

Mathématique *et* *Pédagogie*

Sommaire

- *J. Navez, Éditorial* 2
- *J.G. Segers, Le cosinus au secours de l'équation cubique* 3
- *R. Marquet, Applications scientifiques actuelles de la régression linéaire* 10
- *M. Kassab, Espaces métriques et lieux géométriques* 21
- *C. Villers, Forum* 38
- *M. Fremal, C. Villers, Revue des revues* 41
- *C. Festraets, Olympiades* 51
- *C. Festraets, Des problèmes et des jeux* 62

Éditorial

J. Navez,

Je profite de ce premier numéro de l'an 2000 pour vous souhaiter une bonne et heureuse année.

Pour ceux qui sont toujours dans les classes, je leur souhaite des désignations agréables, des horaires de rêve, des élèves adorables et des chefs d'établissements débordants de prévenance.

Pour ceux qui ont rangé la clé sous le paillason, je leur souhaite une retraite douce et active avec le goût sans cesse renouvelé de nouvelles émotions mathématiques.

Le changement de millésime peut être l'occasion de réfléchir sur le futur ; je pense qu'il faudrait progressivement abandonner les idées négatives comme la gestion de la crise et la rentabilité à tout prix. Il faut que l'on redevienne des travailleurs, des cadres, des professeurs et que l'on cesse d'être des « ressources humaines ». Il faut investir et le meilleur investissement à long terme est la formation.

L'adéquation et la pertinence de la formation et spécialement de la formation mathématique des jeunes est un défi majeur pour la réussite du troisième millénaire.

Jacques NAVEZ

Le cosinus au secours de l'équation cubique

J.G. Segers,

En étudiant la résolution de l'équation du troisième degré par la méthode proposée par Dirk Danckaert (*Mathématique et Pédagogie*, n° 123, 55–65, 1999), le cas $\Delta < 0$ paraît bizarre : pourquoi, dans le cas précis qui fournit trois racines réelles, serait-il indispensable de passer par les nombres complexes ? Étant donné que ces solutions se présentent sous la forme de fonctions goniométriques et non de racines du deuxième ou troisième degré, il semble logique d'essayer de se tourner vers ces fonctions.

1) L'identité

$$4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi - \cos 3\varphi = 0 \quad (1)$$

peut être lue dans les deux sens : soit il s'agit de calculer $\cos(3\varphi)$ à partir de la valeur connue de $\cos \varphi$, soit on cherche, connaissant la valeur de $\cos(3\varphi)$, celle de $\cos \varphi$. Dans ce dernier cas, il s'agit d'une équation cubique qui peut s'écrire sous la forme

$$4z^3 - 3z - \cos 3\varphi = 0. \quad (2)$$

On sait qu'une telle équation a 3 racines ; on voit que leur somme est nulle, et que leur produit vaut $\cos(3\varphi)/4$. Pour la résoudre, soustrayons membre à membre l'identité (1) de l'équation (2). On obtient

$$4(z^3 - \cos^3 \varphi) - 3(z - \cos \varphi) = 0,$$

d'où

$$4(z - \cos \varphi)(z^2 + z \cos \varphi + \cos^2 \varphi) - 3(z - \cos \varphi) = 0.$$

L'équation a donc pour première racine

$$z_0 = \cos \varphi, \quad (3a)$$

les deux autres sont solutions de l'équation du second degré

$$4z^2 + 4z \cos \varphi + (4 \cos^2 \varphi - 3) = 0$$

dont le réalisant vaut

$$\begin{aligned} \rho' &= 4 \cos^2 \varphi - 16 \cos^2 \varphi + 12 \\ &= 12 - 12 \cos^2 \varphi = 12 \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

et les solutions sont

$$\begin{aligned}
 z_{1,2} &= \frac{-2 \cos \varphi \pm 2\sqrt{3} \sin \varphi}{4} \\
 &= -\frac{1}{2} \cos \varphi \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \\
 &= \cos \frac{2\pi}{3} \cos \varphi \pm \sin \frac{2\pi}{3} \sin \varphi \\
 &= \cos \left(\frac{2\pi}{3} \text{Mathématique et Pédagogie} \varphi \right)
 \end{aligned}$$

d'où

$$z_1 = \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right), \quad z_2 = \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right). \quad (3b)$$

Lorsque φ parcourt l'intervalle $[0, \pi/3]$, $\cos(3\varphi)$ parcourt $[-1, 1]$, et les solutions z_2, z_1, z_0 parcourent respectivement les intervalles $[-1, -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$.

On constate que les coefficients de l'équation (2) sont réels, que ses trois racines sont réelles, et que la solution n'a pas exigé le passage par les nombres complexes. Calculons les grandeurs P, Q, R, Δ . On trouve

$$\begin{aligned}
 P &= \alpha\gamma - \beta^2 = -4, \\
 Q &= \beta\gamma - \alpha\delta = 4 \cos 3\varphi, \\
 R &= \beta\delta - \gamma^2 = -1, \\
 \Delta &= Q^2 - 4PR = 16 \cos^2 3\varphi - 16 = -16 \sin^2 3\varphi \leq 0.
 \end{aligned}$$

Il s'agit donc bien d'une équation cubique avec $\Delta \leq 0$. On constate en plus que $\Delta = 0$ n'est pas exclu, ce qui simplifiera encore plus la résolution.

2) Essayons d'appliquer cette méthode à l'équation générale du troisième degré dans le cas $\Delta \leq 0$. L'équation (2), tout en comprenant le paramètre φ , ou plutôt $\cos(3\varphi)$, n'est pas l'équation générale du troisième degré. Pour cela, il faut y introduire deux autres paramètres ; je propose l'un qui représenterait un intervalle $[-a, a]$ comprenant les solutions, à la place de $[-1, 1]$, et encore un autre représentant la moyenne arithmétique $m \neq 0$ des racines au lieu de $m = 0$. Les racines seraient donc de la forme

$$x_i = m + a \cdot z_i.$$

Transformons l'équation (2) avec la substitution

$$z = \frac{x - m}{a} ;$$

nous obtenons la nouvelle équation

$$4x^3 - 12mx^2 + 3(4m^2 - a^2)x - (4m^3 - 3a^2m + a^3 \cos 3\varphi) = 0,$$

ou, avec $a = 2b$,

$$x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - b^2)x - (m^3 - 3b^2m + 2b^3 \cos 3\varphi) = 0, \quad (4)$$

à identifier avec la forme générale

$$\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x + \delta = 0, \quad \alpha > 0. \quad (5)$$

On obtient sans problème

$$m = -\frac{\beta}{\alpha},$$

mais

$$b^2 = \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2} = -\frac{P}{\alpha^2}$$

exige $P < 0$ pour obtenir un b réel. Enfin,

$$m^3 - 3b^2m + 2b^3 \cos 3\varphi = -\frac{\delta}{\alpha}$$

donne

$$\cos 3\varphi = \frac{3b^2m - m^3 - \frac{\delta}{\alpha}}{2b^3},$$

ou en multipliant numérateur et dénominateur par α^3

$$\cos 3\varphi = \frac{-\alpha^2\delta + 3\alpha\beta\gamma - 2\beta^3}{2(\beta^2 - \alpha\gamma)\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}.$$

Pour que l'expression trouvée puisse effectivement représenter la valeur d'un cosinus, il faut qu'elle soit comprise entre -1 et $+1$. Nécessairement,

$$-1 \leq \frac{-\alpha^2\delta + 3\alpha\beta\gamma - 2\beta^3}{2(\beta^2 - \alpha\gamma)\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}} \leq 1,$$

ou

$$-\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} \leq \frac{-\alpha^2\delta + 3\alpha\beta\gamma - 2\beta^3}{2(\beta^2 - \alpha\gamma)} \leq \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma},$$

ou, en élevant au carré,

$$\frac{\alpha^4\delta^2 - 6\alpha^3\beta\gamma\delta + 4\alpha^2\beta^3\delta + 9\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 12\alpha\beta^4\gamma + 4\beta^6}{4\alpha^2\gamma^2 - 8\alpha\beta^2\gamma + 4\beta^4} \leq \beta^2 - \alpha\gamma,$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \alpha^4\delta^2 - 6\alpha^3\beta\gamma\delta + 4\alpha^2\beta^3\delta + 9\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 12\alpha\beta^4\gamma + 4\beta^6 \\ & \leq -4\alpha^3\gamma^3 + 12\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 12\alpha\beta^4\gamma + 4\beta^6. \end{aligned}$$

Supprimons les termes soulignés, ramenons tout au premier membre, et divisons par la facteur commun α^2 . Cela devient

$$\alpha^2\delta^2 - 6\alpha\beta\gamma\delta + 4\alpha\gamma^3 + 4\beta^3\delta - 3\beta^2\gamma^2 \leq 0,$$

ou

$$(\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta + \alpha^2\delta^2) - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(\beta\delta - \gamma^2) \leq 0,$$

ou encore

$$Q^2 - 4PR \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$\Delta \leq 0.$$

Conclusion : l'équation cubique générale (5) peut être résolue par des formules goniométriques sous la condition que

$$P < 0 \quad \text{et} \quad \Delta \leq 0.$$

3) En pratique, il ne suffit pas d'écrire les solutions comprenant les formules (3), encore faut-il déterminer l'angle φ à partir de la valeur de $\cos(3\varphi)$. Pour cela, on devrait introduire la fonction $\text{Arccos } x$ et écrire

$$\varphi = \frac{\text{Arccos}(\cos 3\varphi)}{3},$$

mais cette fonction n'est pas courante dans les langages informatiques qui ne comportent en général que la fonction $\arctan x$. Alors on utilisera une formule comme la suivante :

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{1 - \cos^2 3\varphi}}{\cos 3\varphi}, \quad (6)$$

mais avec précaution. En effet, la bijection $\text{Arccos } x$ est définie sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ dont l'image est l'intervalle fermé $[0, \pi]$, tandis que la bijection $\text{arctan } x$ est définie sur l'intervalle ouvert $]-\infty, +\infty[$ dont l'image est $]-\pi/2, \pi/2[$. Les résultats ne sont donc pas les mêmes. Alors détaillons :

si $\cos(3\varphi) = 1, \sin(3\varphi) = 0$, d'où $\varphi = 0$;

si $0 < \cos(3\varphi) < 1, 0 < \sin(3\varphi) < 1$, d'où $0 < \theta < \pi/2$ et $\varphi = \theta/3$;

si $\cos(3\varphi) = 0, \sin(3\varphi) = 1$, d'où $3\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \pi/6$;

si $-1 < \cos(3\varphi) < 0, 0 < \sin(3\varphi) < 1$, d'où $-\pi/2 < \theta < 0$, mais $\varphi = \frac{\theta+\pi}{3}$;

si $\cos(3\varphi) = -1, \sin(3\varphi) = 0$, d'où $3\varphi = \pi$ et $\varphi = \pi/3$.

En résumé, on calcule d'abord

$$m = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad b = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}, \quad a = 2b, \quad \cos 3\varphi = \frac{-\alpha^2\delta + 3\alpha\beta\gamma - 2\beta^3}{2(\beta^2 - \alpha\gamma)\sqrt{\beta^2}\alpha\gamma}.$$

Ensuite, on calcule φ , et finalement

$$x_0 = m + a \cos \varphi, \quad x_1 = m + a \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right), \quad x_2 = m + a \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right).$$

Les calculs suivants se limitent à 4 décimales.

Exemple 1 : $5x^3 - 3x^2 - 15x + 8 = 0$, coefficients 5, -1, -5, 8. $P = -26 < 0, \Delta = -2207 < 0, m = 0, 2, b = 1, 0198, \cos(3\varphi) = 0, 4639, \sin(3\varphi) = 0, 8859, \varphi = 0, 6844$ ou $39^\circ \dots, x_0 = 1, 7803, x_1 = 0, 5265, x_2 = -1, 7068$.

Exemple 2 : $3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 = 0$, coefficients 3, -2, -1, 6. $P = -7, Q = -16, R = -13, \Delta = -108, m = 0, 6667, b = 0, 8819, \cos(3\varphi) = -0, 5399, \sin(3\varphi) = 0, 8417, \varphi = 0, 7137$ ou $40^\circ \dots, x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = -1$.

Exemple 3 : $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$, coefficients 1, -1, -2, 8. $P = -3, Q = -6, R = -12, \Delta = -108, m = 1, b = 1, 7321, \cos(3\varphi) = 0, \sin(3\varphi) = 1, \varphi = 0, 5236$ ou $30^\circ, x_0 = 4, x_1 = 1, x_2 = -2$.

Exemple 4 : $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$, coefficients 1, 2, 3, 4. $P = -1, Q = 2, R = -1, \Delta = 0, m = -2, b = 1, \cos(3\varphi) = -1, \sin(3\varphi) = 0, \varphi = 1, 0472$ ou $60^\circ, x_0 = -1, x_1 = -1, x_2 = -4$.

Exemple 5 : Euler et l'équation du troisième degré

Dans son *Algebra* (1766), part 2, chap. 13, § 188, Euler traite l'équation $x^3 - 6x - 4 = 0$. En appliquant la formule de Cardan, Euler trouve

$$x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}$$

et écrit "was sich nicht anders ausdrücken läßt" (ce qui ne peut être exprimé autrement). Gauss avec son plan allait naître seulement onze ans plus tard, sinon Euler aurait su comment poursuivre ses calculs. En effet,

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i} \\ &= \sqrt[3]{2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}} + \sqrt[3]{2\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}} \\ &= \sqrt{2} (e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}) = 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Avec la méthode du cosinus, il aurait trouvé :

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -2, \delta = -4; P = -2, Q = 4, R = -4, \Delta = -16;$$

$$m = 0, b = \sqrt{2}, a = 2\sqrt{2}, \cos 3\varphi = \frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$\varphi = \frac{\pi}{12}, \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}},$$

ce que Euler connaissait certainement. Les solutions sont donc

$$\begin{aligned} x_0 &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}, \\ x_1 &= 2\sqrt{2} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \right) = 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{7\pi}{12} = -2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \\ &= -2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = -\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = -(\sqrt{3} - 1) = 1 - \sqrt{3}, \\ x_2 &= 2\sqrt{2} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \right) = 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} \\ &= -2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2. \end{aligned}$$

Leur somme vaut effectivement 0, et leur produit 4.

