Mathématique
et
Pédagogie

Sommaire

• Ch. Van Hooste, *Éditorial* 3

Articles

• L. Lemaire, *La recherche mathématique aujourd'hui (édition an 2000)* 7

• B. Honclaire, *Argumenter ? Pourquoi ? Quand ? Comment ?* 37

• S. Courtois et F. Denis, *Droite de Simson* 50

Rubriques

• V. Henry et J. Bair, *Bibliographie* 48

• C. Festraets, *Olympiades* 62

• C. Festraets, *Des problèmes et des jeux* 66

• C. Villers, *Revue des Revues* 71

Publicités

• APMEP 6

• Ed. De Boeck–Wesmael 36

• Casio 47

N° 128 Septembre – Octobre 2000

NOTE

* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jacques Bair, rédacteur en chef, Université de Liège (FEGSS), Boulevard du Rectorat 7 (Bât. 31), B-4000 Liège, Courrier électronique : J.BAIR@ulg.ac.be Fax : 04/366.31.20.
* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques,...
* Conformément aux usages en matière d'édition, l'auteur est seul responsable des idées qu'il émet et des assertions qu'il propose. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
* Les articles seront de préférence dactylographiés. Si des illustrations sont prévues, l'auteur enverra des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être clichés. En dessous du titre de l'article, l'auteur mentionnera ses prénom et nom, ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum) ; à la fin de la note, il indiquera son adresse complète.
* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
  Pour les livres :
  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
  Pour les articles :
  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
* La revue est réalisée à l'aide du logiciel $\LaTeX 2_\varepsilon$. L'auteur peut envoyer son article encodé sur une disquette (3,5"), ou par courrier électronique : le processus de production en serait facilité.
* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

 Editeur responsable : J. Bair, Bd du Rectorat 7, (Bât. B31) B-4000 Liège. Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Mathématique et Pédagogie n° 128, 3–5, 2000

Éditorial

CH. VAN HOOSTE

Cette année, Seraing a été le théâtre du congrès de notre association. Madame la Ministre DUPUIS (Enseignement supérieur et Recherche scientifique), Monsieur le Ministre HAZETTE (Enseignement secondaire), Monsieur le Chanoine BEAUDUIN (Enseignement catholique), Monsieur GODET (représentant du Ministre NOLLET pour l'Enseignement fondamental), Monsieur le Député permanent GILLES (Enseignement provincial), Madame l'Echevine BUDINGER de la ville de Seraing (Enseignement communal) nous ont honorés de leur présence. Nous les remercions vivement, ainsi que Madame la Préfète ALLOO de l'Athénée Royal « Air pur » de Seraing.

Pour ce qui est du congrès en lui-même, rien de spécial n'est à signaler ; tout s'y est déroulé parfaitement : conférences et exposés d'un grand intérêt, organisation bien huilée, accueil chaleureux et repas sympathiques.

Néanmoins, pour tous les collègues qui ont eu la persévérance d'aller jusqu'au bout, à savoir la traditionnelle Assemblée Générale, ce congrès restera dans leur mémoire. En effet, pour la première fois, quatre personnes avaient posé leur candidature pour la présidence de la S.B.P.M.e.f.. Il a donc fallu procéder à une véritable élection et, pour cela, improviser un mode de scrutin. Celui qui fut finalement concocté devait, paraît-il, en pratique, garantir, presqu'à coup sûr, la majorité absolue à un des candidats et nous éviter ainsi de procéder à un deuxième tour de vote. En quelques mots, je tente de vous l'expliquer. Sur le bulletin de vote, les noms des quatre candidats figurent. Dans la liste proposée, chaque votant pointe autant de noms qu'il le souhaite (ou n'en pointe pas du tout) avec pour objectif de choisir tous ceux qu'il estime en mesure de remplir correctement la tâche de président. De cette manière, il n'est pas obligé d'opérer un choix douloureux entre deux candidats de même « valeur ». Et quel fut le résultat ? Non seulement la majorité absolue a failli ne pas être atteinte par aucun des candidats, mais, de plus, le vote a accouché d'un ex-aequo : 37 voix pour les deux meilleurs scores sur 72 votes émis. Et il y eut quand même un second tour. Pour une prochaine réunion, je lance donc l'avis suivant :

Recherchons mode de scrutin garantissant sûrement majorité absolue pour un des candidats en un minimum de procédures.

Les réponses seront reçues avec bonheur au secrétariat de notre société.

Au bout du compte, après les deux tours de scrutin, le congrès de Seraing a entériné un changement de président.

Avant toute autre chose, au nom de la SBPMef toute entière, je tiens à remercier Jacques Navez, notre président sortant pour le travail accompli pendant trois ans à la tête de notre association.

Pour les membres qui furent absents à cette mémorable A.G., je voudrais leur faire savoir les éléments du programme que j'ai défendu lors de l'élection.

- **Redynamiser la commission pédagogique.** J'estime qu'elle est probablement le meilleur moyen de justifier l'existence de notre association. Au vu de la qualité exceptionnelle du dossier n°6 (concernant les statistiques) produit par des membres de cette commission, il est clair que celle-ci est capable de mettre à la disposition de tous ceux qui enseignent des mathématiques des documents fouillés, riches et utilisables. Sur ce point, je lance, dès maintenant, un appel à tous les membres de la SBPMef. Vous avez certainement des idées ; vous connaissez des situations-problèmes qui vont sont propres. Venez les partager avec d'autres collègues au sein de la commission pédagogique. Aidez-nous à aider.
- **Créer des mathématiques pour tous.** Cet objectif prolonge le précédent. Il doit aussi se manifester via nos revues que sont « Math-Jeunes » et « Mathématique et Pédagogie » l'une s'adressant directement aux élèves, l'autre à leurs professeurs. Il faut que ces revues contiennent, me semble-t-il, des articles pour tous les niveaux de notre enseignement. Là encore, vous devez nous apporter votre concours. Des expériences vécues en classe, une leçon particulièrement bien réussie peuvent faire l'objet d'un article dans « Mathématique et Pédagogie ». Vous avez lu un bouquin, une publication ou un article traitant de math ; envoyez-nous alors un compte-rendu ou une critique afin d'alimenter les rubriques « bibliographie » ou « revue des revues » de « Mathématique et Pédagogie » et, par là, d'en faire profiter tous les lecteurs. « Math-Jeunes » aussi a besoin de vous. Vous pouvez devenir rédacteur dans « Math-Jeunes » ; il suffit, pour cela, de s'engager à écrire un article par an. Celui-ci peut concerner un jeu, des mathématiques du « quotidien » une situation-problème amusante, un prolongement à certains points du programme, des solutions à des questions posées aux olympiades, des problèmes venus d'ailleurs, de l'histoire, de l'humour, ...

– **Valoriser notre association auprès du grand public**, donc de nous faire connaître et montrer alors ce que nous sommes réellement, à savoir une société de profs active, qui se soucie de pédagogie, qui consacre du temps à parfaire son outil, ... A ce propos, une première piste serait d'ouvrir notre congrès vers l'extérieur, par exemple en y réservant « une journée portes ouvertes » durant laquelle des exposés grand public seraient organisés, y seraient aussi accessibles des expositions de notre matériel, celui que certains ont fabriqué de leurs propres mains.
– **Intervenir plus souvent auprès des responsables politiques de tous bords.** En toutes circonstances, changement de programme mathématique, modification importante de l'organisation de l'école (par exemple, la suppression des devoirs dans certains degrés du primaire), leur transmettre nos remarques, nos critiques, notre point de vue.

Ces quatre objectifs ne me paraissent pas utopiques et je m'engage à essayer de les atteindre « vite et bien ».

A bientôt ! Bonne rentrée scolaire !

Publications APMEP (France) : Ces publications peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.
– **Les brochures 1998-1999 sont signalées par ∗.**
– Le prix "*adhérent*" concerne l'A.P.M.E.P. **et la S.B.P.M.ef**.

N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix, en FB, *sans port*	
	Problèmes, rallyes,... :	public	adhérent
97	Jeux 4 (études sur les problèmes de rallyes)	660	**460**
∗119	Jeux 5 (activités mathématiques au collège)	515	**305**
98	Fichier Evariste (240 fiches "Benjamins" ou "Cadets")	515	**305**
250	Panoramath 96 (co-diffusion Archimède,...)	490	**345**
∗251	Panoramath 2 (co-diffusion Archimède,...)	555	**385**
	Les deux Panoramath ensemble :	1045	**505**
∗402	Jeux du Scientific American (co-diffusion ADCS)	830	**585**
∗451	Concours Australien de mathématiques		**515**
∗450	Math Evasion (Bandes dessinées lycées)	305	**215**
	Quelques grands thèmes :		
∗121	Maths en scène (22 thèmes, référés à l'expo "Math 2000" mais utilisables sans elle)	515	**305**
	Galion-thèmes :		
∗304	Série 4. Six plaquettes, collège ou lycée	305	**275**
∗305	Classe de Seconde : 10 thèmes programme 2000	460	**400**
	Evaluations (collection EVAPM) :		
112	Sixième (fin d'année) (Evaluation 1997)		
∗118	*Les deux fascicules ensemble* :	705	**490**
∗107	Premières (fin d'année) Documents : n° 90		
∗108	Trois fascicules : 90, 107 ; 108, ensemble (404 p.)	860	**585**
∗106	Terminales BEP (Lycées professionnels)	400	**275**
	Technologie moderne et mathématiques :		
∗352	Tableur et maths (Collège et début lycée)	490	**400**
	Faire de la géométrie sup. avec Cabri II		
∗124	Des points, droites, cercles, ... aux coniques		
∗125	... et aux cubiques		
	Les deux tomes ensemble (288 p. en 17 x 24)	705	**430**
∗120	Clas Math Lycée : Classeur informatisé de documents mathématiques - 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	2150	**1535**
	Version 26 installations, port compris	4305	**3075**

PORT EN FB (prix indicatif) : 1 brochure : 100 ; 2 ou 3 brochures : 160 et au-dessus de 3 : 260

Mathématique et Pédagogie n° 128, 7–35, 2000

La recherche mathématique aujourd'hui (édition an 2000)

L. LEMAIRE, *Université Libre de Bruxelles*

1. Introduction

En 1988, j'ai publié dans Mathématique et Pédagogie un texte montrant par cinq exemples divers aspects de la recherche mathématique aujourd'hui. Pour assurer l'avenir de cette recherche (en particulier en Belgique où elle se porte bien), il me semble en effet important de la faire connaître aux étudiants du secondaire, afin qu'ils puissent faire le choix éventuel de leurs études supérieures en connaissance de cause.

Les cinq sujets avaient été choisis parce qu'ils pouvaient être présentés sans trop de bagage technique, et parce qu'ils représentaient des aspects variés de ce qui se passe aujourd'hui.

Preuve de la vigueur de la recherche actuelle : douze ans après, deux des sujets sont tellement modifiés que le texte de 1988 est complètement dépassé, et pas mal de choses peuvent être ajoutées aux trois autres.

Il m'est donc paru utile de rédiger une nouvelle version mise à jour de cet article (le sous-titre édition an 2000 étant une concession à la mode).

Les mathématiques sont trop souvent perçues par le grand public comme une branche morte, un formalisme utile mais bien connu depuis très longtemps.

Or la réalité est toute autre : on fait des recherches en mathématique, on en fait peut-être plus qu'à n'importe quelle époque. Environ 60.000 articles sont publiés chaque année – de quoi remplir quelques rayons d'une bibliothèque. De plus, des problèmes fondamentaux restent à élucider, et on découvre régulièrement des résultats aussi importants que ceux que nous ont laissés les siecles passés.

Si ces faits sont peu connus, c'est que pour comprendre une bonne partie de ces résultats, il faut déjà connaître beaucoup de mathématique, et qu'on

(^{0}) Adresse de l'auteur: Luc Lemaire, Départment de Mathématique, C.P. 218 Campus Plaine, Université Libre de Bruxelles, 1050 Bruxelles.

ne peut pas s'appuyer sur une image concrète comme dans les sciences naturelles.

Heureusement, un certain nombre d'exemples peuvent (je l'espère !) être expliqués sans faire appel à des connaissances préalables, et le texte qui suit est une tentative de réponse à la question : comment donner à des non-mathématiciens (en particulier de jeunes élèves) une idée de ce qui se fait en mathématique.

Comme point de départ des recherches mathématiques, supposons que nous voulions résoudre un problème, dans n'importe quelle branche : science, économie, etc. On essayera de le mettre en équation, c'est-à-dire d'écrire une équation qui le représente. Ensuite on la résoudra, ce qui donnera la solution du problème.

En résumé :

$$\begin{array}{lcl} \boxed{\text{Problème}} & \rightarrow & \boxed{\text{Equation}} \\ & & \quad\downarrow \\ \boxed{\text{Solution du problème}} & \leftarrow & \boxed{\text{Résolution de l'équation}} \end{array}$$

Schéma 1

Tout le monde a rencontré cette démarche dès l'école primaire, lorsqu'il s'agissait de calculer le bénéfice d'un marchand débitant des mètres de tissus à des prix variés.

En fait, beaucoup de problèmes ne se traduisent pas par des équations, mais par des modèles mathématiques plus compliqués, qu'il faut alors étudier. Pour simplifier, je n'aborderai pas ces questions, et me contenterai d'envisager le cas des équations.

Par exemple, on peut obtenir une équation linéaire $ax + b = 0$, dont la solution est évidemment $x = -b/a$, ou une équation du deuxième degré $ax^2 + bx + c = 0$, dont les solutions sont données par la célèbre formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

On pourrait aussi obtenir des équations cubiques ou quartiques :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

et à nouveau on peut trouver des formules – moins connues et plus compliquées – donnant explicitement les solutions :

$x=$ expression faisant intervenir les quatre opérations et des racines

Par contre, à partir de l'équation du 5ᵉ degré

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

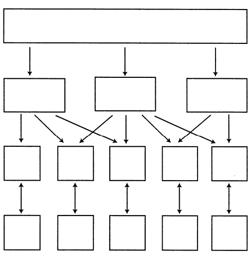
on sait depuis Abel (1826) et Galois (1831) qu'il n'existe pas de formule générale de ce type donnant les solutions de l'équation (on dit qu'on ne peut pas « résoudre l'équation par radicaux »).

Ceci reflète une situation assez fréquente, que je résumerai comme suit :

Sauf dans quelques cas heureux, on ne peut pas écrire une formule donnant les solutions d'une équation.

Dès lors, le processus de résolution des problèmes du schéma 1 est bloqué : on a une équation mais pas ses solutions. Il faut alors trouver autre chose pour avoir quand même des informations sur la solution du problème. D'une certaine façon, ceci est pour moi le début des mathématiques : puisqu'on ne peut résoudre individuellement chaque équation, on a développé des méthodes plus générales, qui donnent des indications sur les solutions. L'étude de ces méthodes est ensuite aidée par l'élaboration d'une théorie générale qui les recouvre.

Très schématiquement, je présenterais la situation comme suit :



IV Théorie générale

III Méthodes

II Equations
(ou modèles mathématiques)

I Problèmes

Schéma 2

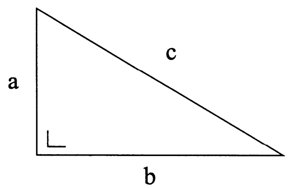
Par exemple, si on ne peut pas résoudre une équation du 5^{e} degré par radicaux (en II), on sait au moins par des résultats plus généraux (en III) qu'elle a au maximum 5 solutions. De plus, la théorie de Galois permet de préciser quand on peut la résoudre par radicaux et pour cela il a introduit la notion de groupe, qui, certainement entre dans la théorie générale et a des applications dans de très nombreuses méthodes en III et équations en II. Ainsi, le fait qu'on ne puisse pas résoudre toutes les équations du 5^{e} degré par radicaux a fait progresser l'ensemble des mathématiques.

Voyons maintenant quelques exemples de sujets de recherches qui illustrent ceci. Leur choix est purement personnel et ils ne donnent certainement pas une idée équilibrée de l'ensemble des mathématiques. Les cinq sujets sont distincts, et on peut donc sauter un paragraphe au gré de sa fantaisie.

1. Le théorème de Fermat-Wiles

Commençons cet aperçu des mathématiques d'aujourd'hui par le théorème de Pythagore (qui en fait était déjà connu des Babyloniens, 1000 ans avant Pythagore) : dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit est le carré de la longueur de l'hypoténuse, en formule :

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Par exemple, si $a = 1$, $b = 2$, on a $c = \sqrt{5}$, qui n'est pas un nombre entier. On pourrait se poser le problème : quels sont les triangles rectangles dont les trois côtés sont de longueur entière. Les équations de ce problème sont :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a, b, c \text{ des entiers positifs.} \end{cases}$$

Ce type d'équation n'est pas très familier : à première vue il y a une équation et trois inconnues, mais la condition a, b, c entiers modifie toute la question : si on choisit au hasard a et b, c a peu de chance d'être entier.

Pour le plaisir, voici la solution complète de cette équation. Dans un premier temps, on peut chercher des exemples de solutions, et on vérifie que :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 \;=\; 13^2$$

Ensuite, on peut remarquer que si (a, b, c) est une solution et k un entier positif, alors $(k.a, k.b, k.c)$ est également une solution, ce qui nous en donne une infinité.

On peut aussi utiliser quelques formules d'algèbre, et voir que si m et n sont des entiers positifs avec $m > n$, alors en posant $a = m^2 - n^2, b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, on a bien

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + n^4 + 2m^2n^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

En groupant les deux dernières remarques, on voit que si k, m, n sont des entiers positifs avec $m > n$, alors $a = k(m^2 - n^2), b = 2kmn, c = k(m^2 + n^2)$ est une solution.

Vérifions enfin que ces formules fournissent toutes les solutions.

Pour cela, remarquons d'abord que l'équation

$$a^2 + b^2 = c^2$$

peut aussi s'écrire

$$x^2 + y^2 = 1,$$

où $x = a/c$ et $y = b/c$ sont des nombres rationnels positifs.

La question est donc de trouver sur le cercle de rayon un du plan les points dont les deux coordonnées sont rationnelles et positives.
Nous pouvons réécrire les formules donnant (a, b, c) en fonction de m, n et k, et nous avons

$$\begin{aligned} x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} &= \frac{1 - (\frac{n}{m})^2}{1 + (\frac{n}{m})^2} \\ y = \frac{2mn}{m^2 + n^2} &= \frac{2(\frac{n}{m})}{1 + (\frac{n}{m})^2} \end{aligned}$$

Posons $t = \frac{n}{m}$ (et donc t est positif et rationnel). Les valeurs de x et y données par les formules ci-dessus sont donc paramétrisées par

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, y = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad t \in \mathbb{Q}^+$$

Montrons que toutes les solutions rationnelles (x, y) de $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0, y > 0$ s'obtiennent ainsi. Pour cela, posons simplement $t = \frac{y}{x+1}$ (ce qui implique t rationnel).

