Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N° 127 — Mai – Juin 2000

Éditorial

J. Navez,

Faut-il encore imposer tant de cours de mathématique à nos chers élèves du secondaire ? Je vais d'abord vous donner quelques arguments en faveur d'une diminution et pour être à la page, je vais numéroter mes phrases avec des entiers naturels et consécutifs (comme le font nos ministres).

Un. Les élèves sont surchargés. Avec internet, les jeux vidéos, les émissions culturelles de Musik-Channel, les voyages scolaires, les goûters d'anniversaires et les activités peri-scolaires, les pauvres petits ne savent plus où donner de la tête.

Deux. Les machines font tout. De beaux graphiques même pas cartésiens, des décimales tant qu'on en veut après le point ; avec un petit budget (500 BEF-12.39 Euros), vous avez toute la statistique du $\bar{X}$ au σ_n et même le σ_{n-1} (quand on a perdu une donnée) ; avec un plus gros budget (1200 BEF-29.75 Euros), on vous donne en prime l'inverse d'une matrice, de déterminant pas trop nul.

Trois. Il existe des manuels très bien faits dans lesquels toutes les recettes – pardon, les algorithmes – de résolutions figurent. Il n'y a même plus besoin d'acheter ces manuels, puisque le professeur distribue des photocopies (payantes) et de toutes façons, tout cela est sur le web.

Quatre. Les professeurs de mathématique ont l'art de traumatiser leurs élèves avec des interrogations à intervalles réguliers (même après le congé de carnaval), gâchent les vacances des parents et des enfants avec des examens de passage et des devoirs de vacances et tentent parfois de les empêcher d'accéder à la classe supérieure. Heureusement, l'usage des recours a permis de calmer les plus audacieux.

Comme préparation pour la fois prochaine, vous essayerez de me donner des arguments en faveur d'une augmentation.

Jacques NAVEZ

La mouche et l'araignée

J. Ooms, *Athénée royal de Chimay*

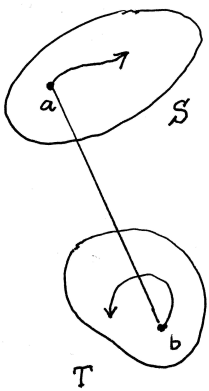


Fig. 1

La mouche a, de masse m, et l'araignée b, de masse n, se déplacent librement sur leurs supports respectifs S et T.

On se propose de déterminer le lieu de leur barycentre g (déterminé sur ab par le rapport de section $\dfrac{\overrightarrow{ag}}{\overrightarrow{gb}} = \dfrac{n}{m}$).

La question présente de nombreuses variantes en fonction du choix des supports S et T (courbes, surfaces ou volumes) et du choix du rapport n/m.

Dans les exemples ci-après, nous avons supposé $m = 2$ et $n = 1$ si bien que $\dfrac{\overrightarrow{ag}}{\overrightarrow{gb}} = \dfrac{1}{2}$.

Exemple n° 1

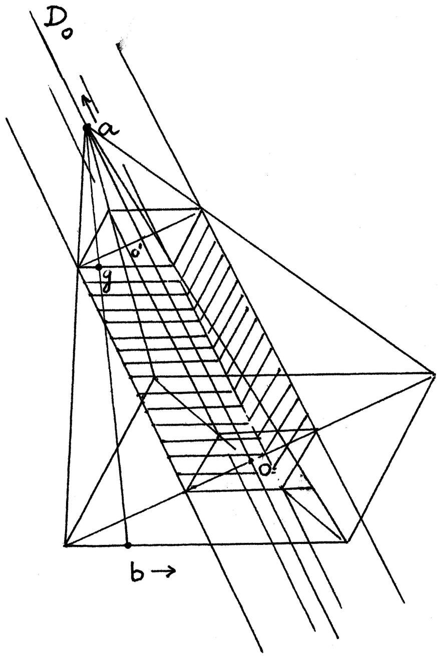


Fig. 2

b est libre sur le contour carré C de centre o et de côté ℓ.
a est libre sur la droite D_0 non coplanaire avec C.

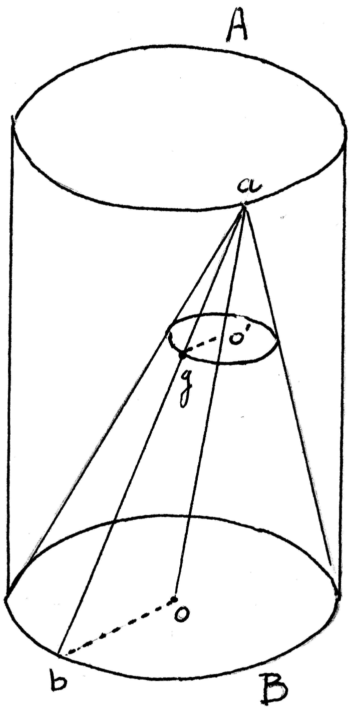
1) Fixant provisoirement a sur D et laissant b libre sur C :

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{ag}}{\overrightarrow{gb}} = \frac{1}{2} \text{ et } a \text{ fixé}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\overrightarrow{ag}}{\overrightarrow{ab}} = \frac{1}{3} \text{ et } a \text{ fixé}}.$$

L'ensemble des points g est donc l'image de l'ensemble des points b par l'homothétie de centre a et de rapport $\frac{1}{3}$: c'est un contour carré C', de côté $\frac{\ell}{3}$, dont les côtés sont dirigés parallèlement aux côtés de C et dont le centre o', image de o, appartient à la droite D_0.

2) Lorsque le point a décrit la droite D_0, $\dfrac{\overrightarrow{oo'}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{2}{3}$ et o fixé révèlent que le point o' décrit cette même droite D_0, entraînant avec lui le contour carré C', qui engendre, par translation parallèlement à D, une "cheminée" prismatique, lieu de g demandé.

Exemple n° 2



a est libre sur A
b est libre sur B
A, B étant les contours circulaires des bases d'un cylindre droit.

Fig. 3

1) Fixant provisoirement a sur A et laissant b libre sur B :

$$\boxed{\dfrac{\overrightarrow{ag}}{\overrightarrow{gb}} = \dfrac{1}{2} \text{ et } a \text{ fixé}} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\overrightarrow{ag}}{\overrightarrow{ab}} = \dfrac{1}{3} \text{ et } a \text{ fixé}}.$$

L'ensemble des pointg g est donc l'image de l'ensemble des points b par l'homothétie de centre a et de rapport $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire un contour circulaire B', dont le rayon vaut le $\frac{1}{3}$ du rayon de B, dont le centre o' est l'image du centre o de B et dont le plan est parallèle au plan de B.

2) Lorsque a décrit A, $\dfrac{\overrightarrow{oo'}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{2}{3}$ et o fixé révèlent que le point o' décrit un cercle A' homothétique à A, entraînant avec lui le contour circulaire B', qui engendre, par révolution autour de l'axe du cylindre, une couronne circulaire, lieu de g demandé (figure 4)

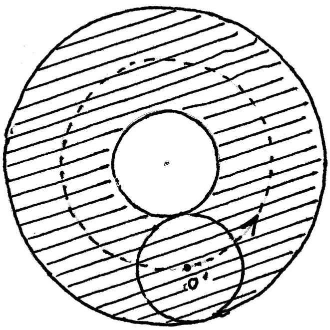


Fig.4

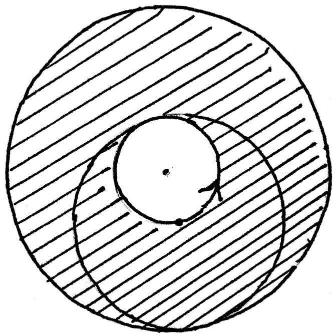
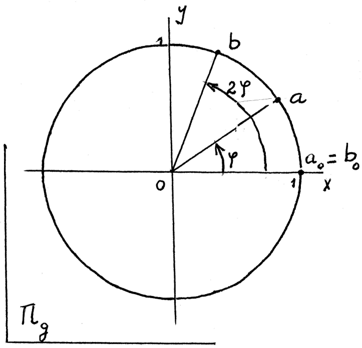


Fig. 5

N.B. : Si on fixe d'abord b sur B, ce même lieu est engendré par révolution, autour de l'axe du cylindre, d'un cercle dont le rayon vaut les $\frac{2}{3}$ du rayon de A, ce qui, topologiquement, étonne souvent, de prime abord (figure 5).

Si, pour la configuration cylindrique précédente, nous introduisons une liaison fonctionnelle entre les mouvements de b et de a, alors nous supprimons un degré de liberté et le lieu de g n'est plus une surface mais une courbe.

Par exemple, les *masses de a et b étant, ici, supposées égales* et la vitesse de b double de celle de a, on peut analyser la question en projetant la configuration orthogonalement sur le plan π_g parallèle au plan de base du cylindre.



$a_0 = b_0$ représentant les positions initiales de a et b (positions à l'heure $t = 0$)
a, b représentant les positions à l'heure quelconque t ;

Fig. 6

le plan π_g étant rapporté à un repère ortho-normé d'axes $(X, Y)_0$ et le rayon du cylindre étant supposé égal à 1, on obtient, pour équations paramétriques des trajectoires de a, b, g

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_a & = & \cos\varphi \\ y_a & = & \sin\varphi \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{lcl} x_b & = & \cos 2\varphi \\ y_b & = & \sin 2\varphi \end{array} \right. \boxed{\begin{array}{lcl} x_g & = & \dfrac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{2} \\ y_g & = & \dfrac{\sin\varphi + \sin 2\varphi}{2} \end{array}}$$

A défaut d'imagination, on demandera à l'ordinateur de dessiner la trajectoire (lieu) de g correspondante.

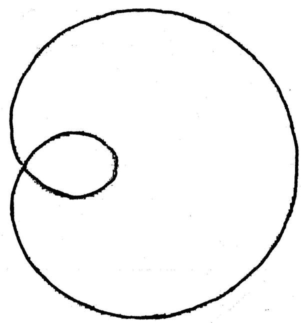


Fig. 7

Et on obtient de nombreuses variantes en modifiant arbitrairement le rapport des masses $M = \dfrac{m_a}{m_b}$ et le rapport des vitesses $V = \dfrac{v_b}{v_a}$.

Il vient alors généralement

$$x_g = \frac{M\cos\varphi + \cos(V.\varphi)}{M+1} \qquad y_g = \frac{M\sin\varphi + \sin(V.\varphi)}{M+1}$$

dont l'ordinateur nous livre ici quelques illustrations.

$M = 2$ $V = 2$

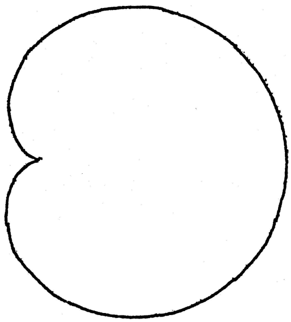


Fig. 8

$M = 2$ $V = 8.5$

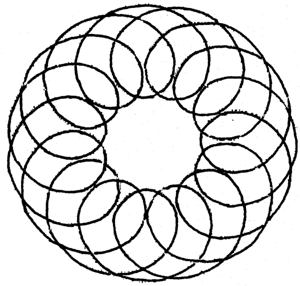


Fig. 9

$M = 1$ $V = 5.5$

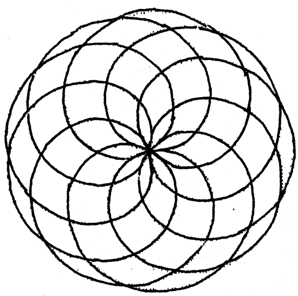


Fig. 10

$M = 6$ $V = 10$

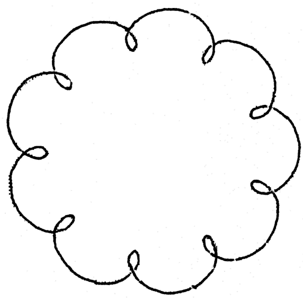


Fig. 11

On cherchera sans doute alors à identifier ces courbes avec des courbes classiques ou alors on leur attribuera des noms nouveaux.

On s'interrogera sur les symétries, sur le nombre de "pétales" des motifs floraux ou sur le nombre de boucles du type "napperon" ...

Notons encore que si on fixe V et si on fait varier M, on obtient une famille de courbes qui sont des sections planes de la *surface réglée* générée par la droite variable ab.

On peut visualiser cette surface en matérialisant des positions successives de la droite variable ab à l'aide de fils tendus entre les faces opposées d'une boîte en carton fort.

Bon amusement !

Adresse de l'auteur :
Jean OOMS
22, rue de Bourlers
6460 Chimay

Mathématique et Pédagogie n$^\circ$ 127, 10–16, 2000

Le cosinus au secours de l'équation cubique

J.G. Segers,

En étudiant la résolution de l'équation du troisième degré par la méthode proposée par Dirk Danckaert (*Mathématique et Pédagogie*, n° 123, 55–65, 1999), le cas $\Delta < 0$ paraît bizarre : pourquoi, dans le cas précis qui fournit trois racines réelles, serait-il indispensable de passer par les nombres complexes ? Etant donné que ces solutions se présentent sous la forme de fonctions goniométriques et non de racines du deuxième ou troisième degré, il semble logique d'essayer de se tourner vers ces fonctions.

1) L'identité

$$4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi - \cos 3\varphi = 0 \tag{1}$$

peut être lue dans les deux sens : soit il s'agit de calculer $\cos(3\,\varphi)$ à partir de la valeur connue de $\cos\varphi$, soit on cherche, connaissant la valeur de $\cos(3\varphi)$, celle de $\cos\varphi$. Dans ce dernier cas, il s'agit d'une équation cubique qui peut s'écrire sous la forme

$$4z^3 - 3z - \cos 3\varphi = 0. \tag{2}$$

On sait qu'une telle équation a 3 racines ; on voit que leur somme est nulle, et que leur produit vaut $\cos(3\varphi)/4$. Pour la résoudre, soustrayons membre à membre l'identité (1) de l'équation (2). On obtient

$$4(z^3 - \cos^3\varphi) - 3(z - \cos\varphi) = 0,$$

d'où

$$4(z - \cos\varphi)(z^2 + z\cos\varphi + \cos^2\varphi) - 3(z - \cos\varphi) = 0.$$

L'équation a donc pour première racine

$$z_0 = \cos\varphi, \tag{3a}$$

les deux autres sont solutions de l'équation du second degré

$$4z^2 + 4z\cos\varphi + (4\cos^2\varphi - 3) = 0$$

dont le réalisant vaut

$$\begin{aligned} \rho' &= 4\cos^2\varphi - 16\cos^2\varphi + 12 \\ &= 12 - 12\cos^2\varphi = 12\sin^2\varphi \end{aligned}$$

et les solutions sont

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= \frac{-2\cos\varphi \pm 2\sqrt{3}\sin\varphi}{4} \\
&= -\frac{1}{2}\cos\varphi \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \\
&= \cos\frac{2\ \pi}{3}\cos\varphi \pm \sin\frac{2\pi}{3}\sin\varphi \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\textit{Mathématique et Pédagogie}\varphi\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right), \quad z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right). \tag{3b}$$

Lorsque φ parcourt l'intervalle $[0, \pi/3]$, $\cos(3\varphi)$ parcourt $[-1, 1]$, et les solutions z_2, z_1, z_0 parcourent respectivement les intervalles $[-1, -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$.

On constate que les coefficients de l'équation (2) sont réels, que ses trois racines sont réelles, et que la solution n'a pas exigé le passage par les nombres complexes. Calculons les grandeurs P, Q, R, Δ. On trouve

$$\begin{aligned}
P &= \alpha\gamma - \beta^2 = -4, \\
Q &= \beta\gamma - \alpha\delta = 4\cos 3\varphi, \\
R &= \beta\delta - \gamma^2 = -1, \\
\Delta &= Q^2 - 4PR = 16\cos^2 3\varphi - 16 = -16\sin^2 3\varphi \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Il s'agit donc bien d'une équation cubique avec $\Delta \leqslant 0$. On constate en plus que $\Delta = 0$ n'est pas exclu, ce qui simplifiera encore plus la résolution.

