Mathématique et Pédagogie

Sommaire

Articles

Rubriques

N° 133 Septembre — Octobre 2001

NOTE

* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
* Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
* Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (LaTeX 2$_\varepsilon$, Word) ; les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.
  L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
  Pour les livres :
  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
  Pour les articles :
  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

 Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Éditorial

J. MIEWIS

« Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résoud pas de problèmes. Tout le monde est d'accord là-dessus. Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de savoir quels problèmes il doit se poser, qui les pose, et comment. »

J'ai retrouvé cette phrase dans le numéro 14 de Mathématique et Pédagogie de Novembre 1977. En ces temps là, c'était plutôt une revendication audacieuse. Douze ans plus tard, en 1989, le « Rapport Damblon » insistait, parmi d'autres recommandations sur les contenus et méthodes dans les programmes, sur la nécessité de la résolution de problèmes, créatrice de la capacité de penser mathématiquement.

Douze années se sont à nouveau écoulées et de nouveaux programmes nous mobilisent à cette rentrée. On y fait la part belle aux situations-problèmes.

Ce sera à nous de proposer des situations-problèmes que nous savons pouvoir modestement conduire à la découverte d'un point de matière. Mais il nous faudra laisser la liberté à l'élève de choisir ses méthodes de recherches, lui laisser un peu de temps pour s'aventurer dans les apparences trompeuses, accepter aussi de rebondir sur d'autres points de matières. Osons dire que n'importe quelle situation-problème conviendra, pourvu qu'elle constitue un défi, qu'elle suscite l'étonnement et surtout qu'elle invite à la créativité chez l'élève.

Lorsque nous aurons testé une procédure, une vision des choses, une approche originale, nous devrons (ré-) apprendre à partager nos expériences. Je suis certain que des tas d'idées existent chez beaucoup d'entre nous. A l'ère de la communication, les enseignants ont tout à gagner à échanger leurs expériences — je devrais plutôt dire leurs expérimentations — car nous nous retrouvons tous peu ou prou novices dans ce nouveau chantier des compétences.

A ce propos, Mathématique et Pédagogie sera toujours heureux de publier vos trouvailles. Parfois le hasard fait bien les choses...

Bonne rentrée à tous.

Publications APMEP (France) : Ces publications peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

— **Les brochures 1998-1999 sont signalées par ***.

— Le prix "*adhérent*" concerne l'A.P.M.E.P. **et la S.B.P.M.ef**.

N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix, en FB, sans port	
	Problèmes, rallyes,... :	public	adhérent
97	Jeux 4 (études sur les problèmes de rallyes)	660	**460**
*119	Jeux 5 (activités mathématiques au collège)	515	**305**
98	Fichier Evariste (240 fiches "Benjamins" ou "Cadets")	515	**305**
250	Panoramath 96 (co-diffusion Archimède,...)	490	**345**
*251	Panoramath 2 (co-diffusion Archimède,...)	555	**385**
	Les deux Panoramath ensemble :	1045	**505**
*402	Jeux du Scientific American (co-diffusion ADCS)	830	**585**
*451	Concours Australien de mathématiques		**515**
*450	Math Evasion (Bandes dessinées lycées)	305	**215**
	Quelques grands thèmes :		
*121	Maths en scène (22 thèmes, référés à l'expo "Math 2000" mais utilisables sans elle)	515	**305**
	Galion-thèmes :		
*304	Série 4. Six plaquettes, collège ou lycée	305	**275**
*305	Classe de Seconde : 10 thèmes programme 2000	460	**400**
	Evaluations (collection EVAPM) :		
112	Sixième (fin d'année) (Evaluation 1997)		
*118	*Les deux fascicules ensemble* :	705	**490**
*107	Premières (fin d'année) Documents : n° 90		
*108	Trois fascicules : 90, 107; 108, ensemble (404 p.)	860	**585**
*106	Terminales BEP (Lycées professionnels)	400	**275**
	Technologie moderne et mathématiques :		
*352	Tableur et maths (Collège et début lycée)	490	**400**
	Faire de la géométrie sup. avec Cabri II		
*124	Des points, droites, cercles, ... aux coniques		
*125	... et aux cubiques		
	Les deux tomes ensemble (288 p. en 17 x 24)	705	**430**
*120	Clas Math Lycée : Classeur informatisé de documents mathématiques - 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	2150	**1535**
	Version 26 installations, port compris	4305	**3075**

