*Mathématique*
*et*
*Pédagogie*

# *Sommaire*



*Articles*



*Rubriques*



N° 129 Novembre – Décembre 2000

**NOTE**

* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
* Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
* Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (LaTeX $2_\varepsilon$, Word) ; les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.

  L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.

  Pour les livres :

  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.

  Pour les articles :

  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

 Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

*Mathématique et Pédagogie* n° 129, 3–4, 2000

# Éditorial

## CH. VAN HOOSTE

**Mathématique et Pédagogie vient de changer de directeur !**

Parce que sa charge professionnelle à l'Université de Liège a augmenté et parce qu'il estime qu'un renouvellement des cadres est nécessaire de temps en temps, Jacques BAIR a souhaité être déchargé de sa mission à la tête de notre revue ; ainsi, il passe le témoin à Jules MIEWIS.

Jacques est resté le moteur de *Mathématique et Pédagogie* pendant 10 ans. Tout au long de cette décennie, il a permis à la revue de conserver toutes ses qualités, ce qui est essentiel. De plus, il est parvenu à lui donner un meilleur look : couverture cartonnée et compilation des articles en LaTeX $2_\varepsilon$ (le traitement de textes pour mathématiciens).

Jacques, tous les membres du Conseil d'Administration de la SBPMef ainsi que tous les lecteurs assidus de *Mathématique et Pédagogie* te remercient pour le travail incomparable que tu as accompli en tant qu'éditeur responsable de leur périodique préféré.

Jules n'est pas un inconnu pour les membres de longue date de la SBPMef. En effet, ancien élève de Willy VANHAMME, lui-même directeur de *Mathématique et Pédagogie* de 1977 à 1983 il a collaboré avec celui-ci, dès la création de *Math-Jeunes* en 1979. Devenu directeur de *Math-Jeunes* par la suite, il a, épaulé par son épouse Nicole, continué l'œuvre entreprise jusqu'en 1987. Auteur d'un grand nombre d'articles pour cette revue destinée aux jeunes, Jules est donc un habitué de la rédaction mathématique.

Jules, tous les membres du Conseil d'Administration de la SBPMef ainsi que tous les lecteurs assidus de *Mathématique et Pédagogie* te souhaitent bon vent ...

***

Lors de sa dernière réunion, la Commission Pédagogique de la SBPMef a relancé ses travaux. Entre autres, un sujet passionnant a été proposé : LA DÉMONSTRATION. Bien que celui-ci ait déjà été traité par d'autres, dans des contextes différents, sous d'autres cieux ou à une époque révolue, il semble qu'un certain nombre de membres, des gens de terrain, souhaitent que la SBPMef produise un document qui en fasse le tour, dans la situation actuelle de notre enseignement. A cet effet, j'ai proposé un certain nombre de thèmes à développer :

- Les procédés de démonstration.
  Par déduction, par contraposée, par l'absurde, par récurrence, ...
- Les outils de démonstration.
  Par exemple, pour établir une propriété géométrique : géométrie synthétique, géométrie analytique, géométrie vectorielle, géométrie des transformations du plan ou de l'espace, barycentres, nombres complexes, ...
- La recherche d'une démonstration (le comment faire ?)
  Partir des hypothèses vers la thèse.
  Partir de la thèse pour revenir vers les hypothèses.
  Etudier les propriétés de la figure (au hasard ?).
  Par exemple, pour démontrer que des points sont alignés : angle plat, angles opposés par le sommet, homothétie, images d'autres points alignés, vecteurs colinéaires, ...
- Développer des situations-problèmes qui vont nécessiter la démonstration.

Tous les membres de la SBPMef peuvent participer aux travaux de la Comission Pédagogique. Si le sujet vous intéresse, n'hésitez pas à venir nous rejoindre. Pour connaître le lieu et la date de la prochaine réunion, un petit coup de fil à notre secrétariat au 065/37.37.29 et vous êtes des nôtres. Si vous n'avez pas la possibilité d'y participer, envoyez-nous vos suggestions, vos remarques, vos réflexions ; elles seront certainement les bienvenues.

Bonne lecture, bon travail et à bientôt !

**Consultez aussi notre site Web à l'adresse :**

**http ://ceco.umh.ac.be/noel/sbpm.htm**

Vous pourrez notamment y télécharger des fichiers contenant les macros nécessaires à la réalisation des machines décrites dans les articles « Cabri-Géomètre » et « Des Cabrimachines ». Vous les trouverez en affichant la table des matières de ce numéro 129 de *Mathématique et Pédagogie* :
http ://ceco.umh.ac.be/noel/sbpm/mp2.htm

*Mathématique et Pédagogie* n° 129, 5–5, 2000

# Une fonction affine au « cœur » de chacun d'entre nous

**M. LARTILLIER, *Université Libre de Bruxelles***

**Mots-Clés : fonction, affine**

Souvent, lors d'une visite médicale, le médecin réalise une prise de « tension artérielle ». Cette pression est mesurée en centimètre de mercure à l'aide d'un « **sphygmomanomètre** » ou **tensiomètre** (membrane de caoutchouc gonflable reliée à un dispositif de détection de pression dont la valeur s'affiche sur un cadran) et l'écoute des bruits de Korotkow étant perçue par un **stéthoscope**.

Le médecin nous fournit alors deux nombres, par exemple 14.8 et ... en général cette réponse numérique est qualifiée de « normale » ou « bonne » en fonction d'un lien entre ces deux nombres :

*le second doit être égal à la moitié du premier augmenté d'une ou de deux unités (suivant l'âge).*

La valeur la plus élevée (premier nombre) indique **la pression systolique** correspondant au moment de contraction (**systole**) du cœur qui propulse le sang dans les artères. La valeur la plus basse (deuxième nombre) indique **la pression diastolique** correspondant au moment de relâchement (**diastole**) du cœur afin de se remplir de sang.

Ce cycle systole–diastole est d'une fréquence normale d'environ 72 battements par minute. Ces derniers durent généralement 0.8 secondes en émettant deux bruits – bruits de Korotkow – suivis d'une courte pause. Dès lors si l'on désigne par $x$ la pression systolique (premier nombre) et par $y$ la pression diastolique (deuxième nombre), on obtient pour une « bonne » tension artérielle la relation suivante : $y = \frac{1}{2}x + 1$ voire $y = \frac{1}{2}x + 2$

En d'autres termes, la « tension artérielle » se révèle être un bel exemple « naturel », puisqu'au « cœur » de chacun d'entre nous existe une **fonction affine** : $t_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ ou $t_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$

« Je dédie ce court article à la charmante et compétente équipe d'infirmières de la salle 1 (Service de Chirurgie du Professeur Mendes da Costa) du Centre Hospitalier Universitaire Brugmann ».

($^0$) Adresse de l'auteur: M. Lartillier : Avenue Jean Sibélius, 16/25, 1070 Bruxelles.

**Publications APMEP (France)** : Ces publications peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

– **Les brochures 1998-1999 sont signalées par ∗.**

– Le prix "*adhérent*" concerne l'A.P.M.E.P. **et la S.B.P.M.ef**.

| N° | Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau] | Prix, en FB, *sans port* | |
|---|---|---|---|
| | *Problèmes, rallyes,...* : | public | adhérent |
| 97 | Jeux 4 (études sur les problèmes de rallyes) | 660 | **460** |
| ∗119 | Jeux 5 (activités mathématiques au collège) | 515 | **305** |
| 98 | Fichier Evariste (240 fiches "Benjamins" ou "Cadets") | 515 | **305** |
| 250 | Panoramath 96 (co-diffusion Archimède,...) | 490 | **345** |
| ∗251 | Panoramath 2 (co-diffusion Archimède,...) | 555 | **385** |
| | *Les deux Panoramath ensemble* : | 1045 | **505** |
| ∗402 | Jeux du Scientific American (co-diffusion ADCS) | 830 | **585** |
| ∗451 | Concours Australien de mathématiques | | **515** |
| ∗450 | Math Evasion (Bandes dessinées lycées) | 305 | **215** |
| | | | |
| | *Quelques grands thèmes* : | | |
| ∗121 | Maths en scène (22 thèmes, référés à l'expo "Math 2000" mais utilisables sans elle) | 515 | **305** |
| | Galion-thèmes : | | |
| ∗304 | Série 4. Six plaquettes, collège ou lycée | 305 | **275** |
| ∗305 | Classe de Seconde : 10 thèmes programme 2000 | 460 | **400** |
| | | | |
| | *Evaluations (collection EVAPM)* : | | |
| 112 | Sixième (fin d'année) (Evaluation 1997) | | |
| ∗118 | *Les deux fascicules ensemble* : | 705 | **490** |
| ∗107 | Premières (fin d'année) Documents : n° 90 | | |
| ∗108 | Trois fascicules : 90, 107 ; 108, ensemble (404 p.) | 860 | **585** |
| ∗106 | Terminales BEP (Lycées professionnels) | 400 | **275** |
| | | | |
| | *Technologie moderne et mathématiques* : | | |
| ∗352 | Tableur et maths (Collège et début lycée) | 490 | **400** |
| | Faire de la géométrie sup. avec Cabri II | | |
| ∗124 | Des points, droites, cercles, ... aux coniques | | |
| ∗125 | ... et aux cubiques | | |
| | *Les deux tomes ensemble* (288 p. en 17 x 24) | 705 | **430** |
| ∗120 | Clas Math Lycée : Classeur informatisé de documents mathématiques - 12 disquettes | | |
| | Version 10 installations, port compris | 2150 | **1535** |
| | Version 26 installations, port compris | 4305 | **3075** |

PORT EN FB (prix indicatif) : 1 brochure : 100 ; 2 ou 3 brochures : 160 et au-dessus de 3 : 260

*Mathématique et Pédagogie* n° 129, 7–12, 2000

# Cabri-Géomètre

## J.-P. HOUBEN, *Université Catholique de Louvain*

*Mot-clé* : Cabri-Géomètre.

Cabri-Géomètre est un logiciel (1) élaboré par l'équipe de Jean-Marie Laborde du laboratoire IMAG à Grenoble. La première version date de 1990. Une nouvelle version beaucoup plus performante intitulée Cabri II existe depuis 1996 pour Mac et PC. Les fichiers produits (figures et macros) peuvent être lus par les deux machines (2). Le présent article (et les suivants) a pour but de vous en exposer les nombreuses possibilités d'application en classe.

Ce logiciel vous fournit au départ une page blanche où il est possible de dessiner. C'est le **CA**hier de **BR**ouillon **I**nteractif. Il peut en effet servir à mettre les élèves en situation de recherche devant un problème de géométrie où toutes les constructions seront réalisées correctement par l'ordinateur. Dans ce cas, l'élève devra agencer lui-même ses constructions, et les organiser pour arriver à faire exécuter par l'ordinateur ce qu'il souhaite réaliser. Il lui faut donc de la réflexion et surtout ne rien oublier dans la démarche de la construction. Il s'agit de faire de la géométrie de recherche tout en étant dégagé des techniques de construction.

Mais là n'est pas la seule utilisation possible. Un autre moyen est dit de la « boîte noire ». Dans ce cadre de travail, on fournit à l'élève une construction achevée et on lui demande de la retrouver c'est-à-dire de rechercher les constructions cachées. Il doit donc répondre à la question : « Que faut-il construire pour arriver à ce résultat ? ». Des recherches sur les transformations du plan sont des exemples de cette utilisation. On présente à l'élève un triangle $ABC$ et son image $A'B'C'$ obtenue par une transformation (translation, rotation, symétrie, ...). A lui de découvrir la transformation sachant que les seuls points accessibles sont $A$, $B$ et $C$.

Une troisième utilisation de Cabri-Géomètre est de fournir aux élèves une image toute construite en vue d'aborder ou d'illustrer un point particulier de la matière. Ici, on n'est pas limité à la géométrie, comme nous le verrons

(0) Adresse de l'auteur: Houben J.-P., Rue de l'Église, 78, B–1301 Bierges.
(1) Le logiciel peut être acquis par les enseignants auprès de la firme Rhombus.
(2) Sur PC le nom d'un fichier sera suivi de .fig et le nom d'un macro par .mac. Il suffit sur Mac de faire suivre les noms respectivement par .fig et .mac pour pouvoir les récupérer sur un PC.

dans des articles qui suivront. Dans cette dernière utilisation du logiciel, c'est l'enseignant qui a « programmé » les constructions, ou les calculs qui vont être exécutés par Cabri-Géomètre. En proposant des constructions impossibles, on peut même introduire la logique du « si » et l'utiliser dans une succession d'images suivant un scénario prévu.

C'est pour faire connaître quelques thèmes du programme de mathématiques du secondaire au travers de Cabri-Géomètre que la présente rubrique est inaugurée dans *Mathématique et Pédagogie*. On y décrira des situations d'emploi. Mais vous pouvez alimenter cette rubrique en nous communiquant les expériences que vous conduisez dans vos classes afin qu'elles puissent servir à d'autres. Toute suggestion est d'ailleurs la bienvenue.

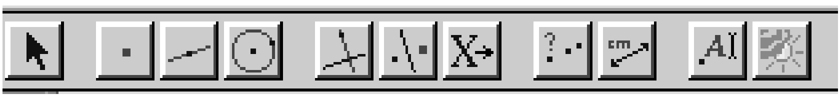
Voici une liste de sujets qui seront traités prochainement dans cette rubrique :

- Le graphique du trinôme, ($4^{e}$, $5^{e}$)
- Le produit et la règle des signes, ($1^{re}$)
- Des constructions impossibles, (théorie)
- Interrupteurs et la construction d'une tangente à un cercle ($3^{e}$)
- La perspective cavalière d'un cube, d'un cercle, d'un cône.
- Sur les lieux géométriques.
- ...

Voici le premier article de la série.

### Le produit et la règle des signes

Tout en lisant cet article vous avez allumé votre ordinateur et choisi le logiciel Cabri-Géomètre. La page blanche d'un nouveau document est à l'écran. Au dessus se trouve un menu avec des icônes.



Menu 1

Ce menu présente par une série d'icônes les outils accessibles dans Cabri-Géomètre. Dans l'ordre ce sont : la boîte des Pointeurs, la boîte des Points, la boîte des Lignes, la boîte des Courbes, la boîte des Constructions, la boîte des Transformations, la boîte pour les Macros, la boîte des Propriétés, la boîte pour les Mesures, la boîte d'Affichage, la boîte pour les Aspects. Pour avoir le détail de l'outil, il faut cliquer sur l'icône tout en laissant le doigt sur la touche gauche de la souris, puis glisser la souris pour sélectionner une des options. Si l'on clique sur l'icône sans garder le doigt sur la touche, on sélectionne la dernière option choisie (chaque option a d'ailleurs son icône). Nous aurons par exemple :


Menu 2

Il y a même une aide, bien utile au début. Pour l'obtenir il faut sélectionner Aide dans le menu Aide (équivalent clavier F1 pour PC ou cliquer sur ? pour Mac).

Nous allons utiliser les coordonnées des points et la calculatrice du logiciel pour illustrer la règle des signes d'un produit de deux nombres.

Pour utiliser les coordonnées, il nous faut un système d'axes. Aussi prenons dans la boîte à outils **Aspect** l'outil *Montrer les axes* ([3]) ;

Comme ce système d'axes ne sert que pour des constructions et des calculs, nous le cacherons plus tard.

Sur l'axe des $y$ prenons deux points $m$ et $n$ : **Points**/*Point sur objet.*

Par ces deux points traçons la parallèle à l'axe des $x$ : **Constructions**/*Parallèle.*

Sur chacune des deux droites fixons un point, noté ([4]) $a$ sur la première et $b$ sur la seconde : **Points**/*Point sur objet.*

Affichons les coordonnées des points $a$ et $b$ : **Mesures**/*Coord. & Equation.*

([3]) Les références des objets de Cabri-Géomètre seront par convention abrégées ainsi : **Aspect**/*Montrer les axes.*
([4]) On peut nommer un point de deux manières soit directement au moment de sa construction en écrivant son nom au clavier, soit par après en passant par les instructions : **Affichage**/*Nommer.*

Recherchons la calculatrice : **Mesures**/*Calculatrice*.

Pointons avec la souris l'abscisse de $a$ et le texte `ce nombre` apparaît à l'écran et un $a$ s'affiche dans la fenêtre de la calculatrice. Appuyons sur $*$ soit au clavier, soit à l'aide de la souris à l'écran de la calculatrice. Ensuite, pointons avec la souris l'abscisse de $b$ et pressons $=$. Le résultat du produit est affiché dans le dernier cadre de la calculatrice. La valeur numérique du calcul doit maintenant être affichée hors de la calculatrice. Il suffit pour cela de pointer ce résultat avec la souris : un rectangle apparaît dans le coin inférieur droit de l'écran, on le déplace en gardant le doigt sur la souris et lorsqu'on lâche celle-ci, le résultat est affiché à cet endroit de l'écran.

Si maintenant, nous modifions les positions des points $a$ et $b$ avec la souris, le calcul du produit est immédiatement adapté. Cet ensemble de constructions nous a permis d'avoir la figure 1 à l'écran :

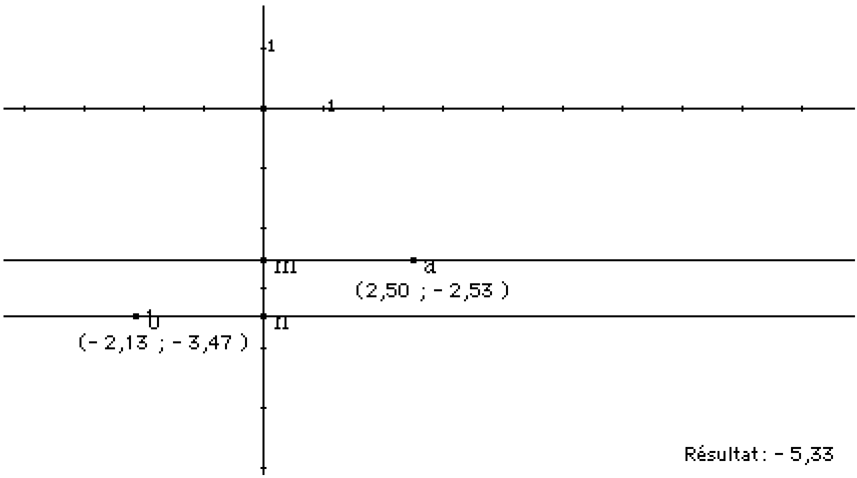



Fig. 1

La suite n'est qu'un exemple de mise en page, vous pouvez adapter les transformations suivant vos souhaits.

Resélectionnons la calculatrice, pointons l'abscisse de $a$, pressons la touche $=$ et déplaçons la valeur de l'abscisse à l'écran. Faisons de même pour $b$ afin d'obtenir la figure 2 où les trois valeurs intéressantes de $a$ de $b$ et de $a * b$ seront affichées :

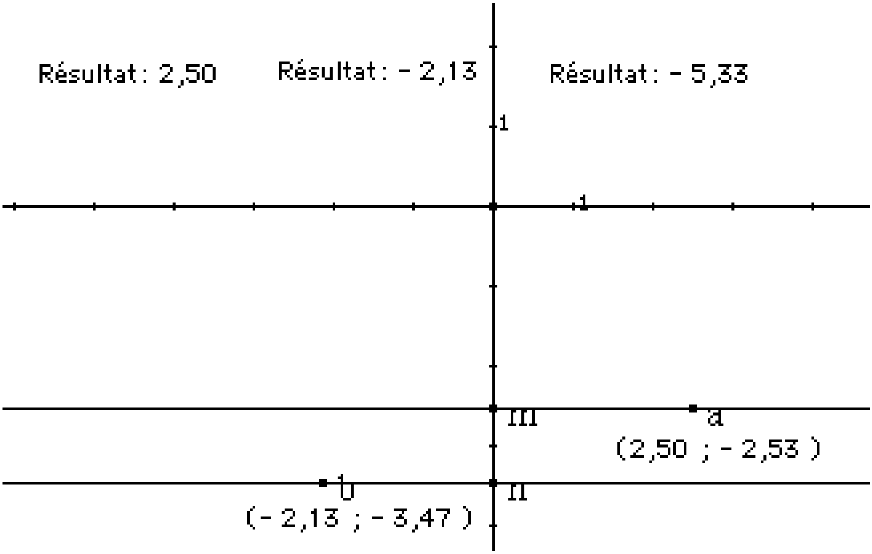



Fig. 2

Nous pouvons procéder à un toilettage de la page. Les coordonnées des points $a$ et $b$ peuvent-être cachées : **Aspect**/*Cacher – Montrer*. Il en est de même pour les points $m$ et $n$ et les droites parallèles. Il ne reste au bas de l'écran que les points $a$ et $b$ qui peuvent changer d'aspect en activant **Aspect**/*Aspect*. On y sélectionne par exemple le gros point et on marque $a$ et $b$ avec le pinceau. Avant de cacher les axes, on peut placer sur l'axe des $y$ un petit segment qui marquera la frontière entre les positifs et les négatifs. On utilisera donc 2 fois l'outil **Points**/*Point sur objet* puis, **Lignes**/*Segment*

Pour terminer, il faut travailler les valeurs numériques avec l'outil : **Affichage**/*Texte*. Lorsque l'outil a été sélectionné et que l'on pointe un des trois Résultats, le texte `éditer ce texte` vient à l'écran. Il suffit de presser la souris et de supprimer une partie du texte et d'adapter la grandeur des nombres ([5]). On termine en ajoutant du texte, c'est-à-dire les symboles $*$ et $=$. Et même un titre comme par exemple : **Signe d'un produit**

On obtient une image comme la figure 3 :

([5]) Dans la version Dos, on n'a pas le choix de la police ni de la taille. Mais avec CTRL-D on bascule des caractères normaux vers des grands caractères.

