Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N^{o} 126 *Mars – Avril 2000*

Éditorial

J. Navez,

J'espère que vous avez passé un excellent congé de carnaval, et je me permets de vous rappeler que c'est de vous que dépend la vie de notre société. La commission pédagogique qui a déjà élaboré pas mal d'excellents documents attend vos suggestions et vos réflexions ; Provisoirement elle se tient peu avant chaque conseil d'administration et un coup de fil à notre secrétariat peut vous renseigner sur la date de la prochaine réunion.

La réserve d'articles disponibles pour Mathématique et Pédagogie est presque épuisée. Là aussi faites-nous part de vos réflexions ou de séquences pédagogiques intéressantes que vous avez déjà testées. Les rédacteurs des deux Maths Jeunes attendent aussi vos articles.

Enfin une manière très efficace d'aider la société est de la faire connaître autour de vous et particulièrement chez les jeunes professeurs. Je suis certain que vous ferez la meilleure publicité possible.

Jacques NAVEZ

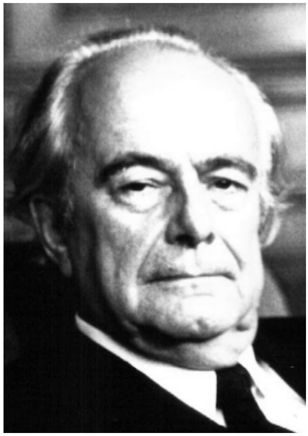
Mathématique et Pédagogie n° 126, 3–8, 2000

Hommage à Willy Servais

J. Wilmet, J. Ma, S. Courtois, A. Warbecq,

Lors de la journée inaugurale du congrès 1999 de la SBPMef, le 24 août, un hommage particulier a été rendu à la mémoire de Willy Servais. Nous avons choisi de publier des extraits du texte figurant dans la brochure éditée à l'occasion du congrès et des interventions qui eurent lieu lors de la séance académique. ([1])

Willy Servais, 20 ans déjà



Président de la Société Belge des Professeurs de Mathématique (pas encore ef) de sa fondation en 1953 jusqu'à 1969, il y a donc 30 ans, Willy Servais en devint ensuite Président d'honneur par une décision de l'assemblée générale statutaire du 8 novembre 1970.
C'est au début de notre congrès 1979 à Bruxelles où il était attendu que se répandit l'annonce de son décès en Hongrie le 25 août, à l'âge de 66 ans, alors que venait de se terminer la XXXIe Rencontre Internationale de Professeurs de Mathématique de la CIEAEM.

Il laissait une oeuvre particulièrement importante dans le domaine de la pédagogie et de l'enseignement de notre branche ainsi que le souvenir d'un Professeur et d'un Chef d'établissement toujours attaché à déceler les capacités de ses élèves et à les développer avec un perpétuel souci de la rigueur.

Tout l'homme se retrouve dans les extraits d'une allocution qu'il prononça un jour dans les locaux où se tient ce congrès 1999 de la SBPMef.

Deux décennies plus tard, ces paroles gardent certainement toute leur force et doivent nous inciter à la réflexion.

1. Les personnes désireuses d'obtenir le texte complet de l'une de ces interventions sont invitées à s'adresser à notre bureau de la rue de la Halle 15 à 7000 Mons.

"Surtout si on a souvent l'impression que nos élèves parlent une langue différente de la nôtre, n'est-il pas urgent de s'enquérir de ce qu'ils pensent de cette mathématique qu'ils étudient avec nous ? Nos élèves sont devant nous tels qu'ils sont. Ils n'ont que faire de nos accusations et de notre mépris. Leur intelligence, si inculte soit-elle, leur caractère, si indigent qu'il paraisse, et, par suite, une partie de leur aventureux destin, nous sont confiés. Faisons-nous assez d'efforts pour les comprendre ? Sommes-nous assez bons pour les accueillir avec humanité ? Sommes-nous assez enthousiastes pour travailler de coeur "auprès d'eux, avec eux, et pour eux ?""

WILLY SERVAIS ET L'ATHÉNÉE PROVINCIAL MIXTE WAROCQUÉ

Madame Jeanine Ma, Préfète des études

. . . Quand en 1937, il est arrivé à l'Athénée du Centre comme professeur de mathématique – son premier emploi – personne ne le connaissait. On ne savait rien de lui. Mais on a vite su. Parce que déjà, c'était un de ces êtres peu banals, hors du commun, immense dans ses dires, ses actes, ses engagements.

Parler de lui, c'est parler au superlatif. Déjà en 1932, il s'était distingué en obtenant son diplôme d'enseignement secondaire supérieur avec le plus grand fruit, en section scientifique. . .

. . . Quatre ans plus tard, il décrochait à l'ULB sa licence en sciences mathématiques avec la plus grande distinction et l'agrégation de l'enseignement secondaire avec grande distinction. . .

. . . Très vite, enseignants et élèves comprirent que Willy Servais ne faisait pas le métier d'un autre : son ascendant naturel, son assurance verbale, son sens inné de la pédagogie, sa volonté de faire progresser les jeunes dans la connaissance en firent d'emblée un professeur phare, le professeur dont on se souvient plus encore de la personne que du cours. . .

. . . Mais le ciel bleu d'un avenir souriant s'assombrit brutalement en 1939 : Willy Servais est mobilisé et dès 1940, il plonge dans l'enfer de cinq ans de captivité. . .

. . . S'il assume les privations, Willy Servais refuse de se laisser anéantir : il réagit de toute sa force mentale et de son intelligence pour sauvegarder son potentiel intellectuel, maintenir son moral et nourrir son inébranlable espoir de recouvrer la liberté. En 1945, c'est un homme grandi par les événements qui reprend ses fonctions de professeur à l'Athénée Provincial du Centre…

…C'est un professeur remarquable qui maîtrise avec une assurance toute naturelle n'importe quelle situation problématique qui se pose à lui …

…En 1958, lors du départ de Monsieur Fonck, la Députation Permanente lui confie la Direction de l'Athénée du Centre, sur le Plateau de Morlanwelz et de son extension à La Louvière. Dès lors, Willy Servais va exprimer toute sa mesure, dans les multiples domaines de la gestion d'une école. Ses actes, ses dires, ses prises de positions, sa fougue, son engagement dans un monde en pleine évolution ont marqué des générations d'élèves et de professeurs.

Willy Servais était un travailleur hors pair, infatigable, d'une énergie sans faille ; il réglait tout et traversait les problèmes avec une facilité déconcertante ; sa jeunesse studieuse, et une résistance à 5 ans d'épreuves ajoutée à son tempérament de battant en ont fait un être exigeant vis-à-vis de lui et vis-à-vis des autres …

…Ces mémorables éclats étaient à la mesure de son sens social, de sa générosité : dans la discrétion feutrée de son bureau, il a soulagé bien des drames et des difficultés, prenant sur lui-même la responsabilité de décisions qui échappaient au pied de la lettre administrative mais répondaient à l'esprit d'entraide, de solidarité, et du respect des personnes …

…A titre privé, cet homme complet, ouvert à toutes les disciplines et curieux de toutes les expressions, était grand mélomane et depuis l'adolescence, il s'adonnait à l'aquarelle pendant ses loisirs.

Mais au delà de tout, les mathématiques restaient sa grande passion. On ne pourrait compter les associations dont il était membre, on ne pourrait énumérer ses interventions dans des congrès aux 4 coins du monde, on ne pourrait inventorier les cours et conférences qu'il a présentés sur tous les continents, on ne pourrait dénombrer ses publications dans moult domaines mathématiques et pédagogiques …

WILLY SERVAIS ET LA SBPM

Monsieur Jean Wilmet, ancien Président de la SBPMef

Tout commence en avril 1953. Une Association (provisoire) de professeurs de mathématique est créée. Une de ses missions est de rédiger des statuts pour la future SBPM. Willy SERVAIS est le principal rédacteur de ces statuts.

Les choses vont très vite puisque le 14 juin 53, on assiste à la fondation de la SOCIETE BELGE DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUE - BELGISCHE VERENINGING VAN WISKUNDELERAREN ...

... Willy SERVAIS en est le premier président. La revue, bilingue, porte un nom latin : MATHEMATICA & PAEDAGOGIA.

Le premier éditorial de cette revue révèle un des traits marquants de Willy SERVAIS : son esprit visionnaire. En effet, il a pour titre : "Notre temps marque le début de l'ère mathématique". Il fallait entendre que dorénavant, pour comprendre le développement de notre monde, il faudrait s'y entendre en mathématique ...

... On note aussi l'organisation d'un congrès annuel de deux jours qui se tient successivement à Namur, Liège, Berchem-Lez-Anvers, Mons, Gand, Bruxelles,...

... Willy SERVAIS participa jusqu'à la fin à la vie de la SBPMef ...

WILLY SERVAIS ET LA PEDAGOGIE DE LA MATHEMATIQUE

Sylvain Courtois, inspecteur honoraire

... 1968, une grande année ! En juin, le programme de mathématique moderne pour la première année de l'enseignement moyen est promulgué. Willy Servais a pris une part active à sa rédaction, face à l'enthousiasme débordant de certains, à la critique acerbe d'autres, face aux modernes et aux anciens, face aux idéalistes et aux pragmatiques.

Willy Servais n'est pas l'un d'eux, mais son cœur les contient tous. Willy Servais est un <u>moderne</u> qui voit le moment venu où la mathématique scolaire va acquérir une grande unité. Willy Servais est un <u>ancien</u> qui connaît bien les chemins des mathématiques et leur évolution séculaire vers la rigueur. Willy Servais est un <u>idéaliste</u> qui espère que la jeunesse construira ses mathématiques, belles et utiles. Willy Servais est un <u>pragmatique</u> qui sait qu'il faudra aux Corps enseignants du temps et des efforts pour assimiler la réforme et l'adapter à la diversité des élèves. . .

. . . Homme d'intériorité, Willy Servais voyait une spiritualité dans les rapports entre l'homme et la mathématique. Pour lui, travailler la mathématique est un exercice comparable à la pratique d'une religion (religare) reliant l'homme à l'absolu . . .

. . . Sa mathématique, comme toute mathématique, n'est pas indépendante de l'homme ou de la femme qui la porte. Celle de Willy Servais est soucieuse de logique et elle l'exprime à chaque page. Elle étend chaque énoncé en explications, remarques et corollaires, faisant apparaître une pensée riche, ramifiée, depuis les prémisses d'un chapitre jusqu'à la conclusion. Exposée oralement, souvent de manière brillante, elle sait enthousiasmer un auditoire. Ecrite, elle recourt à une langue véhiculaire de qualité et accorde une grande importance à des supports de pensée tels que diagrammes, arbres, graphes, tableaux . . .

. . . Grâce à ses écrits, à ce qu'il nous a dit, à ce qu'il a été, finalement à tout ce qu'il nous a appris, Willy Servais vit encore parmi nous.

WILLY SERVAIS ET LA CIEAEM

Alfred Warbecq, inspecteur Honoraire

. . . La C.I.E.A.E.M. est le siège de la "Commission internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques" . . .

. . . En 1952, à Melun (France) la CIEAEM est officiellement créée. . .

. . . Willy Servais commentera cette réunion comme suit : "le moment était propice pour le renouveau de l'enseignement de la mathématique. Elle était, d'une part, l'objet d'une reconstruction globale et structurée sous l'impulsion de l'équipe Bourbaki et, d'autre part, son apprentissage était étudié de façon psycho-génétique par l'école de Piaget" . . .

. . . Si l'action de la C.I.E.A.E.M., en son nom propre, est quasi méconnue ce sont ses membres, qui par leurs publications, leurs interventions en d'autres lieux ont fait bénéficier l'enseignement des mathématiques de leur enrichissement acquis au sein de la Commission . . .

. . . En 1958, Gattegno quitte la Commission estimant qu'il a droit à la relève. Il désigne pour reprendre le lourd fardeau (ce sont ses propres termes !) que représente sa tâche de secrétaire et d'animation, celui qui leur parait le plus indiqué à savoir, Willy Servais. Nul ne l'a démenti, pendant plus de vingt ans, Willy Servais en collaboration étroite avec Renée, son épouse, a assuré le secrétariat de la C.I.E.A.E.M., y compris la préparation, l'organisation et l'animation des rencontres, ne suscitant que des éloges, grâce à un dévouement sans faille.

La Commission reconnaissant l'importance de leur rôle, les a nommés tous deux membres d'honneur. Quels étaient les objectifs de la C.I.E.A.E.M. ? Willy Servais les a précisés en ces termes : "A la fois, approfondir la connaissance théorique et pratique de la mathématique et mettre au point les méthodes de formation et d'apprentissage en accord avec la mathématique et la psychologie des élèves" ...

... Au risque de répétition, je voudrais souligner ses qualités humaines : Willy était foncièrement bon, rien de ce qui était l'homme ne le laissait indifférent. Sa force de caractère et sa capacité de travail lui ont fait transformer l'inactivité imposée aux officiers prisonniers durant la guerre 1940-45, en un séminaire prolongé où il perfectionna une culture déjà fort riche et en fit profiter ses collègues. Il était ferme dans ses convictions mais il les défendait avec droiture ...

... Willy Servais est de ceux qu'on n'oublie pas. Il a donné le meilleur de son existence à l'enseignement des mathématiques, jusqu'à ses derniers jours il a servi la C.I.E.A.E.M., animant la rencontre de Vesprun (Hongrie) avec son entrain habituel. Le choc ressenti en apprenant son décès à Budapest ne s'effacera jamais de nos mémoires.

Sur le déterminant de la matrice d'une transformation linéaire

M. Kassab,

Mots-clés : transformation linéaire, matrice, déterminant, orientation et aire de surface.

Introduction

Partir d'un terrain familier, le plan, et d'une notion simple, la transformation d'un ensemble, chercher tout en particularisant et concrétisant au départ, à explorer, avec la participation active des élèves, l'action de cette notion ou son impact sur ce terrain, afin de relever, en vue de les exploiter, les propriétés et les caractéristiques de cette action, envisager ensuite les possibilités d'extension ou de généralisation des résultats ainsi obtenus, avant de terminer par quelques exemples d'applications, telle est la méthodologie suivie dans la présente étude.

