Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression francaise

Secrétariat : Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique)
Tél.-Fax : 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, Web : http://www.sbpm.be

Membres d'honneur : *H. Levarlet, W. Servais (†)*

Conseil d'administration : *J. Bair, M. Ballieu, C. Bertrand, J.-P. Cazzaro, M. Denis-Pêcheur, C. Depotte, C. Festraets-Hamoir, C. Flamant, M. Frémal, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, P. Marlier, J. Miewis, J. Navez, G. Noël, M. Potvliege, F. Pourbaix, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler, C. Van Hooste, C. Villers*

Comité de rédaction de Mathématique et Pédagogie : *J. Bair, M. Biefnot, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pêcheur, C. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, J. Navez, G. Noël, N. Vandenabeele, C. Villers.*

Président : *Ch. Van Hooste*, Chemin de Marbisœul 25, 6120 Marbaix-la-Tour, Tél. 071-217793	**Vice-Président :** *J. Navez*, Rue des Comtes de Salm 3, 6690 Vielsam, Tél. 080-217087
Secrétaire : *M. Frémal*, Rue W. Jamar 311/51, 4430 Ans, Tél. 04-2636817	**Vice-Président et SBPM-Infor :** *C. Villers*, Rue Piérard 29, 7022 Hyon, Tél. 065-338825
Trésorier : *P. Marlier*, Rue de Plainevaux 185/15, 4100 Seraing, Tél.04-3374945	**Administrateur délégué :** *J.-P. Cazzaro*, Rue du Bois d'Havré 21, 7000 Mons, Tél. 065-346229
Mathématique et Pédagogie : *J. Miewis*, Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée, Tél. 04-3431992	**Portefeuille de lecture :** *Ch. Depotte*, Rue de l'Abbaye 24, 7800 Ath, Tél. 068-841989
Math-Jeunes Junior : *A. Paternottre*, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu, Tél. 065-785064	**Math-Jeunes Senior :** *M. Ballieu*, Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine l'Alleud, Tél. 02-3847139
Olympiades nationales : *M. Potvliege*, Avenue des Anciens Combattants 101 Bte 27, 1140 Bruxelles, Tél. 02-7262479	**Olympiades Internationales :** *G. Troessaert*, Route de Neuvillers 58, 6800 Libramont, Tél. 061-224201
Publicité : *M. Denis-Pêcheur*, Rue de la Ferme 11, 5377 Noiseux (Somme-Leuze), Tél. 086-323755	**Secrétariat :** *M-C. Carruana, L. Dejardin*, Rue de la Halle 15, 7000 Mons Tél. 065-373729

Mathématique et Pédagogie

Sommaire

- C. Van Hooste, Éditorial 3

Articles

- J. Segers, Les carrés des carrés 2 5
- M. Coyette, Compter sur les erreurs de calculs afin d'obtenir une bonne réponse. 13
- C. Villers, Bonjour, Monsieur Steiner 29
- C. Radoux, Le déterminant de Hankel construit sur les nombres d'Euler 47
- F. Michel, Un peu de programmation? 55

Rubriques

- Y. Noël-Roch et P. Demin, Dans nos classes 61
- C. Festraets, Olympiades 67
- C. Festraets, Des problèmes et des jeux 75
- P. Marlier, Le coin du trésorier 79

N° 132 Mai-Juin 2001

NOTE

* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
* Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
* Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (LaTeX 2ε, Word) ; les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.
  L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
  Pour les livres :
  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
  Pour les articles :
  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

© SBPM Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Éditorial

C. VAN HOOSTE

Encore et toujours les situations-problèmes !

Une collègue m'écrit : « Lors d'une journée pédagogique organisée (...) par des animateurs pédagogiques, les grandes questions étaient : donnez-nous des exemples de situations-problèmes, d'évaluation des compétences terminales ... La réponse fut : **à vous de les trouver** (sous-entendu, nous n'en avons pas !). Bref, toujours la même situation ; on vote un décret ... aux professeurs de trouver la ou les manières de faire passer les matières et démarches imposées. »

Un autre collègue me dit : « J'aime enseigner par situations-problèmes, mais dans telle classe, ça ne marche pas ! Les élèves y sont faibles et **peu motivés**. »

Il est vrai que ce type de pédagogie pose **un certain nombre de questions**.

Primo. La grande majorité des professeurs aujourd'hui en activité n'ont pas été formés à cette méthode. Par ailleurs, celle-ci vient s'ajouter à d'autres exigences, toujours plus nombreuses, auxquelles sont soumis les enseignants modernes dans un **monde scolaire en perpétuel changement**. Enseignement en spirale, compétences transversales, compétences terminales, projet d'école, etc.

Secundo. Il n'existe que peu de livres de référence sur le sujet ; il y a donc un **vide** assez **angoissant**, naturellement peu propice à faire réussir l'objectif poursuivi.

Tertio. Aller dans le sens de cette pédagogie, c'est **reprendre à zéro** des pans entiers de la matière à enseigner. Or, bon nombre de collègues ont atteint un certain âge et ils ne sont pas vraiment prêts à recommencer leurs préparations de cours. De plus, ils doutent que cette manière de faire soit plus performante que la leur.

Quarto. Pour qu'une **leçon** basée sur une situation qui pose problème aux élèves soit **efficace**, plusieurs conditions doivent, me semble-t-il, être réunies : le problème proposé n'est pas artificiel, il ne requiert pas trop de concepts étrangers à la matière dans laquelle il doit s'intégrer, il sied parfaitement au professeur et est **attirant pour les élèves**. Dès lors, les

situations-problèmes sont **propres à l'enseignant** et dépendent à la fois de la compétence des élèves et de leur motivation.

De ce dernier point, je déduirai qu'il est illusoire de trouver un jour un manuel scolaire qui, d'un bout à l'autre, proposerait des situations-problèmes exploitables par tout enseignant mathématicien devant n'importe quel type de classe. S'il veut **adhérer au principe** de la pédagogie par les problèmes, chacun d'entre nous a l'obligation de **se forger sa propre « bibliothèque » de situations-problèmes**.

Il n'est pas très difficile de fabriquer de tels outils ; il suffit de **résoudre soi-même des problèmes**. Aujourd'hui, l'information est hyper-développée ; les sources du savoir sont abondantes et diversifiées. Celui qui veut se fournir en problèmes n'a qu'à se baisser pour en ramasser à la pelle. Les questions des OMB (éliminatoires, demi-finales, finales), les articles et le rallye-problème de *Math-Jeunes*, la rubrique « **Des problèmes et des jeux** » de *Mathématique et Pédagogie*, le test AIME, les revues *Tangente*, *Cosinus*, ..., les nombreux sites **Internet** consacrés aux problèmes, ... sont autant de pistes pour découvrir de véritables bijoux propices à une mise en situation de nos chers théorèmes.

Et puis, il est toujours possible d'exploiter quelques idées empruntées **chez autrui** : quelques livres existent déjà, des formations s'organisent à droite et à gauche et le **congrès de la SBPMef** se pointe à l'horizon.

Ceci étant le dernier *Mathématique et Pédagogie* de l'année scolaire, je vous souhaite d'ores et déjà de **bonnes vacances** et vous donne rendez-vous à quelques jours de la rentrée de septembre à Charleroi pour notre 27^{e} congrès.

Internet Corner

A propos de l'Internet Corner du n° 131 relatif au dodécaèdre gallo-romain ajouré et bouleté de Tongres, un lecteur nous a signalé un site entièrement consacré aux dodécaèdres, du point de vue historique, mathématique, chimique, artistique, mineralogique, etc...

`http://www.multimania.com/dodeca/histoire.htm`

Les carrés des carrés 2

J. SEGERS,

Réflexions sur le carré magique 3×3 (C.M.)

1. Un nouveau problème.

Le problème suivant est beaucoup plus compliqué ([1]) , et autant que je sache, non encore résolu : construire un C.M. dont les neuf termes soient des carrés de nombres naturels distincts, ce que j'appellerais un *Carré de Carrés*.

Là aussi, $M = m^2$ sera la moyenne arithmétique des 9 termes du carré, qui idéalement serait de la forme

a^2	b^2	c^2
d^2	m^2	f^2
g^2	h^2	i^2

$(3m^2)$

On devrait donc partir de la relation $a^2 + i^2 = 2m^2$. On trouvera, en réfléchissant un peu, l'égalité $1^2 + 7^2 = 2 \times 5^2$, avec laquelle on pourra construire le carré de carrés suivant :

1^2	7^2	5^2
7^2	5^2	1^2
5^2	1^2	7^2

(75)

qui malheureusement contient chaque terme 3 fois. Mais on voit que 1^2 et 7^2 sont complémentaires par rapport à 5^2, ce qui est un résultat encourageant.

Adresse de l'auteur: Jack Segers, Rue Hocheporte, 107/063, B4000 Liège.

([1]) Ces réflexions sont la suite d'une lecture d'un article écrit par H.W LENSTRA, Jr., Rationale Punten op Algebraïsche Oppervlakken, *Nieuw archief voor wiskunde*, 11-1999, Vierde serie, Deel 117, 475-481. *Niemand weet of het met negen kwadraten kan. Wiskundingen hebben vaak de neiging een beetje op magische vierkanten neer te kijken, maar men dient een verschil te maken tussen de inhoud en de verpakking.*

Cherchons alors les carrés complémentaires par rapport à 6^2 :

$$a^2 + i^2 = 2 \times 6^2 = 72$$

$$72 = 1^2 + 71 = 2^2 + 68 = 3^2 + 63 = 4^2 + 56 = 5^2 + 47$$

sans aucun complément carré.

7^2, 8^2 et 9^2 n'en fournissent pas non plus.

10^2 fournit $2^2 + 14^2 = 2 \times 10^2$, égalité à simplifier en $1^2 + 7^2 = 2 \times 5^2$, donc rien de neuf.

13^2 fournit $7^2 + 17^2 = 2 \times 13^2$

15^2 fournit $3^2 + 21^2 = 2 \times 15^2$, à simplifier par 3^2.

17^2 fournit $7^2 + 23^2 = 2 \times 17^2$, etc.

Le premier carré intéressant est 25^2 qui fournit 2 paires de carrés complémentaires : $5^2 + 35^2 = 17^2 + 31^2 = 2 \times 25^2$. Construisons :

5^2	17^2	
	25^2	
	31^2	35^2

(1875)

5^2	31^2	
	25^2	
	17^2	35^2

(1875)

17^2	5^2	
	25^2	
	35^2	31^2

(1875)

et

31^2	5^2	
	25^2	
	35^2	17^2

(1875)

5^2		17^2
	25^2	
31^2		35^2

(1875)

	5^2	
17^2	25^2	31^2
	35^2	

(1875)

Ce sont les 6 manières essentiellement différentes de placer les deux paires complémentaires, ce qui fournit chaque fois 5 termes carrés. Il reste quatre termes à calculer, dont — on l'espère — l'un au moins sera aussi un carré.

5^2	17^2	1561
2161	25^2	−911
−311	31^2	35^2

(1875)

5^2	31^2	889
1489	25^2	−239
$\underline{19^2}$	17^2	35^2

(1875)

17^2	5^2	1561
1897	25^2	−911
−311	35^2	31^2

(1875)

et

31^2	5^2	889
553	25^2	697
$\underline{19^2}$	35^2	17^2

(1875)

5^2	1561	17^2
889	25^2	$\underline{19^2}$
31^2	−311	35^2

(1875)

1093	5^2	757
17^2	25^2	31^2
493	35^2	157

(1875)

Et en effet, sur les 6 C.M., 3 comprennent un terme carré, dont 2 — malheureusement — comprennent aussi un terme négatif. Il en reste donc un seul comprenant au total 6 termes carrés. Il semble que ce soit le maximum obtenu jusqu'à présent. Le nombre suivant avec 2 paires est 50^2, mais les paires sont celles de 25^2 multipliées par 2^2.

Le nombre intéressant suivant est 65 avec 4 paires :

$$13^2 + 91^2 = 23^2 + 89^2 = 35^2 + 85^2 = 47^2 + 79^2 = 2 \times 65^2$$

Puisqu'on peut combiner ces 4 paires deux à deux de 6 manières, il y a $6 \times 6 = 36$ C.M. à calculer. Mais il y a exactement un de ces carrés qui possède un sixième terme carré, c'est

7081	23^2	5065
47^2	65^2	79^2
3385	89^2	$\underline{37^2}$

(12675)

En travaillant avec ces C.M., j'ai trouvé deux formules qui permettent d'aller plus vite, tout en laissant tout de même beaucoup de cas intéressants de côté.

Si n est un naturel,

(A) $m = 4n^2 + 1,\ a = 4n(n-1) - 1,\ i = 4n(n+1) - 1$

donne une infinité de termes moyens avec <u>une</u> paire associée :

$n = 2,\ m = 17,\ a = 7\ ,\ i = 23$
$n = 3,\ m = 37,\ a = 23\ ,\ i = 47$
$n = 4,\ m = 65,\ a = 47\ ,\ i = 79$
etc.

Une autre formule

(B) $m = 2n(n+1),\ a = 2n^2 - 1,\ i = 2(n+1)^2 - 1$

donne des termes m^2 un peu plus serrés :

$n = 1,\ m = 5,\ a = 1\ ,\ i = 7$
$n = 2,\ m = 13,\ a = 7\ ,\ i = 17$
$n = 3,\ m = 25,\ a = 17\ ,\ i = 31$
etc.

Il est évident que nous avons assez d'éléments pour construire deux programmes qui, l'un fournit des nombres m^2 accompagnés de paires de carrés complémentaires, l'autre des C.M. avec 5 termes carrés, accompagnés parfois d'un terme carré complémentaire. Mais le travail intellectuel et « manuel » reste important. Ces programmes s'écrivent en un dialecte de Basic. En Pascal, c'est beaucoup plus difficile, parceque il faut bien distinguer entre nombres entiers et nombres « réels » qui ne s'accordent pas entre eux dans un même calcul.

Ainsi, j'ai trouvé une bonne soixantaine de C.M. contenant 6 termes carrés, et un qui en contient 7. Est-ce une découverte ?

Pour bien faire et ne pas être submergé, il faut suivre un classement rationnel. Pour cela, on transforme si nécessaire les C.M. trouvés par rotations et/ou symétrie de manière à les assimiler à l'un des 6 modèles déjà proposés ci-avant. On part toujours d'un carré m^2 et de deux paires de carrés complémentaires

$$\{x^2, y^2\}, \{u^2, v^2\} \text{ avec } x < u < m < v < y$$

Les six constructions possibles sont données au début de ce texte.

Je n'ai pas trouvé de C.M. de type 3, mais voici des exemples des 5 autres types (s et t sont des 6^e et 7^e termes carrés trouvés.) ([2])

Type (1)

119^2	127^2	32785
39649	145^2	$\underline{49^2}$
9265	161^2	167^2

(63075)

$s = 49 = 7^2$

([2]) le C.M. de type 2 contient 7 carrés !

Type (2)

205^2	527^2	222121
360721	425^2	$\underline{23^2}$
$\underline{373^2}$	289^2	565^2

(541875)

$s = 23$ premier
$t = 373$ premier

Type (4)

241^2	31^2	87481
78345	221^2	19441
$\underline{101^2}$	311^2	199^2

(146523)

$s = 101$ premier

Type (5)

937^2	5350537	1513^2
4250426	1685^2	$\underline{1195^2}$
1871^2	327913	2191^2

(8517675)

$s = 1195 = 5 \times 239$

Type (6)

156841	79^2	87481
119^2	289^2	391^2
79561	401^2	$\underline{101^2}$

(250563)

$s = 101$ premier

2. Pourquoi des nombres impairs?

On peut se demander pourquoi on arrive finalement à des C.M. qui ne contiennt que des nombres impairs. N'élimine-t-on pas de cette manière bon nombre de chances de trouver des C.M. présentant plus de 5 carrés?

Si tous les termes sont pairs, il est évident qu'on peut les simplifier en les divisant tous par deux. Finalement vont rester des termes pairs et impairs mélangés. Mais nous allons voir que c'est impossible. Pour cela, transformons notre système décimal dans le système octal dont la base ne sera plus le nombre 10, mais le nombre 8 que nous écrirons évidemment 10_{oct}. Dans ce système, les carrés ont de curieuses propriétés.

Voyons d'abord les nombres impairs :

$1^2 = 1 = 1_{oct}$, cela ne change pas.

$3^2 = 9 = 11_{oct}$, ce carré a pour chiffre d'unités le 1.

$5^2 = 25 = 31_{oct}$, ce carré aussi a pour chiffre d'unités le 1.

$7^2 = 49 = 61_{oct}$, idem

On peut s'arrêter là ; il n'y a plus de chiffres impairs inférieurs à 8, mais pour le plaisir, voici encore

$9 = 11_{oct}$, donc $9^2 = (11_{oct})^2 = 121_{oct}$, avec la même conclusion. Puisque tout nombre impair se termine par l'un de ces chiffres, le carré de tout nombre impair écrit dans le sytème octal se termine par 1.

Effectuons la même recherche pour les nombres pairs :

$0^2 = 0 = 0_{oct}$, son chiffre d'unités est 0.

$2^2 = 4 = 4_{oct}$, son chiffre d'unités est 4.

$4^2 = 16 = 20_{oct}$, son chiffre d'unités est 0.

$6^2 = 36 = 44_{oct}$, son chiffre d'unités est 4.

Par suite, le carré de tout nombre pair écrit dans le système octal se termine par 0 ou 4.

Construisons à présent un C.M. avec 9 termes carrés, d'abord tous impairs. Si les lettres désignent l'ensemble des chiffres des nombres, sauf le dernier, nous aurons :

$(j1)_{oct}$	$(k1)_{oct}$	$(l1)_{oct}$
$(n1)_{oct}$	$(p1)_{oct}$	$(q1)_{oct}$
$(r1)_{oct}$	$(s1)_{oct}$	$(t1)_{oct}$

et les sommes horizontales, verticales et obliquent se terminant toutes par 3_{oct}, peuvent donc être égales.