On obtient alors :

$$t(x+1) = y,$$

$$t^2(x+1)^2 = y^2 = (1 - x^2) = (1+x)(1-x)$$

d'où

$$t^2(x+1) = 1 - x,$$

$$t^2 x + x + t^2 - 1 = 0$$

d'où

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

et ensuite

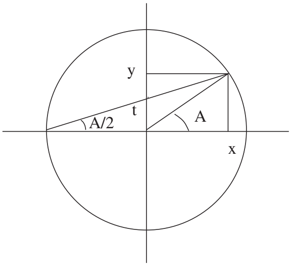
$$y = t(x+1) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \frac{2t}{1+t^2},$$

ce qui conclut la démonstration : chaque couple (x, y) provient d'une valeur rationnelle de t.

Ceci était connu d'Euclide et Diophante (mathématicien grec du 4$^{\text{e}}$ siècle).

On ne peut pas dire exactement comment ces formules ont été découvertes (à l'époque comme maintenant les mathématiciens procèdent par tatonnement et par intuition), mais aujourd'hui on peut mieux les comprendre en terme de trigonométrie, en reconnaissant les formules classiques de la tangente de l'angle demi.

Géométriquement on a :



$$x = \cos A, y = \sin A, t = \mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

Mais revenons au théorème de Fermat.

En 1637, le mathématicien « amateur » Pierre de Fermat (juge au tribunal de Toulouse) lit une traduction latine du traité (grec) de Diophante. Et il la lit comme un chercheur, c'est-à-dire qu'il ne se contente pas de comprendre le texte, il se pose des problèmes qui pour lui sont naturellement soulevés par les résultats donnés. Par exemple il se demande si on peut aussi résoudre l'équation $a^3 + b^3 = c^3$, ou plus généralement $a^n + b^n = c^n$, toujours avec a, b, c entiers positifs.

Et il écrit (en latin) dans la marge de son livre : « *Un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux puissances quatrièmes et plus généralement, aucune puissance supérieure à 2 n'est jamais la somme de deux puissance analogues. J'ai trouvé une démonstration vraiment merveilleuse de cette proposition, mais la marge est trop petite pour l'y écrire* ».

En d'autres termes, il affirme que pour $n \geqslant 3$, on ne peut trouver aucun triple (a, b, c) d'entiers positifs tels que $a^n + b^n = c^n$.

Cette phrase de Fermat, publiée après sa mort est le point de départ d'une des histoires les plus fascinantes des mathématiques, car après d'innombrables travaux pendant plus de 350 ans, durant lesquels le « théorème de Fermat » a pris le statut d'un véritable mythe en mathématique, cet énoncé n'a finalement été démontré qu'en 1995 !

Remarquons d'abord qu'un ordinateur – aussi puissant soit-il – ne peut pas résoudre ce type de question. En effet, s'il peut vérifier qu'un grand nombre de triples (a, b, c) ne satisfont pas l'équation, il ne peut pas faire une infinité de calculs et ainsi vérifier qu'il n'y a aucune solution.

Au cours des siècles, les mathématiciens ont donc développé un grand nombre de méthodes et de concepts pour faire avancer cette question.

Par exemple, Kummer a introduit les « nombres idéaux » devenus ensuite les idéaux en algèbre. Par ailleurs, les nombres complexes interviennent dans divers résultats partiels au cours des siècles.

Dans les vingt dernières années, le nombre de travaux importants touchant au théorème de Fermat est devenu très important, mais ce fut une surprise spectaculaire lorsque le mathématicien anglais Andrew Wiles annonça, lors d'une réunion à Cambridge le 23 juin 1993, qu'il avait démontré le théorème de Fermat.

Sa démonstration, complexe et brillante, s'appuie sur une série de résultats antérieurs, et je vais citer ici quelques jalons.

L'idée de base a été obtenue en 1985 par G. Frey et est la suivante.

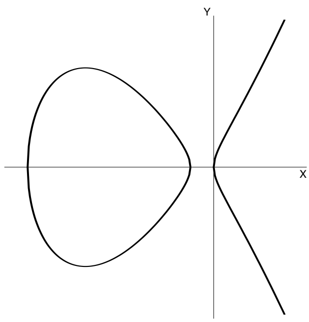
Supposons le théorème de Fermat faux. Il existe donc des entiers positifs. a,b et c et un entier $n \geqslant 3$ tels que

$$a^n + b^n = c^n$$

Dans le plan de coordonnées (x, y) considérons alors la courbe d'équation

$$y^2 = x \cdot (x - a^n)(x + b^n).$$

C'est une courbe du troisième degré, dont le graphe ressemble à ceci :



Dans $\mathbb{R}^2$, on ne peut rien déduire, mais remplaçons les réels x et y par des complexes. L'équation du troisième degré est maintenant complexe, et fournit deux équations réelles en les quatre variables réelles qui forment le couple de complexes (x, y). L'ensemble des solutions forme donc une surface réelle dans $\mathbb{R}^4$, appelée une courbe elliptique, qui en fait à la forme d'un tore.

Or, la théorie des courbes elliptiques est très développée. En particulier, dans les années 50, deux mathématiciens japonais, Taniyama et Shimura, ont énoncé une ambitieuse conjecture affirmant que toute courbe elliptique possède une propriété de symétrie très forte, à savoir être modulaire (il n'est pas possible de définir cette notion ici).

Et ce que Frey affirme en 1985 est que la courbe elliptique construite avec les nombres a, b et n ci-dessus n'est pas modulaire si $a^n + b^n = c^n$.

Donc, si le théorème de Fermat est faux, la conjecture de Taniyama - Shimura l'est également.

Cette affirmation de G. Frey est démontrée par K. Ribet l'année suivante, et en 1986 on sait donc que si on peut démontrer la conjecture de Taniyama - Shimura, on aura démontré au passage le théorème de Fermat.

Andrew Wiles raconte que depuis son enfance il connaissait l'énoncé du théorème de Fermat, et avait rêvé de le démontrer. Son travail de recherche portait toutefois sur un sujet apparemment distinct : les courbes elliptiques.

En 1986, le résultat de Frey – Ribet le poussa donc naturellement à tenter l'exploit de démontrer la conjecture de Taniyama – Shimura – et donc le théorème de Fermat.

De façon tout-à-fait inhabituelle, Wiles a travaillé seul pendant sept ans, sans publier de résultats partiels et sans indiquer à ses collègues et amis ce qu'il faisait, visant le tout pour le tout, c'est-à-dire une démonstration complète.

Et c'est ce résultat qu'il a annoncé à Cambridge en 1993, déclenchant (une fois n'est pas coutume) une série d'articles dans les journaux du monde entier.

(Plus précisément, il démontre un cas particulier de la conjecture de Taniyama - Shimura, suffisant pour impliquer le théorème de Fermat).

Mais l'histoire ne s'arrête pas là. La démonstration de Wiles fait l'objet d'un article de 200 pages qu'il soumet au journal Annals of Mathematics. Les éditeurs du journal soumettent ce manuscrit à six experts, pour vérification (normalement un ou deux experts sont consultés, mais l'article est tellement important et difficile que les éditeurs veulent être certains). Et un des experts trouve un trou sérieux dans la démonstration, que Wiles ne peut pas boucher rapidement.

A nouveau Wiles s'isole pendant que les rumeurs vont bon train, et travaillant avec son ami R. Taylor arrive à boucher le trou après un an.

L'ensemble de la démonstration est finalement publiée en 1995.

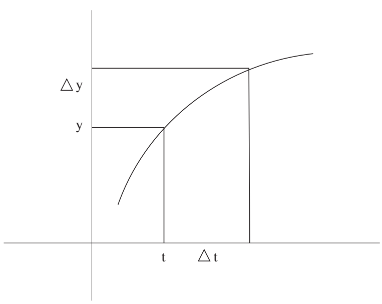
En résumé :
- il semble clair que Fermat a fait une erreur dans sa démonstration (plus tard, il écrit d'ailleurs qu'il a démontré un cas particulier)
- cette erreur a été bénéfique pour le développement des mathématiques : l'étude de ce problème (II dans le schéma 2) a motivé d'importants développements aux niveaux III et IV, qui à leur tour se sont appliqués à d'autres équations
- la solution montre bien l'unité des mathématiques : un problème de théorie des nombres entiers fait appel à un nombre énorme de notions de diverses branches des mathématiques.

Et ajoutons que cette histoire fascinante est complètement atypique, le développement habituel de la recherche en mathématique n'est pas lié à des phrases écrites dans des marges, des problèmes résistant 350 ans ou des mathématiciens s'isolant pendant des années.

2. Equations différentielles

Rappelons d'abord la notion de dérivée. Si $y(t)$ est une fonction, et Δt un accroissement de la variable t, considérons l'accroissement correspondant de y :

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$



Le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ mesure le taux d'accroissement de la fonction sur l'intervalle Δt.

On fait alors tendre Δt vers 0, et si elle existe, on note $y'(t)$ la valeur limite de $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Ce nombre $y'(t)$ – la dérivée de y en t – représente les taux d'accroissement de la fonction en t.

Si t représente le temps et $y(t)$ la position d'un point se déplaçant sur une doite, $y'(t)$ représente la vitesse du point au temps t.

On peut alors considérer $y'(t)$ comme une nouvelle fonction. Sa dérivée est notée $y''(t)$: c'est la dérivée seconde de y.

Si $y(t)$ est la position d'un point mobile, $y''(t)$ est le taux d'accroissement de la vitesse, c'est-à-dire l'acccélération du point.

L'équation fondamentale de la mécanique de Newton est :

$$F = m \cdot a,$$

où F est la force subie par un point, m sa masse et a son accélération. On a une idée assez intuitive de cette loi en voiture : quand on appuie sur l'accélérateur, on communique une force à la voiture et elle a une accélération proportionnelle à la force et inversement proportionnelle à la masse.

En général, la force subie par un point peut dépendre de l'instant t, de la position y du point (par exemple, un point attaché à un ressort subit une plus grande force si le ressort est tendu), et de sa vitesse y' (les forces de frottement varient avec la vitesse). Nous écrirons alors l'équation sous la forme :

$$my'' = F(t, y, y').$$

Le problème que l'on se pose est le suivant : l'expression de la force étant donnée, déterminer la trajectoire du point, c'est-à-dire la fonction $y(t)$. L'inconnue n'est donc plus un nombre, mais une fonction. Une telle équation faisant intervenir les dérivées de l'inconnue est appelée équation différentielle.

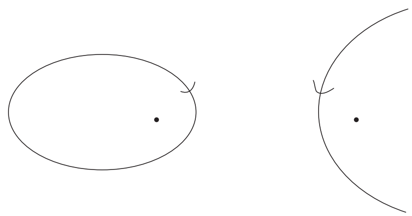
On démontre que si à un instant initial t_0 on prescrit la position et la vitesse du point (c-à-d. $y(t_0), y'(t_0)$), alors la trajectoire ultérieure est complètement déterminée : si on lance un objet, on fixe sa position et sa vitesse au moment où on le lache, et il continue ensuite tout seul.

L'équation $F = m \cdot a$ peut s'écrire dans des cas plus compliqués : un point se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$ ou plusieurs points agissant les uns sur les autres. C'est en fait pour étudier dans un même cadre la trajectoire des planètes et la géométrie des courbes que Newton et Leibnitz ont inventé la notion de dérivée et le calcul différentiel (vers 1675).

Nous retombons immédiatement sur le point de départ de ce texte : il est très rare que l'on puisse résoudre une équation différentielle !

Reprenons le problème de l'astronomie : les corps dans l'espace s'attirent les uns les autres selon une force déterminée par les lois de Newton.

Le cas le plus simple est le problème des deux corps : par exemple une étoile et une planète, sans autre corps à proximité. Dans ce cas, on peut résoudre explicitement les équations, et on sait qu'un corps décrit un ellipse, une parabole ou une hyperbole autour de l'autre.



Par contre, dès qu'on passe au problème des 3 corps, on ne possède pas de formule donnant la solution générale de l'équation $F = m \cdot a$. Et il est fort probable qu'on n'en trouve jamais. Par exemple, pour un système constitué de 2 étoiles tournant l'une autour de l'autre et d'une planète plus légère, une trajectoire telle que celle du dessin est parfaitement possible (ici les deux étoiles tournent l'une autour de l'autre, mais on suit le mouvement en les observant ce qui fait qu'elles semblent immobiles) :

on ne s'attend donc pas à trouver une formule décrivant toutes les trajectoires de ce genre.

Mais alors, quel type de résultat peut-on obtenir ?

D'une part, on peut obtenir des approximations de la solution.

Dans l'étude du système solaire, comme chaque planète est beaucoup plus légère que le soleil, l'attraction d'un planète sur une autre est beaucoup plus faible que celle du soleil. En première approximation, chaque planète a une orbite elliptique autour du soleil, orbite qui en fait est perturbée par les autres planètes.

Et ces perturbations induisent des différences par rapport aux mouvements elliptiques qui peuvent être calculées.

Dès le milieu du 18^{e} siècle, Lalande et Clairaut calculent que les perturbations dues à Jupiter et Saturne retarderont d'un an et huit mois le retour de la comète de Halley, et prévoient ce retour pour le milieu d'avril 1759, à un mois près – prévision vérifiée le 12 mars !

En 1846, les mathématiciens Adams et Le Verrier ont étudié les perturbations de l'orbite d'Uranus depuis sa découverte en 1781, et ont déduit qu'elles devaient être provoquées par la présence d'une planète inconnue, dont ils ont pu déterminer la position. Suivant ces indications, elle a été observée immédiatement par Galle. (Il s'agit de Neptune.)

Ces calculs sont des exploits impressionnants, d'une extrême précision, utilisant à la fois des siècles d'observations astronomiques et la puissance du calcul différentiel.

Notons qu'il a fallu attendre 1930 pour découvrir Pluton, à un endroit prévu par un coup de chance et quelques fautes de calcul.

Actuellement, la trajectoire des satellites artificiels est contrôlée par des ordinateurs. Ils ne peuvent pas résoudre les équations de la mécanique, mais ils peuvent donner des approximations de la solution avec une précision remarquable. La réussite la plus spectaculaire dans ce domaine est pour moi la mission de la sonde Voyager 2 : lancée en 1977, elle est passée près de Jupiter en 1979, de Saturne en 1981, d'Uranus en 1986, et de Neptune en 1989. Elle a parcouru plusieurs milliards de km, et cela avec une quantité de carburant finalement très faible ! Le principe d'un tel voyage est d'utiliser la force de gravitation de chaque planète pour être catapulté vers la suivante : on calcule qu'une petite déviation (consommant peu de carburant) faisant passer un peu plus près d'une planète aura des effets très importants sur la suite du parcours.

L'usage de l'ordinateur ne résout toutefois pas les questions théoriques. En 1887, le roi Oscar II de Suède a institué un prix pour récompenser celui qui établirait que le système solaire est stable, c'est-à-dire qu'aucune planète ne risque d'être éjectée du système (non, ce prix ne s'appelait pas un Oscar !).

Comment ceci pourrait-il se produire ? On peut imaginer que chaque fois que la Terre et Mars passent du même côté du Soleil, l'attraction qu'elles exercent l'une sur l'autre les rapproche un petit peu, et qu'après des millions d'années elles en viennent à passer telllement près l'une de l'autre que Mars soit catapultée vers le Soleil et la Terre hors du système.

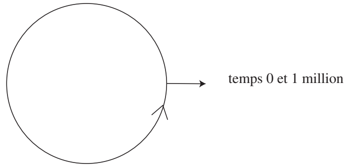
Comme une petite perturbation à un moment donné peut avoir des effets énormes bien plus tard, le calcul de solutions approximées par ordinateur ne peut pas aider à cette question.

Le prix fut gagné en 1900 par Poincaré qui ne résolut pas la question, mais qui développa pour commencer son étude une branche des mathématiques initiée par Euler (1735) et Riemann (1851), mais qui n'avait rien à voir avec la mécanique : la topologie ou étude des formes.

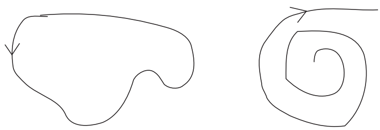
Son idée de départ est la suivante. Supposons qu'en deux instants différents, toutes les planètes se retrouvent exactement aux mêmes endroits avec les mêmes vitesses, par exemple aux temps 0 et 1 million d'années. Puisque les positions et les vitesses déterminent la suite du mouvement et que ces données sont les mêmes au temps 1 million qu'au temps 0, le système doit recommencer le même mouvement et reviendra au même point au temps 2 millions, puis 3, 4 et ainsi de suite. On dit alors que le système est périodique, et il doit alors être stable, car si une planète se perdait, elle ne serait pas au rendez-vous suivant.

On peut représenter tout le système (disons 40 planètes et satellites) par un seul point bougeant dans un grand espace (de dimension 240) représentant les positions et vitesses des astres.

Dire que le système est périodique signifie que ce point a une trajectoire fermée, par exemple un cercle



Mais que cette courbe soit un cercle, une ellipse ou une courbe fermée plus compliqué n'a aucune importance pour le problème : la seule chose qui compte est qu'elle soit fermée.



oui non

C'est le point de départ du travail de Poincaré, et il est plus difficile d'expliquer la suite. Le paragraphe 3 montrera de façon plus convaincante l'utilité de cette idée.

En 1963, Arnol'd, Kolmogorov et Moser ont utilisé les développements de la topologie pour donner un élément de réponse (qui aurait laissé perplexe le roi Oscar) : moyennant certaines hypothèses, un système planétaire est probablement stable. Et ceci dans le sens précis suivant. Considérons une donnée initiale (positions et vitesses au temps zéro). La probabilité pour qu'elle donne une trajectoire instable est nulle. Mais – et c'est là le hic – une petite variante de cette donnée initiale peut le rendre instable.

Mais la réponse « finale » à la question de la stabilité de notre système solaire n'est venue que récemment, des travaux de G.J. Sussman et J. Wisdom (en 1988) et surtout de Jacques Laskar depuis 1989.

Pour l'expliquer, il faut parler un peu d'un sujet à la mode depuis une quinzaine d'années : la théorie du chaos.

Commençons par un exemple simple : le jeu de dés.

Quand nous lançons un dé, nous le lachons à un certain moment avec une position et une vitesse donnée, et les équations de la mécanique nous disent que la suite de son mouvement est déterminée.

Mais bien sûr, il va s'arrêter sur une face au hasard (avec une probabilité de un sur six).

Comment expliquer ce paradoxe apparent qu'un mouvement totalement déterminé mène à un résultat aléatoire (c'est-à-dire laissant la place au hasard).