Adresse de l'auteur :

Jack SEGERS

rue Hocheporte 107/063

4000 Liège

Applications scientifiques actuelles de la régression linéaire

R. Marquet, A. R. Chênée

Mots-clés : régression linéaire, applications scientifiques

Il est nécessaire de montrer à nos élèves que le modèle linéaire est couramment utilisé par les scientifiques de toutes disciplines, on justifie ainsi l'intérêt de cette matière nouvellement introduite dans nos programmes.

Après avoir développé, dans un précédent numéro de la revue [3], la théorie classique de la régression linéaire [3], nous voudrions montrer quelques possibilités d'exploitation de cette théorie : une fois le modèle établi, on peut

1. interpoler
2. repérer les cas "bizarres" à analyser
3. prévoir une situation ultérieure
4. comparer deux situations [3, p. 31].

A cet effet, nous allons présenter brièvement quelques exemples actuels de recherches scientifiques variées faisant appel à des ajustements linéaires. Il s'agit des cas suivants :

- Médecine pédiatrique : Courbes de croissance de Tanner et Whitehouse reliant la taille et le poids de garçons ou de filles à l'âge [5].

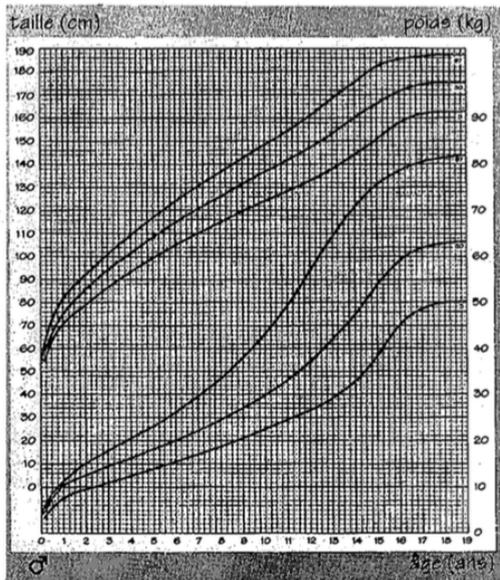
- Médecine dentaire : Estimation de l'âge d'un individu jeune en fonction de différents stades de développement des dents visibles sur une image radiographique [2].
- Botanique : Nombre de feuilles sur des plantes de muflier en fonction du nombre de jours pour l'anthèse [1].
- Zoologie : Relation entre la température de l'eau et la croissance de truitelles d'élevage déversées dans l'Ourthe et l'Ambève. Fécondité absolue des truites de l'Ourthe en fonction de leur longueur [4].

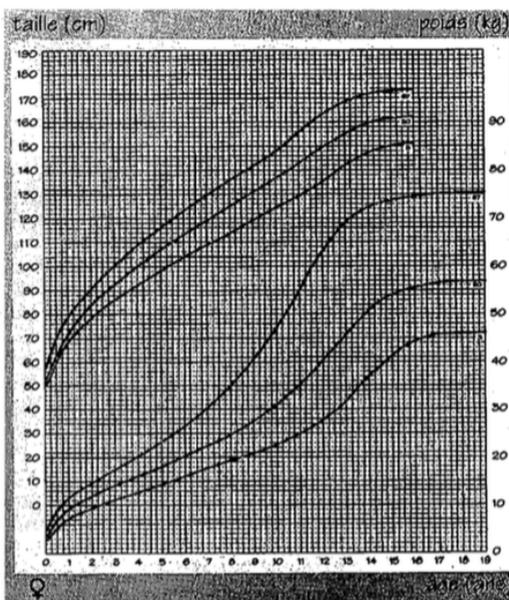
1. Médecine pédiatrique

(Etude réalisée par le Professeur M. Vanderschueren-Lodeweyckx; Service de Pédiatrie, Endocrinologie Pédiatrique, KUL.)

Voici les courbes de croissance enregistrées sur les jeunes de 0 à 19 ans.

L'examen de ces courbes motive particulièrement les élèves qui en profitent pour se situer eux-mêmes.





On remarque d'abord qu'il est nécessaire de séparer les deux sexes, les comportements étant très différents.

La lecture des tableaux, avec deux échelles d'ordonnées n'est pas très facile (la taille à droite et le poids à gauche).

La présence de 3 courbes notées 3, 50, 97 indique le pourcentage d'enfants mesurant moins de la valeur indiquée.

Plusieurs modèles linéaires sont visibles : la taille des filles de 2 à 14 ans et la taille des garçons de 2 à 16 ans. Le poids des filles de 1 à 8 ans et le poids des garçons de 1 à 8 ans.

La stabilisation de la taille (du poids ?) à partir d'un certain âge indique l'âge adulte.

On peut alors demander aux élèves de trouver les équations de droites "modèles" et d'en déduire des prédictions de tailles de poids ou d'âges en fonction de certaines données. C'est aussi le moment d'insister sur le domaine de validité du modèle et sur le danger d'extrapoler sans discernement.

2. Médecine dentaire

(Etude réalisée par O. Domken, C. Jamoul, P. Piette, R. Legrand, Service de Chirurgie orale et implantaire ULg.)

Il s'agit d'étudier l'âge de l'adolescent au moyen de radiographies panoramiques. La détermination de l'âge dentaire est de plus en plus sollicitée par les autorités judiciaires :

- enfants recueillis et adoptés sans papier ou dont la croissance a été gravement perturbée,
- délits à juger par un tribunal de la jeunesse (individu de moins de 18 ans) ou un tribunal ordinaire.
- individus décédés : les dents résistent particulièrement bien à des conditions difficiles (feu, séjour dans l'eau, dans la terre, ...).

Le principe consiste à comparer le développement des dents, vues sur une radiographie avec des mesures standards obtenues à partir d'un large échantillon de personnes.

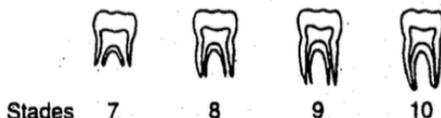


Fig.1 Derniers stades de minéralisation d'une molaire inférieure : stade 7 : 1/3 de racine formée; stade 8 : 2/3 de racine formée; stade 9 : racine formée, apex ouvert; stade 10 : racine formée, apex fermé.

a) Corrélation entre l'âge et le stade de formation de l'apex de la dent de sagesse inférieure

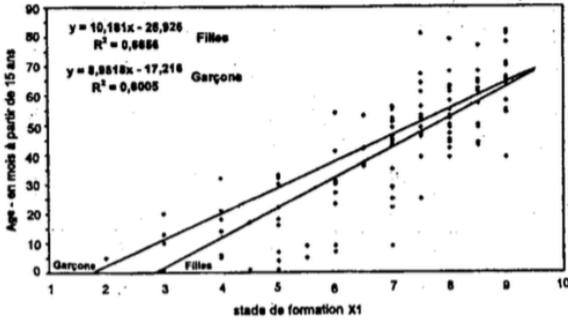


Fig. 2. Corrélation âge/stade de formation de l'apex de la 8 INF.

b) Corrélation entre l'âge et le stade de formation de l'apex de la dent de sagesse supérieure

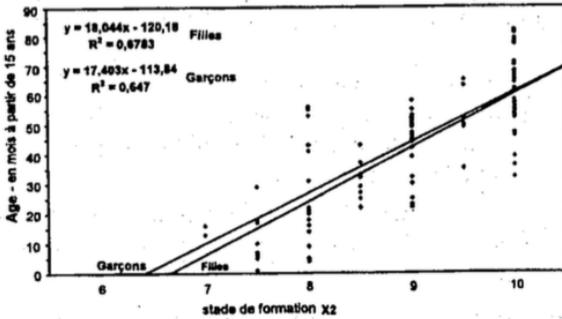


Fig. 3. Corrélation âge/stade de formation de l'apex de la 8 SUP.

c) Corrélation entre l'âge et le diamètre de la chambre pulpaire de la deuxième molaire inférieure

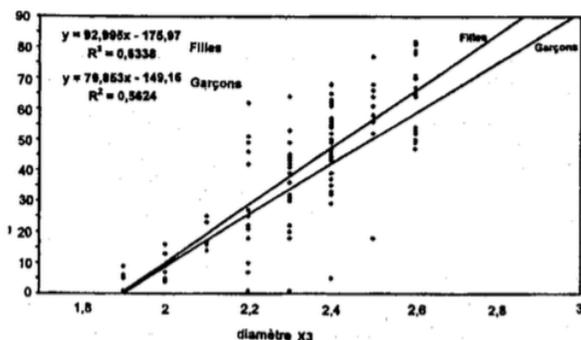


Fig. 4. Corrélation âge/diamètre de la chambre pulpaire des 7 INF.

Une régression linéaire multiple basée sur ces 3 variables explicatives montre qu'elles interviennent toutes 3 dans l'estimation recherchée.

Un modèle mathématique prédictif réunit ces 3 variables en une seule équation :

$$\text{âge} = 0,26X_1 + 0,68X_2 + 3,37X_3 + 0,008(X_1 - 7,8) \text{ sexe} + 2,75$$

- où
- X_1 = stade de formation de l'apex de la 8 INF,
 - X_2 = stade de formation de l'apex de la 8 SUP,
 - X_3 = rapport du diamètre de la chambre pulpaire de la 7 INF,
 - sexe = 0 pour fille, 1 pour garçon.

En pratique, les trois variables étant déterminées sur la radiographie panoramique, il reste à appliquer le modèle pour obtenir une estimation de l'âge de l'adolescent.

Le niveau d'erreur de cette estimation a été calculé en faisant la différence (résidu) entre les âges réels et les âges prédits pour 285 cas.

L'écart-type de la moyenne de ces résidus est de 8,9 mois. On peut donc avancer que les résultats de l'estimation sont valables à 9 mois près.

3. Une application botanique de la régression linéaire [1]

(Etude réalisée par F. Cremer ⁽¹⁾, A. Havelange ⁽²⁾, H. Saedler ⁽¹⁾ and P. Huijser ⁽¹⁾.)

Des plantes de muflier (*Antirrhinum majus*) sont cultivées dans différentes conditions dans les phytotrons du Département de Botanique de l'Université de Liège. Dans ces chambres, on sait modifier la température, la longueur du jour, l'intensité lumineuse et la qualité de la lumière.

Plus de 3000 plantes sont réparties en diverses séries selon les conditions qui leur sont appliquées.

Pour chaque plante, on compte le nombre de jours avant l'ouverture de la première fleur (anthèse) depuis le jour du semis; on compte également le nombre de feuilles produites avant le jour de l'ouverture de la première fleur.

Dans un graphique cartésien, on porte en abscisse le nombre de feuilles (number of leaves) et en ordonnées le nombre de jours pour l'anthèse (days to anthesis). Chaque plante correspond à un point du graphique et les symboles sont relatifs aux diverses conditions de culture.

On remarque immédiatement une très forte tendance linéaire et aussi le fait qu'un petit nombre de plantes s'écartent très fort de cette tendance.

Le calcul des coefficients de la droite de régression donne :

$$\begin{aligned} \text{le nombre de jours} &= 1.87 \text{ fois le nombre de feuilles plus } 23.57 \\ &\text{avec } r^2 = 0.82. \end{aligned}$$

L'intérêt se porte alors sur les points "isolés" : on remarque que ce sont les plantes qui ont poussé à des températures de 12 et 15 degrés, alors que les autres étaient soumises à des températures de 20 et 25 degrés.

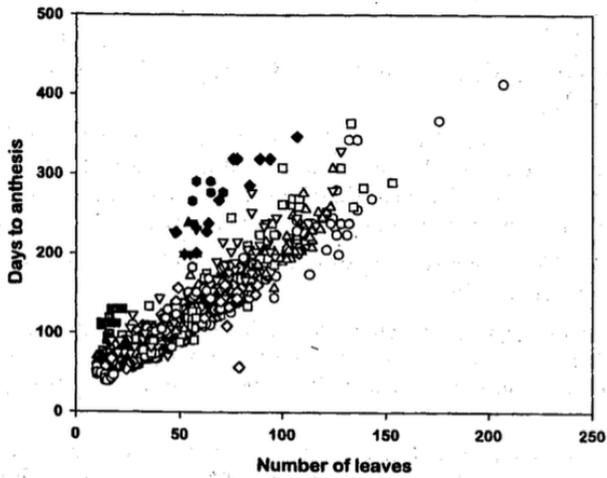
On en déduit que, au froid, les mufliers font moins de feuilles dans un temps donné sans que cela n'interfère sur le temps de floraison.

Sur le graphique, la droite de régression est encadrée de deux parallèles qui indiquent l'intervalle de confiance à 95 %.

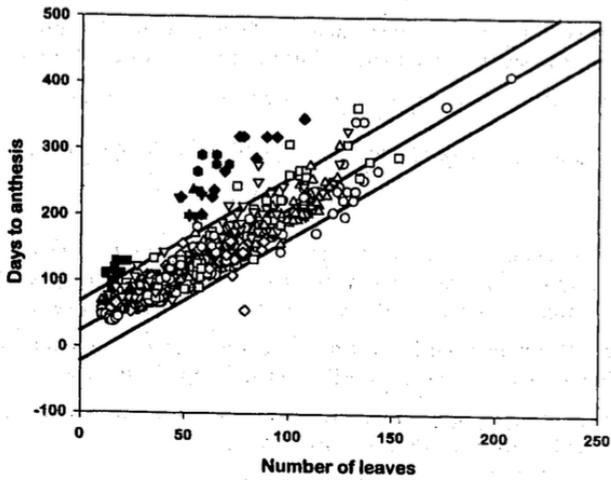
⁽¹⁾ Max-Planck-Inst. für Züchtungsforschung, Cologne, Germany

⁽²⁾ Univ. de Liège, laboratoire de Physiologie Végétale, Liège, Belgium

Relation leaf-days



Relation leaf-days



Environmental control of flowering time in *Antirrhinum majus*.

4. Ecologie de la truite commune dans les rivières de Wallonie [4]

(Etude réalisée par J.C. Philippart, ULg.)

Dans ce travail, on étudie les populations de truites selon quatre points de vue :

- la structure par tailles et âges,
- la croissance en longueur et en poids,
- la fécondité des individus et des populations,
- la survie et la mortalité.