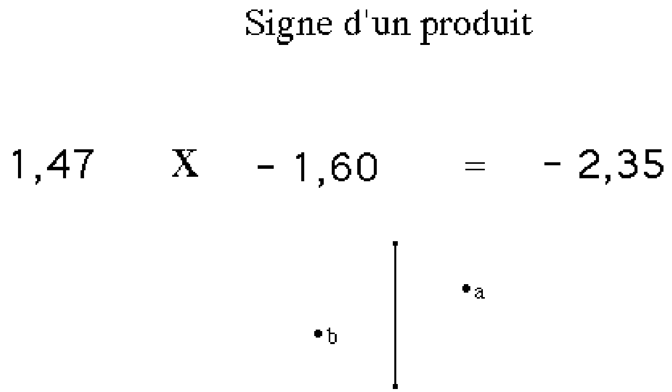



Fig. 3

Voilà un premier exemple d'application de Cabri-Géomètre qui montre dynamiquement la règle des signes lors de la multiplication.

## Internet Corner.

Si vous avez l'occassion de visiter le site

http ://www.mathmistakes.com

vous y rencontrerez une impressionnante liste d'erreurs mathématiques commises par les publicitaires, les médias, les reporters, les politiciens et en général tous les non-matheux.

C'est très bien classé, bien documenté, parfois inquiétant, souvent captivant.

« On leur fait dire n'importe quoi, aux maths ! » pourrait être le leitmotiv de ce site. Paul Cox, qui le gère, démonte pour vous tous les abus commis en notre nom.

C'est en anglais, mais facile à lire.

*Mathématique et Pédagogie* n° 129, 13–17, 2000

# L'outil XML et l'école virtuelle

**CH. DUPONT, *Université de Mons - Hainaut***

Aujourd'hui, qui n'a pas entendu parler d'Internet, ce réseau d'informations mondial qui prend de plus en plus d'ampleur ? Personne. Que ce soit dans les journaux, à la télé ou même dans les cours de récré, tout le monde en parle ou en entend parler.

Normal dans ce cas qu'apparaissent de plus en plus de cours « on line ». Mais malheureusement, ils ont souvent l'aspect des vieux bouquins qu'une majorité répugne. De plus, suivre des cours différents implique souvent de visiter des sites différents ; facile alors de se perdre dans le labyrinthe du réseau. Comment remédier à ces problèmes ? Comment organiser au mieux une véritable « scolarité » virtuelle ? C'est ce que nous allons tenter d'expliquer.

Comme vous le savez sans doute, quand vous surfez sur le net, ce qui apparaît à l'écran s'appelle une page Web ou encore une page HTML. Le langage HTML sert à décrire la mise en page du texte à afficher. Ce que l'on voit à l'écran n'est donc qu'une page de livre et les liens des « intercalaires ».

Ce qu'il faudrait pour que les cours soient vraiment interactifs, des vrais cours comme à l'école mais bien au chaud à la maison, ce serait que ces pages fonctionnent plus comme des bases de données où l'on stockerait tous les renseignements concernant les visiteurs (étudiants et enseignants) : nom, prénom, résultats, ...
Plus clairement, il faudrait que comme le professeur, le site visité sache qui l'on est, quelles sont nos faiblesses, nos capacités, ... toutes ces choses que l'on doit gérer au quotidien quand on enseigne. Et bien, c'est ce que se propose de faire le langage XML, encore au stade de l'élaboration. Nous n'allons pas ici rentrer dans les détails mais plutôt tenter de comprendre sommairement, ce qui se passe dans les coulisses de l'Internet de demain.

([0]) Adresse de l'auteur: Ch. DUPONT : *chrystelle – dupont@swing.be*

Le XML fonctionne comme le HTML, à cela près que, non content de pouvoir décrire la mise en forme d'un texte au moyen de ce que l'on appelle une feuille de style, il peut également fournir des renseignements sur le texte lui-même.

Prenons l'exemple d'un livre. Le HTML se contenterait d'écrire le titre d'une certaine façon, l'auteur d'une telle autre, mais aucun moyen de retrouver l'auteur à partir du titre ou réciproquement. Si, par contre, on rentre les mêmes renseignements au fichier XML, connaissant le titre, il ne rencontre aucune difficulté pour en retrouver l'auteur. Il peut alors nous le communiquer, tout cela dans un seul fichier. Avec le XML, vous pouvez gérer une bibliothèque sans avoir à parcourir tous les livres de tous les rayons. Ce qui a pour conséquence un gain de temps et d'espace considérable : que des avantages donc pour les gens pressés ou ayant un ordinateur limité en disque dur.

Mais revenons à notre problème de départ : l'école virtuelle et plus particulièrement les cours. Ce que nous dénommons ici par école consiste, dans les faits, en un ensemble de cours qui peuvent correspondre à différents niveaux, y compris à l'enseignement secondaire et pourquoi pas universitaire.

Imaginons un instant qu'obtenir un diplôme à domicile soit désormais chose possible, qu'en un clic de souris, on puisse changer de local, de prof, de matière, ...

Que voyons-nous ? Des élèves qui ne savent pas trop qu'étudier, comment gérer leur temps, des étudiants seuls devant leur machine ne comprenant pas un exercice, des enseignants sans étudiant à qui communiquer leur savoir, bref, le chaos.

Bien entendu, l'école virtuelle n'a pas pour objectif de supplanter le système traditionnel : le contact social, nécessaire au développement de chacun, est impossible sur le réseau ... mais tentons néanmoins de la rendre aussi réelle que possible.

Pour qu'un tel site fonctionne, il faut des étudiants bien sûr mais aussi des professeurs pour rédiger les cours, les modifier, répondre aux questions, diriger les étudiants, ... Pour ce faire, il faut savoir qui suit tel ou tel cours, qui peut le modifier, à qui envoyer les questions, ... autant de choses qui seraient impossibles en HTML mais qui le sont grâce au XML.

Nous parlions de diplôme : pour l'obtenir, il faut passer des examens, certes, mais il faut aussi tenir trace des résultats et, au besoin, remédier aux problèmes en modifiant la liste des cours disponibles pour l'étudiant, voire en modifiant ces mêmes cours. Nous voyons apparaître ici les éléments qui viendront remplir notre « base de données ».

Du point de vue administratif, une école est constituée de plusieurs facultés (ou sections), présentant plusieurs diplômes, nécessitant différents cours, ...

Pour personnaliser ces cours, il faut que ceux-ci soient divisés en de petites parties. On obtient donc de nombreux paragraphes de cours de toutes sortes. Difficile donc de s'y retrouver et de gérer tout cela manuellement.

Supposons, par exemple, que l'on veuille organiser un cours de probabilité niveau 1^re^ candidature et que nous ayons déjà à notre disposition les cellules du cours de niveau secondaire ainsi que celles de 2^e^ candidature. Il n'est donc pas nécessaire de rédiger tout un cours : on peut prendre certains des paragraphes déjà existants et les assembler de manière adéquate. Il suffit pour cela de modifier, dans le fichier XML, les références des paragraphes c'est-à-dire les chemins (informatiques bien sûr) qui mènent aux parties de cours concernées.

Grâce au fichier XML, qui définit en fait le déroulement des cours (Quelles leçons sont données ? Dans quel ordre ?), on peut facilement composer des cours différents pour des étudiants différents. Les cours sont ainsi mieux adaptés, plus personnalisés. Il suffit de changer l'ordre des paragraphes, leur référence, ... A partir des résultats des tests (stockés dans le fichier XML de l'étudiant), on élabore un cours personnalisé. Si l'étudiant est faible, on peut intégrer des paragraphes de niveau inférieur, plus d'exemples, ...

On a donc deux types de cours :

- Cours avec référence (existants),
- Cours avec fichier XML personnalisé.

De plus, nous définissons d'une part la présentation et d'autre part le contenu du cours. On peut donc, à partir d'un même paragraphe, créer plusieurs pages HTML d'aspect différent et ainsi renouveler le site sans devoir reprendre toutes les pages, les modifier (la mise en page peut parfois être très longue à réaliser), seul le fichier de style doit être modifié.

Les enseignants peuvent avoir accès à tous les cours présents sur le site et il leur est également possible de les rectifier, sous réserve d'acceptation. On a donc une liste de cours modifiés pour chaque enseignant. Bien sûr, un professeur ne peut pas changer tous les cours comme il l'entend, ses corrections ne fournissent qu'un avis, une opinion. On peut alors soit corriger le cours existant soit en ajouter un nouveau à la liste de ceux déjà disponibles. Les enseignants peuvent de cette manière choisir les cours pour leurs étudiants. Ils peuvent également ajouter des modules de cours, répondre à des questions ...

Il nous faut donc non seulement leurs renseignements personnels mais aussi la liste des cours corrigés.

A présent, parlons des étudiants :

Quand on a affaire à un étudiant nouvellement inscrit, on lui donne un cours en fonction de son âge, par exemple, et on modifie si besoin. Une version plus élaborée pourrait lui demander des renseignements sur son passé scolaire et, à partir de l'analyse de celui-ci, SON cours serait généré.

Chaque étudiant peut accéder à un certain nombre de cours. On stocke donc ceux auxquels il peut parvenir dans le fichier de l'étudiant. On a ainsi une liste de cours disponibles pour chacun d'entre-eux. C'est uniquement cette liste qui lui sera présentée. A partir de ce moment, l'étudiant peut suivre les cours et passer des tests dont les résultats seront enregistrés. Après analyse de ceux-ci, on peut modifier la liste si besoin en est. Cette évaluation permet de voir quelles sont les faiblesses et les points forts de l'élève et on peut alors personnaliser ses cours. Reste encore à résoudre le problème de la tricherie. Bientôt nous trouverons peut-être une solution plus adaptée mais, pour l'instant, il faut encore rassembler les élèves sous l'œil attentif d'un surveillant : le XML ne peut pas résoudre tous les problèmes.

On doit donc en plus des coordonnées de l'étudiant et autres renseignements administratifs, tenir trace de la liste des cours qui lui sont disponibles, de ses résultats et, éventuellement, de la liste des enseignants qui le suivraient sur le site.

Reprenons, dans les grandes lignes, ce qui est offert par notre école virtuelle :

- Les paragraphes peuvent être mélangés pour donner de nombreux cours différents et, de ce fait, plus adéquats pour chaque étudiant.
- En fonction des compétences de l'élève, on peut réorganiser le cours (ordre ou niveau). Ce qui permettrait de diminuer le risque d'échec, tout en augmentant le niveau des connaissances. En effet, plus un cours « colle » à la personnalité de l'étudiant, plus celui-ci apprend et retient. C'est une des choses très difficiles à mettre en œuvre dans une vraie classe où les élèves ont tous des aspirations différentes et dans laquelle un seul et unique cours peut être donné pour tous.

– Le site propose une grande variété de cours pour répondre à des besoins professionnels (remise à niveau).
– Les cours sont mis à jour régulièrement en fonction des technologies nouvelles.
– Il existe la possibilité de réaliser de nombreuses expériences grâce à de petits programmes (applets JAVA, par exemple).
– Grâce à la génération automatique du site, le système est contrôlable et facilement adaptable.
– Ce système présente également des facilités pour ceux qui n'ont pas d'autre moyen de suivre des cours ou qui désirent un complément de formation. Autre avantage de notre site : le changement de langue. En effet, si l'on veut actuellement traduire un site entier, il faut non seulement traduire les paragraphes de cours mais également tous les liens vers ces différentes parties. Ceux-ci sont souvent très nombreux. Grâce au fichier XML, les liens n'ont pas besoin d'être modifiés. Il suffit de traduire les « champs » relatifs aux titres (ce qui correspondra aux liens sur la page Web) dans le fichier XML. On peut donc envisager de créer un réseau de cours de langues différentes.

Bien entendu, ceci n'est qu'une des nombreuses applications du XML. Celui–ci sert à décrire des structures plus complexes qu'une simple page de texte, il peut regrouper plusieurs centaines de pages. On peut donc, par exemple, envisager de gérer une bourse comme Wall–Street sur Internet ou une compagnie aérienne ou bien d'autres choses encore. Bref, tout est possible.

Mais cela soulève de nombreux problèmes qui seront bientôt résolus, nous l'espérons, par l'élaboration définitive du XML. En attendant, la route est encore longue et sinueuse. Mais de toutes façons, soyons tranquilles : on aura toujours besoin d'enseignants.

**Pour en savoir plus :**

http ://www.chez.fr/xml/

http ://www.efagroup.com/introxml.htm

http ://www.citeweb.net/apetitje/xml

http ://www.xml.com

Bernadac J.-C. et Knab F., Construire une application XML, Paris, Eyrolles, 1999.

*Mathématique et Pédagogie* n° 129, 19–27, 2000

# L'histoire du mouvement brownien : un exemple de recherches interdisciplinaires

**J. BAIR, *Université et IREM de Liège***

Dès les années 1820, le botaniste anglais *Robert Brown* et, à sa suite, plusieurs physiciens du 19e siècle cherchèrent à comprendre l'agitation des particules de pollen en suspension dans divers milieux ; en 1877, *Delsaux* expliquait que les changements incessants de direction dans les trajectoires suivies par les particules sont dus à de nombreux chocs entre celles-ci et la matière ; de plus, le mouvement en question semble stimulé par la chaleur, irrégulier, aléatoire et non lisse. La notion classique de vitesse ne peut dès lors pas être appliquée dans l'étude de ce phénomène. En l'honneur du naturaliste britannique, on qualifia de « brownien » tout processus qui évolue au cours du temps de manière si désordonnée qu'il semble difficile d'en prévoir l'évolution même dans un intervalle de temps très court.

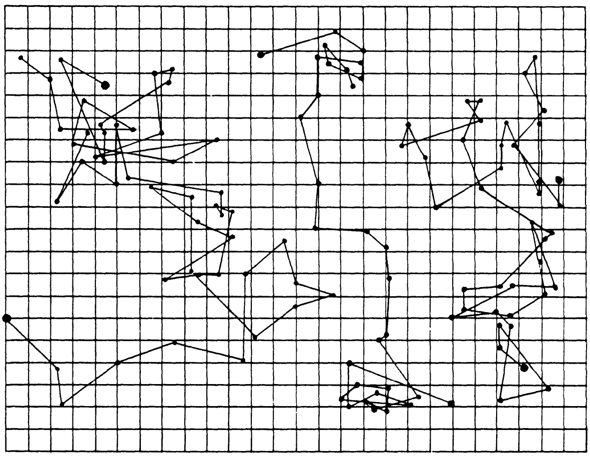


**Figure 1. Simulation d'un mouvement brownien dans le plan**

($^0$) Adresse de l'auteur: Bair Jacques, Université de Liège, Faculté d'économie, de Gestion et de Sciences sociales, 7 Boulevard du Rectorat, Bât. B31 B 4000 Liège

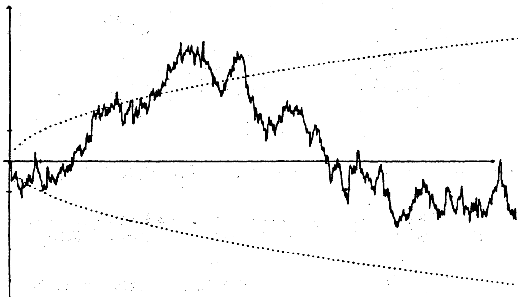


**Figure 2. Exemple d'un mouvement brownien unidimensionnel**

Dans une thèse soutenue en 1900, le français *Louis Bachelier* proposa une modélisation des cours de la bourse dont l'évolution temporelle semble posséder les caractéristiques d'un mouvement brownien.

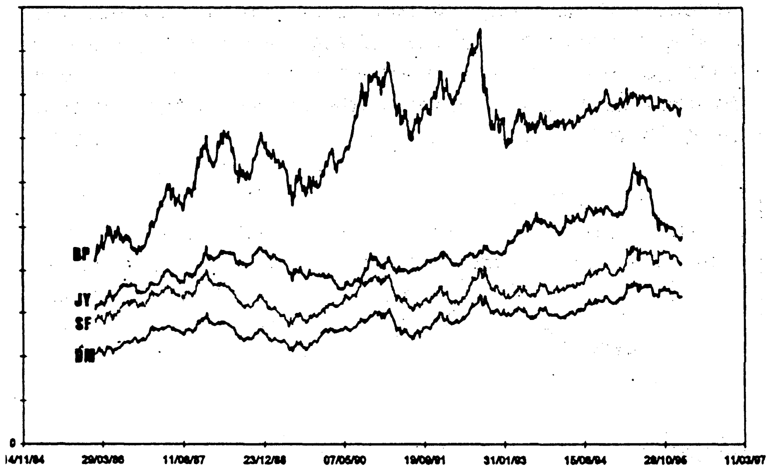



**Figure 3. Exemple de l'évolution d'indice boursier**
De haut en bas : Prix du dollar en livre sterling (BP), yen japonais (JY), francs suisse (SF) et deutsche mark(DM).

Bachelier voulait montrer que ≪ le marché à son insu, obéit à une loi qui le domine : la loi de probabilité ≫. Il supposait que le cours d'un actif fixé par le marché se comporte, d'un point de vue mathématique, comme la fortune (c'est-à-dire le gain algébrique cumulé) obtenue dans un jeu de hasard : à tout instant, un actif peut augmenter ou diminuer de façon apparemment aléatoire, mais de sorte que l'espérance mathématique du spéculateur soit nulle. Il admettait que les accroissements de l'actif durant les instants successifs sont indépendants et, par un raisonnement infinitésimal semblable à celui que suivront ultérieurement des savants réputés tels que *Einstein* (1905), *Langevin* (1908), *Lévy* (1948) ou *Ito* (1951), il montra que la probabilité qui en résulte suit une distribution gaussienne dont la moyenne est nulle, mais dont l'écart-type s'accroît comme la racine carrée du temps ; sur ce dernier point, il formalisait, à l'aide du calcul des probabilités appliqué aux opérations boursières, une propriété connue implicitement mais empiriquement des spéculateurs en Bourse du 19$^{e}$ siècle, tels *Jules Reynault* qui, en 1863 déjà, exprimait cette idée sous une forme uniquement « littéraire ».

Dans un mémoire datant de 1906, *Bachelier* a développé, avec une présentation différente de celle que nous connaissons aujourd'hui, une théorie générale des équations différentielles stochastiques, ce qui lui permit de définir différents processus aléatoires connus actuellement sous les noms de processus à accroissements indépendants, processus de Markov, ou encore processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Malheureusement, les travaux de *Bachelier* ne furent pas très bien accueillis au début de ce siècle ; ainsi, sa thèse doctorale, réalisée sous la direction d'*Henry Poincaré*, ne fut reçue qu'avec la mention « honorable » et il n'obtint un poste fixe à l'Université qu'à l'âge de 57 ans. De son vivant, ses découvertes ne furent appréciées à leur juste valeur que par le probabiliste russe *Kolmogorov*, mais les travaux de ce dernier éclipsèrent ceux du français. Il fallut attendre les années 1970, soit plus de 20 ans après sa mort, pour voir *Bachelier* reconnu, tant par les mathématiciens que par les financiers, comme un grand pionnier dans l'étude du calcul stochastique et de ses applications en finance. Durant la dernière décennie du 20$^{e}$ siècle et surtout après l'attribution de plusieurs prix Nobel d'Economie à des financiers, les travaux scientifiques du français furent remis à l'honneur grâce à de nombreuses publications, à l'organisation de colloques et même à la création d'une Société Bachelier.

Cinq ans après *Bachelier*, *Albert Einstein* exploita des arguments de mécanique statistique pour construire un modèle mathématique décrivant le mouvement d'une particule de pollen dans l'air ; il supposait que le déplacement de la particule entre deux instants est indépendant de ses positions antérieures et que sa loi de probabilité ne dépend que de la durée séparant les deux moments en question ; par un passage à la limite semblable à celui utilisé par le français, il trouva que cette loi obéit à une équation aux dérivées partielles, qui est appelée **l'équation de la chaleur**, dont la distribution gaussienne est une solution. La même année, le physicien polonais

*M. Smoluchovski* décrivit le mouvement brownien comme limite de promenades aléatoires : tout se passe comme si un point matériel se déplaçait sur un axe orienté en effectuant une succession d'un nombre très grand de pas de longueur fort petite effectués aléatoirement et indépendamment tantôt dans le sens postitif de l'axe, tantôt dans le sens négatif avec des probabilités identiques. Formellement, si la position du point est caractérisée sur cet axe par son abscisse $z$ qui dépend de la variable temporelle $t$, les variations des positions $\Delta z$ enregistrées sur un laps de temps $\Delta t$ obéissent à cette égalité :

$$\Delta z = \eta\sqrt{\Delta t}$$

où, $\eta$ désigne une variable aléatoire suivant une distribution normale centrée réduite ; en passant à la limite pour $\Delta t$ tendant vers 0, on obtient, moyennement la condition initiale $z(0) = 0$, un mouvement aléatoire tel que l'espérance mathématique de $z(T)$ est nulle, ce qui signifie que les fluctuations dans un sens ou dans l'autre se compensent en moyenne sur l'intervalle $[0, T]$, avec une variance égale au temps $T$.