La réponse est qu'on ne peut pas déterminer *exactement* la position et la vitesse du dé. Si on essaie de le lancer deux fois de la même manière, on aura toujours un petit écart – fut-il d'un dixième de millimètre. Et au premier rebond du dé cet écart minime pourra le faire rebondir d'un côté ou d'un autre, ce qui amènera un écart important au deuxième rebond, écart qui ne fera que s'amplifier.

En résumé, le dé a un comportement probabiliste parce qu'un petit écart de position à un moment donné (écart trop petit pour être observé) donne lieu rapidement à un écart beaucoup plus grand.

En mathématique, on dit qu'un système est *chaotique* s'il est régi par des équations différentielles telles qu'un petit écart de position soit multiplié – par exemple par 10 – dans un temps petit par rapport à la période d'observation.

En utilisant des ordinateurs, et un modèle mathématique adapté pour les équations du système solaire, J. Laskar a « suivi » les mouvements des planètes sur 200 millions d'années, en faisant varier plusieurs fois les conditions initiales (positions et vitesses à l'instant de départ).

Ces calculs montrent que les trajectoires des grosses planètes (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune) sont stables : elles ne varieront pas pendant plusieurs milliards d'années.

Par contre, les trajectoires des petites planètes intérieures (Mercure, Vénus, la Terre et Mars) sont chaotiques : un écart de position d'un centimètre peut devenir un million de kilomètres en 200 millions d'années.

Même si les équations du mouvement sont parfaitement déterministes et ne laissent aucune place au hasard, il est évidement impossible de mesurer les positions des planètes à un centimètre près, et donc de dire où elles seront dans 200 millions d'années à un million de kilomètres près.

Les calculs de Laskar en disent plus :

Les mouvements de Vénus, la Terre et Mars sont chaotiques - et les orbites de ces planètes peuvent varier fortement mais elles restent toutefois dans des bandes séparées.

Par contre, Mercure pourrait traverser l'orbite de Vénus, et même être éjectée du système solaire.

De façon plus concrète, ces calculs donnent une explication du comportement mystérieux de Vénus. En effet, alors que les huit autres planètes tournent toutes sur elles-mêmes dans le même sens (le soleil se lève à l'Est), Vénus tourne dans l'autre sens.

Explication : le modèle montre que la position de l'axe de rotation de Vénus est chaotique, et qu'il a pu se retourner plusieurs fois depuis la création du système solaire.

Si Vénus tourne dans l'autre sens que les autres planètes, ce n'est pas de façon systématique, mais de façon variable.

Des calculs montrent aussi que si la lune n'existait pas, l'axe de la Terre serait lui aussi instable : au lieu de rester à 23° 30, il pourrait passer de 0 à 60° en deux millions d'années, avec des conséquences sur le climat qui nous auraient sans doute empêché d'être ici pour les étudier ! Heureusement pour nous, la lune est bien là.

Pour conclure ce paragraphe, je voudrais préciser que ces résultats récents ne contredisent pas ceux de Newton, Adams ou Le Verrier, mais qu'ils les prolongent.

Pendant 4000 ans, les observations astronomiques donnent l'image d'une situation stable.

De même, les calculs de Laskar confirment que les trajectoires des planètes resteront stables pendant au moins un million d'année - ce qui aurait rassuré le roi Oscar.

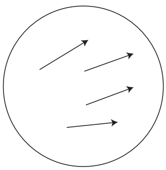
Mais à l'échelle de l'univers avec un système solaire vieux de 5 milliards d'années, une étude sur 200 millions d'années a un sens, et à cette échelle de temps apparaissemt des instabilités.

L'analyse mathématique donne des résultats précis, et précise aussi à quelle échelle de temps physique ces résultats s'appliquent.

3. Le théorème de la boule chevelue

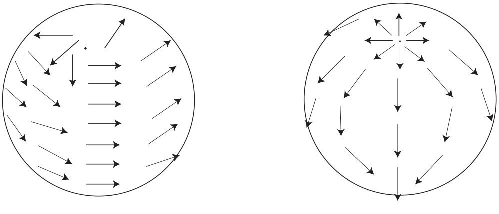
Voici un théorème de topologie, qui n'a été motivé que par l'étude pure de cette branche.

Considérons une sphère (la surface d'une boule) et en chaque point de cette surface un vecteur tangent : on parle d'un champ de vecteurs tangents à la sphère. On peut envisager cet objet en imaginant un cheveu planté en chaque point de la sphère et coiffé à plat (des cheveux coiffés en brosse ne sont pas tangents à la sphère).

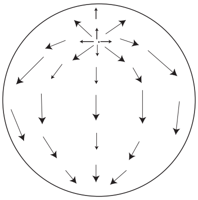


On demande que ce champ de vecteurs ait deux propriétés. Il doit être non nul, c'est-à -dire qu'aucun vecteur n'est réduit à 0. Il doit être continu, ce qui intuitivement signifie que si 2 points sont proches l'un de l'autre, les vecteurs correspondants le sont aussi.

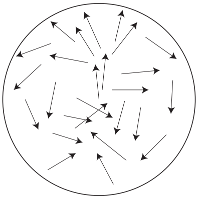
Le théorème peut-être un peu inattendu dit qu'un tel champ de vecteurs n'existe pas sur la sphère. Les quelques dessins qui suivent montrent ce qui ne marche pas.



Deux champs de vecteurs non continus aux pôles



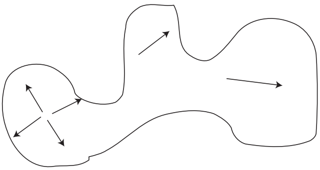
Un champ de vecteurs nul aux pôles



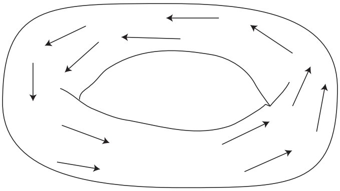
Champ de vecteurs non continu en un seul point

Intuitivement, on peut dire que si on essaie de coiffer à plat une sphère, on aura toujours un épi ou une ligne.

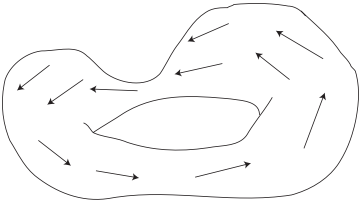
Une première remarque est que ce théorème reste vrai si on déforme la sphère en ellipsoide ou en n'importe quelle forme comme on pourrait le faire avec un ballon en caoutchouc.



Par contre, sur un tore (un pneu), on trouve facilement un champ de vecteurs continu non nul.



et ceci reste vrai si on déforme le tore :



Les propriétés des champs de vecteurs reflètent donc la forme générale de la surface (le fait qu'il y a un trou dans le tore et pas dans la sphère).

Voilà un théorème typique de topologie, suivant le développement interne de cette branche de mathématique pure sans souci des applications.

Et pourtant ... Depuis les années soixante, on s'intéresse fortement à la fusion nucléaire comme source d'énergie de l'avenir. Cette réaction utilise de l'hydrogène (et non de l'uranium comme la fission, utilisée actuelllement). Elle permettrait de produire de l'énergie au départ de l'hydrogène de l'eau des océans, sans produire de résidus radioactifs.

C'est la réaction qui se produit dans les étoiles, et la difficulté majeure est qu'elle ne peut se produire qu'à très haute température et pression, lorsque la matière est à l'état de plasma.

Toutes les particules sont en mouvement rapide, et un récipient dans lequel on mettrait ce plasma fondrait.

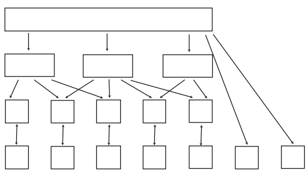
La solution proposée est de contenir le plasma en suspension en l'air par des champs magnétiques (une « bouteille magnétique »). Il pourrait sembler naturel de faire une telle bouteille en forme de boule, mais le théorème de la boule chevelue implique immédiatement que c'est impossible, le champ de vitesse des particules à la surface donnerait une contradiction.

On essaie donc de construire ces bouteilles magnétiques en forme de tore.

Un des plus grand est le JET (Joint European Torus) situé près d'Oxford et fruit d'une large coopération européenne.

Mais la réalisation est difficile (on n'y est pas encore !) et demande en particulier de sérieuses études théoriques mathématiques sur le transport de la matière et de la chaleur à l'intérieur du tore.

Remarquons qu'un théorème mathématique obtenu à l'époque où la fusion nucléaire n'était même pas concevable y trouve ainsi une application directe. C'est une application découlant de la théorie générale : on peut compléter le schéma 2 par des flèches comme suit :



Soulignons aussi qu'on a pu donner une information importante sur des équations qu'on ne peut pas résoudre.

A ce stade je pourrais discuter brièvement une question importante : comment reconnaître un bon théorème en mathématique ?

On pourrait au moins demander que le théorème soit vrai, qu'il n'y ait pas de faute dans la démonstration.

Ce n'est pas un critère absolu : le théorème de Fermat a joué un rôle important dans le développement des mathématiques, et ce rôle aurait été le même si l'énoncé avait été faux. De même, un célèbre énoncé de Riemann (1859) n'a toujours pas été démontré et joue cependant un rôle important en théorie des nombres.

Ceci dit, ce sont des exceptions et on souhaite bien sûr que les théorèmes soient corrects, mais ceci n'implique pas qu'ils soient intéressants.

On pourrait aussi penser aux applications, mais les exemples donnés montrent que ce n'est pas un bon critère : si à chaque instant on avait gardé en vue une application immédiate des mathématiques, on n'aurait jamais dépassé le niveau II dans le schéma 2, et non seulement les mathématiques seraient presque inexistantes, mais un grand nombre de leurs applications seraient inconnues. Le théorème de la boule chevelue était un bon théorème de mathématique, et il s'est appliqué beaucoup plus tard à la physique. En fait, la physique des particules élémentaires se fait aujourd'hui à coups de groupes (créés par Galois pour étudier l'équation du 5$^{\text{e}}$ degré) et de topologie ... deux branches qui existaient avant qu'on les emploie.

Alors, dans ce vaste corps des mathématiques pures qui progresse pour lui même, sans être lié aux applications, comment reconnaître un bon résultat ?

Le mathématicien Hardy écrivait : « Le test suprême est la beauté. Il n'y a pas de place permanente au monde pour de vilaines mathématiques ».

Avant de nous demander s'il avait raison, essayons de comprendre cette notion de beauté : pourquoi dira-t-on que tel résultat est beau ? Je répondrai d'abord par une autre question : pourquoi le 3ème Concerto de Beethoven est-il beau ? Cette question est évidemment sans réponse : on peut percevoir sa beauté, mais pas l'expliquer. Il en est en grande partie de même en mathématique, mais là on peut tenter d'expliquer un petit peu. Un mathématicien trouve un résultat beau si en le voyant, il se rend compte que c'est exactement cela qu'il fallait faire, et qu'un résultat dans une direction différente n'aurait pas été si instructif, ou si ce résultat établit des liens entre des théories qui avant n'en avaient pas, ou si brusquement on comprend mieux une quantité d'autres énoncés, qui, quoique démontrés, n'étaient pas vraiment compris, et qui apparaissent éclairés par une meilleure perspective, comme lorsqu'à la dernière page d'un roman policier, tous les faits inexpliqués décrits par l'auteur deviennent clairs et naturels. Ou au fond, comme Hardy, il trouve le résultat beau sans l'expliquer du tout.

Certainement, comme beaucoup d'autres, je me laisse guider par la beauté telle que le la perçois dans mon travail de mathématicien, donnant ainsi raison à Hardy, et bien souvent il apparaît qu'une belle théorie enrichit l'ensemble des mathématiques, ce qui mène ensuite à des applications utiles.

4. La transformée de Radon

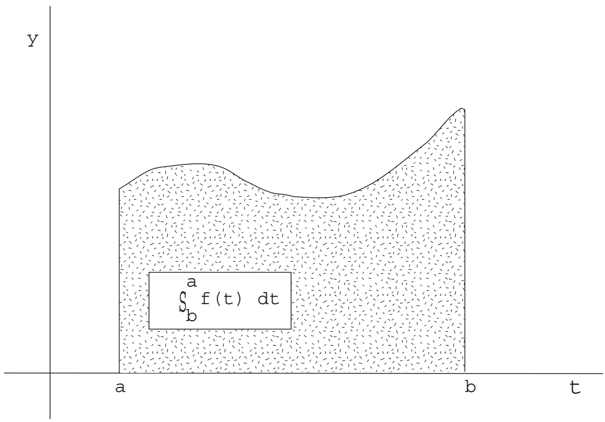
Nous avons vu que la mécanique céleste a conduit au développement du calcul différentiel. Il est apparu que bon nombre de phénomènes naturels étaient régis par des équations différentielles. Ceci justifie une fois pour toute l'étude de cette théorie mathématique, qui s'est alors développée pour elle-même.

Voici un exemple de résultat appartenant à cette théorie.

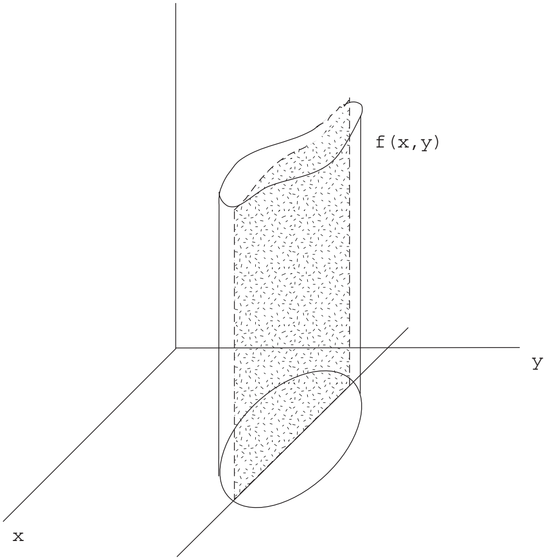
Rappelons d'abord que si $f(t)$ est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, son intégrale.

$$\int_a^b f(t)dt$$

représente l'aire comprise sous son graphe, et que le processus d'intégration est en quelque sorte inverse de la dérivation.



Considérons maintenant une fonction de 2 variables $f(x, y)$ définie sur un domaine du plan, par exemple un disque. A toute droite traversant ce disque, on associe l'intégrale de f sur l'intervalle constitué par l'intersection du disque et de la droite. Il s'agit donc de l'aire indiquée sur le dessin.



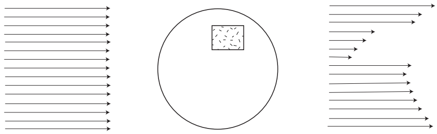
Supposons que la droite est d'équation $y = Ax + B$, elle est donc déterminée par les nombres A et B, et on peut noter $S(A, B)$ l'aire attachée à la droite.

A la fonction $f(x, y)$ on a ainsi associé une nouvelle fonction $S(A, B)$. On peut alors se demander si connaissant la fonction S, on peut retrouver la fonction f. Il ne s'agit pas seulement d'une question de calcul pratique, mais il faut s'assurer que deux fonctions f et g différentes ne peuvent pas donner la même fonction S, car sinon de S on ne saura pas s'il faut remonter à f ou à g.

La réponse est oui, S détermine f. C'est le théorème de la transformée de Radon.

Il a été démontré par Radon en 1917, simplement parce qu'il était intéressé par l'étude abstraite du calcul différentiel et intégral, sans souci des applications.

Vous vous doutez maintenant que si je donne cet exemple, c'est qu'il a débouché sur une application inattendue : le scanner médical. En effet, lorsqu'on fait une radiographie d'un corps, on envoie des rayons qui sont affaiblis lorsqu'ils rencontrent la matière, et la quantité soustraite mesure l'intégrale de la densité de matière sur le chemin parcouru.



Pour chaque droite d'une direction donnée, on a donc la valeur de l'intégrale de la fonction sur la droite. Si on fait tourner l'appareil et qu'on prend une radio dans chaque direction, on a complètement la fonction S, et le théorème de Radon garantit que f est déterminé.

En d'autres termes, deux tumeurs différentes ne peuvent donner le même résultat.

Mais l'application réelle est plus difficile. On a montré en 1977 que si on ne faisait qu'un nombre fini de radiographies (ce qui évidemment est le cas), on ne pouvait pas toujours reconstituer la position des tumeurs. Mathématiquement deux fonctions f différentes peuvent donner lieu aux mêmes intégrales sur un nombre fini de directions de droites.

Et ce problème est traité par d'autres méthodes mathématiques, assurant une détection de tumeurs avec une très forte probabilité.

5. Des lapins et des fractals

Nous voulons maintenant étudier la croissance d'une population sur un territoire (des bactéries sur une plaque, des lapins dans un terrain vague, ou même la population humaine). Comment exprimer cette croissance mathématiquement ?

A intervalles réguliers, on compte les individus dans la population, et on note $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ le nombre obtenu au temps n.

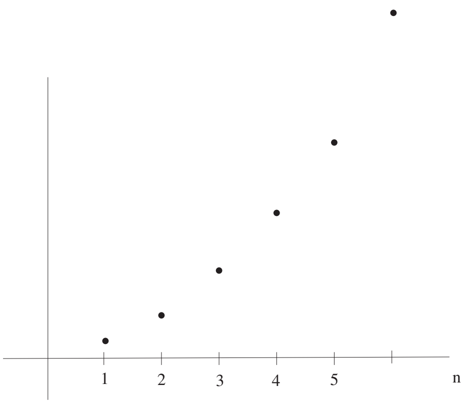
Une première idée pour décrire la croissance est que sur un intervalle de temps, les parents lapins auront des bébés lapins, qu'il y aura aussi des morts, et cela proportionnellement au nombre de lapins, donc :

$$y_{n+1} = y_n + a \cdot y_n,$$

le coefficient a étant le taux de croissance.
Si on résout cette équation, on a

$$\begin{aligned} y_n &= (1+a)y_{n-1} = (1+a)^2 y_{n-2} = \ldots \\ &= (1+a)^n y_0, \end{aligned}$$

ce qui fournit une croissance exponentielle



Ceci est manifestement impossible et contraire à toute expérience : tant qu'il y a peu d'individus par rapport aux ressources existantes sur le terrain, cette croissance est possible, mais le terrain étant fini, la croissance doit ralentir puis s'arrêter.