Essayons maintenant d'y inclure des carrés de nombres pairs, se terminant par 0_{oct} ou 4_{oct}, par exemple :

$(j0)_{oct}$	$(k1)_{oct}$	$(l0)_{oct}$
$(n1)_{oct}$	$(p1)_{oct}$	$(q1)_{oct}$
$(r0)_{oct}$	$(s1)_{oct}$	$(t0)_{oct}$

Les lignes extérieures et les diagonales donnent une somme se terminant par 1_{oct}, mais les 2 lignes horizontale et verticale passant par le centre donnent une somme se terminant par 3_{oct}. Ces sommes ne peuvent donc être égales. Que l'on essaye de disposer les nombres autrement, le résultat

sera le même. La conclusion vaut pour les nombres, quel que soit le système dans lequel on les a écrits.

Par conséquence, un carré de carrés n'aura de chances d'exister que si les termes carrés, écrits en système octal, ont tous le même chiffre d'unité 0 ou 1 ou 4.

3. Conclusions — provisoires.

J'ai trouvé — je crois — tous les carrés de carrés dont le terme moyen m est inférieur à 2000. J'en tire quelques observations. Mais d'abord il faut bien remarquer qu'il y a beaucoup de nombres, premiers ou composés, par rapport auxquels il n'y a pas de paires de complémentaires, et ils sont la grande majorité.

Sinon si des nombres complémentaires existent pour un nombre m,

1. m ne peut être un nombre premier.
2. si m est le produit de deux nombres premiers différents, il y a 4 paires de nombres complémentaires. (exemples : 65, 85, 221)
3. si m est le carré d'un nombre premier, il y a 2 paires de nombres complémentaires. (exemples : 25, 289)
4. si m est le produit de trois nombres premiers différents, il y a 13 paires de nombres complémentaires (exemples : 1105, 1885)
5. si m est le produit d'un nombre premier par le carré d'un autre, il y a 7 paires de nombres complémentaires (exemples : 425, 725, 1445)
6. si m est le produit d'un nombre premier par le cube d'un autre, il y a 10 paires de nombres complémentaires (exemple : 1625)

Mais il ne suffit pas qu'un nombre m ait des paires de nombres complémentaires pour qu'il y ait des C.M. avec 6 termes carrés ou plus.

Je souhaite beaucoup de plaisir aux lecteurs qui voudraient se mettre en recherches.

Journée Portes Ouvertes

à Mons

samedi 23 juin
de 9 h à 13 h

Renseignements :

MONS - 17, Place Warocqué
Tél. : 065 - 37 30 14 - Fax : 065 - 37 30 54
E-mail : Martine.Vanelslande@umh.ac.be
Internet : http://www.umh.ac.be

UMH
UNIVERSITE DE MONS-HAINAUT

Compter sur les erreurs de calculs afin d'obtenir une bonne réponse.

M. COYETTE, *Collège Notre-Dame Basse-Wavre*

Mots-clés : Matrices, valeurs propres, vecteurs propres, itérations.

L'étude des matrices se limite souvent à l'étude des systèmes d'équations. Pourtant, sauf pour noter les coefficients de manière agréable, les matrices et les déterminants ne sont pas très utiles pour résoudre les systèmes d'équations. Trianguliariser le système est moins lourd que calculer les déterminants.

Le nouveau programme propose d'étudier les matrices en cinquième. Bizarrement, il faut introduire la multiplication des matrices pour ne rien en faire ... C'est bien là l'esprit de ce nouveau programme : aborder de nouvelles notions sans jamais les utiliser vraiment ...

Pourtant, tout élève pragmatique demandera : « À quoi cela va-t-il servir ? ». S'il faut étudier les matrices et leur multiplication, il faut en faire quelque chose. Un bon chapitre sur ce sujet devrait se conclure par l'étude des vecteurs propres et valeurs propres. Pour mettre en valeur ce sujet, je donne ici une jolie application des matrices et des vecteurs propres dans le calcul des limites de suite. Ensuite, j'aborde les itérations des matrices afin d'obtenir les vecteurs propres dominants. Enfin, je montre que les meilleures calculatrices peuvent faire d'énormes erreurs de calculs et qu'il est possible d'en tirer profit ...

Exemple 1

Considérons la suite suivante :

$$a_0 = \frac{3}{2}; \qquad a_1 = \frac{5}{3}; \qquad a_2 = \cdots$$

Pour chaque n entier supérieur ou égal à 1,

$$a_{n+1} = 203 - \frac{602}{a_n} + \frac{400}{a_n\, a_{n-1}}$$

Adresse de l'auteur: M. Coyette, Collège Notre-Dame, rue de l'église 4, 1300 Wavre.

Si on calcule les premiers termes de cette suite à l'aide d'une calculatrice, on obtient :

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1,5 \\
a_1 &= 1,66666666667 \\
a_2 &= 1,800000001 \\
a_3 &= 1,888889 \\
a_4 &= 1,941188232 \\
a_5 &= 1,97090857 \\
a_6 &= 2,107554525 \\
a_7 &= 13,6583188684 \\
a_8 &= 172,820109267 \\
a_9 &= 199,686069571 \\
a_{10} &= 199,996858884 \\
a_{11} &= 199,999968604 \\
a_{12} &= 199,999999686 \\
a_{13} &= 199,999999997 \\
a_{14} &= 200
\end{aligned}
$$

Les calculs ci-dessus sont effectués sur une calculatrice **HP 48 SX**. Les valeurs obtenues peuvent varier « légèrement » suivant la calculatrice utilisée.

La limite de cette suite semble donc être égale à 200. Essayez vous-mêmes de le démontrer avant de lire la suite de cet article.

Les énoncés suivants donnent les définitions et les propriétés classiques des vecteurs propres. Pour la facilité de l'exposé, je suppose que les matrices sont du genre 3×3.

Définition 1

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *est vecteur propre de valeur propre* λ *pour la matrice* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *si et seulement si* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 1

λ *est valeur propre pour la matrice* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *si et seulement si* $\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Le polynôme ainsi obtenu se nomme le **polynôme-caractéristique** de la matrice.

Les valeurs et vecteurs propres possèdent de nombreuses propriétés intéressantes. Certaines d'entre elles sont données par l'énoncé suivant.

Propriétés

1. *Le multiple non nul d'un vecteur propre est aussi un vecteur propre de la même matrice.*
2. *La somme non nulle de deux vecteurs propres de même valeur propre d'une matrice est également un vecteur propre de cette même valeur propre pour cette matrice.*
3. *Le produit des valeurs propres est égal au déterminant de la matrice. Ce déterminant est aussi le terme indépendant du polynôme-caractéristique.*
4. *Si la somme de chaque ligne de la matrice est égale à un même nombre t, ce nombre t est une valeur propre de la matrice et la colonne constante 1 en est un vecteur propre.*
5. *Si la somme de chaque colonne d'une matrice est égale à un même nombre t, ce nombre t est une valeur propre de la matrice.*
6. *La somme des valeurs propres d'une matrice est égale à la trace de la matrice à savoir la somme de la première diagonale de la matrice.*
7. *Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients réels sont des nombres réels.*
8. *Un vecteur propre d'une matrice est également vecteur propre du carré de cette matrice. Les valeurs propres de la matrice carrée sont égales au carré des valeurs propres de la matrice.*

Exemple 2

Considérons la suite suivante :

$$b_0 = 2; \qquad b_1 = 3; \qquad b_2 = 5; \qquad b_3 = \cdots$$

Pour chaque n entier supérieur ou égal à 2,

$$b_{n+1} = 203\, b_n - 602\, b_{n-1} + 400\, b_{n-2}$$

Cette itération peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 400 & -602 & 203 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

Montrons que pour chaque n entier positif, $a_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

Nous avons : $a_0 = \dfrac{b_1}{b_0} = \dfrac{3}{2}$; $\quad a_1 = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{5}{3}$

Montrons que pour chaque n entier supérieur ou égal à 1,

$$\text{Si } a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ et } a_{n-1} = \frac{b_n}{b_{n-1}},$$

alors,

$$a_{n+1} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}.$$

En effet,

$$b_{n+2} = 203\,b_{n+1} - 602\,b_n + 400\,b_{n-1}.$$

De là,

$$\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 203 - 602\frac{b_n}{b_{n+1}} + 400\frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}.$$

D'où,

$$\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 203 - 602\frac{b_n}{b_{n+1}} + 400\frac{b_n}{b_{n+1}}\frac{b_{n-1}}{b_n}.$$

Et

$$\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 203 - \frac{602}{a_n} + \frac{400}{a_{n-1}a_n}.$$

Donc,

$$\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = a_{n+1}.$$

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 400 & -602 & 203 \end{pmatrix}$ et prenons $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme vecteur de départ.

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \; ; \; a_2 = \frac{9}{5} = 1{,}8$$

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix} \; ; \; a_3 = \frac{17}{9} = 1{,}88888888889$$

$$A\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 33 \end{pmatrix} \; ; \; a_4 = \frac{33}{17} = 1{,}94117647059$$

$$A\begin{pmatrix}9\\17\\33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\33\\65\end{pmatrix}\ ;\ a_5=\frac{65}{33}=1,9696969697$$

$$A\begin{pmatrix}17\\33\\65\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33\\65\\124\end{pmatrix}\ ;\ a_6=\frac{124}{65}=1,90769230769$$

$$A\begin{pmatrix}33\\65\\129\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}65\\129\\257\end{pmatrix}\ ;\ a_7=\frac{257}{129}=1,99224806202$$

$$A\begin{pmatrix}65\\129\\257\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}129\\257\\513\end{pmatrix}\ ;\ a_8=\frac{513}{257}=1,99610894942$$

$$A\begin{pmatrix}129\\257\\513\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}257\\513\\1025\end{pmatrix}\ ;\ a_9=\frac{1025}{513}=1,99805068226$$

$$A\begin{pmatrix}257\\513\\1025\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}513\\1025\\2049\end{pmatrix}\ ;\ a_{10}=\frac{2049}{1025}=1,99902439024$$

$$A\begin{pmatrix}513\\1025\\2049\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1025\\2049\\4097\end{pmatrix}\ ;\ a_{11}=\frac{4097}{2049}=1,99951195705$$

$$A\begin{pmatrix}1025\\2049\\4097\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2049\\4097\\8193\end{pmatrix}\ ;\ a_{12}=\frac{8193}{4097}=1,99975591897$$

$$A\begin{pmatrix}2049\\4097\\8193\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4097\\8193\\16385\end{pmatrix}\ ;\ a_{13}=\frac{16385}{8193}=1,99987794459$$

$$A\begin{pmatrix}4097\\8193\\16385\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8193\\16385\\32769\end{pmatrix}\ ;\ a_{14}=\frac{32769}{16385}=1,99993896857$$

Ainsi, la calculatrice utilisée dans **l'exemple 1** se trompe dans le calcul de 32769 divisé par 16385 et donne 200 pour résultat.

L'exemple 1 fait partie des exemples-types de calculs instables sur toutes les calculatrices « analogiques » ([1]). Il est essentiel que des élèves

([1]) Bien sûr une calculatrice « formelle » arriverait aisément au résultat correct. Les avantages des calculatrices opérant en calcul formel sont évoqués dans [2] et [3]

observent ce type d'erreurs de calculs en classe.

$$A\begin{pmatrix}8193\\16385\\32769\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16385\\32769\\65537\end{pmatrix}\ ;\ a_{15}=\frac{65537}{32769}=1,99996948335$$

$$A\begin{pmatrix}16385\\32769\\65537\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32769\\65537\\131073\end{pmatrix}\ ;\ a_{16}=\frac{131073}{65537}=1,99998474144$$

$$A\begin{pmatrix}32769\\65537\\131073\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}65537\\131073\\262145\end{pmatrix}\ ;\ a_{17}=\frac{262145}{131073}=1,99999237066$$

$$A\begin{pmatrix}65537\\131073\\262145\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}131073\\262145\\524289\end{pmatrix}\ ;\ a_{18}=\frac{524289}{262145}=1,99999618532$$

$$A\begin{pmatrix}131073\\262145\\524289\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}262145\\524289\\1048577\end{pmatrix}\ ;\ a_{19}=\frac{1048577}{524289}=1,99999809266$$

$$A\begin{pmatrix}262145\\524289\\1048577\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}524289\\1048577\\2097153\end{pmatrix}\ ;\ a_{20}=\frac{2097153}{1048577}=1,99999904633$$

$$A\begin{pmatrix}524289\\1048577\\2097153\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1048577\\2097153\\4194305\end{pmatrix}\ ;\ a_{21}=\frac{4194305}{2097153}=1,99999952316$$

Le polynôme-caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\400&-602&203\end{pmatrix}$ vaut

$$\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\400&-602&203-\lambda\end{vmatrix}=0$$

c'est-à-dire : $-\lambda^3+203\,\lambda^2-602\,\lambda+400=0$. Ses racines valent 1, 2 et 200.

Pour $\lambda=1$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre.

Pour $\lambda=2$, $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est vecteur propre.

Pour $\lambda=200$, $\begin{pmatrix}1\\200\\40000\end{pmatrix}$ est vecteur propre.

La situation initiale de **l'exemple 2** est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 200 \\ 40000 \end{pmatrix}.$$

Les itérations successives sont données par

$$A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

pour n entier positif.

On observe ainsi $b_n = 1 + 2^n$. Donc,

$$a_n = \frac{1 + 2^{n+1}}{1 + 2^n}$$
$$a_n = 2 - \frac{1}{1 + 2^n}$$

Il est dès lors possible de constater que les a_n forment une suite croissante et $a_n < 2$ (pour chaque n entier positif).

Enfin $\lim_{n \to +\infty} a_n = 2$. Ainsi $a_{14} < 2$, et $a_{14} = 2 - 0,000061031 43$

$$a_{14} = 1,999938968 57.$$

Il reste donc à expliquer pourquoi une « bonne calculatrice » arrive à faire une si grosse erreur dans un tel calcul ...

La situation initiale est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 200 \\ 40000 \end{pmatrix}.$$

Dans le calcul de a_1 , la calculatrice arrondit la dernière décimale pour donner $1,666\,666\,666\,67$. Cette très légère erreur dans le calcul de a_1 introduit un coefficient α non nul dans le développement

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5,000\,000\,000\,01 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 200 \\ 40000 \end{pmatrix}$$

Les autres coefficients sont également entachés d'erreurs. Mais celles-ci sont négligeables par rapport à la valeur 1. Bien que le dernier coefficient soit très proche de zéro, il est cependant multiplié par 200 à chaque itération. Ainsi, l'erreur de calcul faite par toute calculatrice « analogique » gonflera de telle sorte que la meilleure calculatrice du marché finira par se tromper ...

Notons ε l'erreur commise sur a_1 (ε vaut 1.10^{-11} pour la calculatrice concernée dans le premier ***exemple*** de cet article).

$$a_1 = \frac{b_1 + \varepsilon b_0}{b_0}; \qquad a_2 = \frac{b_2 + 200\varepsilon b_0}{b_1 + \varepsilon b_0}$$

$$a_2 = \frac{b_2}{b_1 + \varepsilon b_0} + \frac{200\varepsilon b_0}{b_1 + \varepsilon b_0}; \qquad a_2 = \frac{b_2}{b_1 + \varepsilon b_0} + \frac{200\varepsilon}{a_1}$$

L'erreur introduite dans a_2 vaut donc $\frac{200\varepsilon}{a_1}$ où ε vaut l'erreur commise sur a_1. Ainsi, l'erreur est multipliée par 100 à chaque itération. La calculatrice a beau travailler avec de nombreuses décimales, l'erreur devient énorme après quelques étapes. Seule une calculatrice qui travaille en « calcul formel » arrivera sans problème à entamer cette itération et à calculer la valeur de a_{14} ou a_{20}.

★ ★
★

Les matrices et vecteurs propres possèdent de nombreuses autres propriétés remarquables ...

Constatons d'abord que chaque polynôme est le polynôme-caractéristique d'une matrice. En effet, le polynôme-caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

vaut $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ c & b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$ c'est-à-dire :

$$-\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Nous arrivons maintenant au résultat concernant la convergence vers les vecteurs propres.

Théorème 2

Considérons une matrice A qui possède trois valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 telles que $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3|$.

Prenons un vecteur quelconque $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de valeurs propres respectives λ_1, λ_2 et λ_3.

$$A^n \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = r_1\lambda_1^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + r_2\lambda_2^n \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + r_3\lambda_3^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Premier cas : $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ et $r_1 \neq 0$.

Dès lors, pour n assez grand, le terme en λ_1^n va devenir prédominant. $A^n \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$ s'aligne sur le vecteur propre $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

Comme $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, une des composantes est non nulle. Fixons par exemple $u_3 \neq 0$.

$$a_n = \frac{r_1\lambda_1^n u_3 + r_2\lambda_2^n v_3 + r_3\lambda_3^n w_3}{r_1\lambda_1^{n-1} u_3 + r_2\lambda_2^{n-1} v_3 + r_3\lambda_3^{n-1} w_3}$$

$$a_n = \lambda_1 \frac{r_1 u_3 + r_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n v_3 + r_3 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^n w_3}{r_1 u_3 + r_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1} v_3 + r_3 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n-1} w_3}$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda_1$.

Deuxième cas : $r_1 u_3 + r_2 v_3 \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$ et $|\lambda_1| > |\lambda_3|$.

Le calcul effectué ci-dessus montre également que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda_1$.

$A^n \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$ s'aligne sur le vecteur propre $r_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Le lecteur trouvera dans [1] la démonstration dans le cas général des matrices carrées d'ordre n. **L'exemple 5** montre ce qui se passe lorsque λ_1 et λ_2 sont opposées. Numériquement, il est improbable que r_1 soit identiquement nul. C'est justement ce qui arrive dans **l'exemple 2**.

Si $u_3 = 0$, il suffit de choisir les premières ou les secondes composantes des vecteurs pour calculer λ_1. En pratique, on choisit la plus grande composante en valeur absolue. Lorsque les trois composantes du vecteur propre sont distinctes de 0, il est même possible d'obtenir trois estimations différentes de λ_1.