2) Essayons d'appliquer cette méthode à l'équation générale du troisième degré dans le cas $\Delta \leqslant 0$. L'équation (2), tout en comprenant le paramètre φ, ou plutôt $\cos(3\varphi)$, n'est pas l'équation générale du troisième degré. Pour cela, il faut y introduire deux autres paramètres ; je propose l'un qui représenterait un intervalle $[-a, a]$ comprenant les solutions, à la place de $[-1, 1]$, et encore un autre représentant la moyenne arithmétique $m \neq 0$ des racines au lieu de $m = 0$. Les racines seraient donc de la forme

$$x_i = m + a \cdot z_i.$$

Transformons l'équation (2) avec la substitution

$$z = \frac{x - m}{a} \;;$$

nous obtenons la nouvelle équation

$$4x^3 - 12mx^2 + 3(4m^2 - a^2)x - (4m^3 - 3a^2m + a^3 \cos 3\varphi) = 0,$$

ou, avec $a = 2b$,

$$x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - b^2)x - (m^3 - 3b^2m + 2b^3 \cos 3\varphi) = 0, \tag{4}$$

à identifier avec la forme générale

$$\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x + \delta = 0, \quad \alpha > 0. \tag{5}$$

On obtient sans problème

$$m = -\frac{\beta}{\alpha},$$

mais

$$b^2 = \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2} = -\frac{P}{\alpha^2}$$

exige $P < 0$ pour obtenir un b réel. Enfin,

$$m^3 - 3b^2m + 2b^3 \cos 3\varphi = -\frac{\delta}{\alpha}$$

donne

$$\cos 3\varphi = \frac{3b^2m - m^3 - \frac{\delta}{\alpha}}{2b^3},$$

ou en multipliant numérateur et dénominateur par α^3

$$\cos 3\varphi = \frac{-\alpha^2\delta + 3\alpha\beta\gamma - 2\beta^3}{2(\beta^2 - \alpha\gamma)\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}.$$

Pour que l'expression trouvée puisse effectivement représenter la valeur d'un cosinus, il faut qu'elle soit comprise entre -1 et $+1$. Nécessairement,

$$-1 \leqslant \frac{-\alpha^2\delta + 3\alpha\beta\gamma - 2\beta^3}{2(\beta^2 - \alpha\gamma)\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}} \leqslant 1,$$

ou

$$-\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} \leqslant \frac{-\alpha^2\delta + 3\alpha\beta\gamma - 2\beta^3}{2(\beta^2 - \alpha\gamma)} \leqslant \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma},$$

ou, en élevant au carré,

$$\frac{\alpha^4\delta^2 - 6\alpha^3\beta\gamma\delta + 4\alpha^2\beta^3\delta + 9\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 12\alpha\beta^4\gamma + 4\beta^6}{4\alpha^2\gamma^2 - 8\alpha\beta^2\gamma + 4\beta^4} \leqslant \beta^2 - \alpha\gamma,$$

ou encore

$$\begin{gathered}\alpha^4\delta^2 - 6\alpha^3\beta\gamma\delta + 4\alpha^2\beta^3\delta + 9\alpha^2\beta^2\gamma^2 \underline{-12\alpha\beta^4\gamma + 4\beta^6}\\ \leqslant -4\alpha^3\gamma^3 + 12\alpha^2\beta^2\gamma^2 \underline{-12\alpha\beta^4\gamma + 4\beta^6}.\end{gathered}$$

Supprimons les termes soulignés, ramenons tout au premier membre, et divisons par la facteur commun α^2. Cela devient

$$\alpha^2\delta^2 - 6\alpha\beta\gamma\delta + 4\alpha\gamma^3 + 4\beta^3\delta - 3\beta^2\gamma^2 \leqslant 0,$$

ou

$$(\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta + \alpha^2\delta^2) - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(\beta\delta - \gamma^2) \leqslant 0,$$

ou encore

$$Q^2 - 4PR \leqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$\Delta \leqslant 0.$$

Conclusion : l'équation cubique générale (5) peut être résolue par des formules goniométriques sous la condition que

$$P < 0 \quad \text{et} \quad \Delta \leqslant 0.$$

3) En pratique, il ne suffit pas d'écrire les solutions comprenant les formules (3), encore faut-il déterminer l'angle φ à partir de la valeur de $\cos(3\varphi)$. Pour cela, on devrait introduire la fonction $\operatorname{Arccos} x$ et écrire

$$\varphi = \frac{\operatorname{Arccos}(\cos 3\varphi)}{3},$$

mais cette fonction n'est pas courante dans les langages informatiques qui ne comportent en général que la fonction $\arctan x$. Alors on utilisera une formule comme la suivante :

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{1 - \cos^2 3\varphi}}{\cos 3\varphi}, \tag{6}$$

mais avec précaution. En effet, la bijection $\operatorname{Arccos} x$ est définie sur l'intervalle fermé $[-1,1]$ dont l'image est l'intervalle fermé $[0,\pi]$, tandis que la bijection $\arctan x$ est définie sur l'intervalle ouvert $]-\infty,+\infty[$ dont l'image est $]-\pi/2,\pi/2[$. Les résultats ne sont donc pas les mêmes. Alors détaillons :

si $\cos(3\varphi)=1$, $\sin(3\varphi)=0$, d'où $\varphi=0$;
si $0<\cos(3\varphi)<1$, $0<\sin(3\varphi)<1$, d'où $0<\theta<\pi/2$ et $\varphi=\theta/3$;
si $\cos(3\varphi)=0$, $\sin(3\varphi)=1$, d'où $3\varphi=\pi/2$ et $\varphi=\pi/6$;
si $-1<\cos(3\varphi)<0$, $0<\sin(3\varphi)<1$, d'où $-\pi/2<\theta<0$, mais $\varphi=\frac{\theta+\pi}{3}$;
si $\cos(3\varphi)=-1$, $\sin(3\varphi)=0$, d'où $3\varphi=\pi$ et $\varphi=\pi/3$.

En résumé, on calcule d'abord

$$m=-\frac{\beta}{\alpha},\quad b=\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha},\quad a=2b,\quad \cos 3\varphi=\frac{-\alpha^2\delta+3\alpha\beta\gamma-2\beta^3}{2(\beta^2-\alpha\gamma)\sqrt{\beta^2)\alpha\gamma}}.$$

Ensuite, on calcule φ, et finalement

$$x_0=m+a\cos\varphi,\quad x_1=m+a\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right),\quad x_2=m+a\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right).$$

Les calculs suivants se limitent à 4 décimales.

Exemple 1 : $5x^3-3x^2-15x+8=0$, coefficients 5, -1, -5, 8. $P=-26<0$, $\Delta=-2207<0$, $m=0,2$, $b=1,0198$, $\cos(3\varphi)=0,4639$, $\sin(3\varphi)=0,8859$, $\varphi=0,6844$ ou $39^\circ\ldots$, $x_0=1,7803$, $x_1=0,5265$, $x_2=-1,7068$.

Exemple 2 : $3x^3-6x^2-3x+6=0$, coefficients 3, -2, -1, 6. $P=-7$, $Q=-16$, $R=-13$, $\Delta=-108$, $m=0,6667$, $b=0,8819$, $\cos(3\varphi)=-0,5399$, $\sin(3\varphi)=0,8417$, $\varphi=0,7137$ ou $40^\circ\ldots$, $x_0=2$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

Exemple 3 : $x^3-3x^2-6x+8=0$, coefficients 1, -1, -2, 8. $P=-3$, $Q=-6$, $R=-12$, $\Delta=-108$, $m=1$, $b=1,7321$, $\cos(3\varphi)=0$, $\sin(3\varphi)=1$, $\varphi=0,5236$ ou 30°, $x_0=4$, $x_1=1$, $x_2=-2$.

Exemple 4 : $x^3+6x^2+9x+4=0$, coefficients 1, 2, 3, 4. $P=-1$, $Q=2$, $R=-1$, $\Delta=0$, $m=-2$, $b=1$, $\cos(3\varphi)=-1$, $\sin(3\varphi)=0$, $\varphi=1,0472$ ou 60°, $x_0=-1$, $x_1=-1$, $x_2=-4$.

Exemple 5 : Euler et l'équation du troisième degré

Dans son *Algebra* (1766), part 2, chap. 13, § 188, Euler traite l'équation $x^3 - 6x - 4 = 0$. En appliquant la formule de Cardan, Euler trouve

$$x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}$$

et écrit "was sich nicht anders ausdrücken läßt" (ce qui ne peut être exprimé autrement). Gauss avec son plan allait naître seulement onze ans plus tard, sinon Euler aurait su comment poursuivre ses calculs. En effet,

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i} \\
&= \sqrt[3]{2\sqrt{2} \cdot e^{i\,\frac{\pi}{4}}} + \sqrt[3]{2\sqrt{2} \cdot e^{-i\,\frac{\pi}{4}}} \\
&= \sqrt{2}\left(e^{i\,\frac{\pi}{12}} + e^{-i\,\frac{\pi}{12}}\right) = 2\sqrt{2}\ \cdot \cos\ \frac{\pi}{12} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\ \sqrt{2+\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Avec la méthode du cosinus, il aurait trouvé :

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = -2,\ \delta = -4;\ P = -2,\ Q = 4,\ R = -4,\ \Delta = -16;$$
$$m = 0,\ b = \sqrt{2},\ a = 2\sqrt{2},\ \cos 3\varphi = \frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\ \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$\varphi = \frac{\pi}{12},\ \cos\ \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\ \sqrt{2+\sqrt{3}},$$

ce que Euler connaissait certainement. Les solutions sont donc

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\ \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}, \\
x_1 &= 2\sqrt{2}\ \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2} \cdot \cos\ \frac{7\pi}{12} = -2\sqrt{2} \cdot \sin\ \frac{\pi}{12} \\
&= -2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\ \sqrt{2-\sqrt{3}} = -\sqrt{4-2\sqrt{3}} = -(\sqrt{3}-1) = 1 - \sqrt{3}, \\
x_2 &= 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\ \cdot \cos\ \frac{3\pi}{4} \\
&= -2\sqrt{2} \cdot \cos\ \frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}\ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2.
\end{aligned}$$

Leur somme vaut effectivement 0, et leur produit 4.

Adresse de l'auteur :

Jack SEGERS
rue Hocheporte 107/063
4000 Liège

Gestion de stocks en univers aléatoire

D. Justens, *HEFF-Économique type long "Cooremans" Bruxelles*

1. Introduction

Comme nous l'avions déjà précisé dans [4], la gestion de stocks est l'un des domaines en économie et en gestion qui a donné naissance depuis quarante ans à une littérature des plus abondantes. Les modèles les plus variés se cotoient et il convient, lorsque l'on se trouve confronté à un problème concret, de déterminer avant tout dans quel contexte on peut travailler de manière à traduire le plus correctement possible la réalité objective du problème à résoudre. Il faut opter pour le court terme ou le long terme, choisir entre modèles déterministes ou stochastiques, définir des priorités et des principes de gestion optimale. Notre propos est de présenter en les comparant quelques-uns des modèles en univers alétoire les plus usuels en les illustrant au moyen d'un exemple concret. Quelques éléments de méthodes plus sophistiquées mathématiquement seront présentés en fin d'article. Le tout permet une illustration intéressante de certains résultats classiques du calcul différentiel et intégral, établissant une nouvelle fois ce lien que nous jugeons indispensable entre la mathématique théorique et l'univers réel.

2. Choix des notations et conventions

Les premiers modèles stochastiques datent de la fin des années '50, ce qui explique leur relative simplicité conceptuelle. Les notations utilisées varient d'un manuel à l'autre. Nous utiliserons systématiquement les mêmes notations et conventions dans la suite de l'article, quel que soit le modèle utilisé, nous écartant par là même souvent de la symbolique originelle. Comme dans [4], nous nous contenterons de modèles à un seul produit, infiniment fractionnable, permettant une présentation continue.

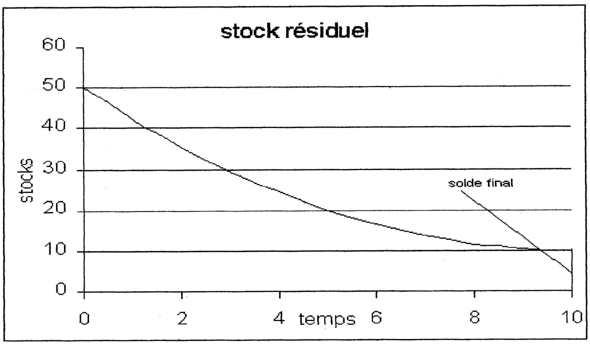
Convenons du choix d'un horizon fini T durant lequel nous tenterons d'ajuster la production ou pour lequel nous désirons constituer le stock idéal ([1]).

1. Ce dernier concept est à définir et comme nous le verrons plus loin, le choix de la définition de l'optimalité a une influence significative sur le type de gestion exercée

En univers aléatoire (et aussi le plus souvent en univers réel), la demande [2] est une variable aléatoire que nous noterons R, de distribution supposée connue et déterminée par la fonction de répartition $F(r)$.

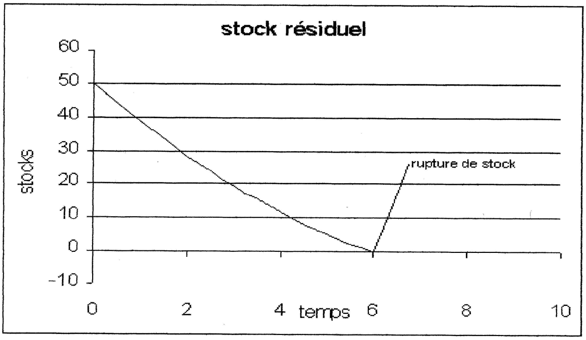
Considérons un approvisionnement initial unique d'une quantité déterminée Q d'un certain produit obéissant à nos hypothèses usuelles et devant satisfaire la demande durant $[0, T[$. C'est le cas notamment pour l'approvisionnement en quotidiens dans le domaine de la presse, en fleurs ou en produits frais pendant un marché. Les applications s'ajustant à ce type de contexte sont multiples. Quel que soit le stock originel Q constitué à l'instant 0, deux situations peuvent se produire durant $[0, T[$: la demande peut être inférieure au stock constitué (stock résiduel) ou elle peut se révéler supérieure (rupture de stock).

Graphiquement, les deux situations sont décrites par la fonction stock résiduel $SR_Q(t)$. Dans le cas du solde final, on a :



Dans le cas de la rupture de stock, on arrive au graphique ci-dessous

2. Il convient ici de distinguer la variable *demande* de la variable *vente*. La demande peut en effet être supérieure à l'offre. La variable *vente* peut être vue comme la variable *demande* assortie d'une barrière absorbante en 0.



L'écoulement n'est pas nécessairement linéaire. Pourquoi la demande par unité de temps serait-elle constante ? On admet généralement que pour le court terme, le mode d'écoulement n'a pas d'incidence sur l'optimalité du système de gestion. En réalité, cette affirmation constitue la définition de la notion de court terme. La notion d'actualisation n'apparaît pas, les coûts dépendant explicitement du temps non plus. Dans ce cas simplifié, on peut se contenter d'une mise en équation basée uniquement sur la situation initiale ($t = 0$) et sur la situation finale (instant $t = T$) du stock résiduel. Lorsque l'immobilisation d'actif devient importante, cette hypothèse simplificatrice n'a plus cours et il convient de recourir à des modèles plus élaborés.

Convenons en outre des notations suivantes. Pour le produit considéré, soient

- c le coût de production unitaire.
- s le prix de vente unitaire
- v la valeur unitaire résiduelle à l'instant T. On doit avoir $v < c$. Dans le cas contraire, une production exorbitante et ne correspondant en rien aux besoins du marché serait modélisée comme un accroissement de richesse.
- p la perte unitaire en cas de demande supérieure à l'offre.
- a les coûts fixes. On vérifie aisément que ces derniers n'influencent pas le système de gestion, ce qui est assez intuitif : la décision n'est pas au niveau de la variable "0-1" *produire ou non*, mais se situe au niveau *marginal* : produire plus ou produire moins.

3. Modèles à court terme

Dans ces modèles, seules sont prises en compte la situation initale $SR_Q(0) = Q$ sur laquelle le gestionnaire a une action, et celle finale $SR_Q(T)$. L'hypothèse usuelle consiste à considérer que l'on a une connaissance suffisante de la distribution de probabilité de la variable demande R. Cette hypothèse est évidemment discutable, mais elle est infiniment plus réaliste que celle qui prévaut dans les modèles déterministes : les ventes sont connues.

Il reste à déterminer le principe d'optimalité sur lequel repose la gestion. Ce dernier relève du libre arbitre du décideur. Il peut opter pour une gestion prudente, minimisant le risque de perte, ou préférer une gestion plus agressive dans le but de maximiser le profit. Il peut également se fixer un niveau de risque de rupture de stock à ne pas dépasser de façon à ne pas mécontenter le client (situation de monopole par exemple).

3.1. Principe du minimum d'espérance de coût

Considérons une distribution de demande sur $[0, T[$ de fonction densité de probabilité $f(r)$. En toute rationnalité, $f(r)$ doit être identiquement nulle sur $]-\infty, 0[$, mais on constate que les gestionnaires travaillent couramment avec une distribution normale, dont on sait qu'elle est positive pour tout r réel. Dans ce cas, il convient de conforter la pertinence de l'hypothèse de normalité en vérifiant que la probabilité associée à l'intervalle $]-\infty, 0[$ n'est pas *significativement* différente de zéro. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut travailler avec une distribution uniforme sur un intervalle inclus dans $\Re^+$, avec une distribution exponentielle négative, ou encore avec une distribution de type *Erlang*.

Deux cas se présentent. Lorsque la demande est inférieure à l'offre ($r < Q$), le gestionnaire se retrouve à l'instant T face à un stock résiduel $Q - r$ qu'il ne peut plus négocier dans les mêmes conditions. C'est le cas pour des denrées périssables, mais également aussi pour tous les articles de mode. Il en résulte, avec nos conventions et notations, une perte unitaire $C_1 = c - v$.

Lorsque la demande est supérieure à l'offre ($r > Q$), le gestionnaire peut rater des ventes (coût d'opportunité) ou être contraint de faire appel à la soustraitance. Il en résulte un coût unitaire marginal quantifiable $C_2 = p$.

Convenons de travailler de manière prudente, en minimisant l'espérance de coût total (voir modèles déterministes). Cette dernière est conditionnelle, dépendant explicitement de la quantité Q à produire ou commander sur $[0, T[$. On a :

$$E[C|Q] = \int_0^Q C_1(Q-r)f(r)dr + \int_Q^\infty C_2(r-Q)f(r)dr$$

ou encore avec nos notations :

$$E[C|Q] = \int_0^Q (c-v)(Q-r)f(r)dr + \int_Q^\infty p(r-Q)f(r)dr$$

Cette présentation permet l'introduction justifiée de la notion d'espérance mathématique : somme des *coûts* pondérée par les probabilités associées aux *demandes* correspondantes. On voit apparaître naturellement la nécessité d'une généralisation de la notion bien connue de moyenne, la variable considérée étant une *fonction* de la variable aléatoire du problème.

