est basé sur l'idée que les notions mathématiques naissent et qu'elles évoluent tant dans l'histoire de l'humanité que dans celle des individus. Que leur naissance est précédée d'une gestation. Qu'il importe de retracer et de comprendre les étapes de cette évolution afin d'aider tous les intéressés dans leur maîtrise progressive des notions. Qu'il faut cesser de considérer les mathémaiques et les démonstrations comme des produits achevés et figés.

1.6. Les démonstrations pour tous ?

En ce qui concerne les mathématiques et les démonstrations en particulier, je vois d'ici l'ironique objection muette ou non de quelques-uns.

Bravo pour l'âge d'or des mathématiques mais l'élève moyen ne deviendra pas un mathématicien. Et le professeur quant à lui manque de temps pour quitter des rails déjà bien difficiles à suivre.

Ma conviction est qu'un enseignement génétique des démonstrations, c'est-à-dire un souci pour le raisonnement déductif est accessible dès le plus jeune âge et tout simplement indispensable à tous. Raisonner sans aucun doute, chacun conviendra que c'est nécessaire. Mais raisonner déductivement ? C'est moins visible je le conçois mais je répète ma conviction et je vais tenter d'en éclairer les motifs.

1.7. Léonard de Vinci (1452-1519)

Un des plus grands hommes de tous les temps. Pas tellement reconnu comme mathématicien ce qui est dommage à mon sens. J'en livre une citation très forte. Elle est de deuxième main et j'aimerais la vérifier. Elle provient du "Trattato della pittura" (année ?).

"Aucune occupation de l'esprit humain ne peut s'appeler une science vraie si elle ne procède pas par des démonstrations (preuves ?) mathématiques."

Il ne fait aucun doute que la déduction participe des sciences et des techniques. Déterminer le moment et les circonstances de l'éclipse solaire du 11 août 1999 dans nos régions relève notamment de la déduction. C'est un exploit devenu banal pour les astronomes. Et reconnu par tous. A comparer avec des élucubrations foireuses et méprisables dont les médias se font tristement l'écho. Gérer les ressources alimentaires journalières d'une population de plusieurs millions de personnes exige une prévision précise et particulièrement complexe à laquelle la déduction participe. Le diagnostic médical n'est pas exclusivement déductif mais la déduction y participe de manière importante. Former longuement un futur médecin à la déduction n'est certainement pas un luxe.

1.8. La vie de tous les jours (Août 1999)

Vécu sur la route des vacances, en Suisse, dans un hôtel. "Chaque coupon donne droit, dans le cadre d'un séjour (à partir d'une nuit), à un cocktail sans alcool par personne et par chambre." Quel était donc le sens du mot "et" ? Pour ma part, je n'ai pas osé déduire de cet énoncé que ma femme et moi aurions droit chacun à un cocktail. Nous l'avons eu sans discussion. J'ai renoncé à écrire cet énoncé avec des quantificateurs.

1.9. Faut-il encore habituer nos élèves à démontrer ?

C'est la première question posée par le comité d'organisation du Congrès. Comment douter de la réponse, de ma réponse ? Pourtant le doute existe. Et je crains que les démonstrations ne soient largement en voie d'évacuation ou déjà évacuées. J'espère me tromper. Sinon, les irréductibles iront se réfugier à Mons sous la conduite de Michel Demal qui anime déjà la résistance avec des enfants et d'autres.

1.10. Le message de Michel Demal.

C'est difficile les démonstrations ? Bien sûr. Faut-il évacuer pour autant ? Si c'est essentiel, ce que je crois, il faut travailler pour faciliter.

Il y a de bons exemples. Demal et des collaborateurs en nombre non négligeable pratiquent la démonstration avec des enfants à partir de 6 ans et de manière systématique durant toute l'année scolaire de la 1ère à la 6ème primaire. Par des jeux, rien que des jeux. Mathématiques. Inventés et créés pour la géométrie. C'est une expérience déjà riche et à vrai dire incroyable. Mais vraie. Il faut forcément adopter une vision génétique des démonstrations. Et la développer en spirale. Il y faut autant de patience que dans l'apprentissage de la natation. Au moins une séance par semaine, avec obstination, sans jamais douter du résultat final, sans se décourager. Sur base d'une analyse fine de tous les enchaînements. En se disant bien que rien n'est donné dans les têtes. Demal dit que rien n'est gratuit mais que tout peut et doit être expliqué et enseigné. Par "petites démonstrations" successives, élaborées ensemble avec la participation de tous, discutées en petits groupes, avec du matériel, sans rechercher la rédaction formelle mais en mettant progressivement la logique en place. En jouant. La stratégie de développement de Michel Demal est basée sur quatre spirales entrelacées :

- la spirale des objets (ou formes) géométriques ;
- la spirale des transformations ;
- la spirale de la logique formelle ;
- la spirale de la méthode scientifique.

Les enfants y prennent beaucoup de plaisir. L'enjeu est de taille. Il s'agit ni plus ni moins de mieux raisonner. Ce n'est pas l'apanage des mathématiciens. C'est vital dans un monde scientifique et technique de plus en plus complexe. Bronzer ? Oui. Mais pour combien de temps. Réfléchir et raisonner correctement, c'est pour la vie.

1.11. Que pense la base de tout ceci ?

Y croit-elle ? Est-elle motivée par la perspective qu'offrent les démonstrations ? La loi du moindre effort n'est-elle pas de mise ?

Avant de conclure sur l'état de la base, un "petit sondage" pourrait nous éclairer. Pour bien faire, il faudrait évidemment le conduire sur une plus grande échelle et dans des conditions plus efficaces. La SBPM est-elle armée pour le faire ?

2. Sondage sur les démonstrations

Question 1. Votre expérience la plus avancée avec des démonstrations au cours de vos études (entourer ce qui convient) :
Humanités. École normale (instituteur). Régendat. Licence. Doctorat.

Question 2. Votre position personnelle vis-à-vis des démonstrations, indépendamment de cours suivis ou à donner :
Vous aimez ça : OUI, NON, ABS.

Question 3. En tant que professeur, futur professeur, ancien professeur vous estimez qu'il faut :
- donner des démonstrations : OUI, NON, ABS ;
- faire apprendre des démonstrations : OUI, NON, ABS ;
- faire vérifier des démonstrations : OUI, NON, ABS ;
- faire chercher des démonstrations : OUI, NON, ABS.

Question 4. Pour vous, il n'y a pas de mathématiques sans démonstrations. OUI, NON, ABS.

Question 5. Une démonstration peut-être élaborée et communiquée par une succession d'images (un film) sans texte et sans commentaire. OUI, NON, ABS.

Question 6. Une démonstration peut consister en un dessin unique. OUI, NON, ABS.

Question 7. Des démonstrations ont existé avant l'invention de l'écriture. OUI, NON, ABS.

Question 8. Des démonstrations sont possibles à l'école primaire. OUI, NON, ABS.

Question 9. Des démonstrations sont indispensables à l'école primaire. OUI, NON, ABS.

3. Le cas de Sir Christopher Zeeman

(d'après une interview parue dans "European Mathematical Society Newsletter", 30, 1998, 14-19).

Zeeman est anglais et c'est un cas ! Ce n'est ni un chanteur populaire, ni un joueur de football transféré pour quinze millions de livres, ni un magnat de la presse, ni un grand propriétaire terrien et il ne s'est pas jeté du haut de la Tour de Londres en étant retenu seulement par les bretelles. Un mathématicien. Et anobli par la reine. Rien à voir avec les démonstrations ? Patience. En 1978, il est invité par la "Royal Institution" à faire des "Christmas Lectures" pour des enfants. L'événement sera couvert par la télévision (BBC) et fera l'objet de six heures d'émission durant des heures de grande audience. Durant les mois précédents, le dialogue s'engage entre Zeeman et la BBC.

Zeeman : "Les mathématiques sont une histoire de théorèmes et de démonstrations."

BBC : "Oh mais nous ne pouvons pas vous avoir devant un tableau et tournant le dos à la caméra."

Zeeman : "C'est OK. Dans ce cas, j'utiliserai un rétroprojecteur et je ferai face au public."

BBC : "Non non. Ce serait trop comme une salle de classe. Vous ne comprenez pas. Voyez-vous, le but de la télévision est de divertir."

Zeeman : "Oh oui, les démonstrations peuvent être très divertissantes et inspirantes et belles."

BBC : "Nous vous conseillons fermement de ne donner aucune démonstration."

Zeeman : "J'insiste pour donner des démonstrations."

BBC : "Nous vous défendons de donner des démonstrations."

Zeeman : "Bien, vous pouvez vous jeter dans le fleuve car je suis payé par la Royal Institution pour faire des cours à des jeunes gens et vous n'êtes pas forcés de le retransmettre si vous ne le voulez pas."

BBC : "Très bien, vous gagnez. Montrez-nous vos démonstrations."

Les leçons eurent beaucoup de succès.

4. Philosophie des démonstrations.

4.1. Une des grandes difficultés

Une des grandes difficultés dans l'enseignement des démonstrations est qu'elles constituent une méthode d'étude et de découverte des mathématiques et pas un objet du moins dans la majeure partie de cette étude. De ce fait, elles demeurent souvent à l'arrière-plan même quand on est plongé dans...une démonstration. En l'absence du formalisme rituel qui les accompagne elles demeurent en quelque sorte invisibles.

Des étudiants de 2ème licence m'ont dit, en groupe, cette année, qu'ils ne sont guère entraînés à produire des démonstrations. Je leur ai dit que c'est vrai et faux à la fois. Ils ont cette pratique sans en prendre conscience. Quand elles sont explicitement présentes le sens des démonstrations échappe à une majorité de pratiquants faute d'être jamais analysé.

Dans deux manuels (de 2ème et 3ème secondaire) dont je suis coauteur, un chapitre entier s'appelait "démontrer" pour insister sur l'action plutôt que la contemplation.

Un point de vue différent, plus élevé, est précisément de considérer les démonstrations comme un objet d'étude et d'aborder leur sens. On entre alors dans la philosophie ou, ce que je ne tenterai pas, dans la théorie mathématique de la démonstration. Je me suis intéressé à la philosophie des démonstrations depuis les années 1960 quand, jeune diplômé, je me suis mis à réfléchir aux mathématiques donc à leur philosophie. J'ai lu beaucoup. J'ai collectionné des textes, rédigé moi-même, fait des exposés et j'ai constitué au fil du temps trois gros dossiers accompagnés de livres.

4.2. Surprise.

J'ai découvert avec une surprise naïve que ce thème est l'un des plus fréquentés de la philosophie mathématique. Plus surprenant encore. C'est un sujet très fréquenté de la didactique des mathématiques et de son histoire. J'ai compris peu à peu que je partageais la surprise de mes ancêtres et contemporains mathématiciens depuis l'invention-découverte de cet outil redoutable et redouté au sein de la Grèce Antique (Thalès).

Cette époque nous a notamment laissé les Éléments d'Euclide dans lesquels cette méthode est systématisée dans un ensemble structuré d'environ

450 Propositions (Théorèmes). Ce livre figure parmi les plus grands "best-sellers" de tous les temps. Malgré le slogan de Dieudonné : "A bas Euclide", ce dernier tient bon et nous énerve souvent quand un collègue ne veut rien voir d'autre. Il faut le redire, l'histoire des démonstrations commence avec Euclide mais elle ne s'achève pas avec lui. En fait, il ne fait guère de doute que la démonstration est présente de manière implicite non-écrite dans les développements mathématiques écrits de cultures plus anciennes et pour ma part, je crois comme d'autres à une mathématique du néolithique mais ceci est une autre ... préhistoire.

Pour demeurer prudent, j'affirme donc que depuis Euclide au moins, la démonstration figure au centre de la science mathématique et qu'elle en constitue la méthode principale sinon unique. J'en profite pour signaler une thèse récente remarquable : Olivier Keller. 1998. Préhistoire de la géométrie : la gestation d'une science d'après les sources archéologiques et ethnographiques. Thèse de doctorat. Paris.

5. Comment enseigner les démonstrations ?

Et toujours plus de questions posées par les organisateurs du Congrès.

5.1. J'ai déjà répondu partiellement plus haut.

Comme la natation ! Dans l'eau. Chaque semaine pendant 5 ans. Comme la lecture ! Chaque... jour. Dans les textes. Il faut habituer les moins de trois ans aux livres. Il faut qu'ils les aiment. Il faut habituer les moins de 5 ans au raisonnement et les moins de 10 ans aux enchaînements de raisonnements. Il faut qu'ils les aiment, qu'ils en perçoivent le pouvoir, leur pouvoir. Il faut, comme dans tout ce qui importe, une patience infinie, féliciter, corriger, critiquer gentiment et ... montrer l'exemple.

5.2. Mais comment ?

"De question en question" comme dit le GEM. L'enfant demande nécessairement "Pourquoi ?". Il faut entretenir cette flamme. L'éducation l'étouffe trop souvent.

5.3. Mais encore ?

Il faut des jeux, toujours des jeux. Même chez les ados ? Bien sûr. C'est très sérieux de jouer mais il faut en percevoir la portée. Pas de fausse honte. Cet enjeu semble faire son chemin. Jouer pour mieux raisonner. Les jeux ne manquent pas. Les manuels n'en comportent guère.

Mes coauteurs et moi avions naguère (vers 1980) pratiqué de la sorte. Sans être pris au sérieux je crois. Un bon jeu qui est trop difficile doit être simplifié. Par le prof. Sur le terrain. C'est indispensable. L'expérience fait retenir quels sont les meilleurs jeux : ceux qui accrochent, qui marchent et qui font progresser sur les spirales mathématiques qui sont le véritable but. On ne joue pas pour jouer mais pour avancer dans les programmes. Pour que les maths se fassent dans la joie. Je demeure prêt à animer une séance de ce genre pour un groupe d'élèves à partir de la 4ème.

5.4. Les démonstrations : à quel niveau ?

A tous les niveaux. A quel âge petit Louis a-t-il commis sa 1ère déduction ? Question essentielle. Je ne peux répondre. Certainement avant 6 ans. Avant la maternelle même. Et si ce n'est pas le cas ? Hélas, "tout se joue avant 6 ans" et ce n'est pas en 1ère candidature qu'il faut parler d'égalité des chances. C'est avant 3 ans.

Seulement, cette idée-là dérange tout le monde : les pédagogues, les enseignants, les politiciens et ... les victimes, parents et jeunes plus âgés. Les sciences cognitives font leur révolution. L'intelligence fait l'objet d'études étonnantes dans le monde vivant y compris les plantes.