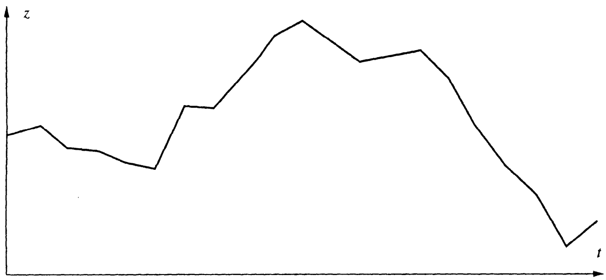



**Figure 4. Valeurs assez grandes de $\Delta t$**

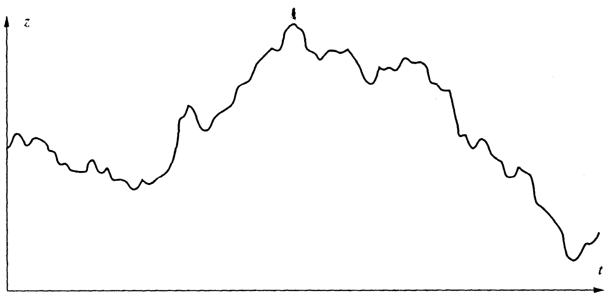



**Figure 5. Petites valeurs de $\Delta t$**

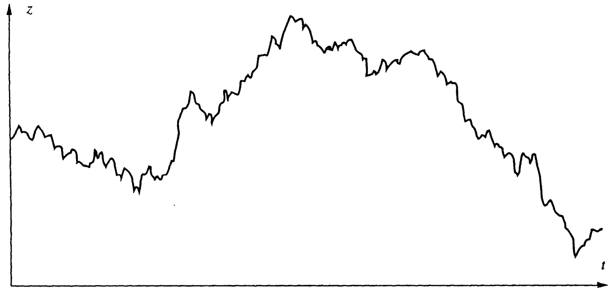



**Figure 6. Cas où $\Delta t \to 0$**

Différents travaux purement mathématiques du début de ce siècle eurent, par la suite, une influence essentielle sur le développement de la théorie du mouvement brownien. Signalons principalement les travaux sur la notion de mesure et le calcul des probabilités. Ainsi, *Henry Lebesgue* introduisit, en 1901, une nouvelle intégrale généralisant la classique intégrale de *Riemann* et s'adaptant notamment aux espaces abstraits exploités en statistique moderne ; les travaux de *Lebesgue* furent prolongés notamment par plusieurs mathématiciens célèbres notamment *Stieltjes*, *Emile Borel, Johann Radon, Arnaud Denjoy, ...*

Par ailleurs, *Kolmogorov* donna au calcul des probabilités des fondations solides indispensables pour l'étude des processus stochastiques : en 1930, il parvint à établir le lien entre les travaux des physiciens et ceux de *Bachelier*.

Dès les années 1920, l'autrichien *Norbert Wiener* exploita les découvertes mathématiques récentes pour étudier rigoureusement le mouvement brownien qui est d'ailleurs souvent appelé **processus de Wiener**. D'un point de vue mathématique, il s'agit d'un processus aléatoire continu, c'est-à-dire une famille de variables aléatoires continues, sur un espace probabilisé qui doit vérifier certaines conditions mises en évidence dans les travaux antérieurs de *Bachelier* et d'*Einstein* : de façon plus précise, il s'agit d'un processus stochastique $W(t)$ tel que $W(0) = 0, W(t) - W(s)$ suit une distribution normale de moyenne nulle et d'écart-type proportionnel à $t - s$ (pour $s < t$) et $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ sont indépendants pour $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ; [11, p.123].

*Wiener* démontra en 1923 l'existence d'un tel processus ; il introduisit également une **intégrale stochastique**, c'est-à-dire une intégrale de nature aléatoire qui s'appuie sur la notion de mouvement brownien. Présentons l'intégrale de *Wiener* de façon intuitive par l'examen d'un problème financier. Si une personne achète une unité d'une action le premier janvier et qu'elle la revend douze mois plus tard, son bénéfice algébrique sur l'année est égal à la différence du cours de cet actif entre le début et la fin de l'année : il s'agit d'un gain ou d'une perte selon que cette différence est positive ou négative ; si elle achète, dans les mêmes conditions, $c$ unités de cette action, son bénéfice algébrique vaut $c$ fois cette différence du cours. Mais, en général, le financier ne se contente pas d'une seule opération sur l'année en cours : plusieurs fois par an, il revend une partie de son avoir ou il achète de nouvelles parts ; ainsi, pour tout temps $t$ (exprimé en année, avec $t \in [0, 1]$), sa mise dépend du temps et peut se mettre sous la forme $f(t)$. Admettons que cette mise change $n$ fois sur l'année, après chaque période de durée $\frac{1}{n}$ et que le cours de l'action considérée suive un mouvement brownien $z(t) = \eta\sqrt{t}$ à l'instant $t$ : le bénéfice algébrique sur l'année sera donné par :

$$f(0)[z(\tfrac{1}{n}) - z(0)] + f(\tfrac{1}{n})[z(\tfrac{2}{n}) - z(\tfrac{1}{n})] + \cdots + f(\tfrac{n-1}{n})[z(1) - z(\tfrac{n-1}{n})]$$

La limite de cette somme quand $n$ tend vers l'infini est une intégrale de *Wiener* : elle est aléatoire en même temps que les cours des actions.

En exploitant la théorie moderne de la mesure, *Wiener* et certains de ses contemporains — parmi lesquels il y a lieu de mettre en évidence le français *Paul Lévy* — démontrèrent de nombreuses propriétés remarquables de tels processus stochastiques, notamment la continuité et la non différentiabilité (les trajectoires n'ont de dérivée en aucun point, ce qu'avait conjecturé et vérifié expérimentalement, quelques années plus tôt, le physicien *Jean Perrin*), le caractère infini de la variance totale (sur tout intervalle de temps, les trajectoires sont de « longueur infinie »). *Lévy* fut un des premiers à constater que le mouvement brownien est une **martingale mathématique**, à savoir un processus stochastique dont la valeur présente est « le centre de gravité » (ou l'espérance mathématique) des valeurs à un instant ultérieur pondérées par leur probabilité.

Dans les années 1940, le mathématicien japonais *Kiyosi Ito* prolongea les travaux de ses prédecesseurs et parvint à introduire la notion d'**intégrale d'Ito** qui étend l'intégrale de *Wiener* à des fonctions elle-mêmes aléatoires, pourvu que celles-ci n'anticipent pas le mouvement brownien considéré. Ce nouvel outil mathématique convenait mieux aux financiers que l'intégrale de Wiener : en effet, la mise quotidienne du spéculateur n'est pas déterministe, mais fluctue en fonction du marché financier ; ainsi, la fonction de mise $f(t)$ et le mouvement brownien de l'action $z(t)$ sont tous deux aléatoires et, de plus, le spéculateur ne peut pas prévoir quel sera le cours de l'action à l'instant suivant (non-anticipation de $z(t)$ sur $f(t)$).

Les travaux de *Ito*, encore largement exploités de nos jours, furent rendus célèbres notamment grâce à la **formule de Ito** qui est, en quelque sorte, la version stochastique de la formule des accroissements finis et s'avère très féconde dans la théorie **des équations différentielles stochastiques**.

Les recherches purement théoriques sur le mouvement brownien ont débouché sur de nombreuses aplications variées. Les processus stochastiques permettent de modéliser de façon réaliste tout **bruit blanc**, c'est-à-dire toute perturbation aléatoire engendrant des fluctuations non prévisibles de façon déterministe, généralement dues à des circonstances extérieures et non contrôlées, mais qui ne modifient pas la tendance décrivant le plus correctement possible, compte tenu des informations disponibles, l'évolution future attendue du phénomène étudié. Cette propriété est exploitée, par exemple, dans l'étude sur l'agitation thermique, l'analyse des signaux, le filtrage des bruits, ... Signalons encore les liens, découverts par *Lévy* et *Kakutani* puis étudiés par *Doob*, entre le mouvement brownien et la théorie classique du potentiel.

Il est également intéressant de constater l'exploitation importante du mouvement brownien en mathématique financière puisque le cours de la bourse semble se comporter comme un processus de Wiener et que l'intégrale d'Ito s'avère particulièrement bien adaptée pour calculer le gain d'un spéculateur en bourse. Comme les résultats de *Bachelier* ne furent guère considérés durant la première moitié du 20$^{e}$ siècle, ce furent les travaux de *Markowitz et Tobin*(1958) qui ouvrirent réellement la voie à l'introduction du calcul stochastique en finance : ils élaborèrent notamment la théorie du marché efficient en faisant intervenir dans leur étude le temps et le hasard. En 1965, *P.A. Samuelson* démontra que certains cours de bourse sont des martingales en ce sens que le cours actuel est l'espérance du cours d'une date ultérieure ; ses travaux, pour lesquels il reçut le Prix Nobel d'Economie en 1970, le conduisirent à introduire en finance des outils mathématiques modernes et sophistiqués comme l'intégrale stochastique et la formule d'Ito. Mais c'est principalement depuis les années 1970 que le mouvement brownien a fait son apparition décisive en finance. Pour gérer de nouveaux produits financiers, à savoir les **produits dérivés** dont la valeur dépend de l'évolution d'un ou de plusieurs autres actifs appelés des **sous-jacents**, toujours plus sophistiqués et diversifiés, les gestionnaires durent recourir aux concepts purement mathématiques développés depuis le début de ce siècle. Pour être plus précis, signalons que deux chercheurs américains, *F. Black et M. Scholes*, ont montré, dans un article publié en 1973, que le calcul stochastique est parfaitement adapté pour calculer le **juste prix** d'une option ainsi que le portefeuille de couverture ; ce travail, également réalisé la même année mais indépendamment par *Merton*, a valu à celui-ci ainsi qu'à *Scholes* de recevoir le Prix Nobel d'Economie en octobre 1997, *Black* étant décédé entre-temps. Leur célèbre modèle, encore fréquemment exploité aujourd'hui même si de nombreuses et importantes extensions en ont été découvertes, exprime que, sous certaines hypothèses économiques, le cours $s$ d'une action suit un processus d'évolution aléatoire obéissant à **l'équation différentielle stochastique** suivante :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

où $dS$ désigne la variation du cours pendant un laps de temps égal à $dt$, $\mu$ caractérise le taux de croissance à long terme et vaut l'espérance mathématique du **return instantané** $\frac{dS}{S}$, $\sigma$ quantifie la **volatilité** ou encore l'amplitude des variations erratiques relativement à la **tendance** (ou trend) décrite par la composante purement déterministe $\mu dt$ du second nombre de cette équation, $dz$ est un mouvement brownien (donc distribué suivant une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à $dt$) qui décrit les perturbations instantanées non prévisibles affectant la **trend**.

On peut démontrer, grâce à la formule d'Ito, que la solution de cette équation différentielle stochastique est donnée par :

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} e^{\sigma z(t)}$$

qui peut être comparée à la solution $S(0)e^{\mu t}t$ de l'équation différentielle ordinaire obtenue en univers déterministe, à savoir $dS = \mu S dt$ ; en premier lieu, tout se passe comme si la volatilité $\mu$ tempérait d'une valeur $\frac{\sigma^2}{2}$ le taux d'accroissement du cours initial $S(0)$ ; en outre, la partie stochastique de la solution prend la forme d'une exponentielle dont l'exposant comprend un mouvement brownien $z(t)$ : ce processus ayant un écart-type de l'ordre de la racine carrée du temps, des fluctuations autour de la trend, ... seront inévitablement, à un moment ou à un autre, plus importantes que par le passé. Ce type de description est très souvent utilisé pour les actifs boursiers et traduit bien l'incertitude quant à leur évolution. Le calcul stochastique est exploité quotidiennement par tous les grands financiers de ce monde. Aujourd'hui, de nombreuses études théoriques et empiriques sur le sujet sont encore réalisées par des chercheurs qui sont de plus en plus souvent des mathématiciens professionnels exerçant leurs talents pour traiter des problèmes financiers.

Cet épisode de l'histoire des Sciences met en évidence les liens entre des disciplines apparemment différentes et montre bien comment les recherches appliquée et fondamentale peuvent se nourrir l'une de l'autre.

# Bibliographie


[1] BACHELIER L., Théorie de la spéculation, théorique mathématique du jeu, *Ann. Sc. Ecole normale sup., t. 17, 1900.*

[2] BAIR J., HAESBROECK G., JUSTENS D., ROSOUX J., Modèles mathématiques en finance : de l'incohérence à l'incertitude ou au chaos, Presses Ferrer, Bruxelles 1998.

[3] BOULEAU N., *Martingales et marchés financiers*, Editions Odile Jacob, Paris, 1998.

[4] BRIOT J.M, ESCH L., KINON V., JUSTENS D., SIMON L., STIÉVENART T., *Modélisation et gestion du risque en finance*, Presses Ferrer, Bruxelles 2000.

[5] GEMAN H., De Bachelier à Black-Scholes-Merton, *Gazette des mathématiciens*, 75, 1998, pp.17-30 ?.

[6] GILLET R., Introduction aux processus d'évolution du prix des actions en temps continu et efficiente du marché boursier, *Recherches économiques de Louvain*, 57(1), 1991, pp. 77-93.

[7] HIDA T., *Brownian Motion*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1980.

[8] HOEL P.- PORT S.- STONE C., *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1972.

[9] HULL J.C.,*Options, Futures & Other Derivations*, Prentice-Hall Int., 1998.

[10] JUSTENS D.- SCHYNS M., *Théorie stochastique de la décision d'investissement*, De Boeck Université, Bruxelles, 1997.

[11] LAMBERTON D.- LAPEYRE B., *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Editions Ellipses, Paris, 1991.

[12] LE GALL J.F., Introduction au mouvement brownien, *Gazette des mathématiciens*, 1989, 40, pp. 43-64.

[13] OKSENDAL B., *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1992.

[14] PARDOUX E., La formule de Black et Scholes, *Bulletin de l'APMEP*, Spécial Journées Nationales, Marseille 1997, pp. 281-290.

**Vous souhaitez décloisonner votre enseignement, innover, aiguiser l'intérêt et la créativité de vos élèves ? Relevez avec la *Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs* un nouveau défi.**

La CAPP, en accord avec la Société Solvay, a élaboré des outils novateurs, **les ensembles pédagogiques interdisciplinaires (EPI)**, présentés sous la forme de valises ou de coffrets. Quatre thèmes sont traités, à savoir **la Communication, le Temps, Matière et Éléments, Semblable et Différent**

**La Communication :** cet EPI vise à faire suivre, par des textes et images, les traces de l'humanité depuis l'antiquité, découvrir par l'observation et la manipulation le rôle de la technique depuis l'invention de l'écriture jusqu'à Internet, voir que l'univers, de l'infiniment petit à l'infiniment grand, à commencer par nous-mêmes, est un immense réseau de communication, participer, par la pratique et le jeu, à une approche de l'interdisciplinarité.

**Le Temps :** cette notion concerne toutes les disciplines. Les objets et documents rassemblés illustrent l'histoire des horloges, la mesure et la garde du temps, la chronobiologie, la dendrochronologie, les calendriers. Des moulages de crânes préhistoriques, la datation par le carbone 14 ou la thermo-luminescence, l'expression du temps dans la langue sont étudiés. Un choix d'ouvrages et un jeu de cartes original complètent l'EPI.

**Matière et Éléments :** La matière a, dès l'Antiquité, préoccupé les philosophes, comme le montrent les textes rassemblés. Puis des sciences sont apparues, ainsi que le conte, l'histoire de la chimie, illustrée par une BD. Des échantillons de minerais, minéraux et roches sont présentés, avec fiches expérimentales, descriptives et cassettes ; textes et transparents décrivent les éléments chimiques présents dans notre organisme. Livres, tableaux périodiques, dont une version informatisée, un jeu du type *Trivial Poursuit* complètent l'EPI.

**Semblable et Différent :** La distinction des ressemblances et des différences est à la base de la démarche scientifique. L'EPI demande de classer divers objets, puis de justifier les critères choisis. Ensuite, pour chaque discipline des exercices portent sur le classement et ses critères. Une phase de réflexion fait prendre conscience de leur rôle dans la vie humaine. L'histoire pose la question de leur valeur relative. Les hommes ont distingué des classes dans leur espèce. Injustices, violences, guerres peuvent en découler. Livres et documents font découvrir que le sujet exige un examen critique attentif.

**Comment s'informer ?**

*Les EPI sont loués aux écoles des conditions déterminées. Pour renseignements, s'adresser à M. Jean-Marie Debry, chaussée des Vignerons 95, 5100 Wépion, Tél. : 081-46 07 53 ou M. Emile Counet, rue Piersotte 12, 5004 Bouge, Tél. : 081-21 02 88.*

*Mathématique et Pédagogie* n° 129, 29–34, 2000

# Des Cabri-machines

**G. NOËL, *Université de Mons-Hainaut***

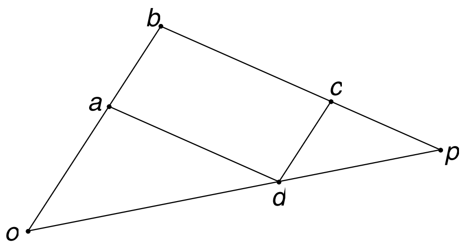
Mathématique et Dessin

## 1. Le pantographe

Le pantographe est une machine géométrique bien connue qui est (était ?) utilisée pour tracer des figures à l'échelle. Elle est basée directement sur le théorème de Thalès.

Quatre tiges articulées constituent un parallélogramme $abcd$. Un point $o$ est fixé sur le côté $ab$. La droite $od$ coupe $bc$ en $p$. Le point $o$ est fixé dans le plan, alors que le point $d$ est libre. Lorsque $d$ décrit une figure, le point $p$ décrit une figure homothétique.

Pouvez-vous réaliser un pantographe dans Cabri-Géomètre (1) ?



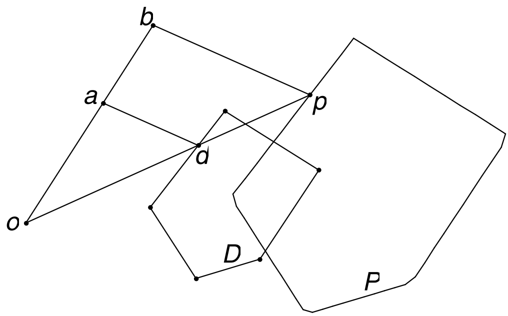

Les points $o$, $a$, $b$, $c$ et $d$ ne peuvent être définis dans n'importe quel ordre. On définit d'abord les points $o$ et $d$ dont on veut qu'ils restent libres. On introduit ensuite un point $a$, la droite $oa$, et on y place un point $b$. Enfin, on trace le segment $[a, d]$ et la droite parallèle $bc$ à $ad$ passant par $b$. Le point $p$ est alors défini comme étant l'intersection de $bc$ et $od$.

Pour la clarté du dessin, on limite les droites à des segments. On remarque au passage que le point $c$ ne sert rigoureusement à rien. Dans l'outil pantographe concret, la tige $[c, d]$ sert à assurer que les droites $ad$ et $bc$ restent toujours parallèles. Dans Cabri, le segment $[c, d]$ est inutile, remplacé par le segment $[o, p]$ qui sert aussi à illustrer l'usage du théorème de Thalès.

(0) Adresse de l'auteur: Rue du 1er chasseurs à cheval 16, Boîte 14, 7000 Mons

(1) ou tout logiciel équivalent

Le Cabri-pantographe étant construit, s'utilise comme n'importe quel pantographe. Pour trouver l'image d'un polygone $D$, via la fonction « Redéfinir un objet », on redéfinit le point $d$ en l'astreignant à appartenir à $D$, puis on demande le lieu de $p$ lorsque $d$ parcourt $D$. (On peut aussi demander la trace de $p$ et faire parcourir $D$ par $d$. L'avantage est qu'on voit se dessiner l'image, l'inconvénient est qu'elle n'est pas constituée en objet-Cabri et s'efface au premier rafraîchissement de l'écran.)

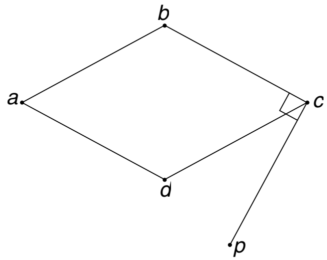



Le pantographe n'était qu'un amuse-gueule. Cabri nous permet d'inventer de nombreuses machines aussi inutiles les unes que les autres, à ceci près qu'elles peuvent provoquer chez nous une recherche sur des transformations inhabituelles. Dans la suite de cet article, nous vous proposons deux autres Cabri-machines, inspirées par la lecture de [1]. Nous vous suggérons de « jouer le jeu » en construisant ces machines et en étudiant par vous-mêmes les transformations ainsi définies, avant de lire les solutions.

# 2. Une deuxième machine

Définissons une deuxième Cabri-machine :

*Un losange articulé $abcd$ est fixé en un point $a$. La direction de la diagonale $ac$ est fixe. La longueur des côtés du losange peut varier, de sorte que le point $d$ peut occuper n'importe quelle position dans le plan. Au sommet $c$ est fixée une tige toujours perpendiculaire au côté $[b, c]$, de même longueur que ce côté.*




*On note $p$ la deuxième extrémité de cette tige.*

1. Réaliser la machine à l'aide de Cabri-Géomètre.
2. Étudier la transformation géométrique $d \mapsto p$.

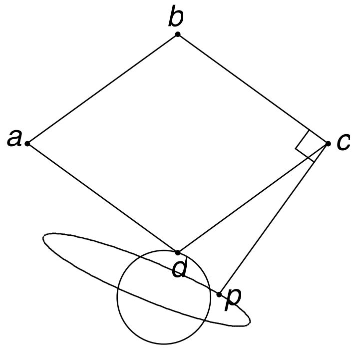
## Solution :

$\boxed{1.}$ Dans Cabri, on réalise le losange en plaçant d'abord le point $a$ et une droite passant par $a$. Le point $d$ est encore placé librement, mais on définit $b$ comme étant le symétrique de $d$ par rapport à la droite. Enfin, $c$ est défini comme étant le symétrique de $a$ par rapport à $bd$.

Pour définir $p$, on trace une des deux demi-droites perpendiculaires à $bc$ d'origine $c$, et on y reporte la longueur $|bc|$.

$\boxed{2.}$ Pour étudier la transformation géométrique $d \mapsto p$, un peu d'expérimentation s'impose, préalablement à l'étude technique.