Lors du calcul de la dérivée de cette expression relativement à Q, on constate qu'il convient notamment de pouvoir calculer (application et cas particulier de la formule de Leibniz) :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

et

$$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt = -f(x)$$

(Pour les conditions d'utilisation dans le cas de fonctions quelconques n'admettant pas nécessairement de primitives, voir [1], p. 151). On obtient aisément :

$$\frac{d}{dQ}E[C|Q] = C_1 \int_0^Q f(r)dr + C_1 Q f(Q) - C_1 Q f(Q) - C_2 Q f(Q)$$

$$+C_2 Q f(Q) - C_2 \int_Q^\infty f(r)dr = 0$$

On vérifie la positivité de la dérivée seconde et l'on obtient, en rappelant que

$$\int_0^Q f(r)dr = F(Q) \;\text{ et }\; \int_Q^\infty f(r)dr = 1 - F(Q)$$

le résultat attendu :

$$F(Q) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{p}{c - v + p}$$

Ce dernier appelle plusieurs commentaires. Tout d'abord, la solution à notre problème n'est pas *explicite* : elle passe par le canal de la fonction de répartition de la variable *demande*. Ceci est un gage de réalisme et était intuitivement prévisible. La solution n'est donc pas une quantité à produire mais une probabilité de production (ou d'approvisionnement) suffisant ([3]). De même, la probabilité complémentaire

$$1 - F(Q) = \frac{c - v}{c - v + p}$$

représente la probabilité de rupture de stock en cas d'approvisionnement optimal. On tombe ici sur une application réaliste du théorème de Moivre-Laplace. Chaque approvisionnement représente une expérience aléatoire à deux issues possibles : stock résiduel ou rupture de stock. La répétition des approvisionnements dans des conditions comparables illustre un schéma de Bernoulli réaliste et l'on peut aisément tester l'optimalité d'un système d'approvisionnement ou de production. Le court terme du modèle conduit rapidement à un nombre suffisant d'expériences autorisant raisonnablement l'utilisation des lois faibles des grands nombres.

3. La fonction de répartition étant celle de la demande, $F(Q)$ représente la probabilité, correspondant au minimum de coût, avec laquelle la demande doit être inférieure à la production idéale.

3.2. Calcul du maximum d'espérance de profit

Reprenons le même problème et optons à présent pour une politique plus agressive. Supposons que le gestionnaire désire maximiser son espérance de profit. Nous utilisons les mêmes notations que plus haut. L'espérance de profit est conditionnelle et vaut :

$$E[P_T|Q] = \int_0^Q [(s-v)r + vQ]f(r)dr + \int_Q^\infty [(s+p)Q - pr]f(r)dr - a - cQ$$

On vérifie en effet que le profit sous condition *stock trop important* ($r < Q$) est donné par :

$$P[Q|r] = sr + v(Q-r) - a - cQ$$

En cas de rupture de stock, on trouve :

$$P[Q|r] = sQ - p(r-Q) - a - cQ$$

L'espérance de profit en découle. On calcule comme plus haut (nouvelle utilisation de la formule de Leibniz) :

$$\frac{d}{dQ}E[P_T|Q] = 0$$

pour obtenir la solution implicite :

$$F(Q) = \frac{s+p-c}{s+p-v}$$

On vérifie aisément que cette dernière probabilité de stock suffisant est toujours supérieure à la précédente, sous nos hypothèses ($s > c$ et $c > v$). Les mêmes remarques que plus haut peuvent être reprises ici. Illustrons notre propos sans plus tarder.

4. Applications

4.1. Une application à caractère théorique

Considérons la gestion de la production ou de l'approvisionnement d'un produit périssable produit (ou fourni) au prix unitaire c et vendu au prix unitaire $s = (M+1).c$, le paramètre M représentant alors la marge bénéficiaire *en dehors*, calculée sur le prix à la production ([4]). Cette dernière ne représente en rien une mesure du *bénéfice* unitaire réalisé, les frais fixes n'étant pas pris en compte et le problème traité se situant essentiellement au niveau d'une production marginale complémentaire. Les produits sont supposés de valeur résiduelle nulle ($v = 0$) ce qui est le cas par exemple des primeurs au marché, des fleurs ou de tout approvisionnement en journaux. On a également $p = M.c$, le réapprovisionnement étant impossible dans les cas cités.

Dans le contexte du minimum de l'espérance de coût, on arrive à :

$$F(Q) = \frac{p}{c - v + p} = \frac{Mc}{c - 0 + Mc} = \frac{M}{M + 1}$$

On peut étudier cette fonction de la marge bénéficiaire et constater qu'elle est définie positive pour tout $M \in \Re^+$, strictement croissante et de concavité vers le bas ([5]). Ces propriétés sont interprétables : une marge plus élevée correspond toujours à un taux de rupture plus bas (intuitivement évident) et situe le gestionnaire dans un contexte plus stable. On vérifie également le comportement asymptotique :

$$\lim_{M \to +\infty} F(Q) = 1$$

qui signifie que pour des marges bénéficiaires élevées, on tendra à satisfaire la demande avec probabilité 1.

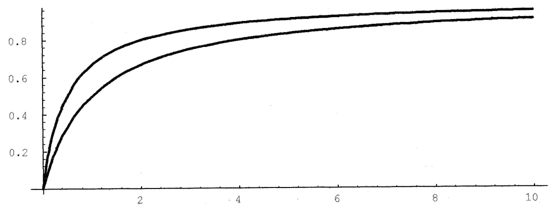
Dans le cas du maximum de l'espérance de profit, on arrive à :

$$F(Q) = \frac{s + p - c}{s + p - v} = \frac{(M + 1)c + Mc - c}{(M + 1)c + Mc - 0} = \frac{2M}{2M + 1}$$

Encore une fois, cette fonction peut être étudiée et comparée à celle qui correspondait à l'optique précédente. Graphiquement, on a :

4. M est donc défini sur $\Re^+$

5. Il convient ici de comprendre la signification de la fonction étudiée. Elle représente la probabilité avec laquelle on doit satisfaire la demande en cas de gestion optimale *frileuse*, exprimée en fonction de la marge bénéficiaire choisie.



La courbe supérieure correspond à la gestion la plus agressive (interprétation ?). On constate que la gestion optimale en cas de politique prudente est significativement différente de la gestion plus agressive pour des marges bénéficiaires plutôt maigres. Le maximum d'écart s'obtient pour la valeur $M = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Les produits de luxe permettant une vente avec marge élevée concilient les deux objectifs apparemment contradictoires.

4.2. Une application réaliste : la restauration rapide

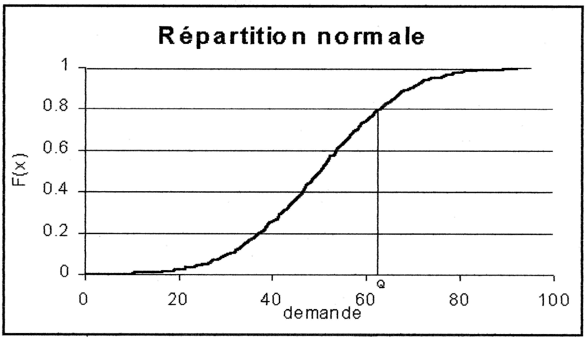
Quel est l'amateur de bonne chère qui n'a pas frémi un jour en constatant avec désolation que ses enfants appréciaient des substituts carnés maculés de ketchup et grassement garnis de frites, proposés à des prix exorbitants dans ces cadres désolants de vulgarité connus sous le nom de *fast food*. Pour ce type de produit, la durée de vie est de l'ordre de 20 minutes ($T = 20$). Pour un coût de production de l'ordre du demi euro (50 cents) et un prix de vente de l'ordre de 2.5 euros, on obtient la paramétrisation : $c = 0.5$, $s = 2.5, v = 0, p = 2$. On en tire dans le cas du minimum d'espérance de coût (même raisonnement dans le cas du maximum de l'espérance de profit) :

$$F(Q) = 0.8.$$

Une bonne gestion correspond donc à une rupture de stock dans 20% des cas. Intervient ici le choix de la distribution de probabilité de la variable *demande*. Il faut savoir que la gestion de production du type de *restaurant* qui nous occupe est suivie en temps réel chaque heure du jour chaque jour de l'année. On peut donc supposer que cette fonction de répartition est relativement bien connue même si elle évolue à chaque instant. On peut ici à titre d'exemple s'amuser à étudier les effets du changement de distribution sur la politique de production. Choisissons de travailler sur base d'une vente moyenne de 50 hamburgers par tranche de 20 minutes avec un écart-type ([6])

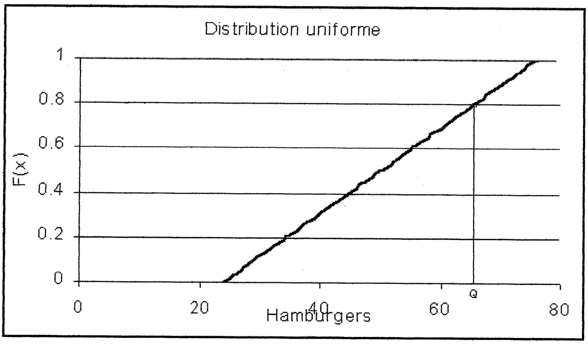
6. On vérifiera que les distributions choisies sont réalistes et pertinentes

de 15 hamburgers. Dans le cas de la distribution normale, on obtient le graphique :



On en tire une production idéale égale à 63 hamburgers.

Sous l'hypothèse d'uniformité avec même moyenne et même écart-type, on obtient l'intervalle de définition $[50 - 15\sqrt{3}; 50 + 15\sqrt{3}]$. Graphiquement, on arrive à :



La production *optimale* passe ainsi à 66 hamburgers. On constate ici et c'est rassurant que le choix de la distribution sous-jacente (généralement mal connue) n'influence pas significativement le niveau de production.

5. Modèles faisant intervenir la fonction d'écoulement

5.1. Présentation théorique

Toutes les hypothèses et notations introduites plus haut restent valables. Nous envisageons à présent l'introduction d'un coût supplémentaire dépendant du temps. On peut ainsi introduire la notion de rémunération de l'immobilisation financière ou plus simplement de vrais coûts de stockage.

Comme plus haut nous envisageons deux cas.

En cas de solde final, et sous l'hypothèse d'un écoulement uniforme (voir [4]), on peut travailler avec un stock moyen ([7]) $SM = \frac{SR_Q(0)+SR_Q(T)}{2}$. Pour un approvisionnement Q et une réalisation r de la variable aléatoire demande R, on a $SM = Q - \frac{r}{2}$. On note alors C_s le coût moyen de *stockage* par unité de temps et par unité stockée ([8]). Sur [0, T], le coût total ([9]) en cas de solde vaut :

$$C_s T(Q - \frac{r}{2}) + (Q-r)C_1$$

En cas de rupture de stock, le moment de cette rupture intervient dans le calcul du coût. Ceci est particulièrement vrai dans le cadre plus réaliste de l'immobilisation d'actif financier. On vérifie aisément que si $t = t_0$ est l'instant de rupture et que l'écoulement reste uniforme, pour une demande totale sur T notée r, on a :

$$t_0 = \frac{Q.T}{r}$$

Le stock moyen sur $[0, t_0[$ vaut évidemment $\frac{Q}{2}$. Le coût total en cas de rupture de stock devient :

$$\frac{C_s T Q^2}{2r} + C_2(Q-r)$$

7. Comme plus haut, la fonction $SR_Q(t)$ représente le stock résiduel au temps t.
8. Cette façon de procéder n'est pas conforme avec les exigences d'une notion comme celle de l'actualisation.
9. Les notations introduites plus haut restent valables

Notons pour simplifier $C_s T = C_3$. On minimise l'espérance conditionnelle de coût :

$$\begin{aligned} E[C|Q] \;=\; & \int_0^Q \left[C_3(Q-\frac{r}{2})+C_1(Q-r)\right] f(r)dr \\ & +\int_Q^\infty \left[\frac{C_3Q^2}{2r}+C_2(r-Q)\right] f(r)dr \end{aligned}$$

Le minimum se calcule comme plus haut. On arrive à :

$$\frac{dE[C|Q]}{dQ} = F(Q)[C_1+C_2+C_3]+C_3Q\int_Q^{+\infty}\frac{f(r)}{r}dr - C_2$$

En choisissant une distribution de type *Erlang*, on arrive facilement à une solution explicite ([10]). On peut travailler par exemple avec la fonction densité définie sur $\Re^+$:

$$f(r) = \lambda^2 r e^{-\lambda r}$$

de moyenne $\frac{2}{\lambda}$. L'ajustement aux observations devient évident. On vérifie que l'équation $\frac{dE[C|Q]}{dQ} = 0$ se réduit à :

$$(C_1+C_2)\lambda Q + (C_1+C_2+C_3) - e^{-\lambda Q}(C_1+C_3) = 0$$

La résolution de ce genre d'équation ne pose généralement pas de problème à *Mathematica.*

5.2. Résolution d'un cas concret

Nous envisageons le cas d'un marchand de vin achetant début mai la récolte d'un petit producteur de vin rosé de qualité mais sans possibilité de garde. Ce vin doit être écoulé fin août, faute de quoi, il convient de le brader. L'importance de l'immobilisation d'actif fait intervenir un coût dépendant du temps. Idéalement, il faudrait faire appel à une description continue d'actualisation ([11]), mais le relativement court terme envisagé (4 mois) permet l'utilisation de l'intérêt simple et donc justifie l'utilisation de notre modèle simplifié. Quantifions le problème. L'horizon T n'intervient explicitement que dans le calcul du coût C_3. En utilisant les mêmes notations

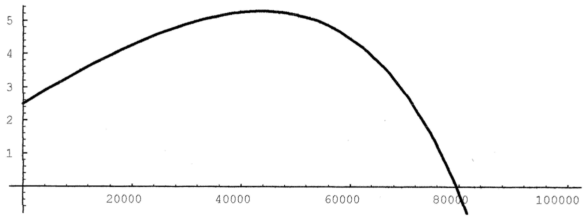
10. Il convient de vérifier la possibilité d'ajustement de ce type de distribution aux observations. Dans le cas présenté, l'utilisation d'une distribution à un seul paramètre ne permet pas toujours un ajustement acceptable

11. voir [4]

que plus haut, posons $c = 2$ euros (prix d'achat raisonnable), $s = 4.5$ euros (prix de vente maximal), $v = 1.5$ euro (la valeur de liquidation du vin doit être supposée inférieure à son prix d'achat) et déduisons-en $p = 2.5$ euros, le réapprovisionnement ne pouvant être réalisé après la commande initiale. Le coût d'immobilisation d'actif financier sur 4 mois pour 2 euros est estimé à 2 cents (ce qui correspond à un taux de 0.01 sur 4 mois ou encore 0.03 annuel, en utilisant la théorie de l'intérêt simple : nous étudions plus loin l'impact du taux sur la politique de gestion). On a donc $C_3 = 0.02$ et on calcule $C_1 = c - v = 0.5$ et $C_2 = p = 2.5$. Convenons d'une vente moyenne de 50 000 bouteilles sur 4 mois. On en tire $\lambda = \frac{2}{50000} = 0.00004$. Pour ces valeurs, et graphiquement, la fonction

$$(C_+C_2)\lambda Q + (C_1 + C_2 + C_3) - e^{-\lambda Q}(C_1 + C_3) = 0$$

donne :



On obtient comme commande ([12]) idéale la valeur $Q = 79646$ bouteilles. On vérifie que sans frais dépendant du temps (et pour la même distribution d'Erlang), on arriverait à une commande de 80 880 bouteilles. Le tableau suivant donne l'évolution de la quantité optimale à commander en fonction du taux du marché.

Coût C_3	Taux annuel associé	Commande optimale
0.02	0.03	79 646
0.03	0.045	79 046
0.04	0.06	78 457
0.05	0.075	77 879

12. En utilisant l'opérateur Findroot[] dans *Mathematica*, et en spécifiant que l'on demande une solution positive. Dans le cas contraire, le logiciel donne une solution négative au problème. On rencontre ici un exemple intéressant de solution parasite, mathématiquement acceptable mais économiquement absurde.