Oserais-je dire pour autant que mon beau sapin raisonne (et que l'écho résonne ...) ? Non. Ce que j'essaie de dire est qu'il faut lutter contre deux slogans :

– on ne pourrait pas apprendre à démontrer avant l'âge de 13-14 ans ;

– les démonstrations ne concernent qu'une élite (donc personne car il est curieusement devenu insultant d'être élitiste).

En revanche, il faut non seulement croire à l'extraordinaire potentiel cognitif de chacun (sauf handicap) mais le développer. C'est vital pour tous.

5.5. Les démonstrations sont-elles nécessaires ou superflues ?

Je crois avoir déjà répondu. Si la communauté des professeurs de mathématique de l'enseignement public est convaincue que les démonstrations sont superflues nous sommes mûrs pour trois conséquences. Un cours de maths lui-aussi superflu ou réduit à peu de choses, des cours-remêdes au début du supérieur (dont l'idée voire la nécessité émerge déjà) et ... un enseignement privé pour nantis. Voilà où conduirait une démagogie effrénée. Toute ressemblance avec un pays existant ou ayant existé serait purement fortuite.

5.6. A quel moment de la scolarité ?

J'ai répondu. Pour tous, toujours. Comme la lecture, l'écriture, le calcul, l'éducation physique ...
Surtout à l'école maternelle.
Surtout à l'école primaire.
Surtout à l'école secondaire.
Surtout dans la formation des professeurs.

5.7. Quand s'impose la démonstration ?

Chaque fois que se pose une question susceptible de progresser par le raisonnement. Et si la démarche n'aboutit pas ? C'est normal. Ne pas aboutir est la norme. Ce qui est extraordinaire, c'est qu'elle puisse aboutir avec les succès que l'on connaît. Le professeur, la maman expérimentés savent quand elle peut aboutir.

6. Le statut formel traditionnel des démonstrations.

6.1. Le stéréotype traditionnel

Le stéréotype traditionnel des démonstrations est dépassé complètement dans le sens où ce serait le seul cadre dans lequel se pratique la démonstration. C'est ce préjugé qui est dépassé. Le cadre traditionnel conserve néanmoins une grande valeur. Dans les mathématiques avancées qui se publient, il se pratique à grande échelle. Décrivons-le brièvement.

Tout commence par l'apparition du mot THÉORÉME qui est une sorte de signal. Il y a des synonymes tels que PROPOSITION ou LEMME. Le théorème comprend un ÉNONCÉ. C'est ce qu'on retient plus tard en vue de l'appliquer dans d'autres situations.

Dans l'énoncé on distingue deux parties.

La première est ce qu'on appelle l'HYPOTHESE qui peut comporter plusieurs propriétés. Ce sont les données. Ce qui s'y trouve peut-être considéré comme vrai dans tout le texte couvert par le théorème. C'est le point de départ d'une sorte d'excursion qui est la démonstration.

La deuxième partie est ce qu'on appelle la THESE. Elle peut comporter plusieurs propriétés. C'est le point d'arrivée assigné. Le but est de relier l'hypothèse à la thèse par une suite finie d'inférences (de déductions) dont les points d'arrivée successifs peuvent être considérés comme vrais du fait que l'hypothèse est vraie. A la fin, la thèse est vraie aussi.

Après l'énoncé du théorème, on va à la ligne et on écrit DÉMONSTRATION. Alors, l'excursion commence. Elle est basée sur un très petit nombre (trois) de règles simples gouvernant l'inférence à savoir le passage de certains énoncés vrais à d'autres qui le deviennent. Cette grammaire est bien la plus simple qu'on puisse concevoir. C'est la LOGIQUE FORMELLE codifiée depuis Aristote. La grande difficulté est rarement expliquée. Les hypothèses portent sur l'un ou l'autre concept. Il importe de savoir ce qu'il signifie. De quoi parle-t-on ? L'énoncé ne le dit pas. C'est supposé connu avant. Le plus souvent on est déjà censé connaître des propriétés vraies du concept vues auparavant. En vérité, l'hypothèse comporte une partie explicite et une partie cachée non explicite qui mobilise la connaissance, la mémoire et l'imagination. La FIN de la démonstration est marquée d'un signe distinctif tel que C.Q.F.D. ou, de plus en plus souvent aujourd'hui, d'un petit carré blanc.

6.2. La partie cachée

La partie cachée d'un texte démonstratif représente la difficulté majeure de la lecture ou de la recherche.

Un effort pédagogique en vue de la réduire et d'entraîner des élèves à la "démonstration pure" m'a amené à proposer la pratique démonstrative dans le cadre d'un jeu tel que le mastermind. Cela fonctionne très bien dans les classes. Mais l'idée n'a guère été suivie. Les détracteurs ont beau jeu : le but de l'enseignement mathématique n'est pas de jouer au mastermind. C'est un procès d'intention. Mon but était d'utiliser le mastermind pour apprendre ce qu'est une démonstration.

6.3. Les concepts.

J'ai déjà déclaré que les concepts occupent une place prépondérante en mathématique. Si on oublie les démonstrations, il peut demeurer les concepts. Quand on exerce l'oeil critique du 20ème siècle vis-à-vis d'un texte élémentaire du passé ou actuel, c'est presque toujours du côté de la précision et de la pertinence des définitions que se situent les difficultés. Les définitions doivent pouvoir être utilisées dans des démonstrations...

Voici un exemple qui m'est raconté par deux jeunes amis, l'un régent, l'autre licencié. Dans l'ouvrage comportant l'essentiel du cours de mathématique au premier degré dans une des meilleures écoles de Wallonie-Bruxelles on lit : "Un polyèdre est un solide ne pouvant jamais rouler quand on le dépose sur une table." J'ai bien compris. Exemple : une pomme.

6.4. L'expression.

Une autre difficulté bien connue est d'exprimer correctement ses idées au sein d'une démonstration. Et, dans un stade suivant, de les exprimer par écrit. Il n'y a pas d'activité qui invite davantage à une expression claire, précise et correcte. N'est-ce pas une formation cruciale dans notre société de communication ?

En résumé, j'estime qu'il ne faut pas jeter purement et simplement les démonstrations ainsi formalisées. Elles ne perdent rien de leur valeur proverbiale et millénaire qui a fait des Éléments d'Euclide un modèle universellement admiré et imité. Les professeurs qui sont satisfaits de cette activité doivent la poursuivre. Tous devraient l'apprendre au moins à titre personnel, s'y exercer et rédiger eux-mêmes. Pourquoi ? Parce qu'ils sont professeurs de mathématique et que la mathématique fonctionne comme ça.

7. Le point de vue génétique

7.1. Michel Demal :

"En logique, rien n'est donné, tout se construit". Tout se construit, longuement, patiemment, méthodiquement dès la petite enfance en misant sur l'extraordinaire potentiel cognitif sous-exploité. Le moteur : les questions. Notamment celles des enfants. La meilleure : "pourquoi" ? On explique, on réfute et on argumente. Et au secondaire ? Pourquoi pas au minimum un chapitre spécifique de synthèse sur les démonstrations chaque année dans chaque classe ? La question qui doit encore agiter bien des professeurs est de cerner la nécessité de ce souci. A quoi ça sert ? Voici un grand témoignage d'une profondeur étonnante.

7.2. Le raisonnement plausible et G. POLYA.

La citation suivante fait partie d'un texte intitulé "Organisation du cours de Géométrie Analytique" que Jean Doyen et moi distribuons depuis une vingtaine d'années à la rentrée en 1ère candidature en sciences mathématiques et physiques à l'Université Libre de Bruxelles.

Nous déclarons d'abord : "Le raisonnement est évidemment au coeur de tous nos objectifs. Dans ce domaine capital, on se gardera d'adopter un point de vue étroit limitant le raisonnement à une suite de déductions logiques. Nous ne pouvons mieux faire ... que citer un texte magistral de G. POLYA emprunté à la préface de son livre "Les mathématiques et le raisonnement plausible. Gauthier-Villars, Paris 1958" traduit d'un livre en anglais paru en 1954."

Voici ce qu'écrit POLYA.

"Strictement parlant, toutes nos connaissances, en dehors des mathématiques et de la logique démonstrative (qui est, en fait, une branche des mathématiques), consistent en des hypothèses. Naturellement, il y a hypothèse et hypothèse. Il y a des hypothèses dignes de respect et de confiance comme celles qui sont exprimées par certaines lois générales des sciences physiques. Il y en a aussi qui ne sont dignes ni de confiance ni de respect et certaines d'entre elles sont irritantes quand on les rencontre dans la littérature. Entre ces extrêmes il y a toutes sortes d'hypothèses de types divers.

Nous assurons la validité de nos connaissances mathématiques par un **raisonnement démonstratif** tandis que nous justifions nos hypothèses par des **raisonnements plausibles.**
Une preuve mathématique est un exemple de raisonnement démonstratif, mais la preuve inductive du physicien, la preuve de l'homme de loi, fondée par exemple sur des indices de culpabilité, la preuve de l'historien, basée sur des documents, la preuve statistique de l'économiste appartiennent au raisonnement plausible. La différence entre ces deux types de raisonnement est grande et a des aspects multiples. Le raisonnement démonstratif est sûr, à l'abri des controverses et définitif. Le raisonnement plausible est hasardeux, il peut être controversé, il est provisoire. Le raisonnement démonstratif pénètre les sciences aussi profondément que font les mathématiques mais tout comme les mathématiques, il est incapable, par lui-même, de conduire à des connaissances essentiellement nouvelles sur le monde qui nous entoure. Tout ce que nous apprenons de neuf sur ce monde implique l'intervention du raisonnement plausible, seul type de raisonnement dont nous fassions usage dans la vie courante. Le raisonnement démonstratif a des règles rigides, codifiées et clarifiées par la logique (formelle ou démonstrative) qui est la théorie du raisonnement démonstratif. Les règles du raisonnement plausible sont mouvantes et il n'en existe aucune théorie qu'on puisse comparer sous le rapport de la clarté, à la logique démonstrative ou pour laquelle un accord comparable puisse être réalisé.
Un autre point concernant ces deux espèces de raisonnement doit attirer notre attention. Chacun sait que les mathématiques offrent une occasion excellente d'apprendre le raisonnement démonstratif mais je prétends aussi qu'il n'existe aucun sujet, parmi les matières habituellement enseignées dans les écoles, qui puisse offrir une occasion comparable d'apprendre le raisonnement plausible. Et m'adressant à tous les étudiants que la chose intéresse, quel que soit leur degré de préparation, je leur dis : "Il faut certainement apprendre à démontrer, mais aussi **apprendre à deviner.** Cela peut sembler un peu paradoxal, aussi dois-je insister sur quelques points, afin d'éviter des malentendus possibles.
On considère les mathématiques comme constituant une science démonstrative. Mais ce n'est là qu'un de ses aspects. Les mathématiques achevées, présentées sous une forme définitive, paraissent purement démonstratives et ne comportent que des preuves. Mais les mathématiques en gestation ressemblent à toute autre connaissance humaine au même stade de développement. Vous devez deviner un théorème mathématique avant de le démontrer ; vous devez deviner le principe général de la démonstration avant d'entrer dans les détails. Vous devez combiner les observations et vous fier à

des analogies, vous devez essayer et essayer encore. Le résultat du travail créateur du mathématicien est un raisonnement démonstratif, une preuve ; mais la preuve est découverte par un raisonnement plausible, elle est d'abord devinée. Si l'étude des mathématiques reflète, jusqu'à un certain point, les cheminements de la découverte, il faut y ménager une place pour l'art de deviner, pour l'inférence plausible.
Il y a, avons-nous dit, deux sortes de raisonnements, le raisonnement démonstratif et le raisonnement plausible. Permettez-moi de faire remarquer qu'ils ne sont pas contradictoires ; au contraire, ils se complètent. Dans le raisonnement rigoureux, l'essentiel est de distinguer une preuve d'une présomption, une démonstration valable d'une tentative qui a échoué. Dans le raisonnement plausible, l'essentiel est de distinguer une présomption d'une autre, une présomption plus raisonnable d'une présomption qui l'est moins. Si l'on songe attentivement à ces deux sortes de distinctions, elles deviennent plus claires l'une et l'autre. Un étudiant en mathématique vraiment sérieux, désireux de consacrer sa vie à cette discipline, doit apprendre le raisonnement démonstratif ; c'est son métier et la marque distinctive de sa science. Mais s'il veut vraiment réussir, il doit aussi apprendre le raisonnement plausible ; c'est de cette sorte de raisonnement que dépendra son travail créateur. L'étudiant moyen ou seulement amateur doit aussi goûter au raisonnement démonstratif : sans doute n'aura-t-il que rarement l'occasion de s'en servir directement, mais il doit acquérir un élément de comparaison qui puisse lui permettre de juger les prétendues preuves de toutes sortes qui lui seront offertes dans le monde où nous vivons actuellement. Par contre, dans tout ce qu'il entreprendra, il aura besoin du raisonnement plausible. De toute façon, un étudiant en mathématique ambitieux, quelles que puissent être ses préoccupations à venir, doit essayer d'apprendre les deux sortes de raisonnements, le raisonnement démonstratif et le raisonnement plausible.
Je ne pense pas qu'il existe une méthode absolument sûre pour apprendre à deviner. Au reste, si cette méthode existe, je ne la connais pas et je ne prétends certainement pas la décrire dans les pages qui vont suivre. L'utilisation efficace du raisonnement plausible est affaire de pratique, on l'apprend par l'imitation et l'habitude. J'essayerai de faire de mon mieux pour aider le lecteur désireux d'apprendre le raisonnement plausible, mais je ne peux lui offrir que des exemples à imiter et l'occasion de s'entraîner."

Un texte tellement admirable et profond qui est loin d'être assimilé par le milieu mathématique près de 50 ans plus tard. Il est peut-être possible de le commenter à la lumière d'acquis nouveaux mais c'est une autre histoire. Je me bornerai à signaler qu'à mon sens le raisonnement déductif conçu de manière génétique et le raisonnement plausible interfèrent dans beaucoup d'activités sans que le pratiquant cherche à les séparer.

7.3. Niveaux d'intensité de présence mathématique

Le point de vue génétique doit prendre en compte des niveaux de conscience et de mathématisation effective.

Selon R. Eglash dans African Fractals : Modern Computing and Indigenous Design, Rutgers University Press, 1999 (dont j'ai pris connaissance jusqu'ici par un résumé seul) on peut identifier un spectre de présence de mathématiques dans une culture. Des structures inconscientes (comme chez les abeilles) "ne comptent pas comme connaissances mathématiques, même si nous pouvons utiliser les mathématiques pour les décrire." Des structures intentionnelles, comme des plans de décoration, peuvent impliquer des mathématiques de manière implicite (comme dans une graduation) ou bien de manière explicite (comme dans des patrons ou des règles nommés), ou même comme des règles pour la manière de combiner des patrons (comme dans des mathématiques appliquées de sortes différentes). Finalement, les "mathématiques pures" comprennent des théories abstraites expliquant les raisons pour lesquelles les règles fonctionnent et comment trouver de nouveaux patrons.