On profitera de ce que le point $d$ a été défini comme un point libre pour lui imposer des contraintes. Par exemple parcourir un cercle. La fonction *lieu* permet d'obtenir l'image comme un nouvel objet.

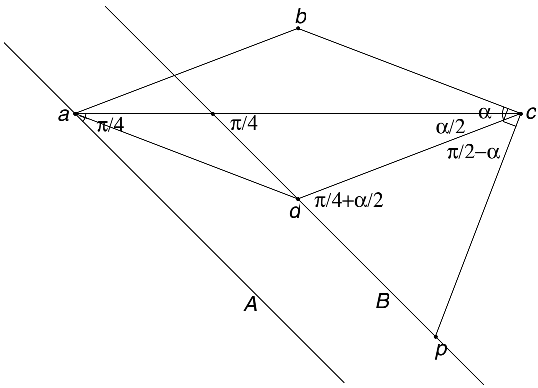



L'expérimentation permet de conjecturer que la transformation conserve la linéarité et le parallélisme. De plus le point $a$ est fixe et tout cercle semble être transformé en une ellipse. On peut donc raisonnablement faire l'hypothèse que la transformation est une transformation affine, peut-être même une similitude.

Conserve-t-elle les angles ? Une nouvelle expérimentation consistant à demander à Cabri d'afficher les mesures des angles d'un triangle et de son image montre qu'il n'en est rien. La transformation n'est donc pas une similitude.

On constate aussi que la transformation a d'autres points fixes que le point $a$ : placez le point $d$ de façon que le losange $abcd$ soit un carré. Clairement, $p$ coïncide avec $d$. Ainsi, nous trouvons une droite de points fixes : la droite passant par $a$ faisant avec $ac$ un angle de $45\,^\circ$. Notons $A$ cette droite.

Ceci nous amène à chercher d'autres droites invariantes (des droites envoyées sur elles-mêmes sans que leurs points soient nécessairement fixes) : introduisons une droite $B$, et faisons dessiner son image par Cabri en redéfinissant le point $d$ comme étant sur $B$. On demande ensuite le lieu de $p$. Non seulement ce lieu semble bien être une droite, mais en faisant tourner $B$ autour d'un de ses points, nous trouvons une position dans laquelle $B$ coïncide avec son image. Et dans cette position, $B$ semble bien être parallèle à $A$. Autrement dit, nous conjecturons que la droite $dp$ fait toujours un angle de $45\,^\circ$ avec $ac$. Pouvons-nous le prouver ?

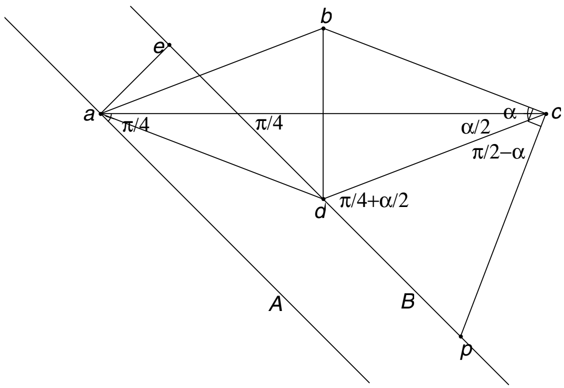



– Si $\widehat{bcd} = \alpha$, alors $\widehat{dcp} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.
– Le triangle $dcp$ est isocèle, donc

$$\widehat{cdp} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

Puisqu'un angle extérieur à un triangle vaut la somme des angles intérieurs aux deux autres sommets, l'angle de $dp$ et $ac$ vaut bien $\frac{\pi}{4}$ radians.

Ainsi, l'image de tout point $d \in B$ est sur $B$. Il reste une constatation capitale à effectuer : la longueur $|dp|$ est indépendante de la position de $d$ sur $B$.




Notons $e$ la projection de $a$ sur $B$. Nous pouvons écrire

$$|ae| = |ad| \sin \widehat{ade} = |ad| \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = |ad| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

et

$$|dp| = 2|dc| \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = 2|dc| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Comme, $|ad| = |dc|$, on a $|dp| = 2|ae|$. Ainsi la transformation étudiée possède une droite de points fixes $A$ et sur toute parallèle $B$ à $A$, elle induit une translation d'amplitude proportionnelle à la distance de $B$ à $A$.

Une telle transformation porte un nom : un *cisaillement* (ou *transvection*). Analytiquement, elle est facile à étudier en plaçant le point origine en $a$, l'axe des $x$ sur la droite fixe $A$ et l'axe des $y$ sur n'importe quelle sécante à $A$ passant par $a$, par exemple sur $ae$. En prenant comme point unité sur l'axe des $x$ le point $f$ tel que $|af| = 2|ae|$ et comme point unité sur l'axe des $y$ le point $e$ lui-même, le cisaillement est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

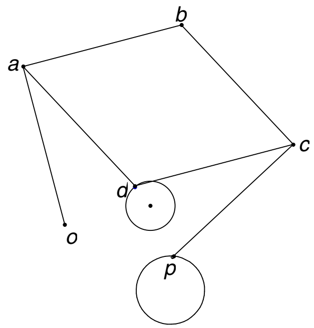
# 3. Une troisième machine

Reprenons notre losange articulé et adjoignons-lui une tige $ao$ de même longueur que les côtés du losange (et que la tige $cp$) et perpendiculaire à $ab$.

Cette fois, c'est le point $o$ doit rester fixe, non le point $a$. Comme précédemment, on demande d'expérimenter, puis d'étudier la transformation $d \mapsto p$.

### Solution

$\boxed{1.}$ On construit la machine dans Cabri en plaçant d'abord les deux points $o$ et $d$. Le point $a$ est placé sur la médiatrice de $[o, d]$. Le segment $[a, b]$ est dessiné perpendiculaire à $[o, a]$ et de même longueur. Il reste à définir $c$ comme symétrique de $a$ par rapport à $bd$ et à placer le segment $cp$, perpendiculaire à $[b, c]$ et de même longueur.




$\boxed{2.}$ L'expérimentation, analogue à celle réalisée au point précédent, induit l'idée que l'image d'un cercle est un cercle, mais de rayon différent, que la linéarité, le parallélisme et les angles sont conservés. On conjecture ainsi que la transformation est une similitude.

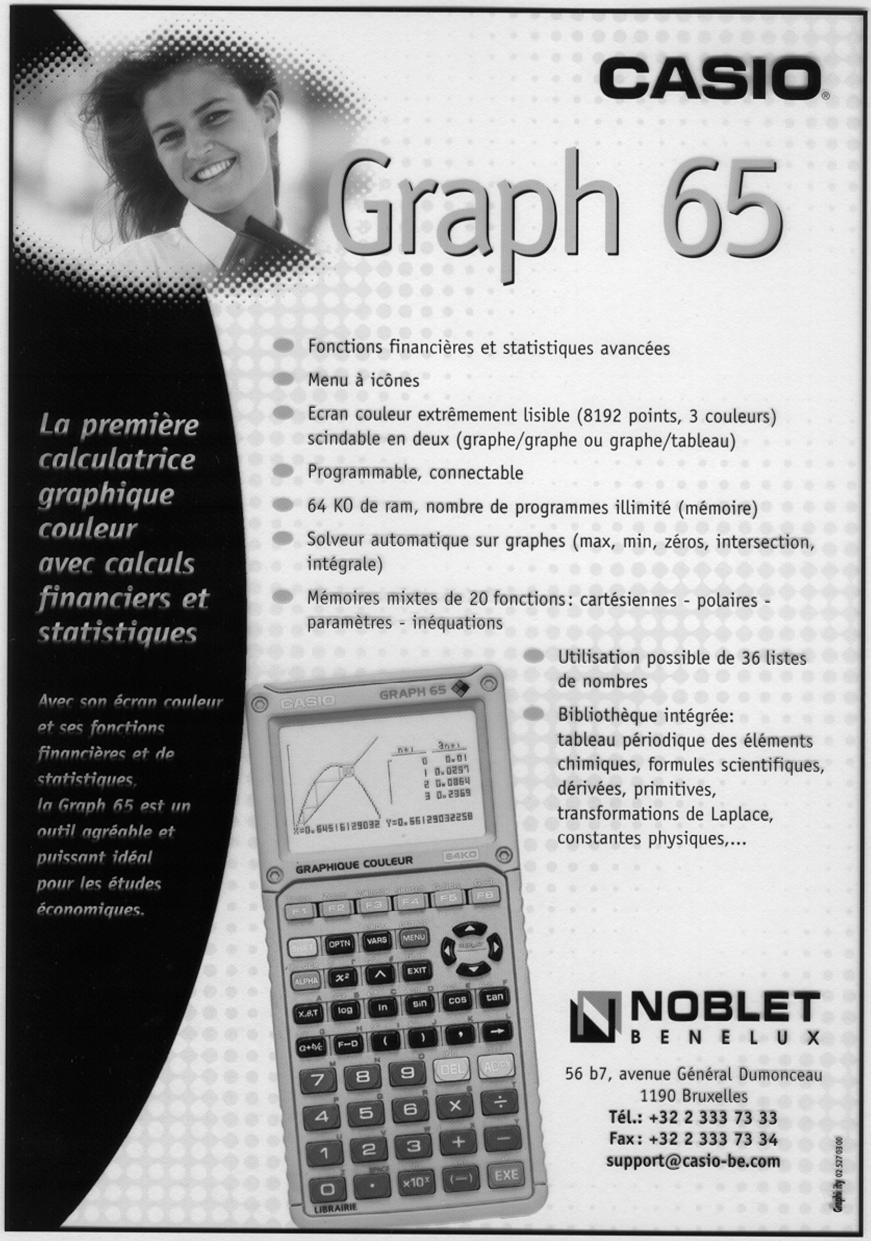
$\boxed{3.}$ Pour le prouver, il suffit de démontrer que le triangle $odp$ est toujours rectangle isocèle, l'angle droit étant en $d$. La symétrie de la figure induit immédiatement l'égalité $|od| = |dp|$. Notant de nouveau $\widehat{bcd} = \alpha$, le même calcul d'angles que celui effectué à propos de la machine précédente montre qu'on a de nouveau $\widehat{pdc} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$. De plus, par symétrie $\widehat{pdc} = \widehat{ado}$. Ainsi

$$\widehat{odp} = 2\pi - \left(\widehat{oda} + \widehat{adc} + \widehat{cdp}\right) = 2\pi - (\pi - \alpha) - 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

La transformation est donc une similitude de centre $o$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $45\,^{\circ}$.

# Bibliographie


[1] Sidney J. Kolpas and Gary R. Massion, Consul, the Educated Monkey, *Mathematics Teacher*, **93-4**, 276–279, 2000.



CASIO
Graph 65
Fonctions financières et statistiques avancées
Menu à icônes
Ecran couleur extrêmement lisible (8192 points, 3 couleurs) scindable en deux (graphe/graphe ou graphe/tableau)
Programmable, connectable
64 KO de ram, nombre de programmes illimité (mémoire)
Solveur automatique sur graphes (max, min, zéros, intersection, intégrale)
Mémoires mixtes de 20 fonctions: cartésiennes - polaires - paramètres - inéquations
Utilisation possible de 36 listes de nombres
Bibliothèque intégrée: tableau périodique des éléments chimiques, formules scientifiques, dérivées, primitives, transformations de Laplace, constantes physiques,...
La première calculatrice graphique couleur avec calculs financiers et statistiques
Avec son écran couleur et ses fonctions financières et de statistiques, la Graph 65 est un outil agréable et puissant idéal pour les études économiques.
GRAPH 65
GRAPHIQUE COULEUR
LIBRAIRIE
NOBLET BENELUX
56 b7, avenue Général Dumonceau
1190 Bruxelles
Tél.: +32 2 333 73 33
Fax: +32 2 333 73 34
support@casio-be.com

*Mathématique et Pédagogie* n° 129, 37–54, 2000

# Prob'Habileté

**J.-P. CAZZARO, F. POURBAIX,**
***A. R. Jette, A. R. Jean Rey de Couvin***

## 1. Préambule

Le texte qui suit relate l'exposé *Prob'habileté* présenté en août 1999 lors du congrès de la SBPMef à Morlanwelz.

Il s'agit du compte-rendu d'une expérience menée dans des classes de cinquième année de l'enseignement général, ayant pour thème l'apprentissage des probabilités.

Cette expérience faisait partie de la recherche *Des compétences terminales en mathématique* réalisée dans le cadre d'une convention de recherche en éducation entre l'Université de Mons-Hainaut et le Ministère de la Communauté Française de Belgique.

Il existe de ce texte une version non expurgée dans le rapport de cette recherche . . .

## 2. Le vif du sujet

### 2.1. Mise en train

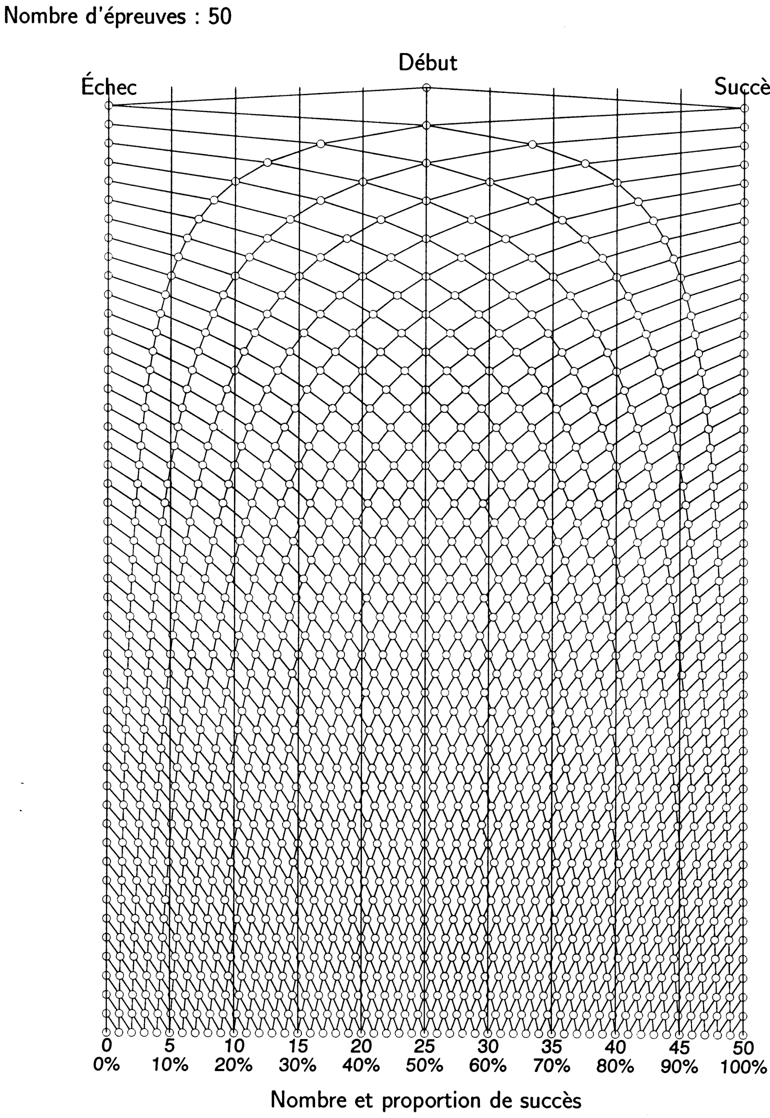
Nous proposons ici trois calculs de probabilités aux élèves dans le cadre d'expériences simples.

Dans la première (pile ou face), la probabilité à déterminer est connue de tous. Dans la deuxième (le tube de l'été), calculer la probabilité demande un peu de réflexion. Enfin, dans la troisième (la punaise rebelle), la détermination de la probabilité nécessite une expérience.

(0) Adresses des auteurs :
J.-P. Cazzaro, 21, rue du Bois d'Havré, 7000 Mons
F. Pourbaix, 55, rue de Pont-à-Celles, 6183 Trazegnies

### 2.1.1. Expérience 1 (le pile ou face)

Chaque élève réalise 50 jets et complète le diagramme suivant :



Ce diagramme permet de visualiser l'encadrement de la fréquence dans des intervalles emboîtés de plus en plus petits.

En considérant l'ensemble des résultats de la classe comme étant ceux d'une expérience unique ayant consisté en un grand nombre de lancers, on peut compléter un graphique représentant la fréquence en fonction du nombre de lancers.

Ce graphique montre la convergence de la fréquence vers un nombre que l'on définit comme étant la probabilité.

### 2.1.2. Expérience 2 (le tube de l'été)

*Deux billes noires et deux billes blanches sont enfermées dans un tube cylindrique transparent dont le diamètre est tel que les quatre billes se placent nécessairement aux sommets d'un carré lorsqu'on dépose le tube verticalement sur une table. Dans ces conditions, deux TYPES de configuration sont possibles pour les quatre billes :*
- *on appelle SUCCÈS le cas où les deux billes noires se touchent,*
- *on appelle ÉCHEC le cas où les deux billes noires sont diamétralement opposées.*

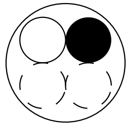
Voici les deux types de configuration possibles. La configuration A est un succès, l'autre est un échec.


On demande de calculer la probabilité d'un succès.

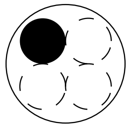
Dans un premier temps, l'expérience est réalisée en classe sur le même modèle que l'expérience 1. On demande ensuite aux élèves de justifier le résultat obtenu.

Voici deux raisonnements possibles :

1. Fatalement, au moins une bille noire doit être adjacente à une bille blanche. Nous pouvons donc toujours placer ces deux billes comme ci-contre. Il y a alors deux façons de placer les deux dernières billes dans les cases vides. Chacune des configurations A et B est donc de probabilité $\frac{1}{2}$.



2. Commençons par placer une bille noire. La seconde bille noire peut être placée en trois endroits différents dont une seule correspond à la configuration B. La probabilité de celle-ci est donc $\frac{1}{3}$.



Notons que la plupart des élèves pensaient *a priori* que les probabilités d'échec et de succès valaient toutes deux $\frac{1}{2}$.

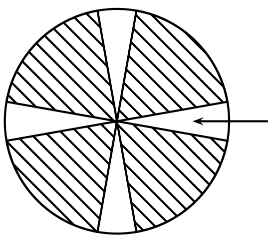
Le raisonnement correct est bien entendu le second. Nous laissons au lecteur le soin de le justifier ! ! !

### 2.1.3. Expérience 3 (la punaise rebelle)

Si on lançait une punaise 50 fois, comment pourrait-on calculer la probabilité qu'elle tombe « pointe en l'air » ?

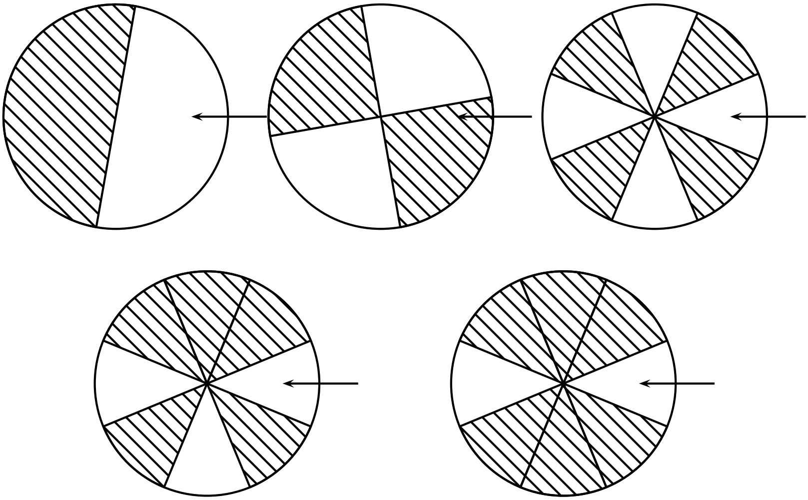
## 2.2. Véritable entrée en matière

### 2.2.1. Un problème bien ciblé !

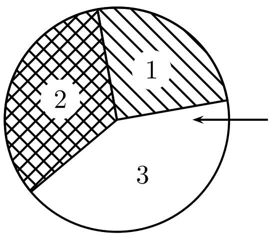


*À la foire, l'un des jeux proposés est de faire tourner une roue semblable à ce modèle autour de son centre, et de regarder quelle zone est désignée par le curseur fixe.*

– Quelle est la probabilité que le curseur désigne une zone sombre pour chacune des roues suivantes ?



– Jouons maintenant avec la roue suivante :




L'amplitude de l'angle définissant la zone :
– n° 1 est de 90°,
– n° 2 est de 120°,
– n° 3 est de 150°.

Quelle est la probabilité que le curseur :

1. indique la zone 1 ? la zone 2 ? la zone 3 ?
2. indique l'une des zones 1 *ou* 2 ?
   Peut-on déduire cette probabilité de celles qui ont été calculées ci-avant ?
3. n'indique *pas* la zone 3 ?
4. indique l'une des zones 1, 2 ou 3 ?

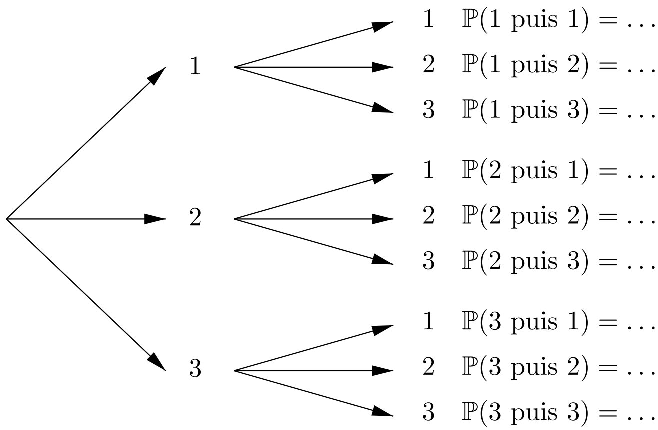
– Jouons maintenant deux fois de suite avec la dernière roue. Quelle est la probabilité :

1. que le curseur indique deux fois de suite la zone 1 ?