Exemple 3

Voici une matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Prenons $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur de départ.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \; ; \; a_1 = \frac{10}{1} = 10$$

$$A \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 96 \\ 88 \end{pmatrix} \; ; \; a_2 = \frac{88}{10} = 8,8$$

$$A \begin{pmatrix} 52 \\ 96 \\ 88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 464 \\ 876 \\ 812 \end{pmatrix} \; ; \; a_3 = \frac{812}{88} = 9,22$$

$$A \begin{pmatrix} 464 \\ 876 \\ 812 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4240 \\ 8028 \\ 7396 \end{pmatrix} \; ; \; a_4 = \frac{7396}{812} = 9,1083$$

$$A \begin{pmatrix} 4240 \\ 8028 \\ 7396 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38696 \\ 73332 \\ 67652 \end{pmatrix} \; ; \; a_5 = \frac{67652}{7396} = 9,1471$$

$$A\begin{pmatrix}38696\\73332\\67652\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}353680\\670284\\618052\end{pmatrix}\ ;\ a_6=\frac{618052}{67652}=9,1357$$

$$A\begin{pmatrix}353680\\670284\\618052\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3231800\\6125076\\5648564\end{pmatrix}\ ;\ a_7=\frac{5648564}{618092}=9,1393$$

Le vecteur propre est obtenu en divisant $\begin{pmatrix}3231800\\6125076\\5648564\end{pmatrix}$ par 3231800. On obtient ainsi $\begin{pmatrix}1\\1,895252\\1,747807\end{pmatrix}$, de valeur propre 9,1393.

Exemple 4

Revenons à la matrice de l'exemple 2 : $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\400&-602&203\end{pmatrix}$. Prenons $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ comme vecteur initial. Le calcul des valeurs de a_n est justement donné par la formule :

$$a_{n+1}=203-\frac{602}{a_n}+\frac{400}{a_n\cdot a_{n-1}}.$$

Cette méthode itérative nous donne donc une itération rapide afin d'obtenir la plus haute valeur propre 200. Le choix de $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ comme vecteur initial peut sembler une erreur. En effet, nous savons que sa décomposition en fonction des vecteurs propres est donnée par :

$$\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\200\\40000\end{pmatrix}$$

Sans compter sur les erreurs de calcul, nous n'obtiendrions jamais la plus grande valeur propre qui est égale à 200. Heureusement, une « bonne calculatrice » commet des erreurs en arrondissant les nombres. En sorte que la suite des a_n converge rapidement vers 200.

En pratique, il est très improbable que le choix du vecteur initial se porte sur un vecteur possédant un coefficient nul dans sa décomposition dans la base des vecteurs propres. Cependant, même si l'improbable se produit, les inévitables erreurs de calcul assurent la convergence correcte du calcul itératif ...

Si on choisit $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5,0000000001 \end{pmatrix}$ comme vecteur initial, on obtient :

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5,0000000001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5,0000000001 \\ 9,0000000203 \end{pmatrix} \; ; \; a_2 = 1,80000000402$$

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 5,0000000001 \\ 9,0000000203 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,0000000001 \\ 9,0000000203 \\ 17,0000040607 \end{pmatrix} \; ; \; a_3 = 1,88888933582$$

$$A\begin{pmatrix} 5,0000000001 \\ 9,0000000203 \\ 17,0000040607 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,0000000203 \\ 17,0000040607 \\ 33,0008121415 \end{pmatrix} \; ; \; a_4 = 1,94122377993$$

$$A\begin{pmatrix} 9,0000000203 \\ 17,0000040607 \\ 33,0008121415 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,0000040607 \\ 33,0008121415 \\ 65,1624283031 \end{pmatrix} \; ; \; a_5 = 1,97457044462$$

$$A\begin{pmatrix} 17,0000040607 \\ 33,0008121415 \\ 65,1624283031 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33,0008121415 \\ 65,1624283031 \\ 161,485660626 \end{pmatrix} \; ; \; a_6 = 2,47820200737$$

$$A\begin{pmatrix} 33,0008121415 \\ 65,1624283031 \\ 161,485660626 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65,1624283031 \\ 161,485660626 \\ 6754,13212521 \end{pmatrix} \; ; \; a_7 = 41,8249651333$$

$$A\begin{pmatrix} 65,1624283031 \\ 161,485660626 \\ 6754,13212521 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 161,485660626 \\ 6754,13212521 \\ 1299939,42504 \end{pmatrix} \; ; \; a_8 = 192,465797373$$

$$A\begin{pmatrix} 161,485660626 \\ 6754,13212521 \\ 1299939,42504 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6754,13212521 \\ 1299939,42504 \\ 256886310,008 \end{pmatrix} \; ; \; a_9 = 199,921861744$$

$$A\begin{pmatrix} 6754,13212521 \\ 1299939,42504 \\ 256886310,008 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1299939,42504 \\ 256886310,008 \\ 51977059050,6 \end{pmatrix} \; ; \; a_{10} = 199,9992119078$$

Nous voyons ainsi l'erreur initiale se propager rapidement. Cette erreur assure la convergence de la suite a_n vers 200.

L'exemple suivant montre ce qui se passe lorsque la matrice possède deux valeurs propres dominatrices de signes opposés.

Exemple 5

$A = \begin{pmatrix} -31 & 12 & 44 \\ -20 & 9 & 28 \\ -16 & 6 & 23 \end{pmatrix}$. Prenons $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur initial.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 82 \\ 65 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} -26239 \\ 45922 \\ -13117 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 787325 \\ 570802 \\ 393665 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 125 \\ 82 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 \\ 58 \\ -13 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 787325 \\ 570802 \\ 393665 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -236191 \\ 413338 \\ -118093 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} -31 \\ 58 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1085 \\ 778 \\ 545 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} -236191 \\ 413338 \\ -118093 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7085885 \\ 5137258 \\ 3542945 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1085 \\ 778 \\ 545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -319 \\ 562 \\ -157 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 7085885 \\ 5137258 \\ 3542945 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2125759 \\ 3720082 \\ -1062877 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} -319 \\ 562 \\ -157 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9725 \\ 7042 \\ 4865 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} -2125759 \\ 3720082 \\ -1062877 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63772925 \\ 46235362 \\ 31886465 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 9725 \\ 7042 \\ 4865 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2911 \\ 5098 \\ -1453 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 63772925 \\ 46235362 \\ 31886465 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19131871 \\ 33480778 \\ -9565933 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} -2911 \\ 5098 \\ -1453 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87485 \\ 63418 \\ 43745 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} -19131871 \\ 33480778 \\ -9565933 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 573956285 \\ 416118298 \\ 286978145 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 87485 \\ 63418 \\ 43745 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26239 \\ 45922 \\ -13117 \end{pmatrix}$$

La suite des vecteurs propres ne semble pas converger vers un multiple d'un même vecteur propre. Après division par la première composante, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0,724999984973 \\ 0,500000004356 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1,7500000219 \\ 0,49999998548 \end{pmatrix}$$

Si on retient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0,725 \\ 0,5 \end{pmatrix}$, on constate :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0,725 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,525 \\ -0,15 \end{pmatrix} = -0.3\begin{pmatrix} 1 \\ -1,75 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,525 \\ -0,15 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 1 \\ 0,725 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Nous sommes justement dans un cas où il y a deux valeurs propres de signes opposés. Si le théorème 2 ne s'applique pas à A, il s'applique à A^2.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0,725 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice A^2. Sa valeur propre est 9.

Donc, les valeurs propres opposées sont -3 et 3.

Pour déterminer les vecteurs propres de A, il suffit de résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0,725 \\ 0,5 \end{pmatrix} = r_1\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de A.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0,725 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,525 \\ -0,15 \end{pmatrix} = 3r_1\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - 3r_2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$3\begin{pmatrix} 1 \\ 0,725 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,525 \\ -0,15 \end{pmatrix} = 6r_1\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Un vecteur propre de A est donc $\begin{pmatrix} 2,7 \\ 2,7 \\ 1,35 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sa valeur propre est égale à 3.

De même,

$$3\begin{pmatrix}1\\0,725\\0,5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-0,3\\0,525\\-0,15\end{pmatrix}=6r_2\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

Un vecteur propre de A est donc $\begin{pmatrix}3,3\\1,65\\1,65\end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Sa valeur propre est égale à -3.

Comme la trace de A est égale à 1 , la dernière valeur propre vaut 1.

Remarquons que $\begin{pmatrix}1\\-1,75\\0,5\end{pmatrix}$ est un autre vecteur propre de A^2 de valeur propre 9.

★ ★
★

Nous avons ainsi observé une propriété des vecteurs propres qui engendre une instabilité gênante et une erreur énorme dans **l'exemple 1**. Cette même propriété assure la convergence utile vers les valeurs propres dans **les exemples 3, 4 et 5**. Il est ainsi possible de calculer les valeurs propres des matrices sans passer nécessairement par le calcul du polynôme-caractéristique. Ce genre de petit « ex cursus » intrigue et passionne les élèves ! Autant de caractéristiques qui font que cela laisse des traces durables dans les mémoires. Intriguer, passionner, imprimer durablement les mémoires : n'est-ce pas là aussi le but poursuivi par l'enseignant ?

Bibliographie

[1] Démidovitch (B.) et Maron (I.), *Éléments de calcul numérique*, 2e éd., Éditions Mir, Moscou, 1979.

[2] Duval (D.), *Calcul symbolique : automatisation en cours*, La Recherche, hors série n° 2 : L'univers des nombres, août 1999, p. 98–105.

[3] Müller (J.-M.), *Ordinateurs en quête d'arithmétique*, La Recherche, hors série n° 2 : L'univers des nombres, août 1999, p. 90–96.

Publications APMEP (France) : Ces publications peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

— **Les brochures 1998-1999 sont signalées par *.**

— Le prix "*adhérent*" concerne l'A.P.M.E.P. **et la S.B.P.M.ef**.

N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix, en FB, *sans port*	
	Problèmes, rallyes,... :	public	adhérent
97	Jeux 4 (études sur les problèmes de rallyes)	660	**460**
*119	Jeux 5 (activités mathématiques au collège)	515	**305**
98	Fichier Evariste (240 fiches "Benjamins" ou "Cadets")	515	**305**
250	Panoramath 96 (co-diffusion Archimède,...)	490	**345**
*251	Panoramath 2 (co-diffusion Archimède,...)	555	**385**
	Les deux Panoramath ensemble :	1045	**505**
*402	Jeux du Scientific American (co-diffusion ADCS)	830	**585**
*451	Concours Australien de mathématiques		**515**
*450	Math Evasion (Bandes dessinées lycées)	305	**215**
	Quelques grands thèmes :		
*121	Maths en scène (22 thèmes, référés à l'expo "Math 2000" mais utilisables sans elle)	515	**305**
	Galion-thèmes :		
*304	Série 4. Six plaquettes, collège ou lycée	305	**275**
*305	Classe de Seconde : 10 thèmes programme 2000	460	**400**
	Evaluations (collection EVAPM) :		
112	Sixième (fin d'année) (Evaluation 1997)		
*118	*Les deux fascicules ensemble* :	705	**490**
*107	Premières (fin d'année) Documents : n° 90		
*108	Trois fascicules : 90, 107; 108, ensemble (404 p.)	860	**585**
*106	Terminales BEP (Lycées professionnels)	400	**275**
	Technologie moderne et mathématiques :		
*352	Tableur et maths (Collège et début lycée)	490	**400**
	Faire de la géométrie sup. avec Cabri II		
*124	Des points, droites, cercles, ... aux coniques		
*125	... et aux cubiques		
	Les deux tomes ensemble (288 p. en 17 x 24)	705	**430**
*120	Clas Math Lycée : Classeur informatisé de documents mathématiques - 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	2150	**1535**
	Version 26 installations, port compris	4305	**3075**

PORT EN FB (prix indicatif) : 1 brochure : 100; 2 ou 3 brochures : 160 et au-dessus de 3 : 260

Bonjour, Monsieur Steiner

C. VILLERS, *A.R. Mons*

Ce texte est celui de l'exposé fait à Seraing à l'occasion du congrès 2000 de la SBPMef.

Axiome

L'enseignant de mathématiques transmet un savoir
éduque (au sens large)

Objectifs de l'enseignement des mathématiques

- accumuler des connaissances, des savoir-faire,
- développer la pensée critique
  la curiosité
  l'imagination
  le sens de l'effort
  la persévérance
  la méthode
  la rigueur
  la confiance en soi
  la méfiance à l'égard des apparences
  etc ...

L'importance des contenus et les facettes de la formation ne doivent pas s'occulter mutuellement. Tout doit être mené de pair.

Moyens

Nombreux, ils seront utilisés au mieux.
Il faut éviter la concentration sur l'emploi de quelques moyens.
Il convient de montrer toutes les facettes des mathématiques tout en mettant en évidence la cohérence qu'elles contiennent et les liens qui existent entre elles.

But de l'exposé

Plaidoyer pour une remise à l'honneur de la démonstration en géométrie.

Pour certains : « La démonstration est d'abord un texte »! Le texte en question peut être commenté, expliqué et même résumé. Il doit être connu

Adresse de l'auteur: Claude Villers, Rue Piérard 29, 7022 Mons.

pour lui-même. C'est, à l'évidence une vue particulièrement restrictive de la démonstration.

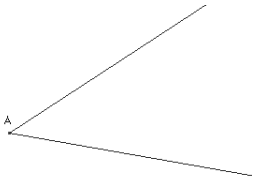
Celle-ci, au contraire, est le résultat d'un long travail associant

- de la recherche,
- de l'analyse,
- des essais,
- des conjectures,
- des vérifications,
- des associations d'idées,
- ...

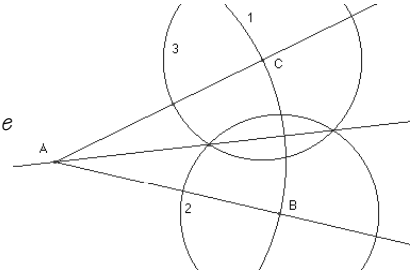
Il est donc nécessaire de commencer à mettre l'élève « en situation » dès le plus jeune âge.

Quelques exemples

Construire la bissectrice d'un angle, à la règle et au compas.

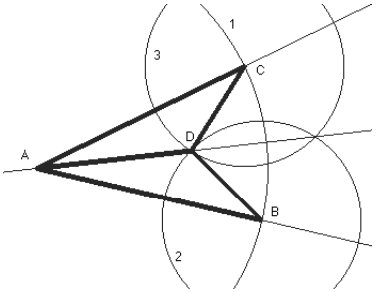


Classiquement, on utilise 3 arcs de cercles.



Quelle(s) notion(s) est (sont) mise(s) en œuvre par cette construction ?

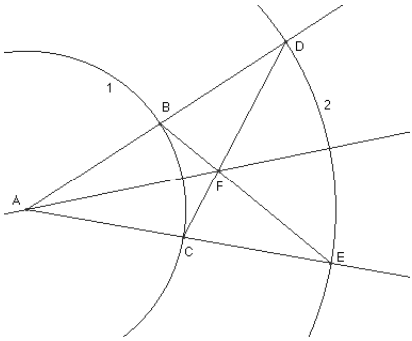
Une réponse : un cas classique d'isométrie des triangles.



Et si on demande de réaliser cette construction en ne traçant que deux arcs de cercles ? Est-ce possible ?

Voici une réponse à ce « défi ».

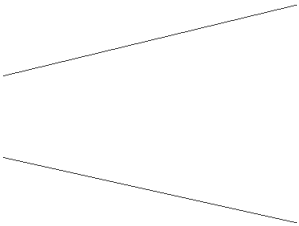
L'outil « transformation du plan » et plus particulièrement la notion de symétrie orthogonale semble plus efficace ici, pour justifier le tracé proposé. Il faut chercher l'axe de la symétrie orthogonale qui applique chaque côté de l'angle (demi-droite) sur l'autre.



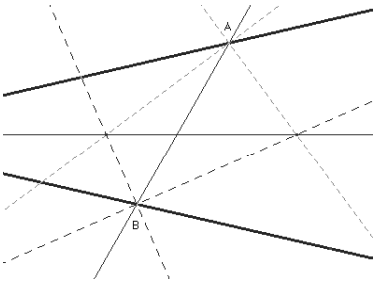
Cet axe comprend donc A.
L'image de B est C et celle de C est B (car ...)
L'image de D est E et celle de E est D (car ...)
Donc l'image de $[BE]$ est $[CD]$
Donc leur point commun F est sa propre image et E appartient à l'axe cherché.
La bissectrice de l'angle $\widehat{DAE}$ est AF.

Bien d'autres propriétés peuvent être déduites de ce qui précède et devenir éventuellement des théorèmes disponibles pour « l'à venir ». Entre autres : dans un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle principal est médiatrice de la base.

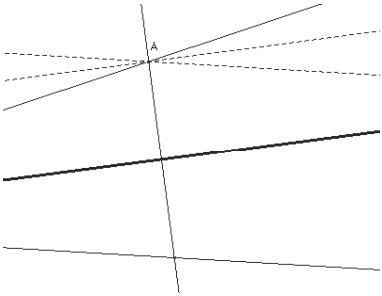
Et si le sommet de l'angle est inaccessible ?



Une réponse à cette éventualité.



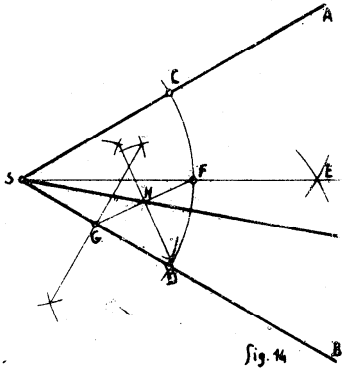
Une autre réponse ... qui soulève des questions !



Et l'esprit critique ?

Voici (avec ses imperfections) une reproduction de notes qui exposent comment diviser un angle en trois angles de même amplitude, à la règle et au compas. Trouver l'erreur !

3°)Diviser un angle quelconque (ASB) en 3 parties égales.(fig. 14).