PORT EN FB (prix indicatif) : 1 brochure : 100; 2 ou 3 brochures : 160 et au-dessus de 3 : 260

Le problème des treize billes

F. DRAPIER, *Jury de la Communauté*

1. Énoncé

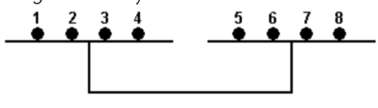
There are thirteen marbles, witch look absolutely alike. There is one however (the «fake» one), whose weight deviates from that of all the rest («real» ones). You are required to offer an algorithm of finding the «fake» marble with the help of a plane scale, with no reference weight. You may take only three measurements. During a measurement, no marbles may be added or taken away from the scale.

Soient treize billes de même apparence. Il en existe cependant une (la « mauvaise »), qui est de masse différente de chacune des autres (les « bonnes »). Trouver une méthode identifiant la «mauvaise» bille au moyen d'une balance à double plateau mais ne possédant aucune graduation. Vous pouvez procéder à seulement trois pesées. Durant une pesée, aucune bille ne peut être ajoutée ou retranchée de la balance.

2. Résolution

Numérotons les billes de 1 à 13 et proposons-nous de comparer les deux lots $\{1,2,3,4\}$ et $\{5,6,7,8\}$.

⋆ **PREMIER CAS** (cf. figure n° 1)



Pesée n°1

Figure n° 1

Les deux plateaux étant en équilibre, la bille demandée se trouve dans le lot $\{9,10,11,12,13\}$.

Décidons de comparer les lots $\{1,2,3\}$ et $\{9,10,11\}$ via une deuxième pesée.

Adresse de l'auteur: Francis Drapier, Résidence Goliath, Rue de la Station, 37c/10 à B-7800 Ath. http ://www.respublica.fr/f_drapier

Premier sous-cas (cf. Figure n° 2)

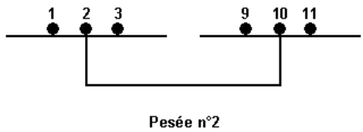


Figure n° 2

Les plateaux étant en équilibre, la bille demandée est dans le lot $\{12, 13\}$.

Première solution (cf. Figure n° 3)

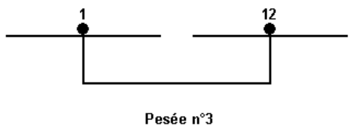


Figure n° 3

Les plateaux étant en équilibre, la bille demandée est celle portant le numéro 13.

Deuxième solution (cf. Figure n° 4)

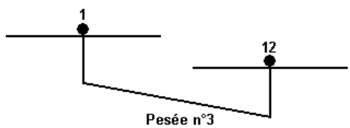


Figure n° 4

Les plateaux étant en déséquilibre, la bille demandée est celle portant le numéro 12 et est plus lourde que chacune des 12 autres billes.

Troisième solution (cf. Figure n° 5)

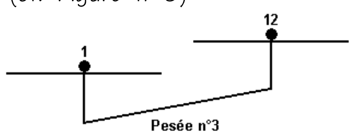


Figure n° 5

Les plateaux étant en déséquilibre, la bille demandée est celle portant le numéro 12 et est plus légère que chacune des 12 autres billes.