6. Annexe : modèles de production utilisant les équations différentielles stochastiques

Les différents modèles présentés jusqu'ici sont statiques. On peut introduire un modèle dynamique de production ajustée à la demande sans coût théorico-mathématique exorbitant. Considérons un taux de production α répondant à un processus demande suivant l'équation différentielle stochastique ([13]) de demande cumulée :

$$dB(t,\omega) = \beta(t)dt + s(t)dw(t,\omega)$$

Une telle hypothèse implique la pertinence du choix de la distribution normale. Sur un horizon T, on peut alors définir le processus *inventaire* qui sera distribué normalement de moyenne :

$$m_T = \alpha T - \int_0^T \beta(t)dt$$

et de variance

$$\sigma_T^2 = \int_0^T s^2(t)dt$$

Sous les mêmes hypothèses que plus haut, on peut arriver à une solution explicite du taux de production idéal α en minimisant par exemple l'espérance de coût sur l'horizon $[0, T[$:

$$E[C|\alpha] = K(\alpha) = -\int_{-\infty}^0 C_2 z f(z)dz + \int_0^\infty C_1 z f(z)dz$$

expression dans laquelle f(z) a la forme explicite :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T} . e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{z-m_T}{\sigma_T}\right)^2}$$

On calcule ensuite :

$$K(\alpha) = -C_2 m_T + (C_1 + C_2)\int_0^\infty z f(z)dz$$

13. $w(t,\omega)$ représente une mouvement brownien standard, c'est-à-dire un processus aléatoire distribué normalement, de moyenne nulle, d'écart-type égal à la racine du temps et dont on sait que les accroissements sont indépendants et stationnaires

Comme on a aussi :

$$\frac{d}{d\alpha}K(\alpha) = \frac{d}{dm_T}K(\alpha).\frac{d}{d\alpha}m_T(\alpha)$$

le problème de l'obtention du minimum s'obtient en résolvant :

$$\frac{d}{dm_T}K(\alpha) = 0$$

Explicitement :

$$\frac{d}{dm_T}K(\alpha) = -C_2 + \frac{(C_1 + C_2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_T^3}.\int_0^{\infty}(z^2 - m_T^2).e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{z-m_T}{\sigma_T}\right)^2}dz = 0$$

Pour le calcul on pose évidemment :

$$u = \frac{z - m_T}{\sqrt{2\pi}\sigma_T}$$

pour obtenir :

$$\frac{d}{dm_T}K(\alpha) = -C_2 + \frac{(C_1 + C_2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_T^2}.\int_0^{\infty}[2\sigma_T^2u^2 + \sqrt{2}m_Tu].e^{-u^2}du$$

Apparaissent ici les intégrales (excellent exercice justifié par une application) :

$$\int_0^{\infty}u.e^{-u^2}du \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty}u^2.e^{-u^2}du$$

On vérifie que :

$$\int_0^{\infty}u.e^{-u^2}du = \left[\frac{-1}{2}e^{-u^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

On intègre par parties en décomposant u^2 en $u.u$, pour obtenir :

$$\int_0^{\infty}u^2.e^{-u^2}du = \left[\frac{-u}{2}e^{-u^2}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-u^2}du$$

La dernière intégrale est bien connue. On arrive ainsi à :

$$\int_0^{\infty}u^2.e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

On en tire immédiatement :

$$\frac{d}{dm_T}K(\alpha) = -C_2 + \frac{(C_1 + C_2)}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m_T}{\sigma_T}\right] = 0$$

ou encore :

$$m_T = \frac{\sqrt{2.\pi}}{2}\sigma_T.\frac{C_2 - C_1}{C_2 + C_1}$$

On obtient finalement le taux de production “idéal” α et l'on vérifie que ce dernier ne correspond pas généralement au taux de demande moyen sur l'horizon $[0, T[$:

$$\alpha = \frac{1}{T}\int_0^T \beta(t)dt + \frac{1}{T}\frac{\sqrt{2.\pi}}{2}\sigma_T.\frac{C_2 - C_1}{C_2 + C_1}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ferret, JC et Langlois, G, *Mathématiques appliquées* Foucher, Paris, 1979 ;

[2] Fogarty, Hoffmann, *Production and inventory management*, South-Western Publishing Co, Cincinnati, 1983.

[3] Justens, D. *Statistique pour décideurs*, De Boeck, Bruxelles, 1990.

[4] Justens, D. Utilisations du calcul différentiel et intégral en gestion de stocks *Mathématique et Pédagogie* 118, 1998.

[5] Phillips, Ravindran et Solberg, *Operations Research, Principles and Practice*, Wiley & sons, New-York, 1976.

Adresse de l'auteur

Daniel JUSTENS
Haute École Francisco Ferrer
Département Économique
Type Long “Cooremans”
Place Anneessens, 11
1 000 Bruxelles
Belgique

Bruges, pépinière de mathématiciens

F. Jongmans, E. Seneta, *professeur émérite à l'Université de Liège & professeur à l'Université de Sydney*

A la mémoire de Germain Bonte (30 décembre 1932-11 janvier 1999)

1. Introduction

Parmi les personnalités remarquables qui jalonnent l'histoire de Bruges, on découvre plusieurs mathématiciens de talent, ignorés du grand public à l'exception de Simon Stevin (Bruges 1548-La Haye 1620). Ils se nomment Grégoire de Saint Vincent (Bruges 1584-Gand 1667), (Irenée) Jules Bienaymé (Paris 1796-Paris 1878), Adhémar Barré de Saint-Venant (Villiers en Bière 1797-Saint Ouen près Vendôme 1886), Eugène Catalan (Bruges 1814-Liège 1894). Nous laisserons de côté des hommes du 16e siècle tels que Bonaventure Vulcanus (ou De Smet, 1538-1615), né à Bruges mais peu actif en mathématiques, ou Jean Stadius (1527-1579), dont le séjour à Bruges ne fut qu'une étape brève et tardive d'une carrière vagabonde, entamée en Savoie et terminée à Paris. Pour ceux que nous avons retenus, et dont nous n'analyserons pas ici les travaux scientifiques, Bruges a été une pépinière dans le sens suivant : ou bien ils sont nés à Bruges et lui sont redevables à tout le moins du début de leur formation intellectuelle (Stevin, St Vincent, Catalan), ou bien, nés en France, ils sont venus faire à Bruges une partie essentielle de leurs études (Bienaymé, St-Venant), plus précisément dans celui des lycées impériaux qui fut ouvert à Bruges de 1808 à 1814, sous le règne de Napoléon. Mais tous ont été ensuite transplantés ailleurs : en Hollande pour Stevin, dans divers collèges jésuites pour le Père Grégoire de St Vincent, à Paris pour les trois autres, avec une ultime implantation à Liège dans le cas de Catalan. Excepté pour Stevin, les traces assez réduites du séjour à Bruges de nos mathématiciens en herbe ont été soigneusement repérées dans les archives brugeoises par un érudit local, Germain Bonte, qui a eu l'idée du présent article, à la rédaction duquel son décès l'a empêché de participer. Les informations qu'il avait collectées pour nous sont reprises dans divers travaux (principalement les références Jo 1996, Jo 1997, J-S 1993, B-J 1998 de la notice bibliographique en fin de texte). Les pièces que nous comptons exploiter ici proviennent principalement d'autres sources que les archives brugeoises ; mais elles évoquent autant que possible les images et les souvenirs laissés par Bruges dans l'esprit des cinq acteurs en scène, et les rapports que cette communauté de sentiments a contribué à créer ou à maintenir entre eux.

2. Du 16e siècle au 17e : Simon Stevin et Grégoire de St Vincent

Fils illégitime d'Antheunis Stevin et de Cathelijne van de Poort, et après une jeunesse dont on ne sait rien, Simon Stevin est en 1577 employé au bureau des impôts à Bruges. Ayant ensuite quelque peu voyagé en Prusse, Pologne et Norvège, il se fixe dès 1581 à Leyde, dont il fréquente l'université avant de mettre sa compétence de mathématicien et d'ingénieur au service de Maurice de Nassau, prince d'Orange. Il prend bientôt une part active dans l'organisation du jeune Etat qui rassemble les provinces des Pays-Bas septentrionaux, affranchies de la tutelle espagnole, tout en rédigeant de multiples ouvrages sur des questions de mathématiques théoriques ou appliquées. Sa rupture avec la Flandre va lui être reprochée bien après sa mort, lorsqu'on propose en 1841 de lui ériger une statue à Bruges, sa ville natale. Certains ne pouvaient admettre un tel honneur pour un homme qui apparaissait, à tort ou à raison, comme un renégat à sa patrie et à sa religion. Mais les défenseurs du projet n'avaient pas pour unique argument le grand rayonnement scientifique de Simon. Celui-ci s'était ouvertement présenté à Leyde comme Simon Stevin de Bruges. Surtout, la plupart de ses ouvrages présentaient la particularité d'être écrits non pas en latin, ni même en français, mais en flamand ou néerlandais, le langage commun (à des nuances près) aux Pays-Bas méridionaux et septentrionaux, une langue que Stevin déclarait supérieure à toute autre pour les questions scientifiques. Les livres parus sous le nom de Stevin en français, en latin ou même en anglais sont majoritairement des traductions de textes déjà publiés en néerlandais. Bref, une statue représentant Simon Stevin fut inaugurée solennellement à Bruges en 1847, avec exécution d'une cantate dont nous aurons à reparler. Par une ironie du sort, la statue n'était pas prête au jour convenu et fut installée un peu plus tard ; pour comble d'ironie, elle n'était pas l' ?uvre d'un artiste flamand, mais du sculpteur liégeois Louis Eugène Simonis. Tout finit par s'apaiser, et Simon Stevin est aujourd'hui une des figures emblématiques de Bruges, aux côtés des peintres Hans Memlinc et Pieter Pourbus, de l'humaniste (espagnol) Juan Luis Vivès ou de l'imprimeur Hubert Goltzius. Une revue mathématique portant son nom a même vu le jour conjointement en Belgique et aux Pays-Bas ; elle est présentement reprise en charge par la Société mathématique de Belgique. Le souvenir et l'influence de Stevin restent cependant vivaces aux Pays-Bas.

Le cas de Grégoire de Saint Vincent est particulièrement ambigu. La naissance à Bruges ne fait pas de doute, attestée qu'elle est par lui-même dans une notice d'arrivée, en 1605, au noviciat Sto Andrea des jésuites à Rome, et confirmée via les multiples catalogues manuscrits dans lesquels les établissements de la Compagnie de Jésus recensaient leurs membres dès le 17e siècle ; certains de ces catalogues mentionnent aussi les six années d'humanités de Grégoire au collège de Bruges. En l'absence de toute autre indication donnée par Grégoire au sujet de sa famille et du cadre de son enfance, l'énigme de ses origines n'a pu être éclaircie que tout récemment (B-J 1998) : Grégoire serait l'ultime maillon connu d'une lignée de marchands espagnols installés à Bruges au long du 16e siècle et jusqu'en 1616, depuis son arrière-grand-père Pedro de San Vicente, en passant par son grand-père et son père, tous deux prénommés Gregorio. Le motif du silence obstiné de Grégoire sur ses attaches familiales n'est pas complètement élucidé, mais il pourrait être le souci de contourner l'interdiction mise, entre 1594 et 1608, à l'entrée dans la Compagnie de Jésus de ?Nouveaux chrétiens ? ou ?Conversos ?, c'est-à-dire d'Espagnols catholiques d'ascendance juive (ou more). Quoi qu'il en soit, les pérégrinations multiples de Grégoire après sa sortie du noviciat romain se sont en bonne partie déroulées en Flandre (Anvers, Louvain, Bruxelles, Gand, Courtrai), mais aucun retour à Bruges n'est établi, ni la moindre incursion en Espagne.

L'oeuvre mathématique de Grégoire de St Vincent est aussi un sujet délicat. L'auteur s'est lancé à corps perdu dans le projet chimérique de résoudre la quadrature du cercle par la règle et le compas, projet dont ses contemporains, Huygens en tête, ont eu tôt fait de déceler les points faibles. Pourtant, l'ingéniosité des méthodes mises en ?uvre fut suffisamment appréciée par Leibniz pour que celui-ci ait tenu à souligner combien il était redevable, dans l'édification de sa théorie du calcul intégral, au quadrateur attardé que fut Grégoire. Combiner des méthodes qui, manquant leur but avoué, vont permettre à un meilleur archer d'atteindre une cible plus élevée, c'est très beau en soi, mais pas tellement propice à l'édification d'une grande popularité posthume dans sa ville natale.

3. Le 19e siècle : Parisiens venus du nord

A peu près du même âge, St-Venant et Bienaymé ont été condisciples au Lycée impérial de Bruges, grosso modo de 1809 à 1813, puis se sont retrouvés, à Paris, en spectateurs (et quelque peu acteur pour ce qui est de Bienaymé) de l'agonie de l'Empire. Ils sont tous deux entrés à l'Ecole polytechnique, St-Venant en 1813, Bienaymé en 1815, mais ce dernier dut mettre fin à ses études en raison de la fermeture temporaire de l'Ecole en 1816, jointe à la mort de son père. Malgré des fonctions publiques qui leur imposaient, l'un aux Ponts et chaussées, l'autre à l'Inspection des finances, de lourdes prestations sous forme de séjours prolongés en province, ils ont tous deux déployé une remarquable activité de recherche, l'un en géométrie appliquée à la mécanique, l'autre en probabilités et statistique. Cette activité leur a valu de devenir membres de la Société philomatique de Paris, d'abord Bienaymé en 1838, puis St-Venant en 1843. Cette société savante passait pour être l'antichambre de l'Académie des sciences de Paris. Et Bienaymé devint en effet académicien libre en 1852, tandis que St-Venant dut attendre 1868 pour être élu à la Section de mécanique, reprenant le siège devenu vacant par le décès de Poncelet. On imagine bien que les deux amis ont eu maintes occasions d'échanger verbalement des souvenirs de Bruges, tant à la Société philomatique qu'à l'Académie des sciences. Peut-être les séjours en province auxquels ils étaient tous deux astreints ne leur ont-ils pas permis de se revoir aussi souvent qu'ils le souhaitaient. Quand Bienaymé fut mis à la retraite, en 1852, l'année même de son entrée à l'Académie des sciences, il fut d'abord très assidu aux séances du lundi, mais l'altération progressive de sa santé l'empêcha de plus en plus souvent, en tout cas après l'élection de St-Venant, et parfois durant des périodes entières de plusieurs mois, d'assister régulièrement aux séances. De son côté, après sa retraite, Barré de St-Venant s'était installé à St-Ouen près Vendôme. De là, il venait à l'Académie, d'abord très ponctuellement, ensuite de plus en plus rarement. Les occasions de se rencontrer à Paris devenaient de moins en moins fréquentes. Mais précisément, l'espacement des rencontres leur a donné des motifs de s'écrire, et c'est ainsi qu'on trouve, dans les archives de la famille Bienaymé ([1]), quatre lettres adressées, entre octobre 1876 et mai 1877, par St-Venant à son ?vieux camarade ?. Or, deux de ces lettres évoquent des souvenirs de la période brugeoise. Indépendamment des faits qu'elles rappellent, elles apportent déjà la confirmation, de la main même de

1. Nous n'avons pas eu l'occasion d'inventorier les importantes archives de St-Venant, qui se trouvaient initialement à Blois. Les lettres de Bienaymé ou Catalan à St-Venant seraient particulièrement intéressantes pour notre objet.

l'intéressé, que l'Adhémar Barré de St-Venant dont on peut suivre pas à pas la carrière scientifique en France est bien celui qui s'est assis sur les bancs du Lycée impérial de Bruges, et dont les résultats scolaires sont détaillés dans le Procès-verbal de la distribution solennelle des Prix au Lycée de Bruges de 1810 et 1811 (paru à Bruges chez Bogaert-Dumortier, imprimeur et libraire dudit lycée).

Le post-scriptum de la dernière lettre, du 24 mai 1877, mentionne en outre un fait mineur, mais révélateur de la qualité de la mémoire de l'octogénaire Barré : ?Une riche héritière, de ce pays-ci, a épousé l'année dernière M. Bénissart. C'est sans doute un petit-fils ou arrière-petit-fils du collègue de votre père à la préfecture de Bruges ?. Bel exercice de mémoire pour un retour en arrière de plus de soixante ans ! Les rares documents disponibles sur le personnel de la Préfecture de la Lys ne nous ont cependant pas livré de traces de ce collègue Bénissart. En revanche, dans le Procès-verbal qu'on vient de citer, on voit figurer à plusieurs reprises le nom de l'élève Auguste Hénissart, de Bruges en 1810, de Bruxelles en 1811. Il était vraisemblablement le fils d'un fonctionnaire du Département de la Lys en 1810, muté au Département de la Dyle en 1811. Le souvenir de St-Venant était donc fidèle, mais à un détail orthographique près, qui réduit à néant sa conjecture de filiation.

Datée du 23 octobre 1876, l'autre lettre de St-Venant à Bienaymé commente assez longuement le récent décès de Mme Bienaymé ; retenons-en le passage suivant : ?Vous m'avez dit que votre mariage avait été autant d'inclination que de parfaite convenance ; que votre jeunesse, toute au travail, et exempte d'écarts, avait été comme une continuation de votre vie d'écolier devenu encore plus studieux et régulier de conduite, à Paris, où vous aviez trouvé un second père dans votre proviseur, qu'à Bruges où déjà on vous remarquait. ? De cette longue phrase, deux extraits retiennent notre attention. Le premier ne se rapporte pas à Bruges, mais à la période 1813-1815 durant laquelle Bienaymé, revenu de Bruges à Paris, a fréquenté le Lycée Louis-le-Grand avant d'entrer à l'Ecole polytechnique. On apprend ici que Bienaymé avait alors trouvé un ?second père ? dans son proviseur. On peut, de façon quasi-certaine, identifier celui-ci à l'abbé de Sermand, proviseur de Louis-le-Grand de 1810 jusqu'à l'été 1815. Ce détail de la biographie de Bienaymé nous était inconnu jusqu'ici.

Un autre point de la lettre ci-dessus nous apprend que, à Bruges déjà, Bienaymé se signalait comme un écolier ?studieux et régulier de conduite ?. Cela, St-Venant a pu le constater de visu, mais peut-être ne savait-il pas que l'écolier Jules Bienaymé était d'abord passé par une phase de forte turbulence, comme en témoigne la jolie lettre que voici, écrite à l'ami Jules par son grand-père Louis Houdar de Lamotte en 1809.