* * *

Pareille démarche ne saurait que susciter l'intérêt et l'adhésion de ces élèves qui, habitués le plus souvent à se faire dicter et imposer le contenu de leurs cours, se verraient invités ici à prendre part à la recherche et à la découverte, et ce dans leur cadre naturel, de nouvelles notions et de nouveaux concepts, ce qui leur permettrait de s'attribuer, voire de s'approprier, ne fût-ce qu'en partie, un savoir, un acquis et des connaissances qu'ils auraient contribué à relever, à structurer et à formuler.

* * *

En procédant de la sorte, on ne manquera pas de faire du calcul algébrique ou vectoriel du niveau du secondaire, non pas dans le seul but d'en faire, mais pour dégager et asseoir quelques idées et réflexions et ouvrir de nouveaux horizons. Du calcul certes, mais aussi et surtout les idées sous-jacentes, l'idée devant primer le calcul.

* * *

Mettre ainsi le calcul au service de la recherche mathématique au niveau du secondaire constituerait, à mon avis, une bonne approche de son enseignement et refléterait une bonne conception de sa méthodologie. Une telle affirmation, de même que la démarche déjà préconisée gagneraient, me semble-t-il, à être étayées et illustrées de suite. Ce sera l'objet de cette note.

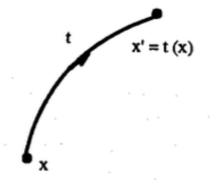
I. Les transformations du plan π

A. Définitions

On appelle
1) Transformation du plan : toute application du plan dans lui-même.
2) Permutation du plan : toute transformation dont la réciproque est aussi une transformation du plan.

t désignant une transformation du plan π, on notera

$$t : \pi \to \pi : x \to x' = t(x)$$



et l'on dira

t applique le point x sur le point x'. x' est l'image ou la transformée de x par t.

Compte tenu de ce vocabulaire, on peut formuler le 2) sous cette forme équivalente :

Une transformation est une permutation du plan ssi tout point de ce plan est l'image d'un et d'un seul point de ce plan par cette transformation.

B. Quelques transformations du plan π (Fig. 1)

On se donne un point O et deux droites sécantes C et D de ce plan auxquels on peut associer ces transformations bien familières du plan, à savoir :

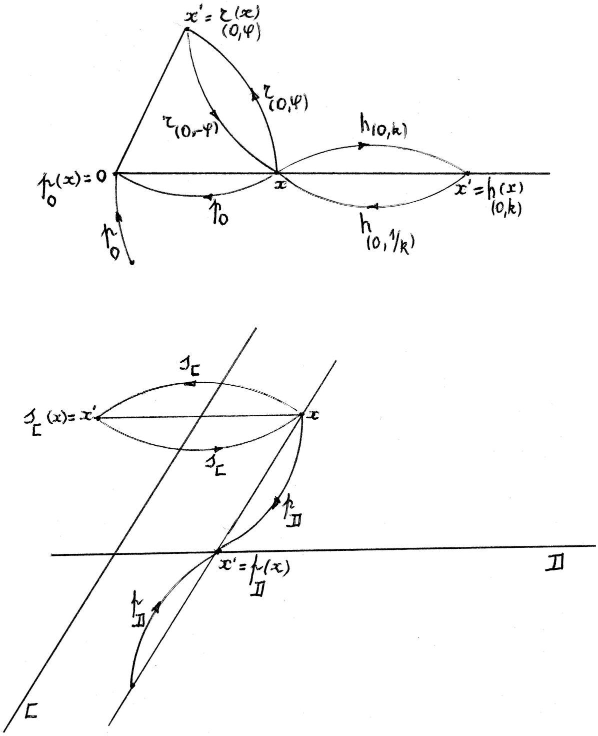


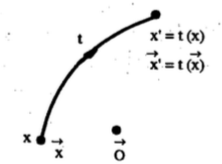
Fig. 1

l'homothétie $h_{(O,k)}$, $k \in \mathbb{R}_0$, de centre O et de rapport k, la rotation $r_{(O,\varphi)}$ de centre O et d'angle d'amplitude φ, la projection p_O du plan π sur le point O, la symétrie s_C d'axe C, parallèle à D et la projection p_D d'axe D, parallèle à C.

On relève de suite qu'à l'exclusion des deux transformations-projections p_O et p_D, toutes les autres transformations précitées ainsi que leurs réciproques sont des permutations du plan π.

II. Les transformations linéaires du vectoriel $\mathbb{R}, \pi_0, +$

Toute transformation ponctuelle t du plan π définissant une transformation vectorielle du plan pointé π_0 et inversement, le plan π peut s'identifier au plan π_0 et partant au vectoriel plan $E_0 = \mathbb{R}, \pi_0, +$.



Cela étant, on a l'importante définition :

Définition

t est une transformation linéaire du vectoriel $E_0 = \mathbb{R}, \pi_0, +$ ssi

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E_0 : t(a\vec{x} + b\vec{y}) = at(\vec{x}) + bt(\vec{y}) = a\vec{x'} + b\vec{y'}. \tag{1}$$

En particulier,

$$t(a\vec{x}) = at(\vec{x}) = a\vec{x'}. \tag{1'}$$

D'où l'on tire

1) $t(\vec{0}) = t(0.\vec{x}) = 0.t(\vec{x}) = 0.\vec{x'} = \vec{0}$

2) $\vec{y} = a\vec{x} \Rightarrow \vec{y'} = a\vec{x'}$.

Autrement dit, si deux vecteurs sont parallèles, il en sera de même de leurs images par toute transformation linéaire du vectoriel $E_0 = \mathbb{R}, \pi_0, +$.

III. Matrice d'une transformation linéaire du vectoriel $\mathbb{R}, \pi_0, +$

Le vectoriel $\mathbb{R}, \pi_0, +$ étant rapporté à l'une de ses bases $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, tout vecteur $\vec{x}$ de ce vectoriel est une combinaison linéaire unique des vecteurs de cette base, autrement dit :

$$\forall x \in \pi_0,\ \exists!(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 \tag{2}$$

et le vectoriel $\mathbb{R}, \pi_0, +$ s'identifie à $\mathbb{R}^2$ en vertu de la relation (2), laquelle permet d'établir aussi un isomorphisme des vectoriels $\mathbb{R}, \pi_0, +$ et $\mathbb{R}, \mathbb{R},^2 +$.

Nous dirons que x_1 et x_2 sont les composantes du vecteur $\vec{x}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ou les coordonnées du point x dans le repère $(0, u_1, u_2)$, ce que l'on notera $\vec{x}(x_1, x_2)$ ou $x(x_1, x_2)$.

Cela étant, on a tenu compte de (2) et de la linéarité de la transformation t :

$$t(\vec{x}) = x_1 t(\vec{u}_1) + x_2(\vec{u}_2)$$

ou

$$\vec{x'} = x_1 \vec{u'_1} + x_2 \vec{u'_2} \tag{3}$$

ce qui se traduit analytiquement par

$$\begin{aligned} x'_1 &= u_{11}x_1 + u_{12}x_2 \\ x'_2 &= u_{21}x_1 + u_{22}x_2 \end{aligned} \tag{4}$$

en posant

$$\begin{aligned} t(\vec{u}_1) &= \vec{u'_1}(u_{11}, u_{21}) \\ t(\vec{u}_2) &= \vec{u'_2}(u_{12}, u_{22}). \end{aligned}$$

La transformation linéaire t sera donc définie dès que l'on se donne la matrice $U = (\begin{smallmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{smallmatrix})$ qui la caractérise.

A cette matrice que l'on représente parfois par $U = (u_{ij})$, $u_{ij} = 1, 2$, on associe un déterminant noté $dtm\ U$ ou $|\begin{smallmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{smallmatrix}|$ défini par le réel $u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}$. On a ainsi

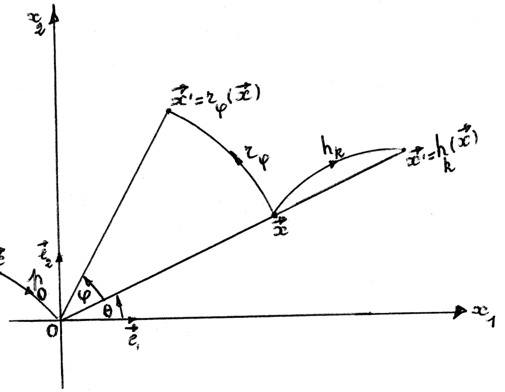
$$dtm\ U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}.$$

Cette notion de déterminant se présentera et s'imposera lors de notre étude des transformations linéaires du plan.

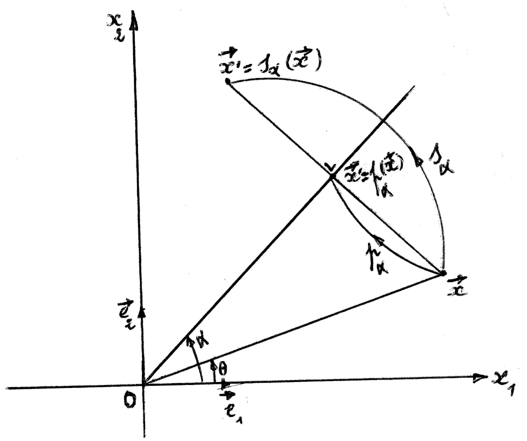
Matrices de certaines transformations linéaires ([1])

On trouve aisément (Fig. 2) $\vec{x}(x_1, x_2)$ désignant un vecteur ayant pour image le vecteur $\vec{x'}(x'_1, x'_2)$ par la transformation t_1 :

1. On se placera dans le cadre du vectoriel euclidien plan que nous supposons rapporté à la base orthonormée $(\vec{e}, \vec{e}_2)$.



x_2
$\vec{x}' = r_\varphi(\vec{x})$
r_φ
h_k
$\vec{x}' = h_k(\vec{x})$
$\vec{x}$
$\vec{e}_2$
φ
θ
O
$\vec{e}_1$
x_1



x_2
$\vec{x}' = s_\alpha(\vec{x})$
s_α
$\vec{x} = p_\alpha(\vec{x})$
p_α
$\vec{x}$
$\vec{e}_2$
α
θ
O
$\vec{e}_1$
x_1

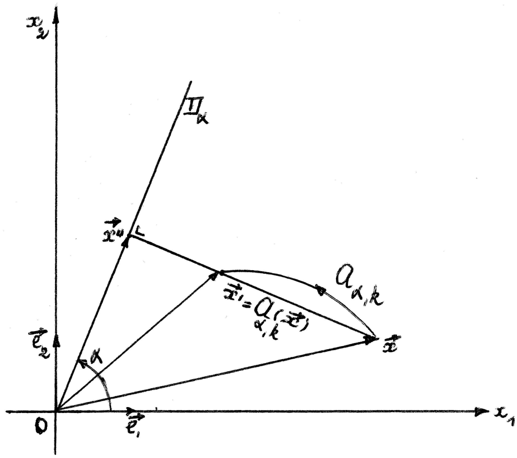


Fig. 2

1. Matrice d'homotétie. On a

$$\vec{x'} = h_k(\vec{x}) = k\vec{x}, \quad k \neq 0,$$

d'où $x'_1 = kx_1 + 0x_2$, $x'_2 = 0x_1 + kx_2$, et partant

$$H_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad ; \quad dtm\ H_k = k^2 > 0.$$

2. Matrice de rotation. On a

$$\vec{x'} = r_\varphi(\vec{x}), \quad \text{d'où } \begin{aligned} x'_1 &= \|\vec{x}\| \cos(\theta + \varphi) = x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi \\ x'_2 &= \|\vec{x}\| \sin(\theta + \varphi) = x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi. \end{aligned}$$

Par suite,

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad ; \quad dtm\ R_\varphi = 1.$$

3. Matrice de symétrie orthogonale. On a

$$\vec{x'} = s_\alpha(\vec{x}), \quad \text{d'où } \begin{aligned} x'_1 &= \|\vec{x}\| \cos(2\alpha - \theta) = x_1 \cos 2\alpha + x_2 \sin 2\alpha \\ x'_2 &= \|\vec{x}\| \sin(2\alpha - \theta) = x_1 \sin 2\alpha - x_2 \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Par suite,

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad dtm\ S_\alpha = -1.$$

4. Matrice de projection orthogonale. On a

$$\vec{x'} = p_\alpha(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(\vec{x} + \frac{1}{\alpha}(\vec{x})\right),$$

d'où

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad dtm\ P_\alpha = 0.$$

5. Matrice d'affinité de rapport k, $k \neq 0$ et d'axe D_α. On a par définition

$$\vec{x'} = a_{(\alpha,k)}(\vec{x}) \text{ avec } \overrightarrow{x''x'} = k\overrightarrow{x''x'} \text{ et } \vec{x''} = p_\alpha(\vec{x}).$$

On trouve

$$\vec{x'} = \vec{x''} + \overrightarrow{x''x'} = p_\alpha(\vec{x}) + k\overrightarrow{x''x'} = (1-k)p_\alpha(\vec{x})k\vec{x}$$

d'où

$$A_{(\alpha,k)} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + k\sin^2\alpha & (1-k)\sin\alpha\cos\alpha \\ (1-k)\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha + k\cos^2\alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad dtm\ A_{(\alpha,k)} = k.$$

6. Matrice de la projection du plan sur le point origine 0. Cette projection p_0 de matrice $P_O = (p_{ij})$, $i,j = 1,2$ étant définie par

$$p_O : \pi_0 \to \vec{0} : \vec{x} \to p_O(\vec{x}) = \vec{x'} = \vec{0} : \begin{array}{l} 0 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 \ . \\ 0 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 \end{array} \tag{5}$$

Posons $\vec{x} = (1,0)$, puis $\vec{x} = (0,1)$ dans (5), il vient

$$P_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad dtm\ P_O = 0.$$

IV. Quelques transformations non linéaires du plan π_0 (Fig. 3)

1. Projection de centre O du plan π_0 sur la droite A

$$p_A : (\pi_0 \setminus B) \to A = \vec{x} \to \vec{x'},$$

où $\{x'\} =]0x \cap A$ et $O \in B||A$. On trouve

$$x'_1 = \frac{ax_1}{x_1 + x_2} \quad , \quad x'_2 = \frac{ax_2}{x_1 + x_2}.$$

2. Projection de centre O du plan π_0 sur le cercle C de rayon a, centré en O

$$p_C : (\pi_0 \setminus \{\vec{O}\}) \to C : \vec{x} \to \vec{x'}, \ \ \{x'\} =]Ox \cap C.$$