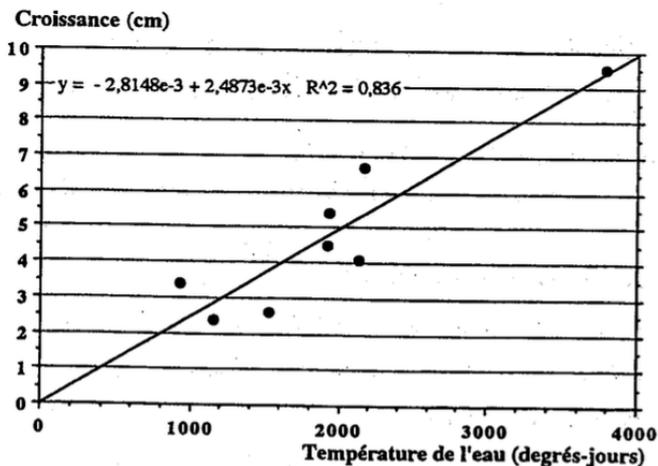
La grande majorité des truites étudiées furent capturées par pêche électrique et d'autres dans les passes à poissons des barrages. Ces poissons sont remis vivants à l'eau après quelques mesures.

Le dénombrement statistique se fait à partir de 2 efforts de pêche successifs.

Une formule mathématique donne alors l'effectif réel estimé de la population à partir de ces 2 échantillons.

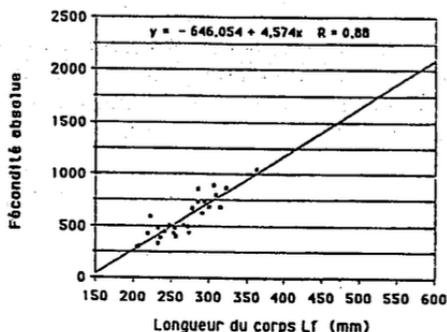
Ces effectifs sont convertis en biomasses au moyen de relations poids-longueur.

a) Dans l'étude de la croissance de truitelles de repeuplement, on constate qu'il y a une relation linéaire entre la température de l'eau, exprimée en degrés-jours, et la croissance, en cm, des truitelles d'élevages déversées dans l'Ourthe et l'Amblève.



b) Dans l'étude de la maturité sexuelle et de la fécondité des femelles, on constate le fort lien linéaire entre la longueur des femelles (en mm) et le nombre d'ovules. La fécondité relative (nombre d'ovules par kg de poids corporel) est en moyenne de 2403 ovules, avec des extrêmes de 1660 et 2934 ovules.

L'intérêt de cette relation est qu'il n'est dorénavant plus nécessaire de sacrifier des femelles, mais qu'il suffit de les mesurer, pour avoir une idée de la fécondité de la population piscicole. On évite ainsi des tests destructifs.



Fécondité absolue des truites de l'Ourthe (région de Bomal-Hamoir) en fonction de leur longueur corporelle.

Références

- [1] Cremer F., Havelange A., Saedler H., Huijser P., *Physiologia Plantarum*, 104, 1998, pp. 345-350.
- [2] Domken O., Jamoul C., Piette P., Legrand R., *Revue Médicale de Liège*, 1998, vol. 53.
- [3] Marquet R., La répression linéaire, *Mathématique et Pédagogie*, 118, 1998, pp. 13-31.
- [4] Philippart J.C., *Ecologie*, chapitre 5 : démographie et dynamique de population, Université de Liège, 1996.
- [5] Vanderschueren M. - Lodeweyckx M., Service de Pédiatrie, Endocrinologie Pédiatrique, KUL.

Adresse de l'auteur :
René MARQUET
Rue des Ronces 7
4130 TILFF

Espaces métriques et lieux géométriques

M. Kassab,

Mots-clés : distance, espace métrique, lieu géométrique, conique.

Introduction

Contrairement aux idées reçues, il n'est en Mathématiques que des vérités relatives et guère de vérités absolues : une proposition reconnue comme vraie dans le cadre d'une structure, d'une axiomatique, ..., peut s'avérer fausse dans le cadre d'une autre structure, d'une autre axiomatique, ...

Un plus un, nous le savons, ne font pas toujours deux, et s'il est vrai que dans l'anneau des réels \mathbb{R} , $+$, \cdot un produit de facteurs ne peut être nul sans que l'un au moins des facteurs ne le soit, il n'en sera pas de même dans les anneaux à diviseurs non nuls de zéro tels que l'anneau des entiers modulo n , \mathbb{Z}_n , $+$, \cdot (n non premier), l'anneau matriciel d'ordre n , $\mathbb{R}^{n \times n}$, $+$, \cdot ($n \geq 2$) et l'anneau booléen $\mathcal{P}E$, Δ , \cap ($\#E \geq 2$). ⁽¹⁾

Nous savons aussi que si la somme des angles intérieurs de tout triangle euclidien est égale à deux droits, cette somme sera supérieure à deux droits dans tout triangle sphérique et inférieure à deux droits dans tout triangle hyperbolique ⁽¹⁾.

C'est dans ce contexte que la présente étude se propose d'établir l'existence d'espaces métriques non euclidiens dont on ne manquera pas de faire appel aux distances qui leur sont associées pour un tracé comparatif dans le plan euclidien des lieux géométriques les plus familiers de ce plan.

On verra ainsi, qu'euclidiennement parlant, la médiatrice d'un segment de droite, n'est pas toujours une droite, que les bissectrices d'un couple de droites ne sont pas toujours perpendiculaires et que les lieux géométriques courbes tels que les coniques, s'y présentent en tant que réunion d'un nombre fini de segments de droite ou de demi-droites.

En se basant sur des notions enseignées dans le cycle supérieur de nos humanités et plus particulièrement sur la résolution dans le plan de systèmes

1. Voir sur ce sujet les articles intitulés "Sur les anneaux à diviseurs non nuls de zéro" et "Réflexions sur l'enseignement de la géométrie" respectivement parus dans les numéros 1 et 116 de la revue "Mathématique et Pédagogie".

de deux inéquations linéaires à deux inconnues, cette étude se veut accessible aux élèves de ce cycle.

I. Espaces métriques

Définitions : Le plan euclidien E étant “rapporté” à son repère orthonormé canonique $(^2)$ (Fig .1), on appelle

$\left\{ \begin{array}{l} \text{distance euclidienne} \\ \text{taxi - distance} \\ \text{maxi - distance} \end{array} \right.$ d'un couple de points $x(x_1, x_2)$ et $y(y_1, y_2)$ de

ce plan et on note, $\left\{ \begin{array}{l} d_e(x, y) \\ d_t(x, y) \\ d_m(x, y) \end{array} \right.$, le réel positif défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} d_e(x, y) = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + |y_2 - x_2|^2} \\ d_t(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \\ d_m(x, y) = \max \{ |y_1 - x_1|, |y_2 - x_2| \} . \end{array} \right.$$

Cela étant, on établit que

- $d_m(x, y) \leq d_e(x, y) \leq d_t(x, y)$
- (E, d_e) , (E, d_t) et (E, d_m) sont des espaces métriques.

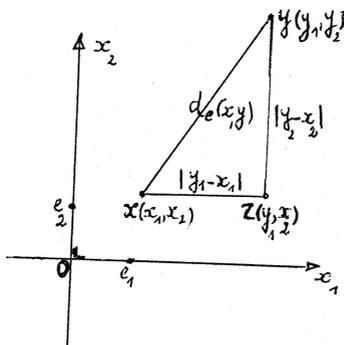


Fig. 1

2. E peut donc s'identifier à \mathbb{R}^2 , ce que l'on sous-entend dans la suite.

Exercices : 1. Résoudre graphiquement dans le plan E le système

$$\begin{cases} |x_1 - a_1| \leq |x_2 - 2a_1|, & a_1 > 0 \\ |x_1| \leq |x_2| \end{cases} \quad (1)$$

Autrement dit, situer dans ce plan l'ensemble des points $x(x_1, x_2)$ tels que

$$\begin{aligned} \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - 2a_1|\} &= |x_2 - 2a_1| \\ &\text{et} \\ \max\{|x_1|, |x_2|\} &= |x_2|. \end{aligned}$$

Il revient au même de résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3a_1 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 - a_1 \geq 0; \end{cases} x_2 \geq 2a_1 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3a_1 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 - a_1 \leq 0; \end{cases} x_2 \leq 2a_1$$

et

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_2 - x_1 \geq 0; \end{cases} x_2 \geq 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_2 + x_1 \leq 0 \\ x_2 - x_1 \leq 0; \end{cases} x_2 \leq 0.$$

La solution du système (1) se limite ainsi à l'ensemble des points $x(x_1, x_2)$ de la partie hachurée de la figure 2.1.

2. Résoudre de même dans le plan E l'équation

$$|x_1| + |x_2| = |x_1 - a_1| + |x_2 - 2a_1|.$$

Autrement dit, situer dans ce plan les points de l'ensemble M défini par

$$M = \{x(x_1, x_2) \in E \mid d_t(x, 0) = d_t(x, a)\}.$$

On a, compte tenu de la figure 2.2,

$$E = \bigcup_{i=1}^q P_i \quad \text{et par suite,} \quad M = \bigcup_{i=1}^q M_i, \quad \text{avec}$$

$$M_1 = \{x(x_1, x_2) \in P_1 \mid x_1 + x_2 = x_1 - a_1 + x_2 - 2a_1\} = \emptyset$$

$$M_2 = \{x(x_1, x_2) \in P_2 \mid x_1 + x_2 = x_1 - a_1 + 2a_1 - x_2 \text{ ou } 2x_2 = a_1\}$$

$$M_3 = \{x(x_1, x_2) \in P_3 \mid x_1 - x_2 = x_1 - a_1 + 2a_1 - x_2\} = \emptyset$$

$$M_4 = \{x(x_1, x_2) \in P_4 \mid x_1 + x_2 = a_1 - x_1 + x_2 - 2a_1 \text{ ou } 2x_1 = -a_1\} = \emptyset$$

$$M_5 = \{x(x_1, x_2) \in P_5 \mid x_1 + x_2 = a_1 - x_1 + 2a_1 - x_2 \text{ ou } 2(x_1 + x_2) = 3a_1\}$$

$$M_6 = \{x(x_1, x_2) \in P_6 \mid x_1 - x_2 = a_1 - x_1 + 2a_1 - x_2 \text{ ou } 2x_1 = 3a_1\} = \emptyset$$

$$M_7 = \{x(x_1, x_2) \in P_7 \mid x_2 - x_1 = a_1 - x_1 + x_2 - 2a_1\} = \emptyset$$

$$M_8 = \{x(x_1, x_2) \in P_8 \mid x_2 - x_1 = a_1 - x_1 + 2a_1 - x_2 \text{ ou } 2x_2 = 3a_1\}$$

$$M_9 = \{x(x_1, x_2) \in P_9 \mid -x_1 - x_2 = a_1 - x_1 + 2a_1 - x_2\} = \emptyset$$

Dès lors,

$$M = M_2 \cup M_5 \cup M_8$$

d'où un tracé immédiat de M dans E (Fig. 2.2).

Ces résultats et ces démarches seront exploités dans la suite.

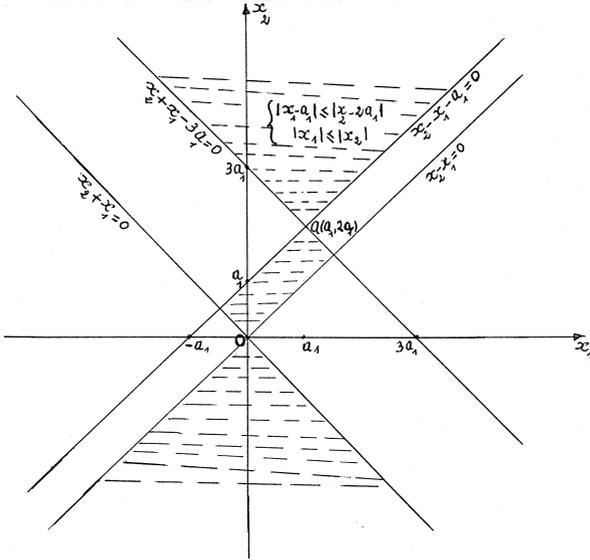


Fig. 2.1

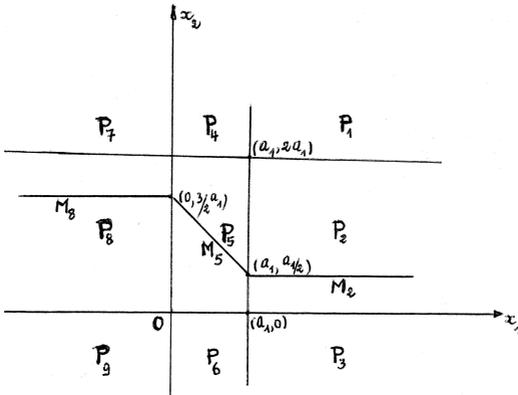


Fig. 2.2

Nous nous proposons d'étudier dans le plan euclidien E , les lieux géométriques qui vont suivre.

Un lieu géométrique tel que L , une fois traduit en distance euclidienne, en taxi-distance ou en maxi-distance sera désigné par L_e , L_t ou L_m .

II. Lieux géométriques

1. La médiatrice

Définition : Dans l'espace métrique (E, d) , on appelle médiatrice de la paire $\{a, b\} \subset E$ (ou du segment $[ab]$) et on note $M[a, b]$, l'ensemble des points de E se trouvant à égales distances des points a et b .

Autrement dit,

$$\forall a, b \in E, a \neq b : M[ab] = \{x \in E \mid d(x, a) = d(x, b)\}.$$

Proposons-nous d'étudier les médiatrices de la paire $\{0(0, 0), a(a_1, 2a_1)\}$, $a_1 > 0$ ou du segment $[0a]$.