A Jules Bienaimé au Lycée A Bruges

Paris 2 Mai 1809.

Je me flatte, mon bon ami Jules, que tu ne m'as pas oublié. J'ai appris avec bien du plaisir que tu n'es plus aussi turbulent, et que tu t'appliques davantage. Tu as des dispositions à obtenir des succès, tu es dans l'âge d'en profiter. Nous te savons bon gré de ce que ta bonne conduite a permis à ta Maman de venir passer quelques jours avec nous.

Ton cher Papa doit partir demain pour Bruges avec Monsieur de Chauvelin, ainsi il vous embrassera peu de jours après la réception de ma lettre.

Ta bonne Maman, ton Papa, ta Maman, tes Oncles et tes Tantes t'embrassent tendrement.

Adieu mon bon ami Jules, compte sur la tendre amitié de ton Bon Papa.

Houdar de Lamotte

Cette lettre n'évoque pas seulement la mutation d'un gamin par trop espiègle en un écolier modèle, elle rappelle opportunément que le père de Jules, Jean Charles Bienaimé, fut à Bruges l'homme de confiance du préfet Chauvelin du Département de la Lys, de même que l'artisan du changement du nom de famille Bienaimé en Bienaymé, lors du retour à Paris en 1813.

Après ce retour, et alors peut-être qu'il n'avait pas encore renoué des contacts avec St-Venant, on conçoit que Bienaymé ait été quelquefois envahi par la nostalgie de Bruges. Un homme de science, César Despretz (1789-1863), a pu partager de temps à autre ces sentiments. Il faut rappeler (Jo 1999) que Bienaymé a tenté, en 1819, d'obtenir un régime de vie plus favorable à la recherche en postulant une charge de répétiteur de deuxième classe à l'école spéciale dépendant de St-Cyr. Il obtint ce poste (qu'il abandonna un peu plus tard) grâce à l'entremise, auprès du tout-puissant inspecteur général Poisson, d'un homme qui lui annonça triomphalement la bonne nouvelle dans une lettre du 9 octobre 1819. Bien que difficile à déchiffrer, la signature nous suggérait obstinément le nom du physicien français Despretz. En nous reportant aux biographies existantes de celui-ci, nous avons découvert avec étonnement qu'il était d'origine belge (né à Lessines) et naturalisé français, mais surtout qu'il avait été maître d'études du Lycée impérial de Bruges ([2]). Ceci explique à merveille le ton très familier de la lettre en question, dont nous reproduisons ici les premières lignes, avec leur tutoiement caractéristique : ?J'aime à t'écrire, mon cher Jules, car c'est toujours pour t'annoncer de bonnes nouvelles. Je t'apprenais il y a quelques années que tu étais reçu le quatrième à l'Ecole politechnique ; je t'apprends aujourd'hui que tu es reçu le premier à St-Cyr. ? De plus, Despretz était bien placé pour recevoir de Poisson des informations de première main et même en discuter avec lui : il était répétiteur de chimie à l'Ecole polytechnique depuis 1818, alors que Poisson était examinateur de sortie. Reste la question du prénom de la signature. Mansuète César Desprets (ou Despretz) signait habituellement ses travaux César Despretz, alors qu'ici l'on lirait plutôt M. Despretz. Il est possible qu'il ait utilisé son premier prénom dans sa jeunesse, avant d'adopter César comme prénom courant, tout comme il est permis d'imaginer que les élèves de Bruges, frappés par un prénom aussi insolite que Mansuète, n'appelaient plus autrement leur maître d'études. Quoi qu'il en soit, voici un physicien issu de la pépinière de Bruges à point nommé pour conseiller et pour aider Bienaymé dans son itinéraire scientifique. Sans doute son influence fut-elle moindre que celle du ?second père ? trouvé en la personne de l'abbé de Sermand, mais des relations plus suivies ont pu s'établir à la Société philomatique à partir de 1838, puis à l'Académie des sciences de 1852 jusqu'à la mort de Despretz en 1863.

Venons-en au cadet des mathématiciens français issus de Bruges, Eugène Catalan. Il naît à Bruges en 1814, l'année même où la France perd le contrôle de la Belgique et où le Lycée impérial de Bruges ferme ses portes. Au sortir de l'enfance, il suit ses parents à Lille puis à Paris, où il va vivre près de quarante ans en combinant la recherche et l'enseignement des mathématiques, avant d'aller finir sa carrière à l'Université de Liège. Ce dernier venu n'a sans doute pu faire la connaissance de Bienaymé (en 1840) et de Barré de St-Venant (en 1843) qu'après son entrée à la Société philomatique, où il fut admis en 1840. C'est ainsi que se constitua, en 1843, au sein de la Société philomatique de Paris, un solide quatuor brugeois composé de Despretz, Bienaymé, Catalan et St-Venant. De ce quatuor, Catalan fut le seul à ne pas faire partie de l'Académie des sciences de Paris, malgré deux essais infructueux. (Jo 1996, p. 116-137).

2. Ce détail biographique est sans doute le fruit de déclarations de l'intéressé, car nous n'en avons trouvé aucune trace dans les archives brugeoises, où figurent par exemple des listes de professeurs du lycée ; mais Despretz n'était que maître d'études.

Nous n'avons trouvé aucune trace écrite de relations entre Catalan et Despretz. En revanche, Catalan a noué des échanges épistolaires avec St-Venant dès 1844, à propos de questions géométriques. Ces échanges ont perduré, sur un plan plus personnel, après le départ (en 1865) de Catalan pour Liège. Quant aux contacts directs que Catalan et Bienaymé ont eu, fût-ce sporadiquement, à la Société philomatique de 1840 à 1865, ils n'ont conduit à des relations épistolaires qu'à partir de 1876, quand Catalan a prié Bienaymé d'appuyer sa candidature à un siège de correspondant devenu vacant à l'Académie des sciences de Paris. Cette reprise de contact fut surtout l'occasion d'échanges focalisés sur des contributions anciennes ou récentes de Bienaymé au calcul des probabilités. Du plus grand intérêt pour l'appréciation de ces contributions, les échanges en question n'ont laissé comme vestiges que trois lettres retrouvées dans les papiers de Catalan. Ces pièces ne disent rien de Bruges, pas plus que les lettres de St-Venant à Catalan.

Pourtant, sans être très disert sur son passé brugeois, Catalan se plaisait à maintenir des contacts avec ceux qui, de près ou de loin, pouvaient lui rappeler Bruges. Outre Bienaymé et St-Venant, il avait, on ne sait comment, fait la connaissance de François Busschop, un avocat monté de Bruges à Paris en 1798, devenu juge au Tribunal de cassation de France, puis un des premiers chevaliers de la Légion d'honneur.

En 1828, au terme d'une carrière bien remplie, l'homme de loi revint à Bruges avec ses deux fils Paul et Jules, qui restèrent en contact avec Catalan et cultivaient d'ailleurs les mathématiques en amateurs. Si nous les citons ici, c'est parce que Jules, le cadet, littérateur et musicien, est l'auteur de la fameuse cantate en l'honneur de Simon Stevin, exécutée à Bruges en 1847, une cantate à propos de laquelle un critique musical osa écrire que Beethoven n'avait rien composé de plus grand. Ladite cantate n'a cependant pas atteint la célébrité de la Neuvième symphonie, car qui la connaît encore ? (Jo 1996, p. 143-144).

Il ne faudrait pas perdre de vue l'intérêt porté par Catalan aux Bardin qui lui étaient apparentés du côté maternel et qui restaient implantés dans la région brugeoise. C'étaient d'abord les grands-parents, Jean Bardin et son épouse Michelle Gagnepain, tous deux originaires de Beaune. Il y avait ensuite l'oncle Arthur et, parmi ses enfants, le cousin Arthur et la cousine Valérie. Après le décès de l'oncle, Catalan garda le contact avec Arthur fils, devenu secrétaire communal à Blankenberghe. Catalan séjourna plus d'une fois dans cette station balnéaire proche de Bruges. Quant à Valérie, elle était en 1865 lingère dans un couvent brugeois, quand Catalan, après son installation à Liège et le décès de ses deux filles, l'appela près de lui pour tenir compagnie à sa femme. Valérie ne quitta plus le couple, dont elle devint la légataire universelle.

Mais l'infatigable écrivain qu'était Catalan n'aurait-il rien écrit sur Bruges ? Comme la plupart de ses lettres sont perdues, il n'est pas tellement étonnant que le bilan soit maigrelet, rassemblé d'ailleurs dans un opuscule publié anonymement à Liège en fin de vie, sous le titre "Miettes littéraires et politiques par un vieux mathématicien" (Ca 1892). Dans les premières pages de ce recueil de souvenirs, on trouve par exemple le texte d'un poème composé à l'occasion d'un anniversaire de Michelle Gagnepain, ou des bribes de lettres à l'oncle Arthur. Transcrivons ici la pièce la plus évocatrice pour notre objet, un extrait d'une lettre envoyée de Bruges, le 26 août 1833, quand Catalan revint quelques jours dans sa ville natale, précisément pour l'anniversaire de sa grand-mère. ?Je puis vous assurer que les félicitations ne me manquent pas. Tous les jours, ce sont des louanges et des compliments à perte de vue, au point que j'en suis honteux. Hier encore, j'ai été à un fort beau château près de Bruges. Les paysans célébraient l'arrivée d'un jeune baron, leur Seigneur, comme ces bonnes gens le nomment. Mais ne voilà-t-il pas que, sur la fin du dîner, je suis devenu le héros de la fête ! Tous les assistants : barons, vassaux, vavassaux et vilains, ont bu à ma santé, et se sont récriés en exclamations quand ils ont su que je suis leur compatriote. O Monsieur, j'ai vraiment une indigestion de gloire et d'honneur ! ?

Ce texte assez lyrique est moins intéressant par son contenu que par l'identité de son destinataire ([3]), le chef de l'Institution de Reusse, dans laquelle Catalan se préparait à l'examen d'admission à l'Ecole polytechnique. Ce ?de Reusse ?, dont on ignore le prénom, semble avoir pris Catalan en amitié, à tel point qu'il fut plus tard le parrain de la fille Fanny de ce dernier. On a de lui deux lettres à Catalan, écrites en 1864 et 1865 ; il précise dans la dernière qu'il est âgé de 77 ans, ce qui, à un an près, le fait naître en 1788 et assure la cohérence chronologique des supputations qui vont suivre.

On est en droit de s'étonner du degré de familiarité de la lettre qu'on vient de citer. Plusieurs exemples prouvent que l'amitié naissait facilement entre Catalan et ses professeurs. Dans le cas présent, une circonstance particulière peut avoir aidé au rapprochement. La chronique du Lycée de Bruges révèle en effet que le professeur de mathématiques élémentaires en 1811 s'appelait de Reusse ou Dereusse, qu'il fut économe dudit lycée en 1813 et

3. Beaucoup de noms de personnes ou de lieux cités dans les *Miettes littéraires et politiques* ne figurent que par des initiales ; le plus souvent, le contexte ou la comparaison avec d'autres pièces permettent de reconstituer aisément des noms complets.

devint en 1814, suite aux revers napoléoniens, économe du Lycée de Nancy. C'est lui, vraisemblablement, qui ouvrit un peu plus tard à Paris l'Institution de Reusse, dans laquelle il accueillit un beau matin l'élève Catalan, né à Bruges à peu près au moment où il quittait lui-même cette ville pour Nancy. Toujours est-il que Catalan resta en contact avec Reusse bien après son entrée à Polytechnique, comme en témoignent deux autres lettres de Catalan partiellement reproduites dans les Miettes littéraires et politiques, puis les deux lettres très amicales de Reusse citées plus haut. Nous aurions mis Reusse dans la liste des mathématiciens ?brugeois ? s'il avait été l'auteur de quelque production mathématique substantielle.

Si l'image de Bruges apparaît ainsi en filigrane de diverses démarches de Catalan, le plus bel hommage qu'ait rendu à Bruges l'un de nos mathématiciens se trouve sous la plume de Bienaymé, dans sa correspondance avec Adolphe Quetelet (1796-1874), ainsi qu'on va le voir en revenant du même coup à Stevin.

4. Bienaymé, arbitre entre Stevin, Girard et Gilbert

Né à Gand la même année que Bienaymé, et adepte comme lui de la statistique, Quetelet est venu voir Bienaymé à Paris en 1846, prélude à quelques échanges épistolaires dans lesquels, malgré la dissemblance des conceptions scientifiques, se révèle la cordialité des rapports personnels. Deux des 10 lettres de Bienaymé conservées à l'Académie royale de Belgique (Fonds Quetelet, invent. 17986/386 ; les réponses de Quetelet sont perdues, à une exception près) vont retenir notre attention ; elles portent d'ailleurs la même date, le 25 juin 1861.

L'identité des dates s'explique fort simplement. La première des deux lettres est adressée au secrétaire perpétuel Quetelet de l'Académie de Belgique, pour être publiée dans le Bulletin (du tome 12 de la série 2, année 1861, pages 5 à 7). La seconde, destinée à Quetelet à titre personnel, commente plus librement le sujet relatif à Stevin, tout en touchant à d'autres questions, notamment la nomination de Bienaymé comme membre de la Commission centrale de statistique, fondée à Bruxelles un an plus tôt.

La première lettre dénonce l'inexactitude d'un article publié en 1859, dans ledit Bulletin (sér. 2, t. 8, p. 192-197), par le mathématicien français Louis Gilbert (1832-1892), professeur à Louvain. Celui-ci avait retrouvé, dans un texte très court imprimé en 1594, une méthode de Stevin pour le calcul par approximations successives (obtention des décimales de proche en proche) des racines d'une équation algébrique de degré supérieur à 2, méthode prétendument absente des éditions en français des ?uvres de Stevin par Albert Girard (1595-1632) en 1625, et par la veuve de Girard en 1634. Bienaymé relève que ladite méthode figure bel et bien dans les deux éditions, mais que, par une inadvertance de Girard, elle n'est pas reprise dans la table des matières. Girard, l'ami et l'éditeur occasionnel de Stevin, se trouve ainsi réhabilité, à une distraction bénigne près. Il convient de noter ici que les omissions ou fantaisies dans les tables des matières d'ouvrages anciens (ou moins anciens) ne sont pas tellement rares ([4]).

Le seul passage de la lettre qui fasse allusion à Bruges est la courte phrase : ?J'avais lu Simon Stévin, il y a bien des années, par suite des souvenirs que sa patrie me rappellera toujours ?. Dans un texte destiné à la publication scientifique, Bienaymé ne pouvait faire longuement étalage de ses sentiments personnels. Mais il se rachète superbement dans la lettre d'accompagnement à son ami Quetelet, lettre dont voici la transcription intégrale.

Monsieur,

Je tiens à vous adresser quelques mots de remerciement, en dehors de l'accusé de réception officiel pour la Commission Centrale de Statistique. Je devais vous écrire depuis longtemps. Il y a, je crois, une année entière que la lettre ci-jointe pour le Secretaire ppl. de l'Académie attend sur mon bureau que j'aie le courage de la copier. Je devais la donner à un Allemand fort savant en Arabe comme en mathématiques, M. Woepcke qui a eu l'honneur de vous voir l'année dernière. Mais j'étais souffrant à son départ d'ici ; et plus tard j'ai été trop occupé pour y penser.

Cependant ces jours-ci j'avais dit à mon bon confrère et ami Mr Chasles que j'allais vous l'expédier ; et il m'avait recommandé d'y joindre pour vous ses meilleurs compliments et souvenirs.

4. Sans chercher plus loin, le seul passage, d'ailleurs corrosif, consacré par Joseph Bertrand à Bienaymé dans son célèbre *Calcul des probabilités* est victime d'un cafouillage dans la table des matières du chapitre XI (table donnée une première fois en tête de volume et reprise par morceaux au début des chapitres). L'objection formulée par Bienaymé à la théorie des erreurs d'observation reçoit dans la table le n° 225, alors qu'elle figure dans le texte sous le n° 226. Le dérapage s'étend du n° 223 au n° 227 et affecte aussi bien l'édition originale de 1888 que l'édition posthume de 1907 et la réédition beaucoup plus tardive par Chelsea, laquelle se flatte néanmoins d'avoir pourchassé les erreurs matérielles.

Je me vois prévenu par l'honorable envoi que vous me faites d'un diplôme de correspondant de votre Commission Centrale. Je ne puis mieux vous en remercier qu'en vous montrant que je songeais à vous. mais sous forme ne répondant pas à ma volonté. Je vous prie de placer ma rectification sous les yeux de l'Académie ; et mes remerciements sous ceux de la Commission Centrale.

Vous vous étonnerez peut-être que je sache un peu mon Simon Stévin. C'est au tendre souvenir de la ville de Bruges, où j'ai passé plusieurs années de mon enfance, qui est cause que vers 20 ans je m'étais fort occupé de Stévin. Depuis bien des années, je n'y ai songé que de loin en loin. Mais je ne puis oublier Bruges, et je regrette de ne pas pouvoir y aller encore une fois. Ce ne serait peut-être pas très gai pour ma vieillesse de revoir les lieux où j'ai été heureux enfant. Cependant je suis quelquefois faché contre la fortune qui me défend de les revoir. C'est aussi la fortune qui m'empêche d'être abonné au Bulletin de l'Académie de Belgique ; et ce n'est que par hasard que j'ai vu la note de M. Gilbert contre l'inexactitude de laquelle je proteste.