2. que le curseur indique d'abord la zone 1, puis la zone 2 ?

3. que le curseur indique la zone 1 et la zone 2, dans un ordre quelconque, lors des deux jeux successifs ?

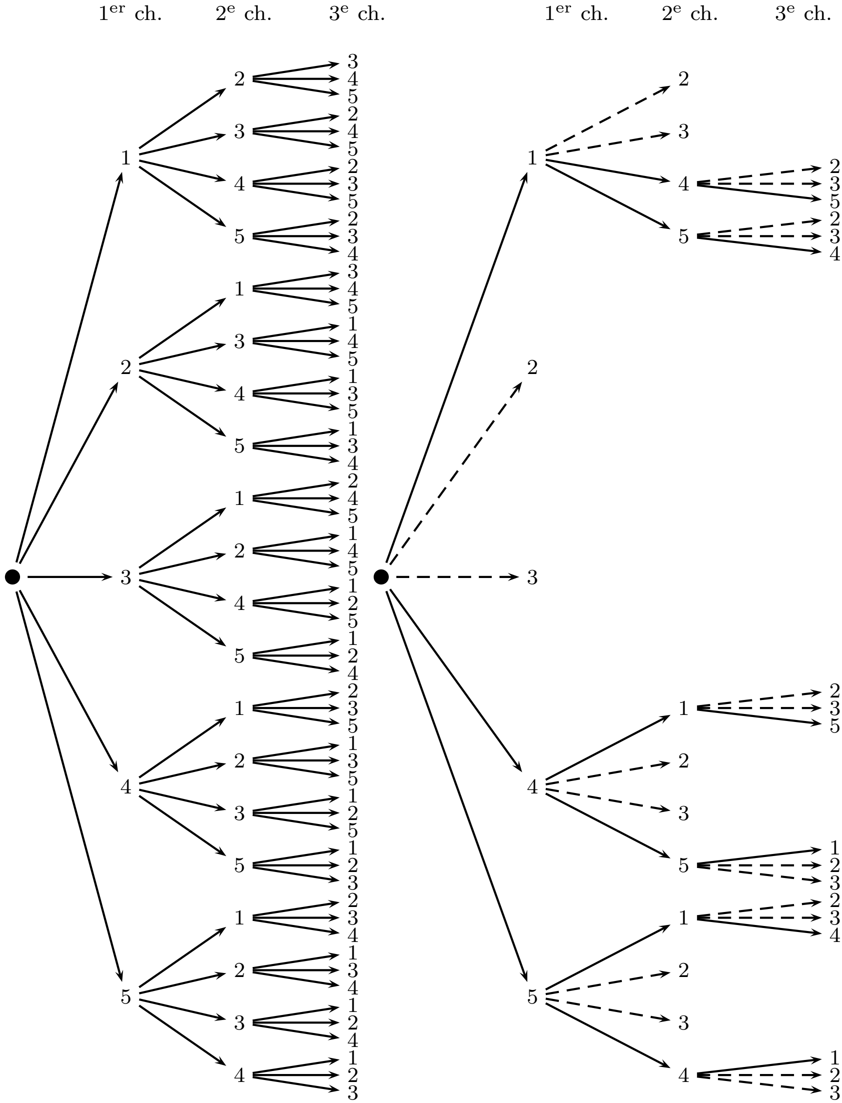
Pour répondre aux dernières questions, nous avons suggéré l'emploi de l'arbre suivant. La plupart des élèves en rencontraient pour la première fois !

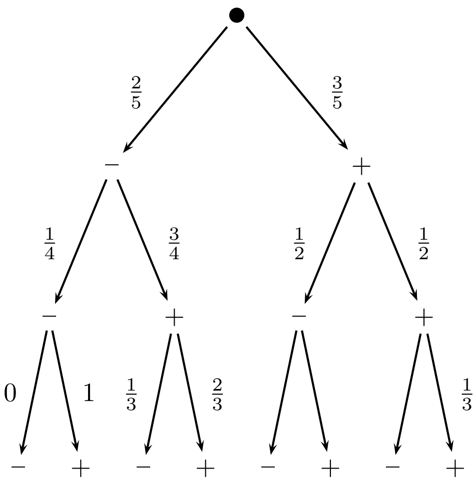



### 2.2.2. En selle pour le problème du tiercé !

*On fait courir 5 chevaux et tous les classements à l'arrivée ont la même probabilité de se produire.*
- *Quelle est la probabilité d'obtenir le tiercé dans l'ordre ?*
- *Et si l'ordre n'a pas d'importance ?*
- *Dans le cas où l'ordre n'a pas d'importance, quelle est la probabilité d'avoir choisi un cheval faisant partie du tiercé et deux perdants ?*

Après discussion en classe viennent les arbres suivants :






L'arbre concis est loin d'être intuitif pour les élèves, et met ceux-ci mal à l'aise :

*Si on fait une petite erreur, tout tombe à l'eau !*

Remarquons que pour calculer la probabilité du tiercé 3-2-5 dans l'ordre, un élève cherchait cette séquence dans les feuilles de son arbre (les feuilles sont regroupées en triplets, et il espérait trouver la séquence dans l'ordre parmi ces triplets).

### 2.2.3. Le problème du Wilgame

*Au pays de Mathland, le jeu du Wilgame se pratique à l'aide de grilles constituées de 15 cases numérotées de 1 à 15, dont cinq doivent être cochées.*
*Lors d'un tirage, 4 numéros dits « gagnants » et un numéro dit « subsidiaire » sont extraits d'une urne. Vous êtes gagnant au rang :*
- *1 si vous avez coché les 4 numéros gagnants,*
- *2 si vous avez coché au moins 3 des 4 numéros gagnants et le subsidiaire,*
- *3 si vous avez coché exactement 3 des 4 numéros gagnants sans le subsidiaire.*

*Vous êtes perdant dans tous les autres cas.*
*Un joueur invétéré prétend que la probabilité de gagner vaut $\frac{11}{3003}$ au rang 1, $\frac{41}{3003}$ au rang 2, $\frac{180}{3003}$ au rang 3 et que celle de perdre vaut $\frac{2772}{3003}$.*

– Vérifiez que les affirmations du joueur invétéré sont correctes.
– Pourquoi la somme des probabilités est-elle plus grande que 1 ?
– Comment pourrait-on modifier les règles pour que cette somme soit égale à 1 ?
– Adaptez les probabilités calculées par le joueur invétéré pour les rendre conformes aux nouvelles règles.

La partie la plus intéressante de la résolution de ce problème fut la première question.

Voici comment elle a été abordée dans les deux classes.

1. Un arbre concis est construit et les conventions suivantes sont prises :
   – l'événement ≪ la boule tirée fait partie des cases cochées ≫ est noté $O$,
   – l'événement ≪ la boule tirée ne fait pas partie des cases cochées ≫ est noté $N$.

   Pour le rang 1, l'arbre suivant apparaît très vite :

   1^er^ tirage — 2^e^ tirage — 3^e^ tirage — 4^e^ tirage

   $$\bullet \xrightarrow{\frac{1}{3}} O \xrightarrow{\frac{2}{7}} O \xrightarrow{\frac{3}{13}} O \xrightarrow{\frac{1}{6}} O$$

   Cependant, la probabilité de $\frac{1}{3}$ sur la première branche n'est pas claire pour tout le monde.

   $$\mathbb{P}(\text{rang } 1) = \mathbb{P}(O\ O\ O\ O) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{273} = \frac{11}{3003}$$

   Par analogie avec le rang 1, les élèves croient tous que seul *un* chemin est gagnant au rang 2. Ils se rendent compte, après réflexion, que quatre chemins sont intéressants.

   Les autres probabilités sont calculées sur le même modèle.

2. La particularité de la seconde résolution est de s'appuyer sur les valeurs du joueur invétéré.

   Probabilité de gagner au rang 1

   Les élèves aidés de leur professeur construisent l'arbre suivant dans lequel $G$ et $\overline{G}$ désignent respectivement des numéros gagnant et non gagnant.

$$\bullet \overset{\frac{4}{15}}{\text{———}} G \overset{\frac{3}{14}}{\text{———}} G \overset{\frac{2}{13}}{\text{———}} G \overset{\frac{1}{12}}{\text{———}} G \overset{\frac{11}{11}}{\text{———}} \overline{G}$$

La probabilité de l'événement représenté vaut $\frac{11}{15015}$. Une discussion s'engage alors pour comprendre pourquoi cette probabilité n'est pas égale à la valeur du ≪ joueur invétéré ≫. Les élèves arrivent rapidement à la conclusion que le numéro non gagnant n'a pas nécessairement été coché en dernier lieu et qu'il y a cinq cas possibles.

L'arbre est complété de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
 & G \arrow[r, "\frac{3}{14}"] & G \arrow[r, "\frac{2}{13}"] & G \arrow[r, "\frac{1}{12}"] & G \arrow[r, "\frac{11}{11}"] & \overline{G} \\
\bullet \arrow[ur, "\frac{4}{15}"] \arrow[dr, "\frac{4}{15}"'] & & & & & \\
 & G \arrow[r, "\frac{3}{14}"'] & G \arrow[r, "\frac{11}{13}"'] & \overline{G} \arrow[r, "\frac{2}{12}"'] & G \arrow[r, "\frac{1}{11}"'] & G
\end{tikzcd}$$

La réponse vient sans peine, sans construire l'arbre complet :

$$\Pr(\text{gagner au rang 1}) = 5 \times \frac{11}{15015} = \frac{11}{3003}$$

<u>Probabilité de gagner au rang 2</u>

L'expression ≪ au moins ≫ joue ici un grand rôle, et est loin d'être évidente pour tous ([1]).

Deux cas sont à envisager :

(a) 4 numéros gagnants plus le subsidiaire,

(b) 3 numéros gagnants, le subsidiaire et un perdant.

<u>Cas (a)</u>

Un élève construit l'arbre que voici :

$$\bullet \overset{\frac{4}{15}}{\text{———}} G \overset{\frac{3}{14}}{\text{———}} G \overset{\frac{2}{13}}{\text{———}} G \overset{\frac{1}{12}}{\text{———}} G \overset{\frac{1}{11}}{\text{———}} S$$

Il en déduit aisément la probabilité de l'événement associé au cas (a) :

$$5 \times \frac{1}{15015} = \frac{1}{3003}$$

([1]) Rappelons qu'au 17ème siècle, cette expression causa du souci au Chevalier de Méré (de son vrai nom Antoine Gombaud) qui dut s'en remettre à son ami Blaise Pascal !

Cas (b)

L'arbre suivant est construit :

$$\bullet \xrightarrow{\frac{4}{15}} G \xrightarrow{\frac{3}{14}} G \xrightarrow{\frac{2}{13}} G \xrightarrow{\frac{1}{12}} S \xrightarrow{\frac{11}{11}} P$$

On en déduit la probabilité de l'événement représenté : $\frac{2}{3003}$.
La classe conclut que, vu la valeur donnée dans l'énoncé, l'événement associé au cas (b) doit être composé de 20 événements élémentaires équiprobables.
Le 20 est le nombre de permutations de G G G S et P.

## 2.3. La grosse pièce

### 2.3.1. Le problème de la bonne tranche

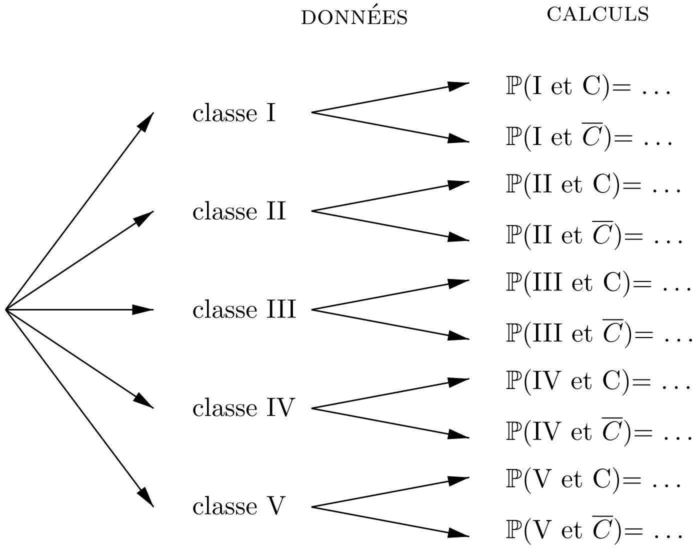
*Le tableau ci-dessous résume la situation du chômage en Mathland :*

| *Classe* | *Tranche d'âge* | *Répartition* | *Proportion de chômeurs* |
|---|---|---|---|
| *I* | *0–15 ans* | *34%* | *0* |
| *II* | *15–25 ans* | *25%* | 1/5 |
| *III* | *25–35 ans* | *15%* | 2/5 |
| *IV* | *35–45 ans* | *10%* | 3/10 |
| *V* | *>45 ans* | *16%* | 1/6 |

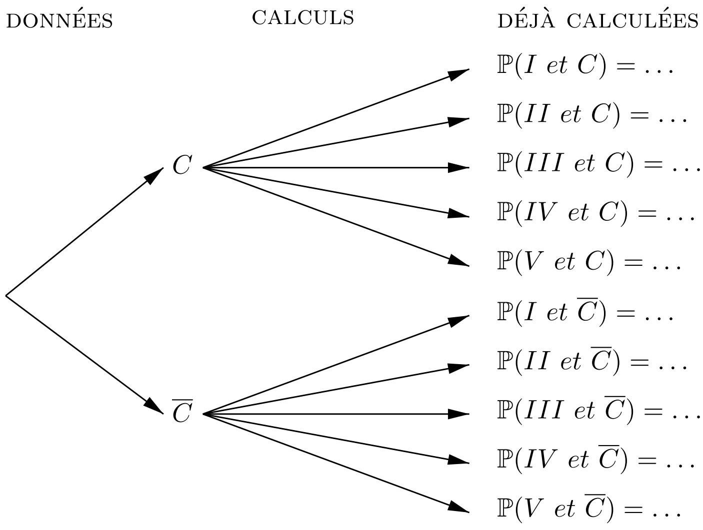
*On demande la probabilité*

1. *pour qu'un habitant pris au hasard soit un chômeur faisant partie de la classe II,*
2. *pour qu'un chômeur pris au hasard fasse partie de la classe II.*

Pour répondre à la première question, complétez l'arbre qui suit (où $C$ représente un chômeur et $\overline{C}$ représente un non chômeur) :




Pour répondre à la deuxième question, complétez un deuxième arbre :



Nous savons que $\mathbb{P}(II \textit{ et } C) = 0,05$. Or, la probabilité d'être chômeur $(\frac{1}{6})$ doit être multipliée par la probabilité $x$ qu'un chômeur appartienne à la classe II, afin de trouver la probabilité $(0,05)$ qu'un habitant soit un chômeur appartenant à la classe II.

Ainsi $x = \frac{0{,}05}{1/6} = 0,3$. Par conséquent :

$$\mathbb{P}(II \text{ sachant que } C) = \frac{\mathbb{P}(II \textit{ et } C)}{\mathbb{P}(C)}$$

### 2.3.2. Un problème au format familial

*On estime que la probabilité d'avoir un garçon est $\frac{515}{1000}$, d'où celle d'avoir une fille est $\frac{485}{1000}$.*

*Que pouvez-vous dire, pour les familles de deux enfants, de la probabilité d'avoir :*

- *deux garçons ?*
- *un garçon et une fille ?*
- *un garçon sachant que le premier enfant est une fille ?*
- *un garçon sachant que le premier enfant n'est pas une fille ?*

### 2.3.3. Flashback sur le problème de la bonne tranche

Dans le « problème de la bonne tranche », les événements « appartenir à la classe V » et « être chômeur » étaient indépendants.

En effet, $\mathbb{P}(V|C) = \mathbb{P}(V) = 0,16$. De manière équivalente, $\mathbb{P}(V|C) = \mathbb{P}(V|\overline{C}) = 0,16$.

Par contre, être chômeur n'était pas indépendant de la tranche d'âge, car pour ce faire, il aurait fallu :

$$\mathbb{P}(C|I) = \mathbb{P}(C|II) = \mathbb{P}(C|III) = \cdots$$

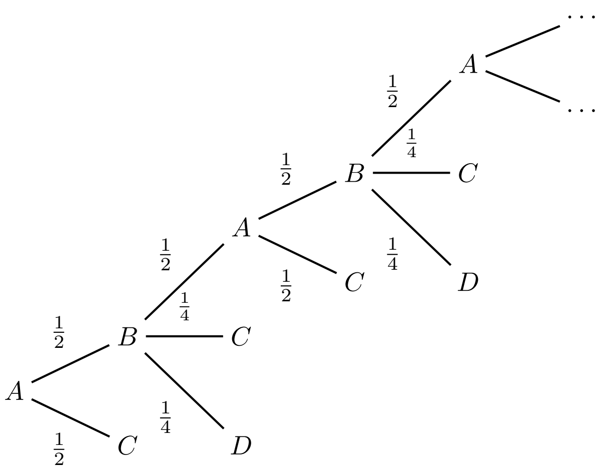
### 2.3.4. Petit appétit, la mouche fait son nid

*Une mouche parcourt les arêtes d'un tétraèdre $ABCD$. En chaque sommet, elle choisit de se diriger vers l'un des trois autres sommets en respectant les probabilités de transition données dans le tableau suivant (la première colonne indique les sommets de départ) :*

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $B$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $C$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $D$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

*La mouche commence son périple en $A$ ou en $B$. Aux sommets $C$ et $D$ se cachent de grosses araignées qui avalent la mouche si elle passe à leur portée.*
*Quelle est la probabilité que ce soit l'araignée du sommet $C$ qui gobe la mouche :*
*– si celle-ci part de $A$ ?*
*– si celle-ci part de $B$ ?*

L'arbre suivant est suggéré par des élèves :




$\mathbb{P}(\text{mourir en } C \text{ si départ de } A)\frac{5}{6}$

Pour calculer la deuxième probabilité, tous les élèves ont repris de longs calculs, mais personne n'a pensé à se servir du résultat ci-dessus.

Un élève détermine enfin que cette probabilité vaut $\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 2=\dfrac{2}{3}$.

## 2.4. Annexe

Nous proposons ici une illustration puis une preuve de l'équivalence :

$$\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A|\overline{B}) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)$$

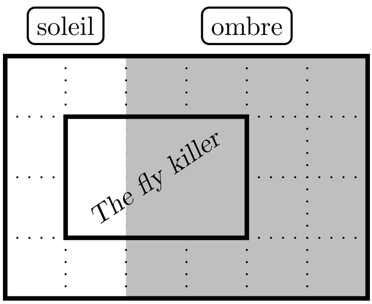
Cette équivalence n'est vraie que dans le cas où $\mathbb{P}(B)\neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{B})\neq 0$.

Faute de temps, cette partie n'a pas été expérimentée.

**L'illustration**

La figure ci-après représente une table, la partie de droite (ombrée sur la figure) est à l'ombre tandis que la partie de gauche est exposée aux rayons du soleil. Au centre de cette table, on a placé un papier tue-mouches (*The fly killer*).
Une mouche, tellement minuscule que nous l'assimilerons à un point, épuisée par un long vol, décide d'aller s'y reposer. Inconsciente du danger qui la menace et peu soucieuse de son bronzage, on suppose qu'elle a la même probabilité de se poser en n'importe quel endroit de la table.

Appelons :
- $A$ l'événement « la mouche se pose sur le papier tue-mouches »,
- $B$ l'événement « la mouche se pose au soleil »,
- $\overline{B}$ l'événement « la mouche se pose à l'ombre ».




$$\mathbb{P}(A)=\frac{\text{aire du papier tue-mouches}}{\text{aire de la table}}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\text{aire du morceau de papier tue-mouches exposé au soleil}}{\text{aire du morceau de table exposé au soleil}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

On constate que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, les événements $A$ et $B$ sont *indépendants*. En effet, la fraction de table recouverte de papier tue-mouches est identique, que l'on considère l'entièreté de la table ou uniquement la partie de table exposée au soleil ($\frac{1}{4}$).

Cette fraction reste donc la même si l'on considère la partie de table à l'ombre.

Ce qui nous permet de dire que $\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \frac{1}{4}$.

Ainsi donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \Longrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B})$$

Par un raisonnement analogue, on pourrait voir que

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B}) \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$$

et donc que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B})$$

... dans le cas de l'exemple que nous traitons.

**La preuve**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B}) \iff & \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})} \\
\iff & \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B})}{1 - \mathbb{P}(B)} \\
\iff & \mathbb{P}(A \text{ et } B) \cdot (1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(B) \\
\iff & \mathbb{P}(A \text{ et } B) - \mathbb{P}(A \text{ et } B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(B) \\
\iff & \mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A \text{ et } B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(B) \\
\iff & \mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(B) \cdot \big(\mathbb{P}(A \text{ et } B) + \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B})\big) \\
\iff & \mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A) \\
\iff & \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A) \\
\iff & \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

# 3. Évaluation

## 3.1. Introduction

Notre but était d'ouvrir des voies vers de nouvelles techniques d'évaluation.

Nous sommes bien conscients qu'il n'est pas concevable de demander aux enseignants de réaliser régulièrement de telles études.