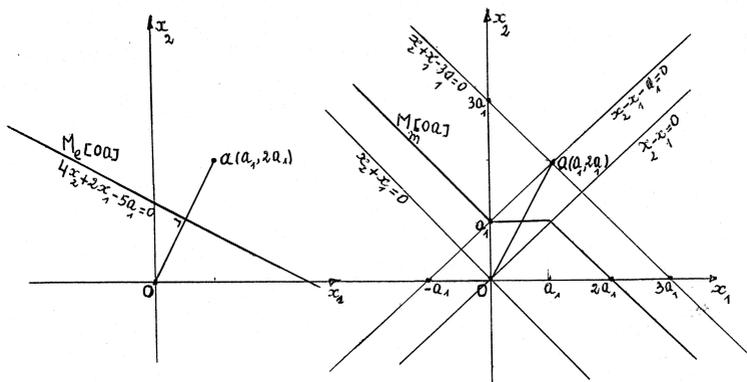
Equation : On a en vertu de cette définition

$$\begin{aligned} M_e[0a] &= \left\{ x(x_1, x_2) \in E \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - 2a_1)^2} \right\} \\ &= \{x(x_1, x_2) \in E \mid 4x_2 + 2x_1 - 5a_1 = 0\} \end{aligned}$$

$$M_m[0a] = \{x(x_1, x_2) \in E \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} = \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - 2a_1|\}\}$$

$$M_t[0a] = \{x(x_1, x_2) \in E \mid |x_1| + |x_2| = |x_1 - a_1| + |x_2 - 2a_1|\}.$$

Tracé : La figure 3 nous donne les tracés de ces trois médiatrices. On relèvera que la médiatrice euclidienne est, compte tenu de son équation, une droite perpendiculaire au segment $[0a]$ en son milieu, ce qui était prévisible.



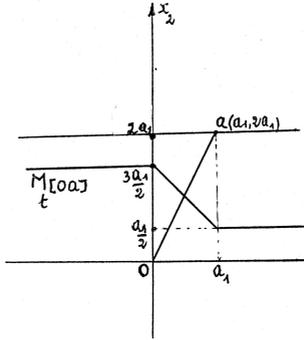


Fig. 3

Cas particulier : Médiatrices de la paire $\{0(0, 0), a(2a_1, 0)\}$, $a_1 > 0$.

La figure 4 donne les tracés de ces médiatrices dans ce cas particulier.

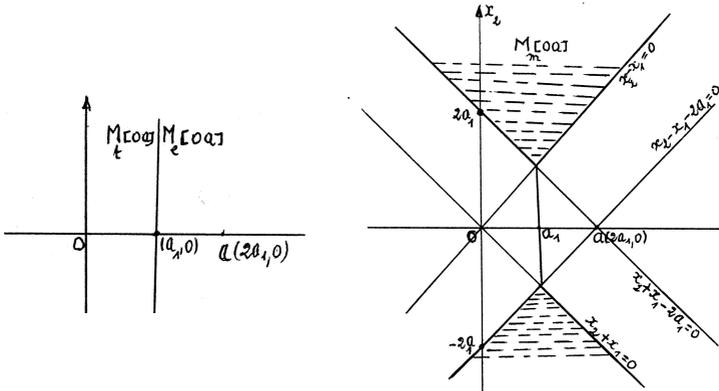


Fig. 4

2. La bissectrice

Définitions : Dans (E, d) , on appelle

1. Distance d'un point $x \in E$ à une partie $X \subset E$ et on note $d(x, X)$, la borne inférieure de l'ensemble des distances de ce point aux points de cette partie.

Autrement dit,

$$\forall x \in E, \forall X \subset E : d(x, X) = \inf\{d(x, y) \mid y \in X\}.$$

2. Bissectrice d'un couple (X_1, X_2) de parties de E et on note $\beta_d(X_1, X_2)$, l'ensemble des points de E se trouvant à égale distance de ces parties.

Autrement dit,

$$\forall X_1, X_2 \subset E : \beta_d(X_1, X_2) = \{x \in E \mid d(x, X_1) = d(x, X_2)\}.$$

Il découle de ces définitions et tout en se référant à la figure 5, que l'on a les relations :

$$\begin{aligned} d_e(x, X_1) &= d_t(x, X_1) = d_m(x, X_1) = d_e(x, x') = d_t(x, x') = d_m(x, x') = |x_2| \\ d_e(x, X_2) &= d_t(x, X_2) = d_m(x, X_2) = d_e(x, x') = d_t(x, x') = d_m(x, x') = |x_1| \\ d_e(x, A_1) &= d_e(x, x') = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{2}} \\ d_t(x, A_1) &= d_t(x, x') = |x_1 - x_2| \\ d_m(x, A_1) &= d_m(x, x') = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|. \end{aligned} \quad (2)$$

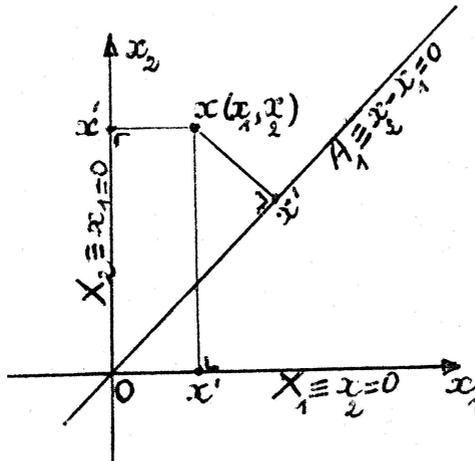


Fig. 5

Equations et tracés des bissectrices de quelques couples de droites

Compte tenu de (2), on trouve de suite (Fig. 6),

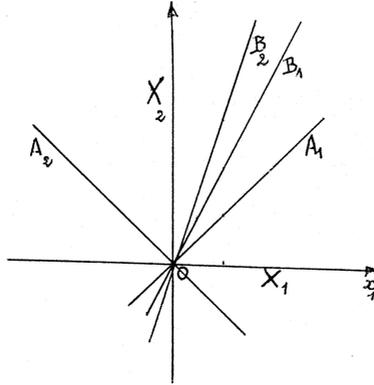


Fig. 6

- $\beta_e(X_1, X_2)$
 $= \beta_t(X_1, X_2) = \beta_m(X_1, X_2)$
 $= \{x(x_1, x_2) \in E \mid |x_1| = |x_2|\}$
 $= \{x(x_1, x_2) \in E \mid x_2 = x_1 \text{ ou } x_2 = -x_1\}$
 $= A_1 \cup A_2$, A_2 désignant la droite d'équation $x_2 + x_1 = 0$.
- $\beta_e(X_2, A_1) = \left\{x(x_1, x_2) \in E \mid |x_1| = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{2}}\right\} = C_1 \cup C_2$, C_1 et C_2 désignant les droites d'équations $x_2 - (1 + \sqrt{2})x_1 = 0$ et $x_2 - (1 - \sqrt{2})x_1 = 0$.
- $\beta_t(X_2, A_1) = \{x(x_1, x_2) \in E \mid |x_1| = |x_1 - x_2|\} = X_1 \cup B_1$, B_1 désignant la droite d'équation $x_2 - 2x_1 = 0$.
- $\beta_m(X_2, A_1) = \left\{x(x_1, x_2) \in E \mid |x_1| = \frac{1}{2} |x_1 - x_2|\right\} = A_2 \cup B_2$, B_2 désignant la droite d'équation $x_2 - 3x_1 = 0$.

On relève de suite que des trois bissectrices du couple (X_2, A_1) , seule la bissectrice euclidienne se présente en tant que réunion de deux droites perpendiculaires.

3. Deux lieux géométriques très particuliers

La paire $\{a'(-a_1, 0), a(a_1, 0)\}$, $a_1 > 0$ étant donnée dans (E, d) , on notera

1. $S[a', a]$, l'ensemble des points de E dont la somme des distances aux deux points de cette paire est égale à la longueur $2a_1$ du segment de droite $[a'a]$ qui les joint.

Autrement dit,

$$S[a', a] = \{x \in E \mid d(x, a) + d(x, a') = 2a_1\}.$$

La figure 7 nous présente les différents ensembles S_e ⁽³⁾, S_t et S_m associés au segment $[a'a]$.

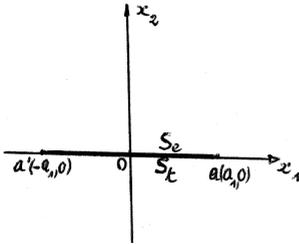


Fig. 7.1

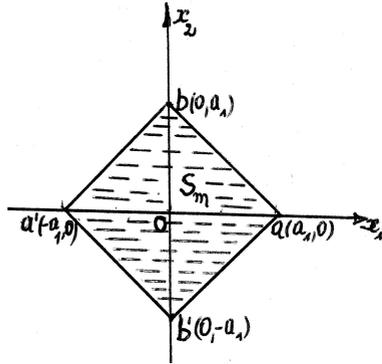


Fig. 7.2

Fig. 7

2. $D[a', a]$ l'ensemble des points de E dont la différence des distances aux deux points de cette paire est en valeur absolue égale à la longueur $2a_1$ du segment $[a'a]$.

Autrement dit,

$$D[a', a] = \{x \in E \mid |d(x, a) - d(x, a')| = 2a_1\}.$$

3. Précisons ici que le tracé d'un ensemble est le reflet d'une approche algébrique de cet ensemble. En prenant par exemple l'ensemble S_e , on trouve ainsi

$$S_e = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1 + a_1)^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + x_2^2} = 2a_1 \right\};$$

d'où

$$S_e = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 4a_1^2 \geq (x_1 - a_1)^2 + x_2^2, x_1 \leq a_1, x_2 = 0\}.$$

Autrement dit,

$$S_e = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq a_1\}.$$

La figure 8 nous présente les tracés de D_e , D_t et D_m .

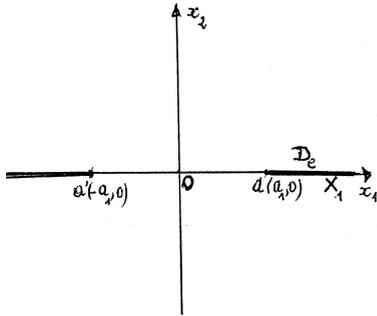


Fig. 8.1

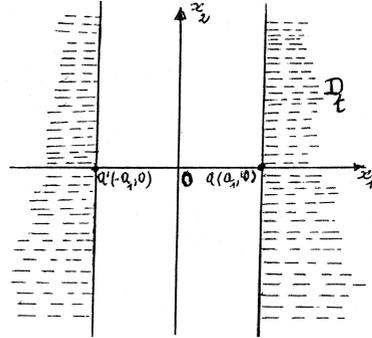


Fig. 8.2

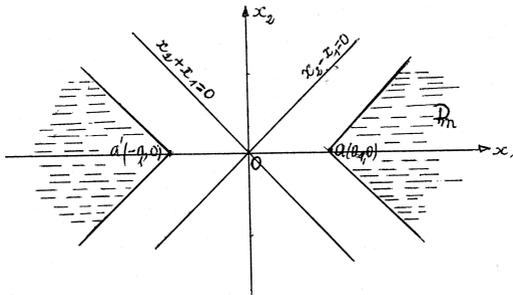


Fig. 8.3

Les lieux géométriques qui suivent définissent dans (E, d_e) les coniques non dégénérées du plan :

4. Le cercle

Définition : Dans (E, d) , on appelle cercle de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_0^+$ et on note $C(a, r)$ l'ensemble des points de E se trouvant à une distance r du point a .

Autrement dit,

$$\forall a \in E, \forall r \in \mathbb{R}_0^+ : C(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}.$$

Equation : On a de suite, vu cette définition

$$\begin{aligned}
 C_e(0(0,0), r) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r \right\} \\
 &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2 \right\} \\
 C_t(0(0,0), r) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| = r \right\} \\
 &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x_1 + x_2 = r \right\} \\
 &\quad \cup \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \mid -x_1 + x_2 = r \right\} \\
 &\quad \cup \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \mid -x_1 - x_2 = r \right\} \\
 &\quad \cup \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \mid x_1 - x_2 = r \right\} \\
 C_m(0(0,0), r) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} = r \right\} \\
 &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_2| \leq |x_1| \text{ et } |x_1| = r \right\} \\
 &\quad \cup \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq |x_2| \text{ et } |x_2| = r \right\}.
 \end{aligned}$$

D'où un tracé immédiat de ces différents cercles (Fig. 9).

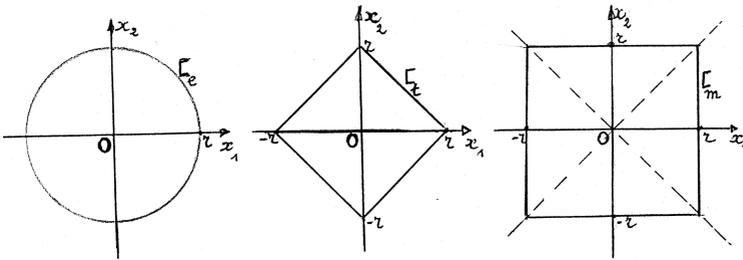


Fig. 9

5. L'ellipse

Définition : Dans (E, d) , on appelle ellipse de foyers $f, f' \in E$, $f \neq f'$, associé au réel $2a_1 \in \mathbb{R}_0^+$ et on note $E(f, f', 2a_1)$, l'ensemble des points de E dont la somme des distances à ces foyers est égale à $2a_1$.

Autrement dit, $\forall f, f' \in E$, $f \neq f'$, $\forall a_1 \in \mathbb{R}_0^+$:

$$E(f, f', 2a_1) = \{x \in E \mid d(x, f) + d(x, f') = 2a_1\}.$$

On remarque de suite qu'en posant $d(f, f') = 2c_1$, l'ellipse ne peut exister que si l'on a $a_1 \geq c_1$, vu que

$$\forall x \in E : d(x, f) + d(x, f') \geq d(f, f'), \text{ ou que } a_1 \geq c_1.$$

Le cas où $a_1 = c_1$, ayant été déjà traité, nous supposons $a_1 > c_1$ dans la suite.