Deuxième sous-cas (cf. Figure n° 6)

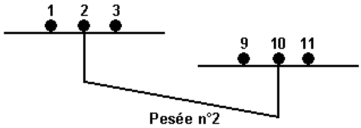


Figure n° 6

Les plateaux sont déséquilibrés et la bille demandée, plus lourde que chacune des 12 autres, se trouve dans le lot $\{9, 10, 11\}$. Décidons de comparer les lots $\{9\}$ et $\{10\}$.

Première solution (cf. Figure n° 7)

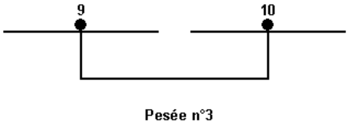


Figure n° 7

Les plateaux étant en équilibre, la bille la plus lourde recherchée est celle numérotée 11.

Deuxième solution (cf. Figure n° 8)

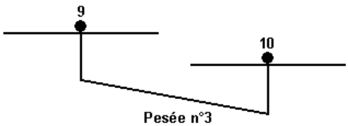


Figure n° 8

Les plateaux étant déséquilibrés, la bille la plus lourde recherchée est celle numérotée 10.

Troisième solution (cf. Figure n° 9)

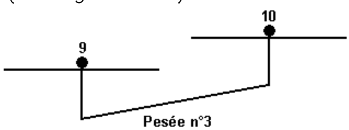


Figure n° 9

Les plateaux étant déséquilibrés, la bille la plus lourde recherchée est celle numérotée 9.

Troisième sous-cas (cf. Figure n° 10)

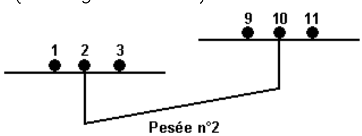


Figure n° 10

Il suffit de tenir le même raisonnement que dans le deuxième sous-cas.

⋆ **DEUXIEME CAS** (cf. Figure n° 11)

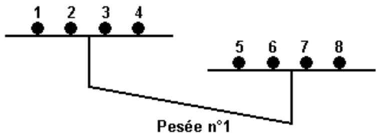


Figure n° 11

Les deux plateaux étant en déséquilibre, décidons de comparer le lot $\{9, 10, 11, 12, 13\}$ avec celui constitué de trois billes du premier plateau et deux du deuxième, par exemple : $\{1, 2, 3, 5, 6\}$.

Premier sous-cas (cf. Figure n° 12)

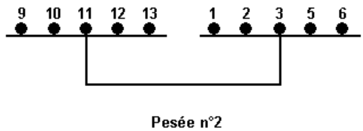


Figure n° 12

Les plateaux étant équilibrés, la bille demandée se trouve dans le lot $\{4, 7, 8\}$. Remarquons alors que la première pesée, schématisée par la figure n° 11 est équivalente à la situation visualisée par la figure n° 13 et n'oublions pas que la bille numérotée 3 n'est pas celle recherchée.

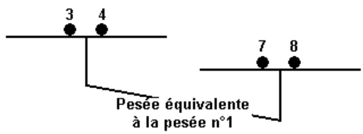


Figure n° 13

Décidons de comparer les lots $\{7\}$ et $\{8\}$.

Première solution (cf. figure n° 14)

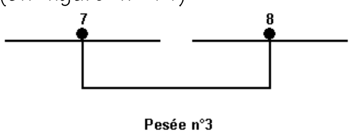


Figure n° 14

Les plateaux étant en équilibre, la bille recherchée est celle numérotée 4.

Deuxième solution (cf. figure n^o 15)

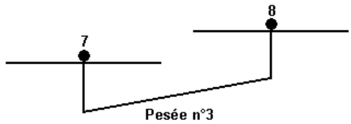


Figure n^o 15

Les plateaux étant déséquilibrés, on en déduit que les billes numérotées 3 et 4 sont de même masse et la pesée schématisée par la figure 13 nous révèle que la bille recherchée est plus lourde que chacune des 12 autres. Cette bille est donc celle numérotée 7.