Votre Commission me fait grand plaisir en m'offrant des publications. Mais où en trouverai-je la liste, pour lui demander ce qui me serait utile. Je chercherai.

Veuillez agréer, Monsieur et cher Confrère, avec l'expression de ma considération la plus distinguée celle de mon souvenir affectueux.

J. Bienaymé
56 rue St Louis-au-Marais

Paris 25 Juin 1861

Un commentaire n'ajouterait rien à la force des sentiments de nostalgie et de regret ici exhalés. Mais il convient d'expliquer brièvement l'insuffisance de la fortune de Bienaymé pour permettre un retour à Bruges ou un abonnement au Bulletin de l'Académie royale de Belgique. Lors de sa mise à la retraite (prématurée) en 1852, Bienaymé avait la charge de cinq enfants ; en 1861, il gardait celle de ses trois filles restées (et qui allaient rester) célibataires, sans profession lucrative. Il devait prévoir pour elles la constitution soit d'une dot en vue d'un hypothétique mariage, soit de ressources assurées après le décès des parents. Le petit domaine familial du

Bois des Fossés, dont il avait la jouissance à Chevannes, près de Ferrières-en-Gâtinais, fut d'ailleurs mis en vente en 1863. Contrairement à Catalan, Bienaymé n'avait pas gardé en région brugeoise, à notre connaissance, des attaches familiales susceptibles de lui fournir un lieu d'accueil peu onéreux. Tout cela, joint à la très piètre santé de son épouse et de lui-même, explique à suffisance la pointe d'amertume qui, au seuil de la vieillesse, s'ajoute à ses regrets.

Dix-sept ans plus tard, l'octogénaire Jules Bienaymé n'était toujours pas retourné à Bruges. Soulignons pour terminer la longévité, remarquable pour l'époque, de tous nos héros ex-brugeois : 71 ou 72 ans pour Stevin, 73 pour Despretz, 77 au moins pour Reusse, 79 pour Catalan, 82 pour St Vincent et Bienaymé, 88 pour St-Venant.

Pour la mise à disposition des documents exploités, nous devons des remerciements à M. Arnaud Bienaymé, à l'Académie royale de Belgique et au Fonds d'archives de l'Université de Liège.

Bibliographie

Bc 1998. Bockstaele P. : La mathématique, chap. 2 de la 2e partie de l'ouvrage intitulé *Histoire des sciences en Belgique de l'Antiquité à 1815*, Crédit Communal, p. 113-144.

Bo 1911. Bosmans H. : Notice sur St Vincent (Grégoire de), Biographie nationale, t. 21, col. 141-171.

B-J 1998. Bonte G. et Jongmans F. : Sur les origines de Grégoire de St Vincent, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique, Classe des Sciences*, sér. 6, t. 9, p. 295-323.

B-F 1886. Boussinesq J. et Flamant A. : Notice sur la vie et les travaux de M. de Saint-Venant, *Annales des ponts et chaussées*, sér. 6, t. 12, p. 557-595.

B-S 1985. Butzer P. et Schaffrath A. : Mathematics in Belgium from the time of Charlemagne to the 17th Century, *Actes du Colloque international René-François de Sluse*, Bulletin de la Société royale des sciences de Liège, t. 55, 1986, fasc. 1.

Ca 1892. Catalan E. : *Miettes littéraires et politiques par un vieux mathématicien*, Vaillant-Carmanne, Liège, publié sans nom d'auteur.

H-S 1977. Heyde C. et Seneta E. : *J.J. Bienaymé, Statistical theory anticipated*, Springer, New York.

Jo 1996. Jongmans F. : *Eugène Catalan, géomètre sans patrie, républicain sans république*, Soc. belge des professeurs de mathématique d'expression française, Mons.

Jo 1997. Jongmans F. :Bienaymé, Bruges et la Belgique, dans *Irénée-Jules Bienaymé 1796-1878*, Centre d'analyse et de mathématiques sociales n° 138 ; Paris, Bd Raspail 54, p. 5-21.

Jo 1999. Jongmans F. : Un regard nouveau sur l' ?uvre de Jules Bienaymé à la lumière des archives familiales et de la correspondance, à paraître dans les *Actes du Congrès international d'histoire des sciences et des techniques*, Liège 1997.

J-S 1993. Jongmans F. et Seneta E. : The Bienaymé family from archival materials and background to the turning-point test, *Bulletin de la Société royale des sciences de Liège*, 62, p. 121-145.

Qu 1864. Quetelet A. : *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, Hayez, Bruxelles.

Sa 1891. Sagnet L. : Notice sur César Despretz dans le t. 14 de la *Grande Encyclopédie* (Paris, Lamirault), p. 272. Il faut corriger la date du dècès : 15 mars 1863.

Se 1982. Seneta E. : Notice sur Bienaymé dans Kotz-Johnson, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Wiley, vol. 1, p. 231-233.

VL 1981. Van Looy H. : Sancto Vincentio, Gregorius a, wiskundige, *Nationaal biographisch woordenboek*, Brussel, t. 9, col. 677-684.

Dans *Dictionary of Scientific Biography* (sous la direction de Gillispie), Scribner, New York, on trouve des notices sur Bienaymé, Stevin, St-Venant et St Vincent, respectivement dans les volumes 15 (p. 30-33, par Heyde C.-Seneta E.), 13 (p. 47-51, par Minnaert M.), 12 (p. 73-74, par Itard J.) et 12 (p. 74-76, par Hofmann J.).

Courbes de croissance de microorganismes

V. Henry, P. Salengros, *Université de Liège & Haute Ecole Charlemagne - ISI Huy*

Résumé

L'objectif de cette note consiste à construire très simplement un modèle mathématique reflétant la croissance de microorganismes. L'examen de la courbe sigmoïde obtenue empiriquement conduit à la construction d'une équation différentielle dont la solution, qui est facile à déterminer, dépend de deux constantes ; ces dernières peuvent être obtenues par un ajustement linéaire adéquat.

Mots-clé

Modélisation, sigmoïde, fonction logistique, ajustement linéaire.

Développements

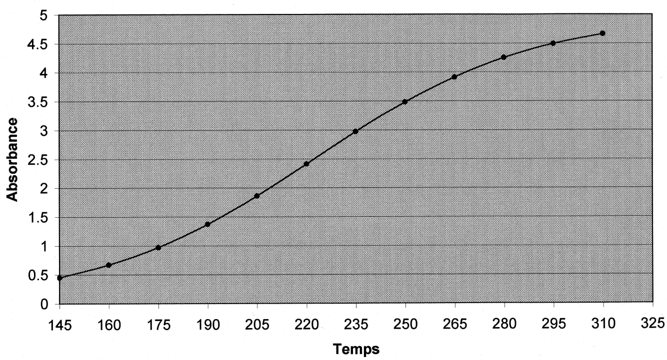
Pour une composition déterminée du milieu de culture, une température, des conditions d'agitation et d'aération fixées, une population de microorganismes croît au cours du temps. Cette croissance est suivie à l'aide d'un paramètre de population, appelé biomasse, et peut être évaluée de diverses manières, par exemple à partir de relevés de densité optique : on peut en effet mesurer la densité optique (ou absorbance A) en fonction du temps t.

Voici, en guise d'exemple, des données enregistrées pour une certaine quantité de glucose :

temps t (mm)	absorbance A
145	0.45
160	0.67
175	0.97
190	1.37
205	1.86
220	2.41
235	2.97
250	3.48
265	3.91
280	4.25
295	4.49
310	4.66

Des courbes semblables à la figure 1 tracée en reliant de manière lisse les points expérimentaux sont caractéristiques de la croissance de microorganismes. Leur allure générale est celle d'une courbe "sigmoïde", c'est-à-dire en forme de grand "S" incliné, qui croît régulièrement de l'ordonnée 0 à l'ordonnée-limite N, appelée le seuil de saturation ; sur notre exemple, N vaut visiblement 5.

Figure 1 : Absorbance



Nous nous proposons de construire une fonction de la forme $y = f(t)$ où y désigne l'absorbance et t le temps, dont le graphe est une courbe sigmoïde passant (approximativement) par les points expérimentaux. Plusieurs fonctions élémentaires peuvent être exploitées à cet effet, notamment la fonction arctangente. Nous allons en obtenir une autre en distinguant 5 phases bien typiques localisées sur la courbe obtenue à partir des points observés.

(a) Une phase de latence suit l'innoculation : les microorganismes s'adaptent alors au milieu et leur croissance est quasi-stable et nulle ; analytiquement, les valeurs de $f(t)$ et de $f'(t)$ sont positives mais très proches de 0.

(b) Une phase de démarrage : la vitesse de croissance augmente graduellement ; les valeurs de la dérivée première $f'(t)$ (qui n'est rien d'autre que la vitesse d'évolution) augmentent en même temps que celles de la fonction $f(t)$ elle-même et croissent de 0 à une valeur maximale obtenue en l'ordonnée $\frac{N}{2}$.

(c) Un point critique situé à l'ordonnée $\frac{N}{2}$: la vitesse de croissance atteint alors son maximum ; mathématiquement, il s'agit d'un point d'inflexion où la courbe change sa concavité en passant de la convexité à la concavité.

(d) Une phase de déclin : les microorganismes deviennent trop nombreux et ne peuvent plus proliférer aussi facilement, de sorte que la croissance s'atténue progressivement au fur et à mesure que l'absorbance augmente ; formellement, la dérivée première est décroissante mais toujours positive.

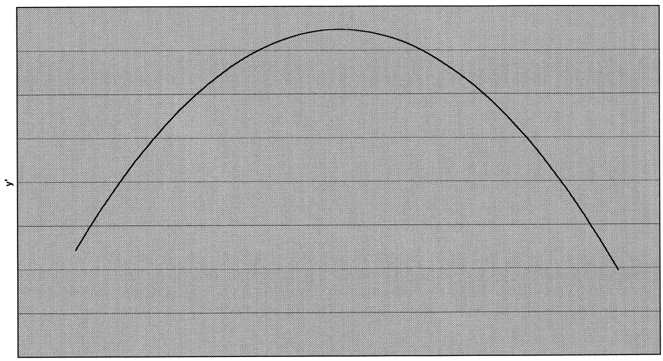
(e) Une phase de stationnarité : la croissance s'arrête pratiquement ; les valeurs de $f(t)$ sont proches du seuil N de saturation et celles de $f'(t)$ sont quasi nulles.

Les informations recueillies à propos des valeurs y de $f(t)$ et y' de $f'(t)$ peuvent être résumées par ce tableau facile à interpréter :

phases	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
y	~ 0	$\nearrow \cup$	$\frac{N}{2}$	$\nearrow \cap$	$\sim N$
y'	~ 0	$\nearrow$	y'_{max}	$\searrow$	~ 0

Mathématiquement, la dérivée y' varie avec y selon un graphe semblable à la figure 2.

Figure 2



Une modélisation très simple de cette situation consiste à supposer la dérivée y' proportionnelle à y et à $N-y$, à savoir

$$y' = ky(N-y)$$

où k désigne une constante de proportionnalité.

La solution générale de cette équation différentielle s'obtient aisément ; de fait, des calculs élémentaires donnent successivement (en tenant compte du fait que $y \in]0, N[$ et en notant C une constante d'intégration) :

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y(N-y)} &= kdt \\
\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{N-y}\right) dy &= Nkdt \\
lny - ln(N-y) &= Nkt + C \\
\frac{y}{N-y} &= e^{Nkt+C} \\
(1 + e^{Nkt+C})y &= Ne^{Nkt+C} \\
y &= \frac{N}{1 + e^{-Nkt-C}};
\end{aligned}$$

cette fonction est qualifiée de logistique et s'écrit généralement sous la forme suivante :

$$y = \frac{N}{1 + ae^{-bt}} = f(t)$$

où $a = e^{-C}$ et $b = Nk$.

Comme la valeur N de saturation est facile à repérer dans la pratique (rappelons qu'elle peut être prise égale à 5 dans notre exemple), la difficulté réelle consiste à déterminer des constantes a et b intervenant dans la formule, de manière à ce que la fonction obtenue "ajuste" bien les données empiriques. Bien que la fonction logistique n'est nullement affine, les constantes a et b peuvent être obtenues par un ajustement linéaire lorsque les mesures de l'absorbance sont équidistantes dans le temps (ce qui est le cas pour notre exemple). Il suffit en effet de travailler sur les inverses des valeurs y.

Désignons par t_0 l'instant initial correspondant, par exemple, à la première observation ($t_0 = 145$ pour notre exemple), considérons un accroissement de temps Δt fixe qui est égal au temps séparant deux mesures consécutives ($\Delta t = 15$ pour notre exemple) et notons

$$z_n = \frac{1}{f(t_0 + n\Delta t)}$$

(pour $n = 0, 1, \ldots, 11$ pour notre exemple).

On dispose alors clairement de cette relation de récurrence

$$z_{n+1} = \alpha z_n + \beta$$

avec $\alpha = e^{-b\Delta t}$ et $\beta = \frac{1-e^{-b\Delta t}}{N}$.

Ainsi, par un ajustement linéaire sur les points $(z_i, z_{i+1}) = P_i$, on peut estimer les valeurs de α et β, d'où l'on déduira celles de a et b ainsi que celle de $N = \frac{1-\alpha}{\beta}$.

Appliquons cette méthode à notre exemple. Le tableau ci-dessous reprend les valeurs de z_n en fonction de n au centième près :

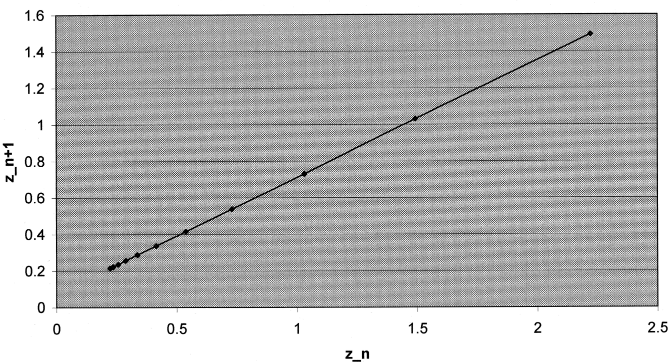
n	z_n
0	2.22
1	1.49
2	1.03
3	0.73
4	0.54
5	0.41
6	0.34
7	0.29
8	0.26
9	0.23
10	0.22
11	0.21

La droite des moindres carrés ajustant le nuage des points P_n possède pour équation dans notre exemple

$$z_{n+1} = 0.6401 z_n + 0.0715.$$

Elle est représentée sur la figure 3.

Figure 3 : Ajustement linéaire



Partant de la relation entre α et b, nous avons

$$b = -\frac{\ln \alpha}{\Delta t}$$

ce qui, dans l'exemple donne

$$b = 0.02974332.$$

La valeur de N calculée dans l'exemple est égale à $5,02765811$ valeur très proche de ce que nous avions deviné intuitivement.

Pour déterminer a, nous pouvons, par exemple, remarquer que nous avons successivement

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{N}{1+ae^{-bt_0}} \\ \Leftrightarrow ae^{-bt_0} &= Nz_0 - 1 \end{aligned}$$

ce qui conduit finalement à

$$a = (Nz_0 - 1)e^{bt_0}$$

et nous obtenons

$$a = 759.360472.$$

Ainsi, notre fonction logistique f possède pour équation

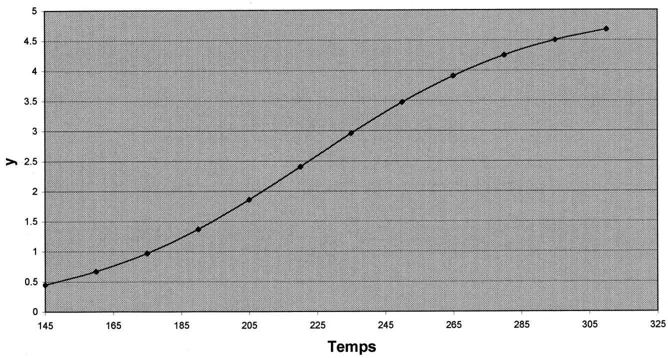
$$y = \frac{5,028}{1+759.36e^{-0.0297t}}.$$

Le tableau suivant reprend les valeurs de l'absorbance calculées à partir de notre fonction logistique $f(t)$ en fonction du temps t :

t	y
145	0.45
160	0.66934227
175	0.97287597
190	1.37076409
205	1.85686045
220	2.40210486
235	2.95808963
250	3.47255989
265	3.90756546
280	4.24820081
295	4.49925267
310	4.67613526

La figure 4 représente le graphe cartésien de la fonction logistique. Le tableau comme le graphe montrent clairement que la fonction logistique estimée est bien représentative des données expérimentales.

Figure 4 : Absorbance estimée



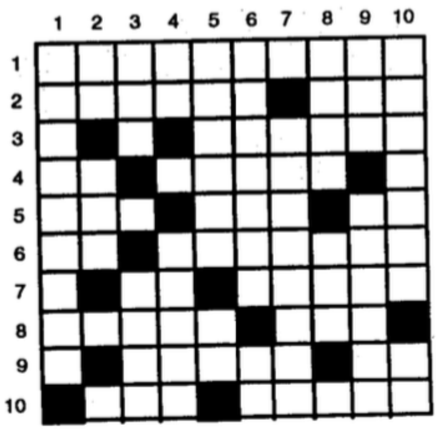
Adresse des auteurs :

V. HENRY
Université de Liège
Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales
Boulevard du Rectorat 7, Bât. B31
4000 Liège

P. SALENGROS
Haute Ecole Charlemagne
ISI Huy
Rue Saint-Victor 3
4500 Huy

Mots croisés mathématiques

D. Justens,



HORIZONTAL

1. Totalement primitives.
2. Idempotent non engagé - conséquence de l'incompréhension.
3. Effective.
4. Nombre - Se dit d'une thèse réfléchie
5. Opérateur logique - Bois - Accessoire du probabiliste.
6. Parfois répété - Période d'émeutes.
7. Cuivre - Imparfait de l'être.
8. Mathématicien par excellence - Unité.
9. Fleuves temporaires - Possessif.
10. Qualifie certain mathématicien - Qualifie certain.