On a

$$\vec{x'} = \frac{a\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

et par suite,

$$x'_1 = \frac{ax_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \quad ; \quad x'_2 = \frac{ax_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}$$

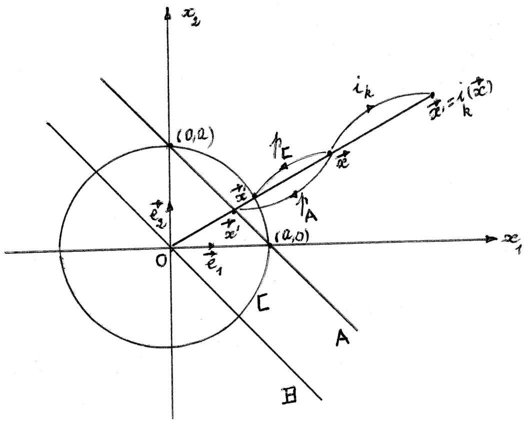


Fig. 3

3. L'inversion de pôle O et de puissance k, $k \neq 0$.

$$i_k : (\pi_0 \setminus \{\vec{O}\}) \to \pi_0 : \vec{x} \to \vec{x'}$$

où $\overline{Ox}.\overline{Ox'} = k$. On trouve :

$$x'_1 = \frac{kx_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad ; \quad x'_2 = \frac{kx_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

V. Etude des transformations linéaires du plan (2)

Soit à étudier la transformation linéaire t définie par la matrice $T = (t_{ij})$, $t_{ij} \in \mathbb{R}_0\,;\ i,j = 1,2$

$$t : x(x_1, x_2) \to x'(x_1', x_2') : \begin{array}{l} x_1' = t_{11}x_1 + t_{12}x_2 \\ x_2' = t_{21}x_1 + t_{22}x_2 \end{array}. \tag{6}$$

A. Approche géométrique

Les équations du système (6) considérées comme étant celles de deux droites D_1 et D_2 de coefficients respectifs $m_1 = -\frac{t_{11}}{t_{21}}$ et $m_2 = -\frac{t_{21}}{t_{22}}$, envisageons les deux cas suivants :

1. t est une permutation du plan. Dès lors, tout point $x'(x_1', x_2')$ est l'image par t d'un point $xw(x_1, x_2)$ et d'un seul.

   $\Leftrightarrow$ Les droites D_1 et D_2 sont sécantes $\Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow dtm\ T \neq 0$.

2. t n'est pas une permutation du plan. On en déduit :

   Il existe au moins un point x' qui ne soit pas l'image par t d'aucun point x ou qu'il soit l'image de plus d'un $\Leftrightarrow$ Les droites D_1 et D_2 sont disjointes ou confondues $\Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow dtm\ T = 0$.

Notons de suite que ces résultats restent valables même quand il s'avère que des éléments de la matrice T sont nuls.

Définitions

La transformation t et sa matrice T sont dites

$$\begin{array}{lcccc} \text{régulières} & & t \text{ est une permutation} & & dtm\ T \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & & \Leftrightarrow & \\ \text{singulières} & & t \text{ n'est pas une permutation} & & dtm\ T = 0 \end{array}$$

2. le plan π étant rapporté à un repère orthonormé.

B. Approche algébrique

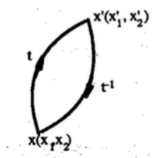
On envisage les mêmes cas :

1. $dtm\ T \neq 0$ (la transformation est régulière). Le système (6) peut dès lors s'écrire

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{dtm\ T}\ (t_{22}x'_1 - t_{12}x'_2) \\ x_2 &= \frac{1}{dtm\ T}\ (-t_{21}x'_1 + t_{11}x'_2) \end{aligned} \tag{7}$$

définissant ainsi la réciproque t^{-1} de t et sa matrice notée T^{-1}, ([3])

$$T^{-1} = \frac{1}{dtm\ T} \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} \\ -t_{21} & t_{11} \end{pmatrix} \tag{8}$$



On relève de suite, compte tenu de (7) et (8), que

1) les transformations régulières respectent le degré des courbes algébriques et la linéarité des droites ainsi que leur parallélisme en particulier ;

2) la réciproque t^{-1} d'une transformation régulière est une transformation régulière puisque $dtm\ T^{-1} = \frac{1}{dtm\ T} \neq 0$.

Nous dirons que la transformation régulière t^{-1} et sa matrice T^{-1} sont les inverses respectives de t et de sa matrice T.

2. $dtm\ T = 0$ (la transformation t est singulière).

Le système (6) s'écrit en posant

$$m = \frac{t_{21}}{t_{11}} = \frac{t_{22}}{t_{12}} \quad , \quad \begin{aligned} x'_1 &= t_{11}x_1 + t_{12}x_2 \\ x'_2 &= m(t_{11}x_1 + t_{12}x_2) \end{aligned} \tag{9}$$

d'où $x'_2 = mx'_1$ et l'on déduit que

1) t est une projection du plan sur la droite $D : x_2 = mx_1$, et plus précisément, de la droite $D_a = t_{11}x_1 + t_{12}x_2 = a$, $a \in \mathbb{R}$ sur le point (a, ma) de cette droite D, (Fig. 4)

3. si $T = (t_{ij})$, $i, j = 1, 2$ et $a \in \mathbb{R}$, alors on a par définition $aT = (at_{ij})$.

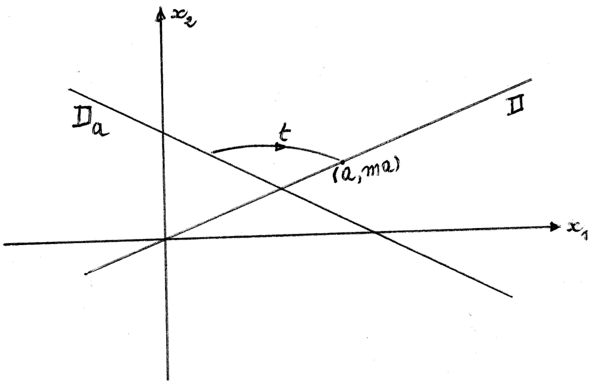


Fig. 4

2) cette projection est orthogonale s'il se vérifie que l'on a en plus $t_{11} + t_{22} = 1$ et $t_{12} = t_{21}$.

VI. Propriétés des transformations régulières du plan

Introduction

Nous avons vu que ces transformations y sont inversibles, qu'elles y respectent le degré des courbes algébriques et la linéarité des droites ainsi que leur parallélisme en particulier.

Ces transformations ont d'autres propriétés qu'une simple analyse de la figure 5 présentant certaines transformées du triangle OAB nous laisse découvrir.

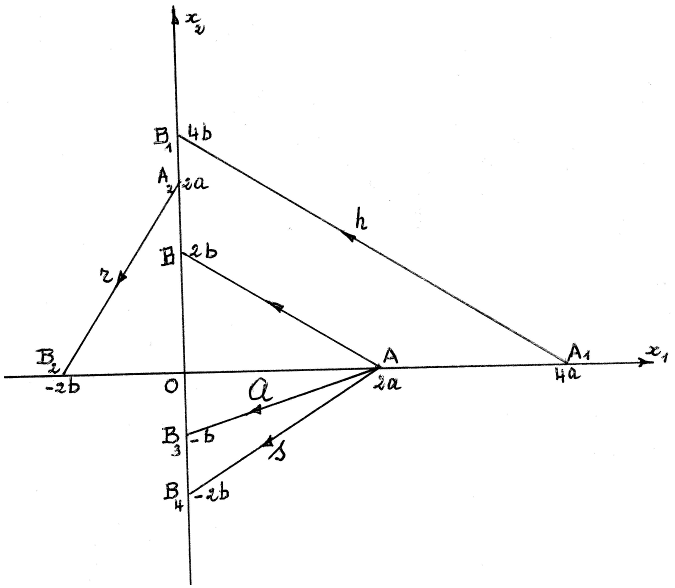


Fig. 5

De cette analyse, il ressort clairement que

1) les transformations à déterminants

$$\left\{\begin{array}{l}\text{positifs}\\ \text{négatifs}\end{array}\right. \text{telles} \left\{\begin{array}{l}\text{l'homothétie } h_2\\ \text{la symétrie orthogonale } s_{0x_1}\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}\text{et la rotation } r_{\pi/2}\text{, respectent}\\ \text{et l'affinité } \mathcal{a}_{(0,-1/2)}\text{, inversent}\end{array} \quad \text{le sens de l'orientation dans le plan.}$$

2) L'aire de la transformée du triangle OAB par l'une quelconque de ces transformations est égale au produit de l'aire de ce triangle par le déterminant de la matrice de cette transformation, pris en valeur absolue.

Il semblerait donc que si l'on désignait par T la matrice de la transformation régulière t appliquant la portion de surface S d'aire $\mathbf{S}$ sur la portion de surface S' d'aire $\mathbf{S}'$ (Fig. 6), on devrait avoir la relation :

$$\mathbf{S}' = |dtm\ T|\mathbf{S}$$

t respectant ou inversant dans S' le sens de l'orientation de S selon que $dtm\ T$ est positif ou négatif.

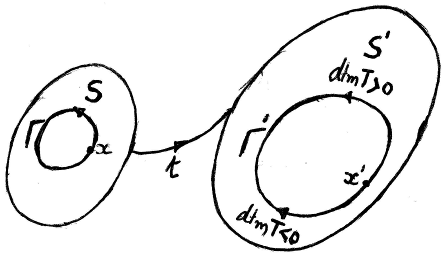


Fig. 6

Etablir cette relation et prévoir le sens de l'orientation dans la figure transformée fera l'objet de l'étude qui va suivre où l'on se placera dans le cadre du vectoriel euclidien plan $E_0 = \mathbb{R}, \pi_0, +$ rapporté à la base orthonormée canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, la transformation t de matrice $T = (t_{ij})$, $i, j = 1, 2$ étant supposée régulière.

VII. Orientation de la transformée d'un bivecteur. Aire de cette transformée

A. Orientation d'un bivecteur

— Tout couple de vecteurs non nuls $\vec{x}(x_1, x_2)$ et $\vec{y}(y_1, y_2)$ de E_0 définit dans l'ordre indiqué un bivecteur noté $(\vec{x}, \vec{y})$.

— Les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de ce bivecteur sont dits parallèles ssi il existe un réel k tel que $\vec{y} = k\vec{x}$ ssi

$$dtm\ (\vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Les bivecteurs considérés dans la suite sont implicitement constitués de vecteurs non parallèles, c'est-à-dire des bivecteurs à déterminants non nuls formant des bases de E_0.

Cela étant, nous dirons qu'un bivecteur et la base qu'il définit ont la même orientation positive que la base conique ([4]) (resp. une orientation négative contraire à cette base) ssi le déterminant de ce bivecteur est positif (resp. négatif).

4. Le déterminant de la bas canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ vaut l'unité.

B. Aire d'un bivecteur

Le bivecteur $(\vec{x}, \vec{y})$ étant donné, posons $\theta = \widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$; il vient

$$\cos\theta = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\;\|\vec{y}\|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\|\vec{x}\|\;\|\vec{y}\|},$$

et partant

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \left[\frac{dtm\,(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\|\;\|\vec{y}\|}\right]^2,$$

d'où

$$|\sin\theta| = \frac{|dtm\,(\vec{x}, \vec{y})|}{\|\vec{x}\|\;\|\vec{y}\|}.$$

Il s'ensuit que l'aire notée $\mathbf{S}(\vec{x}, \vec{y})$ du parallélogramme construit sur le bivecteur $(\vec{x}, \vec{y})$ s'exprime par

$$\mathbf{S}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|\;\|\vec{y}\|\;\;|\sin\theta| = |dtm\,(\vec{x}, \vec{y})|. \tag{10}$$

C. Orientation de la transformée d'un bivecteur

$(\vec{x'}, \vec{y'})$ désignant la transformée par t du bivecteur $(\vec{x}, \vec{y})$, on trouve de suite

$$dtm\,(\vec{x'}, \vec{y'}) = \begin{vmatrix} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 & t_{21}x_1 + t_{22}x_2 \\ t_{11}y_1 + t_{12}y_2 & t_{21}y_1 + t_{22}y_2 \end{vmatrix} = dtm\,T\;dtm\,(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0. \tag{11}$$

L'on déduit que

1. La transformée d'un bivecteur est un bivecteur de même orientation ou d'orientation contraire selon que le déterminant de la matrice de cette transformation est positif ou négatif (Fig. 7).
2. La transformée du parallélogramme construit sur un bivecteur est le parallélogramme construit sur la transformée de ce bivecteur ([5]) (Fig. 7).

5. Se reporter aux applications.

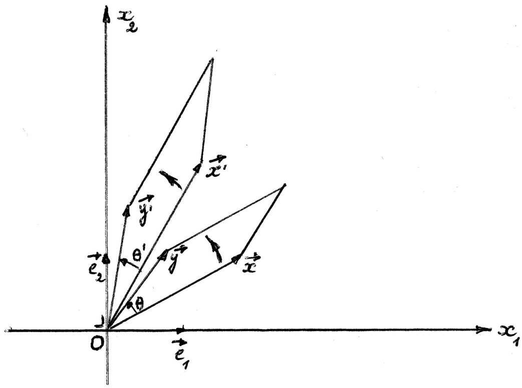


Fig. 7

3. $\mathbf{S}(\vec{x}, \vec{y})$ et $\mathbf{S}'(\vec{x'}, \vec{y'})$ désignant les aires respectives des parallélogrammes construits sur le bivecteur $(\vec{x}, \vec{y})$ et sur sa transformée le bivecteur $(\vec{x'}, \vec{y'})$ (Fig. 7), on a, compte tenu de (10) et (11)

$$\mathbf{S}'(\vec{x'}, \vec{y'}) = |dtm\ T|\, \mathbf{S}(\vec{x}, \vec{y}). \tag{12}$$

D. Aire de la transformée d'une portion de surface

$\mathbf{S}$ et $\mathbf{S}'$ désignant les aires respectives de la portion de surface S et de sa transformée S' par t (Fig. 8), effectuons sur S une subdivision adéquate à laquelle la transformation t fait correspondre une subdivision de sa transformée S' associant au parallélogramme élémentaire ΔS_i d'aire $\Delta \mathbf{S}_i$, sa transformée le parallélogramme $\Delta S'_i$ d'aire $\Delta \mathbf{S}'_i$.