Troisième solution (cf. figure n^o 16)

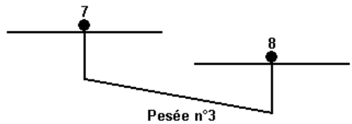


Figure n^o 16

Les plateaux étant déséquilibrés, on en déduit que les billes numérotées 3 et 4 sont de même masse et la pesée schématisée par la figure 13 nous révèle que la bille recherchée est plus légère que chacune des 12 autres. Cette bille est donc celle numérotée 8.

Deuxième sous-cas (cf. figure n^o 17)

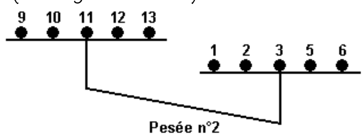


Figure n^o 17

Les plateaux étant déséquilibrés, la bille demandée se trouve dans le lot $\{1,2,3,5,6\}$ et est plus lourde que chacune des 12 autres. Si on se souvient qu'elle venait de la pesée n^o 1 schématisée par la figure n^o 11, elle fait en réalité partie du lot $\{5,6\}$.
Une troisième pesée entre les lots $\{5\}$ et $\{6\}$ permet donc de trouver celle de masse plus élevée.

Troisième sous-cas (cf. figure n^o 18)

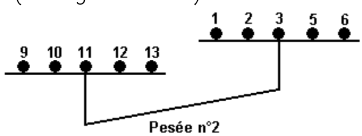


Figure n° 18

Les plateaux étant déséquilibrés, la bille demandée se trouve dans le lot $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ et est plus légère que chacune des 12 autres. Si on se souvient qu'elle venait de la pesée n° 1 schématisée par la figure n° 11, elle fait en réalité partie du lot $\{1, 2, 3\}$. Une troisième pesée entre les lots $\{1\}$ et $\{2\}$ permet donc de trouver laquelle parmi les trois est de masse moins élevée.

⋆ **TROISIEME CAS** (cf. figure n° 19)

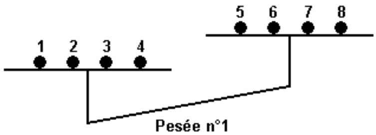


Figure n° 19

Ce cas est le symétrique du deuxième cas.

Des paires de numéros consécutifs au Lotto

Douze maisons se suivent sur le bord d'une rue. De combien de manières peut-on en choisir quatre, de telle sorte que deux quelconques d'entre elles ne soient pas voisines.

Cette situation est équivalente à la question « inverse ». Huit maisons étant espacées le long d'une rue, de combien de manières peut-on en construire quatre nouvelles sans que deux d'entre elles soient voisines ?

Les huit maisons offrent neuf espaces vides (les deux extrémités et les sept intervalles) parmi lesquels il faut en choisir quatre. Posé ainsi, le problème est une combinaison sans répétition $C_9^4 = 126$. Remarquons que $9 = 12 - 4 + 1$.

Remplaçons les 12 maisons par les 42 boules du lotto. Choisir 6 boules portant des valeurs qui ne se suivent pas revient à calculer $C_{37}^6 = 2\ 324\ 784$ $(37 = 42 - 6 + 1)$

La probabilité qu'un tirage de lotto ne conduisent à aucune paire est donc : $\frac{C_{37}^6}{C_{42}^6} = \frac{2\ 324\ 784}{5\ 245\ 768} \simeq 0.4432$

La probabilité que le prochain tirage du lotto contienne une paire de numéros consécutifs est donc de $1 - 0.4432 = 0.5568$: en moyenne, une semaine sur deux !

Mathématique et Pédagogie n°133, 11–18, 2001

Les carrés de carrés (3)

J. SEGERS,

Réflexions sur le carré magique 3×3 (C.M.)

1. Les carrés complémentaires.

Nous venons de constater (1) que le nombre de paires de carrés complémentaires dépend des caractéristiques du terme central M. Cette constatation n'est pas le produit du hasard. Le problème est ancien et a été résolu pour la première fois par le mathématicien allemand **Jacobi** (1804–1851).