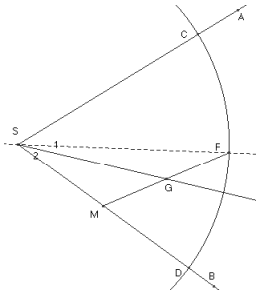


De (S) comme centre, décrivons un arc de rayon quelconque qui coupe (SA) et (SB) en (C) et (D).
Traçons la bissectrice (SE) qui coupe (CD) en (F).
Prenons le centre de (SD), soit (G) et joignons (FG).
Prenons le centre de (FG), soit (H) et joignons (SH) que nous prolongeons.
L'angle (GSH) est le I/3 de l'angle donné.
Recommençons la même opération pour trouver l'autre division de l'angle,—

On a : Aire (MSG) = Aire (GSF)
Donc

$$|SM|.|SG|.\sin S2 = |SF|.|SG|.\sin S1$$

Ou encore $\sin S2 = 2\sin S1$
Pour avoir $S2 = 2S1$, il faut $2\sin S1.\cos S1 = 2\sin S1$ ce qui n'est pas le cas (si l'angle donné n'est pas nul).



$$0 < \frac{1}{e} - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \cdots - \frac{1}{(2n-1)!}\right] < \frac{1}{(2n)!}$$

Sur le théorème de Steiner - Lehmus

Au départ, il y a le triangle isocèle (deux côtés de même longueur et les deux angles qui leur sont opposés, de même amplitude). Puis viennent d'autres particularités.

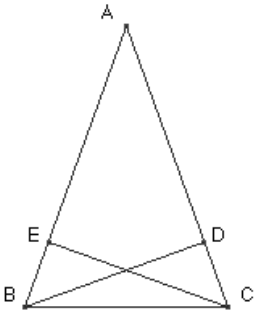
Au sujet de hauteurs

Si un triangle est isocèle, alors les hauteurs (segments ici) relatives aux côtés isométriques ont même longueur.

Démonstration 1 :
Les triangles rectangles BEC et CDB sont isométriques.

Démonstration 2 :
$2\times$ Aire $(ABC) = |AC| \times |BD| = |AB| \times |CE|$
d'où : $|BD| = |CE|$

Démonstration 3 :
Par utilisation d'une symétrie orthogonale.



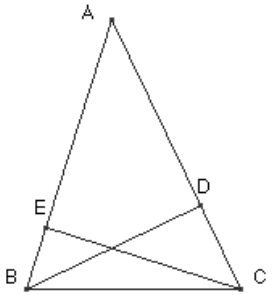
Et la réciproque ?

Si deux hauteurs d'un triangle ont même longueur, alors les côtés relatifs à ces hauteurs ont la même longueur (et donc le triangle est isocèle).

Démonstration 1 :
Les triangles rectangles BEC et CDB sont isométriques.

Démonstration 2 :
$2x$ Aire $(ABC) = |AB| \times |CE| = |AC| \times |BD|$
d'où : $|AB| = |AC|$

Démonstration 3 :
Par utilisation d'une symétrie??????

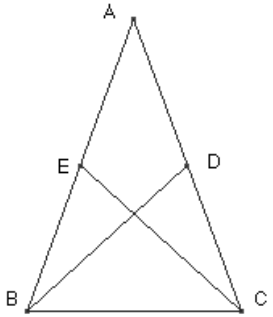


Au sujet de médianes

Si un triangle est isocèle, alors les médianes relatives aux côtés isométriques ont même longueur.

Démonstration 1 :
Les triangles *BEC* et *CDB* sont isométriques.

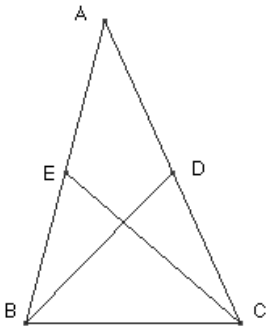
Démonstration 2 :
Par utilisation d'une symétrie orthogonale.



Et la réciproque ?

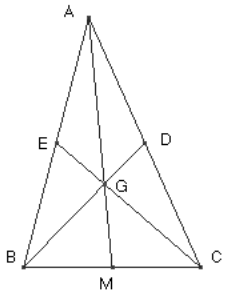
Si deux médianes d'un triangle ont même longueur, alors les côtés relatifs à ces médianes ont la même longueur (et donc le triangle est isocèle).

Démonstration : **? ? ? ?**



Simple, si on connaît la propriété du centre de gravité d'un triangle

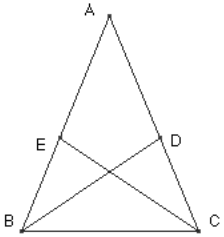
Les triangles *EGB* et *DGB* sont isométriques.
Dès lors, $|BE| = |CD|$ etc...



Au sujet de bissectrices

Si un triangle est isocèle Alors les bissectrices des angles isométriques, limitées au sommet et au côté opposé, ont même longueur.

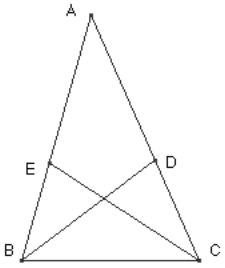
Démonstration 1 :
Les triangles BDC et BCE sont isométriques.
Démonstration 2 :
Utiliser une symétrie.



Et la réciproque ?

Si les bissectrices de deux angles d'un triangle, limitées au sommet et au côté opposé, ont même longueur Alors le triangle est isocèle

Démonstration : **?**



Cette réciproque est plus connue sous le nom de
« théorème de Steiner - Lehmus »

★ ★

★

Jakob Steiner

Né le 18 mars 1796 à Utzenstorf (Suisse), mort le 1er avril 1863 à Berne (Suisse).

Cinquième enfant d'une famille de paysans du canton de Berne, Jacob Steiner fut contraint aux travaux des champs dès son plus jeune âge. Il n'a appris à lire et à écrire que vers l'âge de 14 ans et ce n'est qu'à 18 ans, et contre l'avis d'ailleurs de ses parents, qu'il fréquenta un établissement scolaire à Yverdon où Pestalozzi l'accueillit gratuitement.

Vers 19 ans et demi, il partit étudier à l'Université d'Heidelberg. Pour (sur)vivre, il donnait des leçons particulières.

Vers 22 ans il se rendit à Berlin et postula un poste d'enseignant dans une école secondaire. Il devint maître auxiliaire intérimaire jusqu'en 1822 où on lui refusa un poste fixe.

De 1822 à 1825 il (sur)vécut en donnant des cours particuliers. Cette époque fut particulièrement féconde et productive.

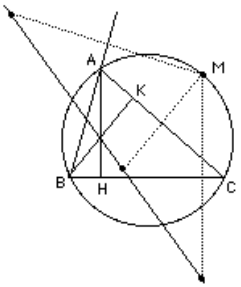
Il se fit connaître par ses articles dans le journal de Crelle et obtint une chaire à professeur à l'université de Berlin.

Ses travaux, qui ont contribué au renouveau de la géométrie au xix^{e} siècle, portent exclusivement sur une construction rigoureuse et abstraite de la géométrie projective (axiomatique ne concernant que la position et l'ordre des éléments fondamentaux). Ils ont été établis parallèlement à ceux, en Allemagne, de Von Staudt, professeur à Erlangen, et de Poncelet, en France.

L'outil fondamental dont il se servit est « le rapport anharmonique ». Steiner fut un des professeurs de Riemann à Berlin On le considère comme l'inventeur de l'inversion.

Quelques résultats dus à Steiner

Droite de Steiner Soit M un point du cercle circonscrit à un triangle ABC. L'orthocentre du triangle et les symétriques de M par rapport aux cotés du triangle sont alignés.

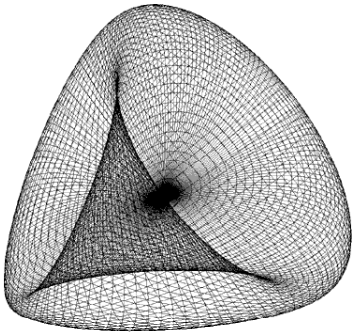


Un résultat original sur les constructions géométriques : elles peuvent être exécutées à l'aide de la règle seule à condition qu'un cercle soit tracé au préalable dans le plan de la figure.

Un autre résultat concernant le triangle : pour un périmètre donné, celui d'aire maximale est le triangle équilatéral.

Et plus subtil : de toutes les figures planes ayant le même périmètre, celle ayant la plus grande aire est le cercle.

Surface de Steiner : surface algébrique du 4^e degré d'équation $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz = 0$. Elle possède un point triple à l'origine.



Le nom de Steiner est attaché à divers éléments de la géométrie.

(un) Point de Steiner. C'est le point diamétralement opposé au point de Tarry, sur le cercle circonscrit à un triangle.

Point de Tarry. C'est le point de concours des perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés correspondants du premier triangle de Brocard.

Premier triangle de Brocard. C'est le triangle dont les sommets sont les projections sur les symédianes du triangle, du centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Symédianes d'un triangle. Ce sont les conjuguées isogonales des médianes de ce triangle.

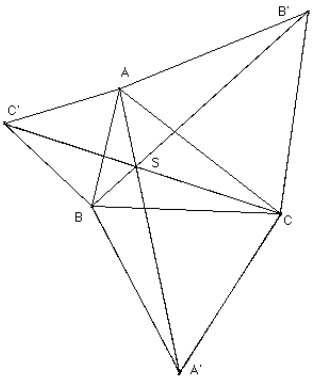
Brocard : Commandant du Génie, né en 1845 à Vignot (Meuse, France), un des principaux auteurs de la géométrie du triangle.

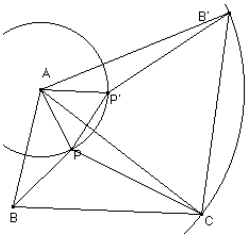
Tarry : Inspecteur des contributions à Alger, auteur de nombreuses découvertes en géométrie du triangle.

Un (autre) point de Steiner ! (encore appelé point de FERMAT-TORICELLI).

Le point qui minimise la somme de ses distances aux trois sommets d'un triangle est connu sous le nom de point de Steiner.

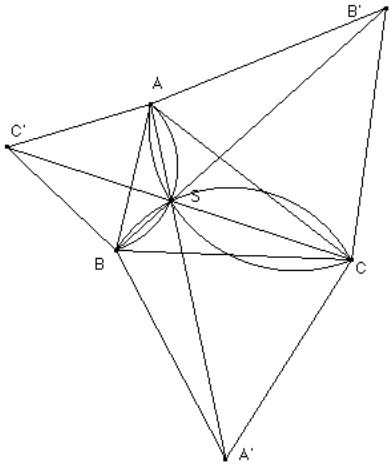
Ce point est le sommet de l'angle supérieur ou égal à 120° (s'il existe) sinon c'est le point d'intersection des arcs capables de 120° construits sur chacun des côté du triangle.





Cela se justifie par l'emploi de rotations ayant deux sommets du triangle comme centre et 60° comme amplitude. La somme $|PB| + |PP'| + |P'B'|$ est minimale quand B, P, P' et B' sont alignés donc quand P voit $[AC]$ sous un angle de 120°.

C'est donc encore le point commun aux segments joignant chaque sommet d'un triangle au sommet du triangle équilatéral construit extérieurement au triangle, sur chacun de ses côtés.

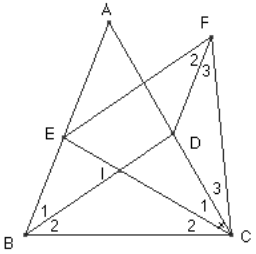


Diverses démonstrations du théorème de Steiner-Lehmus

Une démonstration !

Pré-requis : « le théorème de la bissectrice intérieure ».

Steiner-Lehmus !!



On construit le parallélogramme $EBDF$.
Dès lors : $|EF| = ||BD| = |EC|$
D'où : $F2 + F3 = C1 + C3$
Supposons que $F2 < C1$
Donc $B2 < C2$ (*) et aussi $F3 > C3$
Donc $|DC| > |DF| = |EB|$

On a aussi : $\frac{|DI|}{|IB|} = |CD||CB|$ et $\frac{|EI|}{|IC|} = |BE||BC|$

Puisque $|CD| > |BE|$ on a $\frac{|CD|}{|CB|} > |BE||BC|$ et donc aussi $\frac{|DI|}{|IB|} > |EI||IC|$

Dès lors $\frac{|DI|}{|IB|} + 1 > \frac{|EI|}{|IC|} + 1$ ou $\frac{|DB|}{|IB|} > \frac{|EI|}{|IC|}$

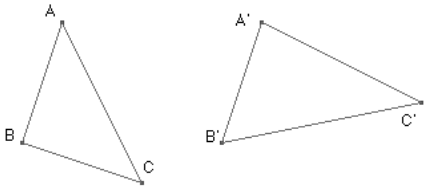
Et comme $|BD| = |CE|$ on a donc $|BI| > |IC|$ donc aussi $C2 > B2$ ce qui et en contradiction avec l'hypothèse de départ.

On montre de même qu'on ne peut avoir $B2 > C2$.

Dès lors $B2 = C2$ donc $B12 = C12$ et le triangle BAC est bien un triangle isocèle.

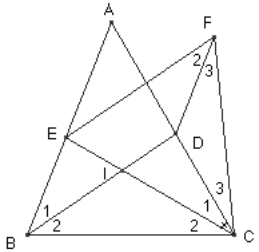
Autrement

Pré-requis : Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que $|AB| = |A'B'|$ et $|AC| = |A'C'|$ alors $\hat{A} \geqslant \hat{A'}$ on a $|BC| \geqslant |B'C'|$.



Steiner-Lehmus !!

On construit le parallélogramme $BDFE$
On a $|EF| = |BD| = |EC|$
donc $F2 + F3 = C1 + C3$



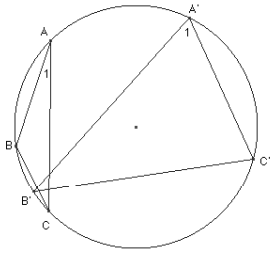
Supposons que $B2 > C2$ alors $B1 > C1$ donc $F2 > C1$ donc $F3 < C3$. Dès lors $|DC| < |DF|$ ou encore $|DC| < |BE|$. Mais dans les triangles BDC et CEB, $B2 > C2$ implique $|DC| > |BE|$. Il y a contradiction donc on n'a pas $B2 > C2$.

On montre de même qu'on n'a pas $B2 < C2$.

Donc $B2 = C2$ ou $B12 = C12$ et BAC est bien un triangle isocèle.

(Cette démonstration figure dans « Langage, logique, démonstrations ... et vérité mathématique » par Marcel Condamine chez Delagrave, Paris 1996).

Autrement !



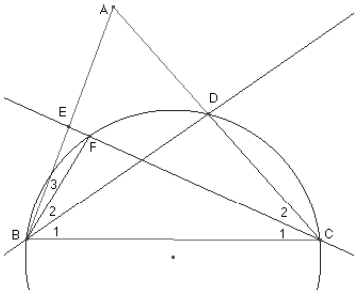
Pré-requis :

Si deux angles aigus sont inscrits dans un cercle alors la corde interceptée par le plus petit est plus petite que la corde interceptée par le plus grand.

Steiner-Lehmus !!

BD et CE sont les bissectrices de $B123$ et de $C12$.

Supposons que $B123 > C12$, alors $B2 = C1 < B23$ et $F \in [EC]$. On a donc $C1 < B1$ et $C2 = B2$. D'où $C12 < B12$. Or, $C12$ et $B12$ sont des angles aigus inscrits.

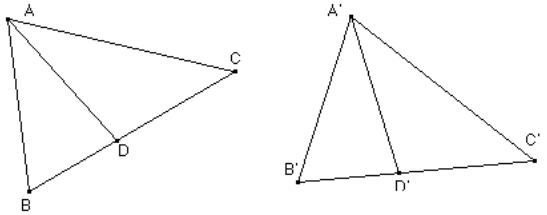


Dès lors, $|BD| < |CF| < |CE|$ ce qui est contraire à l'hypothèse $|BD| = |CE|$. Cette démonstration est due à Coxeter (elle daterait de 1963!).

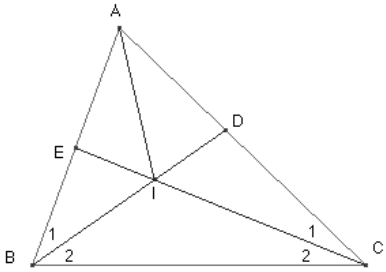
Autrement

Pré-requis : un « nouveau » cas d'isométrie des triangles!!!!!

Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont $A = A'$, $|BC| = |B'C'|$ et les bissectrices (intérieures) de A et de A' (limitées aux côtés opposés) de même longueur alors les deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.



Steiner-Lehmus!!

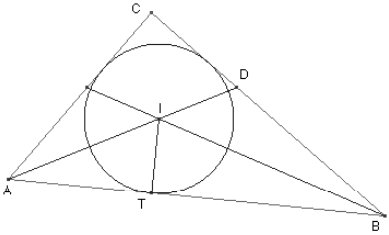


Les triangles ABD et ACE répondent aux conditions du cas signalé ci-avant. Dès lors $|AB| = |AC|$ et BAC est bien un triangle isocèle.

Cette démonstration a été publiée dans « Mathematical Digest », n° 115, avril 1999.

Autrement encore!!!

Pré-requis : longueur de la bissectrice d'un triangle en fonction des longueurs des côtés.



Calculons $|AD|$ en fonction des longueurs a, b et c des côtés opposés respectivement à A, B et C. Donc

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AB| + |AC|}$$

donc $|BD| = \dfrac{ac}{b+c}$.