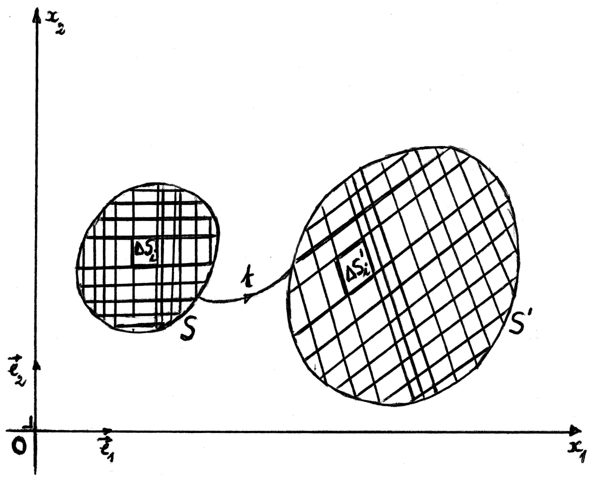


Fig. 8

On a, en vertu de (12),

$$\Delta\mathbf{S}_i' = |dtm\ T|\Delta\mathbf{S}_i.$$

Par suite, après sommation et passage à la limite,

$$\mathbf{S}' = |dtm\ T|\mathbf{S} \tag{13}$$

E. Note

— On pourrait, en se plaçant à un niveau supérieur, établir directement cette relation (13), en partant de la transformation régulière t de matrice $T = (t_{ij})$

$$t : x(x_1, x_2) \to x'(x_1', x_2') : x_i' = \sum_{j=1}^{2} t_{ij}x_j, \quad i = 1, 2 \tag{14}$$

appliquant S sur S'.
L'aire $\mathbf{S}'$ étant donnée par l'intégrale

$$\mathbf{S}' = \iint_{S'} dx_1' dx_2',$$

on trouve de suite, en y effectuant le changement de variables défini par (14) :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}' &= \left|\iint_S \frac{\partial(x_1', x_2')}{\partial(x_1, x_2)}\, dx_1 dx_2\right| \\ &= |dtm\ T| \iint_S dx_1 dx_2 = |dtm\ T|\mathbf{S}.\end{aligned}$$

— Cette notion de transformation linéaire s'étendra de toute évidence au vectoriel de l'espace où l'on fera connaissance avec les matrices carrées du 3ème ordre, ainsi qu'avec leurs déterminants.

F. Applications

Quelques propositions élémentaires relatives aux transformations linéaires régulières du vectoriel plan

Par transformée, on sous-entendra dans la suite la transformée par une transformation linéaire régulière t du vectoriel plan E_0 que nous supposons rapporté à l'une de ses bases $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Cela étant, on a les propositions :

1. La transformée d'un vecteur est le vecteur nul si ce vecteur est le vecteur nul, autrement dit,

$$\forall \vec{x} \in E_0 : t(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

De fait,
— $\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow t(\vec{x}) = t(\vec{0}) = t(0.\vec{x}) = 0.t(\vec{x}) = 0.\vec{x'} = \vec{0}$.
— Posons $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$, il vient

$$t(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow x_1\vec{u_1'} + x\vec{u_2'} = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0},$$

la transformée $(\vec{u_1'}, \vec{u_2'})$ de la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ étant une base (un bivecteur) de E_0.

2. Les transformées de deux vecteurs sont deux vecteurs parallèles ssi il en est de même de ces vecteurs. Autrement dit,

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_0 : \vec{y'} \parallel \vec{x'} \Leftrightarrow \vec{y} \parallel \vec{x}.$$

De fait,

— $\vec{y}||\vec{x} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{y} = k\vec{x} \Rightarrow \vec{y'} = k\vec{x'} \Rightarrow \vec{y'}||\vec{x'}$
— $\vec{y'}||\vec{x'} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} = \vec{y'} = k\vec{x'}$ ou $t(\vec{y}) = t(k\vec{x})$
$\Rightarrow (t^{-1} \circ t)(\vec{y}) = (t^{-1} \circ t)(k\vec{x}) \Rightarrow \vec{y} = k\vec{x} \Rightarrow \vec{y}||\vec{x}$

3. La transformée du parallélogramme construit sur un bivecteur est le parallélogramme construit sur la transformée de ce bivecteur. P désignant le parallélogramme construit sur le bivecteur $(\vec{u}, \vec{v})$ (Fig. 9), on a
$$P \equiv \vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad (\lambda, \mu) \in [0, 1]^2.$$

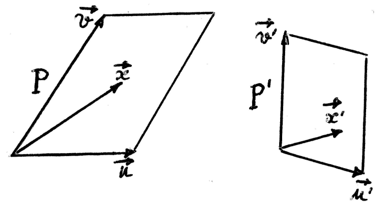


Fig. 9

Par suite,
$$P' = tP \equiv \vec{x'} = \lambda\vec{u'} + \mu\vec{v'}, \quad (\lambda, \mu) \in [0, 1]^2,$$
où $(\vec{u'}, \vec{v'})$ est aussi un bivecteur.
La proposition est ainsi établie.

4. La transformation t respecte le parallélisme des droites. De fait, la droite d'origine a et de vecteur directeur $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, étant notée $D(a, \vec{v})$ (Fig. 10), on a de suite
$$D(a, \vec{v}) \equiv \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

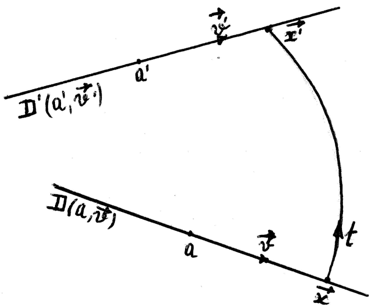


Fig. 10

Sa transformée D par t s'exprimant dès lors par

$$\begin{aligned} D' = tD \;&\equiv\; \vec{x'} = \vec{a'} + \lambda \vec{v'}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \; D'(a', \vec{v'}), \end{aligned}$$

il s'ensuit que les droites parallèles $D_1(a_1, \vec{v}_1)$ et $D_2(a_2, \vec{v}_2 = k\vec{v}_1)$ ont pour tranformées respectives les droites parallèles $D'_1(a'_1, \vec{v'_1})$ et $D'_2(a'_2, \vec{v'_2} = k\vec{v'_1})$.

Exercices résolus

1. La droite $D(a(1,1), \overrightarrow{ab}(1,-1))$ (Fig. 11) d'équation(s) (10)

$$\begin{cases} \text{vectorielle : } \vec{x} = \vec{a} + \lambda \overrightarrow{ab}, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{paramétriques : } x_1 = 1 + \lambda \,;\, x_2 = 1 - \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{cartésienne : } x_2 + x_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

a pour transformée par la transformation t de matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

la droite $D'(a'(0,2), \overrightarrow{a'b'}(2,1))$ (Fig. 11), d'équation(s) (10)

$$\begin{cases} \text{vectorielle : } x = \vec{a'} + \lambda \overrightarrow{a'b'}, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{paramétriques : } x_1 = 2\lambda \,;\, x_2 = 2, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{cartésienne : } x_2 = 2 \end{cases}$$

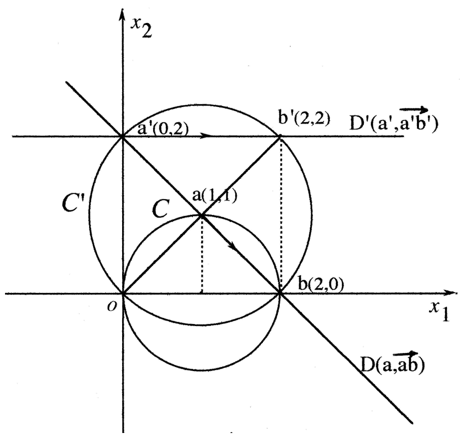
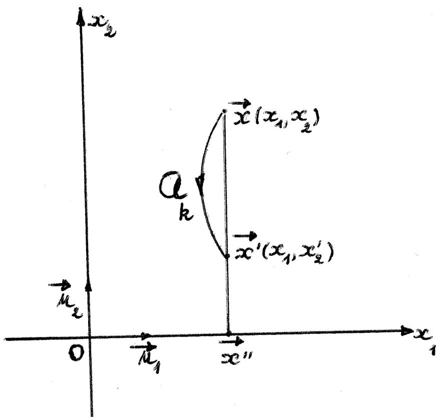


Fig. 11

On vérifie aisément ([6]) que cette transformation applique, tout en respectant le sens de son orientation, le cercle $C(c(1,0),1)$ sur le cercle $C'(a(1,1),\sqrt{2})$ dont l'aire est le double de celle du cercle C, ce qui confirme la relation (13).

2. L'affinité a_k, $k \in \mathbb{R}_0$, est la transformation du vectoriel E_0 définie par

$$a_k : \vec{x} \to \vec{x'} : \overrightarrow{x''x'} = k\overrightarrow{x''x}.$$



$\vec{x''}$ désignant la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur $0x$, on a de suite

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 = x_1 + 0x_2 \\ x_2' &= kx_2 = 0x_1 + kx_2. \end{aligned}$$

6. La base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ étant supposée orthonormée.

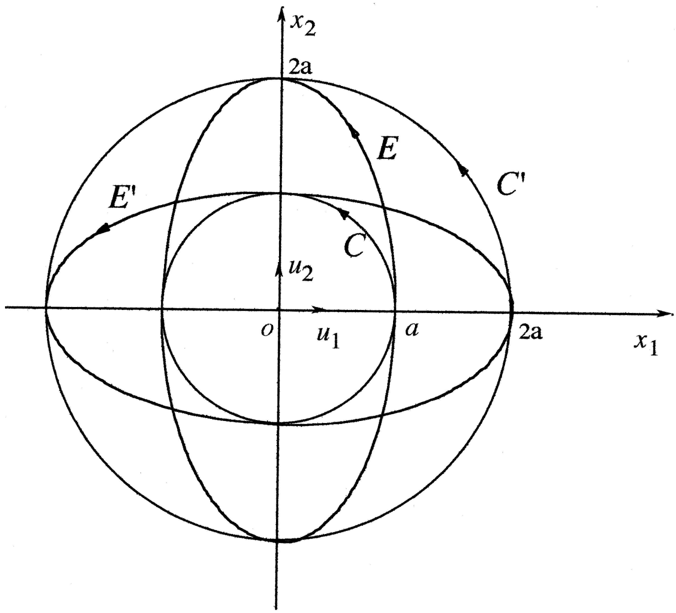


Fig. 12

$\mathcal{A}_k$ est donc une transformation régulière de matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

et de $dtm\ A_k = k \neq 0$. Cela étant, l'affinité $\mathcal{A}_2$ applique, tout en respectant le sens de son orientation, le cercle $C : x_1^2 + x_2^2 = a^2$ (Fig. 12) sur l'ellipse

$$E = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{4a^2} = 1,$$

dont l'aire $\mathbf{S}'$ est, comme on devait s'y attendre, le double de l'aire $\mathbf{S}$ du cercle C, autrement dit, $\mathbf{S}' = 2\mathbf{S} = 2\pi a^2$.

On vérifie de même que

(a) L'homothétie h_2 applique, tout en respectant le sens de son orientation, le cercle C sur le cercle $C' : x_1^2 + x_2^2 = 4a^2$ dont l'aire $4\pi a^2$ est le quadruple de celle de C.

(b) $\begin{cases} \text{La rotation } r_{\pi/2} \\ \text{La symétrie orthogonale } s_{0x} \end{cases}$ applique tout en

$\begin{cases} \text{respectant} \\ \text{inversant} \end{cases}$ le sens de son orientation, l'ellispe E sur

$$\begin{cases} \text{l'ellipse } E' : \dfrac{x_1^2}{4a^2} + \dfrac{x_2^2}{a^2} = 1 \text{ de même aire} \\ \text{elle-même.} \end{cases}$$

Adresse de l'auteur :

Moustapha **KASSAB**
Rue Gothale 7
4672 Saint-Rémy

Revue des revues

C. Villers,

Bulletin de l'APMEP - N°424 - Novembre 1999

Ce bulletin est entièrement consacré aux journées nationales 1998 qui se sont déroulées à Rouen.

On y trouve, de manière généralement très condensée, des textes et comptes rendus des conférences, d'ateliers et de travaux de groupes de réflexion.

Les conférences :

- Philippe Cardinali a traité de "L'invention de la perspective géométrique, 1330-1580." Le texte complet peut être téléchargé au départ du site http ://www.univ-lyon1.fr/apmep/
- Denis Guedj a parlé de "La double implication".
- Jean-Paul Hébert a présenté "Mathématiques, économie et citoyens". Le résumé est ici beaucoup plus substantiel.
- François Tisseyre a développé le sujet "Expression audiovisuelle des mathématiques".

La livraison du bulletin est alors complétée par les résumés de 22 exposés-ateliers choisis parmi les 80 qui figuraient au programme.

Tout cela donne une idée de la diversité et de la richesse des sujets abordés lors des journées nationales de Rouen.

Claude Villers

De la compréhension des énoncés en géométrie, classe de 3ème année secondaire en R. D. C.

J. M. Kibwana Muhindo,

Introduction

Le problème de l'irrégularité de l'enseignement de la géométrie demeure.

Nous estimons que la compréhension figure parmi les aspects importants sur lesquels devraient se pencher les chercheurs intéressés à la question.

Dans le cadre précis de l'initiation au mode démonstratif, on peut distinguer deux types d'entités sur lesquels peut porter la compréhension des élèves :
1. les énoncés,
2. les textes de démonstration.

Dans ce travail, nous ne nous limitons qu'au premier type ; le second pourra faire l'objet d'une prochaine investigation.

Les objectifs opérationnels que nous aurons mis en exergue pourront servir de boussole aussi bien aux enseignants dans leur pratique quotidienne qu'aux concepteurs de tests diagnostiques en la matière.

La méthodologie utilisée est essentiellement bibliographique.

Après avoir cerné le concept auquel s'applique le terme "énoncé" ; nous avons décelé des facettes de la compréhension dans un environnement de Didactique de géométrie.

A) Qu'appelons-nous "énoncé" ?

Dans ce texte, nous employons le mot "énoncé" pour désigner toute assertion qui assume une des fonctions suivantes :
1. circonscrire (ou définir) un concept (ou un "objet"),
2. présenter (ou décrire) une propriété d'un "objet",
3. exhiber une relation entre différents objets.

En fait, dans les manuels scolaires de référence, les énoncés sont les définitions et les théorèmes.