Soit n un nombre naturel. On se demande s'il existe des entiers a, b tels que

$$a^2 + b^2 = n$$

et dans l'affirmative, combien il y a de paires a, b. Jacobi trouva que la réponse $r_2(n)$ dépend uniquement de l'ensemble D des diviseurs du nombre n, et parmi eux, uniquement du sous-ensemble $I \subset D$ des diviseurs impairs.

Il partagea ce dernier en deux sous-ensembles disjoints U et T, c'est-à-dire ceux des diviseurs impairs ayant respectivement pour restes 1 et 3 lors de la division par 4. Si p et q sont des diviseurs appartenant à I, on peut écrire

$$p \in U \text{ ssi } p \equiv 1 (\text{mod} 4) \text{ et } q \in T \text{ ssi } q \equiv 3 (\text{mod} 4)$$

Appelons u le cardinal de U et t le cardinal de T.

Le *théorème de Jacobi* dit : LE NOMBRE DE REPRÉSENTATIONS D'UN NOMBRE n SOUS FORME D'UNE SOMME DE DEUX CARRÉS EST

$$r_2(n) = 4 \times (u - t) \tag{1}$$

mais la démonstration n'est pas élémentaire ...

Adresse de l'auteur: Jack Segers, Rue Hocheporte, 107/063, B4000 Liège.
(1) voir *Mathématique et Pédagogie* 132 p.5

- Exemple 1 : $n = 11$ a pour seuls diviseurs 1 et 11, dont les restes par rapport à 4 sont respectivement 1 et 3, $u = 1$, $t = 1$ et $r_2(11) = 0$. Il n'y a pas de représentation de 11 comme somme de 2 carrés. En effet, on n'en trouve pas.
- Exemple 2 : $n = 29$ a les diviseurs 1 et 29 ayant le même reste 1 par rapport à 4, $u = 2$, $t = 0$ et $r_2(29) = 4 \times 2 = 8$. Il y aura 8 représentations de 29 comme somme de 2 carrés. A première vue, il n'y en a qu'une : $29 = 2^2 + 5^2$. Mais $4 = 2^2 = (-2)^2$, $25 = 5^2 = (-5)^2$, et en plus on peut permuter les deux termes de la somme. Au total :

$$\begin{array}{rcccc} 29 & = & 2^2+5^2 & = & 5^2+2^2 \\ & = & (-2)^2+5^2 & = & 5^2+(-2)^2 \\ & = & 2^2+(-5)^2 & = & (-5)^2+2^2 \\ & = & (-2)^2+(-5)^2 & = & (-5)^2+(-2)^2 \end{array}$$

ce qui fait bien 8 représentations de 29 sous forme de somme de 2 carrés.

On voit qu'en fait, 29 est partagé d'une seule façon en une somme de deux carrés : $29 = 4 + 25$, peu importe l'ordre des termes ou la manière d'écrire les termes sous forme de carrés explicites. Pour avoir une formule plus simple, le nombre de partages pourrait-il s'écrire

$$p_2(n) = \frac{1}{2} \times (u - t)\,?$$

- Exemple 3 : $n = 36$ a pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 dont les seuls entrant en ligne de compte sont 1, 3 et 9. On trouve $u = 2$, $t = 1$, $p_2(36) = \frac{1}{2}$. Cela semble signifier qu'il y a un partage particulier indiquant que

$$36 = 0^2 + 6^2$$

est un carré. Pour tenir compte de ce cas, définissons $\delta(n) = 1$ si n est un carré, sinon $\delta(n) = 0$. La formule provisoire devient

$$p_2(n) = \frac{1}{2} \times (u - t + \delta(n))$$

- Exemple 4 : $n = 50$ a pour diviseurs 1, 2, 5, 10, 25, 50 dont les impairs sont 1, 5, 25, tous trois appartenant à U. $u = 3$ et $t = 0$ nous donnent 1,5 partages. En effet,

$$50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$$

dont la première somme est un partage effectif, et la deuxième exprime que 25, moitié de 50 est un carré. Pour tenir compte de cet autre cas particulier, ajoutons dans la formule provisoire un terme supplémentaire $\delta(\frac{1}{2})$ qui donnera 1 lorsque la moitié de n est un carré.

$$p_2(n) = \frac{1}{2} \times (u - t + \delta(n) + \delta(\frac{1}{2}n)) \qquad (2)$$

Cette formule est définitive et a été démontrée très récemment par le mathématicien australien **Michael D. HIRSCHHORN**, professeur à Sydney.