I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Dans le triangle BDC, on a :

$$|AI| = \frac{|AD| \times |AB|}{|BD| + |AB|} = \frac{c \times |AD|}{c + \frac{ac}{b+c}} = \frac{c(b+c)|AD|}{a+b+c}$$

D'où :

$$|AD| = |AI| \times \frac{2p}{2p-a}$$

Si T est le point de contact de BC avec le cercle inscrit, alors on a :

$$|AI|^2 = |AT|^2 + |TI|^2 = (p-a)^2 + r^2$$

Aire $(ABC) = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ donc $r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

Dès lors $|AI|^2 = (p-a)^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \frac{(p-a)(p(p-a)+(p-b)(p-c))}{p} = \frac{bc(p-a)}{p}$

Et donc

$$|AD| = \frac{2p}{2p-a}\sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}} = \frac{2\sqrt{p(p-a)bc}}{2p-a}$$

Démontrons maintenant que les bissectrices $[AD]$ et $[BE]$ ont la même longueur si et seulement si $a = b$

$$\begin{aligned}
|AD| = |BE| &\Leftrightarrow |AD|^2 = |BE|^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{4p(p-a)bc}{(2p-a)^2} = \frac{4p(p-b)ac}{(2p-b^2)} \\
&\Leftrightarrow \frac{(p-a)b}{2p-a)^2} = \frac{(p-b)a}{(2p-b)^2} \\
&\Leftrightarrow b(p-a)(a+c)^2 = a(p-b)(b+c)^2 \\
&\Leftrightarrow p(b(a+c)^2 - a(b+c)^2) = ab((a+c)^2 - (b+c)^2) \\
&\Leftrightarrow p(ba^2 + bc^2 - ab^2 - ac^2) = ab(2p+c)(a-b) \\
&\Leftrightarrow p(ab(a-b) + c^2(b-a)) = ab(2p+c)(a-b)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ p(a-b)(ab-c^2) = ab(2p+c)(a-b)$$
$$\Leftrightarrow\ a-b=0 \text{ ou } pab-pc^2 = 2abp+abc$$
$$\Leftrightarrow\ a=b \text{ ou } abp+abc+pc^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ a=b$$

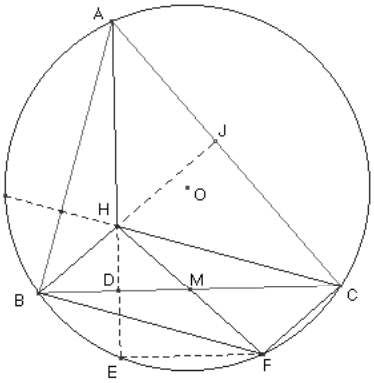
Cette démonstration est due à Christian Van Hooste (AR Vauban - Charleroi). On la trouve proposée comme exercice (n°351) dans « Géométrie » de Antoine Dalle (Edition 1938).

La droite de Steiner

Démonstration actualisée!!!!

Préalable 1

Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle, par rapport à chaque côtés et par rapport à chaque milieu de côtés, appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle.



BHCF est un parallélogramme

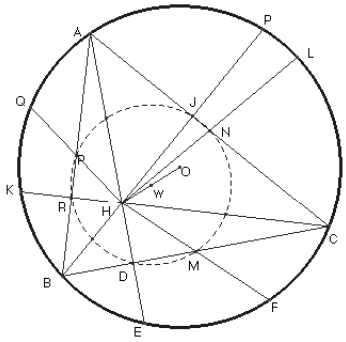
FC//BH?AC donc C appartient au cercle de diamètre [AF]

FB//CH?AB donc B appartient au cercle de diamètre [AF]

EF//BC?AE donc E appartient au cercle de diamètre [AF]

Dès lors, A,B,E,C,F appartiennent au cercle de diamètre [AF] qui est le cercle circonscrit au triangle.

Cadeau!



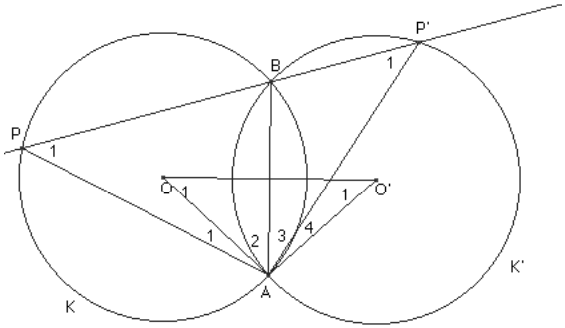
Les 9 points A, B, C, E, F, P, L, Q, K appartiennent à un même cercle.

L'homothétie de centre H et de rapport 0,5 appliquée à ce cercle, nous offre le « cercle d'Euler ».

Préalable 2

Si deux cercles K et K′ de centre O et O′ ont le même rayon et sont sécants en A et B alors une rotation de centre A applique O sur O′ donc aussi K sur K′.

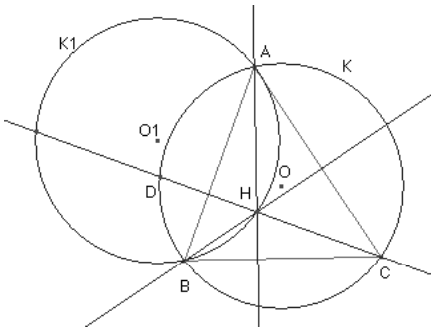
De plus l'image P′, par cette rotation, de tout point P de K appartient à la droite PB.



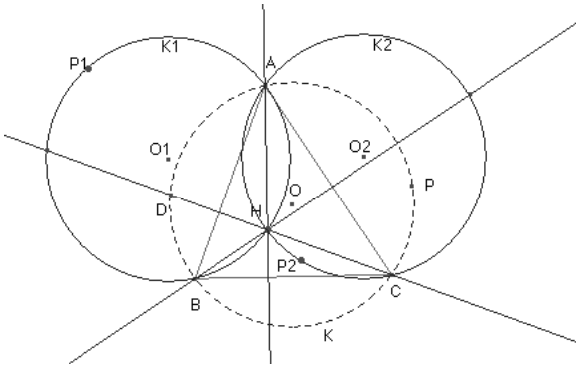
On a : mes(A123) = 180° - (mes(P1) + mes(P'1))
= 180° - (mes(01) + mes(0'1))
= mes(A234)

donc la rotation de centre A qui applique O sur O′ applique K sur K′ et, en particulier, applique P sur P′.

Cadeau !



K comprend D symétrique de H par rapport à AB Donc K1 comprend H symétrique de D par rapport à AB



Conséquence !

Soit $P \in K$

Son symétrique P1 par rapport à $AB \in K1$
Son symétrique P2 par rapport à $AC \in K2$

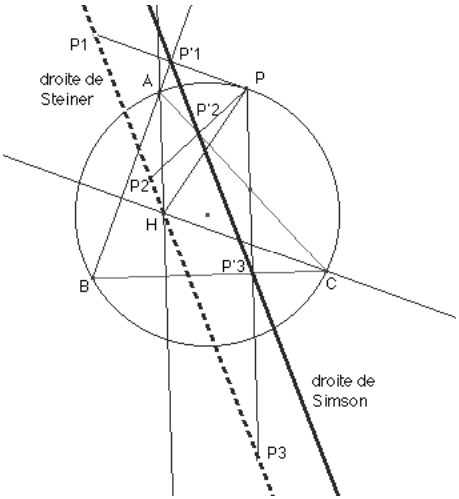
P2 est donc l'image de P1 par la composée des symétries d'axes AB et AC donc par la rotation de centre A qui applique K1 sur K2. Dans ce cas, P1 et P2 sont alignés avec H, deuxième point commun à K1 et à K2.

De la même façon, si P3 est le symétrique de P par rapport à BC alors P1 et P3 sont alignés avec H et P2 et P3 sont alignés avec H.

Conclusion

Les symétriques, par rapport aux côtés d'un triangle, d'un point du cercle circonscrit à ce triangle appartiennent à la même droite qui comprend l'orthocentre du triangle.

Cette droite est « la droite de Steiner ».



Derniers cadeaux!

L'homothétie de centre P et de rapport 0,5 applique P1 sur P'1, P2 sur P'2, P3 sur P'3 et H sur le milieu de [PH]. Ces quatre points sont donc alignés;

C'est la droite de Simson encore apelée « Wallace », relative au point P.

En outre, le point commun à PH et à la droite de Simson relative à P est un point du cercle d'Euler.

Le déterminant de Hankel construit sur les nombres d'Euler

C. RADOUX, *Université de Mons-Hainaut*

1. Résumé

Le but essentiel de ce très court article est de montrer qu'il est toujours possible aujourd'hui de trouver de nouvelles formules concernant de grandes théories classiques, même au seul moyen de techniques très élémentaires. J'ai énoncé, parmi beaucoup d'autres, le résultat qui va suivre pour la première fois en 1979, dans [2]. La preuve était alors obtenue grâce à une identité algébrico-analytique de Sylvester.

Un nouvel intérêt pour cette recherche est apparu en 2000 (voir [1], [3], [4]). En particulier, Jet Wimp, de la Drexel University de Philadelphie, a découvert un lien profond entre ce problème et les polynômes de Pollaczek. Cela m'a poussé à reprendre le calcul avec l'espoir de fournir une preuve vraiment élémentaire. C'est elle que je présente ici.

2. Définition

Soit $a = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ une suite de nombres complexes. Le déterminant

$$H_n^k(a) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} & \ldots & a_{n+k} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+4} & \ldots & a_{n+k+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+4} & a_{n+5} & \ldots & a_{n+k+2} \\ a_{n+3} & a_{n+4} & a_{n+5} & a_{n+6} & \ldots & a_{n+k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+k} & a_{n+k+1} & a_{n+k+2} & a_{n+k+3} & \ldots & a_{n+2k} \end{vmatrix}$$

est appelé le déterminant de Hankel de rang n et d'ordre k construit sur a.

En fait, on utilise parfois bien plus généralement une suite (a_k) d'éléments d'un corps, voire d'un anneau commutatif quelconque.

Adresse de l'auteur: Christian Radoux, Université de Mons-Hainaut, « Le Pentagone », 6 avenue du Champ de Mars, 7000 Mons, e-mail : Christian.Radoux@umh.ac.be

Exercices (immédiats)

- Si la suite a est constante, alors $H_n^k(a) = 0$ quels que soient k et n.
- Il en est de même si la suite a est une suite géométrique.
- Soit $p(X) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \cdots + c_dX^d$ un polynôme de degré d. Si la suite a est la suite des valeurs de p, $a_n = c_0 + c_1n + \cdots + c_dn^d$, alors quel que soit n, $H_n^k(a) = 0$ pour tout $k \geqslant d + 1$.

Les exemples qui précèdent pourraient faire douter de l'utilité des déterminants de Hankel. Nous reviendrons plus loin sur cette question d'utilité.

En attendant mentionnons encore le résultat (bien connu) suivant :

Soit la série formelle

$$f(X) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t X^t.$$

Alors

$$[f(X) \text{ est une fraction rationnelle}] \Leftrightarrow [\exists k, \exists M, \forall n \geqslant M, H_n^k(a) = 0]$$

Venons-en maintenant au résultat annoncé, et à sa nouvelle preuve, très élémentaire.

3. Les nombres d'Euler

Le n^e nombre d'Euler E_n peut être défini grâce à la série de Mac Laurin pour $\frac{1}{\cos x}$:

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}$$

Autrement dit

$$E_n = \left\{ \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \frac{1}{\cos x} \right\}_{x=0}$$

Ainsi $E_0 = 1$, $E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$, $E_4 = 1385$, ...

Voici le théorème annoncé :

Théorème : *Quel que soit n, le déterminant de Hankel H_0^n associé à la suite des nombres d'Euler vaut*

$$\prod_{k=0}^{n} ((2k)!)^2$$

Démonstration

Soit

$$E_{n,k} = \left\{ \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \frac{tg^{2k} x}{\cos x} \right\}_{x=0}$$

Evidemment, $E_{n,0}$ est le n^e nombre d'Euler E_n. Voici la table des premiers $E_{n,k}$:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	2				
2	5	28	24			
3	61	662	1320	720		
4	1385	24568	83664	100800	40320	
5	50521	1326122	6749040	13335840	11491200	3628800

Maintenant

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{tg^{2k} x}{\cos x} = 2k(2k-1) \frac{tg^{2k-2} x}{\cos x} + (8k^2 + 4k + 1) \frac{tg^{2k} x}{\cos x} + 2(k+1)(2k+1) \frac{tg^{2k+2} x}{\cos x}$$

En dérivant 2n fois les deux membres et en prenant leurs valeurs pour $x = 0$, nous avons donc aussi

$$E_{n+1,k} = 2k(2k-1)E_{n,k-1} + (8k^2 + 4k + 1)E_{n,k} + 2(k+1)(2k+1)E_{n,k+1} \qquad (1)$$

Notons d'abord deux conséquences immédiates :

1. Il est clair que pour tout $k > 0$, $E_{0,k} = 0$. De l'équation (1), on déduit alors par récurrence que $E_{n,k} = 0$ pour tout $k > n$ (conformément au tableau de valeurs ci-dessus).

2. Vu la première remarque, pour $k = n+1$, l'équation (1) nous donne

$$E_{n+1,n+1} = (2n+2)(2n+1)E_{n,n}$$

Une seconde récurrrence montre alors $E_{n,n} = (2n)!$.

Une troisième récurrence — un peu plus longue — nous livre la formule

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\frac{1}{\cos x} = \sum_{k=0}^{n} E_{n,k}\frac{\mathrm{tg}^{2k} x}{\cos x} \tag{2}$$

Clairement, la formule (2) est vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie pour n, et établissons-la pour $n+1$.

$$\frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}}\frac{1}{\cos x} = \sum_{k=0}^{n} E_{n,k}\frac{d^2}{dx^2}\frac{\mathrm{tg}^{2k} x}{\cos x}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} E_{n,k}\left(2k(2k-1)\frac{\mathrm{tg}^{2k-2} x}{\cos x} + (8k^2+4k+1)\frac{\mathrm{tg}^{2k} x}{\cos x} + 2(k+1)(2k+1)\frac{\mathrm{tg}^{2k+2} x}{\cos x}\right)$$

Cette expression se décompose en trois parties qui peuvent être manipulées en tenant compte de $E_{n,k} = 0$ pour $k > n$.

Première partie :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} E_{n,k}2k(2k-1)\frac{\mathrm{tg}^{2k-2} x}{\cos x} &= \sum_{k=1}^{n} E_{n,k}2k(2k-1)\frac{\mathrm{tg}^{2k-2} x}{\cos x} \\ &= \sum_{k'=0}^{n-1} E_{n,k'+1}2(k'+1)(2k'+1)\frac{\mathrm{tg}^{2k'} x}{\cos x} \\ &= \sum_{k'=0}^{n+1} E_{n,k'+1}2(k'+1)(2k'+1)\frac{\mathrm{tg}^{2k'} x}{\cos x}\end{aligned}$$

Deuxième partie :

$$\sum_{k=0}^{n} E_{n,k}(8k^2+4k+1)\frac{\mathrm{tg}^{2k} x}{\cos x} = \sum_{k=0}^{n+1} E_{n,k}(8k^2+4k+1)\frac{\mathrm{tg}^{2k} x}{\cos x}$$

Troisième partie :

$$\sum_{k=0}^{n} E_{n,k} 2(k+1)(2k+1)\frac{tg^{2k+2}x}{\cos x} = \sum_{k'=1}^{n+1} E_{n,k'-1} 2k'(2k'-1)\frac{tg^{2k'}x}{\cos x}$$
$$= \sum_{k'=0}^{n+1} E_{n,k'-1} 2k'(2k'-1)\frac{tg^{2k'}x}{\cos x}$$

En rassemblant les trois parties, et en tenant compte de (1), on obtient (2). En dérivant $2m$ fois les deux membres de (2), on obtient immédiatement la formule « d'addition » :

$$E_{n+m} = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} E_{n,k} E_{m,k}$$

En d'autres termes, la matrice de Hankel $E = (E_{i+j})$ est le produit de la matrice triangulaire $(E_{n,k})$ par sa propre transposée :

$$\begin{pmatrix} E_0 & E_1 & \dots & E_n \\ E_1 & E_2 & \dots & E_{n+1} \\ E_2 & E_3 & \dots & E_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_n & E_{n+1} & \dots & E_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0,0} & 0 & \dots & 0 \\ E_{1,0} & E_{1,1} & \dots & 0 \\ E_{2,0} & E_{2,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{n,0} & E_{n,1} & \dots & E_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0,0} & E_{1,0} & \dots & E_{n,0} \\ 0 & E_{1,1} & \dots & E_{n,1} \\ 0 & 0 & \dots & E_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E_{n,n} \end{pmatrix}$$

Comme le déterminant d'un produit de deux matrices est le produit des déterminants et que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux, nous obtenons la thèse.

4. A propos de l'utilité

On doit aussi au mathématicien allemand Hermann Hankel (1839–1873) l'étude fine de fonctions qui portent aujourd'hui son nom. Très liées aux fonctions de Bessel, elles sont, comme elles, particulièrement utiles aux physiciens théoriciens. Utiles ...

C'est toujours avec réserve que je prononce le mot utilité en mathématiques. Du moins quand on en fait un *a priori*. L'étude d'un concept,

l'élaboration de théorèmes me sont toujours apparus comme des jeux esthétiques et intellectuels libres avant tout. Et je m'insurge radicalement contre des points de vue étriqués qui, selon moi, nient la nature profonde de notre science, qui est aussi un art. J'insiste donc sur la nécessité de sauvegarder une recherche libre, à l'évolution souvent louvoyante et aux conséquences inattendues. Je ne veux pas digresser davantage là-dessus ici, mais je suis prêt à développer mon opinion dans un autre article si cela intéresse assez de collègues.

Ajoutons seulement que les applications, les liens les plus féconds seraient souvent tués dans l'oeuf si l'utilitarisme fanatique, qui est bien la marque de notre époque, l'emportait. Parce qu'ils sont inattendus, tout simplement. Cela étant, quand on décèle de tels phénomènes, c'est aussi avec jubilation.

Voici encore d'autres applications des déterminants de Hankel, plus difficiles à expliquer.

— Les déterminants de Hankel que j'ai calculés s'expriment souvent comme produits de factorielles. Ils sont du même coup divisibles par de très hautes puissances de p, nombre premier fixé, lorsque k grandit. Cela induit, en liaison avec la propriété qui vient d'être énoncée, des propriétés p-adiques très particulières.
— Si nous prenons pour a_n le nombre de Bell B_n (nombre d'équivalences sur un ensemble à n éléments, nous pouvons montrer [2] que le calcul de $H_k^O(a)$ est essentiellement équivalent à celui de la plus longue séquence constante de B_n consécutifs réduits modulo p. Il permet d'ailleurs de la déterminer explicitement. C'est en fait ce qui avait motivé initialement mon intérêt pour ce sujet. Il n'en est que plus frappant d'apprendre par un collègue, professeur permanent au ... Laboratoire de Physique Théorique des Liquides, de l'Université de Paris VI que *The positivity of Hankel determinants is a necessary and sufficient condition for the existence of positive solutions of the Stieltjes moment problem. This last problem is équivalent to the resolution of unity of important sets of physical states in Quantum Mechanics, called Coherent States. Unfortunately, only a few Hankel déterminants can actually be calculated.* Et ce collègue conclut en considérant tout nouveau résultat concernant les déterminants de Hankel comme important. Cette citation n'est faite ici que pour montrer que la recherche frénétique de la rentabilité immédiate, le mépris de la recherche pure ne sont pas forcément les voies idéales pour la résolution de problèmes réputés plus concrets. A méditer, de l'enseignement primaire à l'université!