Il est possible d'envisager des variations sur les idées d'Eglash. Les structures inconscientes me paraissent acceptables. Elles interfèrent sans aucun doute avec les autres niveaux au cours de l'activité. Par ailleurs, la notion de conscience dans divers organismes vivants fait l'objet de travaux en sciences cognitives qui peuvent surprendre nos points de vue traditionnels dans ce domaine. Les "mathématiques" des abeilles sont-elles vraiment inconscientes ? J'en doute. Je me réfère à "Pour la Science", Décembre 1988, n° Spécial sur "L'intelligence". Je serais donc personnellement plus nuancé que le résumé cité ci-dessus. Il n'empêche que l'idée de base d'Eglash est remarquablement éclairante. Les niveaux de conscience me semblent notamment bien adaptés à la psychologie de la démonstration.

8. Le développement en spirale

8.1. Le développement d'un enseignement en spirale

Le développement d'un enseignement en spirale est presque automatique dans ce sujet. La simple déduction doit se rencontrer très tôt chez le petit enfant qui en exprime le résultat. L'observateur-parent (bien entraîné) constate qu'il y a eu déduction. Elle demeure forcément inconsciente pour l'enfant. Ce stade survivra durant toute la vie. Il est poussé plus loin à certains moments, rendu conscient.

Pourquoi ? Pour le systématiser, pour le rendre plus performant. Le moteur nous l'avons déjà dit : poser des questions, toujours des questions. Il y a des étudiants à l'université qui lisent une page de syllabus sans se poser une seule question et qui poursuivent de la sorte.

Comment pourraient-ils réussir ? Il faut toujours lire en se posant des questions. Un raisonnement c'est bien. Un enchaînement de raisonnements c'est mieux. Le médecin qui effectue un diagnostic procède à la fois par déduction et par raisonnement plausible. Mais le fil de sa démarche est déductif. Souvent, le professeur ne demande que la réponse. Pour certaines questions, la bonne réponse est le signe d'un raisonnement probablement correct. Dans d'autres cas, le professeur demande une explication. Plus difficile encore, il demande une explication écrite. La critique personnelle, celle d'un groupe, celle d'un professeur s'exerce sur le résultat, sur l'explication orale, sur l'explication écrite. Elle s'exerce sur le sens des concepts utilisés. Le niveau de conscience augmente. La logique se creuse.

8.2. L'hypothèse et la démonstration

Il y a une spirale de l'hypothèse. Comment vient-elle ? Nous prenons de l'information. En écoutant, en touchant, en voyant, en lisant, en puisant dans notre mémoire. Nous la prenons de manière sélective compte tenu de nos besoins, compte tenu d'une question. Nous "lisons" en quelque sorte la "réalité" en l'interprétant. Nous stockons cette information en mémoire où elle rejoint parfois, souvent même, des informations "liées", de nature analogue ou "proche". Nous traitons ces informations et nous les modifions. Ainsi se constituent : question, données ou hypothèse et résultats qui s'adjoignent aux hypothèses à l'occasion de nouvelles questions.

Certains résultats permettent l'oubli effectif de nombreuses informations antérieures qu'ils permettent en fait de reconstituer facilement par un nouveau traitement si nécessaire. Ils permettent de ne pas encombrer la connaissance. C'est l'ébauche de ce qu'on appelle un théorème.

Nous oublions ces antécédents à l'exception d'une chaîne qui le justifie. C'est une démonstration.

D'autres choix de repères, de "théorèmes" sont possibles. Pour un "théorème" donné divers chemins ou "démonstrations" sont concevables. Tout ceci fonctionne en "réseau". La mathématique est un fait social. A l'usage, certains théorèmes et certaines démonstrations s'imposent par diverses qualités, comme des "chefs" en quelque sorte. Il est bien connu qu'une foule de problèmes de géométrie sont inabordables sans le théorème de Pythagore ou alors à un "prix" prohibitif.

La mémoire joue un rôle permanent. Elle accompagne la question, la prise d'information relevante, le traitement en vue de répondre à la question, la conservation du résultat, l'application à la "réalité" initiale, l'évaluation du résultat et son usage ultérieur. Elle est cruciale pour la constitution de "socles de compétences".

8.3. Résumé de techniques de démonstration

Ce qui suit est un remarquable précis de techniques qui peuvent être engagées progressivement et au fil des années dans l'apprentissage des démonstrations.

D'après Daniel J.Velleman. How to prove it. A structured approach. Cambridge U.P. 1994.

Pour démontrer une thèse de la forme :

1. P implique Q :
   (a) Supposer que P est vrai et démontrer Q.
   (b) Prouver la contraposée c'est-à-dire, supposer que Q est faux et démontrer que P est faux.
2. Non P :
   (a) Réexprimer comme une déclaration positive.
   (b) Utiliser une démonstration par l'absurde c'est-à-dire supposer que P est vrai et tenter d'atteindre une contradiction.

3. P et Q :
   Démontrer P et Q séparément. En d'autres termes, traiter P et Q comme des thèses séparées.
4. P ou Q :
   (a) Utiliser une démonstration par cas. Dans chaque cas, démontrer soit que P est vrai, soit que Q est vrai.
   (b) Supposer que P est faux et démontrer que Q est vrai, ou supposer que Q est faux et démontrer que P est vrai.
5. P est équivalent à Q :
   Démontrer que P implique Q et que Q implique P en s'inspirant de 1.
6. Pour tout x on a P(x) :
   Soit x un objet arbitraire. Il faut démontrer que P(x) est vrai. Si la lettre x désigne déjà quelque chose dans la démonstration, il faut utiliser une autre lettre pour désigner l'objet arbitraire.
7. Il existe un x tel que P(x).
   Trouver une valeur de x pour laquelle P(x) est vrai et démontrer P(x) pour cette valeur de x.
8. Il existe un et un seul x tel que P(x).
   (a) Démontrer "Il existe un x tel que P(x)" (Existence) (voir 7.) et pour tout y et tout z tels que P(y) et P(z) il suit y=z. (Unicité).
   (b) Démontrer l'énoncé équivalent "Il existe x tel que P(x) et pour tout y, P(y) implique y=x".
9. Pour tout nombre naturel n, on a P(n) :
   (a) Induction mathématique : démontrer P(0) (cas de base) et pour tout naturel n, si P(n) alors P(n+1) (étape d'induction).
   (b) Induction forte : Démontrer que pour tout naturel n, pour tout $k < n$, on a P(k) implique P(n).

Pour utiliser une donnée de la forme :

1. P implique Q :
   (a) Si on donne également que P est vrai ou si on peut démontrer que P est vrai, alors on peut conclure que Q est vrai.
   (b) Utiliser la contraposée : si on sait que Q est faux ou si on peut démontrer que Q est faux, on peut conclure que P est faux.
2. Non P :

(a) Réexprimer comme un énoncé positif.

(b) Dans une démonstration par l'absurde, on peut atteindre une contradiction en démontrant que P est vrai.

3. P et Q
   Traiter ceci comme deux données : P est vrai, et Q est vrai.

4. P ou Q :
   (a) Utiliser une démonstration par cas. Dans le premier, supposer que P est vrai et dans le deuxième, supposer que Q est vrai.
   (b) Si on sait que P est faux ou si on peut démontrer que P est faux, on peut conclure que Q est vrai. De même, si on sait que Q est faux ou qu'on peut le démontrer on peut en conclure que P est vrai.

5. P est équivalent à Q :
   Traiter ceci comme deux données : d'une part P implique Q et d'autre part, Q implique P.

6. Pour tout x on a P(x) :
   On peut remplacer x par n'importe quelle valeur a et conclure que P(a) est vrai.

7. Il existe x tel que P(x) est vrai :
   On peut introduire dans la démonstration une nouvelle variable xo et supposer que P(xo) est vrai.

8. Il existe un et un seul x tel que P(x) est vrai.

   On peut introduire dans la démonstration une nouvelle variable xo et supposer que P(xo) est vrai. En
   outre, pour tout y pour lequel P(y) est vrai, il est vrai que y=xo.

Techniques qui peuvent être utilisées dans toute démonstration :

1. Une ou plusieurs démonstrations par l'absurde. On suppose la thèse fausse et on dérive une contradiction.
2. Démonstration par cas : on considère plusieurs cas exhaustifs ce qui signifie que tout possibilité est couverte par un des cas. On démontre la thèse dans chaque cas.

Remarques.

1. **Vive les démonstrations par l'absurde.** Bien des professeurs luttent contre les démonstrations par l'absurde. C'est une exigence inutile et même nuisible. Si je conjecture une thèse, il est prudent et sain de me demander ce qui arrive dans le cas où cette thèse serait fausse. **C'est une base essentielle de l'esprit critique.** Je crois que ... et si c'était faux ?
2. **Vive les divisions en cas fructueuses.** Bien des professeurs luttent contre les divisions en cas. Bien entendu, il ne faut pas diviser en neuf cas si trois suffisent. Mais si la division en neuf cas permet de conclure il s'agit bel et bien d'une victoire. Les démonstrations longues de nombreuses pages exigent souvent des divisions en cas successives. Il arrive plus d'une fois qu'une division en cas ayant permis la percée donne lieu plus tard à une preuve n'utilisant pas cette approche.
3. Au cours d'une démonstration par l'absurde, il peut arriver qu'un argument intermédiaire se fasse par l'absurde et ainsi de suite.
4. Tout ce qui précède manque d'exemples. C'est une synthèse.
5. Quelles sont les grandes règles de la logique régissant la déduction ?
   (a) Si P est vrai et que P implique Q alors Q est vrai.
   (b) Si P est faux alors "non P" est vrai.
   (c) Si P est vrai alors "non P" est faux.

Que Gödel me pardonne !

9. Et la rigueur ?

9.1. Génétique et en spirale !

La rigueur n'échappe pas à ces "lois". Elle a évolué dans le temps. Celle du 20ème siècle n'est pas celle d'Euclide et d'autres. On peut trouver et on a trouvé matière à améliorer la plupart des travaux antérieurs. Il n'est pas possible de pratiquer à l'école, la même rigueur que dans les mathématiques avancées.

Reprenant les thèses de Demal, j'affirme que la rigueur n'est ni donnée, ni gratuite, qu'elle se construit.

Le texte qui suit concerne divers aspects de notre exposé : l'aspect génétique et le développement en spirale. Il rappelle le rôle crucial du sens, un aspect que j'ai manqué d'expliciter. Il met justement l'accent sur une rigueur en étapes.

9.2. Des conclusions de Nicolas Rouche

D'après "Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?" dans Commission Inter-Irem "Histoire et épistémologie des mathématiques". 1989. La démonstration mathématique dans l'histoire. IREM de Besançon et IREM de Lyon. "Que tirer pratiquement de tout ceci, et qui soit utile dans les classes ?" Trois idées nous paraissent surnager.

a) Prouver, démontrer ne sont pas choses bien définies, qui se laisseraient prendre dans une formule. Cela s'apprend par étapes, des étapes marquées chacune non seulement par un changement (le plus souvent un accroissement) de l'univers du sens, mais encore par une modification du rapport au sens, des modes d'accès à l'ensemble des référents. Il est sans doute inopportun d'aborder n'importe quelle étape prématurément, c'est-à-dire sans que le sens et donc la motivation suivent, et peut-être plus encore de sauter des étapes.

b) A chaque étape sa forme de rigueur, sur laquelle il faut insister. On peut se tromper de rigueur en forçant dans une étape déterminée la rigueur d'une étape plus avancée. Il y a des étapes anté-euclidiennes où la rigueur s'appuie sur des dessins bien faits, des gestes, ... Il faut y veiller et ne pas instaurer à ce moment la rigueur euclidienne, encore moins la rigueur hilbertienne.

c) Une source de méprise sur la rigueur et sur son appropriation à chaque étape de la formation mathématique semble bien être la conception assez répandue selon laquelle la démonstration serait univoquement définie et qu'en particulier elle exclurait le recours à toute donnée empirique. A cela s'ajoute qu'elle devrait être enseignée à partir d'un certain âge, et enfin qu'avant cet âge on trouverait surtout des intuitions et pas de rigueur. Or la rigueur est non seulement possible, mais s'impose à chaque stade : est-elle autre chose que le sérieux de la pensée ?

9.3. Une autre citation : Brandford (1913)

Je reprends ici une citation faite dans l'excellent modèle d'enseignement génétique offert par E. Wittmann, Géométrie élémentaire et réalité.

Introduction à la pensée géométrique. Didier Hatier, Bruxelles, 1998 traduit de l'allemand par Charlotte Bouckaert et Micheline Citta-Vanthemsche. Le texte cité est dû à B. Brandford (1913).

"Je pense que c'est un fait que la grosse majorité des professeurs est fermement convaincue que les mathématiques se différencient des autres sciences, non pas tellement par leur degré de rigueur mais plutôt parce qu'une démonstration mathématique serait absolument rigoureuse, tandis qu'une autre démonstration ne serait qu'approximativement rigoureuse. Le tort causé par cette conviction à tous les niveaux de l'enseignement des mathématiques est, je crois, incalculable ... La perfection attribuée aux mathématiques et à la logique pour leur clarté est une vision qui repose sur une illusion, pas sur une réalité".

9.4. L'opinion de Jean Dieudonné

Comment ne pas citer ce grand mathématicien et historien des mathématiques qui a tant réfléchi aux aspects philosophiques du sujet. J'emprunte un extrait au livre "Pour l'honneur de l'esprit humain", 1987, Hachette, Paris dont bien d'autres pages seraient relevantes ici dans une version amplifiée. L'analyse très intéressante qui précède cette conclusion concerne les mathématiques avancées et mêmes achevées (jusqu'à rebondissement éventuel).

"Il est facile de conclure. Il ne peut y avoir de démonstration "rigoureuse" qu'au sein d'une théorie axiomatique, où objets et relations "primitives" ont été spécifiés, et les axiomes qui les relient énumérés de façon exhaustive ; et si on ne tient pas compte des inadvertances ou négligences mentionnées en I) et II), cette condition nécessaire est aussi suffisante ; "manque de rigueur" signifie exactement "manque de précision".

L'histoire corrobore cette affirmation dans tous les cas. Il n'y a jamais eu de controverse sur ce qu'est une démonstration "rigoureuse" en arithmétique ; pas davantage en analyse après Weierstrass ; pas davantage en topologie algébrique depuis 1950. Bien entendu, il n'est pas exclu que dans l'avenir, des mathématiciens veuillent développer une théorie sans la mettre sous forme axiomatique ; jusqu'à ce qu'eux-mêmes ou d'autres arrivent à le faire, la théorie risquera d'être considérée comme "non rigoureuse" par la communauté mathématique".