Voici des exemples d'énoncés dans ce tableau-ci :

N°	Concept	Enoncé	
		Définition	Théorème
1	Equipollence des bipoints	$(A, B) \uparrow (C, D)$ si et seulement si (A, B) et (C, D) déterminent la même translation.	L'équipollence $\uparrow$ est une relation d'équivalence.
2	Dilatation	f étant une transformation du plan, elle est dite une dilatation si et seulement si 1. f est une bijection et 2. Quels que soient deux points distincts M et N avec $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$, la droite MN est parallèle à la droite $M'N'$.	Si une dilatation du plan π admet deux points fixes, alors il s'agit de Id_π, l'identité dans le plan π.

Tableau I : Exemples d'énoncés

B. Facettes de la compréhension

Les composantes de la compréhension des énoncés en environnement - géométrie, nous les avons déterminées à la lumière d'une variante de la taxonomie de Bloom. Ce dernier articule la compréhension sur trois axes :

1. la traduction,
2. l'interprétation,
3. l'extrapolation.

Par ci par là, la taxonomie de Bloom a été sujette à des accommodations. Pour notre part, nous souscrivons à la perspective de Vande Velde et Vander Elst qui ont retenu pour la compréhension les mêmes aspects en leur assignant des significations particulières bien précises. Le tableau ci-après expose l'appréhension par nos deux auteurs de chacune des composantes de la compréhension en termes d'opérations intellectuelles.

Aspect de la compréhension		Opérations intellectuelles caractéristiques
Traduction (T)	T1	Exprimer en d'autres termes une information ou un message donné.
	T2	Transposer d'un moyen de communication en un autre (verbal en gestuel, numérique en graphique).
	T3	Identifier une similitude d'essence entre des messages exprimés par des moyens de communications différents et dont les codes sont éventuellement donnés.
	T4	Identifier une correspondance entre un langage courant et un mode d'expression particulier.
Interprétation (I)	I1	Concevoir une communication donnée d'une manière différente de sa structure initiale.
	I2	Reconnaître une similitude d'essences en des messages exprimés selon des organisations différentes mais au sein d'un même moyen de communication.
Extrapolation (E)	E1	Elaborer des prolongements au delà des données et faits communiqués dans le message.
	E2	Tirer les conséquences à partir d'observations, de tendances fournies dans un message.

Tableau II : Appréhension de la compréhension selon Vande Velde et Vander Elst

Dans le cadre précis de l'enseignement de la géométrie (en 3ème année secondaire), on peut déterminer la spécificité de chaque volet.

B.1. Spécificité de la traduction en didactique de géométrie

Les expressions "en d'autres termes" "moyen de communication" "mode d'expression particulier" utilisées par nos deux auteurs reflètent un dénominateur commun : les systèmes de langage. Dans les manuels scolaires de référence, on rencontre différents systèmes de langages dont voici les plus remarquables.

1°) **Le langage ordinaire**

C'est le langage couramment utilisé ; il correspond à la langue vernaculaire. Comme exemple, mentionnons : “Par deux points distincts A et B, il ne passe qu'une et une seule droite”.

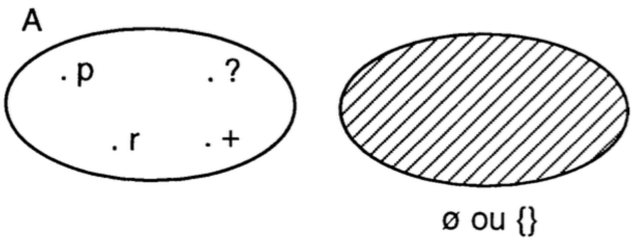
2°) **Le langage symbolique**

Il est constitué des signes conventionnels utilisés dans la théorie des ensembles et la logique qui se trouvent être le fondement de l'Algèbre appelée justemement par Walusinski, “Esperanto de la raison”, c'est-à-dire le langage de la raison (Walusinski, 1970).

Un exemple : “$\forall A, B \in \pi,\ A \neq B,\ \exists\,!\ d \in \mathcal{D} : A \in d \wedge B \in d$.

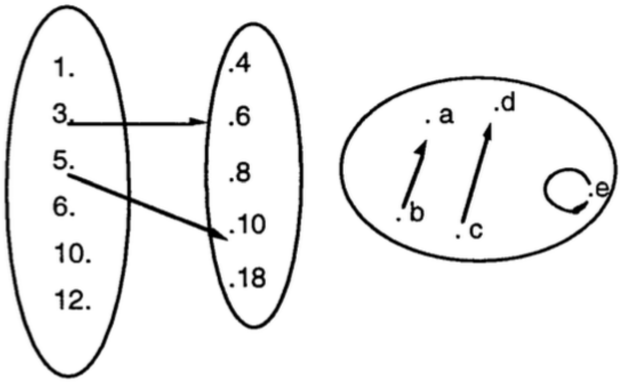
3°) **Le langage de diagrammes**

Dans la théorie ensembliste, il sert à représenter des ensembles ou leurs parties par des configurations appelées communément diagrammes de Venn. En voici deux illustrations :



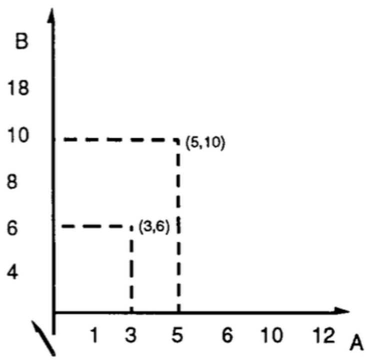
4°) **Le langage des schémas sagittaux**

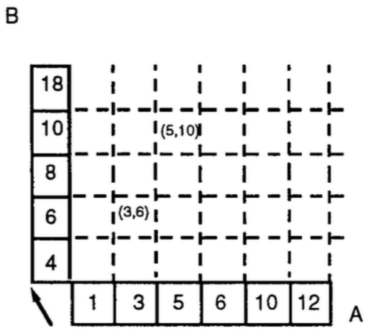
Dans ce mode utilisé spécialement pour décrire les relations, pour une quelconque de ces dernières, une flèche (sagitta en latin) indique que tel élément correspond à tel autre. Ces deux représentations en sont des exemples :



5°) **Le langage graphique**

Sur base des considérations théoriques portant sur la géométrie plane, les (graphes des) relations binaires peuvent être représentés par des “entités” du plan alors ramené à deux axes (habituellement perpendiculaires). Lorsque les entités représentatives sont des points, on parle de *graphique cartésien* ou *graphique ponctuel*; au cas où il s’agit des cases, on parle de *graphique matriciel* ou *graphique cellulaire*. Illustrons :



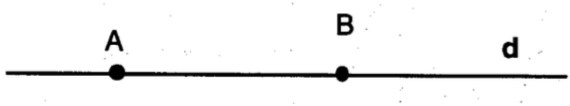


Graphique cartésien
(Graphique ponctuel)

Graphique matriciel
(Graphique cellulaire)

6°) **Le langage des figures géométriques**

Il sert à construire, dans l'espace, les objets en conformité avec leur nature conceptuelle. Voici un exemple :



7°) **Des langages hybrides**

Dont chacun est à cheval sur au moins deux quelconques des langages précités.

Nous n'avons pas fait allusion au langage des tableaux et à celui des arbres puisqu'ils ne reviennent pas souvent en géométrie, 3ème année secondaire.

Pratiquement, dans le contexte de l'enseignement de la géométrie en 3ème année secondaire, la traduction se présente le plus souvent comme passage d'un système de langage à un autre.

Il nous serait fastidieux de considérer entièrement des cas couvrant toutes les possibilités en ce qui est du passage d'un quelconque système à chacun des autres et du passage inverse. Nous nous limiterons à ces quelques illustrations qui suivent.

Pour chacune d'elles, nous proposons un énoncé accompagné d'une question, sollicitant au sein de la compréhension tel aspect de la traduction entendu comme passage d'un tel système de langage à tel autre.

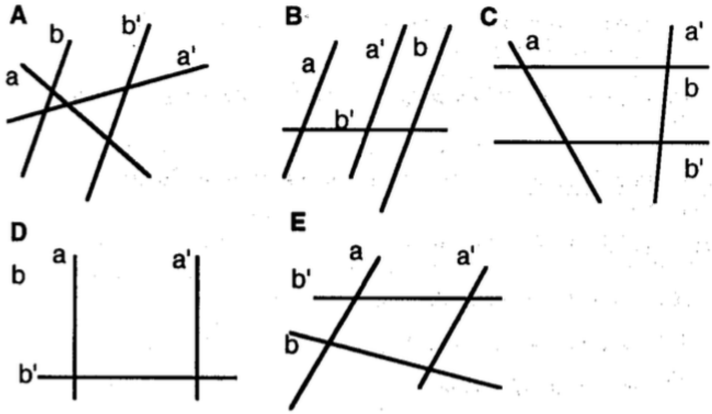
1ère illustration

Enoncé : Deux droites respectivement parallèles à deux droites sécantes sont sécantes.

Opération intellectuelle : Traduire du langage ordinaire à celui des figures géométriques.

Question (ITEM) :

- 1ère variante : question ouverte
  Illustrez l'énoncé par une figure géométrique.
- 2ème variante : choix multiple
  Avec les figures ci-dessous, encerclez la lettre qui correspond à l'unique qui traduit correctement l'énoncé.



2ème illustration

Enoncé : d est une droite et δ une direction distincte de celle de d. La projection sur d parallèlement à δ est la transformation du plan qui à tout point M fait correspondre le point M' commun à d et à la droite d' de direction δ passant par M.

Opération intellectuelle : Traduire du langage ordinaire à celui des figures géométriques.

Question (ITEM) : Construire l'image M' de M par la projection p sur d parallèlement à δ.

3ème illustration

Enoncé : On classe les dilatations en 3 catégories d'après le nombre des points fixes :

1. celles qui n'admettent pas de point fixe,
2. celles qui admettent un seul point fixe,
3. celle qui admet au moins deux points fixes, c'est-à-dire l'identité.

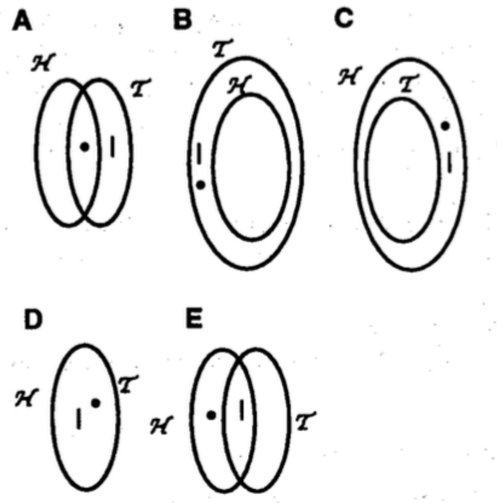
- On appelle *homothétie* toute dilatation qui admet au moins un point fixe.
- On appelle *homothétie à centre* toute dilatation qui admet un seul point fixe.

– On appelle *translation* toute dilatation qui est l'application identique ou qui n'a pas de point fixe.
– On appelle *translation propre* toute dilatation qui n'a pas de point fixe.

Opération intellectuelle : Traduire du langage ordinaire à celui des diagrammes.

Question (ITEM) : On désigne par
– $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties,
– $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations,
– I l'application identique.

Encerclez la lettre correspondant à l'unique représentation correcte de ces ensembles.



B.2. Spécificité de l'interprétation en didactique de géométrie

Dans la mesure où une structure détermine une organisation, chez Vande Velde et Vander Elst les deux traits caractéristiques de l'interprétation se complètent parfaitement.

Une structure organique, en tant que modèle est en fait un moule où viennent se couler un certain nombre de réalités. Dès lors, dans le cadre de la didactique de géométrie, deux composantes précises de l'interprétation d'un énoncé reviendront à :

1. l'illustrer au moyen d'exemples et de contre-exemples,
2. reconnaître l'exactitude ou l'inexactitude d'une déclaration y afférente.

En outre, un système de langage comme structure organique est régi par des lois qui permettent la possibilité d'y présenter la même information sous plusieurs formats ; d'où automatiquement cette 3ème composante de l'interprétation d'un énoncé :

3. le reformuler en d'autres termes dans un même système de langage.

Illustrons chacun de ces traits en adoptant la même disposition que précédemment.

1ère illustration

Enoncé : Si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre.

Opération intellectuelle : Reformuler en d'autres termes dans un même système de langage.

Question (ITEM) : Encercler la lettre correspondante à l'unique déclaration correcte parmi les suivantes :

A. Deux droites parallèles sont aussi sécantes.
B. Si deux droites sont confondues, alors elles sont aussi sécantes.
C. Si deux droites sont disjointes, elles sont aussi sécantes.
D. Si deux droites sont disjointes ou confondues, toute sécante à l'une est sécante à l'autre.
E. Si deux droites ne sont pas sécantes, toute sécante à l'une n'est pas sécante à l'autre.

2ème illustration

Enoncé : Un vecteur non nul $\vec{u}$ représenté par un bipoint (A, B) admet par définition comme direction celle de la droite AB. Soit δ une direction du plan π.

On appelle droite vectorielle de direction δ donnée l'ensemble D de vecteurs $\vec{u}$ ayant pour direction δ.

Opération intellectuelle : Reconnaître l'exactitude ou l'inexactitude d'une déclaration portant sur l'énoncé.

Question (ITEM) : Encerclez la lettre correspondant à l'unique déclaration inexacte parmi les suivantes :

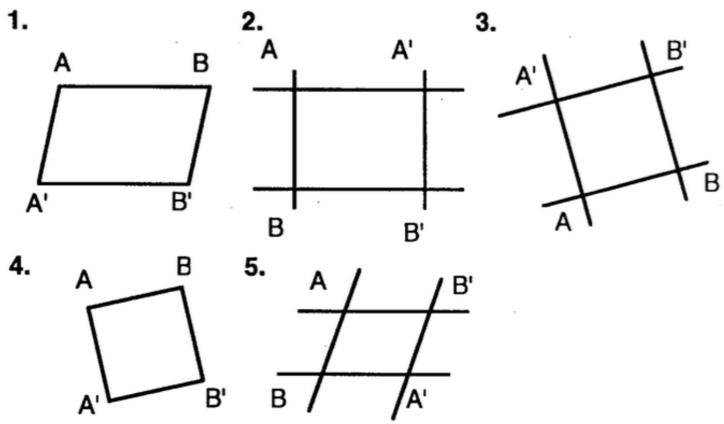
A. La droite vectorielle $\mathcal{D}$ est une partie de l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan.
B. $\vec{u}$ étant un vecteur non nul représenté par (A, B) et de direction δ, tout élément de δ est parallèle à la droite AB.
C. La droite vectorielle $\mathcal{D}$ est une partie du plan π.
D. La droite AB est une partie du plan π.
E. $\vec{u}$ étant un vecteur non nul représenté par (A, B), tous les autres bipoints pouvant représenter $\vec{u}$ déterminent des droites parallèles à AB.