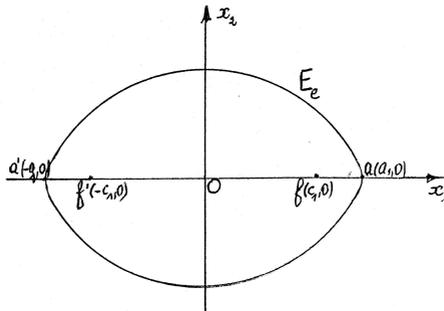
Equation : $f(c, 0)$ et $f'(-c, 0)$ étant ainsi fixés dans \mathbb{R}^2 , on a en vertu de la définition

$$\begin{aligned} E_e(f, f', 2a_1) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1 + c_1)^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + x_2^2} = 2a_1 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1^2 x_2^2 + b_1^2 x_1^2 - a_1^2 b_1^2 = 0, \text{ avec } b_1^2 = a_1^2 - c_1^2 > 0 \right\} \end{aligned}$$

$$E_t(f, f', 2a_1) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 + c_1| + |x_1 - c_1| + 2|x_2| = 2a_1 \right\}$$

$$\begin{aligned} E_m(f, f', 2a_1) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1 + c_1|, |x_2|\} + \max\{|x_1 - c_1|, |x_2|\} = 2a_1 \right\}. \end{aligned}$$

D'où le tracé (Fig. 10) de ces différentes ellipses.



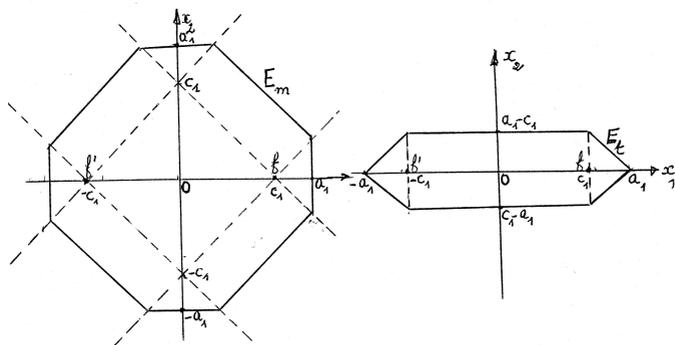


Fig. 10

6. L'hyperbole

Définition : Dans (E, d) , on appelle hyperbole de foyers f et $f' \in E$, ($f \neq f'$) associée au réel $2a_1 \in \mathbb{R}_0^+$ et on note $H(f, f', 2a_1)$, l'ensemble des points de E dont la différence des distances à ces foyers, est en valeur absolue, égale à $2a_1$.

Autrement dit, $\forall f, f' \in E, f \neq f', \forall a_1 \in \mathbb{R}_0^+$:

$$H(f, f', 2a_1) = \{x \in E \mid |d(x, f) - d(x, f')| = 2a_1\}.$$

On remarque de suite qu'en posant $d(f, f') = 2c_1$, l'hyperbole ne peut exister si $a_1 > c_1$ puisque l'on doit avoir

$$\forall x \in E : d(f, f') \geq |d(x, f) - d(x, f')|;$$

ce qui implique $a_1 \leq c_1$.

$f(c_1, 0)$ et $f'(-c_1, 0)$ étant ainsi fixés dans \mathbb{R}^2 , nous envisageons le cas où $a_1 < c_1$, le cas où $a_1 = c_1$ ayant déjà été traité.

Equation : On a en vertu de cette définition

$$\begin{aligned}
 H_e(f, f', 2a_1) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |\sqrt{(x_1 - c_1)^2 + x_2^2} - \sqrt{(x_1 + c_1)^2 + x_2^2}| = 2a_1\} \\
 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 x_1^2 - a_1^2 x_2^2 - a_1^2 b_1^2 = 0, \text{ avec } b_1^2 = c_1^2 - a_1^2 > 0\}
 \end{aligned}$$

$$H_t(f, f', 2a_1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ||x_1 - c_1| - |x_1 + c_1|| = 2a_1\}$$

$$\begin{aligned}
 H_m(f, f', 2a) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |\max\{|x_1 - c_1|, |x_2|\} - \max\{|x_1 + c_1|, |x_2|\}| = 2a_1\}.
 \end{aligned}$$

D'où un tracé (Fig. 11) de ces différentes hyperboles.

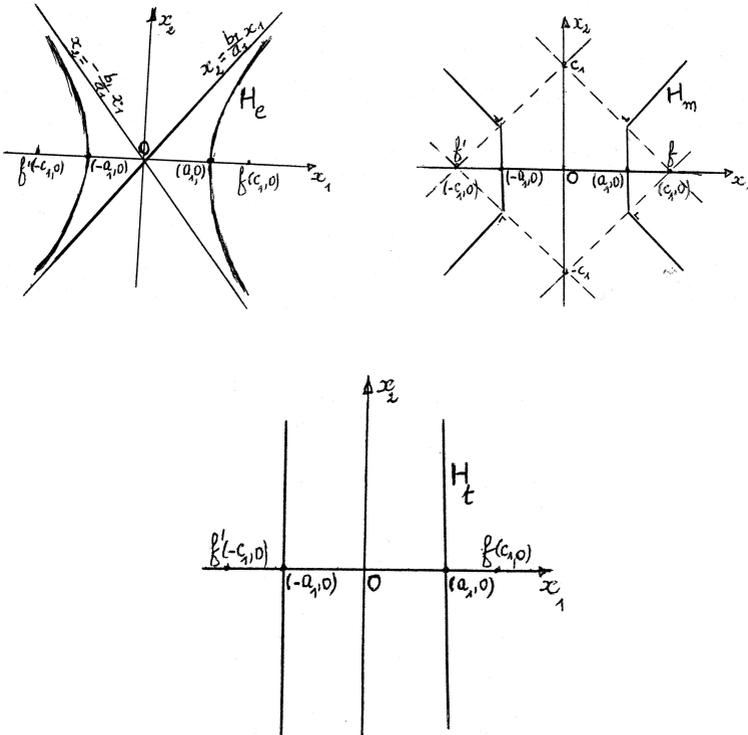


Fig. 11

7. La parabole

Définition : Dans (E, d) , on appelle parabole de foyer $f \in E$ et de directrice la droite $D \subset E$ et on note $P(f, D)$ l'ensemble des points de E se trouvant à égale distance du foyer f et de la directrice D .

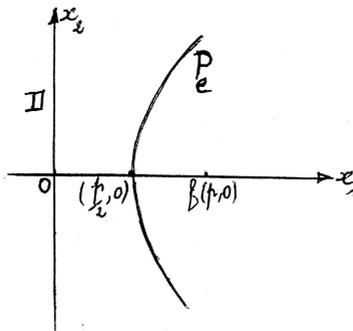
Autrement dit, $\forall f \in E, \forall D \subset E$:

$$P(f, D) = \{x \in E \mid d(x, f) = d(x, D)\}.$$

Cela étant, $f(p, 0)$, $p > 0$ et $D \equiv x_1 = 0$ étant fixés dans \mathbb{R}^2 , on trouve de suite :

$$\begin{aligned} P_e(f, D) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| = \sqrt{(x_1 - p)^2 + x_2^2} \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 = 2 \left(x_1 - \frac{p}{2} \right) \right\} \\ P_t(f, D) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - p| + |x_2| = |x_1| \right\} \\ P_m(f, D) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1 - p|, |x_2|\} = |x_1| \right\}. \end{aligned}$$

D'où un tracé (Fig. 12) de ces différentes paraboles.



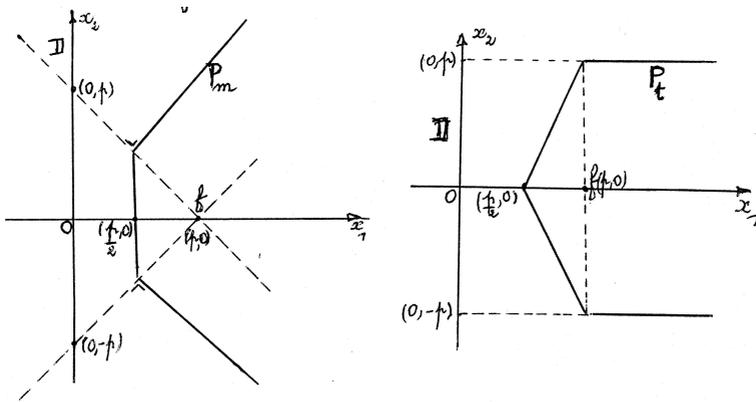


Fig. 12

Adresse de l'auteur :

Moustapha KASSAB
 Rue Gothale 7
 4672 Saint-Rémy

Forum

C. Villers,

Forum-débat du mardi 24 août 1999 à 14h00

La commission chargée de l'organisation du congrès 1999 de notre société avait programmé un moment réservé à un forum-débat consacré au thème principal "la démonstration".

En prévoyant un tel moment, les organisateurs souhaitaient que s'ouvre un large débat sur les problèmes posés aux enseignants et aux élèves par la réalisation de démonstrations. Dans le but d'initier cette discussion, des questions avaient été suggérées :

Faut-il encore habituer nos élèves à démontrer ?

Comment atteindre cet objectif ?

A tous les niveaux ?

Nécessaire ou superflue ?

A quel moment de la scolarité ?

Quand s'impose-t-elle ?

Apprendre des démonstrations ou apprendre à démontrer ?

La démonstration dans le cours de mathématique : activité principale ou activité latérale ?

Dans quel contexte introduire la démonstration ?

La démonstration : application ou recherche ?

En outre, tous les participants à la journée avaient été invités à proposer leurs questions et leurs opinions sur le sujet. Une question vint ainsi s'ajouter à la liste précédente : Comment répondre à la demande des élèves : "Monsieur, dites-nous comment il faut faire" avec le sous-entendu "et le reste, on s'en ..." ?

En prémisses au débat, les animateurs de cette séance ont présenté un appel d'élève via l'adresse E-mail de la SBPMef : "Salut, j'ai un problème de math dont je ne comprends pas trop est ce que vous pouvez m'aider : ABC est un triangle quelconque, P est le milieu de [BC], R est le symétrique de B par rapport à A, Q est sur le segment [AC] au tiers de ce segment à partir de A. Démontrer que P, Q et R sont alignés. Merci beaucoup Clément".

Il y a plusieurs façons d'apprécier cet appel. Emane-t-il d'un élève qui souhaite faire faire le travail par un autre (paresse) ou de quelqu'un qui cherche une aide qu'il ne trouve pas dans son entourage ?

En tout état de cause, il lui a été répondu mais uniquement par des suggestions de recherche lui permettant d'arriver lui-même à une solution..

Un réel débat s'est alors engagé entre les 32 participants.

Comme on pouvait certainement s'y attendre, il y eut plus de questions que de réponses, ce qui traduit les inquiétudes des enseignants vis-à-vis de l'éternel problème de "la démonstration".

Voici, fatalement livrées en vrac, les questions débattues (Q) ainsi que des éléments de réponses (R).

Q – *Au cours des dernières années, il y a eu, au niveau des premières candidatures, des étudiants qui ne comprenaient plus le sens des énoncés, les mots du vocabulaire utilisé, ce que veut dire "démontrer". N'y a-t-il pas, dans l'enseignement secondaire, une volonté de restreindre le nombre de démonstrations ?*

R1 – Une partie des difficultés de la démonstration provient d'un certain manque de compréhension de la langue courante.

R2 – A ce propos, l'introduction raisonnable d'un symbolisme mathématique peut aider l'élève.

Q – *Si l'élève ne connaît pas l'axiomatique de départ, comment lui faire comprendre que certaines choses soient admises alors que d'autres doivent être démontrées ?*

R1 – En choisissant des démonstrations belles et "sans sueur".

R2 – Il faut, pour une démonstration, une part importante de recherche de l'élève. Les sujets simples ne donnent pas toujours des démonstrations faciles.

R3 – Les enfants aiment le jeu même si cela ne sert à rien. Lorsqu'on leur demande quelque chose d'impossible, ils ne trouvent pas et alors la démonstration se justifie. En plus, trouver un contre-exemple est une pratique excellente.

R4 – La démonstration va avec la recherche mais si elle est du domaine du modèle elle réside également dans des activités de type opératoire.

Q – *Il y a deux types de mathématique : la mathématique de technologie et la mathématique culturelle. Pour la première, cela ne choque pas qu'on ne démontre pas. Le grand dilemme pour le professeur est de savoir laquelle des mathématiques il faut privilégier.*

Q – *Le programme impose, en 5ème et en 6ème années, quatre ou cinq démonstrations. Peut-on décemment demander à un élève, après cela, de faire lui-même une démonstration ?*

R1 - Pourtant les directives méthodologiques relatives au programme du premier degré, demandent de réaliser le plus possible de démonstrations. Que s'est-il passé entre les deux niveaux ?

R2 – Comme compétence terminale, on exige des élèves qu'ils sachent réaliser des démonstrations. Leur choix est laissé au professeur.

Q – *Peut-on faire autre chose que du bourrage de crâne car les élèves n'ont pas assez d'esprit critique ? Celui-ci ne devrait-il pas être développé ?*

Conclusion : Bien que riche d'idées, le débat n'a certainement pas épuisé le sujet. Nous laissons donc au lecteur le soin de se forger sa propre opinion.

Claude VILLERS

Revue des revues

M. Fremal, C. Villers,

Math-Ecole (revue suisse), n°176 - mars 1997.

Au sommaire :

- **François Jaquet**, *Editorial : Math-Ecole, 35ème anniversaire*
- **Michel Brêchet**, *Un point ... c'est tout !*

Le problème suivant est soumis à des élèves de 8ème année :

Rédige une méthode qui permette de trouver le nombre de carreaux traversés par la diagonale d'un rectangle quadrillé dont on connaît le nombre de carreaux de la largeur et celui de la longueur.

Le principal objectif de cette activité est de faire émerger les conceptions des élèves à propos du point et de la droite. Un débat entre élèves provoque une remise en cause des différentes conceptions.

- **Michel Chastellain**, *CABRidées : changer d'aire ...*

Le problème suivant est proposé à des élèves de 8ème année :

On se donne un cercle C de centre o et de rayon 5 cm. La corde $[ac]$ est parallèle au diamètre $[fe]$ et perpendiculaire au rayon $[od]$.

Quelle doit être la position du point b appartenant à $[od]$ pour que l'aire du triangle oac soit maximale ?

Plusieurs comptes-rendus de la recherche des élèves sont proposés.