10. Le point de vue constructiviste

Dans cet article, l'accent est souvent mis sur le fait que les notions mathématiques doivent être construites et sur le témoignage de Demal selon lequel c'est possible fort tôt pour les démonstrations. Le point de vue dit constructiviste est bien connu dans les sciences de l'éducation et je n'ai pas l'intention de le commenter longuement. La citation suivante va cependant dans ce sens. Je la trouve particulièrement éclairante. Elle est extraite d'une recension de livre parue dans les Notices de l'American Mathematical Society en May 1999. Le texte cité et traduit est dû à Ed. Dubinsky.

“Je voudrais proposer comme alternative une épistémologie constructiviste. Par constructivisme, je n'entends pas que les étudiants sont supposés découvrir les concepts mathématiques par eux-mêmes sans l'aide d'un professeur, bien que l'occasion pour les étudiants d'essayer de découvrir des idées mathématiques puisse être un outil pédagogique important, s'il est utilisé correctement. Ce que j'entends par ce terme est l'idée que l'apprentissage des mathématiques requiert de l'individu qu'il construise des compréhensions mathématiques dans son propre esprit. Ceci peut se produire comme la conséquence d'expériences procurées dans une situation d'apprentissage et qui comprennent, mais ne sont pas restreintes à, des explications écoutées. Bien sûr, les compréhensions qu'un individu construit doivent être conséquentes avec les compréhensions tenues par des mathématiciens, mais elles ne peuvent être données par une personne à une autre. En fin de compte, elles doivent venir de l'apprenant, et l'enseignant ne peut donner que des occasions, des stimuli, et du soutien.
Le point d'un constructiviste, à l'opposé d'une épistémologie de la métaphore, est qu'il y a au moins l'espoir que si un apprentissage mathématique se produit en faisant des constructions mentales, nous pouvons essayer de trouver ce que ces constructions peuvent être et nous pouvons rechercher des moyens spécifiques (tels que l'écriture de programmes informatiques, le travail sur des tâches en groupes, l'écriture d'essais, etc.) pour aider les étudiants à faire des constructions spécifiques. Il y a en fait une quantité considérable de travail effectué le long de ces lignes, mais ceci est la matière d'une autre histoire”.

11. Fausses démonstrations

On connaît beaucoup de démonstrations volontairement fausses non pas pour tromper le lecteur naïf mais pour développer son esprit critique ce qui est un des buts de l'enseignement de la démonstration et du reste des mathématiques. Chacun a rencontré un exemple : on montre que 1 est le plus grand nombre naturel, que tous les triangles sont isocèles, que $2 = -2$, que tous les points du plan sont alignés, etc. Il existe un livre classique reprenant exclusivement des situations de ce genre : E. A. Maxwell. Fallacies in mathematics. Cambridge University Press. 1959.
Ce thème n'est pas développé ici. Je le mentionne pour mémoire.

J'ai eu l'occasion il y a quelques années de faire un exposé de deux heures sur ce thème. Il amuse les professeurs mais l'avis unanime que j'ai rencontré est qu'on ne doit surtout pas introduire ce sujet dans les classes en raison du danger qu'il représente. Je n'en suis pas convaincu. Chercher l'erreur me semble très formateur. C'est certainement indispensable pour de futurs enseignants. Surtout, ne doit-on pas être strictement exercé à reconnaître ses propres erreurs ? En ce qui me concerne, ce débat n'est pas clos. **J'insiste sur un point : l'utilité pour tous et en tout temps de l'entraînement logique et démonstratif est notamment de réfuter les affirmations fausses et la mauvaise foi qui sont hélas notre pain quotidien. Exercer le sens critique pour se défendre de nombreuses agressions intellectuelles, notamment de règles qui chez de nombreux "chefs" varient de jour en jour.**

12. Vingt questions de Lynn Arthur Steen

Je reviens à l'un des livres cités au début.

Lee V. Stiff et Frances R. Curcio (éditeurs). 1999. Developing mathematical reasoning in Grades K-12. 1999 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Le dernier chapitre : Lynn Arthur Steen. Twenty questions about mathematical reasoning, 270-285.

L'auteur est un mathématicien réputé. Son étude est remarquable par une connaissance approfondie, par une foule de questions en nombre bien plus élevé que le titre ne l'indique, par de nombreuses réflexions et autres contributions et par les références. Certaines questions rejoignent les notres. Il faudrait comparer les éléments de réponse. Je ne prétends pas qu'eux se rejoignent. De nombreuses autres questions de Steen ne sont pas traitées ici. Il est intéressant, comme en mathématique, d'être parti d'un certain nombre de questions, de les avoir traitées sinon résolues et d'achever par des questions en nombre plus élevé. Une traduction s'impose mais le temps et l'énergie me manquent.

En signe de bonne volonté, voici les 20 titres de sections : ce sont les 20 questions annoncées dans le titre.

1. Le raisonnement mathématique est-il mathématique ?
2. Le raisonnement mathématique est-il utile ?
3. Le raisonnement mathématique est-il un but pertinent pour les mathématiques scolaires ?
4. Les enseignants peuvent-ils enseigner le raisonnement mathématique ?
5. Le raisonnement mathématique peut-il être enseigné ?
6. Les savoir-faire conduisent-ils à la compréhension ?
7. Le drill peut-il aider à développer le raisonnement mathématique ?
8. La démonstration est-elle essentielle aux mathémlatiques ?
9. Apprendre des démonstrations favorise-t-il le raisonnement mathématique ?
10. L"'anxiété mathématique" empêche-t-elle le raisonnement mathématique ?
11. Les activités coopératives favorisent-elles la compréhension individuelle ?
12. Les calculatrices et les ordinateurs peuvent-ils augmenter le raisonnement mathématique ?
13. Pourquoi tant d'étudiants estiment-ils que les mathématiques sont une culture étrangère ?
14. Le contexte est-il essentiel pour le raisonnement mathématique ?
15. Les étudiants doivent-ils réellement construire leur propre connaissance ?
16. Combien de mathématiques y-a-t-il ?
17. Comment notre cerveau fait-il des mathématiques ?
18. Notre cerveau est-il pareil à un ordinateur ?

19. La capacité pour les mathématiques est-elle innée ?
20. L'école vient-elle trop tard ?

Adresse de l'auteur :
Francis BUEKENHOUT
UREM CP 216
Université libre de Bruxelles
Bd du Triomphe
1050 Bruxelles

Des inversions généralisées

G. Lasters,

Dans toute la nature, les symétries sont très importantes. Un aspect de la symétrie est l'inversion.

D'abord, nous allons généraliser la notion d'inversion.

Dans la figure 1, c'est un cercle.

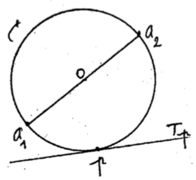


Figure 1

On peut obtenir a_2 par une inversion I appliquée à a_1 (fig. 1).

$$I(a_1) = a_2, \quad I(a_2) = a_1, \quad I(0) = 0.$$

Si $p \in C$; nous notons la tangente en p comme T_p. Dans la figure 1, nous avons $T_{a_1} // T_{a_2}$.

La figure 2 généralise la figure 1.

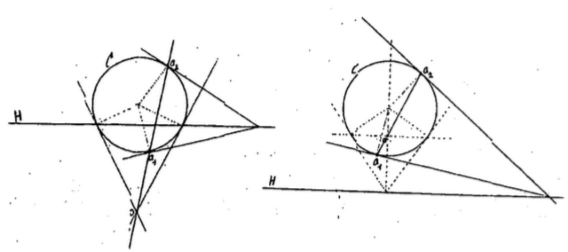


Figure 2

Dans la figure 2 : T_{a_1} et T_{a_2} se coupent sur la droite H, la ligne d'horizon. Si H se trouve à l'infini, nous avons la situation de la figure 1.

Dans la figure 1, a_2 peut être noté comme $-a_1$ et a_1 comme $-a_2$. Nous devons donc montrer maintenant comment $-a$ peut être construit dans la situation générale, c'est-à-dire où H ne se trouve pas nécessairement à l'infini. Nous allons nous inspirer de la situation particulière où H se trouve à l'infini.

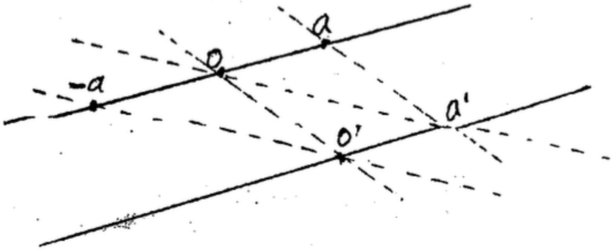


Figure 3

La figure 4 généralise la figure 3.

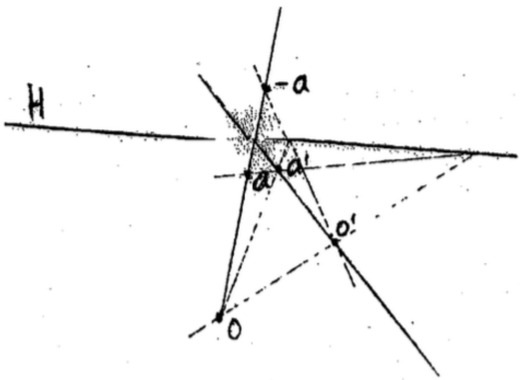


Figure 4

Il faut contrôler que $a_2 = a_1$ dans la situation de la figure 2. Nous allons contrôler ceci dans un cas particulier.

Soit un cercle qui a pour équation $X^2 + Y^2 = 1$.

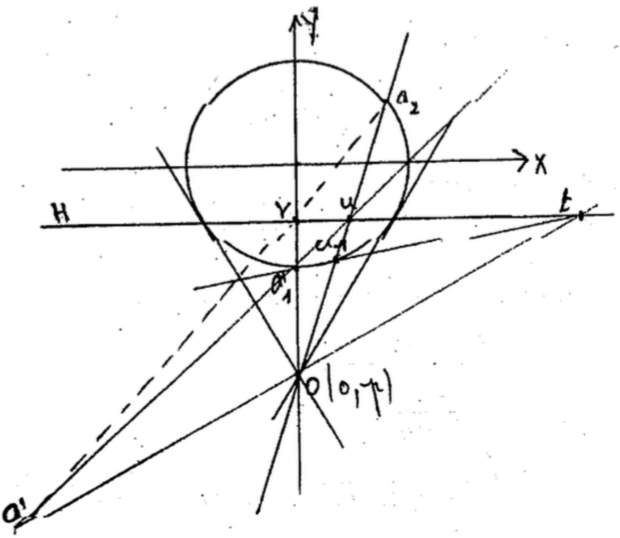


Figure 5

Nous désignons les coordonnées de O par $(0, p)$. Alors, H a comme équation : $y = \frac{1}{p}$; $a_1 \in C$; $a_1(k, \ell)$; $k^2 + \ell^2 = 1$.

Nous allons démontrer que $a_2 = -a_1$.

L'équation de Oa_1 :

$$Y - p = \frac{\ell - p}{k}\,X.$$

a_2 est déterminé par

$$\begin{cases} Y - p = \frac{\ell-p}{k}\,X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow X^2 + (\frac{\ell - p}{k}\,X + p)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow\ (X - k).\left(\frac{k^2 + (\ell - p)^2}{k^2}\,X + \frac{1 - p^2}{k}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ a_2\left(\frac{(p^2 - 1).k}{1 + p^2 - 2\ell p}, \frac{-\ell p^2 + 2p - \ell}{1 + p^2 - 2\ell p}\right).$$

$a'_1(0,-1)$

La droite $a'_1 a_1$ coupe H en t :

$$\left(\frac{(1+p)k}{(\ell+1)p}, \frac{1}{p}\right)$$

Oa_1 coupe H en u :

$$\left(\frac{k(1-p^2)}{p.(\ell-p)}, \frac{1}{p}\right).$$

O' est le point d'intersection des droites Ot et $a'_1 u$.

$$O' \begin{cases} Y = \dfrac{(1-p)(\ell+1)}{k}\, X + p \\ Y = \dfrac{\ell-p}{k(1-p)}\, X - 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\ O'\left(\frac{k(p^2-1)}{(1-p)^2(1+\ell)+p-\ell}, \frac{-\ell p^2+(2+\ell)p-1-\ell}{(1-p)^2(1+\ell)+p-\ell}\right)$$

$-a_1$ est le point commun aux droites $O'Y$ et Oa_1.
a_2 est un point de Oa_1.

Si O', v sont colinéaires avec un point de Oa_1, alors ce point est le point $a_2 = -a_1$.

Nous allons démontrer que O', v, a_2 sont colinéaires.

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{p} & 1 \\ \dfrac{(p^2-1)k}{1+p^2-2\ell p} & \dfrac{-\ell p^2+2p-\ell}{1+p^2-2\ell p} & 1 \\ \dfrac{k(p^2-1)}{(1-p)^2(1+\ell)+p-\ell} & \dfrac{-\ell p^2+(2+\ell)p-1-\ell}{(1-p)^2(1+\ell)+p-\ell} & 1 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & -\ell p^2+2p-\ell & 1+p^2-2\ell p \\ 1 & -\ell p^2+(2+\ell)p-1-\ell & (1-p)^2(1+\ell)+p-\ell \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & -\ell p^2+2p-\ell & 1+p^2-2\ell p \\ 0 & \ell p-1 & (1-p)^2+\ell(1-p)^2+p-\ell-1-p^2+2\ell p \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (1-p)^2+\ell(1-p)^2+p-\ell-1-p^2+2\ell p-\ell p^2+p \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \ell(1-2p+p^2-1+2p-p^2)+1-2p+p^2+p-1-p^2+p \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 0=0.$$

Nous avons contrôlé que : $a_2 = -a_1$.

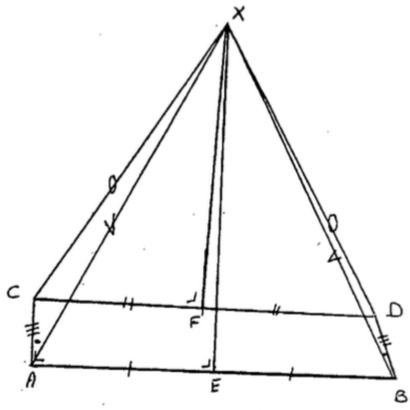
Maintenant, il est possible de faire des extensions de ces notions pour l'espace. Les coniques deviendront des surfaces quadratiques et H sera un plan.