3ème illustration

Enoncé : Le bipoint (A, A') est équipollent au bipoint (B, B') si et seulement si (A, A') et (B, B') déterminent la même translation.

Opération intellectuelle : Illustrer par des exemples et des contre-exemples.

Question (ITEM) : Encerclez le chiffre correspondant à l'unique figure où le bipoint (A, A') n'est pas équipollent au bipoint (B, B').



B.3. Spécificité de l'extrapolation en didactique de géométrie

Van Develde et Vander Elst appréhendent l'extrapolation en termes de "prolongements" et "conséquences". Dans l'environnement de l'enseignement de la géométrie, cette optique rejoint les capacités suivantes.

1. tirer d'un énoncé des conclusions, des corollaires et des implications,
2. extraire d'un énoncé donné *une technique procédurale*,
3. formuler la négation de la condition nécessaire et suffisante sur laquelle s'érige une définition ou une propriété.

Les points 2) et 3) s'avèrent des cas particuliers de 1) et méritent un examen détaillé.

Effectivement, d'une part, certains énoncés jouissent de cette particularité intéressante d'être suggestifs dans ce sens qu'ils indiquent implicitement un mode de procédure utilisable dans un contexte de démonstration.

A titre exemplatif, envisageons le théorème :

"Si une dilatation admet deux traces sécantes en A, alors il s'agit d'une homothétie de centre A."

Une des implications immédiates de l'énoncé consiste en cette manière de conduire le raisonnement :

"Pour montrer qu'une dilatation est une homothétie de centre A, on peut (entre autres possibilités) établir qu'elle admet deux traces sécantes en A."

D'autre part, la saisie exacte d'un concept recèle en quelque sorte une essence de catégorisation ; la spécification précise des "objets" non concernés dans la classe définie serait la bienvenue pour une complétude exhaustive.

En guise d'illustration, considérons l'énoncé :

"O est milieu du bipoint (A, B) si et seulement si pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MO}$."

Automatiquement,

"O n'est pas milieu du bipoint (A, B) si et seulement si on peut trouver un point M dans le plan tel que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \neq 2\,\overrightarrow{MO}\ .$$

Les élèves accèdent-ils immédiatement à de tels prolongements et conséquences ? On peut confectionner, en guide de test, des questions du genre des trois suivantes qui sont conformes aux normes de présentation arrêtées précédemment.

1ère illustration

Enoncé : Si trois droites deux à deux strictement parallèles coupent respectivement une première droite en A, B, C et une seconde droite en A', B', C', alors

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}.$$

Opération intellectuelle : Tirer des conséquences, et des corollaires des implications.

Question (ITEM) : Trois droites deux à deux strictement parallèles coupent respectivement une première droite en A, B, C et une seconde en A', B', C'. Encerclez le numéro correspondant à l'unique proposition fausse parmi les suivantes :

1. $\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
2. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$
3. $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AB}}$
4. $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$
5. $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

2ème illustration

Enoncé : Le point O est milieu du bipoint (A, B) si et seulement si quel que soit un point M du plan,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MO}\,.$$

Opération intellectuelle : Formuler la négation de la condition nécessaire et suffisante.

Question (ITEM) : (A, B) et O sont respectivement un bipoint et un point du plan. O n'est pas milieu de (A, B) si et seulement si

1. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = -2\,\overrightarrow{MO}$.
2. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MO}$.
3. Il existe au moins un point M du plan tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \neq 2\,\overrightarrow{MO}$.
4. Pour tout point M du plan, $-\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = -2\,\overrightarrow{MO}$.
5. Il existe au moins un point M tel que $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MO}$.

Encerclez le chiffre correspondant à l'unique réponse correcte.

3ème illustration

Enoncé : Si f est une dilatation qui admet deux traces strictement parallèles, alors f est une translation propre.

Opération intellectuelle : Extraire de l'énoncé un procédé de démonstration.

Question (ITEM) : Pour montrer qu'une dilatation f est une translation propre, il suffit d'établir (entre autres possibilités) que

1. f est une bijection.
2. f est l'identité.
3. f admet deux traces sécantes.
4. f admet deux traces parallèles.
5. f admet deux traces strictement parallèles.

Encerclez le chiffre correspondant à l'unique réponse correcte.

Autre variante de la question : Que peut-on notamment établir pour montrer qu'une dilatation f est une translation propre.

Réponse :

Conclusion

L'étude de la compréhension des énoncés du cours de géométrie en 3ème année secondaire peut bien se subordonner à la taxonomie de Bloom selon la perspective de Vander Elst. Synthétiquement en "environnement géométrie", chacune des composantes de la compréhension pourrait être saisie comme suit en termes d'opérations intellectuelles caractéristiques.

1. Traduction : Passage d'un système de langage à un autre.

2. Interprétation :
– Illustrer au moyen d'exemples et de contre-exemples.
– Reconnaître l'exactitude ou l'inexactitude d'une déclaration.
– Reformuler en d'autres termes dans un même système de langage.

3. Extrapolation :
– Tirer d'un énoncé des conclusions, des corollaires et des implications.
– Extraire une technique procédurale.
– Formuler la négation d'une condition nécessaire et suffisante.

Une bonne compréhension des énoncés (définitions et théorèmes) est un préalable incontournable à une bonne compréhension des textes de démonstration.

Si la première peut être élucidée par la taxonomie de Bloom, en est-il de même pour la seconde ? La question de la compréhension est bien loin d'être épuisée ...

Bibliographie

1. BEX Roger, *Leçons de Mathématiques - Livre 2*, Editions J. DUCULOT S.A. Gembloux, 1970, 475 p.
2. BONBOIR Anna, *La méthode des tests en pédagogie*, P.U.F., Paris, 1972, 144 p.
3. C.R.E.M., *Mathématique 3 géométrie troisième*, E C A, Kinshasa, 1988, 192 p.
4. DE LANDSHEERE G. & DE LANDSHEERE V., *Définir les objectifs de l'éducation*, P. U. F., Paris, 1979, 307 p.
5. VANDE VELDE L. & VANDER ELST P., *Peut-on préciser les objectifs en éducation*, Fernand Nathan, Paris, 1981, 197 p.
6. WALUSINSKI Gilbert, *Pourquoi une mathématique moderne*, Armand Colin, Paris, 1971, 207 p.

Adresse de l'auteur :

J. M. KIBWANA Muhindo
Chef de Travaux
au Département de Mathématique
I.S.P.
Mbujimayi

Bibliographie

J. Bair,

- **Mathématique pour économistes et gestionnaires** par L. ESCH, De Boeck Université, 2ème édition, 1999, 811 pages,
  ISBN : 2-8041-3290-0
- **Mathématiques pour l'économie, volume 1, Fonctions d'une variable réelle** par F. BISMANS, De Boeck Université, 1999, 577 pages,
  ISBN : 2-8041-2635-8

La collection "Ouvertures Economiques", série "Prémisses" de la Maison d'Edition De Boeck Université vient de sortir deux nouveaux ouvrages de mathématiques à l'usage d'étudiants entamant des études d'économie ou de gestion dans un premier cycle de niveau universitaire.

Ces deux livres ont en commun plusieurs caractéristiques. Ils sont tous deux le résultat d'une assez longue expérience pédagogique : ils ont été rédigés par deux docteurs issus de l'Université de Liège qui enseignent, depuis quelques années déjà, les mathématiques à de futurs économistes et gestionnaires. Ils sont volumineux, puisque le premier comprend plus de 800 pages, tandis que le second en comporte près de 600, mais n'est que le premier tome d'un travail prévu en trois volumes. Ils sont principalement consacrés à l'analyse classique des fonctions d'une variable réelle. Leur point de vue est assez semblable ; en effet, les deux auteurs accordent une place importante aux raisonnements purement mathématiques, les principaux théorèmes étant présentés avec une démonstration détaillée et exposée de manière pédagogique ; la théorie est toutefois suivie de quelques applications classiques de nature économique.

Relevons à présent quelques différences entre ces deux ouvrages. Le premier est écrit par un docteur en sciences mathématiques qui met au singulier le mot mathématique et professe à la Haute Ecole HEC de Liège ; ce livre est d'ailleurs la deuxième édition corrigée et légèrement augmentée notamment des ajouts suivants : le développement d'éléments de géométrie plane nécessaires à la bonne compréhension du reste du texte, la présentation de méthodes itératives d'analyse numérique pour résoudre des équations, la présentation de fonctions de croissance, des chaînes de Markov ainsi que de compléments de mathématique financière (suite d'annuités variables et opérations de prêt). Le deuxième livre est écrit par un docteur en sciences économiques qui parle des mathématiques qu'il enseigne notamment à l'Université de Lille I ; assez paradoxalement peut-être, cet économiste donne un peu moins d'applications concrètes, et démontre un plus grand nombre de théorèmes que le mathématicien, ce dernier ne donnant généralement pas les preuves un peu plus "techniques".

Ces deux ouvrages, fort complets et bien présentés, intéresseront tous les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dont des élèves projettent d'entamer des études de niveau universitaire en économie ou en gestion. Ils seront également appréciés par ceux qui souhaitent avoir une présentation unifiée de l'analyse des fonctions d'une variable réelle ou de l'algèbre linéaire (pour le premier livre seulement). Ils s'avéreront encore utiles pour ceux qui recherchent des applications réelles, dans l'univers économique, des théories mathématiques classiquement enseignées dans le cycle supérieur des humanités.

- **Philosophies des mathématiques et de la modélisation : du chercheur à l'ingénieur** par N. BOULEAU, Editions L'Harmattan, Paris, 1999, 363 pages,
  ISBN : 2-7384-8125-6

Ce livre, fort bien documenté et bien agréable à lire, replace les mathématiques contemporaines dans l'histoire des idées et éclaircit leurs liens avec les activités économiques d'aujourd'hui.

On donnera une meilleure idée de la richesse de cet ouvrage en présentant un extrait de la table des matières.

C) Fabrication de réel par des idées simplifiantes

Troisième partie : Les mathématiques mixtes : représenter et communiquer dans les langages semi-artificiels.

A) La modélisation, exemples

B) Qu'est-ce qu'un modèle ? Un récit symbolique

C) Remarques sur la formation des ingénieurs

Ecoles d'ingénieurs et innovation pédagogique. Le piège de la boîte à outils mathématiques. Pratique de la modélisation.

Conclusion : Modernité et post-modernité des mathématiques

Index des noms cités

J. BAIR

Dans nos classes

A.-M. Soblet,

Pour une pédagogie qui s'adresse à tous nos élèves. Une manière (très simple) de redécouvrir le cercle.

André-Marie Soblet, Institut Cardijn-Lorraine, Aumôniers du Travail, Arlon

Introduction

Dans chacune de nos classes, nous rencontrons des élèves plus lents que leurs condisciples. Ils ne sont pas moins intelligents mais ils éprouvent plus de difficultés dans des matières comme la géométrie et la trigonométrie. Voir dans l'espace, découvrir des symétries, imaginer tous les patrons possibles d'un cube ... leur pose problème.

Et dans nos programmes, la géométrie retrouve ses lettres de noblesse.

Fort bien, mais il est nécessaire de s'intéresser à la méthodologie utilisée et de faire en sorte que nos cours s'adressent à toutes les têtes blondes qui nous sont confiées.

Les difficultés de la trigonométrie

Dans cet article, je vais tenter d'analyser les difficultés présentées par certains aspects de la trigonométrie et d'y apporter une ébauche de solution.

Dans le triangle rectangle, les nombres trigonométriques apparaissent comme des rapports et il faut une certaine abstraction pour bien en saisir le sens. L'idée de choisir des triangles dont l'hypoténuse a une longueur unitaire puis le passage au cercle trigonométrique rassure l'élève : il peut enfin visualiser les nombres trigonométriques. Apparaît ensuite une autre difficulté : le changement d'unités.

Depuis l'école primaire, on parle du degré qui doit subitement s'effacer au profit du radian. On parle d'angle au centre, on parle aussi d'arc. L'élève est dérouté. Il ne comprend pas toujours le pourquoi de ce changement.

Et puis viennent - souvent fort rapidement - les graphes cartésiens : la sinusoïde est tracée à partir du tableau des valeurs particulières, ou de la calculette ou de la calculette graphique avec zoom et rezoom, puis s'enchaînent les graphes des autres fonctions circulaires. Les logiciels fournissent de magnifiques graphiques.

Mais beaucoup d'élèves passent à côté du sens de ces graphes. Pour eux, il s'agit de graphes "comme les autres".

Je propose de faire redécouvrir le cercle à nos élèves, avec des moyens aussi simples que ceux utilisés par les géomètres de l'Antiquité.

Le coin du bricoleur

Voici le matériel que j'utilise : j'ai récupéré le joint d'un congélateur et j'en ai extrait la partie aimantée, j'ai donc un ruban magnétique souple de 80 cm de long environ, de 9 mm de large et de 2 mm d'épaisseur. D'autres matériaux conviennent, mais l'intérêt de celui-ci réside dans sa souplesse (un vrai yogi) et dans son aimantation. Le tableau vert (ou blanc) que j'utilise est à structure métallique, donc mon aimant tient sans mon aide, dans n'importe quelle position. Et je vais me servir de cet aimant pour mesurer la longueur des arcs.

Je dessine, au tableau, un cercle d'un rayon de 30 cm environ et un repère orthogonal.

Le radian ? Je pose le mesureur d'arcs sur le segment OA, puis je le déroule sur le cercle, à partir du point A (seule l'épaisseur pose sur le tableau) et je note 1 sur l'arc de cercle, je mesure l'angle au centre : 1 radian, bien sûr et un peu plus de 57° (le rapporteur l'atteste !). Comme j'ai repéré l'unité, j'en profite pour graduer les axes cartésiens, sans l'aide de la latte (ça, c'est pour le plaisir ...). Voici le repère orthonormé.