VERTICAL

1. Elles ne sont pas destinées à le rester.
2. Négation -Potentat.
3. Refusa de dévoiler - Moment fort.
4. Opération logique - Compagne du chercheur
5. Star des ensemble et ensemble star - Soleil.
6. Recommence - Exigé.
7. Mathématicien par nécessité.
8. Prendre connaissance - Clarté inversée.
9. Période - Elégance de manuel.
10. Etouffent - Aluminium.

SOLUTION

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	I	N	T	E	G	R	A	L	E	S
2	N	E	U	T	R	E		I	R	E
3	C		T		O	P	E	R	E	R
4	O	R		M	U	R	I	E		R
5	N	O	N		P	I	N		C	E
6	N	I		S	E	S	S	I	O	N
7	U		C	U		E	T	A	I	T
8	E	U	L	E	R		E	R	G	
9	S		O	U	A	D	I		T	A
10		P	U	R		U	N	T	E	L

La “trinomite” et la “triangulite” exorcisées

R. Graas, *Inspecteur honoraire*

Le lecteur - à coup sûr passionné - de Keith Dezlin dans son livre “Mathématiques : un âge d'or” ([1]) se trouve transporté dans des mondes insoupçonnés découverts par les mathématiciens contemporains.

Le talent de l'auteur, clair et pédagogique à souhait, l'empêche d'être trop déconcerté même s'il se sent devant ce spectacle comme un lilliputien auprès de Gulliver.

Il peut se demander alors quelle signification gardent nos mathématiques de l'enseignement secondaire. Les programmes en vigueur avant la tumultueuse intervention de Papy, stagnaient sclérosés et bloqués par des jurys officiels depuis un siècle ou peu s'en faut. On comprend, rétrospectivement que tout cela ait été - hâtivement, hélas ! - balayé en honnissant “trinomite” et “triangulite”, symboles d'un enseignement archaïque au moins dans ses programmes. Trop d'exercices routiniers d'un côté et acrobatiques de l'autre. Un peu vite, le second degré et la géométrie classique (les “8 livres”) se trouvèrent voués aux gémonies. On se rappellera le mot de Dieudonné : “A bas Euclide !” (qu'il avouait avoir aimé dans sa jeunesse).

La Fontaine l'a bien dit : “On a souvent besoin d'un plus petit que soi”. Et le retour – sans complexe – de la vieille géométrie (et parfois dans le sens naguère honni !) devient manifeste par exemple dans les Olympiades. Le numéro 420 du début 1999 du bulletin de l'APMEP de France arbore en première page de couverture une splendide cubique qui passe par 17 points spéciaux d'un triangle. De quoi faire pâlir le cercle des 9 points d'Euler ! Quelle performance, éloignée pourtant de bien des besoins quotidiens ! Dans combien de domaines, la géométrie *élémentaire* et *simple* ne demeure-t-elle pas indispensable ? Optique, mécanique, chimie, ... Il faut raison garder et ne rien mépriser à la légère. Un mathématicien, revenu de captivité en 1945, racontait que, ne trouvant pas de poste d'enseignant, il avait travaillé - par la *descriptive* ! - dans une firme d'éclairage public ... (bien sûr, c'était il y a 50 ans mais l'exemple demeure significatif). La chaîne logigue - malgré ses failles - des “8 livres” dûment élaguée et complétée pourrait rendre les meilleurs services.

Et le second degré ? Il suffit ici de citer le splendide numéro de “Science et vie junior” de la fin 1998 tout entier consacré à ce sujet avec des prolonge-

1. traduit de l'anglais et paru en 1992 chez Masson, Paris (252 pp.)

ments bien inattendus : le "bête" classement d'un nombre par rapport aux racines d'une équation du second degré s'est trouvé utile pour étudier des splines du 3ème degré à propos de densité électronique dans les polymères stéréoréguliers (où les hélices requièrent ausi la géométrie élémentaire).

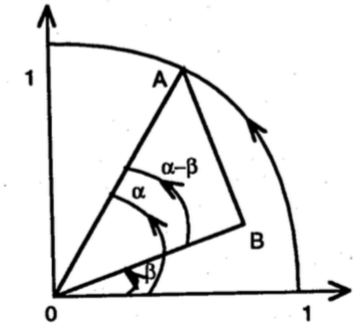
Les virus ne disparaissent pas comme on le voudrait. De-ci de-là, on retrouve encore des accès de "trinomite" et de "triangulite". Mais voilà ces vieux monstres dûment exorcisés. Les guenilles enlevées, on découvre le coeur de ces matières utiles et formatrices. D'autres fantômes - nouveaux venus - devraient peut-être aussi subir une telle libération. L'essentiel donc paraît être le bon usage de tous les instruments disponibles aux divers niveaux avec sagacité et discernement sans en "sacraliser" aucun.

Adressen de l'auteur :

R. GRAAS
Rue de Gembloux 35
5002 Saint-Servais

Démonstration sans parole

G. Lasters,



$$|OA| = 1 \qquad A = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$$

$$|OB| = \cos(\alpha-\beta) \qquad B = (|OB|\cos\beta,\ |OB|\sin\beta)$$

$$|OA|^2 = |AB|^2 + |OB|^2$$

$$1 = [\cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha-\beta)]^2 + [\sin\alpha - \sin\beta\cos(\alpha-\beta)]^2$$

$$1 = 1 + \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Bibliographie

G. Noël,

R. Rashed et B. Vahabzadeh, *AL-KHAYYĀM mathématicien*, Ed. Albert Blanchard, ISBN 2-85367-210-7, broché, x + 430 pages, 1999.

Le développement de la recherche sur l'enseignement des mathématiques a porté l'attention sur l'histoire des mathématiques et sur les enseignements qu'il est possible d'en tirer relativement à la formation des concepts à enseigner. C'est sans doute là une des raisons qui font que des activités (séminaires, colloques, publications) liées à l'histoire des mathématiques nous sont de plus en plus souvent proposées. Le présent ouvrage s'inscrit donc dans un contexte qui devrait lui conférer un intérêt certain. C'est en tant qu'enseignant des mathématiques que nous l'avons lu et c'est de ce point de vue que nous voulons en rendre compte, laissant ainsi aux spécialistes le soin de l'examiner du point de vue de la critique historique. Signalons simplement que le premier des deux auteurs est un historien des mathématiques bien connu ayant déjà à son actif plusieurs publications de haut niveau.

Abū Al-Fath 'Umar Ibn Ibrāhīm al-Khayyāmī a vécu en Iran au xi^{e} siècle après Jésus-Christ. Ses travaux portent sur les mathématiques et la philosophie. Il est également souvent cité comme poète, auteur du recueil connu sous le titre *Rubaiyat* (c'est-à-dire *Quatrains*). Mais d'après les auteurs du présent ouvrage, rien ne prouve l'identité du mathématicien et du poète. Encore une illusion perdue ! Ses œuvres mathématiques complètes sont ici commentées des points de vue mathématique et historique. Les sources originales, c'est-à-dire les manuscrits qui nous sont parvenus, sont décrites avec leurs relations de filiation ; les éditions imprimées ultérieures sont également présentées succinctement. Enfin, l'ouvrage comprend l'intégralité des textes reconstitués d'après l'analyse des manuscrits, dans leur version arabe ainsi que dans une traduction en langue française. C'est donc un document tout à fait complet qui est ainsi publié, un document qui s'adresse tant aux historiens des mathématiques qu'aux enseignants et aux épistémologistes.

L'œuvre mathématique d'al-Khayyāmī comporte deux parties. La première, en volume la plus importante, est constituée de deux traités : le *traité d'algèbre et d'al-muqābala* et le *traité sur la division d'un quart de cercle*. Elle peut-être considérée, selon les auteurs, comme un des textes fondateurs de la géométrie algébrique. On aurait envie d'ajouter "et de l'algèbre géométrique". Car le projet d'AL-KHAYYĀMĪ est un projet algébrique. Dans le cadre d'un va-et-vient constant entre algèbre et géométrie destiné à résoudre des problèmes laissés par "les anciens", il se fixe pour objectif de résoudre n'importe quelle équation du troisième degré. Il convient d'abord d'en élaborer une classification. En effet, à l'époque, les nombres négatifs sont totalement inconnus. Les deux équations que nous écririons $x^3 + ax^2 = bx$ et $x^3 + bx = ax^2$ sont donc de deux types différents et nécessitent des méthodes de résolution différentes.

Le même problème de classification s'était posé antérieurement pour les équations du second degré. Dès le IX$^{\text{e}}$ siècle, AL-KHWĀRIZMI mettait en évidence six espèces d'équations : $ax^2= bx$, $ax^2= c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$ et $ax^2 = bx + c$ et montrait comment les résoudre par radicaux. Un peu plus tard, THĀBIT IBN QURRA en donnait une traduction géométrique. La classification des équations de degré 3 due à AL-KHAYYĀMĪ comporte dix-neuf équations : $x^3 = c$, $x^3 = bx$, $x^3 = ax^2$, $x^3 + ax^2 = bx$, $x^3 + bx = ax^2$, $x^3 = ax^2 + bx$, $x^3 + bx = c$, $x^3 + c = bx$, $x^3 = bx + c$, $x^3+ax^2 = c$, $x^3+c = ax^2$, $x^3 = ax^2+c$, $x^3+ax^2+bx = c$, $x^3+ax^2+c = bx$, $x^3 + bx + c = ax^2$, $x^3 = ax^2 + bx + c$, $x^3 + ax^2 = bx + c$, $x^3 + bx = ax^2 + c$, $x^3 + c = ax^2 + bx$.

Dans le *traité d'algèbre et d'al-muqābala*, AL-KHAYYĀMĪ montre comment résoudre ces équations par des moyens géométriques. Le plus souvent, il ramène la résolution à la détermination de l'intersection de deux coniques.

Le *traité sur la division d'un quart de cercle* est antérieur au *traité d'algèbre et d'al-muqābala*. AL-KHAYYĀMĪ y pose le problème suivant : "*Nous voulons diviser le quart AB d'un cercle $ABCD$ en deux parties au point G, et mener la perpendiculaire GH au diamètre BD, telle que le rapport de AE à GH soit égal au rapport de EH à HB ; E est le centre du cercle, et AE est le demi-diamètre.*" L'analyse du problème aboutit à l'équation $20x^2 + 2000 = x^3 + 200x$, laquelle est alors résolue par la construction d'une branche d'hyperbole et d'un demi-cercle. Au passage, AL-KHAYYĀMĪ a élaboré la classification des équations de degré 3, équations qu'il résoudra systématiquement dans le *traité d'algèbre et d'al-muqābala*.

La seconde partie de l'œuvre d'AL-KHAYYĀMĪ est de nature géométrique et est constituée d'un *Commentaire sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide*. Un tel titre ne peut qu'attirer l'attention de tout mathématicien normalement constitué. Comme beaucoup de ses prédécesseurs l'avaient fait, et comme beaucoup de ses successeurs le feront, AL-KHAYYĀMĪ s'est donc attaqué à la démonstration du cinquième postulat d'Euclide. Dans son *Commentaire*, il analyse les tentatives antérieures et en dénonce les faiblesses. Il condamne par exemple l'utilisation du *mouvement* en géométrie. Il entreprend ensuite lui-même une démonstration. Mais AL-KHAYYĀMĪ est aussi un philosophe, il considère que certains énoncés ne doivent pas être démontrés car ils découlent *de la nature même des choses*. Il énonce et utilise donc des principes dont nous savons qu'ils sont équivalents au cinquième postulat. Le travail d'AL-KHAYYĀMĪ sur ce postulat n'a cependant pas été inutile car il a introduit des objets (par exemple les quadrilatères connus actuellement sous le nom de *quadrilatères de Saccheri*) qui ont joué un rôle non négligeable dans la création de la géométrie non euclidienne au XIXe siècle.

L'ouvrage d'AL-KHAYYĀMĪ comporte aussi deux "Livres" intitulés *Exposé sur le rapport et la notion de proportionnalité et sur leur véritable nature* et *De la composition du rapport et de sa détermination exacte.* AL-KHAYYĀMĪ y donne une définition de l'égalité de deux rapports différente de celle d'Euclide et aboutit à considérer le rapport de deux grandeurs comme étant lui-même un nombre, ce qui n'était pas le cas chez Euclide. C'est le concept de nombre qui s'est donc enrichi puisque le rapport de deux grandeurs incommensurables, si c'est un nombre, est un nombre qu'Euclide ne connaissait pas : nous l'appelons *irrationnel*.

On le voit par notre énumération : l'ouvrage de R. RASHED et B. VAHABZADEH, est extrêmement riche. Nous ne pouvions dans le cadre de ce compte-rendu (déjà très long) qu'en donner une idée sommaire. Mais chacun aura compris qu'il peut fournir aux enseignants des situations à étudier "comme à l'ancienne", des réflexions sur la nature des difficultés que les mathématiciens ont dû surmonter et que nos élèves rencontrent encore, ainsi bien entendu que des aspects historiques susceptibles d'intéresser certaines classes.

G. Noël

Olympiades

C. Festraets,

Voici les solutions des trois derniers problèmes de l'Olympiade Mathématique Internationale 1999. Comme pour les problèmes précédents, ces solutions sont dues à l'amabilité de **Monsieur P. Bornsztein de Courdimanche, France.**

Problème 4

Déterminer tous les couples (n, p) d'entiers positifs tels que p est un nombre premier, $n \leqslant 2p$, et que $(p-1)^n + 1$ est divisible par n^{p-1}.

Solution

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, p premier et $n \leqslant 2p$.

— Si $n = 1$, il est clair que $n^{p-1} = 1$ et divise $(p-1)^n + 1$.

— Si $p = 2$, alors $n \leqslant 4$. On vérifie que n^{p-1} divise $(p-1)^n + 1$ si et seulement si $n \in \{1, 2\}$.

— Si $p = 3$, alors $n \leqslant 6$. On vérifie cette fois que n^{p-1} divise $(p-1)^n + 1$ si et seulement si $n \in \{1, 3\}$.

— On suppose maintenant que $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 5$.
Tout d'abord, on note que $(p-1)^n + 1$ est impair, donc n est impair et alors $3 \leqslant n \leqslant 2p - 1$. Puisque n^{p-1} divise $(p-1)^n + 1$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$kn^{p-1} = (p-1)^n + 1 = \sum_{i=1}^{n} C_n^i p^i (-1)^{n-i} \equiv 0 \pmod{p} \qquad (1)$$

Si p divise n, puisque $n \leqslant 2p - 1$, on a $n = p$; (1) s'écrit alors,

$$p^2 = kp^{p-1} + p^3 \frac{p-1}{2} - \sum_{i=3}^{p} C_p^i p^i (-1)^{p-i}$$

avec $p - 1 \geqslant 3$ et $\frac{p-1}{2}$ entier. Par suite, $p^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$, ce qui est impossible et donc p ne divise pas n.
Puisque $n \geqslant 2$, n admet des diviseurs premiers qui sont (cfr. ci-dessous) distincts de p. Soit q le plus petit diviseur premier de n. q est impair et q divise $(p-1)^n + 1$. On pose la division euclidienne de $p - 1$ par q : $p - 1 = aq + r$ où $0 \leqslant r \leqslant q - 1$.
Si $r = 0$, q divise $p - 1$, or q divise $(p-1)^n + 1$, donc q divise 1. Contradiction !

Ainsi $r \geqslant 1$. On a

$$(p-1)^n + 1 \equiv 0 \pmod q$$

et

$$(p-1)^n + 1 = (aq+r)^n + 1 \equiv r^n + 1 \pmod q$$

donc $r^n \equiv -1 \pmod q$ et $r^{2n} \equiv 1 \pmod q$.
Soit w l'ordre de r, c'est-à-dire le plus petit entier strictement positif tel que $r^w \equiv 1 \pmod q$. Alors w divise $2n$. Et, comme q est premier, $r^{q-1} \equiv 1 \pmod q$ et w divise $q-1$.

- Si $w \geqslant 3$, alors w divise $2n$ avec n impair, donc w n'est pas divisible par 4 ; par conséquent w est divisible par un nombre premier $q' \geqslant 3$. Dès lors, q' divise n et q' divise $q-1$, d'où $q' < q$, ce qui contredit le caractère minimal de q.
- Si $w = 1$, alors $r \equiv 1 \pmod q$ et comme $0 \leqslant r \leqslant q-1$, on a $r = 1$.
  Cela entraîne que $(p-1)^n + 1 \equiv 2 \pmod q$, d'où q premier impair divise 2. Contradiction !
- Si $w = 2$, alors $r \neq 1$ et $r^2 \equiv 1 \pmod q$, d'où q divise $(r-1)(r+1)$ avec $2 \leqslant r \leqslant q-1$ donc $q = r+1$. Mais alors $p - 1 = aq + r = aq + q - 1$ d'où $p = (a+1) \times q$.
  Or p est premier, donc $a = 0$ et $p = q$. Ce qui contredit le fait que p ne divise pas n.