Adresse de l'auteur :

Guido LASTERS
Ganzendries 245
3300 Oplinter-Tienen

Humour

C. Rédaction,



Hypothèses : $AC = DB, \quad AE = EB, \quad CF = FD$

$$\measuredangle\ CAB = \measuredangle\ XFC = \measuredangle\ XEA = 90^\circ \quad , \quad \measuredangle\ DBA = 80^\circ$$

Thèse : $8 = 9$

Preuve : triangle (XCA) = triangle (XDB)

$$\begin{aligned}
\measuredangle\ CAX &= \measuredangle\ DBX \\
\measuredangle\ XAB &= \measuredangle\ XBA \\
\measuredangle\ CAB &= \measuredangle\ CAX + \measuredangle\ XAB \\
\measuredangle\ CAB &= \measuredangle\ DBX + \measuredangle\ XBA \\
90 &= 80 \quad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Puzzles, casse-tête, jeux et raisonnement déductif

F. Drouin, *APMEP Lorraine, France*

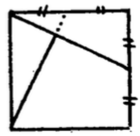
Ces quelques lignes prennent appui sur des pratiques de classe tentées depuis plusieurs années en France grâce au travail à l'intérieur d'un groupe de recherche de l'IREM de Lorraine et à l'aide de membres du groupe Jeux de l'APMEP.

Introduire puzzles, casse-tête et autres jeux motive les élèves, introduit d'intéressantes situations de recherche mais peut laisser insatisfait l'enseignant de Mathématiques : Reste-t-il une petite place pour le raisonnement déductif ?

Quatre exemples très géométriques vont tenter d'apporter quelques éléments de réponse à cette question.

Un puzzle à trois pièces

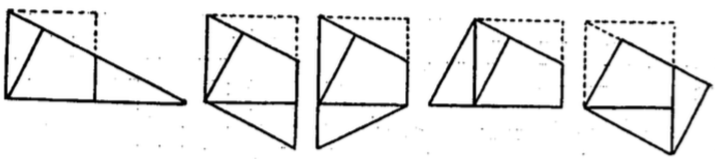
Quelques manipulations vous feront réaliser un triangle rectangle, un parallélogramme, un trapèze isocèle, un quadrilatère "quelconque", un rectangle.



Le joueur prend les pièces, et sans trop savoir comment, rencontre une des configurations proposées.

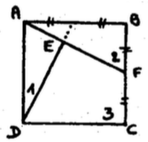
L'amateur de mathématiques peut accorder un peu plus de temps à l'observation et à la réflexion.

Le carré est posé sur la table, essayons de ne déplacer qu'une pièce puis deux pièces pour obtenir ce qui est demandé.



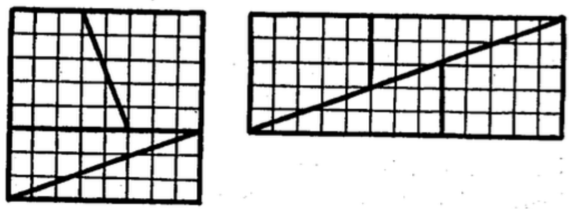
L'utilisation de transformations géométriques est une aide à la résolution des problèmes proposés.

Il reste ensuite à justifier que ce qui est obtenu correspond bien au triangle et aux quadrilatères espérés. Des problèmes d'alignement, d'égalité de longueur, de perpendicularité apparaissent.



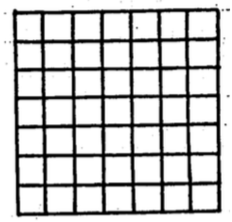
En particulier, démontrer $(AF) \perp (DE)$ peut se faire en explorant de nombreuses pistes différentes.
Laquelle des pièces 2 ou 3 a le plus grand périmètre ? Une réponse justifiée n'est pas évidente pour nos élèves de 3ème.

Ce besoin de justifications apparaîtra certainement à la suite de découpages tels le très classique dessin ci-dessous.

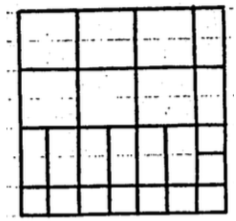


64 cases deviennent-elles 65 cases ?

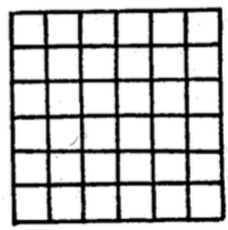
Combis et mini-combis



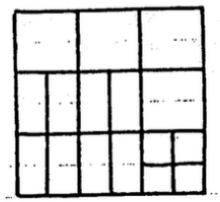
COMBI
Plateau de jeu



Pièces du jeu à colorier (une couleur pour chaque type de pièce)



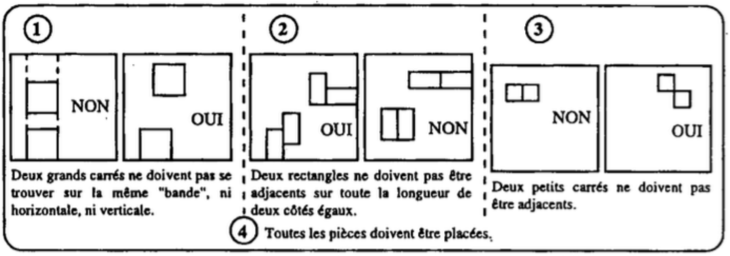
MINI-COMBI
Plateau de jeu



Pièces du jeu à colorier (une couleur pour chaque type de pièce)

Manipulation des pièces des deux jeux

Pour les deux jeux, le placement des pièces respecte les **quatre mêmes contraintes**.



Extrait de Jeux 5 - APMEP

La recherche de solutions intéresse beaucoup les élèves. Quelques questions leur viennent à l'esprit :

– Quelles pièces placer en premier ?

– Comment gérer le placement des pièces restantes ? Il faut très souvent déplacer une partie des pièces posées pour faire aboutir la recherche. Ce fonctionnement non linéaire n'est-il pas une compétence à faire acquérir aux élèves, qui, arrêtés par une difficulté, hésitent à revenir en arrière pour aborder le problème sous un autre angle ?

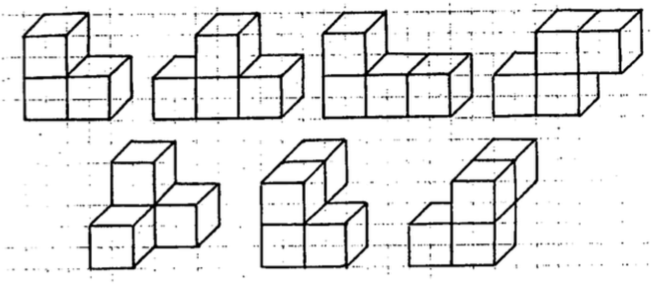
D'autres questions peuvent apparaître :

– Existe-t-il des solutions symétriques (un axe, deux axes, un centre, ...) ?

– Existe-t-il une solution possédant un axe de symétrie et un centre de symétrie ? Dans nos classes de collège, à cette dernière question, nous ne pouvons que nous contenter de la réponse "Pour l'instant, nous n'avons pas trouvé" et refuser "Je n'ai pas trouvé, donc c'est impossible".

Le cube SOMA

Ce casse-tête créé par le Danois Piet Hein en 1936 est formé des assemblages de 3 et 4 cubes qui ne sont pas des parallélépipèdes.

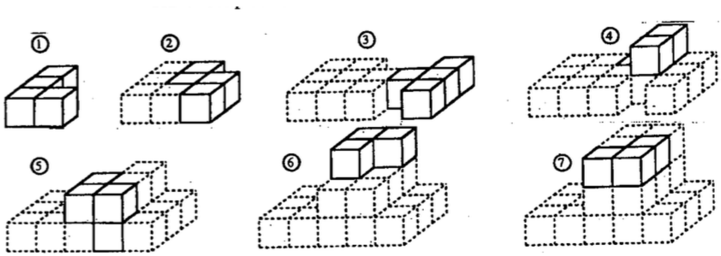


Pourquoi n'y a-t-il que ces sept pièces ? Les différentes façons d'accoler un quatrième cube aux deux assemblages possibles formés de trois cubes permettrait une justification ...

Avec des pièces choisies parmi ces sept pièces, nous voudrions construire des parallélépipèdes. Combien de cubes et de pièces du jeu faut-il utiliser ? En raisonnant sur le nombre de tricubes utilisés (0 ou 1) et le nombre de tétracubes utilisés (0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6), en décomposant en produits le nombre de cubes assemblés et en examinant les formes des pièces, il pourra être justifié que les seuls parallélépipèdes envisageables ont pour dimension $2 \times 2 \times 3$; $2 \times 2 \times 4$, $2 \times 2 \times 5$, $2 \times 2 \times 6$, $2 \times 3 \times 4$, $1 \times 3 \times 5$, $3 \times 3 \times 3$.

Il reste alors à les construire avec les pièces du jeu. Le parallélépipède $2 \times 2 \times 6$ semble bien difficile à réaliser et nous ne pourrons ici aussi que nous contenter de la phrase : "Pour l'instant, la solution n'est pas trouvée". (A moins qu'un lecteur de ces quelques lignes ne propose une démonstration ...).

Parallélépipèdes accolés :
les 7 étapes de la construction du solide



Extrait de Jeux 5 APMEP

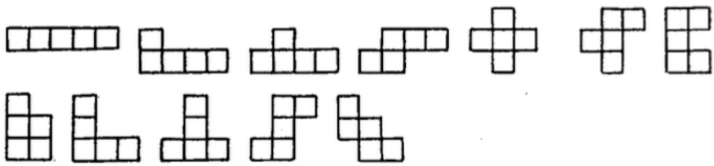
La manipulation des pièces du jeu et l'examen de dessins en perspective facilitent la prise de conscience de cubes cachés, la reconnaissance des pièces placées, le dénombrement des cubes posés.

Quelle pièce a été posée à l'étape 6 ?

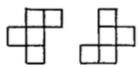
Combien de cubes forment l'assemblage de l'étape 4 ?

Les pentaminos

Cherchons les assemblages de cinq carrés (les carrés doivent être adjacents par des côtés entiers). Ces assemblages forment les pièces du jeu. Voici le résultat des recherches :



Pourquoi les deux dessins ci-contre représentent-ils la même pièce ?



N'y a-t-il que les douze pièces dessinées ci-dessus ? Pour en être sûr, il faudra étudier comment rajouter un troisième carré à un assemblage de deux carrés, puis un quatrième carré, puis un cinquième carré. En classe, par manque de temps, nous devons dire : “Nous considérons les avoir toutes autant que nous n'en aurons pas trouvé d'autres”.

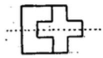
Combien chaque pièce a-t-elle de dessins possibles ? Sauriez-vous retrouver ces nombres de dessins sans manipuler les pièces ?

Nous voulons utiliser les douze pièces pour réaliser des rectangles. Quelles pièces doit-on placer rapidement ? Quelles pièces sont très utiles pour terminer ? Les élèves découvrent rapidement l'importance des éléments de symétrie des pièces.

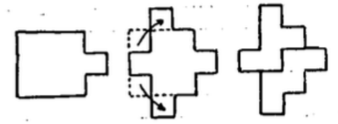
Sauriez-vous assembler deux ou trois pentaminos de telle sorte que la figure obtenue ait un (ou plusieurs) éléments de symétrie ?

En manipulant au hasard, quelques configurations sont obtenues. Et si nous réfléchissions un peu ?

* Il est possible d'assembler deux pièces ayant un élément de symétrie :



* En prenant pour départ une solution qui convient et en déplaçant de façon symétrique $2, 4, \ldots$ carrés, nous obtenons une nouvelle configuration symétrique.



Seule la manipulation des pièces nous permettra de savoir si elle est recouvrable par des pentaminos.

Voici quelques pistes d'utilisation de jeux amenant l'élève à se poser des questions et à formaliser des étapes de raisonnement déductif. Dans de nombreux cas, ces raisonnements facilitent la réussite du jeu. Finalement, réfléchir et faire quelques petites déductions mathématiques, cela peut servir à quelque chose ...

Pour trouver d'autres idées de jeux dans ce qui est édité en France : les brochures Jeux de l'APMEP, Objets Mathématiques de l'APMEP Lorraine, Autour du cube Soma et Autour du puzzle de Sarrelouis de l'IREM de Lorraine.

Adresse de l'auteur :
François DROUIN
APMEP Lorraine
Collège les Avrils
F-55300 SAINT MIHIEL
FRANCE

14ème Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

C. Rédaction,

Les participants

Tous les élèves de votre établissement peuvent disputer les quarts de finale scolaires. Sept participants au minimum par catégorie sont requis pour organiser un quart de finale. Si ce minimum n'est pas atteint, les élèves concourent individuellement.

Même s'il a participé à des quarts de finale scolaires, un élève peut néanmoins participer individuellement à l'aide des bulletins se trouvant dans *Math-Jeunes*pour les catégories CM, C1, C2 et L1. Des bulletins sont également disponibles auprès de la FFJM - B.P. 157 - 7700 Mouscron.

Les catégories scolaires

CM : écoliers de 4ème et 5ème primaire
C1 : élèves de 6ème primaire et 1ère secondaire
C2 : élèves de 2ème et 3ème secondaire
L1 : élèves de 4ème, 5ème et 6ème secondaire.

Le calendrier

Phase 1 : quarts de finale jusqu'au 31 janvier 2000
Phase 2 : demi-finales régionales le 18 mars 2000
Phase 3 : finales régionales le 13 mai 2000
Phase 4 : finale internationale fin août ou début septembre 2000.

Les modalités

Il vous suffit de **demander un dossier de participation à :**

FFJM - B.P. 157 - 7700 Mouscron.

Vous trouverez ci-dessous classés par ordre de difficulté croissante :

- 8 énoncés de quarts de finale fermés pour les 4ème et 5ème primaire
- 10 énoncés pour les 6ème primaire et le secondaire inférieur (*collèges*)
- 10 énoncés pour le secondaire supérieur (*lycées*).

Ils servent à l'épreuve de qualification, fixée au même moment pour tout votre établissement, épreuve à l'issue de laquelle vous corrigez les réponses (fournies également).

Vous choisissez à votre guise : date, nombre de sujets, coefficients, durée, mode de qualitication, etc.

Une seule contrainte : les résultats doivent parvenir à la FFJM le 31 janvier 2000 au plus tard. Vous ne renvoyez aucune réponse à la FFJM. Seul le bordereau de retour qui donne la liste des qualifiés de l'établissement est à retourner.

Le centre de demi-finale

Voici la liste provisoire des centres belges : Ath, Bruxelles, Jodoigne, Liège, Mouscron, Namur, Thuin et Virton.