Quelques aspects didactiques et pédagogiques sont dégagés :

- cette activité est l'occasion de réactualiser et d'approfondir plusieurs notions mathématiques déjà abordées : similitude de triangles, écriture d'égalités mathématiques, mesure de longueurs et d'aires, construction et observation de figures géométriques, théorème de Pythagore, notion de lieu géométrique, ...
- plusieurs objectifs comportementaux sont entraînés : développement des aptitudes à la recherche, à l'analyse, acquisition d'un langage précis,
- cette activité favorise une démarche autonome.

- **Hans-Jürgen Sprengel**, *Mon territoire*

“Mon territoire” est un jeu de calcul pour deux joueurs. Ce jeu s'adresse à des élèves de l'école primaire connaissant les nombres de 1 à 100.

- **François Jaquet**, *Vigilance*

Dans un numéro précédent, Math-Ecole avait proposé l'exercice suivant :

“En 1993, on ne savait toujours pas si les deux nombres suivants sont égaux ou pas :

$$\sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}.$$

Une chose est certaine : les 10000 premières décimales de ces deux nombres sont les mêmes.”

(Charrière G., *L’algèbre mode d’emploi*, fournitures et éditions scolaires du canton de Vaud, 1995)

Un lecteur apporte une preuve de l’égalité de ces deux nombres.

- **André Calame**, *Nombres algébriques*

L’auteur fait le point sur les nombres algébriques et apporte une preuve de l’égalité des deux nombres dont il est question dans l’article précédent.

- **François Jaquet**, *Jeux de NIM*

Dans cet article, l’auteur pose deux questions :

1. les jeux de NIM ont-ils leur place dans les classes du niveau primaire et du niveau secondaire ?
2. contiennent-ils les ingrédients d’une véritable activité mathématique pour les élèves.

L’exemple du “Pion empoisonné” est examiné du point de vue de l’élève et de celui du joueur expert. Cette analyse apporte des éléments de réponses à ces deux questions.

- **Denis Odiet**, *Mathématiques pascals*

Comment construire un oeuf géométrique ?

- *Rallye mathématique transalpin*

Ce rallye s’adresse à des élèves des degrés 3, 4, 5 et 6 de l’école primaire. Les énoncés des treize problèmes de la première épreuve sont donnés.

- *Revue des revues*

- Grand N , numéros 57 et 58
- Hypercube et son supplément Maths & Malices, n° 15

- *Notes de lecture*

- Reconstruire la même quantité ailleurs : comment procèdent les jeunes enfants ? par Edith Ackermann in : *Le cheminement des découvertes chez l’enfant*, ouvrage collectif sous la direction de B. Inhelder et G. Cellérier. Neuchâtel-Paris : Delachaux et Niestlé, 1992.

M. FREMAL

Math-Ecole (revue suisse), n°177 - mai 1997.

Au sommaire :

– **Michel Chastellain**, *Editorial*

– **Chantal Richter**, *Hamsertmatique*

Présentation d'une activité destinée aux enfants de l'école maternelle.

– **Maria-Gabriela Rinaldi**, *Bordures*

A partir d'un simple problème de rallye destiné à des élèves de l'école primaire, il est possible de faire des mathématiques à plusieurs niveaux.

Enoncé du problème :

Mombo Tapie est fabricant de couvertures quadrillées. Il aimerait créer un modèle "égalité" qui a autant de carrés gris touchant le bord que de carrés blancs à l'intérieur. Son apprenti Amal lui a proposé ce modèle qui, malheureusement, ne convient pas, car il y a 15 carrés blancs intérieurs et 20 carrés gris sur la bordure.

A l'école primaire, le problème peut se résoudre par un raisonnement combinatoire.

Les élèves du secondaire des degrés 8 et 9 le résoudre par une équation.

Dans le secondaire supérieur, le problème sera visualisé par la représentation graphique d'une hyperbole dans un repère cartésien.

– **Graziella Telatin**, *A propos du concept d'angle*

La séquence décrite dans l'article a été expérimentée avec des élèves de 3ème et 4ème années de l'école primaire.

– **Michel Chastellain**, *CABRidées : Quelle fonction ?*

L'objet de cet article est de représenter graphiquement les fonctions :

$$f : R \rightarrow R : x \rightarrow ax \quad \text{et} \quad f : R \rightarrow R : x \rightarrow ax + b.$$

Cette étude est l'occasion d'utiliser la "machine à multiplier".

– **G. Sarcone et M. J. Waeber**, *Voyage au centre de la géométrie*

Dans le numéro 173 de Math-Ecole, les auteurs ont présenté les puzzles paradoxaux Quadrix. Le but de ces puzzles est de "faire apparaître, en modulant les pièces du jeu, un espace supplémentaire, et cela sans changer les dimensions du puzzle". Dans cet article, les auteurs montrent comment ces puzzles sont liés à certaines suites récurrentes "plastiques" : les "arithmodules".

– **François Jaquet**, *Expo-Atelier*

L'auteur présente la future "exposition-atelier" de mathématiques destinée aux classes du premier degré de l'enseignement secondaire.

Cet “expo-atelier” se compose de :

- 30 panneaux de format A3 présentant les problèmes et les consignes,
- 30 fiches d’accompagnement destinées aux enseignants,
- compléments didactiques,
- matériel de manipulation.

Cette exposition est disponible depuis fin 1997. L’activité “Le puzzle carré” est présentée dans cet article.

- **Luc Olivier Pochon**, *Le coin du Net*
Quelques adresses de sites présentant des énigmes, des logiciels pour l’enseignement des mathématiques.
- **Denis Odiet**, *16ème forum de mathématiques*
- *Notes de lecture*
 - Apprivoiser la géométrie avec Cabri-géomètre, Monographie du CIP, CP 3144, 1211 Genève 3, 1996.
 - Le sens de la mesure, des grandeurs aux nombres rationnels, Nicolas Rouche, Bruxelles : Didier Hatier, 1992.
 - Les mathématiques, de la maternelle jusqu’à 18 ans. Essai d’élaboration d’un cadre global pour l’enseignement des mathématiques, CREM, 1996.

M. FREMAL

Math-Ecole (revue suisse), n°178 - août 1997.

Au sommaire :

- **François Jaquet**, *Editorial*
- **A. M. Damiani et al.**, *Construire des images mentales*
Les auteurs présentent une séquence didactique sur l’utilisation des modèles dynamiques, en géométrie. Un modèle dynamique est un objet concret, comprenant des éléments mobiles, réalisé avec des matériaux courants et illustrant des concepts géométriques à l’aide du mouvement.
L’activité présentée a été expérimentée dans des classes du niveau secondaire inférieur. Les élèves ont construit deux modèles et les ont analysés. Pour les auteurs, l’usage des modèles dynamiques contribue à éviter la formation d’idées fausses liées à une présentation statique des figures.
- **Chantal Richter**, *Confiseries pascales, sauce domino!*
Présentation d’une activité destinée à des enfants de l’école maternelle.
- **F. Jaquet et L.-O. Pochon**, *Le théorème du papillon*

Deux problèmes sont résolus dans cet article :

- le problème du papillon construit sur deux droites parallèles,
- le problème du papillon inscrit dans un cercle (théorème dû à Horner).

Plusieurs solutions de ce dernier problème sont proposées. Elles sont intéressantes par les connaissances qu'elles mettent en jeu : symétries et propriétés des angles inscrits, triangles semblables et puissance d'un point par rapport à un cercle, rapport anharmonique, polaire d'un point par rapport à un cercle et théorème de Pappus.

- **F. Aebischer, D. Allaman, N. Gex**, *Mathématique 1P-4P : témoignage après deux années de pratique*
- **Michel Chastellain**, *CABRidées : réveil narcissique !*

Le problème étudié est le suivant :

Chaque matin, au lever du lit, je me retrouve devant le miroir de ma salle de bains alors que je me brosse les dents. A quelles conditions puis-je m'admirer des pieds à la tête ?

- **C.-F. Bagnoud, H. Schild**, *Espace mathématique*

Une nouvelle compétition interclasses est proposée à des élèves de 1^{ère} et 2^{ème} du CO. La classe dispose d'un temps limite pour résoudre les problèmes. Les élèves doivent s'organiser pour résoudre les problèmes et produire une solution unique pour chacun d'eux. La classe entière est responsable de la solution. Il est tenu compte de la clarté des explications fournies et de la rigueur de la démarche. Ces activités permettent de développer chez les élèves les compétences suivantes : capacité de travailler en équipes, autonomie dans l'organisation et le travail, esprit critique dans la confrontation des idées. Les problèmes de première année et quelques solutions collectives sont présentées.

- **Gabrielle Baechler**, *Jeux du commerce : quelques nouveautés*

L'auteur présente quatre nouveaux jeux : MUTABOR, BATIK, AVALAM et QUORIDOR.

Ces jeux ont leur place dans le "coin mathématique" des classes des premières années de l'école primaire.

- *5^{ème} rallye : finale*

Cette compétition est réservée aux élèves des degrés 3, 4, 5 et 6 de l'école primaire. Quelques problèmes de la deuxième épreuve et les sujets de la finale sont présentés.

- *Notes de lecture*

- Les jeux mathématiques, Michel Criton, Paris : PUF, 1997 (collection "Que sais-je?", n° 3220)

-
-
- L'école pour la vie : ne dites jamais je suis nul en maths, Eric Emery, l'Age d'Homme, Lausanne, 1996
- CIEAEM 50

M. FREMAL

Bulletin de l'APMEP - N°422 - Mai-Juin 1999

Dans l'éditorial de ce bulletin, François Dusson, Président à l'époque de l'APMEP, plaide pour un développement de "l'intériorité mathématicienne de l'élève", c'est-à-dire une personnalisation de l'enseignement qui révèle et confirme les ressources de chacun, mobilisées dans la diversité du travail mathématique.

Nicole Bonnet, dans un article intitulé "La table de Pythagore", expose le contenu d'un atelier qu'elle a animé aux Journées nationales d'Albi en 1996. Cet article s'inscrit dans la rubrique "Ecole élémentaire". L'auteur y décrit les développements d'un jeu basé sur la table de multiplication bien connue.

Nadine Gérald traite "De la définition du trapèze" et propose celles que voici : "un trapèze est un quadrilatère non croisé qui a deux côtés parallèles" et "un trapèze isocèle est un trapèze qui a ses diagonales de même longueur". Elle énonce alors des conséquences de ces définitions.

Un groupe de travail "Activités mathématiques au collège" présente et commente des fiches "quadrilatères" pour le travail en classe. 4 fiches et des documents d'accompagnement sont proposés et sont utilisables directement en classe.

Gérard Kuntz prolonge sa présentation d'un ouvrage de l'IREM de Montpellier (bulletin n°418) et exprime une réflexion sur les conditions qui permettent de réussir l'expérience décrite dans le livre. L'auteur y exprime une opinion qui devrait faire réfléchir : "former des élèves à la réflexion personnelle, à la démarche scientifique pour une meilleure insertion sociale et professionnelle se heurte à une demande incessante de bachotage en vue de la seule réussite "de l'examen" ".

Dans un article "Atelier consacré aux accroissements", Alain Patriti met en évidence et illustre les changements de la partie Analyse du nouveau programme de mathématiques de terminale E.S. Trois activités sont décrites.

Sylvie Cantin traite de "Comment exploiter les séquences éducatives en entreprise pour intéresser les élèves aux mathématiques".

Trois textes relatent ensuite des exposés présentés au Séminaire de l'APMEP à Paris en 1998.

* Régis Gras traite du sujet "Métamorphose d'exercices". Il y montre qu'il est possible de modifier la présentation d'un exercice de manière à mieux

solliciter chez l'élève les composantes de son activité mathématique ou à travailler à des niveaux différents de difficulté.

* “Une approche par les textes de la notion de dimension” présente un atelier de Rémi Langevin. Il s'agit d'illustrer la possibilité de visiter des notions mathématiques à travers l'histoire et plus particulièrement à partir de textes.

* Roger Cuppens traite de “Le continu et les moyens de calcul ou l'incalculable existe-t-il ?” Il montre que l'introduction massive de moyens de calcul ne peut que compliquer la situation, même si elle est indispensable.

Michel Guillemot est l'auteur de l'article “Les lycées français à l'étranger publient” où il présente deux ouvrages

Daniel Reisz traite de la dérivation numérique et présente une curieuse application de la méthode de Simpson : la dérivée de Lanczos.

Cette livraison du bulletin de l'APMEP se termine par les rubriques “Nouvelles brèves”, “Avis de recherche” et “Matériaux pour une documentation”.

L'Abondance des matières oblige à reporter à plus tard la publication de la rubrique “Problèmes de l'APMEP”.

Claude VILLERS

Bulletin de l'APMEP - N°423 - Septembre-Octobre 1999

Dans son éditorial, Catherine Dufossé, Présidente de l'association, plaide “Pour que vivent les droits de l'homme” en ce sens que “la liberté d'expression, le droit de concourir à la formation de la volonté générale, le droit de résistance ne sont pas des droits qui isolent mais qui nécessitent un espace de rencontre, d'échanges et de débats”. Catherine Dufossé plaide pour que des associations telles que l'APMEP puissent contribuer de manière substantielle à établir les nouvelles formes d'organisation et de fonctionnement de l'école et “légitimise” cette revendication. L'argumentation développée est, à l'évidence, transférable chez nous.

Daniel Djament propose “Des tangrams pour les tout petits”. Il y propose deux variantes du tangram classique d'accès trop ardu pour les jeunes enfants.

Dans “Pavages de pentagones”, Roland Baboud propose quatre types de pavages à l'aide de pentagones non réguliers mais isométriques et montre

que de tels pavages sont à la source de nombreuses activités de constructions géométriques et de calculs.

Michel Rousselet présente les résultats d'une étude comparative des possibilités qu'offrent les logiciels Géospace et Cabri-Géomètre en matière de géométrie dans l'espace. Il conclut que les deux logiciels ont des usages pédagogiques différents.

Eric Roditi propose un article intitulé "Un tableur-grapheur pour optimiser le volume d'un cône". C'est la description d'une séquence d'enseignement en classes de 4ème-3ème (NDLR : en Belgique, 2ème-3ème) qui montre que l'utilisation d'un tel logiciel débouche sur un travail et un apprentissage mathématique fructueux.

"Dire et écrire des mathématiques" par Nicolas Rouche et Luc Lismont (du Crem) montre que la langue du commun des mortels reste bien indispensable à tous les niveaux de l'enseignement et de la pratique mathématiques.