L'évaluation a porté sur une trentaine d'individus (deux classes) ayant répondu à l'interrogation suivante :

1. On jette trois fois une pièce :
   (a) calculer la probabilité d'avoir trois fois « face » (réponse : $\frac{1}{8}$) ;
   (b) calculer la probabilité d'avoir un nombre impair de fois « pile » (réponse : $\frac{1}{2}$).
2. Un pick-pocket plonge la main dans une poche contenant quatre pièces de 1 fb, trois pièces de 5 fb et 3 pièces de 20 fb. Il en subtilise trois. Calculer la probabilité que la somme volée soit :
   (a) 60 fb (réponse : $\frac{1}{120}$) ;
   (b) 30 fb (réponse : $\frac{3}{40}$) ;
   (c) $> 3$ fb (réponse : $\frac{29}{30}$).

## 3.2. Une tentative d'évaluation « vectorielle »

Pour cerner au mieux les comportements des élèves, nous avons attribué, à chacun d'eux, non pas une cote scalaire mais un vecteur. Les composantes de ce vecteur sont les comportements de l'apprenant pour les critères suivants.

**1$^{\text{re}}$ question**
Compatibilité entre les calculs et l'arbre
Distinction lois de la somme et du produit
Réussite à la sous-question a
Réussite à la sous-question b

**2$^{\text{e}}$ question**
Construction des arbres

Dépendance des événements
Compatibilité entre les calculs et l'arbre
Distinction lois de la somme et du produit
Réussite à la sous-question a
Réussite à la sous-question b
Réussite à la sous-question c

### 3.3. Exploitation des résultats et conclusion

Deux techniques différentes ont été utilisées pour tenter d'évaluer les élèves sur base des vecteurs établis. Les évaluations qui en découlent peuvent conduire à des conclusions différentes car elles mettent l'emphase sur des comportements différents.

La méthode la plus objective n'est pas nécessairement celle qui est habituellement utilisée. Si les deux méthodes que nous avons utilisées ne sont pas faciles d'emploi, elles éliminent cependant une part de subjectivité. Celle-ci ne se manifeste plus que dans l'établissement des critères de jugement.

Ces méthodes présentent également l'avantage de mettre un peu plus en évidence les lacunes à combler chez l'apprenant, et permettent de le mieux situer au sein d'un groupe.

## 4. Références


– G. Noël, *Seconds rendez-vous probabilistes*, Ed. CDS (UMH), 1993.
– G. Noël (coordonnateur), *Premiers rendez-vous probabilistes*, Ed. CDS (UMH), 1981.
– G. Giles, *The Stirling recording sheet for experiments in probability*, Teaching Statistics, V.1, n°3, 84–91, 1979.
– A. Vander Linden, *L'arbre, outil pédagogique en calcul des probabilités*, Mathématique et Pédagogie, n°25, 29–51, SBPMef, 1980.
– S. Lipschutz, *Probability*, Schaum's outline series, MacGrawhill Book Company, 1968.
– M.R. Spiegel, *Statistics*, Schaum's outline series, MacGrawhill Book Company, 1968.
– R.W. Madsen, *Secondary student's concept of probability*, Teaching Statistics, V.17, n°3, 1995.
– R. Isaac, *The Pleasures of Probability*, Undergraduate Texts in Math. Readings in Math., Springer Verlag, New York, 1995.
– S. Tomlinson, R. Quinn, *Understanding Conditional Probability*, Teaching Statistics, V.19, n°1, 1997.

*Mathématique et Pédagogie* n° 129, 55–59, 2000

# Olympiades

Dans ce numéro de *Mathématique et Pédagogie*, vous trouverez les solutions aux problèmes « mini » de la 25e Olympiade Mathématique Belge, solutions choisies parmi les meilleures fournies par les élèves participant à la finale. Suivent les énoncés des problèmes proposés lors de la 41e Olympiade Mathématique Internationale. Les problèmes 1, 2 et 4 sont assez faciles, les autres sont beaucoup plus coriaces, en particulier je vous conseille d'essayer de résoudre le problème 6 (de géométrie plane), il m'a fallu plusieurs heures de réflexion pour aboutir à la solution et au passage j'ai découvert une foule de propriétés intéressantes de la figure. Je vous rappelle que vos solutions sont toujours les bienvenues ([1]).

## Mini finale 2000

1. Alix, Bénédicte et Claude disposent chacune d'une plaque en bois de forme carrée, dont l'épaisseur est 1 *cm*. Les mesures en *cm* des côtés de ces plaques sont des nombres entiers impairs. Ces trois plaques sont découpées en petits cubes d'1 *cm* d'arête par des traits de scie parallèles à leurs côtés. Ces cubes sont alors rassemblés en un seul tas et les trois amies les utilisent pour former un maximum de cubes de 2 *cm* d'arête. Ce travail terminé, trois petits cubes unitaires restent non assemblés. Expliquer que ceci était prévisible.

   **Solution de Lise Poncelet du Collège Saint Joseph à Chimay.**

   Les longueurs de côtés de plaques, en *c*m, sont des nombres entiers impairs. On peut donc poser la longueur de chaque côté de la plaque carrée de Alice égale à $2a + 1$, celle de chaque côté de la plaque de Bénédicte égale à $2b+1$ et celle de chaque côté de la plaque de Claude égale à $2c + 1$. Après la découpe des plaques en petits cubes d'1 *cm* d'arête, nous pouvons calculer le nombre de cubes dans le tas :

   $$(2a + 1)(2a + 1) + (2b + 1)(2b + 1) + (2c + 1)(2c + 1) =$$
   $$(4a^2 + 4a + 1) + (4b^2 + 4b + 1) + (4c^2 + 4c + 1) =$$
   $$4a^2 + 4a + 4b^2 + 4b + 4c^2 + 4c + 3.$$

   Les trois filles forment un maximum de cubes de 2 *cm* d'arête. Pour chacun de ces cubes, elles utilisent $2 \times 2 \times 2 = 8$ cubes de 1 *cm* d'arête. On peut prévoir qu'il restera trois cubes non utilisés car $(4a^2 + 4a + 4b^2 + 4b + 4c^2 + 4c)$ est divisible par 8, mais 3 n'est pas

([1]) Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B Vandercammen 1160 Bruxelles ou par e-mail à l'adresse festraetscl@brutele.be divisible par 8. Preuve que $(4a^2+4a+4b^2+4b+4c^2+4c)$ est divisible par 8 : ce nombre est certainement divisible par 4

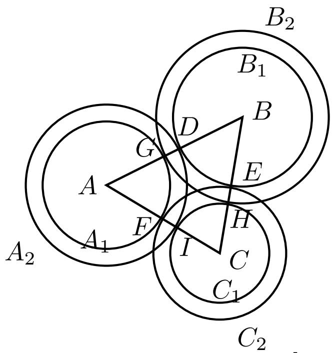
$$(4a^2+4a+4b^2+4b+4c^2+4c):4 = a^2+a+b^2+b+c^2+c.$$

Ce résultat peut être lui-même divisé par 2 car un nombre et son carré sont de même parité : tous deux pairs ou tous deux impairs, en effet
$(2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$ : impair
$(2x)^2 = 4x^2$ : pair
le carré d'un nombre impair est impair et le carré d'un nombre pair est pair. La somme de deux nombres de même parité

est paire : la somme de deux nombres impairs est paire et la somme de deux nombres pairs est paire. La somme de $a$ et $a^2$ est divisible par 2, il en est de même pour la somme de b et $b^2$ et pour la somme de $c$ et $c^2$. Donc $a^2+a+b^2+b+c^2+c$ est divisible par 2 et $4a^2+4a+4b^2+4b+4c^2+4c$ est divisible par 8. Il reste trois carrés non assemblés.

2. Un triangle quelconque $ABC$ a tous ses angles aigus. Soit $D$ un point de $]ab[$.

Le cercle $B_1$ de centre $B$ passant par $D$ coupe $]BC[$ en $E$ ;
le cercle $C_1$ de centre $C$ passant par $E$ coupe $]CA[$ en $F$ ;
le cercle $A_1$ de centre $A$ passant par $F$ coupe $]AB[$ en $G$ ;
le cercle $B_2$ de centre $B$ passant par $G$ coupe $]BC[$ en $H$ ;
le cercle $C_2$ de centre $C$ passant par $H$ coupe $]CA[$ en $I$.




(a) Montrer que le cercle $A_2$ de centre $A$ passant par $I$ coupe $]AB[$ en $D$.

(b) Dans quel(s) cas $A_1$ passe-t-il par $D$ ?

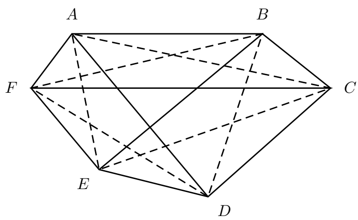
**Solution de Pierre Friesewinkel de l'Athénée Royal Crommelynck à Woluwe-Saint-Pierre.**

(a) Remarquons que $|GD| = |EH| = |FI|$.
Définissons que $|GD| = x$ et $|AF| = y$.
$|AI| = y + x$
$|AG| = y$

$|AD| = y + x$
$I$ et $D$ se trouvant à même distance de $A$, ils se trouvent sur un seul et même cercle centré en $A$.

(b) $A_1$ passera par $D$ si le triangle $ABC$ est isocèle et qu'un des points $D$, $E$, $F$ se trouve au milieu du côté non égal aux deux autres, ou si le triangle $ABC$ est équilatéral et que les points $D$, $E$, $F$ se trouvent au milieu des côtés.

3. Dans un hexagone convexe $ABCDEF$, $AB//CF$, $CD//BE$ et $EF//AD$. Montrer que les triangles $ACE$ et $BDF$ ont même aire.
**Solution de Nicolas Innocenti de l'Athénée Royal Ch. Rogier à Liège.**




Aire $ACE =$ Aire $ABCDEF$ − Aire $ECD$ − Aire $ABC$ − Aire $AEF$
Aire $BDF =$ Aire $ABCDEF$ − Aire $BCD$ − Aire $ABF$ − Aire $DEF$

Aire $ECD =$ Aire $BCD$ ( car même base $CD$ et même hauteur, distance entre la droite $CD$ et la droite $EB$),
Aire $ABC =$ Aire $ABF$ ( car même base $AB$ et même hauteur, distance entre la droite $AB$ et la droite $FC$),
Aire $AEF =$ Aire $DEF$ ( car même base $EF$ et même hauteur, distance entre la droite $EF$ et la droite $DA$),
D'où Aire $ACE =$ Aire $BDF$.

4. Avec trois chiffres distincts non nuls, il est possible de former six nombres de deux chiffres distincts. Quels sont ces six nombres si leur somme vaut 484 ? Ce problème admet-il une solution unique ?
**Solution de Audrey Van Der Wielen du Collège Saint François Xavier I à Verviers.**
Pour commencer, je vais nommer ces trois chiffres $x$, $y$ et $z$. Avec ces chiffres, je peux former six nombres de deux chiffres : $xy$, $xz$, $yx$, $yz$, $zx$, $zy$. Je m'aperçois que chaque chiffre se répète deux fois dans les unités et deux fois dans les dizaines :

$$2x + 2y + 2z + 2x \times 10 + 2y \times 10 + 2z \times 10 = 484$$
$$2x + 2y + 2z + 20x + 20y + 20z = 484$$

$$22x + 22y + 22z = 484$$
$$22(x + y + z) = 484$$
$$x + y + z = \frac{484}{22}$$
$$x + y + z = 22$$

Etant donné que $x$, $y$, $z$ sont trois chiffres distincts non nuls, je peux utiliser les chiffres suivants : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Si je n'utilise pas le 9, la somme maximale que je puisse obtenir en additionnant trois chiffres distincts est $6 + 7 + 8 = 21$. Je dois donc dans tous les cas utiliser le 9 ; la différence entre 22 et 9 est 13, somme de $8 + 5$ ou $7 + 6$. Les trois chiffres sont donc 9, 8 et 5 ou 9, 7 et 6. Les six nombres de deux chiffres que nous pouvons former avec 9, 8 et 5 sont 98, 95, 89, 85, 59, 58, les six nombres de deux chiffres que nous pouvons former à partir de 9, 7 et 6 sont 97, 96, 79, 76, 69, 67. Dans les deux cas, la somme est bien 484.

## 41ème O.M.I.

461 concurrents issus de 82 pays ont participé à cette olympiade qui se tenait à Séoul. Au classement « internations », la Chine qui a obtenu 6 médailles d'or domine les autre pays avec un résultat total de 218/252. Elle devance dans l'ordre la Russie (215/252, 5 médailles d'or et une d'argent) et les Etats-Unis (184/252, 3 médailles d'or et 3 d'argent). Deux de nos représentants ont obtenu une médaille de bronze, Koen Goossens, néerlandophone) et Pierre Gramme (francophone).

**Premier jour, Taejon, 19 juillet 2000**, durée : 4 heures 30 minutes. Chaque problème vaut 7 points.

**Problème 1.**

Deux cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ se coupent en $M$ et $N$. Soit $\ell$ la tangente commune à $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ telle que $M$ soit plus proche de $\ell$ que $N$. La droite $\ell$ est tangente à $\Gamma_1$ en $A$ et à $F_2$ en $B$. La droite passant par $M$ et parallèle à $\ell$ rencontre à nouveau le cercle $\Gamma_1$ en $C$ et le cercle $F_2$ en $D$. Les droites $CA$ et $DB$ se coupent en $E$ ; les droites $AN$ et $CD$ se coupent en $P$ ; les droites $BN$ et $CD$ se coupent en $Q$. Montrer que $EP = EQ$.

**Problème 2.**

Soient $a$, $b$, $c$ trois nombres réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer que :

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1$$

**Problème 3.**

Soit $n \geqslant 2$, un entier. Au début, il y a $n$ puces sur une droite horizontale, pas toutes au même point. Pour un nombre réel strictement positif, on définit un *mouvement* de la façon suivante :
• on choisit deux puces situées aux points $A$ et $B$, avec $A$ à gauche de $B$
• alors la puce en $A$ saute au point $C$, situé sur la même droite, à droite de $B$ et tel que $BC/AB = \lambda$.

Trouver toutes les valeurs de $\lambda$ telles que, pour tout point $M$ sur la droite et pour toutes positions initiales des $n$ puces, il existe une suite finie de mouvements qui amène toutes les puces à droite de $M$.

**Deuxième jour, Taejon, 20 juillet 2000.**, durée : 4 heures 30 minutes. Chaque problème vaut 7 points.

**Problème 4.**

Un magicien a cent cartes numérotées de 1 à 100. Il les répartit dans trois boîtes, une rouge, une blanche et une bleue, de telle sorte que chaque boite contienne au moins une carte. Un spectateur choisit deux de ces trois boites, tire une carte dans chacune d'elles et annonce la somme des nombres figurant sur les cartes tirées. Connaissant cette somme, le magicien identifie la boîte dans laquelle aucune carte n'a été tirée. De combien de façons le magicien peut-il répartir les cartes dans les boîtes de telle sorte que ce tour de magie réussisse toujours ? (Deux façons de répartir les cartes sont considérées comme différentes si au moins une carte est placée dans deux boites différentes.)

**Problème 5.** Existe-t-il un entier strictement positif $n$ tel que $n$ soit divisible par exactement 2000 nombres premiers distincts et $2^n + 1$ soit divisible par $n$.

**Problème 6.**

Soient $AH_1$, $BH_2$, $CH_3$ les hauteurs d'un triangle $ABC$ dont tous les angles sont aigus. Le cercle inscrit dans le triangle $ABC$ est tangent respectivement aux côtés $BC$, $CA$, $AB$ en $T_1$, $T_2$, $T_3$. On désigne respectivement par $l_1$ , $l_2$ , $l_3$ les symétriques des droites $H_2H_3$, $H_3H_1$, $H_1H_2$ par rapport aux droites $T_2T_3$, $T_3T_1$, $T_1T_2$. Montrer que $l_1$ , $l_2$ , $l_3$ déterminent un triangle dont les sommets appartiennent au cercle inscrit dans le triangle $ABC$.

*Mathématique et Pédagogie* n° 129, 60–63, 2000

# Des problèmes et des jeux

**Carré parfait** Problème n°232 de *Mathématique et Pédagogie* n°126.

*Déterminer tous les nombres premiers $p$ tels que la somme des diviseurs entiers positifs de $p^4$ soit un carré parfait.*

**Solution de J. Finoulst de Diepenbeek.**

Nous prouvons que la somme $S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ des diviseurs de $p^4$ est comprise entre les carrés de $p^2 + 1$ et $p^2 + p$.

En effet,

$$(p^2 + 1)^2 = p^4 + 2p^2 + 1 < p^4 + p^3 + p^2 + 1 < S$$

$$(p^2 + p)^2 = p^4 + 2p^3 + p^2 = p^4 + p^3 + p^2 + p^3 > S$$

Si $S = k^2$, on devra avoir

$$p^2 + 1 < k < p^2 + p$$

ou encore $k = p^2 + a$ avec $1 < a < p$.

L'égalité $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = (p^2 + a)^2 = p^4 + 2ap^2 + a^2$,

devient $p + p^2 + p^3 = 2ap^2 + a^2 - 1$ (1)

$p$ divise $a^2 - 1$, donc $a - 1$ ou $a + 1$ ; comme $1 < a < p$, $p$ ne divise pas $a - 1$ mais divise $a + 1$ et on a nécessairement $a + 1 = p$, ou $a = p - 1$. L'égalité (1) peut alors s'écrire

$$p + p^2 + p^3 = 2p^3 - 2p^2 + p^2 - 2p + 1 - 1$$

$$p^3 - 2p^2 - 3p = 0$$

$$p^2 - 2p + 3 = 0$$

$$(p + 1)(p - 3) = 0$$

$p = 3$ est l'unique solution.

---

([0]) Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B Vandercammen 1160 Bruxelles ou par e-mail à l'adresse festraetscl@brutele.be

**P. Bornsztein de Courdimanche (France), P. Dassy de Liège, P. Dekeyser de Uccle, J. Goldsteinas de Bruxelles, A. Paternottre de Boussu et J. Rasse de Mean ont envoyé de bonnes solutions.** M. Coyette de Rixensart et M. Lardinois de Haine-Saint-Pierre ont remarqué que ce problème a déjà été publié dans le *Mathématique et Pédagogie* n°104.

**Cercle et couronne** Problème n° 233 de *Mathématique et Pédagogie* n°126.

*C est un cercle de* 16 *cm de rayon à l'intérieur duquel se trouvent 650 points distincts. A est une couronne circulaire dont les rayons intérieur et extérieur sont* 2 *cm et* 3 *cm respectivement. Démontrer qu'il existe une position de A telle que A recouvre au moins 10 des 650 points.*

**Solution de M. Lardinois de Haine-Saint-Pierre**.

Considérons les 650 couronnes dont les centres sont les 650 points distincts donnés. La somme de leurs aires vaut $650(3^2 - 2^2)\pi\ cm^2$, soit $3250\pi\ cm^2$. Ces couronnes vivent au sein d'un disque de 19 $cm$ de rayon dont l'aire vaut $361\pi\ cm^2$.
Puisque $3250 = 9.361 + 1$, le principe des tiroirs implique qu'il existe au moins 10 couronnes ayant une intersection non vide. Il suffit dès lors de centrer une couronne en un point de cette intersection, elle recouvrira les centres des 10 couronnes.

**Bonnes solutions de P. Bornsztein de Courdimanche (France) et de J. Finoulst de Diepenbeek.**

**Progression** Problème n°234 de *Mathématique et Pédagogie* n°126.

*Déterminer les entiers positifs distincts $a$, $b$, $c$ tels que $a+b+c$, $ab+bc+ca$, $abc$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.*

**Solution de P. Dassy de Liège.**

Puisque chaque terme est cyclosymétrique en $a$, $b$, $c$ et que $a$, $b$, $c$ sont distincts, on peut supposer $a < b < c$.
$(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ est un progression arithmétique
ssi $a+b+c+abc = 2ab+2bc+2ca$
ssi $a+b+c+\frac{1}{3}abc+\frac{1}{3}abc+\frac{1}{3}abc-2ab-2bc-2ca = 0$

ssi $(a+b+c)+ab(\frac{1}{3}c-2)+bc(\frac{1}{3}a-2)+ca(\frac{1}{3}b-2)=0$.
Pour réaliser cette égalité, il faut que l'un au moins des trois derniers termes soit négatif.
Comme $a<b<c$, on a $\frac{1}{3}a-2<0$ donc $a<6$, ce qui limite les recherches à $a=1,2,3,4$ ou $5$.

Examinons ce que vaut l'expression $a+b+c+abc-2ab-2bc-2ca$ pour ces différentes valeurs de $a$.

1. Si $a=1$, alors $1+b+c+bc-2b-2bc-2c=0$
   $bc+b+c=1$
   (impossible, $b$ et $c$ étant des entiers positifs.)
2. Si $a=2$, alors $2+b+c+2bc-4b-2bc-4c=0$
   $3b+3c=2$
   $b+c=\frac{2}{3}$
   (impossible, $b$ et $c$ étant des entiers.)
3. Si $a=3$, alors $3+b+c+3bc-6b-2bc-6c=0$
   $bc-5b-5c+3=0$
   $bc-5b-5c+25=22$
   $(b-5)(c-5)=22$
   d'où $(b-5=1$ et $c-5=22)$ ou $(b-5=2$ et $c-5=11)$
   $(b=6$ et $c=27)$ ou $(b=7$ et $c=16)$
   ce qui conduit à $(a,b,c)=(3,6,27)$ ou $(3,7,6)$.
4. Si $a=4$, alors $4+b+c+4bc-8b-2bc-8c=0$
   $2bc-7b-7c+4=0$
   $4bc-14b-14c+49=41$
   $(2b-7)(2c-7)=41$
   d'où $2b-7=1$ et $2c-7=41$
   $b=4$ et $c=24$
   comme $a=4$, notre hypothèse $a<b$ n'est pas respectée et on n'a pas une progression arithmétique.
5. Si $a=5$, alors $5+b+c+5bc-10b-2bc-10c=0$
   $3bc-9b-9c+5=0$
   $bc-3b-3c=-\frac{5}{3}$ (impossible, $b$ et $c$ étant entiers)

Il y a donc deux solutions (3, 6, 27) et (3, 7, 16).
Si on considère les permutations circulaires de $a$, $b$, $c$, on a 12 solutions.