Les personnes inscrites sur le bordereau doivent pouvoir se déplacer le samedi 18 mars 2000 dans le centre de demi-finale choisi. A ce stade de l'épreuve, la cotisation FFJM doit être acquittée :

catégorie CM : 175 F, catégorie C1 et C2 : 350 F et catégorie L1 : 450 F.

La finale belge est déjà dotée de nombreux prix.

Questionnaire

Le concours ne vous intéresse pas ?

Utilisez ces jeux-problèmes pour une activité collective dans vos classes, vos cours d'éducation mathématique, clubs mathématiques ...

Veuillez attendre la date limite du 31 janvier 2000 pour les utiliser à votre guise.

Le concours vous intéresse ?

Demandez le dossier gratuit de participation à :

FFJM - B.P. 157 - 7700 Mouscron
ou par **télécopie au 056 33 14 53**
ou par **courrier électronique : andre.parent@ping.be**

Vous y trouverez une information plus détaillée, les questions (celles ci-dessous), les réponses, le bordereau de retour ...

Dans la revue *Math-Jeunes*, vous trouverez le questionnaire individuel de participation. N'oubliez pas d'abonner ou de réabonner vos élèves.

Visiter le site internet : **www.ping.be/ffjm**

1/4 de finales scolaires (primaires) 2000

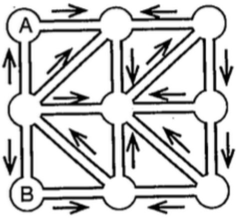
1 - QUE D'OEUFS, QUE D'OEUFS !

Chaque jour, Jeanne la fermière vient ramasser les oeufs. Elle a mal au dos, aussi elle ne ramasse que douze oeufs par jour. Les poules, elles, pondent dix-huit oeufs chaque matin.

Ce soir, après le passage de Jeanne, il reste huit oeufs dans le poulailler.

Combien en restera-t-il dans trente jours, après son passage ?

2 - SENS UNIQUES À SAN SINUK



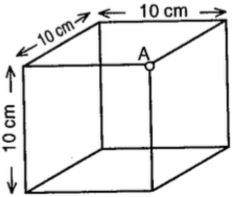
Le village syldave de San Sinuk comprend seize rues toutes en sens unique et neuf rond-points disposés comme sur la figure.

Le sens autorisé dans chaque rue est indiqué par une flèche.

Mathias est au rond-point des Aviateurs, indiqué par un A sur le plan. Il veut se rendre en vélo au rond-point des Bateliers, indiqué par un B.

Quel est le chemin le plus court qu'il peut emprunter en respectant les sens uniques ?

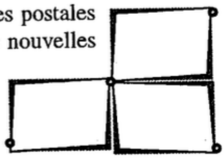
3 - LA BALADE DE LA FOURMI



Une fourmi se trouve en A sur un squelette de cube en fil de fer. Elle décide d'explorer cet objet en n'empruntant jamais un chemin déjà parcouru.

Quelle est la longueur du plus long chemin qu'elle peut parcourir ?

4 - LES CARTES DE NICOLE

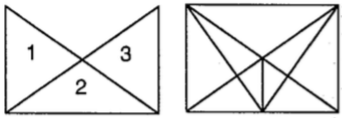


Nicole Niclou aime afficher dans sa chambre les cartes postales qu'elles reçoit de ses nombreuses amies. À l'aide des nouvelles punaises extra-larges qu'elle vient d'acheter, elle peut faire tenir chaque carte, sans la traverser pour ne pas l'abîmer, à l'aide de seulement deux punaises. Mais une punaise peut servir à faire tenir plusieurs cartes (voir dessin).

Avec dix punaises, combien peut-elle afficher de cartes postales, au maximum, de telle sorte que les cartes soient toutes visibles en entier et que chacune d'elles tienne avec deux punaises ?

5 - COMBIEN DE TRIANGLES ?

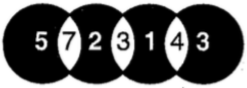
La figure de gauche comprend exactement 5 triangles entièrement dessinés : les triangles en un seul morceau 1, 2, 3, et les triangles en deux morceaux 1+2 et 2+3.



Combien la figure de droite comporte-t-elle de triangles formés de trois morceaux au maximum ?

6 - LE RANGEMENT DES 7 NOMBRES

Dans le premier dessin, chaque nombre écrit en noir sur fond blanc est la somme des deux nombres qui l'encadrent : 7 = 5+2 ; 3 = 2+1 ; et 4 = 1+3.



Complétez le second dessin en respectant la même règle et en utilisant les sept nombres de 1 à 7 (2 et 3 sont déjà placés).

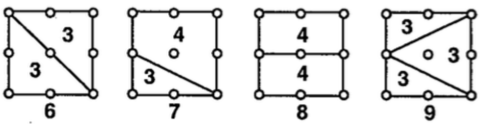
7 - LE JEU DES CHIFFRES

Mathilde joue au jeu suivant. Elle part d'un nombre à 4 chiffres, par exemple 8989, qu'elle écrit. Elle échange le 1^{er} et le $2^{ème}$ chiffre, et elle écrit le nombre obtenu : 9889. Elle échange ensuite le 1^{er} et le $3^{ème}$ chiffre, et elle écrit le nouveau nombre : 8899. Elle échange enfin le 1^{er} et le $4^{ème}$ chiffre et elle écrit le nombre 9898. Elle recommence ensuite en échangeant successivement le 1^{er} et le $2^{ème}$ chiffre, le 1^{er} et le $3^{ème}$, puis le 1^{er} et le $4^{ème}$, etc ..., et en écrivant à chaque fois le nombre obtenu. Elle s'arrête après avoir écrit un nombre qui figure déjà sur sa liste. Ainsi, en partant de 8989, elle s'arrête après avoir écrit 7 nombres.

Combien de nombres écrira-t-elle au total si le premier nombre est 1234?

8 - LE DÉCOUPAGE DU CARRÉ

Dans chaque découpage de carré, on a écrit à l'intérieur de chaque morceau le nombre de côtés de ce morceau, puis on a fait le total.



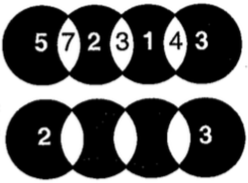
Trouvez un découpage du carré qui donne un total égal à 13. Les lignes du découpage doivent être des segments de droite qui relient des gros points du réseau.

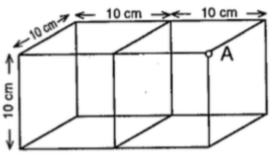
1/4 de finales scolaires (collèges) 2000

1 - RANGEMENT DES 7 NOMBRES

Dans le premier dessin, chaque nombre écrit en noir sur fond blanc est la somme des deux nombres qui l'encadrent: 7 = 5+2 ; 3 = 2+1 ; et 4 = 1+3.

Complétez le second dessin en respectant la même règle et en utilisant les sept nombres de 1 à 7 (2 et 3 sont déjà placés).



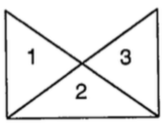


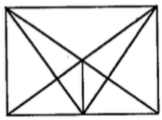
2 - LA BALADE DE LA FOURMI

Une fourmi se trouve en A sur le squelette d'un bicube en fil de fer. Elle décide d'explorer cet objet en n'empruntant jamais un chemin déjà parcouru. **Quelle est la longueur du plus long chemin qu'elle peut parcourir ?**

3 - COMBIEN DE TRIANGLES ?

La figure de gauche comprend exactement 5 triangles entièrement dessinés : les triangles en un seul morceau 1, 2, 3, et les triangles en deux morceaux 1+2 et 2+3.





Combien la figure de droite comporte-t-elle de triangles ?

4 - LE JEU DES CHIFFRES

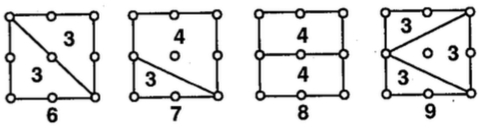
Mathilde joue au jeu suivant. Elle part d'un nombre à 4 chiffres, par exemple 8989 qu'elle écrit. Elle échange le 1 er et le 2 ème chiffre, et elle écrit le nombre obtenu : 9889. Elle échange ensuite le 1 er et le 3 ème chiffre, et elle écrit le nouveau nombre : 8899. Elle échange enfin le 1 er et le 4 ème chiffre et elle écrit le nombre 9898. Elle recommence ensuite en échangeant successivement le 1 er et le 2 ème chiffre, le 1 er et le 3 ème, puis le 1 er et le 4 ème, etc ..., et en écrivant à chaque fois le nombre obtenu. Elle s'arrête après avoir écrit un nombre qui figure déjà sur sa liste. Ainsi, en partant de 8989, elle s'arrête après avoir écrit 7 nombres.

Combien de nombres écrira-t-elle au total si le premier nombre est 1234 ?

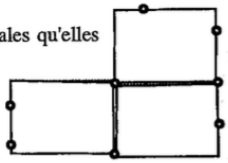
5 - LE DÉCOUPAGE DU CARRÉ

Dans chaque découpage de carré, on a écrit à l'intérieur de chaque morceau le nombre de côtés de ce morceau, puis on a fait le total.

Trouvez un découpage du carré qui donne un total égal à 13. Les lignes du découpage doivent être des segments de droite qui relient des gros points du réseau.

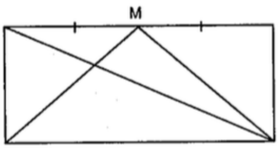


6 - LES CARTES DE NICOLE



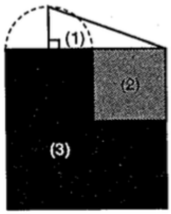
Nicole Niclou aime afficher dans sa chambre les cartes postales qu'elles reçoit de ses nombreuses amies. Elle peut faire tenir chaque carte, sans la traverser pour ne pas l'abîmer, à l'aide de quatre punaises. Mais une punaise peut servir à faire tenir plusieurs cartes (voir dessin).
Avec une boîte de 100 punaises, combien peut-elle afficher de cartes postales, au maximum, de telle sorte que les cartes soient toutes visibles en entier et que chacune d'elles tienne avec quatre punaises ?

7 - UN PÈRE ÉQUITABLE



Paul Imètre possède un terrain rectangulaire de 10 500 m². Il donne à chacun de ses deux fils une des cinq parcelles représentées sur le plan ci-contre.
Les deux parcelles données par le père Imètre à ses fils ont exactement la même aire.
Donnez cette aire, exprimée en m².

8 - LES TERRAINS DU PÈRE I. GRINATION

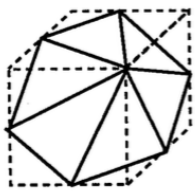


Isidore Grination possède trois terrains, numérotés de 1 à 3 sur le dessin ci-contre. Le terrain (2) est un carré, et les terrains (2) et (3) forment à eux deux un carré. Le cercle en pointillés indique des reports de longueurs égales.
Le terrain (3) a une aire de 1600 m².
Quelle est l'aire du terrain (1) ?

9 - MOINS UN PARTOUT

Patricia est au volant de son automobile, qui a roulé beaucoup moins de 100 000 km. Elle regarde le compteur et se rend compte que le nombre à cinq chiffres qui y est affiché est un carré. Or, elle se souvient qu'il y a exactement 1 an, 1 mois, 1 semaine, 1 jour et 1 heure, le nombre qui était alors affiché au compteur de sa voiture était déjà un carré, mais que chacun des cinq chiffres était inférieur d'une unité au chiffre affiché aujourd'hui. **Quel est le kilométrage actuel de la voiture de Patricia ?**
note : on ne tient évidemment pas compte du 0 initial affiché au compteur.

10 - LA PYRAMIDE PARAPLUIE

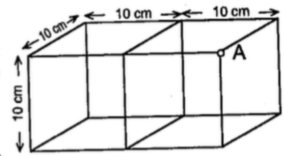


Les sommets de la pyramide parapluie sont six milieux de côtés et un sommet, disposés comme indiqué sur la figure ci-contre, dans un cube de côté unité.
Quel est le volume de cette pyramide, exprimé sous forme d'une fraction irréductible ?

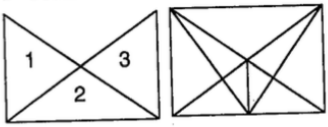
1/4 de finales scolaires (lycées) 2000

1 - LA BALADE DE LA FOURMI

Une fourmi se trouve en A sur le squelette d'un bicube en fil de fer. Elle décide d'explorer cet objet en n'empruntant jamais un chemin déjà parcouru. **Quelle est la longueur du plus long chemin qu'elle peut parcourir ?**



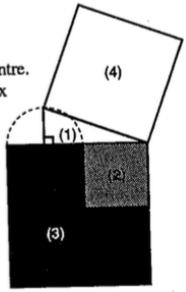
2 - COMBIEN DE TRIANGLES ?



La figure de gauche comprend exactement 5 triangles entièrement dessinés : les triangles en un seul morceau 1, 2, 3, et les triangles en deux morceaux 1+2 et 2+3.
Combien la figure de droite comporte-t-elle de triangles ?

3 - LES TERRAINS DU PÈRE I. TOINE

Isidore Toine possède quatre terrains, numérotés de 1 à 4 sur le dessin ci-contre. Les terrains (2) et (4) sont des carrés, et les terrains (2) et (3) forment à eux deux un carré. Le cercle en pointillés indique des reports de longueurs égales.
Le terrain (2) a une aire de 300 m² et le terrain (3) a une aire de 1500 m².
Quelle est l'aire du terrain (4) ?

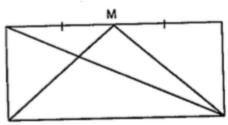


4 - UNE RÉCOLTE RENVERSANTE

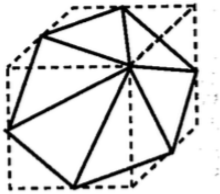
Tic et Tac ont fait leurs provisions de noisettes pour l'hiver. Tous deux inscrivent sur un papier le montant de leur récolte, puis ils tiennent le dialogue suivant :
Tic : « Mon nombre est supérieur à 1000, mais inférieur à 10000 »
Tac : « Le mien aussi ! »
Tic : « Mon nombre est divisible par 2 »
Tac : « Le mien non ! »
Tic : « Mon nombre n'est pas divisible par 5 »
Tac : « Le mien si ! »
Tic : « Mon nombre est divisible par 7 »
Tac : « Le mien aussi ! »
Tic : « Mon nombre est divisible par 9 »
Tac : « Le mien non ! »
Ne parvenant toujours pas à deviner, ils se montrent alors leurs papier et remarquent que le "renversé" du nombre de l'un (en retournant le papier, haut en bas) est égal au nombre de l'autre.
Quel est le montant de la récolte de Tic ? note : les chiffres "retournables" sont les chiffres 1, 2, 5, 6, 8, 9, 0.