Dans l'article "Géométrie mentale", Nicolas Bouleau montre que le calcul mental ne se limite pas au calcul numérique et qu'il est possible de l'appliquer à la géométrie, en particulier à des transformations de figures simples, qui permettent de calculer des aires et des volumes.

André Martino dans "Les quantificateurs, ces mal-aimés" et Daniel Reisz dans "Intégrisme/Laxisme" traitent, chacun de son côté, du problème de l'utilisation des quantificateurs dans l'enseignement secondaire.

Dans un dossier "Orientation pour l'enseignement des maths", Geneviève Courtade-Colomb propose un article intitulé "La gestion mentale de l'enseignement des mathématiques". Elle présente d'abord les principes de base de cette gestion mentale puis examine ses apports à l'enseignement et au soutien scolaire en particulier dans le domaine des mathématiques.

Dans "Les mathématiques ou la Démocratie", Colin Hannaford traite des rapports de l'enseignement des mathématiques avec la pratique démocratique. Tout le problème est de savoir si le "ou" peut ou doit être inclusif.

Jean-Marc Lévy-Leblond montre dans "La Science, un drôle de sport" que les liens d'identification entre les professionnels et les profanes du sport font partie de la culture et que c'est peut-être ce qui manque à la science.

Marcel Bennaroche propose un article intitulé "Plaidoyer pour une ignorance de qualité" dont le sous-titre est "Développer la culture scientifique : une nécessité des temps qui viennent". Il y poursuit l'objectif d'essayer de convaincre que le citoyen appréhende de moins en moins l'univers techno-

scientifique dans lequel il vit, que le développement de l'enseignement scientifique n'est pas la réponse miracle à ce problème, mais que développer la Culture scientifique, notamment à l'école, est un moyen essentiel pour susciter des vocations et rendre le quotidien plus intelligible.

Cette livraison du bulletin de l'APMEP se termine par les rubriques habituelles, "Avis de recherche", les problèmes de l'APMEP, Vie de l'association, "Matériaux pour une documentation". Signalons, sans aucune modestie, que figure dans cette dernière rubrique, une rétrospective (flatteuse) de notre revue *Mathématique et Pédagogie* de l'année scolaire 1998-1999.

Claude VILLERS

Olympiades

C. Festraets,

Voici les solutions des problèmes “midi” et “maxi” de la 24ème olympiade mathématique belge.

MIDI

1. *Un rectangle dont la longueur vaut trois fois la largeur est garni d'un quadrillage. Le long de chaque côté, quatre rangées de carrés sont gris ; les autres carrés sont blancs. Il y a 915 carrés blancs. Combien y a-t-il de carrés gris ?*

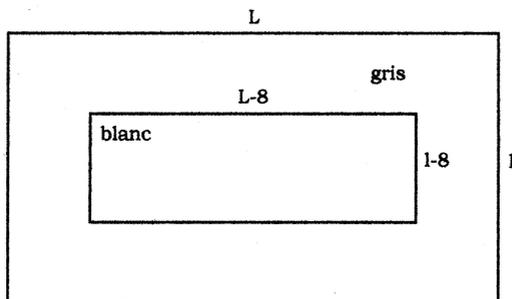
Solution de Vincent MALMEDY, élève de 3ème année à l'Institut Notre-Dame du Sacré Coeur à Beauraing.

On sait que

- la longueur du rectangle vaut 3 fois sa largeur ;
 - ce rectangle est garni d'un quadrillage ;
 - le long de chaque côté, quatre rangées de carrés sont gris ;
 - les autres carrés sont blancs et il y en a 915.
- (1)

On demande le nombre de carrés gris.

Voici un schéma de la situation.



(Les distances ont pour unité le côté d'un carré du quadrillage.)

Le rectangle central a pour aire 915 (carrés blancs).

On cherche $\text{div } 915 = \{1, 3, 5, 15, 61, 183, 305, 915\}$.

Les dimensions du rectangle central peuvent donc être

$$1 \text{ et } 915, \quad 3 \text{ et } 305, \quad 5 \text{ et } 183 \quad \text{ou} \quad 15 \text{ et } 61$$

(car les dimensions sont entières).

Les dimensions du grand rectangle peuvent donc être

$$9 \text{ et } 923, \quad 11 \text{ et } 313, \quad 13 \text{ et } 191 \quad \text{ou} \quad 23 \text{ et } 69.$$

(On ajoute 8 à chaque dimension.)

Or seul le couple 23 et 69 répond à la condition (1).

L'aire du grand rectangle est donc $23 \times 69 = 1587$ et l'aire des carrés gris vaut $1587 - 915 = 672$.

Il y a 672 carrés gris dans cette figure.

2. Mathieu simplifie erronément la fraction $\frac{\overline{ab}}{\overline{abc}}$, obtenant ainsi $\frac{\overline{a}}{\overline{ac}}$. Et cependant, par extraordinaire, malgré cette erreur, les deux fractions sont égales. Quelle est leur valeur commune ?

(N. B. : \overline{abc} ; \overline{ab} ; etc. désignent les nombres formés par la juxtaposition des chiffres a, b et c ; a et b ; etc.)

Solution de Olivier MAHIEU, élève de 4ème année à l'Athénée Royal Campin à Tournai.

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{abc}} = \frac{10a + b}{100a + 10b + c}, \quad \frac{\bar{a}}{\bar{ac}} = \frac{a}{10a + c},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{10a + b}{100a + 10b + c} &= \frac{a}{10a + c} \\ (10a + b)(10a + c) &= a(100a + 10b + c) \\ 100a^2 + 10ab + 10ac + bc &= 100a^2 + 10ab + ac \\ bc &= -9ac \end{aligned}$$

si $c \neq 0$, $b = -9a$

mais puisque a, b, c sont des chiffres, b ne peut être égal à $-9a$, donc $c = 0$.

Donc

$$\frac{10a + b}{100a + 10b + c} = \frac{10a + b}{100a + 10b} = \frac{10a + b}{10(10a + b)} = \frac{1}{10}.$$

($a \neq -\frac{b}{10}$ puisque a et b sont des chiffres.)

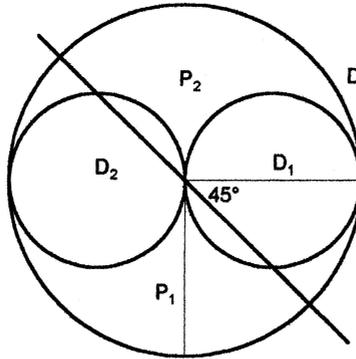
Vérification : $\frac{a}{10a + c} = \frac{a}{10a} = \frac{1}{10}$ ($a \neq 0$).

3. Dans la figure ci-dessous, le Yin (la partie noire) et le Yang (la partie blanche) sont limités par des demi-cercles



- Construire une droite qui partage le Yin ainsi que le Yang en deux parties de même aire.
- Y a-t-il d'autres solutions ? Si oui, les donner. Si non, expliquer pourquoi.

Solution de Yves LEINER, élève de 3ème année au lycée de garçons de Esch-sur-Alzette.



Soit r le rayon du disque comportant Yin et Yang, $\frac{r}{2}$ est le rayon des demi-cercles limitant Yin et Yang.

Divisons le disque D en quatre parties comme sur la figure : deux disques D_1 et D_2 de rayon $\frac{r}{2}$, deux parties P_1 et P_2 limitées par les demi-cercles du grand disque D et des petits disques.

D'après la formule de l'aire d'un disque de rayon r

$$\text{Aire} = \pi r^2,$$

l'aire d'un disque de rayon $\frac{r}{2}$ est $\pi \frac{r^2}{4}$.

Chacun des disques D_1 et D_2 remplit un quart de l'aire du disque D . Et sachant que Yin est l'image de Yang par une symétrie centrale, P_1 et P_2 remplissent chacune un quart de l'aire de D . Divisons alors, comme sur la figure, D_1 et P_1 chacune en deux parties égales par deux droites menées par O et formant un angle de 90° . Chacune des quatre parties ainsi formées sont d'aire égale.

Prenons le secteur circulaire d'angle 90° . Sachant que les deux parties non incluses dans ce secteur ont même aire, il ne nous reste plus qu'à diviser le secteur circulaire avec une droite passant par O et faisant un angle de 45° .

C'est la seule solution possible.

Comme Yin et Yang sont images par une symétrie centrale, l'image de la droite qui partage Yin en deux parties égales est une droite qui partage Yang en deux parties égales. Donc la droite partageant Yin doit passer par

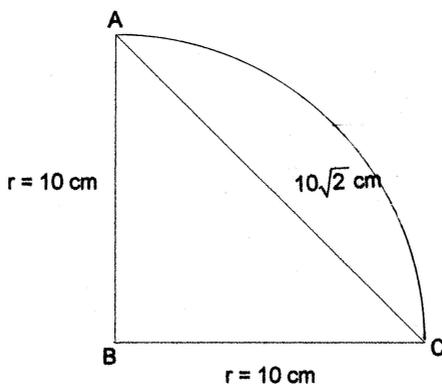
le centre de D pour que son image reste la même droite. Or cette droite a été trouvée auparavant. Donc elle est unique.

4. Cinq fléchettes ont atteint une cible ayant la forme d'un disque de 10 cm de rayon. Montrer que deux des points d'impact, au moins, sont distants de moins de $10\sqrt{2}$ cm.

Solution de Quentin TRIGALLEZ, élève de 4^{ème} année au Collège Sainte Marie à Saint Ghislain.

Si 5 fléchettes ont atteint la cible, on peut être sûr qu'au moins 3 d'entre elles sont dans le même demi-disque.

Si 3 fléchettes sont dans le même demi-disque, on est sûr qu'au moins 2 d'entre elles sont dans un même quart de disque.



D'après le théorème de Pythagore, dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse égale la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit. Je peux dire que la distance \overline{AC} vaut $10\sqrt{2}$ cm ($\sqrt{10^2 + 10^2}$).

Ce segment $[AC]$ étant le plus long possible dans ce quart de disque, les deux fléchettes ne peuvent être séparées de plus de $10\sqrt{2}$ cm.

MAXI

1. Une suite s_1 est constituée de n nombres naturels. La suite s_2 est obtenue par une modification de l'ordre des termes de s_1 ; la suite s_3 est construite en soustrayant, terme à terme, s_2 de s_1 .

a) Montrer que, lorsque $n = 3$, le produit des termes de s_3 est un nombre pair.

b) Le résultat subsiste-t-il lorsque $n = 1999$?

Solution de Pierre-Emmanuel CAPRACE, élève de 6ème année au Collège du Christ Roi à Ottignies.

Soit p le nombre de termes pairs de s_1 et soit i le nombre de termes impairs de s_1 .

Pour que le produit des termes de s_3 soit impair, une condition nécessaire est que tous les termes de s_3 soient impairs. Si un seul terme de s_3 est pair, le produit de tous les termes de s_3 est pair.

Pour que le produit des termes de s_3 ne soit pas pair, il faut donc que de chaque terme pair de s_1 soit soustrait un terme impair de s_2 et que de chaque terme impair de s_1 soit soustrait un terme pair de s_2 .

Comme le nombre de termes pairs et impairs est le même pour s_1 et pour s_2 , on en déduit que $p = i$, d'où $n = 2p = 2i$, c'est-à-dire que n est un nombre pair.

Nous avons démontré que pour que le produit des termes de s_3 soit impair, n devait nécessairement être pair. Dès lors, quand $n = 3$ et quand $n = 1999$, n n'est pas pair et le produit des termes de s_3 sera pair.

2. Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(X^2) = (P(X))^2$.

Solution de Ming-Koon HSU, élève de 5ème année au Lycée Michel-Rodange de Luxembourg.

Tout polynôme est de la forme

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Posons $Q(x) = [P(x)]^2 - P(x^2)$.

$Q(x) = 0$ si et seulement si les termes en x qui ont même exposant dans $[P(x)]^2$ et $P(x^2)$ s'annulent.

Si $P(x)$ a au moins deux termes dont les plus petits exposants sont k et ℓ ($a_{n-k}x^k$ et $a_{n-\ell}x^\ell$ avec $a_{n-k} \neq 0 \neq a_{n-\ell}$ et $k \neq \ell$), alors le plus petit terme de $P(x^2)$ est en x^{2k} et celui de $[P(x)]^2$ est en $x^{k+\ell}$.

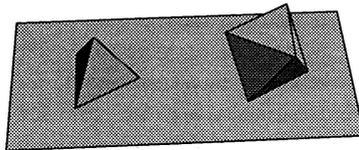
Donc $Q(x)$ comprend un terme de la forme $b_m x^{k+\ell}$ qui n'est pas nul et $Q(x) \neq 0$.

Par conséquent, $P(x) = ax^n$.

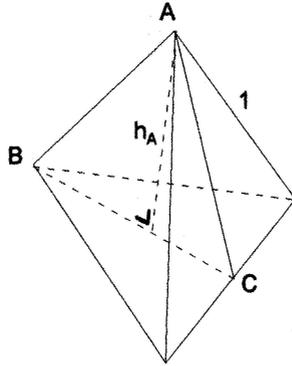
$$\begin{aligned} Q(x) = 0 &\Leftrightarrow [P(x)]^2 - P(x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 x^{2n} - ax^{2n} = 0 \\ &\Leftrightarrow ax^{2n}(a - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \quad \text{ou} \quad a = 1. \end{aligned}$$

Donc tous les polynômes $\begin{cases} P(x) = 0 \\ P(x) = 1 \\ P(x) = x^n \end{cases}$ sont solutions.

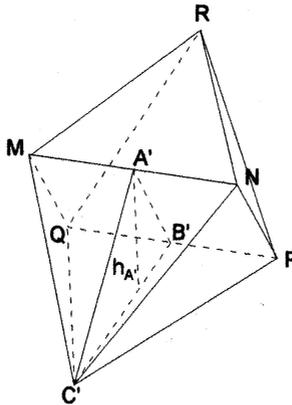
3. Un tétraèdre régulier et un octaèdre régulier, l'un et l'autre d'arête 1, reposent sur la table, posés sur une face. Lequel surpasse l'autre en hauteur ? De combien ?



Solution de Pierre GRAMME, élève de 5ème année à l'Institut Saint François Xavier à Verviers.