Verhulst a suggéré en 1845 que le taux de croissance devrait être variable, et diminuer avec le nombre d'individus, et il a proposé comme taux

$$a - by_n,$$

Dès lors, lorsque $y_n = a/b$, la croissance s'arrête. Nous avons donc l'équation de Verhulst :

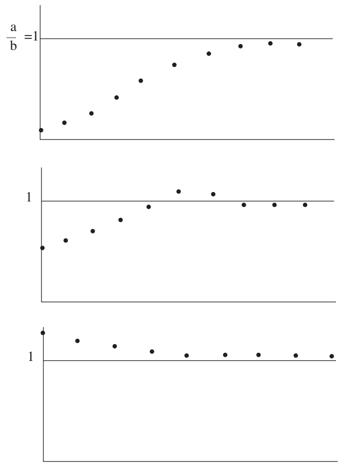
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (a - by_n)y_n \quad \text{c'est-à-dire} \\ y_{n+1} &= y_n + ay_n - by_n^2 \end{aligned}$$

Et il apparaît expérimentalement que cette équation simple est extraordinairement bonne : les bactéries, les animaux et même la population humaine respectent cette loi de très près.

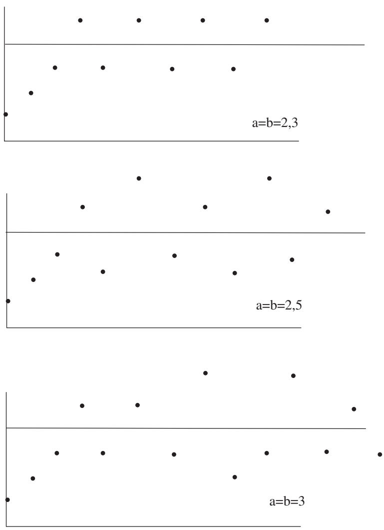
Incidemment, ce que j'ai décrit ci-dessus est un processus de modélisation : on invente une équation pour décrire une situation en la justifiant tant bien que mal (pourquoi un taux $a - by_n$ et pas $a - by_n^2$ par exemple ?) puis on vérifie que le modèle est bon, c'est-à-dire que les solutions de l'équation coïncident avec les observations expérimentales.

Esquissons sur des graphes les valeurs des solutions. Pour simplifier prenons le cas $a = b$.

Lorsque $a = b < 2$, suivant les valeurs initiales y_0, on obtient des graphes ressemblant à :



Dans tous ces cas, la population tend vers une valeur limite a/b quand t devient grand – ce qui est le comportement attendu. Mais lorsque $a = b$ dépassent 2, on obtient des graphes très différents. Ainsi, quand a et b croissent, le graphe s'approche d'abord d'un graphe périodique, puis devient très irrégulier. On dit alors que le comportement est chaotique. Il n'y a donc plus de valeur limite à la population, elle oscille autour de la valeur a/b.



En résumé, suivant les valeurs de a et b, on a des comportements différents à la limite pour n tendant vers l'infini.

Cette observation concernant une équation vieille de plus d'un siècle a donné lieu récemment (depuis 1975) à de spectaculaires développements en mathématique pure.

Pour voir apparaître de nouveaux comportements, on passe de la droite au plan : on remplace la loi $y_n \to y_{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ par une loi $z_n \to z_{n+1}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Une loi extrêmement simple peut être choisie en considérant $\mathbb{R}^2$ comme plan des nombres complexes, et en posant

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

où $c \in \mathbb{C}$ est fixé.

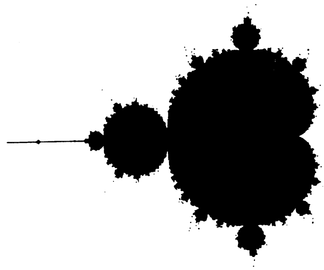
Si on souhaite éviter les nombres complexes, on notera (x_n, y_n) les coordonnées du point z_n et on définira la loi $(x_n, y_n) \to (x_{n+1}, y_{n+1})$ par

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + c_1 \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + c_2 \end{aligned}$$

où $c = (c_1, c_2)$ est un couple de réels, que l'on représentera comme un point d'un autre plan.

A nouveau, suivant la valeur de c, le processus aura des comportements différents quand n tend vers l'infini. Leur description est plus compliquée que dans la cas de l' équation de Verhulst, mais disons qu'il y a essentiellement 2 comportements.

Dans le plan du point c, dessinons en noir les points correspondant à un comportement, en blanc les autres. On pourrait s'attendre, l'équation de z_{n+1} étant extrêmement simple, à ce que les régions noires et blanches le soient aussi, par exemple un disque et son complément.
Or, bien au contraire, l'ensemble des points noirs est extrêmement compliqué, le dessin ci-après en donnant une vue approximative.



(Pour une spectaculaire collection de photos en couleurs d'ensembles de ce type, voir le livre de H. Peitgen et P. Ritcher cité dans la bibliographie, dont ce dessin est tiré).

Cet ensemble est appelé ensemble de Mandelbrot. Comme on le soupçonne sur le dessin, son bord est extrêmement compliqué : il est constitué de morceaux de cercles, avec des morceaux de cercles de plus en plus petits attachés dessus et ceci indéfiniment. En fait, si on dessine un carré bien choisi sur le dessin et qu'on l'agrandit, on retrouve le même dessin. Si on repète cette opération 2 fois, 1000 fois, un milliard de fois, on retrouve toujours le même dessin. On peut penser à une côte rocheuse déchiquetée, et dont le moindre mm^2 est tout aussi déchiqueté que la côte entière. Un tel ensemble est appelé fractal.

On a démontré depuis 1980 (Mandelbrot, Douady, Hubbard ...) que ces phénomènes n'étaient pas liés à la forme particulière de l'équation de z_{n+1}, mais apparaissaient toujours et de la même façon pour une énorme famille de processus. Il y a donc là quelque chose de très profond.

Pendant longtemps, on a considéré que des ensembles aussi compliqués étaient des anomalies qu'il ne fallait pas étudier – on se contentait de se restreindre à des cas où ils n'apparaissaient pas. Et c'est seulement récemment qu'on a perçu qu'ils avaient leur vraie place en mathématique.

Le bord de l'ensemble, avec toute sa complication, est appelé ensemble de transition, puisqu'on passe d'un comportement à l'autre.

Et les physiciens ont rejoint les mathématiciens : certaines transitions de phase en magnétisme (la manière dont un aimant chauffé perd son magnétisme) donnent lieu à des ensembles tout à fait similaires.

Notons aussi que la description du comportement chaotique du système solaire fait partie du même élargissement des notions considérées en mathématique.

Dans les deux cas, l'ordinateur a joué un rôle dans le développement de la théorie, non pas parce qu'il démontre des théorèmes, mais parce qu'il peut faire un nombre de calculs impossible auparavant, et que ces calculs servent d'exemples et de moteur à l'intuition.

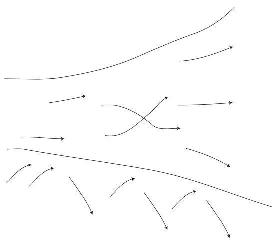
Si Mandelbrot, Douady et Hubbard ont pu démontrer des propriétés des ensembles fractals, c'est parce qu'ils ont d'abord pu les observer sur des images informatiques.

Leus démonstrations sont toutefois de nature théorique.

Conclusion ?

J'ai présenté ici quelques exemples de recherches mathématiques, en liaison avec des problèmes réels. Mais j'espère avoir montré que l'étude mathématique dépassait le problème initial, et qu'en fait il faut faire des mathématiques pour elles-mêmes si on veut encore à l'avenir résoudre des problèmes.

Dans un dernier schéma, je présenterai la mathématique comme une rivière qui avance indéfiniment, les différentes branches (algèbre, géométrie, analyse...) se mélangeant sans cesse. Son développement est influencé par les problèmes posés à l'extérieur, et elle fournit des réponses à ces problèmes, mais son développement se fait surtout en suivant sa dynamique interne, sa notion de beauté et d'harmonie.



Bibliographie

Un certain nombre de mathématiciens ont heureusement accompli depuis quelques années de sérieux efforts pour expliquer leur branche à des non-spécialistes.

Je recommande en particulier les livres suivants :
-Ian Stewart : From here to infinity. A guide to today's mathematics, Oxford Univ. Press (1996)

Ce livre est une réédition mise à jour de « The problems of mathematics » qu'il avait publié en 1987 (et traduit en français chez Pour la science – Belin sous le titre : Les mathématiques).

L'auteur dresse un panorama assez complet des mathématiques d'aujourd'hui, en évitant les développements techniques. Pour ce livre, un minimum de connaissance mathématique est toutefois nécessaire pour certains chapitres.

- S. Hildelbrandt, A. Tromba : Mathématiques et formes optimales. Pour la science, Belin (1986).

Les auteurs montrent par un texte clair et de nombreuses photos comment des principes de moindre action imposent différentes formes – il est question de physique, de bulles de savon, de cristaux, d'architectures, de nids d'abeilles.

- Ivar Ekeland : Le chaos, Dominos Flammarion (1995)
L'auteur donne un exposé particulièremnt clair et précis de la théorie du chaos.

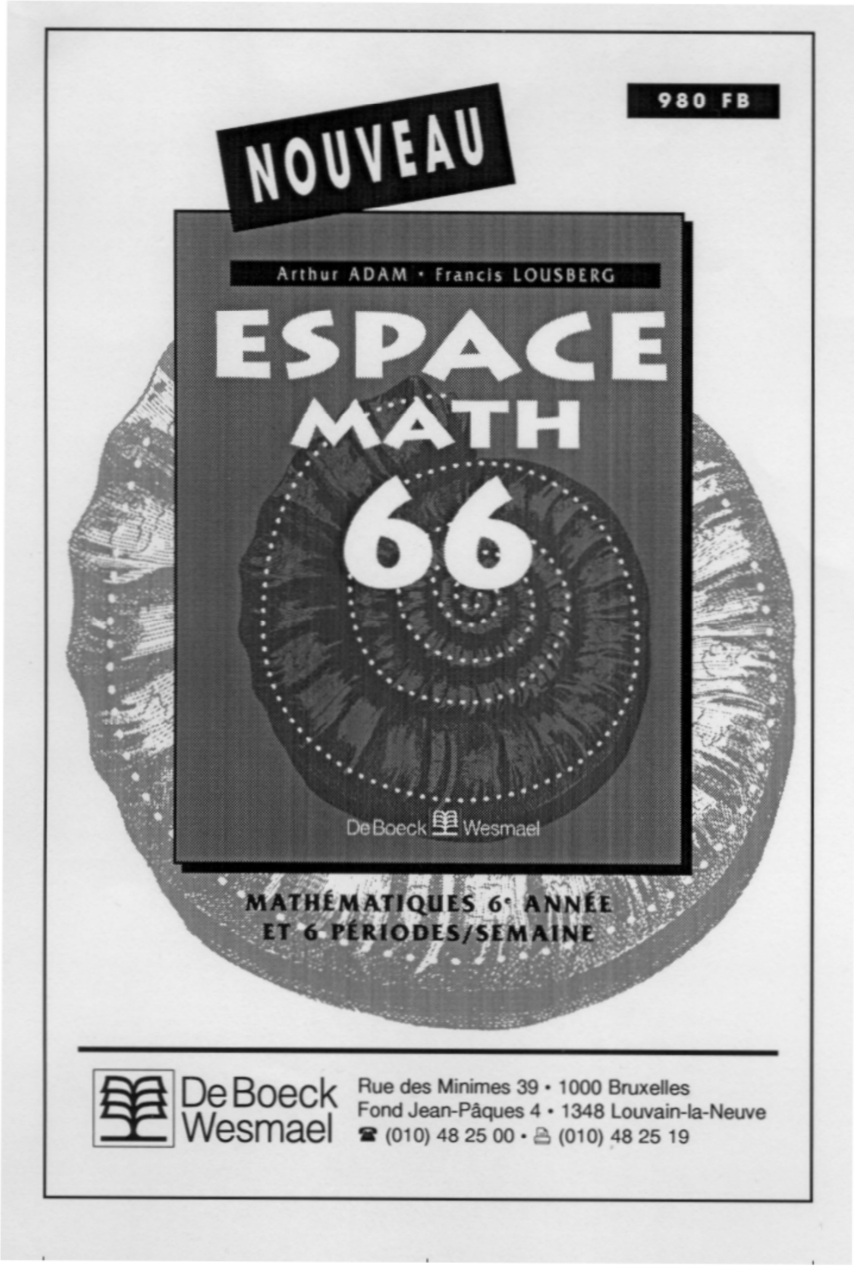
- La mission Voyager 2 évoquée au §2 pose un nombre énorme de problèmes mathématiques : en plus du contrôle de la trajectoire et de l'orientation du satellite, on peut mentionner la transmission rapide des données à plusieurs milliards de km de distance. On en aura une idée en lisant :
R. Laeser, W. McLaughlin et D. Wolff : La Mission Voyager 2 : une prouesse technique. Pour la science $n°$ 111, Janvier 1987.

Le sujet des fractals fournit de spectaculaires photos en couleurs des ensembles de Mandelbrot. On trouvera ces photos et des explications théoriques claires dans :
H.O. Peitgen, P.H. Richter : The beauty of fractals, Springer Verlag 1986.

- Enfin, ceux qui en auront l'occasion ne rateront pas le programme Fermat's Last Theorem, réalisé par S. Singh et J. Lynch pour la série Horizon de la BBC (on en trouve le texte sur http : //www.bbc.co.uk/horizon/fermat.shtml). Le progamme, extraordinairement vivant, montre la vie des chercheurs tout en racontant la « saga » du théorème de Fermat-Wiles.

Comme je l'ai indiqué, cet article présente un point de vue partiel et personnel sur les mathématiques. Toutefois, il a bénéficié des commentaires de M. Cahen, J. Doyen, M. Parker, A. Valette et P. Van Praag.

Je remercie également la Communauté française de Belgique, qui soutient mon travail par une Action de Recherche Concertée de la Direction de la Recherche scientifique.


980 FB
NOUVEAU
Arthur ADAM • Francis LOUSBERG
ESPACE
MATH
66
De Boeck Wesmael
MATHÉMATIQUES 6e ANNÉE
ET 6 PÉRIODES/SEMAINE
De Boeck
Wesmael
Rue des Minimes 39 • 1000 Bruxelles
Fond Jean-Pâques 4 • 1348 Louvain-la-Neuve
☎ (010) 48 25 00 • (010) 48 25 19

Mathématique et Pédagogie n° 128, 37–46, 2000

Argumenter ? Pourquoi ? Quand ? Comment ?

B. HONCLAIRE, *CREM*

1. Quand et pourquoi ?

Au travers de quelques situations adaptées à des classes des trois premières années du secondaire, nous allons tenter de répondre à cette première question en développant deux axes majeurs :

Il est indispensable de placer les élèves dans des situations qui vont susciter des conflits, des questions, des étonnements.

- Qui a raison ?
- Pourquoi est-ce toujours comme cela ?
- Comment est-ce possible ?

C'est en essayant de répondre à de telles questions que l'on peut espérer motiver des élèves à des activités d'argumentation. Il s'agit de faire rechercher des arguments qui sont accessibles et acceptés par tous.

L'argumentation n'est pas réservée aux objets géométriques.

Il est possible de rencontrer des situations numériques qui provoquent le même genre de question. Ce type de situation est accessible avant même les situations géométriques dans une classe de première et permet de rencontrer l'algèbre en tant qu'outil de généralisation, de justification.

1.1. La grande illusion

12	13	15	17
8	9	11	13
5	6	8	10
6	7	9	11

Choisir un nombre dans la grille (par exemple 15). Barrer la ligne et la colonne de ce nombre. Choisir un autre nombre ; barrer sa ligne et sa colonne ; continuer (par exemple 7, puis 5). Quel est le dernier nombre de la grille (dans l'exemple, c'est 13).

([0]) Adresse de l'auteur: B. Honclaire, CREM, Rue Emile Vandervelde 5, 1400 Nivelles.

Vous pouvez jouer au magicien en imitant le dialogue suivant :

Professeur : « Quel est ton dernier nombre ? »
Elève : « 13 »
Professeur : « La somme des trois nombres que tu as choisis est … (petite hésitation) 27 ».

Comment est-ce possible ?

Il n'est pas difficile de vérifier que la somme des quatre nombres (les trois nombres choisis et le nombre restant) est toujours 40. (Encore faudra-t-il dans une classe rectifier les éventuelles erreurs de calcul !)

La démonstration passe
- par une phase de recherche : *Comment fabriquer une autre grille du même type ?*
- et par la découverte que ces grilles proviennent de tables d'additions.

$+$	a	b	c	d
e	12	13	15	17
f	8	9	11	13
g	5	6	8	10
h	6	7	9	11

La somme des quatre nombres est $a+b+c+d+e+f+g+h$; ce qui revient à utiliser la commutativité et l'associativité comme outils d'argumentation. Il y a évidemment une infinité de solutions pour les nombres $a, b, \ldots, h$.

On peut aller plus loin et chercher les liens entre ces nombres :

$+$	n	$n+1$	$n+3$	$n+5$
$12-n$	12	13	15	17
$8-n$	8	9	11	13
$5-n$	5	6	8	10
$6-n$	6	7	9	11

Le calcul algébrique (réduction des termes) permet alors de calculer cette somme et de trouver 40.

1.2. Tourner en rond

Choisir deux nombres n_1 et n_2.

Choisir une suite de nombres

$$n_3 = \frac{n_2}{n_1}$$
$$n_4 = \frac{n_3}{n_2}$$
$$\ldots$$

puis une autre suite

$$n_3 = \frac{n_2+1}{n_1}$$
$$n_4 = \frac{n_3+1}{n_2}$$
$$\ldots$$

Continuer

En prenant comme nombres de départ 2 et 5, on obtient comme première suite :

2
5
2.5
0.5
0.2
0.4
2
5

comme deuxième suite :

2
5
3
0.8
0.6
2
5

comme troisième suite :

2
5
3.5
1.1
0.8857143
2.6233766
5.2199413
2.75215586
0.91038491
1.05749277
3.35846159
5.06713782
2.10427829
0.80997961

Le calcul algébrique apparaît ici comme un moyen de justifier que les deux premières suites sont cycliques :

la première suite donne :

$$a \qquad b \qquad \frac{b}{a} \qquad \frac{1}{a} \qquad \frac{1}{b} \qquad \frac{a}{b} \qquad a \qquad b,$$

la deuxième suite donne :

$$a \qquad b \qquad \frac{b+1}{a} \qquad \frac{a+b+1}{ab} \qquad \frac{a+1}{b} \qquad a \qquad b.$$

1.3. Est-il premier ?

Calculer $n^2 + n + p$ pour des valeurs naturelles de n (à commencer par 0,1,2,3,...) et sachant que p est premier. Choisir 17 comme valeur de p. Analyser les résultats obtenus.

Et si on choisit d'autres valeurs de p ?

Différentes conjectures peuvent apparaître :

Les résultats obtenus sont des nombres premiers.

Les premières valeurs calculées sont des nombres premiers : 17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, ... et peuvent constituer une justification aux yeux d'élèves habitués à ne vérifier que quelques exemples.