**Bonnes solutions de P. Bornzstein de Courdimanche, M. Coyette de Rixensart, P. Dekeyser de Uccle, J. Finoulst de Diepen-**

**beek, A. Paternottre de Boussu, J. Rasse de Mean, J.-G. Segers de Liège et H.-J. Seiffert de Berlin.**

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir au plus tard le 1er mars 2001. Je vous rappelle de rédiger les différentes solutions sur des feuilles séparées et de mettre votre nom sur chacune d'elles, ceci pour faciliter mon classement.

**241. Cercles et quadrilatères.**

On donne un rectangle $ABCD$ avec $AC$ de longueur $e$. Quatre cercles ont pour centres $A$, $B$, $C$, $D$ et pour rayons $a$, $b$, $c$, $d$ respectivement ; $a + c = b + d < e$. Prouver qu'il existe un cercle inscriptible dans le quadrilatère dont les côtés sont les deux tangentes communes extérieures aux cercles de centres $A$ et $C$ et les deux tangentes communes extérieures aux cercles de centres $B$ et $D$.

**242. Divisibilité.**

Prouver que parmi 39 nombres entiers positifs quelconques, il en a au moins un dont la somme des chiffres est divisible par 11.

**243. Minimum.**

Chacun des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vaut $-1$, 0 ou 1.
Quel est le minimum de la somme de tous les $x_i x_j$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$ ?
La réponse reste-t-elle la même si les $x_i$ sont des réels satisfaisant $0 \leqslant |x_i| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ ?

---

Un ingénieur et un matheux sont en train de lire une récente communication d'un physicien célèbre concernant un théorème particulièrement ardu : il s'agit d'un résultat seulement valable dans des espaces de dimension 7 et plus ... Le mathématicien savoure sa lecture, alors que l'ingénieur montre tous les signes de l'incompréhension la plus totale. Il a beau se forcer ; il ne récolte qu'un douloureux mal de tête. Enfin, le matheux termine, extasié, ce texte fondateur et ne peut s'empêcher de partager son enthousiasme avec l'ingénieur.

L'ingénieur dit : ≪ Comment pouvez-vous comprendre ce charabia ? ≫

Le matheux : ≪ Simple, c'est que j'ai visualisé ce que ce théorème nous disait. ≫

L'ingénieur : ≪ Mais comment diable pouvez-vous visualiser quelque chose dans la septième dimension ? ≫

Le matheux : ≪ Facile, je l'ai d'abord compris en dimension $n$, et puis j'ai fait $n = 7$ ! ≫

*Mathématique et Pédagogie* n° 129, 64–69, 2000

# Revue des Revues

**Math-Ecole**,n° 179, octobre 1997.

Au sommaire :

- **Jaquet F.**, *Editorial.*
- **Sarcone G. et Waeber M.J.**, *Voyage au centre de la géométrie.*
  Les puzzles sont un outil didactique idéal pour la modélisation de concepts. Les puzzles Quadrix ont déjà été étudiés dans les numéros 173 et 177 de Math-Ecole. Dans cet article, les auteurs nous font découvrir d'autres facettes de ces puzzles en répondant aux questions suivantes :

  1. quel est le nombre minimal de pièces pour créer ce genre de puzzles ?
  2. pouvons-nous faire disparaître une image à la place d'une surface ?
  3. existe-t'il d'autres sortes de puzzles permettant la disparition d'un élément ?

  De nombreux exemples de puzzles paradoxaux sont présentés et étudiés.
- **Brêchet M.**, *Agrandissement et échelle : quelles difficultés pour les élèves ?*
  Un grand nombre de concepts interviennent dans les notions d'agrandissement et d'échelle. Deux problèmes sont proposés à des élèves de 13 et 15 ans. Le travail en classe ainsi que les productions des élèves sont décrits et analysés. L'auteur relève quelques obstacles inhérents à la construction des savoirs.
- **Chastellain M.**, CABRidées : *Histoire de « parc aux mètres ».*
  L'auteur présente un problème ouvert pouvant être traîté de manière algébrique ou à l'aide d'une construction géométrique. Dans ce dernier cas, « Cabri-géomètre » apporte une aide géniale.
- **Pochon L.-O.**, *Regards sur le calcul mental.*
  Le calcul mental figure toujours au programme de l'école primaire mais la façon de l'aborder a beaucoup évolué, de nombreuses propositions didactiques ont vu le jour. Après un tour d'horizon de la littérature traîtant du calcul mental, l'auteur organise des données utiles à la compréhension de ce sujet.
- **Worpe J.**, *Mathématiques 1P : du nouveau pour les enfants, pour les enseignants, pour les parents.*

- **Calame J.-A.**, *Formation initiale en mathématiques et nouveaux moyens d'enseignement.*
De nouveaux moyens d'enseignement sont mis en place à l'école primaire. Cette réforme est plus pédagogique que mathématique. L'auteur nous livre quelques réflexions sur l'impact que cette réforme aura sur la formation initiale et permanente des maîtres.
- **Jaquet F.**,*Découpage de carrés en triangles semblables.*
Le problème du nombre de découpages d'un carré en six triangles semblables a déjà été étudié dans le numéro n°175 de Math-Ecole. Y a-t'il vraiment 97 solutions différentes comme le dit Nob Yoshigahara ? L'auteur présente l'inventaire de ses 93 solutions classées en six familles.

**Math-Ecole**,n° 180, décembre 1997.

Au sommaire :

- **Calame J.-A.**, *Editorial : Entre réalité et plaisir ... un peu de notre humanité !*
- **Jacquet F.**,*Sixième rallye mathématique transalpin.*
Les premières journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin se sont tenues à Brigues fin octobre 1997. Le thème était « Concours mathématiques : quels profits pour la didactique ? ». L'article fait le point sur les cinq premières années de ce rallye.
- **Chastellain M.**,*Le potager d'Aloïs.* Le problème suivant a été proposé à des élèves de troisième année du secondaire :
« *Comme chaque printemps, Aloïs modifie l'emplacement de son jardin potager. Cette année il décide de l'implanter le long de la façade sud du rual, de façon à ce qu'il soit rectangulaire. Pour y parvenir, il dispose d'une clôture de 22m. A quelle distance de la façade va-t'il planter ses deux piquets d'angle pour obtenir une aire maximale ?* ».
- **CosandeyJ.**, *Repérer les compétences des élèves entrant en 1P.*
L'auteur nous rend compte d'un test proposé à des élèves entrant en première année de l'école primaire : « L'enfant recourt-il spontanément au dénombrement pour résoudre un problème ? ».
- **Calame J.-A.**, *Egalités arithmétiques.* L'auteur étudie longuement d'étonnantes égalités arithmétiques :

$$\boxed{\begin{array}{l} 618 + 753 + 294 = 816 + 357 + 492 \\ 672 + 159 + 834 = 276 + 951 + 438 \\ 654 + 132 + 879 = 456 + 231 + 978 \\ 852 + 174 + 639 = 258 + 471 + 936 \end{array}}$$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $618^2$ | + | $753^2$ | + | $294^2$ | = | $816^2$ | + | $357^2$ | + | $492^2$ |
| $672^2$ | + | $159^2$ | + | $834^2$ | = | $276^2$ | + | $951^2$ | + | $438^2$ |
| $654^2$ | + | $132^2$ | + | $879^2$ | = | $456^2$ | + | $231^2$ | + | $978^2$ |
| $852^2$ | + | $174^2$ | + | $639^2$ | = | $258^2$ | + | $471^2$ | + | $936^2$ |

Dans chacune de ces égalités, on peut supprimer les chiffres des centaines de tous les termes, ou les chiffres des dizaines, ou ceux des unités, sans altérer leur propriété d'être vraie. Existe-t'il d'autres égalités de ce type ? Comment les construire ? Dans cet article, l'auteur répond longuement à ces questions.

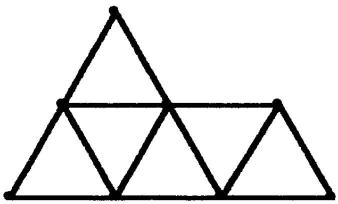
- **Chastellain M.**, *Le pote âgé Aloïs !*
  L'auteur étudie le problème du potager d' Aloïs à l'aide de « Cabri-géomètre ».
- **Snoeckx M.**, *Le jeu de la boîte.*
  A partir d'une situation conçue par Guy Brousseau pour l'enseignement de la soustraction, l'auteur a construit une situation-jeu pour des classes de 2e à 4e primaire. Cet article présente la situation et son expérimentation dans les classes.
- **Béguin Th.**, *Dies academicus.*
  Dans cet article, il est question de l'enseignement universitaire. Ses objectifs, son rôle dans la société et le sens de sa mission sont abordés.
- **Odiet D.**, *Faux extraits de Racine.*
  Compte rendu du congrès 1997 de la SBPMef.
- Notes de lectures.
  - **Julo J.**, *Représentation des problèmes et réussites en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*, Rennes, P.U.R. (collections « Psychologies »), 1995.
  - **Desmarets A., Jadin A., Rouche N. , Sartiaux P.**, *Oh, moi les maths ...*, Le Roeulx – Hainaut, ED. Talus d'approche, 1997.

**Math-Ecole**, n° 181, février 1998.

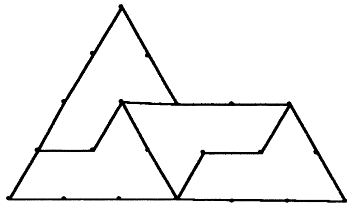
Au sommaire :

- **Jaquet F.**, *Editorial.*
  Le nouveau « Plan d'études romand de mathématiques pour les degrés de 1 à 6 » a été adopté en 1997. L'auteur présente ce nouveau plan d'études dans lequel figure explicitement la résolution de problèmes.
- 6e Rallye mathématique transalpin 1998.
  Ce Rallye est une compétition entre classes et s'adresse aux élèves de 6 à 14 ans. Les problèmes de la première épreuve sont présentés.

– **Jacquérioz M. et Rastello C.**, *Quel est le niveau de mathématiques nécessaire dans la vie ?*
L'auteur présente les thèses centrales de son mémoire.
– **Castellain M.**, *CABRidées : A vous faire monter la pression !*
≪ Est-il possible de représenter, par une construction appropriée à l'aide de ≪ Cabri-géomètre ≫ la pression qui s'exerce en n'importe quel point d'un liquide ? ≫. L'auteur présente les étapes essentielles de la recherche dont la question ci-dessus est à l'origine.
– **Drouin F.**, *Des sphinx à l'échelle ≪ n ≫.*
Le sphinx est une figure formée de 6 triangles équilatéraux disposés come ci-dessous (sphinx $S_1$) :



Sphinx $S_1$



Sphinx $S_2$

Un sphinx est une figure qui peut être pavée par des figures qui lui sont semblables. Par exemple, le sphinx $S_2$ est pavé avec quatre petits sphinx $S_1$.
L'auteur étudie les problèmes suivants :

1. De combien de façons peut-on paver un sphinx avec neuf mini-sphinx $S_1$ ?
2. De combien de façons peut-on paver un sphinx à l'aide de seize micro-sphinx $S_1$ ?

– **Brêchet M.**, *Histoire d'étoiles.*
Les ≪ fractoiles ≫ permettent d'obtenir le ≪ flocon de neige ≫ du mathématicien Helge Von Koch. L'activité, longuement décrite dans cet article, s'adresse en priorité à des élèves de quatorze ans et plus. De nombreuses notions peuvent être abordées à cette occasion : construction de polygones, limite d'une suite de nombres, ...
– **Jaquet F.**, *Le partage du carré : suite et fin.*
Le problème du partage d'un carré en six triangles semblables a déjà été étudié dans Math-Ecole (numéros 175, 179 et 180). Quatre nouvelles solutions sont présentées. Jusqu'à présent, 97 solutions ont été trouvées. Y-en-a-t'il d'autres ?
– **Pochon L.-O.**, *Le coin du net.*

- http://forum.swarthmore.edu/electronic.newsletter/
- http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/

Ce dernier site remarquable est celui des archives d'histoire des mathématiques « Mac Tutor History of Mathematics Archive ».

– *Revue des revues.*
  Le numéro 26 de la revue PRATIQUES Math est analysé. Cette revue française se veut un outil d'échanges entre enseignants, elle contient de nombreuses suggestions pratiques pour la classe.
– *Le kangourou des mathématiques.*

M. Frémal

**Bulletin de l'APMEP**, N°429, Mai-Juin 2000.

Dans ce numéro, on trouve successivement :

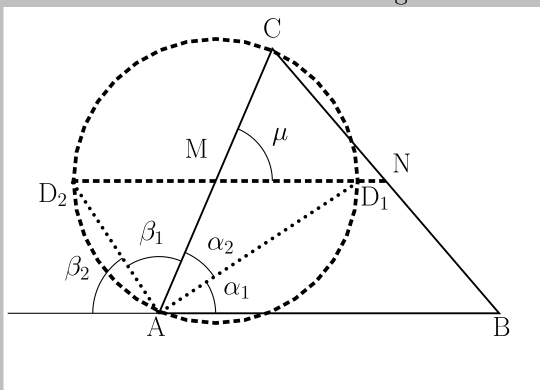
– *Il est parti, nous restons.*
  Le dernier éditorial de Catherine Dufossé en tant que Présidente de l'APMEP puisqu'elle cède le relais à Rémi Belœil. Il s'agit d'un au revoir réjoui à un ministre qui n'a guère montré de chaleur vis-à-vis des enseignants. Mais c'est, en fin de compte et surtout, un regard de satisfaction sur la vie de l'association qui réjouit l'auteur.
– **ERIC TROUILLOT**, *Un jeu de calcul.*
  Il s'agit d'une présentation succincte d'un jeu utilisant des dés, et qui a pour objectif de faire pratiquer le calcul sous trois formes essentielles : le calcul mental, le calcul à la main et le calcul à la machine.
– **RICHARD CHÉRY**, *Une sortie pédagogique.*
  L'article reprend le travail présenté lors de l'exposition « Mathématiques Grandeur Nature » tenue aux journées nationales de Gérardmer. Il montre les intérêts pédagogiques d'une sortie organisée avec un classe de sixième ($\sim$ 11 ans). Des murs ornés de rectangles, losanges, carrés et demi-cercles déclenchent des recherches et des découvertes inattendues.
– **JEAN-PIERRE RICHETON**, *Une option Sciences en seconde ($\sim$ 15 ans) . . . Pourquoi ?*
  Il s'agit de la contribution de l'auteur à l'appui d'une demande de création de l'option citée.
– Un dossier « Mathématiques et Informatique », regroupe des articles qui traitent des problèmes liés au développement des outils informatiques et à leur introduction dans les écoles. Michel Merle donne son éclairage sur l'effet du développement des moyens de calcul. Jean-Michel Jolion montre que l'impact de l'outil informatique sur l'ensei-

gnement des mathématiques est tout à fait réel et peut être source de profit pour cet enseignement. Roger Cuppens insiste sur la nécessité de changer l'enseignement des mathématiques en vue d'intégrer les technologies nouvelles. Gerard Kuntz défend l'idée que les nouvelles technologies de l'information soient réellement mises au service de tous les élèves et récuse la notion de cyber-école. Jean-Baptiste Lagrange insiste sur le « chantier » qui est en train de s'ouvrir et signale les nouvelles responsabilités de l'enseignant et de l'élève. Serge Hocquenghem traite de la différence qui peut exister pour une notion envisagée du point de vue mathématique ou du point de vue informatique. Antoine Petit émet quelques réflexions sur l'introduction d'enseignements d'informatique dans les lycées. Ce dossier particulièrement copieux devrait intéresser tous les passionnés du sujet.

Cette livraison du bulletin de l'APMEP est alors complétée par les rubriques récurrentes : avis de recherche, les problèmes, la vie de l'association, etc.

C. Villers

Saviez-vous que les intersections des cercles construits avec les côtés d'un triangle comme diamètre et des droites joignant les milieux des côtés du triangle appartiennent aux bissectrices des angles du triangle ?




$\mu = \alpha_1 + \alpha_2$ (angles correspondants)
$\mu = 2\alpha_2$ (angle au centre double de l'angle inscrit)
donc $\alpha_1 = \alpha_2$ et $AD_1$ est la bissectrice intérieure de $\widehat{CAB}$.
D'autre part, $\alpha_2 + \beta_1 = 90°$ (triangle dans un demi-cercle)
donc $AD_2$ est la bissectrice extérieure de $\widehat{CAB}$.

*Mathématique et Pédagogie* n° 129, 70–71, 2000

# Bibliographie

**Introduction à l'automatique, Volume 2 : systèmes discrets et échantillonnés**, par R. Hanus et P. Bogaerts, *De Boeck Université, Collection : Bibliothèque des Universités*, 304 pages.

Cet ouvrage est une introduction à l'automatique et est consacré aux systèmes discrets et échantillonnés, les systèmes continus faisant l'objet d'un autre tome rédigé par les mêmes auteurs (dans le même esprit) et paru chez le même éditeur. Une particularité intéressante de ce travail est de fournir aux lecteurs les notions de base leur permettant de bien saisir en profondeur les objectifs et méthodes de l'automatique, en présentant les démonstrations mathématiques rigoureuses des résultats cités, en fournissant également des outils pratiques d'analyse et de synthèse des systèmes utilisables par l'ingénieur sur le terrain et en illustrant par des nombreux exemples théoriques et pratiques. Ce livre s'adresse à un public assez ciblé composé essentiellement des professeurs et étudiants d'un deuxième cycle universitaire en sciences appliquées (agronomie, chimie, biotechnologie) et des écoles d'ingénieurs. Il présuppose des connaissances mathématiques dépassant le niveau de l'enseignement secondaire supérieur classique : pour lire avec fruit cet ouvrage, il convient en effet d'être à l'aise avec la théorie des variables complexes (transformées de Laplace et de Fourier), de l'algèbre linéaire, et avoir des notions des systèmes analogiques, logiques et numériques.

J. Bair

**Mathématiques de compétition, 112 problèmes corrigés**, par Abderrahim Ouardini, *Editions Ellipses, rue Bargues, 32 à 75740 Paris*

Ce livre d'environ 132 pages propose une série d'exercices (112) dont les difficultés sont variables et qui sont accompagnés de leurs solutions. Il est précédé d'un index des notations utilisées et se termine par les énoncés de 48 énoncés (sans solution) et par une annexe contenant quelques théorèmes importants utilisés systématiquement dans la résolution de la plupart des exercices. Les problèmes résolus sont répartis en quatre chapitres couvrant respectivement l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Tous ces énoncés sont originaux et devraient d'ailleurs retenir l'attention et l'intérêt des lecteurs. Comme l'annonce l'auteur, ce recueil s'adresse à ceux qui participent à des compétitions (de haut niveau) dans le domaine des mathématiques, aux enseignants qui souhaitent diversifier leur enseignement en proposant des exercices non triviaux ainsi qu'aux futurs étudiants qui se destinent à un enseignement supérieur en mathématiques. La présentation est soignée, la mise en page sobre est parfaitement lisible.

Format $17cm \times 26cm$, broché. Prix non connu.

C. Villers

---

# 15e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

## 1. Comment organiser un quart de finale scolaire ?

**Les participants**

Tous les élèves de votre établissement peuvent disputer les quarts de finale scolaires. Sept participants au minimum par catégorie sont requis pour organiser un quart de finale. Si ce minimum n'est pas atteint, les élèves concourent individuellement.

Même s'il a participé à des quarts de finale scolaires, un élève peut néanmoins participer individuellement à l'aide des bulletins se trouvant dans *Math-Jeunes* pour les catégories CM, CI, C2 et LI. Des bulletins sont également disponibles auprès de **la FFJM - B.P.157 - 7700 MOUSCRON**.

**Les catégories scolaires**

- **CM** : écoliers de 4e et 5e primaire
- **CI** : élèves de 6eprimaire et 1re secondaire
- **C2** : élèves de 2e et 3e secondaire
- **LI** : élèves de 4e, 5e et 6e secondaire

**Le calendrier**

- **Phase 1** : quarts de finale jusqu'au 31 janvier 2001
- **Phase 2** : demi-finales régionales le 17 mars 2001
- **Phase 3** : finales régionales le 12 mai 2001
- **Phase 4** : finale internationale fin août 2001

**Les modalités**

Il vous suffit de demander un dossier de participation à **FFJM - B.P. 157 - 7700 MOUSCRON.** Vous trouverez ci-dessous classés par ordre de difficulté croissante :

- 9 énoncés de quarts de finale fermés pour les 4$^{\text{e}}$ et 5$^{\text{e}}$ primaire
- 10 énoncés pour les 6$^{\text{e}}$ primaire et le secondaire inférieur (*collèges*)
- 10 énoncés pour le secondaire supérieur (*lycées*)

Ils servent à l'épreuve de qualification, fixée au même moment pour tout votre établissement, épreuve à l'issue de laquelle vous corrigez les réponses (fournies également). Vous choisissez à votre guise : date, nombre de sujets, coefficients, durée, mode de qualification, etc. Une seule contrainte : les résultats doivent parvenir à la FFJM le 31 janvier 2001 au plus tard. Vous ne renvoyez aucune réponse à la FFJM. Seul le bordereau de retour qui donne la liste des qualifiés de l'établissement est à retourner.

**Le centre de demi-finale**

Voici la liste provisoire des centres belges : Ath, Bruxelles, Hannut, Liège, Mouscron, Namur, Thuin et Virton.