La sinusoïde ? Avec le mesureur d'arcs, je détermine la longueur d'un arc, quel qu'il soit, que je reporte sur l'axe des x du repère et l'image du réel x est déterminée à l'aide de la projection sur le cercle et je continue ainsi, $\pi/2, \pi$, facile ! et $\pi/3$, je le place où sur mon cercle ... on vérifie, on calcule, c'est juste au-dessus de 1 et tout s'enchaîne.

Et l'élève ? Il est attentif, il place des points au tableau, il réfléchit ... il se demande comment, à la maison, il tracera son graphique.

Le cours suivant, chacun revient avec sa sinusoïde, l'un a mesuré des arcs avec un gabarit flexible, l'autre a utilisé la roulette à découper la pâte, le troisième un fil de cuivre ...

Au contrôle, il dessinera la cosinusoïde ; les plus astucieux changeront par exemple le placement des axes tracés sur le cercle, les autres se débrouilleront...

Et plus tard, l'étude des fonctions cyclométriques se fera sans grande difficulté, en utilisant la même démarche.

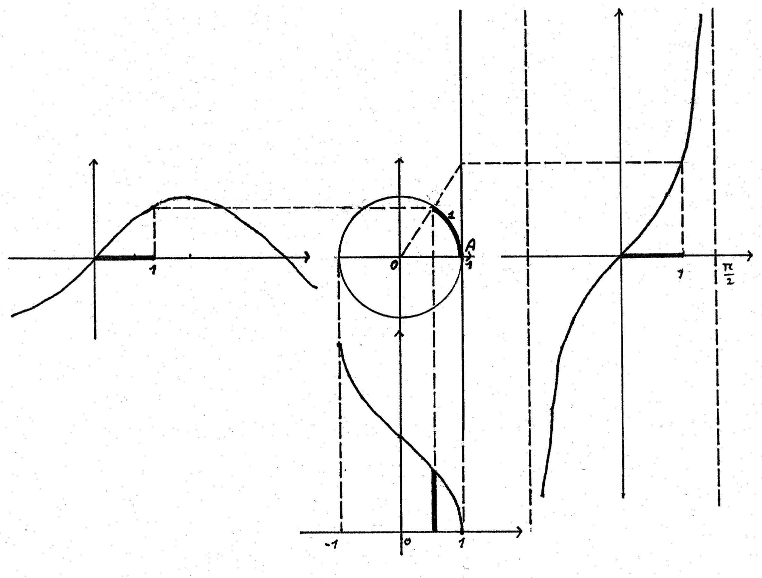
Bien sûr, les manipulations de graphes cartésiens, la parité, les symétries, la périodicité, les dérivées, toutes ces notions fondamentales, s'enrouleront telle un spirale d'Archimède, apportant, à chaque fois, un nouvel éclairage, et le cercle s'estompera ... tout naturellement.

Conclusions

1. L'élève qui visualise difficilement (ou un peu lent), a eu le temps de s'approprier les notions étudiées : il a compris, il a réfléchi, il a imaginé. Il a appris d'une manière globale, avec sa tête et ses mains, à la manière d'un artisan, sûr de son geste.

2. Ce qui me plaît dans cette expérience, réside dans le fait que sans rapporteur, sans calculette, sans calculer, sans latte graduée, les graphes des fonctions circulaires ou cyclométriques se tracent naturellement avec précision.

Voici, comme exemple, les graphiques des fonctions $\sin x, \operatorname{tg} x$ et $\operatorname{Arc}\cos x$, rassemblés pour la circonstance, par souci d'économie de place.



Adresse de l'auteur :

André-Marie Soblet
25, rue de la Grandville
6792 Halanzy

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

$\boxed{\text{Les trois cercles}}$ problème n° 218 de M. et P. n° 121.

Soient C_1, C_2 et C_3 trois cercles du plan ; soit P_1 le point de concours des tangentes communes extérieures à C_2 et C_3, P_2 le point de concours des tangentes communes extérieures à C_1 et C_2, et P_3 le point de concours des tangentes communes extérieures à C_1 et C_2.

Montrer que P_1, P_2 et P_3 sont alignés.

Une solution de ce problème a déjà été publiée dans le M. et P. n° 124. La solution qui suit m'a été envoyée un peu tardivement par P. DUPONT de Grez-Doiceau. Je la publie d'autant plus volontiers qu'elle est à rapprocher des solutions de N. BERCKMANS, A. PATERNOTTRE et C. VILLERS.

Solution

J'utilise le résultat suivant : *Etant donné deux cercles de rayons différents, il existe une et une seule homothétie de rapport positif appliquant le premier sur le second ; le centre de cette homothétie est le point d'intersection des tangentes communes extérieures.* On le justifie sans trop de peine en montrant, via la définition du cercle, que l'image par une homothétie h de rapport k du cercle C de centre O et de rayon r est le cercle de centre $h(O)$ et de rayon $|k|r$; en outre, les homothéties préservant la perpendicularité, la tangente à $h(C)$ en un point $h(P)$ est l'image par h de la tangente à C en P.

Donc, P_1 est le centre de l'unique homothétie h_1 de rapport positif telle que $h_1(C_2) = C_3$; P_2 est le centre de l'unique homothétie h_2 de rapport positif telle que $h_2(C_1) = C_3$; et P_3 est le centre de l'unique homothétie h_3 de rapport positif telle que $h_3(C_1) = C_2$. Comme $h_2 = h_1 \circ h_3$, leurs centres sont alignés.

Cette méthode permet de prouver dans la foulée des résultats voisins concernant les points d'intersection des tangentes communes intérieures.

Etant donné deux cercles, il existe une et une seule homothétie de rapport négatif appliquant le premier sur le second ; si les deux cercles possèdent *deux tangentes communes intérieures, leur point d'intersection est le centre de cette homothétie.*

Supposons donc que C_1 et C_2 aient deux tangentes communes intérieures, sécantes en P'_3 ; ce point est le centre de l'unique homothétie h'_3 de rapport négatif telle que $h'_3(C_1) = C_2$, et de même pour les autres paires de cercles. Alors, $h_2 = h'_1 \circ h'_3$, et leurs centres P'_1, P_2 et P'_3 sont alignés ; etc.

$\boxed{\text{Jeu de lettres}}$ problème n° 223 de M. et P. n° 123.

Soit f une fonction de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_0^+$ telle que, pour tous $a, b, c \in \mathbb{Q}_0$,

$$\begin{aligned} f(ab, c) &= f(a, c).f(b, c) & (1)\\ f(c, ab) &= f(c, a).f(c, b) & (2)\\ f(a, 1-a) &= 1 & (3) \end{aligned}$$

Démontrer que
1) pour tout $a \in \mathbb{Q}_0$, $f(a, a) = f(a, -a) = 1$;
2) pour tous $a, b \in \mathbb{Q}_0$, $f(a, b).f(b, a) = 1$.

Solution de P. BORNSZTEIN de Courdimanche (France)

Soit $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ satisfaisant (1), (2), (3).

1)

* Pour $a = b = 1$, $c \in \mathbb{Q}_0$,
(1) donne $f(1, c) = f^2(1, c)$ avec $f(1, c) \in \mathbb{R}_0^+$; d'où

$$f(1, c) = 1 \qquad (4)$$

de même

$$f(c, 1) = 1. \qquad (5)$$

* Pour $a = b = -1$, $c \in \mathbb{Q}_0$,
d'après (1) et (1), on a $1 = f(1, c) = f^2(-1, c)$ avec $f(-1, c) > 0$; d'où

$$f(-1, c) = 1 \qquad (6)$$

de même

$$f(c, -1) = 1. \qquad (7)$$

* Pour $a = -1,\ b, c \in \mathbb{Q}_0$,
(1) et (2) donnent $f(-b, c) = f(-1, c).f(b, c)$; d'où

$$f(-b, c) = f(b, c) \tag{8}$$

de même

$$f(b, -c) = f(b, c). \tag{9}$$

* Pour $b = \frac{1}{a},\ c \in \mathbb{Q}_0$
d'après (1), $f(1, c) = 1 = f\left(\frac{a}{a}, c\right) = f(a, c).f\left(\frac{1}{a}, c\right)$; donc

$$f\left(\frac{1}{a}, c\right) = \frac{1}{f(a, c)}. \tag{10}$$

* Pour tout $a \in \mathbb{Q}_0$,

$$\begin{aligned} f(a, 1-a) &= 1 && \text{cf (3)} \\ &= f(a, a).f\left(a, \tfrac{1-a}{a}\right) && \text{cf (2);} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f(a, a) &= \frac{1}{f\left(a, \frac{1-a}{a}\right)} \\ &= f\left(\frac{1}{a}, \frac{1-a}{a}\right) && \text{d'après (10)} \\ &= f\left(\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a}\right) && \text{d'après (3)} \\ &= f\left(\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right) \\ &= 1 && \text{d'après (3)} \end{aligned}$$

2) Soient a, b dans $\mathbb{Q}_0$.

D'après 1), on a $f(ab, ab) = 1 = f(a, a) = f(b, b)$. Or, $f(ab, ab) = f(a, b).f(b, a) = f(a, a) = f(b, b)$ d'après (1) et (2). Donc $f(a, b).f(b, a) = 1$.

Bonne solution de C. VAN HOOSTE de Marbaix-la-Tour.

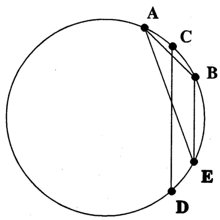
$\boxed{\text{Jeu de cordes}}$ problème n° 224 de M. et P. n° 123.

Dans un cercle de rayon 5*, on trace deux cordes sécantes* $[AB]$ *et* $[CD]$*,* C *étant situé sur le plus petit arc* AB*. La corde* $[AB]$ *est coupée en deux parties égales par* CD *et* $|CD| = 6$*. De plus, on suppose que* $[AB]$ *est l'unique corde partant de* A *qui est coupée en deux parties égales par* CD*.*

Démontrer que le sinus de l'angle au centre interceptant le plus petit arc AC *est un nombre rationnel et déterminer ce nombre.*

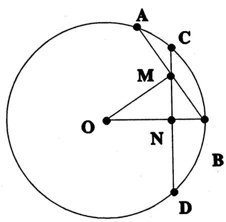
Solution de C. VAN HOOSTE de Marbaix-la-Tour

1) Le point B est nécessairement le milieu du plus petit arc CD.
En effet, supposons que B ne soit pas le milieu de l'arc CD. Alors, la parallèle à la corde $[CD]$ menée par B recoupe le cercle en un point E. Par le "théorème des milieux" appliqué dans le triangle ABE, il s'ensuit que CD divise non seulement la corde $[AB]$ en deux parties égales mais également la corde $[AE]$. Ceci contredit l'hypothèse certifiant que $[AB]$ est l'unique corde divisée en deux parties égales par CD.



2) Calculons maintenant le sinus de l'angle au centre interceptant le plus petit arc AC.

Soit O le centre du cercle, M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[CD]$.
Par des propriétés classiques, nous savons que ON est perpendiculaire à CD et comprend le milieu B de l'arc sous-tendu par la corde $[CD]$. De même, OM est perpendiculaire à AB.



Posons $\alpha = \measuredangle\, NOC$ et $\beta = \measuredangle\, MOB$.

Dans le triangle NOC, rectangle en N, nous avons

$$\sin\alpha = \frac{|NC|}{|OC|} = \frac{3}{5}$$

et, par le théorème de Pythagore, $|ON| = 4$.

Dans le triangle MOB, rectangle en M, $[MN]$ est la hauteur relative à l'hypoténuse ; dès lors, nous avons

$$|MB|^2 = |BO|.|BN| = 5.1 = 5;$$

d'où $|MB| = \sqrt{5}$. De là, nous déduisons que

$$\sin\beta = \frac{|MB|}{|OB|} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

L'angle au centre qui intercepte le plus petit arc AC est

$$\measuredangle\, AOC = \measuredangle\, AOB - \measuredangle\, COB = 2\measuredangle\, MOB - \measuredangle\, NOC = 2\beta - \alpha.$$

Remarquons que α et β sont des angles aigus de triangles rectangles. Par conséquent, leurs sinus et cosinus sont positifs. Cela étant, nous avons

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{4}{5},\\
\cos\beta &= \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{2\sqrt{5}}{5},\\
\sin 2\beta &= 2\sin\beta\cos\beta = \frac{4}{5},\\
\cos 2\beta &= 2\cos^2\beta - 1 = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\sin(\measuredangle\, AOC) &= \sin(2\beta-\alpha)\\
&= \sin 2\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos 2\beta = \frac{7}{25}.
\end{aligned}$$

N. BERCKMANS de Waterloo et J. FINOULST de Dienpenbeek ont aussi envoyé des solutions correctes.

$\boxed{\text{Jeu de jetons}}$ problème n° 225 de M. et P. n° 123.

Une collection de n^2 jetons comprend n jetons marqués 1, n jetons marqués 2, ..., n jetons marqués n.

Est-il possible de disposer ces jetons sur une droite de manière qu'entre un jeton marqué x et le jeton le plus proche marqué x, il y ait exactement x jetons et ce pour tout $x \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$?

Solution de M. COYETTE de Rixensart

Il y a au moins n jetons entre deux jetons marqués n. Si on pose les jetons marqués n en disposant exactement n jetons entre eux, on a posé $n + (n-1).n$ jetons. C'est-à-dire que les n^2 jetons sont posés. Il n'y a donc pas d'autre manière de disposer les jetons marqués n : il faut débuter par un jeton marqué n, il faut terminer par un jeton marqué n et il faut poser exactement n jetons entre deux jetons marqués n :

$$n \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{n \text{ jetons}} n \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{n \text{ jetons}} n \quad \cdots \qquad \cdots \quad n \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{n \text{ jetons}} n$$

Les jetons marqués n définissent $n-1$ intervalles de n jetons.
Si la règle exigée est respectée, deux jetons marqués $n-1$ ne peuvent pas se trouver dans un même intervalle. Comme il y a n jetons marqués $n-1$ et $n-1$ intervalles, il est impossible de placer les jetons marqués $n-1$ tout en respectant la règle exigée.
Il est donc impossible de disposer ces jetons sur une droite de manière qu'entre un jeton marqué x et le jeton le plus proche marqué x, il y ait exactement x jetons et ce pour tout $x \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Solutions analogues de P. BORNSZTEIN de Courdimanche et de C. VAN HOOSTE de Marbaix-la-Tour.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir avant le 1er septembre 2000.