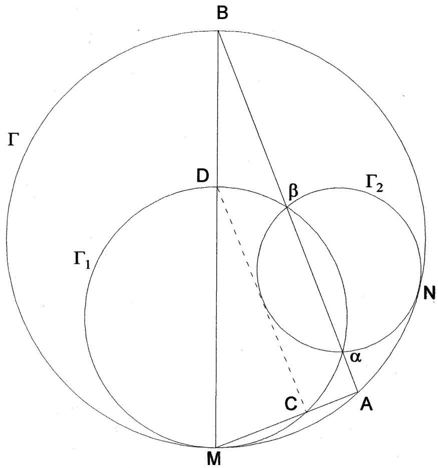
Finalement, pour $p \geqslant 5$ et $n \geqslant 2$, il n'y a aucune solution.
Conclusion : les couples cherchés sont $(1, p)$ où p est premier quelconque, $(2, 2)$ et $(3, 3)$.

Problème 5

Deux cercles γ_1 et γ_2 sont intérieurs au cercle γ, et sont tangents à γ respectivement en les points distincts M et N. Le cercle γ_1 passe par le centre de γ_2. La droite contenant les deux points d'intersection de γ_1 et γ_2 rencontre γ en A et B. Les droites MA et MB coupent γ_1 respectivement en C et D. Montrer que la droite CD est tangente au cercle γ_2.

Solution

On appelle O_1, O_2 les centres respectifs de γ_1 et γ_2 , R_1 et R_2 leurs rayons respectifs, α, β, les points d'intersection de γ_1 et γ_2.

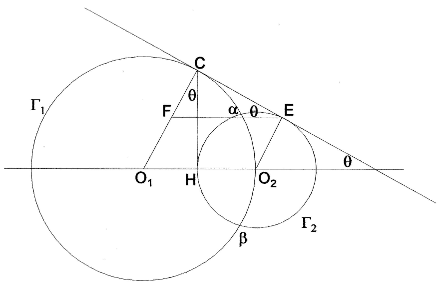


Soit T l'inversion de centre A qui transformera α en β. Sa puissance est $\overline{A\alpha} \times \overline{A\beta}$ qui est la puissance de A par rapport à γ_1 et par rapport à γ_2.

Il s'ensuit que γ_1 (resp.γ_2) est globalement invariant par T. De plus $A \in \gamma$, donc $T(\gamma)$ est une droite tangente à la fois à γ_1 et à γ_2. C'est donc une des tangentes communes à γ_1 et γ_2. M, C sont des points de γ_1 alignés avec A, donc $T(M) = C$ et comme $M \in \gamma$, on en déduit que C appartient à une des tangentes communes à γ_1 et γ_2.

On montre de même que D appartient à une des tangentes communes à γ_1 et γ_2 (via une inversion de centre B). Il est probable qu'il ne s'agisse pas de la même tangente commune. Mais de toute façon, s'il en était ainsi, on aurait directement CD tangente à γ_2.

On est ramené à la situation suivante :



— $E \in \gamma_2$ avec CE tangente à γ_1 et γ_2.
— H projeté orthogonal de C sur O_1O_2.
— $F \in O_1C$ tel que O_1FEO_2 soit un parallélogramme.

On veut prouver que H appartient à γ_2.

— Si $R_1 = R_2$, on a directement $H = O_1$ et comme $|O_1O_2| = R_1$, on a $H \in r_2$.
— Si $R_1 \neq R_2$, par exemple $R_1 > R_2$, alors les triangles CO_1H et EFC sont semblables, d'où :

$$\frac{|O_1H|}{|CO_1|} = \frac{|FC|}{|EF|}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{|O_1H|}{|R_1|} = \frac{R_1 - R_2}{|O_1O_2|} = \frac{R_1 - R_2}{R_1}$$

(car $O_2 \in \gamma_1$). D'où $|O_1H| = R_1 - R_2$ et $H \in \gamma_2$. Et ainsi, dans tous les cas, $H \in \gamma_2$ ce qui signifie que CD est tangente à γ_2.

Problème 6

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution

Soit f une telle fonction.

1. Pour tout $y \in R$, en faisant $x = f(y)$, il vient

$$f(0) = f(x) + x^2 + f(x) - 1$$

D'où, pour tout $x \in \operatorname{Im} f$

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 + f(0) - x^2) \tag{2}$$

2. D'autre part, puisque la fonction nulle n'est pas une solution du problème, il existe α tel que $f(\alpha) \neq 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$f(x - f(\alpha)) - f(x) = xf(\alpha) - 1 + f(f(\alpha))$$

Or $g : x \mapsto xf(\alpha) - 1 + f(f(\alpha))$ est une fonction affine non constante. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe a,b réels tels que :

$$x = f(a) - f(b) \tag{3}$$

(on pose $x = \lambda f(\alpha) - 1 + f(f(\alpha))$ et $a = \lambda - f(\alpha)$, $b = \lambda$).

3. Soient a, $b \in \operatorname{Im} f$, tels que $a - b \in \operatorname{Im} f$ (ce qui est possible d'après (3)).
   On pose $a - b = f(c)$ et donc :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a - f(c)) \\ &= f(f(c)) + af(c) + f(a) - 1 \\ &= f(a - b) + a(a - b) + f(a) - 1 \end{aligned}$$

   C'est-à-dire, puisque a, b, $a - b \in \operatorname{Im} f$ et d'après (2),

$$\frac{1}{2}(f(0)+1-b^2) = \frac{1}{2}(f(0)+1-(a-b)^2)+a(a-b))+\frac{1}{2}(f(0)+1-a^2)-1$$

   Ou encore :

$$\frac{1}{2}(f(0) + 1) - 1 = 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

   et donc, pour tout $x \in \operatorname{Im} f$: $f(x) = \frac{1}{2}(2 - x^2)$ en particulier, pour $x \in \mathbb{R}$: $f(f(x)) = \frac{1}{2}(2 - f^2(x))$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après (3), il existe a, b tels que $x = f(a) - f(b)$, d'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(f(a) - f(b)) \\ &= f(f(b)) + f(a) \times f(b) + f(f(a)) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(2 - f^2(b)) + f(a) \times f(b) + \frac{1}{2}(2 - f^2(a)) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(2 - (f(a) - f(b))^2) \\ &= \frac{1}{2}(2 - x^2) \end{aligned}$$

   Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2}(2 - x^2)$
   Réciproquement, si $f : \alpha \to \frac{1}{2}(2 - \alpha^2)$, alors pour tout x, y réels :

$$\begin{aligned}
f(x - f(y)) &= f\left(x - 1 + \frac{1}{2}y^2\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x - 1 + \frac{1}{2}y^2\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{2}xy^2 + x + \frac{1}{2}y^2
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1 \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}y^2\right)^2 + x\left(1 - \frac{1}{2}y^2\right) + 1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{2}y^2 + x - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^2 \\
&= f(x - f(y))
\end{aligned}$$

Donc, $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{2}x^2$ est bien solution du problème. Et finalement, la seule solution est $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{2}x^2$.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets,

Opérations élémentaires Problème n°221 de *Mathématique et Pédagogie* n°122.

Prouver que la somme de deux nombres premiers impairs consécutifs est le produit d'au moins trois facteurs premiers (non nécessairement distincts).

Une solution de ce problème est parue dans le n°125 de *Mathématique et Pédagogie*. Cette solution suppose que les nombres premiers considérés sont jumeaux. Or Monsieur J.G. Segers (qui m'avait envoyé l'énoncé) remarque, à juste titre, que deux nombres premiers consécutifs ne sont pas nécessairement deux impairs consécutifs (par ex. 7 et 11).

Solution de J.G Segers de Liège :

Soient $2a + 1$ et $2b + 1$, les deux nombres premiers impairs consécutifs. Leur somme : $2a + 1 + 2b + 1 = 2(a + b + 1)$ est multiple de 2.

$a+b+1$ est la moyenne arithmétique des deux nombres premiers, donc :

$$2a + 1 < a + b + 1 < 2b + 1$$

Or, entre $2a+1$ et $2b+1$, il n'y a aucun nombre premier, donc $a+b+1$ est composé d'au moins deux facteurs premiers.

Et dès lors, la somme $(2a + 1) + (2b + 1)$ en comporte au moins trois.

Tangente Problème n°226 de *Mathématique et Pédagogie* n°124.

Soit E un ensemble de 9 réels distincts. Montrer que l'on peut toujours trouver a et $b \in E$ tels que

$$0 < \frac{a - b}{1 + ab} < \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Solution de P. Dupont de Grez-Doiceau :

Les arctangentes des éléments de E sont 9 réels distincts dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$; en vertu du principe des tiroirs, il existe $a,b \in E$ (avec $a > b$) tels que $\arctan a$ et $\arctan b$ se trouvent dans le même des 8 intervalles

$$](k-1)\frac{\pi}{8};k\frac{\pi}{8}[$$

$(-3 \leqslant k \leqslant 4)$. Alors :

$$0 < \arctan a - \arctan b < \frac{\pi}{8}$$

C'est-à-dire :

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < \sqrt{2}-1$$

J'ai reçu beaucoup de solutions correctes, celles de J. Anseeuw de Roeselaere, N. Berckmans de Waterloo, M. Coyette de Rixensart, J. Finoulst de Diepenbeek, J.Goldsteinas de Bruxelles, H-J. Seiffert de Berlin, P. Bornsztein de Courdimanche, C.Van Hooste de Marbaix-La-Tour.

Premiers Problème n°227 de *Mathématique et Pédagogie* n°124.

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6n+5$ *où* $n \in \mathbb{N}$.

Solution de M. Coyette de Rixensart :

Notons $A = \{6n+5 | n \in \mathbb{N}\}$. Il faut montrer que A est un ensemble infini. A n'est pas vide car 5 et 11 sont premiers ($n = 0$ ou $n = 1$). Imaginons que A soit fini.

Notons S le produit de tous les nombres contenus dans A. Notons $t = 6s - 1$.

— Ce nombre t n'est pas un élément de A.
— Ce nombre t n'est pas divisible par 6.
— Ce nombre t est de la forme $6n+5$ (où $n \in \mathbb{N}$).
— Ce nombre t n'est pas divisible par un élément de A.

Constatons que les nombres premiers distincts de 2 et de 3 sont de la forme $6n+1$ ou $6n+5$ (où $n \in \mathbb{N}$).

Le produit de nombres de format $6n+1$ (où $n \in \mathbb{N}$) reste du format $6n+1$ (où $n \in \mathbb{N}$).

Si t possède des facteurs premiers du format $6n + 1$ (où $n \in \mathbb{N}$), il possède aussi au moins un facteur premier du format $6n+5$ (où $n \in \mathbb{N}$). Ce qui est impossible par construction. Donc, le nombre t est premier. Ce qui est impossible.

L'ensemble A est donc un ensemble infini.

Bonnes solutions de J. Anseeuw de Roeselaere, N. Berckmans de Waterloo, P. Bornsztein de Courdimanche, J. Golsteinas de Bruxelles, C. Van Hooste de Marbaix-La-Tour.

Deux équations Problème 228 de *Mathématique et Pédagogie* n°124.

a, b, c sont des entiers non-nuls. Sachant que l'équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

a une solution (x, y, z) *où* x, y, z *sont des entiers non tous nuls, démontrer que l'équation*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

a une solution où x, y, z *sont des rationnels.*

Solution de N. Berckmans de Waterloo :

Soit (m, n, p) une solution entière non nulle de l'équation $ax^2+by^2+cz^2 = 0$. Supposons $p \neq 0$.

L'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ possède une infinité de solutions rationnelles ; en voici un exemple :

$$x = \frac{m(1-c)}{2cp}, y = \frac{m(1-c)}{2cp}, z = \frac{1+c}{2c}$$

Voici le raisonnement tenu pour découvrir une telle solution. On pose $x = \lambda m, y = \lambda n$ et on cherche λ et z rationnels tels que :

$$\begin{aligned} a\lambda^2m^2 + b\lambda^2n^2 + cz^2 &= 1 \\ \text{c'est-à-dire } -c\lambda^2p^2 + cz^2 &= 1 \\ \text{ou encore } z^2 - \lambda^2p^2 &= \frac{1}{c} \\ (z - \lambda p)(z + \lambda p) &= \frac{1}{c} \end{aligned}$$

Si α et β désignent deux rationnels dont le produit vaut $\frac{1}{c}$, alors les solutions du système

$$\begin{cases} z - \lambda p = \alpha \\ z + \lambda p = \beta \end{cases}$$

sont rationnelles. On trouve

$$\begin{cases} z = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \lambda p = \frac{\beta-\alpha}{2} \end{cases}$$

et dès lors : $x = \frac{(\beta-\alpha)m}{2p}$ et $y = \frac{(\beta-\alpha)n}{2p}$.

L'exemple de solution donnée ci-dessous correspond à $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{c}$.

J'ai reçu des solutions variées de P. Bornsztein de Courdimanche, M. Coyette de Rixensart, J. Goldsteinas de Bruxelles. Un lecteur m'a envoyé une solution qui me semble incorrecte.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir avant le premier novembre 2000.

235. Troisième degré

Si p, q, r, sont les racines de l'équation $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$, déterminer la valeur de $p^3 + q^3 + r^3$.

236. Rayons et périmètres

R, r, p sont respectivement le rayon du cercle circonscrit, le rayon du cercle inscrit et le demi-périmètre d'un triangle ABC dont A est le plus grand angle. Démontrer que :

$p > 2R + r$ ssi $A < 90°$ et $p = 2R + r$ ssi $A = 90°$ et ...

237. Diamant

Un diamantaire façonne un diamant synthétique qui a 30 sommets et 18 faces. Ces faces sont 5 quadrilatères, 6 pentagones et 7 hexagones. Combien ce polyèdre a-t-il de diagonales intérieures ?

Revue des revues

C. Villers,

Bulletin de l'APMEP – N°426, Janvier – février 2000

Nouvelle présentation pour cette livraison du bulletin de nos collègues de France. Si le format n'a que peu changé par contre la mise en page est encore améliorée et la lecture des textes est particulièrement aisée.

Ce numéro commence, comme c'est l'habitude, par **l'éditorial de la Présidente, Catherine Dufossé**, qui dénonce le mépris dans lequel est tenue la fonction d'enseignant par les autorités politiques et pédagogiques de son pays.

Viennent ensuite de nombreux articles, généralement courts mais allant à l'essentiel, traitant de notions diverses et ciblant les différents niveaux de l'enseignement. Citons les titres et les auteurs.

A propos des projets de documents d'application des programmes de l'école élémentaire par Daniel Djament : L'auteur y dénonce la contradiction qui existe entre les objectifs d'initiation au calcul mental et l'affirmation dans les projets du programme que “apprendre à faire une division n'éclaire pas le sens de cette opération et prend beaucoup de temps”.

Enquête sur les parcours diversifiés par la Commission Collège. Les objectifs de l'enquête étaient :
— de constituer un recueil d'expériences sur les parcours diversifiés ;
— de proposer des idées ;
— de connaître les pratiques et les ressentis des collègues sur ce dispositif
Le texte proposé détaille une analyse des résultats de cette enquête.

Interdisciplinarité : les LP montrent la voie par Laurent Breitbach : L'auteur qui enseigne les mathématiques et les sciences aux mêmes élèves d'un lycée professionnel a ainsi pu établir un lien interdisciplinaire entre les contenus des activités en mathématiques et en sciences. Il expose trois exemples montrant le lien étroit pouvant être établi entre mathématiques et sciences.

Le cheval a sa ration que la raison ne méconnaît pas par le Groupe Py-Math du Ministère de l'Agriculture. Il s'agit de la description d'une activité pluridisciplinaire unissant la zootechnie, la mathématique et l'informatique.

Tour d'Europe des systèmes éducatifs par Jean-Paul Bardoulat. Différents systèmes éducatifs de plusieurs pays européens sont ici passés en revue.

Vers des niveaux de référence en mathématiques pour les pays de la Communauté européenne par Antoine Bodin. La construction européenne devrait s'accompagner d'une mobilité accrue des travailleurs et des étudiants. L'article tend à justifier que cette mobilité serait facilitée si des références communes existaient dans les domaines de l'éducation et de la formation. Les risques et les difficultés sont aussi prises en compte.

Les critères de divisibilité en Inde par Catherine Morice-Singh. L'auteur expose et explique – plus qu'elle ne démontre – de nombreux caractères de divisibilité.

Déclaration universelle des droits de la lettre par Louis Duvert. L'auteur défend l'article unique de cette déclaration, à savoir : "Toute lettre, quelles que soient son origine ethnique, sa couleur, sa taille a le droit d'exercer les emplois de variable, d'inconnue, de paramètre". A méditer par certains points de vue.

Pour l'exploitation de la lettre par l'homme par FranÁois Lo Jacomo. Il s'agit d'une réponse à l'argumentation développée dans l'article cité ci-avant.

Sur la définition d'un trapèze isocèle par S. Turnau. Quelques mots en réponse au contenu d'articles parus précédemment.

A vos maths, citoyens par B. Schibler. Commentaires concernant l'utilisation de la bande dessinée "Le javelot" par Sophie Rousse.

La brochure se termine alors par les rubriques habituelles, mais non moins intéressantes que sont : Avis de recherche, Les problèmes de l'APMEP, Matériaux pour une documentation, Pour un inventaire et Vie de l'association.