Bibliographie

[1] R. Ehrenborg, The Hankel Determinant of Exponential Polynomials, Amer. Math. Monthly, vol. 107, nb. 6, 557–560, 2000.

[2] C. Radoux, Calcul effectif de certains déterminants de Hankel, Bull. Soc. Math. Belg., Sér. B, 31. 49–55, 1979.

[3] C. Radoux, Addition formulas for polynomials built on classical combinatorial sequences, J. of Comput. Appl. Math., 115, 471–477, 2000.

[4] J. Wimp, Hankel Determinant of some polynomials arising in combinatorial analysis, Numerical Algorithms, 24, 179–193, 2000

★

★★

★★★

★★

★

Internet Corner

Nous vous invitons cette fois à encourager vos élèves à consulter le site http ://www.ulb.ac.be/assoc/bms/info créé récemment par la *Société Mathématique de Belgique*, à l'occasion de l'année mathématique 2000.

On y trouve une description de la place des mathématiques aujourd'hui, un relevé des débouchés et carrières des mathématiciens en Belgique, un texte (paru dans *Mathématique et Pédagogie*!) sur la recherche actuelle et une liste de liens.

Nos élèves qui aiment les mathématiques s'en détournent souvent dans leur choix d'études supérieures, par méconnaissance des possibilités de carrières. Ce site se donne pour but de les informer de façon aussi précise que possible.

FACULTÉ POLYTECHNIQUE DE MONS

ARCHITECTURE
CHIMIE
ELECTRICITE
INFORMATIQUE ET GESTION
MECANIQUE
MINES-GEOLOGIE
SCIENCE DES MATERIAUX

Inscription à l'examen d'entrée

jusqu'au 29 juin 2001 (1ère session)
du lundi au vendredi de 8 h à 12 h (le mercredi de 14 à 16 h)
les jours non fériés et hors congés scolaires

du 16 juillet au 24 août 2001 (2ème session)
du lundi au vendredi de 8h à 12h, les jours non fériés

Renseignements au Secrétariat des Etudes :
9, rue de Houdain - 7000 MONS
Tél.: 065/37 40 30 - Fax: 065/37 40 34
E-mail: secretu@fpms.ac.be
Website: http://www.fpms.ac.be

POLY TECH. MONS

Un peu de programmation ?

F. MICHEL,

Pourquoi programmer alors que de nombreux logiciels sont disponibles sur nos machines ? Parce que nous sommes des enseignants et pas des consommateurs ; nous devons expliquer aux élèves comment les machines fonctionnent. La programmation est aussi un excellent exercice d'abstraction et de rigueur, elle exige une maîtrise du langage souvent déficiente chez les jeunes.

Je propose donc d'ouvrir une rubrique sur ce thème pour promouvoir l'utilisation intelligente des ordinateurs et des calculatrices programmables. J'essayerai de présenter des applications implantées de diverses manières ; j'utiliserai si possible les logiciels de programmation gratuits qu'on peut trouver sur Internet.

Les commentaires et les contributions sont vivement souhaitées...

Introduction.

Nous allons comparer quelques façon de programmer la recherche du pgcd avec l'algorithme d'Euclide. Ce n'est plus vraiment à la mode aujourd'hui mais j'ai encore l'espoir de voir quelques collègues s'intéresser à la programmation quand on sait que ce secteur est particulièrement demandeur.

Pour pouvoir tester les programmes proposés il faut installer les logiciels suivants :

- Un émulateur de HP49G :
  `http://www.hp.com/calculators/software/49g/index.html`
  ou posséder une machine à calculer programmable.
- Le langage « Python » :
  `http://www.python.org`
- CygWin et g++ :
  `http://www.cygwin.com` (Unix pour Windows)
  ou bien avoir « Linux » sur sa machine ou bien encore un « C++ » quelconque.
- Le langage « Clean » :
  `http://www.cs.kun.nl/~clean`

Adresse de l'auteur: Francis Michel, 28 avenue des Campanules, 1170 Bruxelles.

Tous ces produits sont gratuits. « Clean » et « Python » tournent sous « Windows », « Mac » ou « Linux ».

Première approche.

Soit a et b deux entiers positifs avec $a > b$. L'algorithme peur s'écrire :

```
pgcd(a,0)=a
pgcd(a,b)=pgcd(b,a mod b)
```

Cette écriture récursive peut troubler mais c'est bien ainsi que fonctionne le calcul : on retranche b de a autant de fois qu'on peut (a mod b) puis on recommence avec b et ce résultat (inférieur à b) jusqu'à avoir a mod b nul.

Par exemple :

```
pgcd(560,91)=pgcd(91,14)=pgcd(14,7)=pgcd(7,0)=7
```

On peut programmer ce calcul sur une calculatrice et observer son déroulement. Sur la HP49G on tape :

« → A B « B A B MOD » »

qu'on sauve sous un nom au choix **'e1'** par exemple. On entre 560 et 91 dans le stack (les lignes de calcul) et la pression de **'e1'** donnera chaque fois l'étape suivante.

Le principe est simple et peut se faire avec n'importe quelle machine. Cette première approche est particulièrement dépouillée de toute difficulté sur le plan informatique et se concentre sur les notions d'algorithmique. Il me semble bon de ne pas automatiser l'itération dans un premier temps.

Deuxième approche.

On installera « Python » facilement en suivant les instructions données sur le site mentionné plus haut. « Python » est un interpréteur. Les lignes tapées sont directement exécutées : **560%91** donne 7 ; **%** signifiant mod comme en C++ d'ailleurs. On peut définir une fonction de la manière suivante :

```
def e1():
        global a,b
        r=a%b
        a=b
        b=r
        return a,b
```

On écrira ensuite :

```
        a=560
        b=91
```

et `e1()` donnera les résultats successifs.

C'est le moment d'introduire une procédure d'itération :

```
def e2(a,b):
        while b<>0:
                r=a%b
                a=b
                b=r
        return a
```

Ici *a* et *b* ne sont plus des variables globales dans l'environnement mais locales dans la fonction. La boucle `while` fera l'opération « tant que » *b* n'est pas nul et donnera finalement *a*, le *pgcd*. `e2(560,91)` donne `7`. Notons que les nombres entiers peuvent être aussi longs qu'on le désire si on met un « `L` » à la fin :

`e2(715550810292950184L,11068202250L)` donne `126L`.

Troisième approche.

Le « C » reste sans doute le langage le plus usuel. Voyons comment l'utiliser sous « Unix » qui est sans doute la façon la plus efficace. On utilisera par exemple le compilateur « g++ » dans « CygWin » qui est une façon simple et gratuite de l'implanter sous « Windows ». Son installation ne pose aucun problème et il tourne dans une fenêtre « DOS ». Ecrivons le programme suivant sous le nom `e1.cpp`. On peut utiliser

- l'éditeur `vi` en tapant : `vi e1.cpp` pour ouvrir l'éditeur
- la touche `Insert` pour taper du texte,

— Esc pour terminer l'insertion du texte,
— :x pour sortir de vi en sauvant le programme.

```
#include <iostream>
int main()
{
int a;
int b;
cout<<"a=";
cin>>a;
cout<<"b=";
cin>>b;
while (b!=0){
          int r=a%b;
          a=b;
          b=r;}
cout<<a;
}
```

On doit ensuite compiler le programme en tapant :

```
g++ e1.cpp
```

et l'exécuter avec

```
./a
```

« g++ » donnera par défaut le nom **a.exe** au résultat de la compilation. **./** est nécessaire en « Unix » pour indiquer le chemin du fichier à exécuter.

Le programme demande les valeurs de a et b et fournit le pgcd.

Cette méthode est plus lourde mais donne un produit mieux fini et plus facile à distribuer. Les exécutables ne laissent cependant pas voir leur code ce qui est frustrant pour le mathématicien curieux.

Quatrième approche.

L'installation de Clean sous Windows est classique. Pour programmer on ouvre un nouveau projet dans l'interface graphique, on tape le programme, on le compile et on l'exécute ; le résultat est affiché dans une fenêtre DOS. « Clean » est un langage qui se prête bien à la récursivité ; voyons une

façon d'y implanter le pgcd (taper **Alt-91** et **Alt-93** pour les crochets si le clavier pose problème) :

```
module euclide
import StdEnv
e[a,0]=a
e[a,b]=e[b,a mod b]
Start=e[560,91]
```

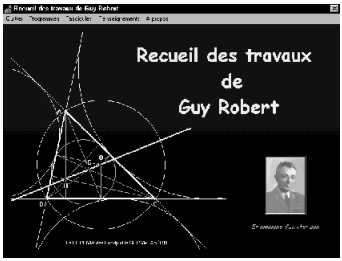
donne 7.

On voit qu'il s'agit d'une transcription quasi littérale de l'algorithme tel que nous l'avons énoncé.

Conclusion.

A la fin des années '70 *Mathématique et Pédagogie* avait publié de nombreux articles sur la programmation sans avoir convaincu les enseignants. Même si l'algorithmique est au programme son enseignement reste perçu comme accessoire. Personnellement je fus lassé de lutter pour imposer cette discipline. Les nouveaux langages disponibles et la demande croissante de programmeurs m'incite à renouveler mes efforts. J'ai essayé d'être le plus éclectique possible dans mes choix sachant que rien n'est plus insupportable que de se voir imposer une méthode de travail et un matériel unique. Ce travail nécessite cependant un feed-back des lecteurs, mon e-mail est ouvert aux commentaires.

La FOPEMA des FUNDP et la SBPMef présentent le CD-ROM des programmes mathématiques de G. Robert.



Prix : 250 FB, port compris.

Une publication de la Commission Pédagogique de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française.

Le succès rencontré par notre dossier pédagogique n° 6 a rapidement mené à l'épuisement de notre premier tirage.

Bonne nouvelle : le fascicule est à nouveau disponible aux conditions habituelles précisées dans « Le coin du trésorier » en fin de revue.

Alice et Brigitte ont pris des vacances dans un endroit de rêve : des conditions de vie très proches de la nature (comprenez entre autres : logement sous tente), mille et une possibilités d'activités sportives, de loisir, de détente, ..., le tout à un prix intéressant. Le prospectus annonce, pour la période envisagée une température moyenne de 25° et une brise légère. Alice est revenue enchantée; Béatrice très mécontente : un gros rhume, des mauvaises nuits fréquentes, des maux de tête, ... Ah! Si elle avait su que les écarts de température étaient importants et en particulier que nuits et petits matins étaient frais!

Il y a des situations que la connaissance de la seule moyenne ne suffit absolument pas à résumer. Il y en a d'autres dont la moyenne est la seule approche valable. Qu'est-ce donc par exemple que ma taille ou mon poids? Ce dossier pédagogique, conçu dans l'optique de « la mathématique du citoyen », comporte certes des aspects techniques (définitions, formules, histogrammes, ... mais c'est d'abord une réflexion à partir de situations ayant à voir avec le quotidien, en particulier celui des élèves.

Dans nos classes

Y. Noël-Roch et P. Demin

Voici un énoncé trouvé dans la revue « *Mathematics Teacher* », vol. 93, n° 8, novembre 2000.

Continue le processus :
$$1^3 = 1^2 - 0^2$$
$$2^3 = 3^2 - 1^2$$
$$3^3 = 6^2 - 3^2$$
$$4^3 = \cdots$$
$$5^3 = \cdots$$

Ceci peut être exploité comme
- une petite curiosité pour s'exercer à introduire, à calculer des puissances dans les naturels
- une occasion de donner son vrai sens à la notion d'égalité. En effet, cet énoncé amènera certainement dans la classe des « égalités fausses ».
- une activité suffisamment ouverte pour que des élèves d'aptitudes très différentes travaillent individuellement à leur propre rythme : obtenir une seule égalité, en obtenir deux, essayer de prolonger le tableau proposé.

1. En première année

Si les égalités sont disposées en alignant les termes semblables en colonnes comme nous l'avons fait ci-dessus, nous pensons que les élèves risquent de remarquer des « règles de passages verticaux » :
- l'opérateur +1 dans la première colonne :

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5$$

- dans la deuxième colonne :

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15$$

- dans la troisième colonne :

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10$$

(°) Adresses des auteurs : Y. Noël-Roch, Rue du 1er Chasseur à cheval 16, Boîte 14, 7000 Mons
P. Demin, 65 Rue de Bonsecours, 5500 Dinant, e-mail : patrick.demin@skynet.be.

C'est **u**ne des manières de découvrir les égalités demandées ... il existe d'autres démarches et nous serions heureux de connaître celles qui ont été découvertes par vos élèves. Elle présente ... à notre point de vue ... au moins deux avantages :

— elle fournit les égalités $4^3 = 10^2 - 6^2$ et $5^3 = 15^2 - 10^2$ sans qu'on soit très assuré de leur validité. Il faut donc les vérifier!
— elle permet à l'élève de compléter mécaniquement le tableau par $6^3 = \cdots$, $7^3 = \cdots$, etc.

Voilà donc un travail appréciable pour une classe de première année. Mais comme c'est peu commode pour compléter $2001^3 = \cdots$!

2. En deuxième-troisième années

Pour « algébriser », « rencontrer en situation le carré d'une somme », « résoudre une équation en n'effectuant pas aveuglément les calculs possibles » nous disposons d'une approche toute différente, que nous appellerons « horizontale » par opposition à la précédente.

Supposons qu'à partir du problème posé précédemment, la classe dispose du tableau

$1^3 = 1^2 - 0^2$ $\qquad$ $3^3 = 6^2 - 3^2$ $\qquad$ $5^3 = 15^2 - 10^2$

$2^3 = 3^2 - 1^2$ $\qquad$ $4^3 = 10^2 - 6^2$ $\qquad$ $6^3 = 21^2 - 15^2$

et souhaite compléter

$$3690^3 = \ldots^2 - \ldots^2$$

Parions qu'ils n'auront aucune envie d'écrire toutes les lignes intermédiaires!!

2.1. Une première approche

Sans que cela soit exprimé directement dans les termes qui suivent, des observations peuvent conduire au fait que

toutes les égalités ont la forme $a^3 = b^2 - c^2$ **avec** $b - c = a$

ou encore, si x est le plus petit et y le plus grand des deux nombres cherchés

$$a^3 = (x + a)^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad a^3 = y^2 - (y - a)^2$$

Pour $a = 3690$, nous devons donc trouver x tel que $3690^3 = (x+3690)^2 - x^2$.

Belle occasion de résoudre une équation intelligemment, en évitant des calculs inutiles :

$$x = \frac{3690^3 - 3690^2}{2 \times 3690} = \frac{3690^2 - 3690}{2} = \frac{3690 \times 3689}{2} = 1845 \times 3689$$

Donc, (grâce à une calculatrice !), $x = 6806205$. Et nous **savons** que

$$3690^3 = 6809895^2 - 6806205^2$$

Nous parions que la plupart des élèves ne seront pas convaincu(e)s que cette égalité est correcte. Son contrôle donnera une bonne occasion de réfléchir à l'utilisation des calculatrices disponibles dans le classe.

2.2. Une deuxième approche

Poussons plus loin et complétons l'égalité

$$n^3 = \ldots^2 - \ldots^2$$

A partir de la remarque déjà exprimée ci-dessus, nous recherchons x en fonction de n sachant que

$$n^3 = (x + n)^2 - x^2$$

La résolution de l'équation $n^3 = x^2 + 2nx + n^2 - x^2$ conduit à $2nx = n^2(n-1)$ d'où

$$x = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{et} \qquad x + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La formule générale d'où découlent toutes les égalités cherchées est donc

$$\boxed{n^3 = \frac{n(n+1)}{2}^2 - \frac{n(n-1)}{2}^2}$$

Un élève particulièrement perspicace l'a peut-être perçu plus tôt? Communiquez-nous vos expériences!

Yolande Noël-Roch

3. De la particularité de certains nombres.

La situation ci-dessous avait, à son origine, un aspect ludique mais ma mémoire n'en a conservé que son caractère mathématique.

On invite les élèves à choisir un naturel $N = \overline{abc}$ tels que $a > b > c$ (conditions initiales)

Le nombre $\overline{cba}$ étant le nombre retourné que l'on désigne par N', on leur demande, dans un premier temps, de calculer la différence $N - N'$

Le professeur demande ensuite à ses élèves de lui communiquer le chiffre des unités de leur résultat et, surprise, le professeur est capable de donner cette différence.

Si cette différence est notée $\overline{xyz}$, on propose dans un second temps de faire calculer la somme $\overline{xyz} + \overline{zyx}$: dans tous les cas de figure, le professeur connaît cette somme!

Cette expérience a été réalisée dans plusieurs classes; les élèves, enthousiasmés, se demandent comment cela est possible, selon leurs propres termes; c'est alors qu'une démonstration s'avère nécessaire.

Démonstration.

$N = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$

$N' = 100 \cdot c + 10 \cdot b + a$

$N - N' = 99 \cdot a - 99 \cdot c = 99 \cdot (a - c)$ multiple de 9 et de 11 (1)

Cette différence étant notée $\overline{xyz}$, compte tenu des conditions initiales, y est égal à 9. Cette différence s'écrit maintenant $\overline{x9z}$ avec $x + z = 9$ (en vertu de (1)).

Calculons $\overline{x9z} + \overline{z9x}$

$100 \cdot x + 90 + y + 100 \cdot y + 90 + x$

$= 101 \cdot (x + z) + 180$

$= 1089$

$= 990 + 99$

On peut faire de même avec un naturel de deux chiffres et étendre la situation également à un naturel de 4 chiffres. Peut-on prévoir les résultats?