$\boxed{\text{232. Carré parfait}}$

Déterminer tous les nombres premiers p tels que la somme des diviseurs entiers positifs de p^4 soit un carré parfait.

233. Cercle et couronne

C est un cercle de 16 cm de rayon à l'intérieur duquel se trouvent 650 points distincts. A est une couronne circulaire dont les rayons intérieur et extérieur sont 2 cm et 3 cm respectivement.

Démontrer qu'il existe une position de A telle que A recouvre au moins 10 des 650 points.

234. Progression

Déterminer les entiers positifs distincts a, b, c tels que

$$a + b + c, \quad ab + bc + ca, \quad abc$$

soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.

Olympiades

C. Festraets,

Voici les solutions des trois premiers problèmes de l'Olympiade Mathématique Internationale 1999. Ces solutions m'ont été envoyées par P. BORNSZTEIN de Courdimanche (France).

Problème 1

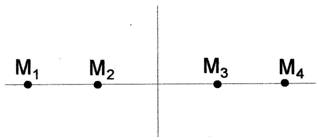
Dans le plan, déterminer tous les ensembles finis S, constitués d'au moins trois points, qui vérifient la propriété suivante :

Pour tout couple de points distincts A et B de S, la médiatrice du segment AB est un axe de symétrie de S.

Soit S un tel ensemble.

Proposition 1 : Trois points de S, deux à deux distincts, ne sont jamais alignés.

Preuve par l'absurde : Si M_1, M_2, M_3 sont dans S, deux à deux distincts et alignés dans cet ordre, alors puisque la médiatrice de $[M_2M_3]$ est un axe de symétrie de S, le point M_4 symétrique de M_1 appartient aussi à S.



On a bien sûr M_4 distinct de M_1, M_2, M_3 et M_1, M_2, M_3, M_4 alignés dans cet ordre.

En considérant la médiatrice de $[M_3M_4]$, le même raisonnement assure l'existence d'un point M_5 symétrique de M_2 et ainsi de suite ... Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins n points de S deux à deux distincts sur la droite M_1M_2. Donc S est infini, ce qui est une contradiction avec l'énoncé.

Soit $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe de S (plus exactement sa frontière). Comme S est fini, $\mathcal{C}$ est un polygone convexe dont tous les sommets sont dans S.

D'après la proposition 1 (et car card $S \geqslant 3$), $\mathcal{C}$ est "au moins" un triangle et tout point de $S \cap \mathcal{C}$ est un sommet de $\mathcal{C}$ (sinon on aurait trois points de S alignés).

De plus, puisque S est symétrique par rapport à toute médiatrice de $[AB]$ où A, B sont dans S, il en est de même de $\mathcal{C}$.

Proposition 2 : Tout point de S est un sommet de $\mathcal{C}$.

Preuve : Soit $M \in S$. Soit A un sommet de $\mathcal{C}$. Alors $A \in S$.

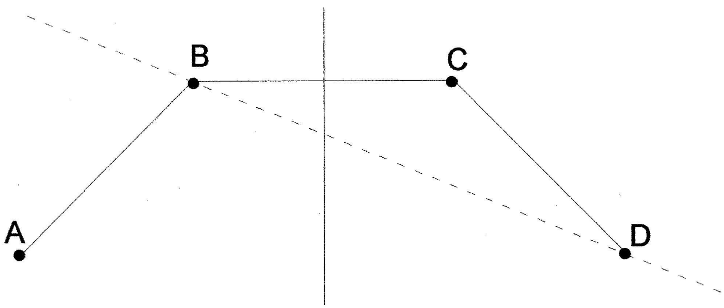
Si $A = M$, c'est fini.

Si $A \neq M$, la médiatrice de $[AM]$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$ donc M, symétrique de A par rapport à cette droite, appartient à $\mathcal{C}$. D'après ce qui précède, ce ne peut être qu'un sommet de $\mathcal{C}$.

Proposition 3 : S est formé des sommets d'un polygone régulier convexe.

Preuve : D'après la proposition 2, on a donc $S =$ ensemble des sommets de $\mathcal{C}$. Il reste à prouver que $\mathcal{C}$ est un polygone régulier.

Soient A, B, C, D quatre sommets consécutifs de $\mathcal{C}$ (éventuellement $D = A$ si card $S = 3$).



Puisque $\mathcal{C}$ est convexe, il n'y a pas d'autre point de S que C qui soit situé dans le demi-plan ouvert de frontière BD. Or le symétrique de C par rapport à la médiatrice de $[BD]$ est à la fois dans S et dans ce demi-plan.

Donc C appartient à la médiatrice de $[BD]$. Il s'ensuit que $|BC| = |CD|$. De plus, la médiatrice de $[BC]$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}$. Puisque A, B, C, D sont consécutifs, A et D sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[BC]$. On en déduit que

$$\widehat{ABC} = \widehat{BCD}.$$

Puisque A, B, C, D sont arbitraires,

$$\begin{cases} \text{deux arêtes consécutives sont toujours de même longueur,} \\ \text{deux angles intérieurs consécutifs sont toujours égaux.} \end{cases}$$

C'est-à-dire que $\mathcal{C}$ est un polygone dont tous les côtés ont même longueur et tous les angles intérieurs sont égaux. C'est donc un polygone régulier convexe.

Réciproquement, il est clair que si S est formé des sommets d'un polygone régulier convexe, alors S satisfait les conditions de l'énoncé.

Conclusion : S convient si et seulement si S est formé des sommets d'un polygone régulier convexe.

Problème 2

Soit n un entier fixé, supérieur ou égal à 2.

(a) Déterminer la plus petite constante C telle que, pour tout ensemble $x_1, \ldots, x_n$ de réels positifs ou nuls on ait l'inégalité

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \right)^4. \qquad (1)$$

(b) Pour cette constante C, déterminer les cas d'égalité.

Si tous les x_i sont nuls, il y a clairement égalité. On impose donc que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \neq 0.$$

L'inégalité (1) étant homogène d'ordre 4, on peut supposer

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Elle s'écrit alors
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - x_i^4 \leqslant C. \tag{2}$$

Lemme 1 : Soient $p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 3$. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dans $]0;1]$ tels que
$$\sum_{i=1}^{p} x_i \leqslant 1.$$
Alors il existe $i \neq j$ tels que
$$x_i + x_j < \frac{3}{4}.$$

Preuve : Par symétrie, on peut imposer $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_p$.
Par l'absurde, supposons $x_1 + x_2 \geqslant \frac{3}{4}$. Alors
$$\begin{aligned} x_3 &\leqslant 1 - (x_1 + x_2 + x_4 + \cdots + x_p) \\ &\leqslant 1 - (x_1 + x_2) \\ &\leqslant \frac{1}{4}. \end{aligned}$$
D'où $x_2 \leqslant x_3 \leqslant \frac{1}{4}$. Puis alors, $x_1 + x_2 \leqslant x_2 + x_3 \leqslant \frac{1}{2}$: contradiction.

Lemme 2 : Soient a, b dans $]0;1]$ tels que
$$a + b < \frac{3}{4}.$$
Alors,
$$a^3 - a^4 + b^3 - b^4 < (a+b)^3 - (a+b)^4.$$

Preuve : Soient a, b dans $]0;1]$ avec $a + b < \frac{3}{4}$.

On a
$$\begin{aligned} a^3 - a^4 + b^3 - b^4 - (a+b)^3 + (a+b)^4 &= ab(4a^2 + 4b^2 + 6ab - 3a - 3b) \\ &= ab(4(a+b)^2 - 3(a+b) - 2ab) \\ &= ab((a+b)(4(a+b) - 3) - 2ab) \\ &< 0 \end{aligned}$$
puisque $ab > 0$ et $a + b \in]0; \frac{3}{4}]$.

Soit $E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i,\ 0 \leqslant x_i \text{ et } \sum_{i=1}^n\ x_i = 1\}$. E est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, c'est donc un compact. La fonction

$$f : X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(X) = \sum_{i=1}^{n}\ x_i^3 - x_i^4$$

est clairement continue sur $\mathbb{R}^n$ et donc sur E. Donc f admet un maximum sur E qui est le réel C cherché.

Supposons que ce maximum soit atteint en $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que au moins trois des "coordonnées" de X soient non nulles (ce qui suppose $n \geqslant 3$).

Par symétrie des rôles, on peut supposer $x_1x_2x_3 \neq 0$ et $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$. Alors, comme $X \in E$, on peut utiliser le lemme 1 et on a

$$x_1 + x_2 \leqslant \frac{3}{4}.$$

Soit $X' = (0, x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

On a $X' \in E$ et d'après le lemme 2, il vient

$$f(X) < f(X')$$

ce qui contredit

$$f(X) = \mathrm{Max}_E\ f.$$

Par suite, f atteint son maximum sur E en un point $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui n'a pas plus de deux coordonnées non nulles.

On est ainsi ramené à chercher le maximum de

$$\begin{aligned} f(a,b) &= a^3 - a^4 + b^3 - b^4 \quad \text{pour } a, b \in]0;1] \text{ et } a + b = 1 \\ &= ab(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \frac{1}{2}\left((a+b)^2 + (a-b)^2\right) = \frac{1}{2}\,(1 + (a-b)^2) \\ ab &= \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right) = \frac{1}{4}\,(1 - (a-b)^2). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \frac{1}{8}\left(1-(a-b)^4\right) \\ &\leqslant \frac{1}{8} \quad \text{avec égalité si et seulement si } a=b \ (=\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

Finalement, $C = \frac{1}{8}$ et l'égalité a lieu si et seulement s'il existe $i \neq j$ tels que

$$x_i = \frac{1}{2} = x_j \quad \text{et} \quad x_k = 0 \ \text{ pour } k \notin \{i,j\}.$$

Compte-tenu de l'homogénéité, cela correspond à

- il existe $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$ tels que

$$x_i = x_j \neq 0 \quad \text{et} \quad x_k = 0 \ \text{ pour } k \notin \{i,j\}.$$

- tous les x_i sont nuls.

Problème 3

On considère un tableau carré de côté n, où n est un entier pair, strictement positif, fixé. Le tableau est divisé en n^2 carrés-unité. On dit que deux carrés distincts du tableau sont adjacents si et seulement s'ils ont un côté en commun.

On marque N carrés-unité de ce tableau de telle sorte que chaque carré unité de ce tableau (marqué ou non marqué) soit adjacent à au moins un carré marqué.

Déterminer la plus petite valeur possible de N.

On colorie alternativement les carrés-unité en blanc et noir de façon à former un échiquier $n \times n$.

Posons $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

On note

- $f(n)$ = le plus petit nombre de carrés-unité que l'on doit marquer pour que chaque carré-unité soit adjacent à au moins un carré marqué (c'est-à-dire $f(n)$ est la valeur cherchée dans l'énoncé) ;

- $B =$ le plus petit nombre de carrés-unités blancs que l'on doit marquer pour que chaque carré-unité noir soit adjacent à au moins un carré-unité blanc marqué ;
- N est défini de façon analogue.

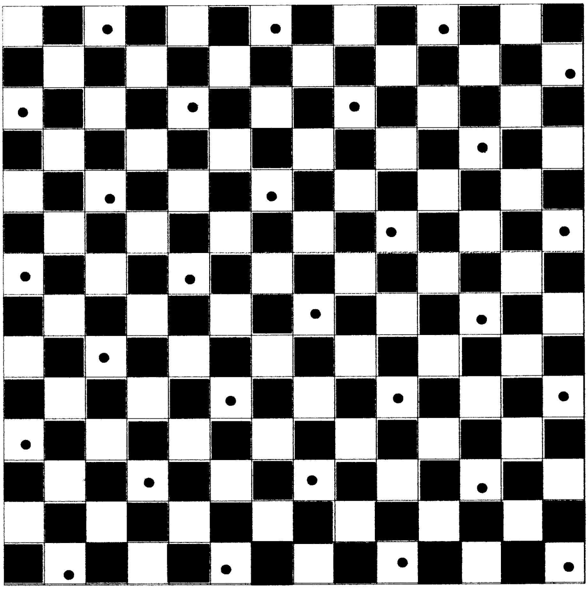
Chaque carré blanc (resp. noir) ne peut être adjacent qu'à un carré noir (resp. blanc).

Par suite,

$$f(n) = B + N. \tag{1}$$

De plus, la symétrie de l'échiquier assure que

$$B = N. \tag{2}$$



L'échiquier possède une diagonale noire de n carrés-unité, notée Δ.

Les diagonales noires parallèles à Δ possèdent chacune un nombre pair de cases $2, 4, \ldots, n-2, n, n-2, \ldots, 4, 2$.

Les diagonales blanches parallèles à Δ possèdent chacune un nombre impair de cases $1, 3, \ldots, n-1, n-1, \ldots, 3, 1$.

Pour toutes les diagonales blanches parallèles à Δ et situées au-dessus de Δ :

– si elle est de longueur $4i - 1$, on marque les cases de 2 en 2, dès la première de la diagonale,
– sinon, on ne marque rien.

Pour les diagnonales blanches parallèles à Δ et situées au-dessous de Δ :

– si elle est de longueur $4i + 1$, on marque les cases de 2 en 2, dès la première de la diagonale,
– sinon, on ne marque rien.

Ce faisant, on marque un total de

$$1 + 3 + \cdots + k + \cdots + 4 + 2 = \frac{k(k+1)}{2}$$

cases blanches. Et ainsi, chaque case noire est adjacente à une case blanche marquée. D'où

$$B \leqslant \frac{k(k+1)}{2}. \tag{3}$$

D'autre part, chaque case ainsi marquée est le centre d'une croix formée avec les cases noires qui lui sont adjacentes (croix éventuellement dégénérée si l'on est trop près des bords). Ces croix sont deux à deux disjointes par construction. Par conséquent, si l'on veut que chacune des cases blanches marquées soit adjacente à une case (noire) marquée, il faut au moins marquer une case noire par croix. Cela entraîne

$$N \geqslant \frac{k(k+1)}{2}. \tag{4}$$

D'après (2), (3) et (4), on a alors

$$B = N = \frac{k(k+1)}{2}$$

et d'après (1), il vient finalement

$$f(n) = k(k+1) = \frac{n(n+2)}{4}.$$

Remarque : Le procédé de marquage ci-dessus fournit alors une disposition possible des cases marquées. Les blanches, c'est fait. Les noires, on raisonne de même par rapport à la diagonale blanche principale.