La force du contre-exemple prendra ici toute sa signification :

– pour $n = 16$, la valeur calculée est 289, soit le carré de 17,
– pour $n = 17$, il n'est pas nécessaire de calculer pour savoir que $17^2 + 17 + 17$ est divisible par 17.

Le tableau 1, reprend les premières valeurs calculées en remplaçant 17 par p.

TAB. I : **Valeurs de $n^2 + n + p$**

n	p est premier							
	2	3	5	7	11	13	17	19
0	2	3	5	7	11	13	17	19
1	4	5	7	9	13	15	19	21
2	8	9	11	13	17	19	23	25
3	14	15	17	19	23	25	29	31
4	22	23	25	27	31	33	37	39
5	32	33	35	37	41	43	47	49
6	44	45	47	49	53	55	59	61
7	58	59	61	63	67	69	73	75
8	74	75	77	79	83	85	89	91
9	92	93	95	97	101	103	107	109
10	112	113	115	117	121	123	127	129
11	134	135	137	139	143	145	149	151
12	158	159	161	163	167	169	173	175

n	p est premier							
	2	3	5	7	11	13	17	19
13	184	185	187	189	193	195	199	201
14	212	213	215	217	221	223	227	229
15	242	243	245	247	251	253	257	259
16	274	275	277	279	283	285	289	291
17	308	309	311	313	317	319	323	325
18	344	345	347	349	353	355	359	361
19	382	383	385	387	391	393	397	399
20	422	423	425	427	431	433	437	439
21	464	465	467	469	473	475	479	481
22	508	509	511	513	517	519	523	525
23	554	555	557	559	563	565	569	571
24	602	603	605	607	611	613	617	619

L'examen de ce tableau permet de renforcer la conviction que :

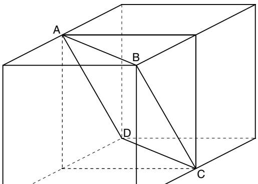
Pour $n = p - 1$, la valeur calculée est p^2.

La recherche d'un contre-exemple pourrait s'avérer fastidieuse d'autant plus que : $(p-1)^2 + (p-1) + p = p^2$. Ce calcul algébrique constitue la démonstration de cette conjecture ; celle-ci peut même être étendue : la propriété est vraie pour tout nombre p.

Pour $n = p$, la valeur calculée $p^2 + p + p$ n'est jamais un nombre premier.

Le nombre $p^2 + p + p$ est toujours divisible par p et par $p + 2$; sa forme factorisée $p(p+2)$ en constitue la démonstration.

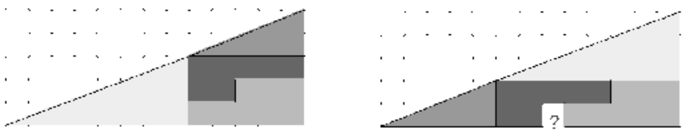
1.4. Que vois-je ?



Les points A, B, C et D sont sommets de deux cubes représentés en perspective cavalière. Quelle est la nature de la figure $ABCD$?

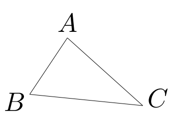
Les questions posées sur des représentations de solides constituent le terrain idéal pour motiver la justification : les impressions visuelles (« on voit bien que ... ») sont souvent trompeuses et l'argumentation va s'avérer décisive. Dans cette situation, c'est en raisonnant que vous découvrirez un magnifique calisson !

1.5. Qu'avez-vous perdu ?



Cette situation semble impossible. Le support du quadrillage permet de mieux se rendre compte de l'isométrie des pièces correspondantes et par conséquent renforce l'impression de trucage, d'anomalie ! La démonstration nécessite d'établir un lien entre l'alignement des points, les triangles semblables et la pente d'une droite.

1.6. Remarquables [1] !

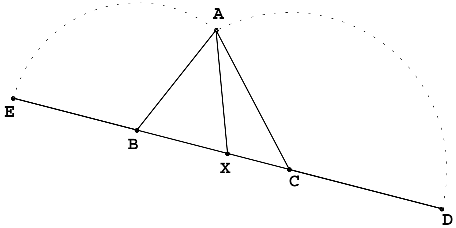


Trouver un point X, sur le côté $[BC]$, tel que les triangles ABX et AXC aient le même périmètre.

[1] Pour adultes !

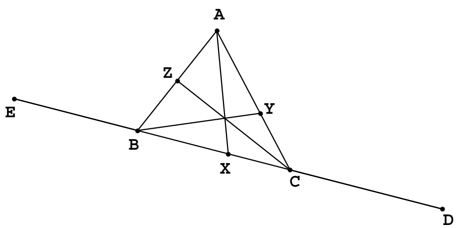
Si la construction du point X est du niveau des élèves, les prolongements, les questions qu'ils posent sont réservés aux adultes (mathématisés !)

Voici une façon de déterminer le point X :



X est le milieu de $[ED]$.

Ce que l'on vient de réaliser sur le côté $[BC]$ peut évidemment s'imaginer sur $[AC]$ et sur $[AB]$. Ce qui va nous amener le problème suivant : les droites solutions semblent concourantes et pourtant ce ne sont pas des droites remarquables (classiques !) du triangle.

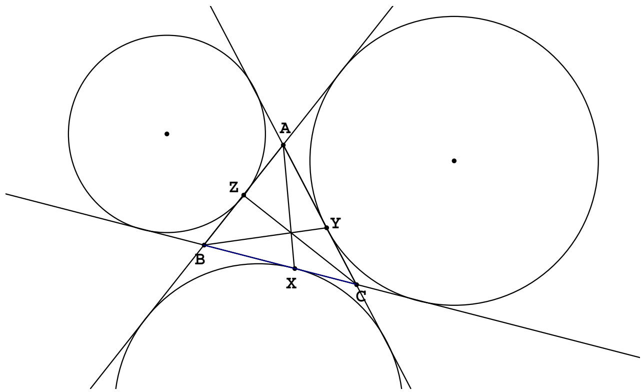


Il est facile d'établir que

$$\frac{|BX|}{|XC|} \times \frac{|CY|}{|YA|} \times \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1$$

Le théorème de Céva permet alors d'affirmer que les trois droites sont concourantes. Et ce n'est pas tout !

Si les droites ne sont pas remarquables, on ne peut pas en dire autant des points X, Y et Z !



2. Comment ?

2.1. Construire des outils

Créer le besoin d'argumenter chez les élèves est primordial, mais cela a pour conséquence qu'il faut construire avec eux des moyens de justification.

Nous allons détailler un moment de cette phase d'apprentissage en géométrie. Une manière de procéder est de construire, à partir des synthèses descriptives (listes de propriétés), des synthèses fonctionnelles ou ≪ boîte à outils ≫.

Si les premières servent à répondre aux questions ≪ *Qu'est-ce que ... veut dire ?* ≫ et doivent être accompagnées d'un *index*, les secondes doivent apporter des réponses aux questions ≪ *Comment puis-je justifier que... ?* ≫ et être munies d'un mode d'emploi comme celui qui suit.

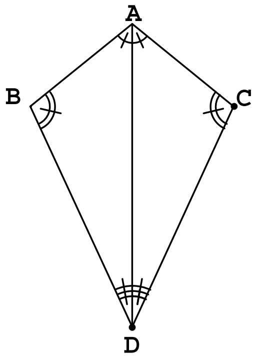
Justifier	
1. Comment justifier que	page
(a) un quadrilatère est un parallélogramme,	2
(b) un quadrilatère est un rectangle,	3
(c) un quadrilatère est un losange,	4
(d) un quadrilatère est un carré,	4
(e) un quadrilatère est un cerf-volant,	5
(f) un triangle est isocèle,	6
(g) un triangle est équilatéral ?	6
2. Comment déceler des transformations dans une figure ?	7-8
3. Comment justifier que :	
(a) deux droites sont perpendiculaires,	9
(b) deux droites sont parallèles,	10
(c) trois droites sont concourantes,	11
(d) trois points sont alignés ?	12
4. Comment comparer :	
(a) des longueurs,	13
(b) des aires,	14
(c) des amplitudes ?	15

5. Comment calculer
   (a) des longueurs, 16
   (b) des aires, 17
   (c) des amplitudes, 18
6. Comment justifier que des triangles sont isométriques ? 19
7. Comment justifier que des triangles sont semblables ? 20

Illustrons, par un exemple, comment faire passer les élèves de la description des objets à la construction d'outils.

Prenons le cerf-volant :

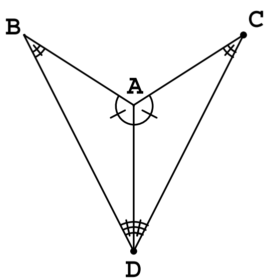
Synthèse descriptive acceptable



ABCD est un cerf-volant

1. $|AB| = |AC|$
2. $|BD| = |CD|$

3. $\hat{B} = \hat{C}$



4. AD est bissectrice de $\hat{A}$ et de $\hat{D}$.

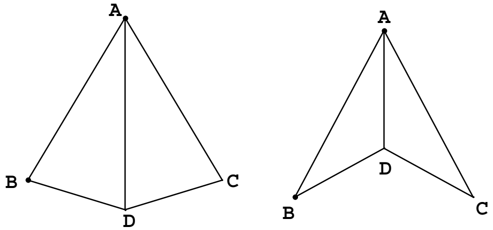
En utilisant les propriétés des triangles isocèles ABC et BDC :

5. AD est médiatrice de $[BC]$

C'est par le biais d'exercices de construction que l'on peut faire comprendre à des élèves du premier degré

– qu'il n'est pas obligatoire d'utiliser toutes les propriétés d'un cerf-volant pour le construire (déterminer),
– qu'il y a plusieurs manières de le construire (déterminer).

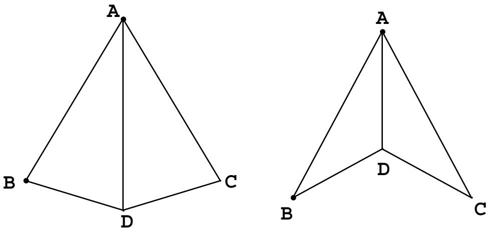
On peut utiliser les propriétés 1 et 2 ; cela donne



Dans tous les cas, on a construit un cerf-volant (même si les formes diffèrent).

Synthèse fonctionnelle acceptable

Dès que je sais que :



$$\boxed{\begin{array}{l}|AB| = |AC| \\ |BD| = |DC|\end{array}}$$

je peux déduire que : $\boxed{ABCD \text{ est un cerf-volant}}$

et, en cadeau, je reçois les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{C} \\ AD \text{ est bissectrice de } \hat{A} \text{ et de } \hat{D} \\ AD \text{ est médiatrice de } [BC]\end{array}}$$

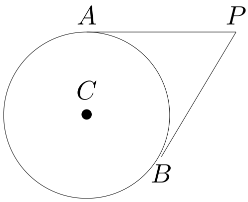
On peut aussi utiliser les propriétés 1 et 3 ou encore la propriété 4…, ce qui débouche sur des synthèses fonctionnelles du même genre.

2.2. Utiliser les outils

C'est bien de fabriquer des outils, mais il ne faut pas qu'ils dorment dans une armoire !

Voici quelques exemples d'utilisation :

Tangentes à un cercle PA et PB sont tangentes au cercle.



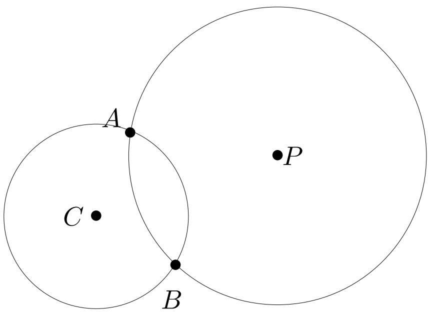
On peut déterminer un cerf-volant par les propriétés 1 et 3 :

rayons égaux $|AC|$ et $|CB|$
angles égaux en A et B ($90°$)

et recevoir en cadeau :

$|AP| = |BP|$
CP axe de symétrie de la figure

Cercles sécants



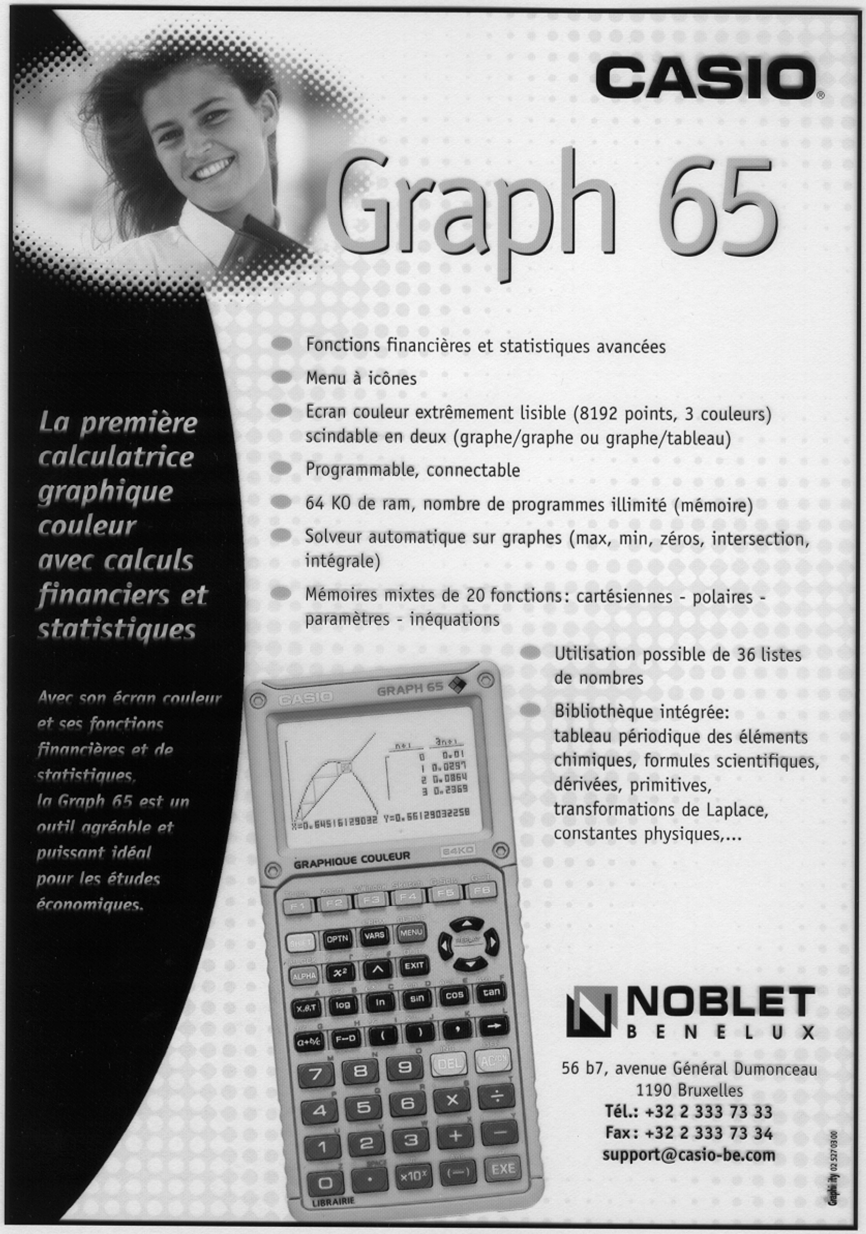
On peut déterminer un cerf-volant par les propriétés 1 et 2 :

rayons égaux : $|AC| = |CB|$ et $|PA| = |PB|$

et recevoir en cadeau :

CP est médiatrice de $[AB]$

Deux documents de travail sont disponibles sur le site internet `www.profor.be/crem`
Ils reprennent les synthèses descriptives et fonctionnelles des trois premières années du secondaire. Ils sont écrits en Word7 et les figures sont réalisées par Cabri (version Windows).
Attention, ils ne constituent que des modèles qui doivent être retravaillés !
Si vous les utilisez et surtout si vous les adaptez à vos cours et à vos classes, les formateurs du CREM seraient heureux de bénéficier de vos remarques et de vos suggestions, ainsi que de vos versions personnalisées.



CASIO
Graph 65
La première calculatrice graphique couleur avec calculs financiers et statistiques
Avec son écran couleur et ses fonctions financières et de statistiques, la Graph 65 est un outil agréable et puissant idéal pour les études économiques.
Fonctions financières et statistiques avancées
Menu à icônes
Ecran couleur extrêmement lisible (8192 points, 3 couleurs) scindable en deux (graphe/graphe ou graphe/tableau)
Programmable, connectable
64 KO de ram, nombre de programmes illimité (mémoire)
Solveur automatique sur graphes (max, min, zéros, intersection, intégrale)
Mémoires mixtes de 20 fonctions: cartésiennes - polaires - paramètres - inéquations
Utilisation possible de 36 listes de nombres
Bibliothèque intégrée: tableau périodique des éléments chimiques, formules scientifiques, dérivées, primitives, transformations de Laplace, constantes physiques,...
GRAPH 65
GRAPHIQUE COULEUR
64KO
NOBLET BENELUX
56 b7, avenue Général Dumonceau
1190 Bruxelles
Tél.: +32 2 333 73 33
Fax: +32 2 333 73 34
support@casio-be.com

Mathématique et Pédagogie n° 128, 48–49, 2000

Bibliographie

Algèbre linéaire pour H.E.C et ingénieurs commerciaux par C. Debiève et Y. Félix, *De Boeck Université*, 202 pages, 2000.

Destiné au départ aux étudiants des HEC et du premier cycle en sciences économiques et de gestion, cet ouvrage présente les résultats fondamentaux de l'algèbre linéaire utilisée constamment dans l'étude des phénomènes économiques.

Très théorique, ce manuel pousse assez loin l'étude du calcul matriciel et des invariants associés à une matrice et cite quelques applications économiques qui ne sont malheureusement que peu illustrées. Par contre, l'étude du genre des formes quadratiques n'envisage pas les théorèmes relatifs aux mineurs principaux et n'est traitée que dans les cas sans contraintes alors que l'étude des formes quadratiques avec ou sans contraintes possède de multiples applications notamment dans les problèmes d'optimisation.

Chaque chapitre se termine par une liste d'exercices intéressants certes, mais dont aucun ne concerne les éventuelles applications à l'économie pourtant fort nombreuses.

V. Henry

Formation mathématique par la résolution de problèmes, par J. Bair, G. Haesbroeck et J.J. Haesbroeck, *De Boeck Université, Collections pratiques pédagogiques*, 204 pages, 2000.

De conception originale, cet ouvrage propose au lecteur d'élargir ou d'approfondir ses connaissances mathématiques abordées sous forme de problèmes à résoudre. Excellent outil didactique pour l'enseignant, il contient nombres d'exemples d'application mathématiques notamment dans le domaine de l'économie et s'adresse à un public du niveau secondaire supérieur (option forte en mathématiques) ou aux premières années du supérieur.