Pour le tétraèdre régulier, dans le triangle ABC ,
 AB est une arête, donc $\overline{AB} = 1$
 AC et BC sont des hauteurs de faces, donc $\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Pour l'octaèdre régulier, dans le triangle $A'B'C'$,
 $A'B'$ est une médiane du carré $MNPQ$, donc $\overline{A'B'} = \overline{NP} = 1$
 $A'C'$ et $B'C'$ sont des hauteurs de faces, donc $\overline{A'C'} = \overline{B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{On a } \begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{cases}$$

donc les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques (3 côtés homologues égaux deux à deux).

Dans le tétraèdre, le plan ABC est perpendiculaire au plan de la table. La hauteur du triangle ABC relative à A est donc perpendiculaire au plan de la table. On en déduit qu'il s'agit de la hauteur du tétraèdre.

Dans l'octaèdre, le plan $A'B'C'$ est perpendiculaire au plan de la table. La hauteur du triangle $A'B'C'$ relative à A' est donc perpendiculaire au plan de la table. De plus, elle est perpendiculaire à la face supérieure MNR car les plans MNR et $C'PQ$ sont parallèles. C'est donc une hauteur de l'octaèdre.

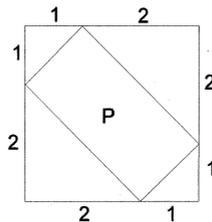
Comme ABC iso $A'B'C'$, $h_A = h_{A'}$ et donc les hauteurs du tétraèdre et de l'octaèdre sont identiques.

4. Sur chaque côté d'un polygone régulier à n côtés, nous sélectionnons un point qui n'est pas un sommet, et nous construisons le n -gone convexe P que ces n points déterminent.

- a) Lorsque $n = 4$, si le quadrilatère P a ses angles égaux, est-il nécessairement un carré ?
- b) Lorsque $n = 5$, si le pentagone P a ses angles égaux, est-il nécessairement régulier ?
- c) Pour quels nombres naturels n supérieurs à 3 est-il vrai que, si le n -gone P a ses angles égaux, alors il est nécessairement régulier ?

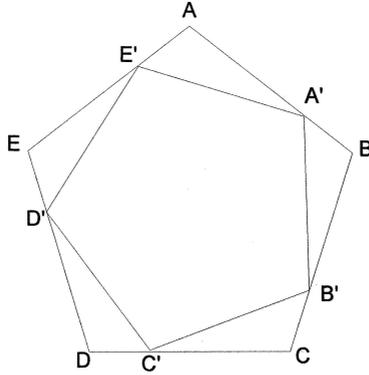
Solution de Zhe HAN, élève de 6ème année à Saint Boniface Parnasse à Bruxelles.

- a) Si $n = 4$, P n'est pas nécessairement un carré ; par exemple



- b) Si $n = 5$, P est un pentagone régulier.

Prouvons d'abord que si P contient deux côtés égaux, alors P est régulier.



En effet, les cinq triangles $AA'E'$, $BB'A'$, $CC'B'$, $DD'C'$, $EE'D'$ sont semblables puisque

$$\begin{aligned} \widehat{EE'D} &= 180^\circ - \widehat{D'E'A'} - \widehat{AE'A'} \\ &= 180^\circ - \widehat{E'AA'} - \widehat{AE'A'} \\ &= \widehat{AA'E} \end{aligned}$$

et de même pour les autres angles.

Supposons que $\overline{B'C'} = \overline{C'D'}$.

On a

$$\overline{B'C} = \overline{C'D} \quad \text{et} \quad \overline{CC'} = \overline{DD'},$$

d'où $\overline{ED'} = \overline{ED} - \overline{D'D} = \overline{CD} - \overline{CC'} = \overline{DC'}$.

On fait de même pour les autres segments et on aura

$$\overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'A'} = \overline{A'B'} = \overline{B'C'}.$$

Supposons que $\overline{B'C'} = \overline{D'E'}$.

On aura alors

$$\overline{DC'} = \overline{DC} - \overline{CC'} = \overline{EA} - \overline{EE'} = \overline{AE'}$$

et

$$\overline{BB'} = \overline{BC} - \overline{B'C} = \overline{DE} - \overline{D'E} = \overline{DD'},$$

donc $\overline{C'D'} = \overline{E'A'}$ et $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$. Dès lors $\overline{A'E'} = \overline{A'D'}$ et on revient au cas précédent.

Par symétrie, on peut représenter tous les autres cas par les deux cas précédents.

Nous allons maintenant prouver que P ne peut être constitué de côtés tous différents.

$$\begin{aligned} \text{Posons } a_1 &= \overline{AA'}, & b_1 &= \overline{E'A} \\ a_2 &= \overline{BB'}, & b_2 &= \overline{A'B} \\ a_3 &= \overline{CC'}, & b_3 &= \overline{B'C} \\ a_4 &= \overline{DD'}, & b_4 &= \overline{C'D} \\ a_5 &= \overline{EE'}, & b_5 &= \overline{D'E}. \end{aligned}$$

Supposons que les a_i sont différents (de même que les b_i) et que $a_1 = \min\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

Nous avons

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_3 = a_3 + b_4 = a_4 + b_5 = a_5 + b_1.$$

$$\text{Soit } b_i = ka_i \text{ et } M = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 a_i.$$

On a

$$M + kM = a_1 + b_2 = a_1 + ka_2, \text{ d'où } a_2 > M \quad (1)$$

$$= a_5 + b_1 = a_5 + ka_1, \text{ d'où } a_5 > M \quad (2)$$

$$= a_2 + b_3 = a_2 + ka_3, \text{ d'où } a_3 < M \quad (3)$$

car (1)

$$= a_4 + b_5 = a_4 + ka_5, \text{ d'où } a_4 < M \quad (4)$$

car (2)

$$= a_3 + b_4 = a_3 + ka_4, \text{ d'où } a_4 > M \quad (5)$$

car (3)

(4) et (5) sont en contradiction, donc tous les côtés de P sont égaux.

c) De manière générale, quand n est pair, P n'est pas nécessairement régulier, mais quand n est impair, P est régulier.

En effet, pour un n -gone régulier où n est pair, on peut toujours tracer un diamètre du cercle circonscrit passant par deux sommets opposés du n -gone et nous pouvons construire P de façon symétrique par rapport à ce diamètre.

Quand n est impair, il suffit de prendre la démonstration en b) et de suivre le même raisonnement avec un plus grand nombre de côtés.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

Dans le n° 122 de Mathématique et Pédagogie, les problèmes proposés ont été mal numérotés, 219, 220 et 221 deviennent ci-dessous 220, 221 et 222.

De quoi lire problème n° 220 de M. et P. n° 122.

Cette petite boutique est ouverte sept jours sur sept. Durant l'année 1998, on y a vendu au moins un livre chaque jour et au total 600 livres sur l'année complète.

Démontrer qu'il y a une période de jours consécutifs pendant laquelle on a vendu exactement 129 livres.

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek.

Soit a_i le nombre des livres vendus pendant les i premiers jours de 1998. Comme on vend au moins un livre chaque jour et que le total des livres vendus en 1998 est 600, on peut écrire

$$a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_{365} = 600.$$

En posant $b_i = a_i + 129$, on a aussi $b_1 < b_2 < \dots < b_i < \dots < b_{365} = 729$.

Les 365 nombres a_i sont deux à deux différents de même que les 365 nombres b_i ; ces $2 \times 365 = 730$ nombres varient de 1 à 729. Il en résulte que pour certains indices i et j , on devra avoir $a_j = b_i = a_i + 129$ ou $a_j - a_i = 129$. On peut conclure qu'à partir du jour $i + 1$ jusqu'au jour j , on vend exactement 129 livres.

Problème résolu de manière similaire par P. BORNSZTEIN de Courdimanche (France) et J. ANSEEUW de Roeselaere.

Opérations élémentaires problème n° 221 de M. et P. n° 122.

Prouver que la somme de deux nombres premiers impairs consécutifs est le produit d'au moins trois facteurs premiers (non nécessairement distincts).

Solution de P. BORNSZTEIN de Courdimanche.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned}(2p + 1) + (2p + 3) &= 4p + 4 \\ &= 2 \times 2(p + 1) \quad \text{avec } p + 1 \geq 2,\end{aligned}$$

donc $(2p + 1) + (2p + 3)$ possède au moins trois facteurs premiers 2, 2 et tout nombre premier qui divise $p + 1$.

Cela assure la conclusion et on peut noter que l'hypothèse $2p + 1$ et $2p + 3$ premiers est inutile.

On peut remarquer de plus que $3 + 5 = 8 = 2^3$, donc on ne peut améliorer la conclusion.

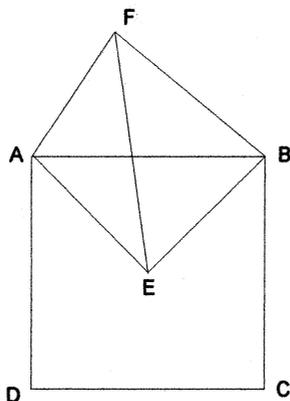
Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselaere, P. DASSY de Liège, J. DILLIES de Le Bizet, J. FINOULST de Diepenbeek, J. GOLDSTEINAS de Bruxelles, J. RASSE de Mean et H.-J. SEIFFERT de Berlin.

Encore un carré problème n° 222 de M. et P. n° 122.

Les diagonales AC et BD d'un carré se coupent en E . Sur le côté AB du carré et vers l'extérieur, on construit un triangle AFB rectangle en F et tel que $|AF| = 6$ et $|BF| = 8$.

Trouver la longueur de EF .

Solution de P. DASSY de Liège



Si le triangle AFB est rectangle en F et tel que $|AF| = 6$ et $|BF| = 8$, il est clair que $|AB| = 10$ (Pythagore).

Le quadrilatère $AFBE$ est inscriptible ($\widehat{F} = \widehat{E} = 90^\circ$).

D'après le théorème de Ptolémée, on a

$$|EF| \cdot |AB| = |AF| \cdot |BE| + |AE| \cdot |BF|$$

comme la longueur des diagonales du carré est $10\sqrt{2}$, cette égalité devient

$$\begin{aligned} |EF| \cdot 10 &= 6 \cdot 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \cdot 8 \\ &= 70\sqrt{2}, \end{aligned}$$

d'où $|EF| = 7\sqrt{2}$.

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselaere, P. BORNSTEIN de Courdimanche, J. DILLIES de Le Bizet, J. FINOULST de Diepenbeek, S. HENRI de Gerpennes, J. GOLDSTEINAS de Bruxelles, J. RASSE de Mean, H.-J. SEIFFERT de Berlin, M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles et C. VILLERS de Hyon.

AS2 proposé dans M. et P. n° 122

Soient a_1, a_2, \dots, a_n des nombres positifs non nuls. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{n}{4}.$$

Solution de P. BORNSTEIN de Courdimanche (France)

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme il n'y a qu'un nombre fini de termes, on peut considérer $a_{i_1} = \text{Max}_i a_i$. La symétrie circulaire permet de supposer que $a_1 = a_{i_1}$.

Soit alors $a_{i_2} = \text{Max}\{a_2; a_3\}$.

Notons que si $a_2 = a_3$, on pose alors $a_{i_2} = a_2$.

On a $i_2 \leq 3$.

Soit ensuite $a_{i_3} = \text{Max}\{a_{i_2+1}; a_{i_2+2}\}$ et ainsi, par récurrence, on construit

$$a_{i_{k+1}} = \text{Max}\{a_{i_k+1}; a_{i_k+2}\}.$$

Par construction, on a $i_{k+1} \leq i_k + 2$. Donc, pour tout k , on a

$$i_{k+1} \leq 1 + 2k$$

(On rappelle que $i_1 = 1$.)

Comme la somme est cyclique, il existe r tel que $a_{i_{r+1}} = a_1 = \text{Max}_i a_i$. Alors, $i_r = n$ ou $i_r = n - 1$ et ainsi,

$$n - 1 \leq i_r \leq 1 + 2(r - 1),$$

d'où $r \geq \frac{n}{2}$.

De plus,

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \\ & \geq \frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}} + \dots + \frac{a_{i_r}}{2a_{i_1}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} + \dots + \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}} \right) \\ & \geq \frac{1}{2} r \sqrt[r]{\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} \times \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} \times \dots \times \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{r}{2} \\ & \geq \frac{n}{4}. \end{aligned} \quad (3)$$

L'égalité a lieu si et seulement s'il y a égalité dans (1), (2) et (3).

Or, si (1) est une égalité, alors tous les termes ont été décrits par construction des a_{i_k} , d'où $r = n$. Et si (3) est une égalité, alors $r = \frac{n}{2}$. Ainsi (1) et (3) ne peuvent être simultanément des égalités. Et on a le résultat cherché.

Quelques remarques sur l'origine de ce problème

Posons $f_n(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}$ où les a_i sont dans \mathbb{R}_+^* .

En 1954, H. S. Shapiro posa la question : "A-t-on $f_n(a_1, \dots, a_n) \geq \frac{n}{2}$?" comme exercice dans l'American Mathematic Monthly.

Depuis, l'inégalité $f_n(a_1, \dots, a_n) \geq \frac{n}{2}$ est connue sous le nom d'inégalité de Shapiro.

Pour résumer, elle est vraie pour tout n pair inférieur ou égal à 12 et pour tout n impair inférieur ou égal à 23.

Grâce à R. A. Rankin et V. G. Drinfeld, on sait que

$$\inf_{n \geq 1} \frac{f_n}{n} = 0,4945668\dots$$

Une personne intéressée par le sujet pourra consulter :

- le site internet de Finch sur les constantes mathématiques
<http://www.mathsoft.com/asolve/constant/shapiro/shapiro.html>,
- D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric, A. M. Fink,
"Classical and New Inequalities in Analysis", Kluwer 1993.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir avant le 1er mai 2000.

229. Construction

Soit ABC un triangle rectangle. Construire un point N intérieur au triangle et tel que les angles NBC , NCA et NAB soient égaux.

230. Système D

Dans \mathbb{N} , résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2(y + z) \end{cases}$$

231. Suite constante

Soit (a_n) une suite de naturels tels que

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Démontrer que cette suite est constante.