4. Du calcul rapide du carré de certains naturels terminés par 5 mais différents de 5.

Calculons successivement :

$15^2 = 2\ 25$

$25^2 = 6\ 25$

$35^2 = 12\ 25$

$75^2 = 56\ 25$

$95^2 = 90\ 25$

Observons les résultats et plus particulièrement la partie située à gauche de 25 :

$2 = 1 \times 2$

$6 = 2 \times 3$

$12 = 3 \times 4$

$56 = 7 \times 8$

$90 = 9 \times 10$

Que vaut le carré de 125? Nous calculons $12 \times 13 = 156$ d'où $125^2 = 15625$. Il s'agit là d'une technique qui peut s'avérer utile dans certains cas.

Justification du procédé

Nous justifions le procédé pour des naturels à trois chiffres.

k et k' étant des naturels variant de 1 à 9, tout naturel de trois chiffres terminé par 5 s'écrit :

$100 \cdot k + 10 \cdot k' + 5 = 100 \cdot k + 10 \cdot (k' + 1) - 5$

Elevons au carré :

$[100 \cdot k + 10 \cdot (k' + 1) - 5]^2$

$= [10 \cdot (10 \cdot k + k' + 1) - 5]^2$

$= 100 \cdot (10 \cdot k + k' + 1)^2 - 100 \cdot (10 \cdot k + k' + 1) + 25$

$= 100 \cdot (10 \cdot k + k' + 1) \cdot (10 \cdot k + k' + 1 - 1) + 25$

$= 100 \cdot (10 \cdot k + k' + 1) \cdot (10 \cdot k + k') + 25$

Ainsi, si $k = 2$ et si $k' = 9$, $295^2 = 30 \times 29 \times 100 + 25 = 87025$

Patrick Demin

* *

Petites histoires

Le résultat du tirage du JOKER du 9–12–2000 vous a peut-être échappé.

Le voici : | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 5 | 7 |

Il montre ce que tout matheux sait : l'équiprobabilité des 10^7 résultats différents du tirage du Joker. Et pourtant, beaucoup d'élèves ont tendance à croire qu'un tel résultat –formé de 6 fois le chiffres 7– est « peu probable ». Maintenant, quant à savoir si un tel résultat resortira bientôt

* *

Voltaire disait : « *Un astrologue ne saurait avoir le privilège de se tromper toujours* ».

Un calcul tout simple permet de mieux comprendre cette réflexion.

Imaginons qu'un « devin » vous annonce 10 évènements qui ont chacun 1 chance sur 3 d'arriver. Savez-vous que la probabilité que l'un d'entre eux, au moins, se produise est de plus de 98% ?

Mathématiquement, il s'agit d'une loi binomiale $\mathfrak{Bi}(10, \frac{1}{3})$ pour laquelle vous recherchez la $P(\mathfrak{X} > 0) = 1 - P(\mathfrak{X} = 0) = 1 - C_{10}^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 1 - 0.017 = 0.983$. Stupéfiant, non ?

Olympiades

C. Festraets

Voici les solutions des trois derniers problèmes de l'Olympiade Mathématique Internationale 2000.

Problème 4

Un magicien a 100 cartes numérotées de 1 à 100. Il les répartit dans trois boîtes, une rouge, une blanche et une bleue, de telle sorte que chaque boîte contienne au moins une carte. Un spectateur choisit deux de ces trois boîtes, tire une carte dans chacune d'elles et annonce la somme des nombres figurant sur les cartes tirées. Connaissant cette somme, le magicien identifie la boîte dans laquelle aucune carte n'a été tirée. De combien de façons le magicien peut-il répartir les cartes dans les boîtes de telle sorte que ce tour de magie réussisse toujours? (2 façons de répartir les cartes sont considérées comme différentes si au moins une carte est placée dans deux boîtes différentes).

Solution de François FOUCART de l'athénée E. Bockstael à Bruxelles.

Notons la boîte rouge r (r_i ses éléments), la bleue b et la blanche a.

Pour que le tour réussisse, il faut que $\forall i,j,k,l$

$$r_i + b_j \neq \begin{cases} a_k + b_l \\ a_k + r_l \end{cases} ; \quad b_i + a_j \neq \begin{cases} a_k + b_l \\ b_k + r_l \end{cases} ; \quad a_i + r_j \neq \begin{cases} r_k + b_l \\ b_k + a_l \end{cases}$$

(tant que les éléments considérés existent).

La couleur des boîtes n'intervient pas dans l'existence de solutions, on peut donc considérer qu'on place les cartes d'abord dans r, puis dans b, puis dans a; le nombre de solutions sera ensuite multiplié par 3!.

Considérons les différents placements possibles des cartes 1, 2, 3.

- $1 \in r$, $2 \in b$ et $3 \in a$
  Si pour un certain $n \in \{4,5,\ldots,100\}$, on a $n-3 \in r$, $n-2 \in b$, $n-1 \in a$, n ne peut pas appartenir à b ni à a car $(n-3)+n = (n-1)+(n-2)$, donc $n \in r$. Par analogie, on trouve que si $n-3$, $n-2$ et $n-1$ sont dans des boîtes différentes, alors n et $n-3$ sont dans la même boîte. Par récurrence, on obtient que si, $\forall k < n$, $n > 3$, on a

$$k \in r \Leftrightarrow k \equiv 1 \pmod 3$$
$$k \in b \Leftrightarrow k \equiv 2 \pmod 3$$
$$k \in a \Leftrightarrow k \equiv 0 \pmod 3$$

alors il en sera de même pour n et on obtient la solution suivante (car cette relation est vérifiée pour $\{1,2,3\}$).

$$r = \{1,4,7,\ldots,100\}, \quad b = \{2,5,8,\ldots,98\}, \quad a = \{3,6,9,\ldots,99\}$$

Le magicien découvrira la boîte non utilisée en regardant la congruence de la somme modulo 3 :

$$r_i + b_j \equiv 0 \pmod 3$$
$$r_i + a_j \equiv 1 \pmod 3$$
$$b_i + a_j \equiv 2 \pmod 3$$

on obtient donc $3! = 6$ solutions.

- $1, 2 \in r$ et $3 \in b$
  $4 \notin a$, car $4 + 1 = 3 + 2$
  Soit $x > 3$, si $x \in r$, comme $x + 2 = (x + 1) + 1$, alors $x + 1 \notin a$,
  si $x \in b$, comme $x + 3 = (x + 1) + 2$, alors $x + 1 \notin a$.
  Par récurrence, on voit qu'on ne peut placer aucun élément dans a, ce cas est impossible.
- $1, 3 \in r$, $2 \in b$
  A nouveau $4 \notin a$ car $4 + 1 = 2 + 3$
  Soit $x > 3$, si $x \in r$, comme $x + 2 = (x + 1) + 1$, alors $x + 1 \notin a$,
  si $x \in b$, comme $x + 3 = (x + 1) + 2$, alors $x + 1 \notin a$.
  Comme dans le cas précédent, il est impossible de mettre une carte dans a.
- $1 \in r$ et $2, 3 \in b$

  1. Soit $x > 3$ le plus petit élément de a.
     Si $x + 1 \in a$, alors $x + 2 \notin a$ et $\notin b$ car $(x + 1) + 2 = (x + 2) + 1$
     $x + 2 \notin r$ car $(x + 1) + 3 = (x + 2) + 2$
     donc $x + 1 \notin a$ et on ne peut placer que 100 dans a; comme une carte doit appartenir à a, on a $100 \in a$.
  2. Si $4 \in r$, comme $100 + 3 = 99 + 4$, on doit avoir $99 \in r$ ce qui est impossible car $99 + 2 = 100 + 1$, d'où $4 \in b$. De plus $100 + 1 = 99 + 2 = 98 + 3 = 97 + 4$, d'où $99, 98, 97 \in b$.
  3. Supposons que $\forall k \leqslant x < 95$, $3+k$, $4+k$, $99-k$, $98-k$, $97-k \in b$.
     Si $5 + x \notin b$, on a $5 + x \notin r$ car $(5 + x) + (99 - x) = 100 + 4$, d'où $5 + x \in a$, ce qui entraîne $x = 95$ et est à rejeter, donc $5 + x \in b$.

De plus, comme $100+1=(96-x)+(5+x)$, on a $96-x\in b$.
D'où $3+(x+1)=4+x\in b$
$4+(x+1)=5+x\in b$
$99-(x+1)=98-x\in b$
$98-(x+1)=97-x\in b$
$97-(x+1)=96-x\in b$
et comme notre supposition initiale est vérifiée pour $k=0$, par récurrence on obtient que tous les nombres de 2 à 99 appartiennent à b.

Solution : $r=\{1\}$, $b=\{2,3,4,\ldots,99\}$, $a=\{100\}$

$$\forall i,j : r_i+b_j\in\{3,4,\ldots,100\}$$
$$r_i+a_j=101$$
$$a_i+b_j\in\{102,103,\ldots,199\}$$

d'où 6 nouvelles solutions.

- $1,2,3\in r$
  Soit $x+1$ le plus petit élément qui n'est pas dans r, on a $x+1\in b$ et $\{1,2,\ldots,x\}\subset r$.
  La boîte a n'est pas vide, soit y le plus petit élément de a, avec $y>x+1$ et $y-1\notin a$ $y-1\notin r$ car $(y-1)+(x+1)=x+y$
  $y-1\notin b$ car $(y-1)+2=y+1$
  D'où, cette situation est impossible
  Il y a au total $2.3!=12$ solutions.

Problème 5

Existe-t-il un entier strictement positif n tel que n soit divisible par exactement 2000 nombres premiers distincts et 2^{n+1} soit divisible par n ?

Solution de P. BORNSZTEIN de Courdimanche

Oui, un tel entier existe.

On dira que l'entier $n>0$ vérifie la propriété P si et seulement si

$$n\equiv 0 \pmod 3 \qquad (1)$$
$$2^{n+1}\equiv 0 \pmod n \qquad (2)$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ qui vérifie la propriété P. Alors $n\geqslant 3$ et n impair (puisque n divise 2^n+1 qui est impair).

On a :

$$2^{3n} + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$$

De (2), on déduit que n divise $2^{3n} + 1$

De (1), on a $n = 3\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ impair. Donc

$$2^{2n} - 2^n + 1 \equiv (-1)^{2\alpha} - (-1)^{\alpha} + 1 \equiv 3 \pmod 9$$

Par suite, $2^{2n} - 2^n + 1$ est divisible par 3, mais pas par 9. On a alors

$2^{3n} + 1 = 3(2^n + 1)k$, avec $k = \frac{2^{2n} - 2^{n+1}}{3}$ entier non divisible par 3 et impair;

de plus, pour $n \geqslant 3$, on a $k = \frac{2^n(2^{n-1})+1}{3} \geqslant \frac{8\times 7+1}{3} \geqslant 2$.

- Si p est un nombre premier qui divise $2^n + 1$ et k,
  comme $3k = (2^n + 1)(2^n - 2) + 3$, p divise donc 3; d'où $p = 3$, ce qui contredit que k est non divisible par 3. Ainsi $2^n + 1$ et k sont premiers entre eux.
- Puisque $k \geqslant 2$, on peut choisir p premier qui divise k. D'après ci-dessus, p ne divise pas $3n$ et p est impair. Soit alors $n' = 3pn$.
  On a alors $n' \in \mathbb{N}^*$, divisible par 3. De plus n' possède exactement un diviseur premier de plus que n.
  Enfin, puisque p est impair, le polynôme $f(x) = x^p + 1$ est divisible par $x+1$ dans $\mathbb{Z}[x]$. Par suite, $2^{n'} + 1 = (2^{3n})^p + 1$ est divisible par $2^{3n} + 1$.
  Or $2^{3n} + 1 = 3k(2^n + 1)$ est divisible par $3pn = n'$.
  Donc $2^{n'} + 1 \equiv 0 \pmod{n'}$ et finalement n' vérifie la propriété P.

On a ainsi prouvé que si n vérifie la propriété P, on peut construire un entier n' qui vérifie également la propriété P et qui a exactement un diviseur premier de plus que n.

Partant de $n = 3$, qui vérifie la propriété P, et en répétant 1999 fois ce procédé, on construit ainsi un entier strictement positif N ayant exactement 2000 diviseurs premiers et qui vérifie la propriété P.

En particulier, N divise $2^N + 1$. Ce qui assure la conclusion.

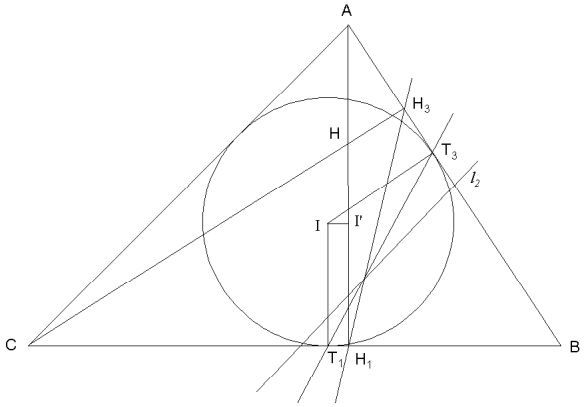
Problème 5

Soient AH_1, BH_2,CH_3 les hauteurs d'un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Le cercle inscrit dans le triangle ABC est tangent respectivement

aux côtés BC, CA, AB en T_1, T_2, T_3. On désigne respectivement par I_1, I_2, I_3 les symétriques des droites H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2, par rapport aux droites T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2. Montrer que I_1, I_2, I_3 déterminent un triangle dont les sommets appartiennent au cercle inscrit dans le triangle ABC.

Solution de P. BORNSZTEIN de Courdimanche.

On note Γ le cercle inscrit dans ABC, de centre I et de rayon r. Soit H l'orthocentre de ABC. Puisque ABC est acutangle, H est intérieur à ABC.



1. On a $I_1//BC$, $I_2//AC$, $I_3//AB$

   En effet, en termes d'angles de droites, on a :

$$\begin{aligned}(H_1H_3, BC) &= (H_1H_3, H_1B)\\ &= (HH_3, HB) \text{ car } H_1, H_3, H, B \text{ sont concycliques (cercle de diamètre } [HB])\\ &= (HH_3, AB) + (AB, AC) + (AC, HB)\\ &= (AB, AC) \text{ car } HH \perp AB \text{ et } HB \perp AC\end{aligned}$$

   De plus, puisque T_1, T_3, I, B sont concycliques (cercle de diamètre $[IB]$), on a $(T_3T_1, BT_1) = (T_3I, BI)$.

   Alors

$$2(T_3T_1, BC) = 2(T_3T_1, BT_1) = 2(T_3I, BI) = (T_3I, T_1I) = (T_3B, T_1B) = (BA, BC)$$

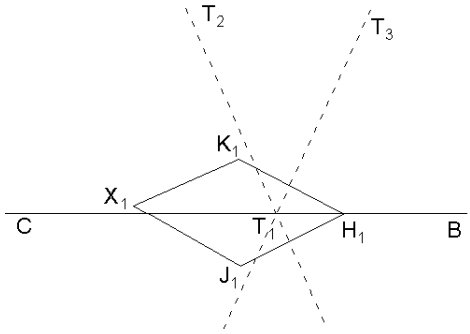
Et ainsi,

$$\begin{aligned}(l_2, BC) &= (l_2, T_3T_1) + (T_3T_1, BC)\\ &= (T_3T_1, H_3H_1) + (T_3T_1, BC)\\ &= 2(T_3T_1, BC) + (BC, H_3H_1)\\ &= (BA, BC) + (AC, AB) \text{ d'après ce qui précède}\\ &= (AC, BC)\end{aligned}$$

donc $l_2 // AC$. Les autres résultats se prouvent de manière analogue.

2. Construction et propriétés de X_1

On note K_1 (resp. J_1) le symétrique de H_1 par rapport à T_1T_3 (resp. T_1T_2). La droite l_2 (resp. l_3) est donc la parallèle à AC (resp. AB) menée par K_1 (resp. J_1). Ce qui permet de construire X_1.



Par symétrie des rôles, on peut supposer que $\widehat{B} \geqslant \widehat{C}$.

Alors $\widehat{IAB} = \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\pi - \widehat{B} - \widehat{C}}{2} \geqslant \frac{\pi}{2} - \widehat{B} = \widehat{H_1AB}$.

Par suite $H_1 \in [T_1B]$.

D'autre part, BT_1T_3 est isocèle en B (BT_1 et BT_3 sont deux tangentes à Γ), donc $\widehat{T_3T_1B} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{B}}{2}$, et ainsi $\widehat{T_1H_1K_1} = \frac{\widehat{B}}{2}$.

On en déduit que $\widehat{K_1T_1H_1} = \pi - \widehat{B}$ (on a $K_1T_1H_1$ isocèle en T_1) et donc que $\widehat{K_1T_1C} = \widehat{B}$. Alors $K_1T_1 // AB // l_3$. De même, $\widehat{J_1T_1C} = \widehat{C}$ et $J_1T_1 // AC // l_2$. Or $K_1T_1 = T_1H_1 = T_1J_1$ donc $T_1K_1X_1J_1$ est un losange d'angle en K_1 égal à $\widehat{A}$ (puisque les côtés issus de K_1 sont parallèles à AB et AC).

Et donc :

$$T_1X_1 = 2T_1K_1 \sin\frac{\widehat{A}}{2} = 2T_1H_1 \sin\frac{\widehat{A}}{2} \qquad (1)$$

de plus :

$$\widehat{K_1T_1X_1} = \frac{\pi - \widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \leqslant \widehat{B} = \widehat{K_1T_1C}$$

et donc X_1 est intérieur à ABC et $\widehat{X_1T_1C} = \frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$.

3. Soit X'_1 le point de Γ tel que $X'_1T_1C = \frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$, alors

$$T_1X'_1 = 2II_1 \sin\frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} \qquad (2)$$

4. Soit I' le projeté orthogonal de I sur AH_1.

   Alors (cf. figure du début) : $T_1H_1 = II' = IA\sin(\frac{\widehat{A}}{2} - (\frac{\pi}{2} - \widehat{B})) = IA\sin\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$

   d'autre part : $IT_1 = IT_2 = r = IA\sin\frac{\widehat{A}}{2}$, donc

$$T_1H_1 \sin\frac{\widehat{A}}{2} = IT_1 \sin\frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} \qquad (3)$$

   De (1), (2), (3), il vient immédiatement que $T_1X_1 = T_1X'_1$ et comme X_1 et X'_1 sont sur une même demi-droite d'origine T_1, on a donc $X_1 = X'_1$. Ainsi $X_1 \in \Gamma$

   On prouve de même que X_2 et X_2 appartiennent à Γ. Ce qui achève la démonstration.