Les différents problèmes sont répartis en deux catégories : les problèmes de détermination où il importe de déterminer la solution du problème et les problèmes de décision où, la conclusion est connue, il convient de construire la méthode générale d'analyse et de résolution du problème est présentée suivie d'une série d'exemples variés et traités entièrement.

L'ouvrage propose ensuite une série de problèmes commentés, sélectionnés pour leur intérêt soit au niveau du style, soit au niveau de leurs solutions parfois surprenantes ou encore pour les prolongements intéressants qu'ils suggèrent ...

Le dernier chapitre recèle une mine d'exercices variés dont les solutions sont reprises en fin de chapitre et dont pourront profiter aussi bien les élèves désireux de s'exercer que les enseignants en mal d'inspiration.

V. Henry

Espace Math 66, par A. Adam et F. Lousberg, *Editions De Boeck & Wesmael*, 376 pages, 2000.
Il était attendu depuis longtemps et vient de paraître le livre de la Collection Espace math relatif au cours de mathématiques de la 6^{e} année comportant 6 périodes par semaine, soit le cours « fort » de mathématiques de la dernière année de l'enseignement secondaire. L'ouvrage se présente comme les autres manuels de la Collection Espace Math : il est construit avec deux préoccupations fondamentales, à savoir la pédagogie des situations et l'enseignement en spirale ; il comprend de nombreux exercices de systématisation ou d'approfondissement, ainsi que des listes d'exercices pour s'auto-contrôler, avec les solutions, notamment des énoncés « venus d'ailleurs » (par exemple, des concours d'admissions aux études universitaires d'ingénieurs ou encore le bac français). Il comprend quatre thèmes principaux :

– L'analyse avec l'étude de nouvelles fonctions : les fonctions cyclométriques (arc sinus, arc cosinus, arc tangente), les exponentielles et les logarithmes, ainsi que l'étude du calcul intégral (les primitives, les intégrales définies, les quadratures et les cubatures).
– La géométrie analytique avec l'étude des coniques (équations cartésiennes réduites) et ses applications (notamment les propriétés optiques), ainsi qu'un chapitre sur des trajectoires (courbes paramétrées et repérage polaire) et un autre sur les lieux géométriques (par les méthodes synthétique, de traduction, des génératrices).
– Les nombres complexes, sous formes algébrique et trigonométrique, jusqu'à la recherche des racines nèmes d'un nombre complexe.
– L'analyse combinatoire (groupements sans répétition et arrangements avec répétitions, triangle de Pascal et binôme de Newton) et les principales lois de probabilités (binomiale, normale et de Poisson).

Le livre se termine par de petites synthèses sur le calcul vectoriel, la géométrie analytique, les probabilités, l'analyse et les structures algébriques), des répertoires sur les savoir-faire et des notes historiques, une petite bibliographie, et deux index des notations et alphabétique.

J. Bair

Mathématique et Pédagogie n° 128, 50–61, 2000

Droite de Simson

S. COURTOIS ET F. DENIS,

Inspecteurs honoraires

Introduction et résumé du premier article

Nous avons consacré un article précédent (*Mathématique et Pédagogie* n°117, 59–71, 1998) à un classique, « *La droite de* SIMSON *: les pieds des perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un triangle par un point de la circonférence circonscrite à ce triangle, sont en ligne droite* ».

Pour étendre cette propriété, nous étions partis de **l'ombre au soleil** d'une configuration de Simson, sur un modèle tracé à l'aide de CABRI II. Au départ les directions de projection a, b, c étaient perpendiculaires respectivement à BC, CA, AB, ou mieux, parallèles aux hauteurs du triangle qui se coupent en H (figure 1). La transformée de cette figure par une affinité fournissait une première extension de la propriété, le point H étant appliqué sur un point noté Q ayant perdu la qualité d'orthocentre de ABC et le cercle circonscrit étant appliqué sur une ellipse (figure 2).

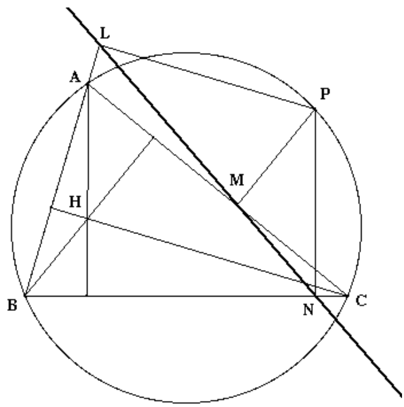


Figure 1

([0]) Adresses des auteurs : S. Courtois, Rue de Racour 83, 3400 Landen ; F. Denis, Rue Duchêne 9, 4120 Neupré.

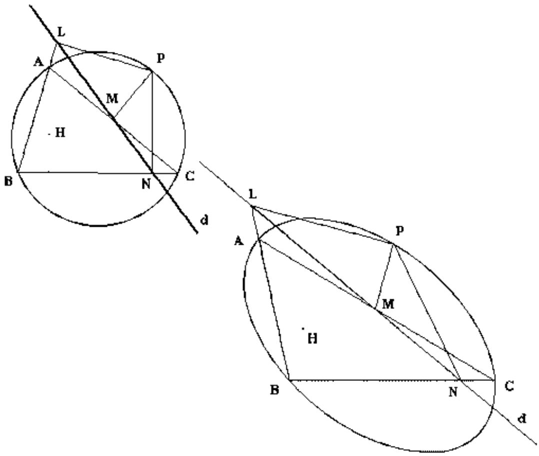


Figure 2

En plaçant le point Q décrit ci-dessus dans une des quatre régions susceptibles de comprendre l'**orthocentre** du triangle (figure 3) et en définissant les directions de projection $a = QA, b = QB, c = QC$, on put prouver qu'on obtenait bien une ellipse comme lieu du point P, tel que ses projections par a, b, c sur les côtés de ABC soient alignées.

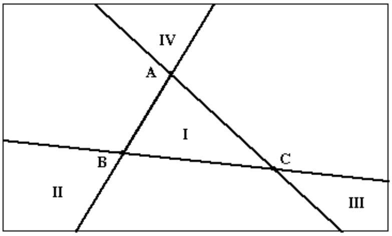


Figure 3

Nous avions mis en évidence la conservation de **la relation d'Euler** dans cette dernière figure (figure 4) : $GQ = 2OG$ où G est le centre de gravité du triangle, Q est le point choisi. Le centre O de l'ellipse est déterminé en position, connaissant celles de G et de Q, grâce à la relation ci-dessus.

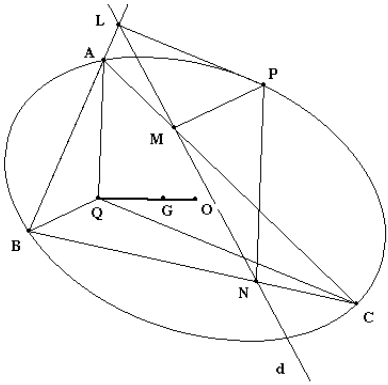


Figure 4

Cabri II avait suggéré la possibilité d'obtenir une hyperbole ou une parabole comme lieu de P, mais nous n'avions pu le démontrer par des méthodes élémentaires. A présent la preuve en est faite, **nous vous proposons une extension plus générale de la droite de Simson et toujours une relation inattendue avec la droite d'Euler**.

Dans notre démarche, Cabri II a apporté une grande aide, pour explorer les recoins du problème et pour déceler erreur ou généralisation abusive.

Le problème : *On considère un triangle ABC et trois directions de projection définies par le choix d'un point Q, QA définit a, QB définit b et QC définit c. Un point quelconque P du plan du triangle est projeté en N sur BC parallèlement à a, en M sur CA parallèlement à b et en L sur AB parallèlement à c. On demande le lieu géométrique de P pour que N, M, L soient alignés (figure 5).*

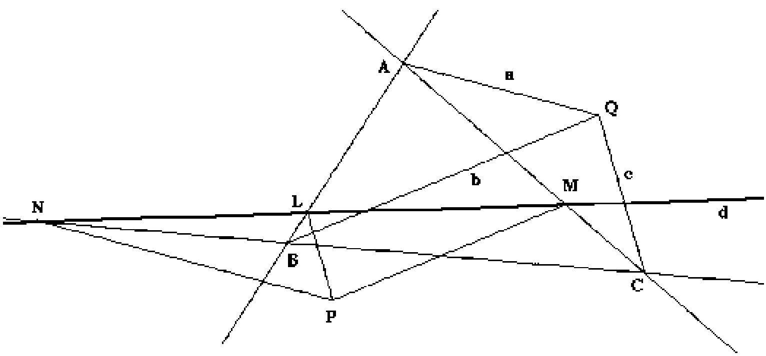


Figure 5

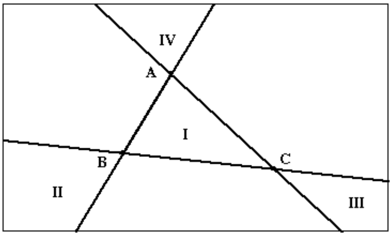
Remarque 1 : Délimitation des positions de Q dans le plan.

Le coefficient de direction de a doit être différent de 0 (sinon PN ne coupe pas BC), celui de b doit être différent de -1 (sinon PM ne coupe pas AC), c ne peut appartenir à la direction AB.

Cette restriction revient à rejeter les positions de Q sur les droites menées par A, B, C et parallèles aux côtés BC, CA, AB, de ABC.

Remarque 2 : Cas particulier où deux directions de projections sont égales.

Deux quelconques des directions a, b, c peuvent être égales, pourvu qu'on choisisse Q sur les droites contenant les côtés du triangle ABC (figure 6).



Les points A, B, C sont exclus comme positions de Q pour une double raison : en vertu de la remarque 1 et parce que QA ou QB ou QC serait non défini.

Ces deux remarques sont reprises dans la conclusion.

1. Détermination analytique du lieu

On choisit le repère, $(B(0,0),\ C(1,0),\ A(0,1))$ et soit (q, s) les coordonnées de Q (figure 7).

Les coefficients de direction de QA, QB, QC sont :

$$a = \frac{(s-1)}{q}, \quad b = \frac{s}{q}, \quad c = \frac{s}{(q-1)}$$

avec $s-1$, $s+q$, $q-1$ **non nuls**, pour respecter la remarque 1.

D'une part, on note (m, p) les coordonnées du point P ; les trois droites qui projettent P sur les côtés du triangle ont pour équations :

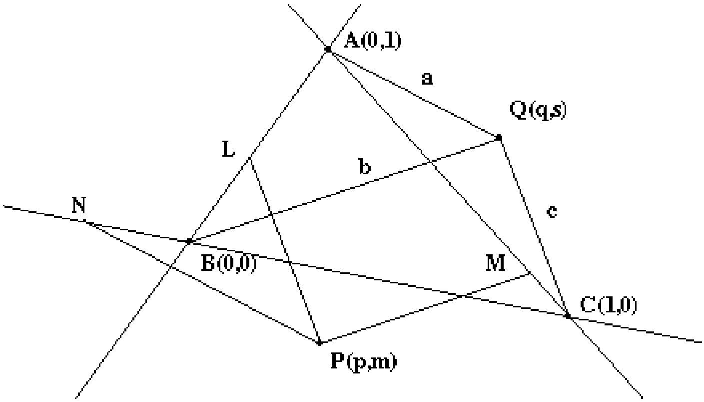


Figure 7

$$
\begin{aligned}
y - p &= \frac{(s-1)(x-m)}{q}, && (1)\\
y - p &= \frac{s(x-m)}{q}, && (2)\\
y - p &= s(x-m)(q-1). && (3)
\end{aligned}
$$

et d'autre part les trois droites joignant les sommets du triangle ABC ont pour équations :

$$
\begin{aligned}
y &= 0, && (4)\\
x + y &= 1, && (5)\\
x &= 0 && (6)
\end{aligned}
$$

(1) et (4) se coupent en N de coordonnées $\left(\frac{ms-m-pq}{s-1}, 0\right)$,

(2) et (5) se coupent en M $\left(\frac{ms+q-pq}{q+s}, \frac{-ms+pq+s}{q+s}\right)$,

(3) et (6) se coupent en L $\left(0, \frac{ms+p-pq}{1-q}\right)$.

L'aire du triangle NML vaut la moitié de :

$$\begin{vmatrix} \frac{ms-m-pq}{s-1} & 0 & 1 \\ \frac{ms+q-pq}{q+s} & \frac{-ms+pq+s}{q+s} & 1 \\ 0 & \frac{ms+p-pq}{1-q} & 1 \end{vmatrix}$$

Si ce déterminant est nul, les trois points N, M, L sont alignés et on obtient l'équation du lieu géométrique de P. On y remplace par x, y, les coordonnées m, p de P.

$$s(s-1)x^2 - 2qsxy + q(q-1)y^2 + s(1-s)x + q(1-q)y = 0$$

Le discriminant de la conique vaut $qs(q+s-1)$ et son signe dépend de la position de Q par rapport aux 7 régions du plan déterminées par les droites $AB(x=0)$, $BC(y=0)$, $CA(x+y-1=0)$.

Voyons quelques exemples : une hyperbole (fig.8), ou une ellipse (fig.9).

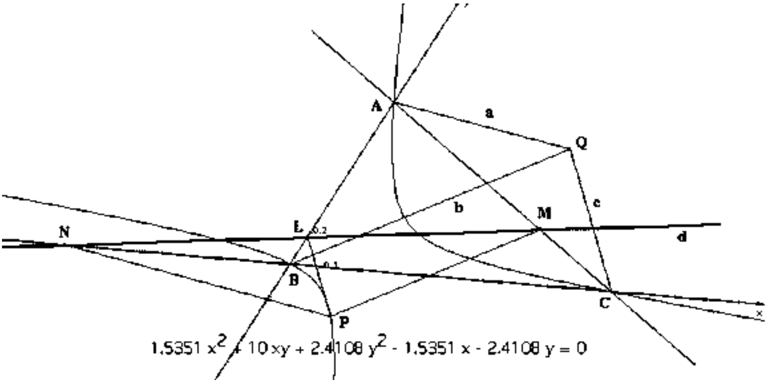


Figure 8

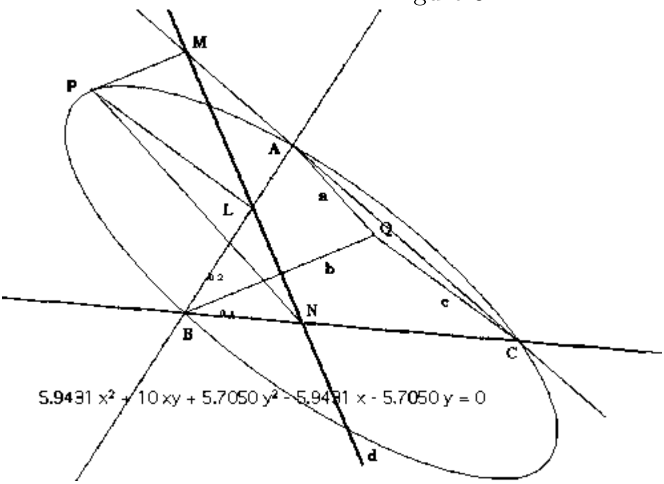


Figure 9

1.1. Type de conique selon la position de Q

La figure 10 indique les positions de Q donnant une **ellipse** (régions I, II, III, IV) ou une **hyperbole** (régions V, VI, VII). Le discriminant est nul si et seulement si Q appartient à une des trois droites AB, BC, CA et la conique se ramène alors à une **parabole**.

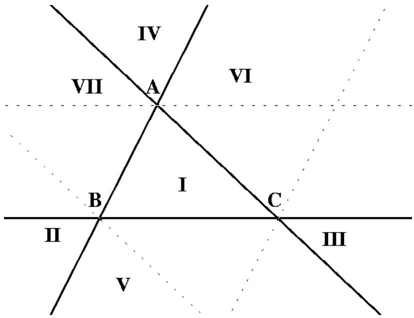


Figure 10

2. Détermination synthétique de six points de la conique centrée ci-dessus

Reprenons le problème tel qu'il est posé à la figure 7 et sachant que le lieu géométrique est une conique, voyons comment le tracer.

Outre A, B, C, on peut déterminer trois autres points R, S, T de la conique (figure 11).

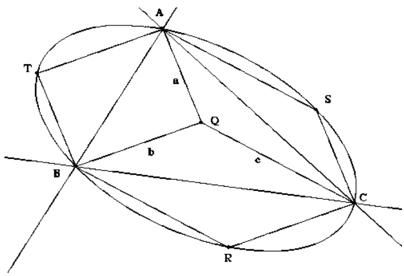


Figure 11

Les deux droites projetantes menées par B et C, de directions respectives c et b se coupent en un point R. Si on considère $P = R$, alors L est en C, M est en B et la projetante de direction a issue de R coupe BC en N. Les points L, M, N sont alignés sur BC et dès lors R appartient à la conique. On peut encore utiliser deux fois le même procédé.

Les deux droites projetantes menées par C et A de directions respectives a et c se coupent en S. Si on considère $P = S$, alors $L = A$, $N = C$, et la projetante de direction b issue de S coupe AC en M. Les droites projetantes menées par A et B de directions respectives b et a se coupent en T. Si on considère $P = T$, alors $N = B$, $M = A$, et la projetante de direction c issue de T coupe AB en L.
L, M, N sont alignés sur AB et T appartient à la conique.

Les six points A, B, C, S, R, T déterminent la conique.

En considérant des parallèlogrammes dans la figure, on remarque que QC, BR et AS sont équipollents de même QA, CS, BT et QB, CR et AT et dès lors que A et R, B et S, C et T se correspondent par une symétrie dont on note le centre 0 (figure 12).

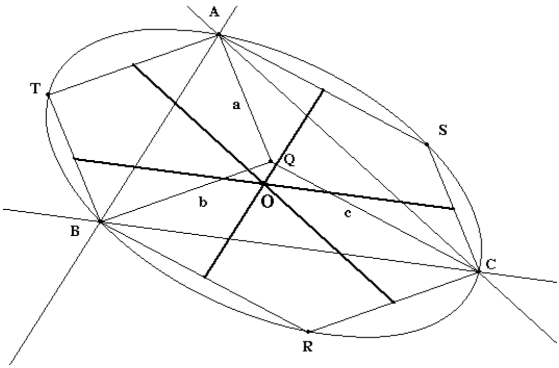


Figure 12

L'hexagone $ASCRBT$ inscrit à la conique a donc ses côtés opposés parallèles et ses diagonales concourantes. Son centre de symétrie 0 **est le centre de la conique**.