Les personnes inscrites sur le bordereau doivent pouvoir se déplacer le samedi 17 mars 2001 dans le centre de demi-finale choisi. A ce stade de l'épreuve la cotisation FFJM doit être acquittée : catégorie CM : 175F, catégorie CI et C2 : 350F et catégorie LI : 450F. La finale belge est déjà dotée de nombreux prix.

**Questionnaire**

**Le concours ne vous intéresse pas ?**

Utilisez ces jeux-problèmes pour une activité collective dans vos classes, vos cours d'éducation mathématique, clubs mathématiques .... Veuillez attendre la date limite du 31 janvier 2001 pour les utiliser à votre guise.

**Le concours vous intéresse ?**

Demandez le dossier gratuit de participation à :

FFJM - B.P.157 - 7700 MOUSCRON ou par télécopie au 056 33 14 53 ou par courrier électronique : andre.parent@pi.be

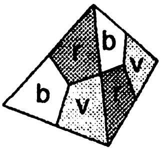
Vous y trouverez une information plus détaillée, les questions (celles ci-dessous), les réponses, le bordereau de retour ...Dans la revue *Math-Jeunes* vous trouverez le questionnaire individuel de participation. N'oubliez pas d'abonner ou de réabonner vos élèves.

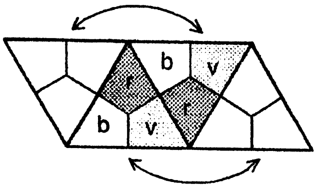
Visitez le site internet : **www.ping.be/ffjm**

# 2. Quarts de finales scolaires (Cours moyen) 2001

### 1. La pyramide M. Tricolor

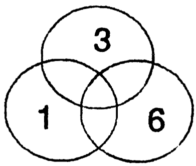
Monsieur Tricolor a la manie de tout peindre en trois couleurs. Il a réalisé une superbe pyramide à base triangulaire et il a peint chaque face à l'aide de trois couleurs : blanc ($b$), vert ($v$) et rouge ($r$). Il s'est arrangé pour que deux parties peintes de la même couleur puissent éventuellement se toucher par un sommet (par un point) mais jamais par un côté (par un segment). Sur le patron de la pyramide (c'est-à-dire sur la pyramide ≪ mise à plat ≫), **complétez le coloriage de M. Tricolor à l'aide des lettres *b*, *v* et *r*.**




### 2. Les 7 nombres de Mathilde

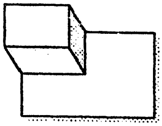
Mathilde a tracé trois ovales. Elle remarque que ces trois ovales ont créé sept régions fermées. Elle a placé les nombres 1, 3 et 6 dans trois de ces régions et se demande s'il est possible de placer 2, 4, 5 et 7 de telle sorte que les nombres contenus dans chaque ovale réalisent toujours le même total. **Aidez Mathilde à terminer.**

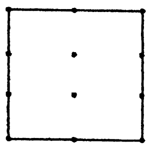



### 3. Le pliage de Mathias

A l'aide d'une seule feuille de papier rectangulaire, Mathias a réalisé la forme représentée ci-dessous à gauche. Il a seulement donné deux coups de ciseaux, il a fait trois plis et il n'a rien jeté. Le dessin de droite représente une feuille analogue à celle utilisée par Mathias.

**Sur ce dessin, indiquez par des traits continus l'emplacement des coups de ciseaux, et par des traits en pointillé l'emplacement des plis nécessaires pour réaliser la forme de Mathias.**





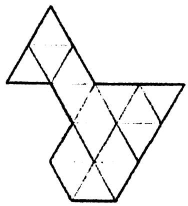
### 4. Le jeu du calendrier

Mathilde joue au jeu suivant. Avec un crayon, elle pointe un jour sur le calendrier, puis elle continue en respectant la règle suivante : si le jour pointé est un lundi, elle avance d'un jour (elle pointe le lendemain, qui est donc un mardi) ; si le jour pointé est un mardi, elle avance de trois jours si le jour pointé est un mercredi, elle recule de deux jours ; si le jour pointé est un jeudi, elle recule d'un jour ; si le jour pointé est un vendredi, elle avance de deux jours si le jour pointé est un samedi, elle avance de quatre jours si le jour pointé est un dimanche, elle recule de trois jours.

Le premier jour pointé par Mathilde est le samedi 9 septembre 2000. **Quel sera le 100$^{e}$ jour pointé par Mathilde ?**

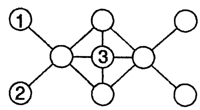
### 5. Le découpage du canard

Pour le goûter, Mathias et Mathilde doivent se partager un gâteau sablé en forme de canard. Comme ils aiment la difficulté, ils veulent le partager en deux parts de même aire bien sûr, mais aussi de même forme. Le découpage doit suivre les lignes du dessin, et pour faire coïncider les deux formes, on a le droit de retourner un des deux morceaux. **Indiquez le découpage à l'aide d'un trait épais.**



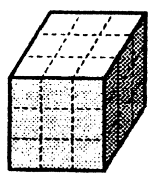
### 6. Les neuf nombres

Sur la figure ci-contre, il est possible de compléter les disques vides avec les nombres de 4 à 9, pris chacun une seule fois, de façon que chaque alignement de trois disques, matérialisé par un segment, totalise 18. **Terminez le remplissage.**

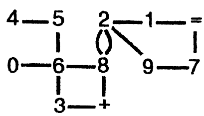



### 7. Cube à découper

L'oncle de Mathias, qui est menuisier, doit découper le gros cube en bois représenté ci-contre en 27 petits cubes. Il dispose d'une scie très perfectionnée et peut déplacer les morceaux et les redisposer comme il le veut entre deux coupes. **Mais combien de coupes lui seront nécessaires, au minimum, pour obtenir les 27 petits cubes ?**



### 8. L'addition codée




Le schéma ci-contre correspond au codage d'une addition :

—— + —— = ——

Pour effectuer le codage, on a simplement relié deux chiffres ou symboles lorsqu'ils se suivent dans l'écriture ≪ en ligne ≫ de cette addition. L'écriture d'aucun nombre ne commence par un zéro. **Retrouvez l'addition codée.**

**9. Les cent multiples**

Mathilde, qui n'a vraiment rien à faire, a écrit en toutes lettres sur une feuille de papier les cent premiers multiples de 2001 : deux mille un ; quatre mille deux ; six mille trois, huit mille quatre ; dix mille cinq ; douze mille six ...Mathias, qui passait par là et n'avait, lui non plus, rien de spécial à faire, s'amuse à recopier ces 100 nombres en les triant par ordre alphabétique. **Quel est le premier nombre de la liste de Mathias ?**

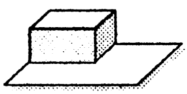
# 3. Quarts de finales scolaires (collèges) 2001

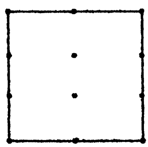
**1. Le jeu du calendrier**

Voir le problème 4 du questionnaire ≪ Cours moyen ≫ ci-dessus.

**2. Le pliage de Mathias**

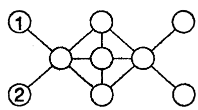
A l'aide d'une seule feuille de papier rectangulaire, Mathias a réalisé la forme représentée ci-contre. Il a seulement donné deux coups de ciseaux, il a fait trois plis et il n'a rien jeté. Le dessin de droite représente une feuille analogue à celle utilisée par Mathias. Sur ce dessin, **indiquez par des traits continus l'emplacement des coups de ciseaux, et par des traits pointillés l'emplacement des plis nécessaires pour réaliser la forme de Mathias**





**3. Les neuf nombres**

Sur la figure ci-contre, il est possible de compléter les disques vides avec les nombres de 4 à 9, pris chacun une seule fois, de façon que chaque alignement de trois disques, matérialisé par un segment, totalise 18. **Terminez le remplissage.**



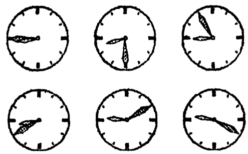

**4. Cube à découper**

Voir le problème 7 du questionnaire ≪ Cours moyen ≫ ci-dessus.

### 5. Les mille multiples

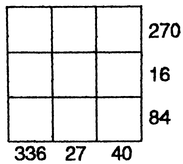
Mathilde, qui n'a vraiment rien à faire, a écrit en toutes lettres sur une feuille de papier les mille premiers multiples de 2001 : deux mille un ; quatre mille deux ; six mille trois, huit mille quatre, dix mille cinq ; ... Mathias, qui passait par là et n'avait lui non plus, rien de spécial à faire, s'amuse à recopier cas 1000 nombres en les triant par ordre alphabétique. **Quel est le premier nombre de la liste de Mathilde ?**

### 6. Les six pendules



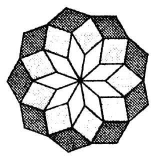
L'une avance de $5min$, une autre avance de $35min$, tandis qu'une troisième retarde de $5min$. Quant aux trois restantes, elles sont arrêtées ! **Quelle heure est-il ?**

### 7. La grille multiplicative



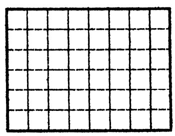

**Remplissez cette grille de neuf cases avec les nombres de 1 à 9**, de telle sorte que les six produits des trois nombres de chaque ligne et de chaque colonne correspondent aux valeurs indiquées sur le dessin.

### 8. L'as des rosaces



Rose Ace a composé la rosace ci-contre uniquement en utilisant trois sortes de losanges.
**Que vaut l'angle aigu d'un des losanges situés le plus à l'extérieur de la rosace ?**

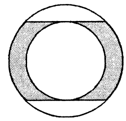
### 9. Le découpage du rectangle



On veut découper un rectangle $6 \times 8$ en plusieurs morceaux. Chaque morceau doit être rectangulaire et constitué d'un nombre entier de petits carreaux. De plus, les morceaux doivent être d'aires toutes différentes.
**Quelle sera, au minimum, l'aire du plus grand morceau, exprimée en carreaux ? Vous dessinerez un découpage correspondant à ce résultat.**

**10. La couronne**

La grand cercle de la figure ci-contre a un rayon égal à $10cm$. Le petit cercle partage le grand disque en deux régions d'aires égales. **Calculez l'aire de la région grisée. Vous donnerez la réponse en $cm^2$ et vous prendrez si besoin est 3, 14 pour $\pi$ et 1, 414 pour $\sqrt{2}$.**



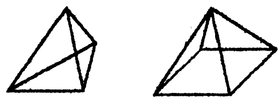
# 4. Quarts de finales scolaires (lycées)2001

**1. Les 2001 multiples**

Mathilde, qui n'a vraiment rien à faire, a écrit en lettres sur une feuille de papier les 2001 premiers multiples de 2001 : deux mille un ; quatre mille deux ; six mille trois, huit mille quatre ; dix mille cinq ; ... Mathias, qui passait par là et n'avait lui non plus, rien de spécial à faire, s'amuse à recopier ces 2001 nombres en les triant par ordre alphabétique. **Quel est le premier nombre de la liste de Mathias ?**

**2. Les deux pyramides**

On dispose de deux pyramides, l'une à base triangulaire (un tétraèdre), et l'autre à base carrée. Toutes les arêtes de ces deux pyramides ont la même longueur. On colle ensemble ces deux pyramides par une de leurs faces triangulaires, les deux triangles en contact coïncidant parfaitement. **Quel est le nombre de faces du solide ainsi obtenu ?**



**3. La couronne**

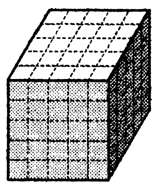
Voir le problème 10 du questionnaire « Cours moyen » ci-dessus.

**4. Les deux voisins**

Les nombres 189 et 190 sont deux entiers consécutifs tels que la somme des chiffres du plus petit est divisible par 6 tandis que la somme des chiffres du plus grand est divisible par 5. **Quel sont les deux suivants ?**

**5. Cube à découper**

Vous devez découper le gros cube en bois représenté ci-contre en 125 petits cubes. Vous disposez d'une scie très perfectionnée et vous pouvez déplacer les morceaux et les redisposer comme bon vous semble entre deux coupes. **Mais combien de coupes vous seront nécessaires, au minimum, pour obtenir 125 petits cubes ?**

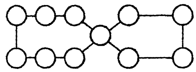


**6. Entre Parenthèses**

Paul doit effectuer le calcul $\frac{(a+b)}{c}$. Il sait que la se correcte est 15. Mais il oublie les parenthèses et trouve 21. Voyant qu'il s'est trompé, il intervertit $a$ et $b$, calcule $\frac{(b+a)}{c}$, mais il oublie à nouveau les parenthèses obtient 24.
**Quels sont les trois nombres $a$, $b$, $c$ ?**

**7. Le grand huit**

Écrivez les nombres de 1 à 11 dans les disques de la figure ci-contre de telle sorte que la différence (prise en valeur absolue) entre deux nombres directement reliés par un segment soit toujours égale à 2 ou à 3.



**8. Les astroports de la FFJM**

La Fédération Futuriste des Joyeux Martiens. a construit des astroports sur la planète Mars. Chaque astroport martien est relié par des lignes régulières à trois autres astroports au plus et on peut aller d'un astroport quelconque de Mars à n'importe quel autre en opérant au plus un changement.
**Quel est le nombre maximal des astroports FFJM ?**

**9. Format presque parfait**

On découpe dans une feuille de papier au format normalisé $21cm \times 29,7cm$, parallèlement à un côté, une bande d'une certaine largeur. Cette bande rectangulaire jouit de la propriété suivante. Si on la coupe en deux milieux, on obtient deux moitiés qui ont le même rapport longueur / largeur que le rectangle restant.
**Quelle est la largeur de la bande découpée ? On donnera la réponse en millimètres, arrondie au millimètre le plus proche.**

**10. L'ancêtre**

Julien vient de découvrir un nombre étonnant : pour multiplier par 7, il suffit de déplacer son chiffre des unités pour le mettre devant le chiffre le plus à gauche !
**Trouvez le plus petit des nombres ayant cette propriété.**

---

Ce numéro de *Mathématique et Pédagogie* est le dernier du deuxième millénaire. Nous vous souhaitons un excellent vingt-et-unième siècle et vous invitons à régler dès à présent votre cotisation à la SBPMef ou votre abonnement à notre revue.

**LE COIN DU TRESORIER**

# Tarifs (septembre 1999)

## Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent Mathématique et Pédagogie, SBPM-Infor et Math-Jeunes.

Belgique : 807 BEF/20,00 EUR (Etudiants : 605 BEF/15,00 EUR),
Union Européenne : 36,00 EUR,
Europe hors Union Européenne : 38,00 EUR,
Hors Europe :
– Envoi prioritaire : 72,00 EUR,
– Envoi non prioritaire : 42,00 EUR.

## Abonnement à Mathématique et Pédagogie

Belgique : 1049 BEF/26,00 EUR, Union Européenne : 32,00 EUR,
Europe hors Union Européenne : 33,00 EUR,
Hors Europe :
– Envoi prioritaire : 46,00 EUR,
– Envoi non prioritaire : 34,00 EUR.

## Abonnement à Math-Jeunes Junior et Math-Jeunes

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, inférieur et supérieur, sont idéalement pris par l'intermédiaire d'un professeur.
Abonnement isolé à une des deux revues (4 numéros) :

- Belgique : 200 BEF/4,96 EUR,
- Union Européenne : 9,2 EUR,
- Europe hors Union Européenne : 10,2 EUR,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 20,4 EUR,
  - Envoi non prioritaire : 11,4 EUR.

Abonnement isolé aux deux revues (7 numéros) :

- Belgique : 350 BEF/8,68 EUR,
- Union Européenne : 16,5 EUR,
- Europe hors Union Européenne : 17,17 EUR,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 35,6 EUR,
  - Envoi non prioritaire : 20 EUR.

## Abonnements groupés (au moins 5) à *Math-Jeunes* et *Math-Jeunes Junior*.

Abonnements groupés à une des deux revues :
- Belgique : 150 BEF/3,72 EUR,
- Union Européenne : 6 EUR,
- Europe hors Union Européenne : 7,6 EUR,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 15,2 EUR,
  - Envoi non prioritaire : 8,6 EUR.

Abonnements groupés aux deux revues :
- Belgique : 265 BEF/6,57 EUR,
- Union Européenne : 10,6 EUR,
- Europe hors Union Européenne : 13,4 EUR,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 26,6 EUR,
  - Envoi non prioritaire : 15,1 EUR.

## Vente d'anciens numéros de Mathématique et Pédagogie

Avant 1997 : 30 BEF (0,74 EUR)/N° + frais de port (1),
Année 1998 : 100 BEF (2,48 EUR)/N° + frais de port (1).

## Vente d'anciens numéros de Math-Jeunes

Avant 1997/1998 : 10 BEF (0,25 EUR)/N° + frais de port (1),
Année 1997/1998 : 20 BEF (0,5 EUR)/N° + frais de port (1).

## Brochures

Le prix d'une brochure s'obtient en additionnant le prix de base mentionné dans le tableau 1 aux frais de port mentionnés dans le tableau 2 en fonction de la catégorie postale à laquelle appartient la brochure. Lorsqu'un prix réduit est mentionné, ce prix est réservé aux membres de la SBPMef et aux étudiants.

| Tableau 1 : Prix de base | Prix plein | Prix réduit | Cat. post. |
|---|---|---|---|
| **Séries RENOVER** | | | |
| Série 1 (n° 1 au n° 6 épuisés, | 50 BEF | | |
| reste n° 12) | 1,24 EUR | / | 2 |
| Série 2 (n° 7 au n° 11 et n° 13) | 220 BEF | | |
| | 5,45 EUR | / | 5 |
| Série 3 (n° 14) | 220 BEF | | |
| | 5,45 EUR | / | 3 |
| Les 3 séries (n° 7 au n° 14) | 300 BEF | | |
| | 7,44 EUR | / | 6 |
| **Dossiers d'explorations didactiques** | | | |
| Dossier 2 (Autour du plus grand | 75 BEF | 50 BEF | |
| commun diviseur) | 1,86 EUR | 1,24 EUR | 4 |
| Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension) | 75 BEF | 50 BEF | |
| | 1,86 EUR | 1,24 EUR | 4 |
| Dossier 5 (Matrices et Produit scalaire | 300 BEF | 250 BEF | |
| | 7,44 EUR | 6,18 EUR | 4 |
| Dossier 6 (Statistiques) | 300 BEF | 250 BEF | |
| | 7,44 EUR | 6,18 EUR | 4 |
| **Olympiades Mathématiques Belges** | | | |
| Tome 3 | 200 BEF | | |
| | 7,96 EUR | / | 3 |
| Tome 4 | 220 BEF | | |
| | 5,45 EUR | / | 4 |
| Tome 3 + Tome 4 | 340 BEF | | |
| | 8,43 EUR | / | 6 |
| **J. Bair, R. Hinnion et D. Justens** | | | |
| Applications économiques au service | 275 BEF | 200 BEF | |
| de la Mathématique | 6,82 EUR | 4,96 EUR | 3 |
| **Jacques Bair** | | | |
| Mathématique et Sport | 200 BEF | 150 BEF | |
| | 4,96 EUR | 3,72 EUR | 3 |
| **François Jongmans** | | | |
| Eugène Catalan, Géomètre sans | 500 BEF | 400 BEF | |
| patrie, ... | 12,39 EUR | 9,92 EUR | 5 |

**Tableau 2 : Frais de port**

| Catégorie | Belgique | Union Européenne | Europe hors Union | Hors Europe, envoi prioritaire | Hors Europe, envoi non prioritaire |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 BEF | 65 BEF<br>1,61 EUR | 70 BEF<br>1,74 EUR | 165 BEF<br>4,09 EUR | 90 BEF<br>2,29 EUR |
| 2 | 25 BEF | 40 BEF<br>0,99 EUR | 45 BEF<br>1,12 EUR | 80 BEF<br>1,98 EUR | 50 BEF<br>1,24 EUR |
| 3 | 40 BEF | 65 BEF<br>1,61 EUR | 70 BEF<br>1,74 EUR | 170 BEF<br>4,21 EUR | 90 BEF<br>2,23 EUR |
| 4 | 60 BEF | 100 BEF<br>2,48 EUR | 130 BEF<br>3,22 EUR | 320 BEF<br>7,93 EUR | 150 BEF<br>3,72 EUR |
| 5 | 80 BEF | 120 BEF<br>2,97 EUR | 130 BEF<br>3,22 EUR | 320 BEF<br>7,93 EUR | 150 BEF<br>3,72 EUR |
| 6 | 100 BEF | 150 BEF<br>3,72 EUR | 230 BEF<br>5,70 EUR | 600 BEF<br>14,87 EUR | 300 BEF<br>7,44 EUR |

**Bulletin de l'APMEP**
Les membres de la SBPMef peuvent, par versement au compte de la SBPMef, s'abonner au bulletin de l'association des professeurs de mathématique de l'enseignement public en France, le prix de l'abonnement est : 1575 BEF. Ils peuvent également, par la même voie, commander des publications de l'APMEP.

Pour effectuer une commande, il vous suffit de verser le montant indiqué sur un des comptes suivants :

**Si vous habitez en Belgique :**
000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons, ou
001-0828109-96 de Math-Jeunes, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons

**Si vous habitez en France :**
Vous pouvez payer en francs français (le prix en francs français est le prix en francs belges, divisé par 6 et arrondi au franc supérieur).
Effectuez votre versement sur le compte
CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef 15 rue de la Halle à B-7000 Mons, Belgique.

**Si vous habitez ailleurs :**
Effectuez de préférence un virement international au compte
CCP (giro) 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons, Belgique.
Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement "giro"), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.

**Adresse de la SBPMef sur internet :**
http ://ceco.umh.ac.be/noel/sbpm.htm
E-mail : sbpm@umh.ac.be