5 - UN PÈRE ÉQUITABLE

Paul Imètre possède un terrain rectangulaire de 10 500 m². Il donne à chacun de ses deux fils une des cinq parcelles représentées sur le plan ci-contre.
Les deux parcelles données par le père Imètre à ses fils ont exactement la même aire. **Donnez cette aire, exprimée en m².**



6 - LA PYRAMIDE PARAPLUIE



Les sommets de la pyramide parapluie sont six milieux de côtés et un sommet, disposés comme indiqué sur la figure ci-contre, dans un cube de côté unité.
Quel est le volume de cette pyramide, exprimé sous forme d'une fraction irréductible?

7 - LE CARRÉ DE BRICE TOLL

Brice Toll fait du découpage. Il dispose d'une feuille de carton léger de forme carrée de 50 cm de côté.
Dans un premier temps, il découpe un grand triangle équilatéral dans cette feuille.
Dans un second temps, il découpe un carré dans ce triangle.
Il s'est arrangé pour que ce dernier carré soit le plus grand possible. **Quelle est la mesure, exprimée en millimètres, du côté de ce carré ?**
On prendra, si besoin est, 1,414 pour $\sqrt{2}$; 1,732 pour $\sqrt{3}$; 2,236 pour $\sqrt{5}$; 2,646 pour $\sqrt{7}$.

8 - MOINS UN PARTOUT

0 ? ? ? ? ?

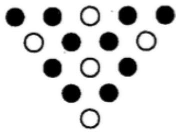
Patricia est au volant de son automobile, qui a roulé beaucoup moins de 100 000 km. Elle regarde le compteur et se rend compte que le est affiché est un carré. Or, elle se souvient qu'il y a exactement 1 an, 1 mois, 1 semaine, 1 jour et 1 heure, le nombre qui était alors affiché au compteur de sa voiture était déjà un carré, mais que chacun des cinq chiffres était inférieur d'une unité au chiffre affiché aujourd'hui. **Quel est le kilométrage actuel de la voiture de Patricia ?**
Note : on ne tient évidemment pas compte du 0 initial affiché au compteur. Indication : 11 111 n'est pas un nombre premier.

9 - TRIANGLE DE L'ANNÉE

On écrit en ligne les entiers naturels de 0 jusqu'à un certain nombre n. A la ligne suivante, on écrit les sommes successives de deux nombres consécutifs de la première ligne (voir dessin). On continue ainsi jusqu'à arriver à une ligne contenant un seul nombre.
Quel est la plus petite valeur de n pour que le nombre de la dernière ligne soit un multiple de 1999 ?
Répondez 0 si vous pensez que c'est impossible.

0 1 2 3 4 5 6...
1 3 5 7 9 11...
4 8 12 16 20 ...
12 20 28 36
....

10 - LA GRAPPE DE RAISIN



Une grappe possède la curieuse propriété d'avoir des raisins blancs et des raisins noirs. Tous ces raisins sont dans un même plan. La distance entre deux raisins voisins est toujours la même. Dans tout triangle de raisins voisins, deux sont noirs et l'autre est blanc. La grappe prend la forme d'un triangle équilatéral de côté n. La figure ci-contre montre un exemple pour n = 5, où l'on compte dix raisins noirs.
Pour n = 1999, quel est le nombre de raisins noirs ?

Olympiades

C. Festraets,

Dans ce numéro, vous trouverez d'abord les énoncés des six problèmes posés à l'Olympiade Mathématique Internationale qui a eu lieu au mois de juillet en Roumanie.

Je vous propose ensuite les solutions des problèmes de la finale "mini" de l'Olympiade Belge. Ce sont des solutions fournies par des élèves de 1ère ou 2ème année, vous en excuserez les maladresses.

Problèmes de l'O.M.I.

PREMIER JOUR
Bucarest, 16 juillet 1999

Temps accordé : 4 heures 30 minutes.
Chaque problème vaut 7 points.

Problème 1

Dans le plan, déterminer tous les ensembles finis S, constitués d'au moins trois points, qui vérifient la propriété suivante :

pour tout couple de points distincts A et B de S, la médiatrice du segment AB est un axe de symétrie de S.

Problème 2

Soit n un entier fixé, supérieur ou égal à 2.

a) Déterminer la plus petite constante C telle que, pour tout ensemble $x_1, \ldots, x_n$ de réels positifs ou nuls, on ait l'égalité :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \right)^4$$

b) Pour cette constante C, déterminer les cas d'égalité.

Problème 3

On considère un tableau carré de côté n, où n est un entier pair, strictement positif, fixé. Le tableau est divisé en n^2 carrés unité. On dit que deux *carrés distincts du tableau sont adjacents si et seulement s'ils ont un côté en commun.*

On marque N carrés unité de ce tableau de telle sorte que chaque carré unité de ce tableau (marqué ou non marqué) soit adjacent à au moins un carré marqué.

Déterminer la plus petite valeur possible de N.

DEUXIEME JOUR
Bucarest, 17 juillet 1999

Temps accordé : 4 heures 30 minutes.
Chaque problème vaut 7 points.

Problème 4

Déterminer tous les couples (n, p) d'entiers strictement positifs tels que :

p est un nombre premier
$n \leqslant 2p$,
et $(p-1)^n + 1$ est divisible par n^{p-1}.

Problème 5

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont intérieurs au cercle Γ, et sont tangents à Γ respectivement en les points distincts M et N. Le cercle Γ_1 passe par le centre de Γ_2. La droite contenant les deux points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 rencontre Γ en A et B. Les droites MA et MB coupent Γ_1 respectivement en C et D.

Montrer que la droite CD est tangente au cercle Γ_2.

Problème 6

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Problèmes de la finale "mini" de l'O.M.B.

1. Quarante tuyaux sont disponibles : leurs longueurs sont de 2 m, 4 m ou 6 m. Il y a autant de tuyaux de 2 m que de tuyaux de 6 m. Quelle est la longueur totale des tuyaux disponibles ?

Solution de SCHEFFER Nicolas, élève de 2ème année au Lycée français Vauban à Luxembourg.

Nous savons que nous disposons d'autant de tuyaux de 6 m que de tuyaux de 2 m.

Or la somme des longueurs d'un tuyau de 6 m et d'un tuyau de 2 m est 8 m, ce qui correspond à deux tuyaux de 4 m. Donc la somme des longueurs de tous les tuyaux correspond à celle de 40 tuyaux de 4 m chacun. Et la longueur totale des tuyaux disponibles est 40×4 m $= 160$ m.

2. Un rectangle dont la longueur vaut trois fois la largeur est garni d'un quadrillage. Le long de chaque côté, quatre rangées de carrés sont gris ; les autres carrés sont blancs. Il y a 544 carrés gris. Combien y a-t-il de carrés blancs ?

Solution de BEYLEMANS Jennifer, élève de 2ème année à l'Institut Saint Domique à Bruxelles.

Nous voyons qu'il y a deux fois quatre rangées de longueur $3x$ chacune et deux fois quatre rangées de longueur x chacune. Ces rangées se superposent aux quatre coins du rectangle pour former des carrés de côté 4. Ce sont donc quatre carrés de 16 "dalles" grises qui sont en trop et qu'il va falloir supprimer.

$$\begin{gathered}2.4.3x + 2.4x - 4.16 = 544\\ 24x + 8x - 64 = 544\\ 32x = 544 + 64\\ 32x = 608\\ x = \frac{608}{32} = 19\end{gathered}$$

Les dimensions du rectangle sont

$$\begin{aligned}L &= 3x = 3.19 = 57\\ \ell &= x = 19\end{aligned}$$

Le nombre total de carrés contenu dans le rectangle est donc de $19.57 = 1083$.

Soustrayons le nombre de carrés gris au nombre total de carrés dans le rectangle pour obtenir le nombre de carrés blancs

$$1083 - 544 = 539.$$

Il y a donc 539 carrés blancs dans ce rectangle.

3. Dans le trapèze $ABCD$, $AB//CD$, $\|AB\| = 10$ et $\|CD\| = 6$; en outre, la hauteur de ce trapèze est $h = 4$. Si P est le milieu de $[AD]$ et Q celui de $[PB]$, que vaut l'aire du triangle PCQ ?

Solution de LOISEAU Didier, élève de 2ème année au Petit Séminaire Saint Roch à Ferrières.

Données (fig. 1) $AB//CD$

$\|AB\| = 10$ et $\|CD\| = 6$
hauteur de $ABCD = h = 4$
P est milieu de $[AD]$
Q est milieu de $[PB]$

Inconnue : aire du triangle PCQ

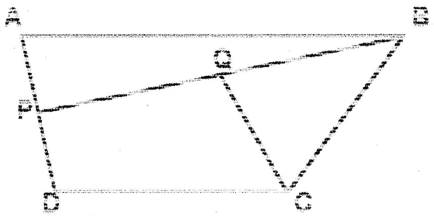


fig. 1

Résolution

Si on fait pivoter le triangle PCD par la symétrie de centre P, on obtient un triangle BCC' ($C' = s_p(C)$) car AD et PC sont des droites fixes de la symétrie et la droite DC va se superposer à la droite AC' car les symétries centrales conservent le parallélisme.

Le triangle obtenu BCC' possède une médiane PB qui, comme toutes les médianes, le coupe en deux triangles de même aire.

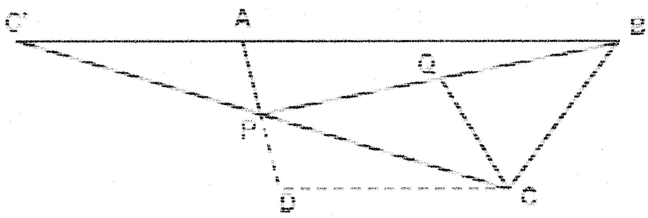


fig.2

Donc PBC a une aire qui vaut la moitié de $ABCD$. Le triangle PBC possède une médiane QC qui le coupe en deux triangles de même aire. L'aire de PQC vaut donc le quart de l'aire du trapèze $ABCD$ soit

$$\frac{(10+6).4}{2.4} = 8.$$

4. Nous observons que

$$1+2+1 = 2^2,$$
$$1+2+3+2+1 = 9 = 3^2,$$
$$1+2+3+4+3+2+1 = 16 = 4^2, \ldots$$

Les sommes ainsi construites sont-elles toutes des carrés d'entiers ? Si oui, le démontrer ; si non, indiquer un exemple où cette propriété n'est pas satisfaite.

Solution de TROESSART Cédric, élève de 2ème année à l'Institut Centre Ardenne à Libramont.

$$1+2+\cdots+n-1+n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Prouvons-le par récurrence.

Pour 1 :

$$\frac{(1+1)1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Pour $n+1$, à partir de la formule pour n

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)n}{2}+n+1 &= \frac{n^2+n+2n+2}{2}\\ &= \frac{n^2+3n+2}{2}\\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

qui est la formule pour $1+2+\cdots+n+(n+1)$.

Revenons au problème de départ. On peut écrire

$$1+2+\cdots+n-2+n-1+n+n-1+n-2+\cdots+2+1$$

sous la forme

$$2(1+2+\cdots+n-2+n-1)+n.$$

Appliquons la formule ci-dessus

$$\begin{aligned}\frac{2(n-1)(n-1+1)}{2}+n &= (n-1)n+n\\ &= n^2-n+n\\ &= n^2.\end{aligned}$$

Donc ces sommes sont toutes des carrés d'entiers.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

La suite infernale problème n° 217 de M. et P. n° 121.

Trouver un nombre entier A, le plus grand possible, qui divise deux éléments consécutifs (au moins) de la suite $1988 + N^2$.

Solution de N. BERCKMANS de Waterloo.

Posons $m = 1988$.

Remarque préliminaire

Soit $x \in N$. Si d divise $m+x^2$ et $m+(x+1)^2$, alors d divise leur différence $2x+1$.

Inversement, si d divise $m+x^2$ et $2x+1$, alors d divise leur somme $m+(x+1)^2$.

Résolution du problème

Le problème consiste à déterminer le maximum A de l'ensemble F, où

$$F = \{d \in N \mid \exists\, x \in N \text{ tel que } d \text{ divise } m + x^2 \text{ et } d \text{ divise } 2x+1\}.$$

1) $4m+1 \in F$ car pour $x = 2m$, $4m+1 = 2x+1$ et $4m+1$ divise $m+x^2$.
   En effet, $m + x^2 = m + 4m^2 = m(1+4m)$.
2) Si $d \in F$, alors d divise $4m+1$.
   En effet, si $d \in F$, il existe $x \in N$ tel que d divise $p = m + x^2$ et d divise $q = 2x+1$. Dès lors d divise $4p - q^2 + 2q = 4m+1$.
3) On en déduit que $A = \max F = 4m+1 = 7.953$.

Prolongement

Démontrons que les trois ensembles suivants coïncident :

$$\begin{aligned} F &= \{d \in N \mid \exists\, x \in N \text{ tel que } d \text{ divise } m + x^2 \text{ et } d \text{ divise } 2x+1\} \\ D &= \{b \in N \mid b \text{ divise } 4m+1\} \\ G &= \{2x+1 \mid x \in N,\ 2x+1 \text{ divise } m+x^2\}. \end{aligned}$$

Il est évident que $G \subseteq F$ et nous avons prouvé que $F \subseteq D$.

Prenons un élément b de D et prouvons qu'il est dans G.

Puisque b divise $4m+1$, b divise $4m+1+b^2-2b = 4m+(b-1)^2$. b étant un nombre impair, $x = \frac{b-1}{2}$ est un entier de N. Vu que b divise $4(m+x^2)$ et que b est impair, $b = 2x+1$ divise $m+x^2$ et donc $b \in G$. On a

$$G = F = D = \{1, 3, 11, 33, 241, 723, 2.651, 7.953\}.$$

J. ANSEEUW de Roeselare, J. FINOULST de Diepenbeek, J. GOLDSTEINAS de Bruxelles, M. MAESEN d'Eupen, J. RASSE de Mean ont aussi envoyé de bonnes solutions.

$\boxed{\text{Les trois cercles}}$ problème n° 218 de M. et P. n° 121.

C_1, C_2, C_3 sont trois cercles situés dans le même plan et tels que les tangentes extérieures communes à C_2 et C_3 se coupent en P, celles communes à C_3 et C_1 se coupent en Q et celles communes à C_1 et C_2 se coupent en R.

Démontrer que P, Q, R sont collinéaires.

Solution de P. DASSY de Liège.