3. Revoici la relation d'Euler

Les droites AS et CS d'équations $y-1 = \frac{s}{(q-1)x}$ et $y = \frac{s-1}{q(x-1)}$ se coupent en S de coordonnées $(1-q, 1-s)$. B a comme coordonnées $(0,0)$. Le centre O de la conique est milieu de $[BS]$, dès lors O a comme coordonnées $(\frac{1-q}{2}, \frac{1-s}{2})$.

Comme $Q(q,s)$ et $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, la relation $GQ = 2 \cdot OG$ se vérifie (figure 13).

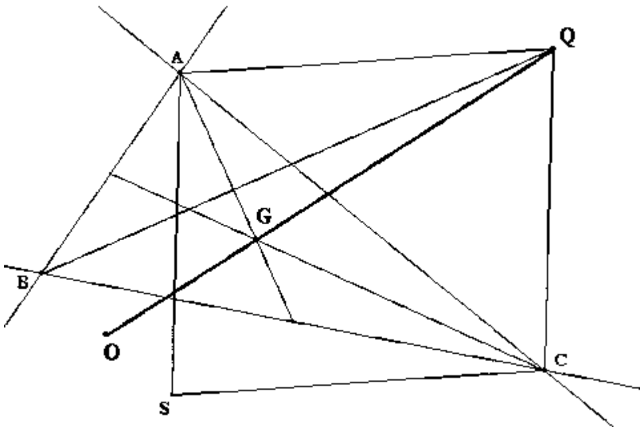


Figure 13

En effet, $(q - \frac{1}{3}, s - \frac{1}{3}) = 2(\frac{1}{3} - \frac{1-q}{2}, \frac{1}{3} - \frac{1-s}{2})$

Accessoirement, on peut aussi interpréter la relation ci-dessus **comme l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ qui applique Q sur O.**

Q étant exclu des droites $A'B'$, $B'C'$ et $C'A'$, son image, le **point O, ne peut se situer sur les droites AB, BC, CA.**

Cette interprétation fournit le résultat géométrique intéressant que voici :

3.1. Type de conique selon la position du centre O

Une conique étant déterminée par les trois sommets du triangle ABC et par son centre O placé dans le plan du triangle, hormis sur les droites AB, BC, CA, cette conique passe aussi par les symétriques de A, B, C par rapport à O. La nature de la conique, suivant la position de O dans le plan du triangle, est ainsi prouvée et illustrée : la ***figure 14 est la transformée de la figure 10*** *par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.*

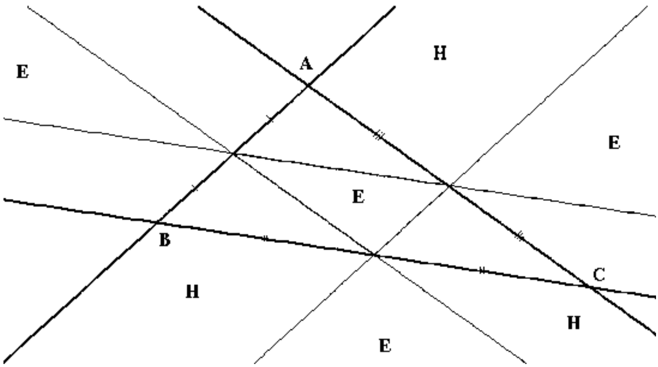


Figure 14

4. Finalement

Le problème de Simson se généralise ainsi :

On considère un triangle ABC et un point Q arbitraire, QA définit b et QC définit c, trois directions de projections. Un point quelconque P du plan du triangle est projeté en N sur BC parallèlement à a, en M sur CA parallèlement à b et en L sur AB parallèlement à c. On demande un lieu géométrique de P pour que N, M, L soient alignés.

La solution se résume ainsi :

Les restrictions de départ (Remarque 1 : $a = 0$ ou $= -1$ ou c de direction AB) ont rejeté les positions de Q sur les droites menées par les sommets A, B, C et parallèles aux côtés du triangle. Moyennant ces restrictions (Figure 14) :

4.1 Si Q est situé dans une des régions ouvertes I, II, III, IV, le lieu de P est une **ellipse** avec comme cas particulier possible un cercle.

4.2 Si Q est situé dans une des régions ouvertes V, VI, VII, le lieu P est une **hyperbole**.

4.3 **A propos de la remarque 2**

Si Q est situé sur les droites AB ou BC, deux des directions de projection sont confondues et le lieu est chaque fois une **parabole dégénérée en deux droites parallèles** $x(x-1) = 0$ ou $y(y-1) = 0$.

Si Q est situé sur AC, les directions de a et c sont confondues et le lieu P est la parabole dégénérée en deux droites parallèles $(x+y-1)(x+y) = 0$.

Le point O construit grâce à la relation d'Euler $GO = \frac{1}{2QG}$ garde un sens : O est un des centres de symétrie de la parabole dégénérée en deux droites parallèles (figure 15).

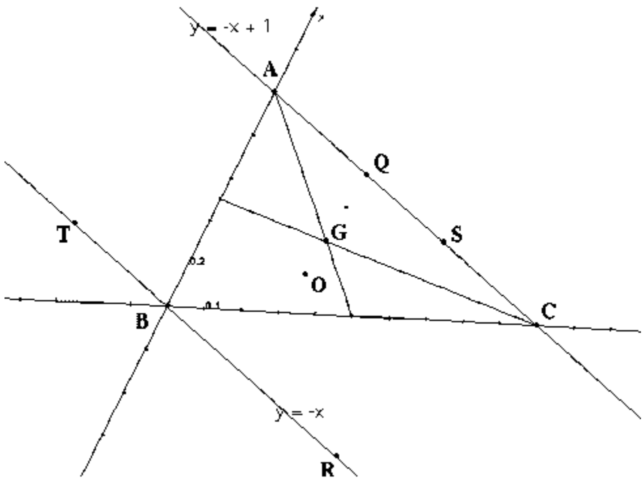


Figure 15

4.4 **A propos de la remarque 1**

Si on disposait de « points à l'infini » on lèverait la restriction de la remarque 1. L'intérêt de placer le problème dans un cadre projectif avait été noté dans l'article précédent.

Sans aller jusque là, on pourrait formuler l'énoncé du problème de manière à ce que le point P appartienne au lieu, si la droite déterminée par deux points N, M, ou L est parallèle au côté du triangle devant contenir le troisième point. Par exemple avec QA parallèle à BC, si le point P est tel que ML soit parllèle à la droite BC à laquelle N appartient, alors P serait un point du lieu (figure 16).

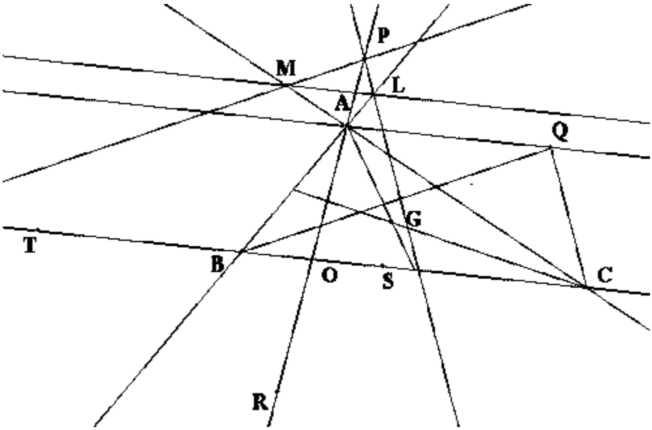


Figure 16

Dans les trois cas de la remarque 1, il s'agirait d'une **hyperbole dégénérée en deux droites sécantes**,

$$\begin{aligned} y(-2x+(q-1))y+(1-q)) &= 0, \text{si } s=1 \\ (x+y-1)((s-1)x)+(s+1)y) &= 0, \text{si } s=-q \\ x((s-1)x-2y+(1-s)) &= 0, \text{si } q=1. \end{aligned}$$

Seuls les points A, B, C resteraient exclus comme positions de Q.

Remerciements

Un article du Pr Miguel de Guzmán - Universidad Complutense de Madrid, envoyé par Monsieur Francis Buekenhout, entreprend aussi l'extension de la Propriété de Simson en considérant trois directions de projections a, b, c indépendantes entre elles. Mais il n'aborde pas la détermination du genre des coniques.

Mathématique et Pédagogie n° 128, 62–65, 2000

Olympiades

Voici les questions proposées au *18 e Annual American Invitational Mathematics Examination 2000.*

Les élèves ayant obtenu plus de 100/150 à la demi–finale de l'O.M.B. ont été invités, le 30 mars 2000, à répondre à ces 15 petits problèmes. Le meilleur résultat (10/15) a été obtenu par François Foucart, élève de sixième année.

Remarquons que les questions 12, 13 et 14 n'ont été correctement résolues par aucun des 46 élèves participants.

Je rappelle que chaque question admet une et une seule réponse exacte qui est un nombre entier compris entre 0 (inclus) et 999 (inclus). Si vous voulez jouer le jeu, vous disposez de 3 heures pour répondre aux 15 questions.

18th Annual American Invitational Mathematics Examination 2000 (AIME).

1. Trouver le plus petit entier positif n tel que quelle que soit la façon dont 10^n est exprimé comme le produit de deux entiers positifs, au moins un de ces deux entiers contient le chiffre 0.

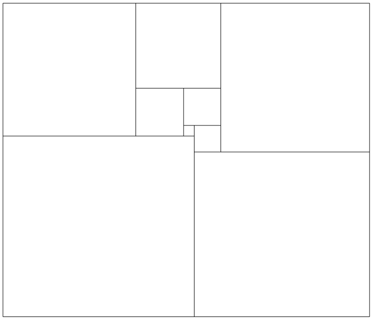
2. On considère le point $A = (u, v)$ tel que u et v sont des nombres entiers satisfaisant $0 < v < u$. Le point B est le symétrique de A par rapport à la droite $y = x$, le point C est le symétrique de B par rapport à l'axe Oy, le point D est le symétrique de C par rapport à l'axe Ox et le point E est le symétrique de D par rapport à l'axe Oy. L'aire du pentagone $ABCDE$ est 451. Trouver $u + v$.

3. Dans le développement de $(ax + b)^{2000}$ où a et b sont des nombres entiers positifs premiers entre eux, les coefficients de x^2 et x^3 sont égaux. Trouver $a + b$.

4. La figure montre un rectangle qui a été divisé en 9 carrés qui ne se recouvrent pas. Etant donné que la largeur et la longueur du rectangle sont des nombres entiers positifs premiers entre eux, trouver le périmètre du rectangle.

---

[0] Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B Vandercammen 1160 Bruxelles ou par e-mail à l'adresse festraetscl@brutele.be.



5. Chacune des deux boîtes contient à la fois des jetons blancs et des jetons noirs. Le nombre total de jetons est 25. On tire au hasard un jeton de chacune des boîtes. La probabilité que les deux jetons soient noirs est $27/50$ et la probabilité qu'ils soient blancs est m/n où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Que vaut $m+n$?
6. Pour combien de paires ordonnées (x, y) d'entiers est-il vrai que $0 < x < y < 10^6$ et que la moyenne arithmétique de x et y est exactement supérieure à la moyenne géométrique de x et y de 2 unités ?
7. En supposant que les trois nombres positifs x, y et z satisfont les équations $xyz = 1$, $x + \frac{1}{z} = 5$ et $y + \frac{1}{x} = 29$, alors $z + \frac{1}{y} = \frac{m}{n}$ où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m + n$.
8. Un réservoir ayant la forme d'un cône circulaire droit a une hauteur de 12 pouces et sa base a un rayon de 5 pouces. Le liquide qui est enfermé dedans a une profondeur de 9 pouces quand le cône est tenu avec son sommet en bas et sa base horizontale. Quand le cône est tenu avec son sommet en haut et sa base horizontale, le liquide a une profondeur de $m - n\sqrt[3]{p}$ pouces où m, n et p sont des entiers positifs et p n'est pas divisible par le cube d'un nombre premier. Trouver $m + n + p$.
9. Le système d'équations
$$\begin{aligned} \log_{10}(2000xy) - (\log_{10} x)(\log_{10} y) &= 4 \\ \log_{10}(2yz) - (\log_{10} y)(\log_{10} z) &= 1 \\ \log_{10}(zx) - (\log_{10} z)(\log_{10} x) &= 0 \end{aligned}$$
a deux solutions (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2). Trouver $y_1 + y_2$.
10. Une suite de nombres $x_1, x_2, x_3, ..., x_{100}$ possède la propriété suivante : pour tout entier k compris entre 1 et 100, le nombre x_k est inférieur de k à la somme des 99 autres. Sachant que $x_{50} = m/n$ où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux, trouver $m + n$.

11. Soit S la somme de tous les nombres de la forme a/b où a et b sont des diviseurs positifs premiers entre eux de 1000. Quel est le plus grand entier qui ne dépasse pas $S/10$?

12. On donne une fonction f pour laquelle
$$f(x) = f(398 - x) = f(2158 - x) = f(3214 - x)$$
est vérifiée pour tout nombre réel x. Quel est le plus grand nombre de valeurs différentes pouvant apparaître dans la liste $f(0), f(1), f(2), ..., f(999)$?

13. Au milieu de la vaste prairie, un camion de pompier stationne à l'intersection de deux autoroutes rectilignes perpendiculaires. Le camion se déplace à la vitesse de 50 miles à l'heure sur l'autoroute et à la vitesse de 14 miles à l'heure dans la prairie. On considère l'ensemble des points qui peuvent être atteints par le camion en 6 minutes au plus. L'aire de cette région est m/n miles carrés où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m + n$.

14. Dans le triangle ABC, les angles B et C sont égaux. Les points P et Q sont situés sur $\overline{AC}$ et $\overline{AB}$ respectivement de telle sorte que $AP = PQ = QB = BC$. L'angle ACB est r fois plus grand que l'angle APQ où r est un nombre réel positif. Trouver le plus grand entier qui ne dépasse pas $1000r$.

15. On numérote avec les entiers de 1 à 2000 un ensemble de 2000 cartes (un nombre différent sur chaque carte). Les cartes sont placées en une pile, dans un ordre quelconque. La carte du dessus est retirée de la pile et placée sur la table. La carte suivante est placée sous la pile. La nouvelle carte du dessus de la pile est placée sur la table à la droite de la carte déjà placée et la suivante est placée sous la pile. Le processus – placer la carte du dessus à la droite des cartes déjà sur la table et placer la carte suivante de la pile sous la pile – est répété jusqu'au moment où toutes les cartes sont sur la table. On constate alors que, en lisant de gauche à droite, les numéros sur les cartes sont en ordre croissant 1, 2, 3, ..., 1999, 2000. Combien de cartes se trouvaient au dessus de la carte numéro 1999 dans la pile initiale ?

Remarques :

– La *moyenne géométrique* des nombres positifs a et b est $\sqrt{ab}$.

– La *moyenne arithmétique* des nombres a et b est $\dfrac{a+b}{2}$.

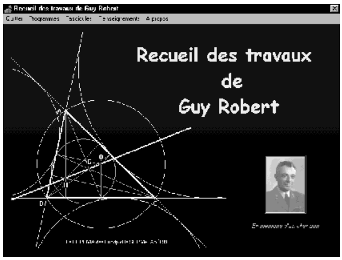
– $\log_{10} x = y$ si et seulement si $10^y = x$.

Réponses

1 8	2 21	3 667	4 260	5 26
6 997	7 5	8 52	9 25	10 173
11 248	12 177	13 731	14 571	15 927

Nouveau

La FOPEMA des FUNDP et la SBPMef présentent le CD-ROM des programmes mathématiques de G. Robert.



Thèmes traités dans les programmes :

Monographies de triangles spéciaux, Triangles automédians, orthiques, polaires, homologiques, Σ , Constructions de triangles, exercices, Cercles d'Euler, de Taylor, d'Apollonius, tritangents, Droites de Simson, d'Euler, enveloppes, Théorèmes de Pascal, Simson, Ménélaüs, Ptolémée, Hexagone de Pascal, conique des neuf points, Lieux géométriques, méthode des deux lieux, des génératrices, Lieux en coordonnées cartésiennes, en coordonnées polaires, Fonctions, équations, intégrales définies, Trigonométrie, triangles, équations, inéquations, Nombres complexes, théorie, exercices, fonctions complexes, Algorithmes de Briggs, d'Euclide, de Fibonacci, de π et e, Etude du chaos, Statistique descriptive à une ou deux variables, Lois de probabilités, exercices, simulations, Etude des erreurs et incertitudes.

Thèmes traités dans les fascicules :

Vingt quatre documents ou fascicules totalisant 700 pages reprennent en grande partie les thèmes traités dans les programmes. On y trouvera notamment les textes de conférences.

Prix : 250 FB, port compris.

Mathématique et Pédagogie n° 128, 66–70, 2000

Des problèmes et des jeux

Construction Problème n°229 de *Mathématique et Pédagogie* n°125.

Soit ABC un triangle rectangle. Construire un point $\mathbb{N}$ intérieur au triangle et tel que les angles NBC, NCA et NAB soient égaux.

Solution de P. Bornszstein de Courdimanche (France). Plus généralement, on dispose du résultat suivant :

Théorème

Dans tout triangle ABC, il existe un point Ω tel que $\widehat{\Omega AB} = \widehat{\Omega BC} = \widehat{\Omega CA}$ et un point Ω' tel que $\widehat{\Omega' BA} = \widehat{\Omega' CB} = \widehat{\Omega' AC}$. Ω est le point de concours des cercles C_1, C_2, C_3 où

– C_1 passe par A et B et est tangent à BC,
– C_2 passe par A et C et est tangent à AB,
– C_3 passe par B et C et est tangent à AC.

Ω' vérifie une propriété analogue. Les points Ω et Ω' sont appelés points de Brocard du triangle ABC.

Preuve du théorème

Rappel : cas limite du critère de cocyclité.
La droite AT est tangente au cercle circonscrit à ABC ssi

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \pmod{\pi}$$

Soit donc ABC un triangle.

Les cercles C_1, C_2, C_3 sont définis comme ci-dessus. C_1 et C_2 se rencontrent en A. Ils ne peuvent être tangents sinon ce serait en A et avec AB comme tangente commune, ce qui contredit que $B \in C_1$. Donc C_1 et C_2 se rencontrent en un point $\Omega \neq A$. Notons que $\Omega \notin BC$ car BC est tangente à C_2 en C et $\Omega \in C_2$. On peut alors considérer le cercle Γ passant par B, C et Ω. On veut prouver que $\Gamma = C_3$. Pour cela, il suffit de prouver que AC est tangente à Γ. Or

$\Omega \in C_1$ et BC est tangente C_1, donc, d'après le rappel

$$(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \pmod{\pi}$$

([0]) Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B Vandercammen 1160 Bruxelles ou par e-mail à l'adresse festraetscl@brutele.be.