Petites histoires

Instinctivement l'homme se sert de ses doigts pour compter, mais on constate des variations culturelles dans la méthode utilisée.

Voic une histoire qui est arrivée pendant la Seconde Guerre mondiale à un officier anglais se trouvant en Inde.

On lui présenta une jeune femme qui se faisait passer pour une Chinoise mais qu'il soupçonnait d'être Japonaise. Voulant s'assurer que ses soupçons étaient bien fondés, il lui demanda de compter jusqu'à dix. La jeune femme, surprise, s'exécuta, la main ouverte, en repliant un doigt à la fois. C'était bien une Japonaise ! L'officier savait que les Chinois comptent le poing serré, en dépliant les doigts.

cité par John BARROW, *Pourquoi le monde est-il mathématique ?* Ed. Odile Jacob, 1996.

Vous souhaitez décloisonner votre enseignement, innover, aiguiser l'intérêt et la créativité de vos élèves? Relevez avec la *Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs* un nouveau défi.

La CAPP, en accord avec la Société Solvay, a élaboré des outils novateurs, **les ensembles pédagogiques interdisciplinaires (EPI)**, présentés sous la forme de valises ou de coffrets. Quatre thèmes sont traités, à savoir **la Communication, le Temps, Matière et Éléments, Semblable et Différent**

La Communication : cet EPI vise à faire suivre, par des textes et images, les traces de l'humanité depuis l'antiquité, découvrir par l'observation et la manipulation le rôle de la technique depuis l'invention de l'écriture jusqu'à Internet, voir que l'univers, de l'infiniment petit à l'infiniment grand, à commencer par nous-mêmes, est un immense réseau de communication, participer, par la pratique et le jeu, à une approche de l'interdisciplinarité.

Le Temps : cette notion concerne toutes les disciplines. Les objets et documents rassemblés illustrent l'histoire des horloges, la mesure et la garde du temps, la chronobiologie, la dendrochronologie, les calendriers. Des moulages de crânes préhistoriques, la datation par le carbone 14 ou la thermo-luminescence, l'expression du temps dans la langue sont étudiés. Un choix d'ouvrages et un jeu de cartes original complètent l'EPI.

Matière et Éléments : La matière a, dès l'Antiquité, préoccupé les philosophes, comme le montrent les textes rassemblés. Puis des sciences sont apparues, ainsi que le conte, l'histoire de la chimie, illustrée par une BD. Des échantillons de minerais, minéraux et roches sont présentés, avec fiches expérimentales, descriptives et cassettes; textes et transparents décrivent les éléments chimiques présents dans notre organisme. Livres, tableaux périodiques, dont une version informatisée, un jeu du type *Trivial Poursuit* complètent l'EPI.

Semblable et Différent : La distinction des ressemblances et des différences est à la base de la démarche scientifique. L'EPI demande de classer divers objets, puis de justifier les critères choisis. Ensuite, pour chaque discipline des exercices portent sur le classement et ses critères. Une phase de réflexion fait prendre conscience de leur rôle dans la vie humaine. L'histoire pose la question de leur valeur relative. Les hommes ont distingué des classes dans leur espèce. Injustices, violences, guerres peuvent en découler. Livres et documents font découvrir que le sujet exige un examen critique attentif.

Comment s'informer? *Les EPI sont loués aux écoles des conditions déterminées. Pour renseignements, s'adresser à M. Jean-Marie Debry, chaussée des Vignerons 95, 5100 Wépion, Tél. : 081-46 07 53 ou M. Emile Counet, rue Piersotte 12, 5004 Bouge, Tél. :081-21 02 88.*

Des problèmes et des jeux

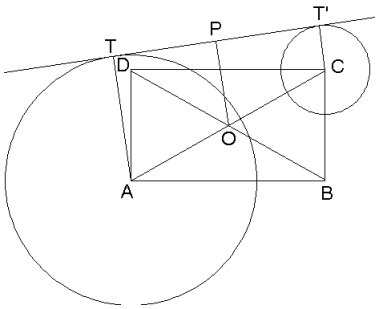
C. Festraets

Cercles et quadrilatères Problème n° 241 de *Mathématique et Pédagogie* n° 129.

On donne un rectangle ABCD avec AC = e. Quatre cercles ont pour centres A, B, C, D et pour rayons a, b, c, d respectivement ; a + c = b + d < e. Prouver qu'il existe un cercle inscriptible dans le quadrilatère dont les côtés sont les deux tangentes communes extérieures aux cercles de centres A et C et les deux tangentes communes extérieures aux cercles de centres B et D.

Solution de J.Finoulst de Diepenbeek

Soit TT' une des tangentes communes extérieures aux cercles (A, a) et (C, c) et soit O le point d'intersection des diagonales AC et BD du rectangle.



Les droites AT et CT' étant perpendiculaires à la tangente TT', elles sont les bases d'un trapèze $ATT'C$. La perpendiculaire à TT', issue de O, passe par le milieu P de TT'. Le segment $[OP]$ joint les milieux O et P des côtés $[AC]$ et $[TT']$ et donc

$$|OP| = \frac{1}{2}(|AT| + |CT'|) = \frac{1}{2}(a + c)$$

Il est clair que le point O est à la même distance de la seconde tangente commune extérieure aux cercles (A, a) et (C, c).

Adresse de l'auteur: Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C.Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse e-mail festraetscl@brutele.be.

On démontre de la même manière que le point O est à la distance $\frac{1}{2}(b+d)$ des tangentes communes extérieures aux cercles (B,b) et (D,d).

Finalement comme $a+c=b+d$, on peut conclure que le centre O du rectangle $ABCD$ est aussi le centre d'un cercle inscriptible au quadrilatère dont les côtés opposés sont les paires de tangentes communes extérieures aux cercles de centres A et C et aux cercles de centres B et D.

Solutions similaires de A. Paternottre de Bousseu, J. Rasse de Méan et C. Villers de Hyon.

Divisibilité Problème n° 242 de *Mathématique et Pédagogie* n° 129.

Prouver que parmi 39 nombres entiers positifs consécutifs quelconques, il y en a au moins un dont la somme des chiffres est divisible par 11.

Remarque : dans l'énoncé paru **dans le n° 129**, le mot consécutif avait été omis; plusieurs lecteurs ont remarqué que, dans ce cas, l'énoncé était faux et deux d'entre eux ont rectifié en ajoutant le mot manquant.

Solution de J. Finoulst de Diepenbeek

Soient n_1, n_2, ..., n_i, n_{i+1}, ..., n_{39} avec $n_i < n_{i+1}$ les 39 nombres naturels consécutifs. L'ensemble des 20 premiers nombres contient deux éléments dont le dernier chiffre est 0 (ceci est aussi valable pour les 9 autres chiffres!). Il est clair que la différence entre ces deux nombres est 10 et et au moins un des deux a son avant dernier chiffre différent de 9, soit n_k tel que son chiffre des dizaines est inférieur ou égal à 8 ($n_k \leqslant n_{20}$).

Désignons par s la somme des chiffres de n_k. Les sommes des chiffres des 9 nombres qui suivent n_k sont successivement $s+1$, $s+2$, ..., $s+9$. Le nombre n_k+10 se termine par $0 (n_k+10 \leqslant n_{30})$ et le chiffre des dizaines est augmenté de 1 (donc inférieur ou égal à 9), d'où la somme de ses chiffres est égale à $s+1$. Les 9 nombres qui suivent n_k+10 ont comme somme de leur chiffres $s+2$, $s+3$, ..., $s+10$. Les 11 sommes s, $s+1$, $s+2$, ..., $s+10$ sont donc 11 nombres naturels consécutifs. Il en résulte qu'une de ces sommes est divisible par 11.

Bonne solution de P. Bornsztein de Courdimanche(France) qui nous fournit la remarque suivante : 999981, 999982, ...,1000018 sont 38 entiers positifs consécutifs dont aucun n'a la somme de ses chiffres divisible par 11.

Minimum Problème n° 243 de *Mathématique et Pédagogie* n° 129.

Chacun des nombres x_1, x_2, ..., x_n vaut -1, 0 ou 1. Quel est le minimum de la somme de tous les $x_i x_j$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$?

La réponse reste-t-elle la même si les x_i sont des réels satisfaisant $0 \leqslant |x_i| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$?

Solution de P. Bornsztein de Courdimanche.

Dans ce qui suit, on adopte les conventions usuelles : une somme indexée sur $\emptyset$ est nulle et $C_a^b = 0$ pour $a < b$.

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

Soient $E = [-1,1]^n$, $F = \{(x_1,\dots,x_n) : x_i \in \{-1,0,1\} \text{ pour tout } i\}$ et $G = \{(x_1,\dots,x_n) : x_i \in \{-1,1\} \text{ pour tout } i\}$.

Pour $(x_1,\dots,x_n) \in E$, on note $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$.

Puisque F et G sont finis (de cardinaux respectifs 3^n et 2^n), f admet un minimum sur F et sur G, et $\min_F f \leqslant \min_G f$ car $G \subset F$.

Pour x_2, ..., x_n fixés dans $[-1,1]$, on a $f(x_1,\dots,x_n) = ax_1 + b$ où $a = \sum_{i=2}^n x_i$ et $b = \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$. C'est une expression affine en x_1 qui atteint son minimum sur $[-1,1]$ en une des extrémités de cet intervalle. Ainsi

$$f(x_1,\dots,x_n) \geqslant \min(f(1,x_2,\dots,x_n), f(-1,x_2,\dots,x_n))$$

Par symétrie des rôles, on en déduit que $f(x_1, \dots, x_n) \geqslant \min f$ pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in E$. Comme $G \subset F \subset E$, on en déduit que f admet un minimum sur E et que $\min_E f = \min_F f = \min_G f$.

En particulier, le minimum cherché ne dépend pas du fait que l'on travaille sur E ou sur F. Notons de plus que cela permet de prouver l'existence d'un minimum sur E sans recourir à l'argument « massue »de la continuité de f sur le compact E de $\mathbb{R}^n$.

On est donc ramené à cherché le minimum de $f(x_1, \dots, x_n)$ pour x_1, ..., $x_n \in G$.

Soit donc $x_1,\dots,x_n \in G$. Soit $p \in \{0,1,\dots,n\}$ le nombre de x_i égaux à 1 (et donc il y a $n-p$ x_i égaux à -1).

Alors :

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{x_i=x_j=1} x_ix_j + \sum_{x_i=x_j=-1} x_ix_j + \sum_{x_j=-1,x_i=1} x_ix_j \\ &= C_p^2 + C_{n-p}^2 - p(n-p) \\ &= \frac{1}{2}((2p-n)^2 - n) \end{aligned}$$

Et donc,

- si n est pair , $f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant -\frac{n}{2}$ avec égalité ssi $p = \frac{n}{2}$
- si n est impair, $f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \frac{1-n}{2}$ avec égalité ssi $p = \frac{n+1}{2}$ ou $p = \frac{n-1}{2}$.

Deux autres lecteurs ont envoyé des solutions correctes : **J. Finoulst de Diepenbeek** et **J. Rasse de Méan**.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir au plus tard pour le premier novembre 2001.

250. Recouvrement

Tout rationnel de l'intervalle]0, 1] peut être écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ (a et b étant premiers entre eux) et recouvert par l'intervalle $[\frac{a}{b} - \frac{1}{4b^2}, \frac{a}{b} + \frac{1}{4b^2}]$. Démontrer que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ n'est recouvert par aucun de ces intervalles.

251. $n^{ème}$ premier

Dans la suite des entiers naturels, on désigne par p_n le $n^{ème}$ nombre premier. Démontrer que $p_n < 2^{2^n}$.

252. Equation fonctionnelle

Soit f une fonction définie sur l'ensemble des entiers positifs et ayant ses valeurs dans le même ensemble. Sachant que $f(f(n) + f(m)) = m + n$ pour tous entiers positifs m et n, déterminer toutes les valeurs possibles de $f(2001)$.

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (septembre 2000)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent Mathématique et Pédagogie, SBPM-Infor et Math-Jeunes.

Belgique :
- Cotisation ordinaire : 807 BEF/20,00 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications) : 1150 BEF/28,5 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 605 BEF-/15,00 €.

Union Européenne : 36,00 €,
Europe hors Union Européenne : 38,00 €,
Hors Europe : envoi prioritaire, 72,00 €, envoi non prioritaire, 42,00 €.

Abonnement à Mathématique et Pédagogie

Belgique : 1049 BEF/26,00 €, Union Européenne : 32,00 €,
Europe hors Union Européenne : 33,00 €,
Hors Europe : envoi prioritaire, 46,00 €, envoi non prioritaire, 34,00 €.

Abonnement à Math-Jeunes Junior et Math-Jeunes

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, inférieur et supérieur, sont idéalement pris par l'intermédiaire d'un professeur.
Abonnement isolé à une des deux revues (4 numéros) :
- Belgique : 200 BEF/4,96 €,
- Union Européenne : 9,2 €,
- Europe hors Union Européenne : 10,2 €,
- Hors Europe : Envoi prioritaire, 20,4 €, envoi non prioritaire : 11,4 €.

Abonnement isolé aux deux revues (7 numéros) :
- Belgique : 350 BEF/8,68 €,
- Union Européenne : 16,5 €,
- Europe hors Union Européenne : 17,17 €,
- Hors Europe : envoi prioritaire, 35,6 €, envoi non prioritaire, 20 €.

Abonnements groupés (au moins 5) à *Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior*.

Abonnements groupés à une des deux revues : (4 numéros)
- Belgique : 150 BEF/3,72 €,
- Union Européenne : 6 €,
- Europe hors Union Européenne : 7,6 €,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 15,2 €,
  - Envoi non prioritaire : 8,6 €.

Abonnements groupés aux deux revues : (7 numéros)
- Belgique : 265 BEF/6,57 €,
- Union Européenne : 10,6 €,
- Europe hors Union Européenne : 13,4 €,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 26,6 €,
  - Envoi non prioritaire : 15,1 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement au compte de la SBPMef, s'abonner au bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France), le prix de l'abonnement est : 1575 BEF. Ils peuvent également, par la même voie, commander des publications de l'APMEP (voir la page APMEP dans ce numéro).

Vente d'anciens numéros de Mathématique et Pédagogie

Avant 1998 : 30 BEF (0,74 €)/N° + frais de port (Cat. 1),
Années 1999 et 2000 : 100 BEF (2,48 €)/N° + frais de port (Cat. 1).

Vente d'anciens numéros de Math-Jeunes

Avant 1998/1999 : 10 BEF (0,25 €)/N° + frais de port (Cat. 1),
Années 1998/1999 et 1999/2000 : 20 BEF (0,5 €)/N° + frais de port (Cat. 1).

Brochures

Le prix d'une brochure ou d'un cd-rom mentionnés aux tableaux 1 et 2 s'obtient en additionnant le prix de base mentionné dans le tableau 1 ou 2 aux frais de port mentionnés dans le tableau 3 en fonction de la catégorie postale à laquelle appartient la brochure ou le cd-rom. Lorsqu'un prix réduit est mentionné, ce prix est réservé aux membres de la SBPMef et aux étudiants.

Tableau 1 : Prix de base Brochures	Prix plein	Prix réduit	Cat. post.
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 1 au n° 6 épuisés,	50 BEF		
reste n° 12)	1,24 €	/	2
Série 2 (n° 7 au n° 11 et n° 13)	220 BEF		
	5,45 €	/	5
Série 3 (n° 14)	220 BEF		
	5,45 €	/	3
Les 3 séries (n° 7 au n° 14)	300 BEF		
	7,44 €	/	6
Dossiers d'explorations didactiques			
Dossier 2 (Autour du plus grand	75 BEF	50 BEF	
commun diviseur)	1,86 €	1,24 €	4
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	75 BEF	50 BEF	
	1,86 €	1,24 €	4
Dossier 5 (Matrices et Produit scalaire)	300 BEF	250 BEF	
	7,44 €	6,18 €	4
Dossier 6 (Statistiques)			
Moins de 11 ex.	300 BEF/ex.	250 BEF/ex.	
	7,44 €/ex.	6,18 €/ex.	4
Par groupes de 11 ex.	3000 BEF	2500 BEF	
	74,44 €	61,8 €	4
Olympiades Mathématiques Belges			
Tome 4			
De 1 à 4 ex.	220 BEF/ex.	/	7
	5,45 €/ex.		
De 5 à 9 ex.	200 BEF/ex.	/	8
	4,96 €/ex.		
De 10 à 19 ex.	180 BEF/ex.	/	8
	4,46 €/ex.		
Plus de 19 ex.	160 BEF/ex.	/	8
	3,97 €/ex.		
Jacques Bair			
Mathématique et Sport	200 BEF	150 BEF	
	4,96 €	3,72 €	3
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans	500 BEF	400 BEF	
patrie,...	12,39 €	9,92 €	5

Tableau 2 : Prix de base CD-Rom	Prix plein	Prix réduit	Cat. post.
Programmes mathématiques de G. Robert	200 BEF 4,96 €	/	7

Tableau 3 : Frais de port

Catégorie	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe,
1	10 F/0,25 €	1,61 €	1,74 €	4,09 €
2	25 F/0,62 €	0,99 €	1,12 €	1,98 €
3	40 F/0,99 €	1,61 €	1,74 €	4,21 €
4	60 F/1,49 €	2,48 €	3,22 €	7,93 €
5	80 F/1,98 €	2,97 €	3,22 €	7,93 €
6	100 F/2,48 €	3,72 €	5,70 €	14,87 €
7	50 F/1,24 €	2,73 €	3,22 €	4,09 €
8	Consulter le secrétariat			

Pour effectuer une commande, il vous suffit de verser le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique :
Effectuer vos paiements au compte 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons.

Si vous habitez en France :
Nous vous demandons d'effectuer votre versement en Euros uniquement sur le compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef 15 rue de la Halle à B-7000 Mons, Belgique.

Si vous habitez ailleurs :
Effectuez de préférence un virement international au compte
CCP (giro) 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons, Belgique.
Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement "giro"), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.