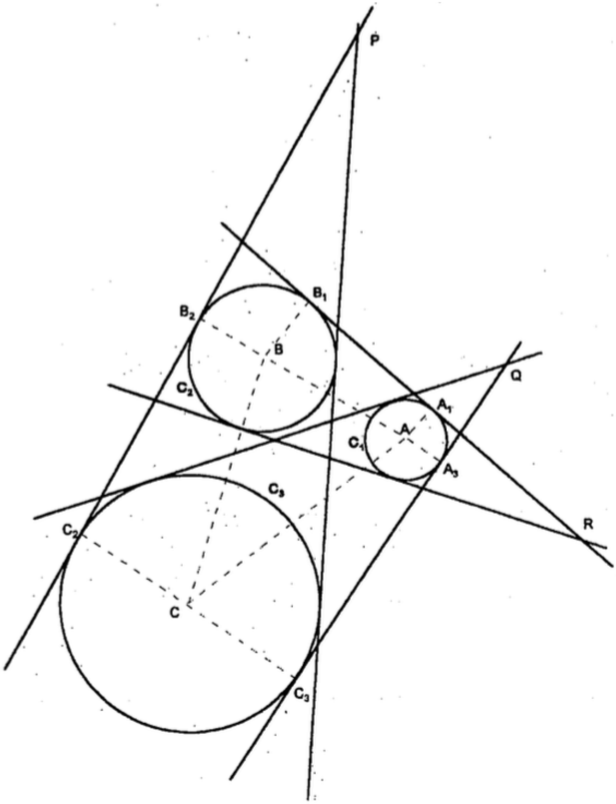


Fig. 1

Soient A, B, C les centres respectifs de C_1, C_2, C_3 et r_1, r_2, r_3 leurs rayons respectifs.

Soient AA_1 et BB_1 les perpendiculaires abaissées sur une tangente issue de R (voir figure). Une similitude fait que $\frac{r_1}{r_2} = \frac{RA}{RB}$.

De même, soient BB_2 et CC_2 les perpendiculaires abaissées sur une tangente issue de P (voir figure). On a de même $\frac{r_2}{r_3} = \frac{PB}{PC}$.

Soient enfin CC_3 et AA_3 les perpendiculaires abaissées sur une tangente issue de Q (voir figure). On a $\frac{r_3}{r_1} = \frac{QC}{QA}$.

$$\frac{RA}{RB}\,\frac{PB}{PC}\,\frac{QC}{QA} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{r_2}{r_3}\frac{r_3}{r_1} = 1.$$

Lorsque trois points (P, Q, R) pris sur les côtés d'un triangle (BCA) déterminent la relation de Ménélaüs $\left(\frac{PB}{PC}\,\frac{QC}{QA}\,\frac{RA}{RB} = 1\right)$, ils sont en ligne droite (réciproque du théorème de Ménélaüs). D'où la thèse.

Bonnes solutions de N. BERCKMANS de Waterloo, J. FINOULST de Diepenbeek, J. GOLDSTEINAS de Bruxelles, A. PATERNOTTRE de Boussu et C. VILLERS de Hyon.

$\boxed{\text{Palindromes}}$ problème n° 219 de M. et P. n° 121.

Trouver tous les nombres naturels n écrits en base 10 et ne comportant pas de chiffre 0 tels que n et n^2 soient tous deux des palindromes.

Solution de A. PATERNOTTRE de Boussu.

Désignons par n un nombre naturel palindrome, écrit en base 10, dont les chiffres $a, b, c, \ldots$ sont des éléments de $C_0 = \{1, 2, \ldots, 9\}$ et désignons par p le nombre de chiffres de n.

1) $\underline{p = 1}$

Tout nombre naturel appartenant à C_0 est palindrome. Cependant, seuls $1, 2$ et 3 ont pour carré un nombre d'un seul chiffre (resp. $1, 4$ et 9) qui est aussi un palindrome.

2) $\underline{p = 2}$

On peut poser $n = \overline{aa} = a.10 + a = 11a$; d'où $n^2 = 121a^2$. n^2 est palindrome si et seulement si $a = 1$ ou $a = 2$. Dès lors, $n = 11$ ou $n = 22$.

3) $\underline{p = 3}$

On peut poser $n = \overline{aba} = a.10^2 + b.10 + a$.

Calculons n^2 et ordonnons son développement suivant les puissances décroissantes de 10 :

$$n^2 = a^2.10^4 + 2ab.10^3 + (2a^2 + b^2).10^2 + 2ab.10 + a^2.$$

Ce développement de n^2 possède $2p - 1 = 5$ termes, c'est-à-dire un nombre impair de termes. Le $p^{\text{ème}}$ terme est donc "central".

Les coefficients des termes symétriques par rapport à ce terme central sont égaux. n^2 peut donc être un palindrome à la condition que ses coefficients soient des naturels d'un seul chiffre. De ces trois coefficients, le plus grand est le coefficient central. En effet,

$$\left.\begin{array}{rrcl} & 2a^2 + b^2 & > & a^2 \;\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 > 0 \\ \text{et} & 2a^2 + b^2 & > & 2ab \;\Leftrightarrow\; a^2 + (a - b)^2 > 0. \end{array}\right. \qquad (a, b \in C_0)$$

Dès lors, n^2 sera un palindrome si le coefficient central $2a^2 + b^2$ est un naturel d'un seul chiffre. Ce sera le cas pour $a = 1$ et $b = 1$, $a = 1$ et $b = 2$, $a = 2$ et $b = 1$.

Et on a $n = 111$ ou $n = 121$ ou $n = 212$.

4) $\underline{p = 4}$

On peut poser $n = \overline{abba} = a.10^3 + b.10^2 + b.10 + a$.

D'où $$\begin{aligned} n^2 = a^2.10^6 &+ 2ab.10^5 + (b^2 + 2ab).10^4 + (2a^2 + 2b^2).10^3 \\ &+ (b^2 + 2ab).10^2 + 2ab.10 + a^2. \end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, on arrive à la conclusion que n^2 est palindrome à la condition que le coefficient $2a^2 + 2b^2$ du terme central soit un naturel d'un seul chiffre. Ce n'est le cas que si et seulement si $a = b = 1$ et on a $n = 1111$.

5) $\underline{p = 5}$

On peut poser $n = \overline{abcba} = a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + b.10 + a$.

Le coefficent du terme central de n^2 est $2a^2 + 2b^2 + c^2$ et n'est un naturel d'un seul chiffre que si et seulement si $a = b = c = 1$ ou $a = b = 1$ et $c = 2$. D'où $n = 11111$ ou $n = 11211$.

6) $\underline{p = 6}$

A partir de $p = 6$ jusqu'à $p = 9$, en procédant toujours comme précédemment, on arrive facilement à montrer que n est un nombre palindrome composé uniquement de p chiffres 1 et n^2 est alors un nombre palindrome de $2p - 1$ chiffres.

A partir d'un nombre palindrome n à 10 chiffres, le carré n^2 ne sera pas un palindrome. En effet, pour $p = 10$, le coefficient du terme central de $n^2 = (\overline{abcdeedcba})^2$ est $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2e^2$ et ne peut être un nombre d'un seul chiffre pour a, b, c, d, e non nuls.

<u>Conclusion</u> : Il existe 15 nombres naturels n répondant aux conditions imposées dans l'énoncé du problème :

n	1	2	3	11	22	111	121	212	1111
n^2	1	4	9	121	484	12321	14641	44944	1234321

n	11111	11211	111111	1111111
n^2	123454321	125686521	12345654321	1234567654321

n	11111111	111111111
n^2	123456787654321	12345678987654321

J. FINOULST de Diepenbeek a envoyé une solution identique.

$\boxed{\text{AS1}}$ proposé dans M. et P. n° 122

C_1 est un cercle fixé, C_2 un cercle fixé intérieur à C_1. Par P, point variable sur C_1, on mène les tangentes t' et t'' à C_2. Ces droites coupent C_1 en A et B.

Démontrer que l'enveloppe de la droite AB est un cercle.

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek.

Dans le système d'axes perpendiculaires, l'axe des x correspond à la droite des centres de C_1, C_2 et le centre C_2 est l'origine du système.

Soit $M(a, 0)$ le centre de C_1 et $1, r$ respectivement les rayons des cercles C_1 et C_2.

Equations des cercles :

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv (x-a)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ C_2 &\equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

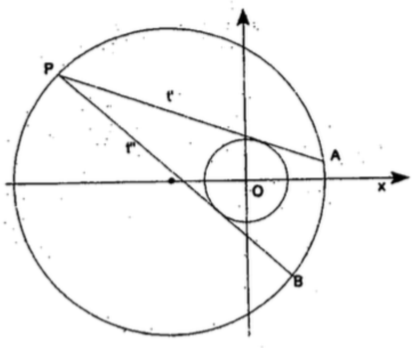


Fig. 2

Les coordonnées d'un point quelconque P de C_1 peuvent s'écrire : $(a+\cos t, \sin t)$.

Equation quadratique des tangentes issues du point P au cercle C_2 :

(t', t'') : $\left[(a+\cos t)x + y\sin t - r^2\right]^2 - (x^2+y^2-r^2)(a^2+2a\cos t+1-r^2) = 0.$

Considérons le faisceau déterminé par le couple des tangentes (t', t'') et le couple composé de la droite AB d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et de la tangente à C_1 au point P d'équation $(x-a)\cos t + y \sin t - 1 = 0$:

$$\begin{aligned} &[(a+\cos t)x + y\sin t - r^2]^2 \\ &\quad -(x^2+y^2-r^2)(a^2+2a\cos t+1-r^2) \\ &\quad +(\alpha x + \beta y + \gamma)[(x-a)\cos t + y\sin t - 1] = 0. \end{aligned}$$

Un des exemplaires de ce faisceau est le cercle C_1.

Pour exprimer que ce faisceau contient le cercle C_1, il suffit d'exiger l'égalité des coefficients de x^2 et de y^2 et d'annuler les coefficients de xy et de y. On trouve ainsi :

- coefficient de x^2 :

$$(a+\cos t)^2-(a^2+2a\cos t+1-r^2)+\alpha\cos t=r^2-\sin^2 t+\alpha\cos t;$$

- coefficient de y^2 :

$$\sin^2 t-(a^2+2a\cos t+1-r^2)+\beta\sin t=-\cos^2 t-a^2-2a\cos t+r^2+\beta\sin t.$$

L'égalité de ces coefficients et le coefficient de xy égalé à 0 donnent le système en α et β :

$$\begin{aligned}\beta\sin t-\alpha\cos t &= a^2+2a\cos t+\cos 2t\\ \beta\cos t+\alpha\sin t &= -2\sin t.(\cos t+a).\end{aligned}$$

On trouve après simplification :

$$\alpha=-2a-(a^2+1)\cos t,\quad \beta=(a^2-1)\sin t.$$

Le coefficient de y, égalé à zéro, donne

$$-2r^2\sin t-\beta(1+a\cos t)+\gamma\sin t=0.$$

Substituant la valeur de β, on obtient après simplification :

$$\gamma=2r^2+(a^2-1)(1+a\cos t).$$

Le cercle ainsi obtenu est le cercle C_1.

En effet, les coefficients de x^2 et de y^2 deviennent tenant compte des valeurs de α et de β :

$$r^2-(a\cos t+1)^2.$$

Chercher le coefficient de x et remplacer α et γ par les valeurs trouvées donne

$$\begin{aligned}&-2r^2(a+\cos t)-\alpha(a\cos t+1)+\gamma\cos t\\ &= -2r^2(a+\cos t)+[2a+(a^2+1)\cos t](a\cos t+1)\\ &\quad +2r^2\cos t+(a^2-1)\cos t(a\cos t+1)=-2a[r^2-(a\cos t+1)^2];\end{aligned}$$

de la même manière le terme indépendant devient

$$\begin{aligned}r^4 + r^2(a^2 + 2a\cos t + 1 - r^2) - (a\cos t + 1)[2r^2 + (a^2 - 1)(a\cos t + 1)]\\ = (a^2 - 1)[r^2 - (a\cos t + 1)^2].\end{aligned}$$

On constate que les coefficients non nuls de l'équation du cercle du faisceau sont proportionnels aux coefficients de l'équation du cercle C.

L'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ de la droite AB s'écrit en fonction du paramètre t :

$$[(a^2 + 1)\cos t + 2a]x + (1 - a^2)\sin t.y - 2r^2 + (1 - a^2)(a\cos t + 1) = 0$$

ou

$$[(a^2 + 1)x + a - a^3]\cos t + (1 - a^2)y\sin t = 2r^2 - 1 - 2ax + a^2.$$

L'enveloppe de la droite AB est obtenue en éliminant le paramètre t entre l'équation précédente et sa dérivée par rapport à t :

$$(1 - a^2)y\cos t - [(a^2 + 1)x + a - a^3]\sin t = 0.$$

Le système formé de ces deux équations est résolu par rapport à $\cos t$ et $\sin t$.

Le discriminant D est égal à

$$D = -[(a^3 + 1)x + a - a^3]^2 - (1 - a^2)^2y^2.$$

Les valeurs de $\cos t$ et $\sin t$ sont données par

$$\begin{aligned}\cos t &= -[(2r^2 - 1 + a^2 - 2ax)((a^2 + 1)x + a - a^3)]/D\\ \sin t &= -y(1 - a^2)(2r^2 - 1 + a^2 - 2ax)]/D.\end{aligned}$$

Substituant les valeurs trouvées dans l'identité $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ donne
1) $(a^2x + x + a - a^3)^2 + (1 - a^2)^2y^2 = 0$ droites imaginaires conjuguées ;
2) $(2r^2 - 1 + a^2 - 2ax)^2 = (a^2x + x + a - a^3)^2 + y^2(1 - a^2)^2$.
Cette dernière relation s'écrit

$$(a^2 - 1)^2(x^2 + y^2) + 2a[4r^2 - (a^2 - 1)^2]x - (a^2 - 1)^3 - 4r^2(a^2 + r^2 - 1) = 0.$$

L'enveloppe de la droite AB est donc un cercle dont le centre est situé sur la droite des centres des cercles C_1 et C_2.

Les solutions des problèmes suivants devront me parvenir avant le 1er mars 2000.

J'aimerais que les solutions de problèmes différents soient rédigées sur des feuilles séparées, cela me faciliterait le classement et le dépouillement.

226. Tangente

Soit E un ensemble de 9 réels distincts. Montrer que l'on peut toujours trouver a et b dans E tels que

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

(communiqué par C. RADOUX de Mons).

227. Premiers

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6n+5$ où $n \in \mathbb{N}$.

228. Deux équations

a, b, c sont des entiers non nuls. Sachant que l'équation $ax^2+by^2+cz^2 = 0$ a une solution (x, y, z) où x, y, z sont des entiers non tous trois nuls, démontrer que l'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ a une solution où x, y, z sont des rationnels.