$\Omega \in C_2$ et AB est tangente à C_2, donc de même

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{\pi}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) &= (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{\pi} \\ &= (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{\pi} \\ &= (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi}$ et ainsi AC est tangente à Γ. On a donc $\Gamma = C_3$ et par conséquent C_1, C_2, C_3 sont concourants en Γ.

En utilisant la tangente, il vient $\widehat{\Omega AB} = \widehat{\Omega BC} = \widehat{\Omega CA}$. Le résultat sur Ω' se prouve de façon analogue.

Construction de Ω

Il suffit de construire C_1 et C_2 par exemple. Or pour construire C_1, il suffit de trouver son centre O_1, intersection de la médiatrice $[AB]$ et de la perpendiculaire à BC en B, ce qui ne pose pas de problème. De même pour C_2.

Bonne solutions de N. Berckmans de Waterloo, M. Coyette de Rixensart, J. Finoulst de Diepenbeek, A. Paternottre de Boussu, J. Rasse de Mean, J.G. Segers de Liège et A. Zriwil de Mons.

Système D Problème n°230 de *Mathématique et Pédagogie* n°125.

Dans $\mathbb{N}$, *résoudre le système d'équations*

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2(y+z) \end{cases}$$

Solution de J. Finoulst de Diepenbeek.

Tenant compte de l'identité

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \tfrac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) \end{aligned}$$

Le système peut s'écrire

$$\begin{cases}(x-y-z)((x+y)^2+(x+z)^2+(y-z)^2)=0\\ x^2=2(y+z)\end{cases}$$

On en déduit les systèmes

1. $\begin{cases}x=y+z\\ x^2=2x\end{cases}$ d'où $\begin{cases}x=y+z\\ x^2=2x\end{cases}$
   La seconde équation donne $x=0$ ou $x=2$.
   Si $x=0$, alors $y+z=0$ et dans $\mathbb{N}$, $y=z=0$
   Si $x=2$, alors $y+z=2$ et dans $\mathbb{N}$, $y=2$, $z=0$ ou $y=0$, $z=2$ ou $y=z=1$
2. $\begin{cases}(x+y)^2+(x+z)^2+(y-z)^2=0\\ x^2=2(y+z)\end{cases}$

Comme une somme de carrés s'annule ssi chaque terme s'annule, il n'y a dans $\mathbb{N}$ que la solution triviale $(0,0,0)$.

Conclusion :

Les seules solutions dans $\mathbb{N}$ sont $(0,0,0)$, $(2,0,2)$, $(2,1,1)$ et $(2,2,0)$.

N. Berckmans de Waterloo, P. Bornsztein de Courdimanche, M. Coyette de Rixensart, P. Dekeyser de Uccle, A. Paternottre de Boussu, J. Segers de Liège, H.G. Seiffert de Berlin, A. Zriwil de Mons m'ont envoyé de bonnes solutions.

Suite constante Problème 231 de *Mathématique et Pédagogie* n°125.

Soit (a_n) une suite de naturels tels que

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}^2+a_{n+1}^2}\times\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ pour } n\geqslant 1$$

Démontrer que cette suite est constante.

Solution de N. Berckmans de Waterloo.

Soit $(a_0,a_1,a_2,\ldots)$ une suite de nombres naturels tels que

$$a_n^2=\frac{a_{n-1}^2+a_{n+1}^2}{2}\qquad \forall n\geqslant 1$$

a_n^2 est donc situé au milieu du segment $[a_{n-1}^2, a_{n+1}^2]$.

Puisque ce fait est vérifié pour tout $n \geqslant 1$, on peut en conclure que tous les segments $[a_i^2, a_{i+1}^2]$ ont la même longueur λ.

λ est un nombre naturel, démontrons qu'il est nul.

Supposons $\lambda \neq 0$.

$\forall n \geqslant 1$, on a $a_n^2 - a_0^2 = n\lambda$ et $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = +\infty$.

D'autre part, $\lambda = a_n^2 - a_{n-1}^2 = (a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n+1})$.

On peut en déduire que $\forall n \geqslant 1$, $a_n + a_{n+1}$ divise λ.

Le nombre naturel λ possède ainsi une infinité de diviseurs, ce qui est absurde.

La suite $(a_i | i \in \mathbb{N})$ est donc une suite constante.

M. Coyette remarque qu'il existe une infinité de triplets a, b, c, tels que a, b, c, soient entiers naturels et $b = \sqrt{a^2 + c^2} \times \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Par exemple, $(1, 5, 7)$, $(1, 29, 41)$, $(1, 169, 239)$, $(7, 17, 13)$. Un problème serait de caractériser ces triplets.

Autre problème : existe-t-il quatre nombres entiers naturels a, b, c et d tels que :

$$b = \sqrt{a^2 + c^2} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ et } c = \sqrt{b^2 + d^2} \times \sqrt{\frac{1}{2}}$$

P. De Keyser nous fournit une expression de triplets de carrés en progression arithmétique :

$$(2n^2 - 1)^2, (n^2 + (n+1)^2)^2, (2(n+1)^2 - 1)^2 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

la raison étant égale à $4n(n+1)(2n+1)$.

Ce lecteur s'interroge sur l'existence de quadruplets et plus généralement de suites de carrés en progression arithmétique.

Je n'ai aucune référence à ce sujet, mais peut-être qu'un autre lecteur pourrait nous éclairer.

Bonnes réponses de P. Bornsztein de Courdimanche, M. Coyette de Rixensart, J. Finoulst de Diepenbeek, A. Paternottre de Bousssu, P.

Dekeyser d'Uccle, H.J. Seiffert de Berlin, A. Zriwil de Mons, ainsi que d'un lecteur distrait qui a oublié d'indiquer son nom.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir avant le 1er janvier 2001.

238. Complexe

Soit n un entier positif. Prouver que $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ a une racine satisfaisant $|z| = 1$ ssi $n+2$ est divisible par 6 (Olympiades chinoises 1987).

239. Inégalité toute simple

Démontrer que, pour tout entier $n > 2$, on a $(n!)^2 > n^n$

240. Bissectrices et médiatrices

Les bissectrices intérieures d'un triangle ABC rencontrent les côtés BC, CA, AB respectivement en D, E, F. La médiatrice de $[AD]$ coupe BC en L, la médiatrice de $[BE]$ coupe AC en M et la médiatrice de $[CF]$ coupe AB en N. Démontrer que L, M, N sont alignés.

Un outil à votre disposition

Une liste de discussion consacrée à l'enseignement des mathématiques est disponible sur le site de la SBPMef. Elle est destinée à l'échange de questions et d'opinions sur tout sujet susceptible d'intéresser les enseignants de mathématique de tous les niveaux, « du maternel à l'université ». N'hésitez pas à y faire part de vos préoccupations, à y solliciter des informations ou encore de l'aide. Parmi les abonnés, il s'en trouvera certainement qui pourront vous répondre.

Pour vous abonner à la liste, envoyez par courrier électronique à l'adresse `majordomo@umh.ac.be` le message d'une ligne suivant (évitez toute signature) :

```
subscribe sbpmlist
```

Vous recevrez alors automatiquement (et gratuitement) tous les messages électroniques envoyés à la liste. Pour envoyer un message à la liste, il suffit de l'envoyer à l'adresse `sbpmlist@umh.ac.be`

Mathématique et Pédagogie n° 128, 71–73, 2000

Revue des Revues

Bulletin de l'APMEP, n° 425 Novembre–Décembre 1999.

Cette livraison commence par l'éditorial de la Présidente, Catherine Dufossé qui, sur un ton ironique, s'interroge sur la notion de rentabilité dans le domaine de l'enseignement et de la formation.

Une partie très importante de la revue est consacrée à un dossier traitant de la statistique et des probabilités. Six textes y retiendront l'attention du lecteur.

- Claudine Robert traite du sujet : *A propos de l'introduction de l'enseignement de la statistique au lycée.* C'est la traduction de l'expression d'un groupe chargé d'écrire de nouveaux programmes, qui souhaite ne pas se limiter au traitement numérique ou graphique de l'information chiffrée mais qui propose d'introduire les premiers éléments d'une réelle démarche statistique.
- Dans le texte *Enseigner les statistiques en seconde*, Rémi Coste présente une expérience menée dans l'Académie de Versailles. L'idée était de réaliser une étude à propos d'une expérience réelle menée avec un grand nombre d'élèves.
- Jean-Louis Piednoir montre, dans l'article la géométrie au service de la statistique, l'importance de la géométrie euclidienne pour la fabrication d'indicateurs statistiques classiques.
- *Les probabilités au baccalauréat S 1998* par Jean-Pierre Grangé traite de la notion d'arbre dans les probabilités.
- Dans *Nos élèves revivent l'histoire des probabilités*, Nicole Vogel décrit le travail d'élèves sur le célèbre problème des partis, connu pour la correspondance échangée entre Pascal et Fermat.
- Antoine Bodin et Régis Gras analysent un questionnaire qui s'adressait aux enseignants.

Une série intitulée *Dans nos classes* est composée de trois articles :

- *Problèmes ouverts pour l'école élémentaire* propose des énoncés et des commentaires sur des problèmes pour les plus jeunes.
- *Liaison mathématiques–atelier* par Jean-Claude Sachet et Aline Gauss et traite des encadrements.
- *Mathématiques et littérature* de Rémi Duvert propose quelques pistes d'utilisation de textes littéraires dans l'enseignement des mathématiques au lycée, au collège voire à l'école élémentaire.

Dans *Lemniscatomie*, Jean-Pierre Friedelmeyer montre comment découper une lemniscate en parties égales, à la règle et au compas.

Suivent alors les rubriques habituelles, mais non moins intéressantes que sont : *Avis de recherche, les problèmes de l'APMEP, Matériaux pour une documentation, Pour un inventaire et Vie de l'association.*

Bulletin de l'APMEP – N° 427 Mars–Avril 2000

Dans son habituel éditorial, la Présidente de l'APMEP, Catherine Dufossé, remercie publiquement tous ceux qui, en France, ont pris position en faveur des mathématiques et de leur enseignement. Face aux effets parfois dévastateurs des mutations sociologiques de la société, les enseignants qui se sentaient seuls sont réconfortés par de nombreuses prises de position en leur faveur. Mais plus que la violence des jeunes c'est la violence faite aux jeunes qui reste difficile à supporter. Le texte est accompagné, en appui, de la publication de deux lettres.

Dans de courts articles, nous pouvons trouver une présentation du Jeu de Juniper Green par Olivier Reboux, des fiches concernant les sections de solides et un texte de Louis-Marie Bonneval au sujet des intervalles de confiance.

Dans un tour d'Europe des systèmes éducatifs, Jean-Paul Bardoulat présente les système autrichien, italien et portugais, Natacha Ianeva-Toussaint présente l'enseignement en Bulgarie et Marek Legutko traite du baccalauréat en Pologne.

Régis Gras et Jean-Pierre Richeton développent ensuite des « Eléments d'analyse de l'expérimentation d'épreuves de mathématiques en classe de première ». Le choix expérimental concerne une nouvelle structure de l'écrit au baccalauréat, basée sur un plus grand nombre d'exercices dont le but est d'évaluer les connaissances, leur maîtrise et une certaine capacité de recherche.

Le baccalauréat, pierre angulaire, pierre de touche et pierre d'achoppement de l'édifice éducatif par Gérard Kuntz défend l'idée que la fonction d'évaluation des connaissances de cette épreuve est largement passée au second plan dans les dernières années.

Vient alors un court article intitulé « Sur le caractère spectaculaire du théorème de Fermat-Wiles » par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty.

Dans « De Léonard de Pise à Hilbert : un entier comme somme de deux carrés » , Robert Vidal Propose de voir comment un même problème a intéressé et continue à intéresser les mathématiciens.

Des grandeurs au collège à l'analyse au lycée de Jean-Pierre Friedelmeyer est un long article, particulièrement documenté, où l'auteur traite de la mesure des grandeurs en soulignant trois idées fondamentales

– c'est le point de départ de toutes les applications des mathématiques
– elle fournit le nombre qui est l'objet de l'analyse
– elle fournit un exemple de compréhension d'ensemble.

La brochure se termine alors par les rubriques habituelles, mais aux aspects toujours intéressants, que sont : Avis de recherche, les problèmes de l'APMEP, Pour chercher et approfondir et Matériaux pour une documentation.

C. Villers

LE COIN DU TRESORIER

Tarifs (septembre 1999)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent Mathématique et Pédagogie, SBPM-Infor et Math-Jeunes.

Belgique : 807 BEF/20,00 EUR (Etudiants : 605 BEF/15,00 EUR),
Union Européenne : 36,00 EUR,
Europe hors Union Européenne : 38,00 EUR,
Hors Europe :
– Envoi prioritaire : 72,00 EUR,
– Envoi non prioritaire : 42,00 EUR.

Abonnement à Mathématique et Pédagogie

Belgique : 1049 BEF/26,00 EUR, Union Européenne : 32,00 EUR,
Europe hors Union Européenne : 33,00 EUR,
Hors Europe :
– Envoi prioritaire : 46,00 EUR,
– Envoi non prioritaire : 34,00 EUR.

Abonnement à Math-Jeunes Junior et Math-Jeunes

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, inférieur et supérieur, sont idéalement pris par l'intermédiaire d'un professeur.
Abonnement isolé à une des deux revues (4 numéros) :
- Belgique : 200 BEF/4,96 EUR,
- Union Européenne : 9,2 EUR,
- Europe hors Union Européenne : 10,2 EUR,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 20,4 EUR,
  - Envoi non prioritaire : 11,4 EUR.

Abonnement isolé aux deux revues (7 numéros) :
- Belgique : 350 BEF/8,68 EUR,
- Union Européenne : 16,5 EUR,
- Europe hors Union Européenne : 17,17 EUR,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 35,6 EUR,
  - Envoi non prioritaire : 20 EUR.

Abonnements groupés (au moins 5) à *Math-Jeunes* et *Math-Jeunes Junior*.

Abonnements groupés à une des deux revues :
- Belgique : 150 BEF/3,72 EUR,
- Union Européenne : 6 EUR,
- Europe hors Union Européenne : 7,6 EUR,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 15,2 EUR,
  - Envoi non prioritaire : 8,6 EUR.

Abonnements groupés aux deux revues :
- Belgique : 265 BEF/6,57 EUR,
- Union Européenne : 10,6 EUR,
- Europe hors Union Européenne : 13,4 EUR,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 26,6 EUR,
  - Envoi non prioritaire : 15,1 EUR.

Vente d'anciens numéros de Mathématique et Pédagogie

Avant 1997 : 30 BEF (0,74 EUR)/N° + frais de port (1),
Année 1998 : 100 BEF (2,48 EUR)/N° + frais de port (1).

Vente d'anciens numéros de Math-Jeunes

Avant 1997/1998 : 10 BEF (0,25 EUR)/N° + frais de port (1),
Année 1997/1998 : 20 BEF (0,5 EUR)/N° + frais de port (1).

Brochures

Le prix d'une brochure s'obtient en additionnant le prix de base mentionné dans le tableau 1 aux frais de port mentionnés dans le tableau 2 en fonction de la catégorie postale à laquelle appartient la brochure. Lorsqu'un prix réduit est mentionné, ce prix est réservé aux membres de la SBPMef et aux étudiants.

Tableau 1 : Prix de base	Prix plein	Prix réduit	Cat. post.
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 1 au n° 6 épuisés,	50 BEF		
reste n° 12)	1,24 EUR	/	2
Série 2 (n° 7 au n° 11 et n° 13)	220 BEF		
	5,45 EUR	/	5
Série 3 (n° 14)	220 BEF		
	5,45 EUR	/	3
Les 3 séries (n° 7 au n° 14)	300 BEF		
	7,44 EUR	/	6
Dossiers d'explorations didactiques			
Dossier 2 (Autour du plus grand	75 BEF	50 BEF	
commun diviseur)	1,86 EUR	1,24 EUR	4
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	75 BEF	50 BEF	
	1,86 EUR	1,24 EUR	4
Dossier 5 (Matrices et Produit scalaire	300 BEF	250 BEF	
	7,44 EUR	6,18 EUR	4
Dossier 6 (Statistiques)	300 BEF	250 BEF	
	7,44 EUR	6,18 EUR	4
Olympiades Mathématiques Belges			
Tome 3	200 BEF		
	7,96 EUR	/	3
Tome 4	220 BEF		
	5,45 EUR	/	4
Tome 3 + Tome 4	340 BEF		
	8,43 EUR	/	6
J. Bair, R. Hinnion et D. Justens			
Applications économiques au service	275 BEF	200 BEF	
de la Mathématique	6,82 EUR	4,96 EUR	3
Jacques Bair			
Mathématique et Sport	200 BEF	150 BEF	
	4,96 EUR	3,72 EUR	3
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans	500 BEF	400 BEF	
patrie, ...	12,39 EUR	9,92 EUR	5

Tableau 2 : Frais de port

Catégorie	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe, envoi prioritaire	Hors Europe, envoi non prioritaire
1	10 BEF	65 BEF 1,61 EUR	70 BEF 1,74 EUR	165 BEF 4,09 EUR	90 BEF 2,29 EUR
2	25 BEF	40 BEF 0,99 EUR	45 BEF 1,12 EUR	80 BEF 1,98 EUR	50 BEF 1,24 EUR
3	40 BEF	65 BEF 1,61 EUR	70 BEF 1,74 EUR	170 BEF 4,21 EUR	90 BEF 2,23 EUR
4	60 BEF	100 BEF 2,48 EUR	130 BEF 3,22 EUR	320 BEF 7,93 EUR	150 BEF 3,72 EUR
5	80 BEF	120 BEF 2,97 EUR	130 BEF 3,22 EUR	320 BEF 7,93 EUR	150 BEF 3,72 EUR
6	100 BEF	150 BEF 3,72 EUR	230 BEF 5,70 EUR	600 BEF 14,87 EUR	300 BEF 7,44 EUR

Bulletin de l'APMEP
Les membres de la SBPMef peuvent, par versement au compte de la SBPMef, s'abonner au bulletin de l'association des professeurs de mathématique de l'enseignement public en France, le prix de l'abonnement est : 1575 BEF. Ils peuvent également, par la même voie, commander des publications de l'APMEP.

Pour effectuer une commande, il vous suffit de verser le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique :
000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons, ou
001-0828109-96 de Math-Jeunes, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons

Si vous habitez en France :
Vous pouvez payer en francs français (le prix en francs français est le prix en francs belges, divisé par 6 et arrondi au franc supérieur).
Effectuez votre versement sur le compte
CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef 15 rue de la Halle à B-7000 Mons, Belgique.

Si vous habitez ailleurs :
Effectuez de préférence un virement international au compte
CCP (giro) 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons, Belgique.
Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement "giro"), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.

Adresse de la SBPMef sur internet :
http ://ceco.umh.ac.be/noel/sbpm.htm
E-mail : sbpm@umh.ac.be