2. Justifications.

Rappelons que le terme central des C.M. étudiés est un carré (m^2). Les termes cherchés, complémentaires par rapport à m^2, sont des carrés de nombres distincts dont la somme est $2m^2$. Pour construire un C.M. comprenant 5 carrés ou plus, il faut connaître au moins 2 paires de carrés complémentaires. Le nombre de partages effectifs $p_2(2m^2)$ doit être au moins égal à 2, sans tenir compte des $\delta(n)$ et $\delta(\frac{1}{2}n)$.

Si $m = p$ est un premier, les diviseurs de m^2 sont 1, p, p^2, ce qui donne au maximum — d'après (2) page 13 — 2 partages dont un exprime le caractère du carré m^2, et l'autre ne fournit qu'une paire de carrés complémentaires.

Si $m = p^2$, les diviseurs de m^2 sont 1, p, p^2, p^3, p^4 ce qui donne 3 partages, dont un fourni par la propriété « carré de m ». On obtient 2 paires de carrés complémentaires.

Si $m = p \times q$, p et q étant premiers, les diviseurs de m^2 sont, en partant de $\{1, p, p^2\}$ et $\{1, q, q^2\}$ au nombre de $3 \times 3 = 9$, ce qui donne au maximum 4 partages effectifs. Etc.

- Exemples :

$m = 25 = 5^2$ donne 2 partages : $2m^2 = 1250 = 5^2 + 35^2 = 17^2 + 31^2$

$m = 65 = 5 \times 13$ donne 4 partages :

$2m^2 = 8450 = 13^2 + 91^2 = 23^2 + 89^2 = 35^2 + 85^2 = 47^2 + 79^2$

$m = 125 = 5^3$ donne 3 partages :

était alors en vogue parmi les mathématiciens.

$2m^2 = 31250 = 25^2 + 175^2 = 73^2 + 161^2 = 85^2 + 155^2$

$m = 1105 = 5 \times 13 \times 17$ donne 13 partages :

$2m^2 = 2442050 = 73^2 + 1561^2 = 155^2 + 1555^2 = 221^2 + 1547^2 = 367^2 + 1519^2 = 391^2 + 1513^2 = 455^2 + 1495^2 = 533^2 + 1469^2 = 595^2 + 1445^2 = 799^2 + 1343^2 = 809^2 + 1337^2 = 923^2 + 1261^2 = 995^2 + 1205^2 = 1057^2 + 1151^2$. Etc.

Malheureusement, ces partages sont nécessaires pour notre manière de construire des carrés de 5 carrés qui ne fournissent que de temps à autre un sixième carré, et dans un cas un septième. Mais ces carrés au-delà du cinquième semblent être le fruit du hasard, je n'ai pas pu trouver de loi.

3. Autre approche du C.M.

Après toutes ces expériences, on arrive à la conclusion que peu de données déterminent un C.M.

A	B	C
D	M	F
G	H	I

(3M)

En effet, les 3 termes de la diagonale A, M, I ont pour somme $3M$; il suit que si $A = M + X$, alors $I = M - X$, ces 3 termes constituent une progression arithmétique (P.A.) de raison X. Pour la diagonale C, M, G la conclusion est analogue; $C = M + Y$ entraîne $G = M - Y$, ces trois termes forment une P.A. de raison Y. Notre C.M. devient

$M + X$	B	$M + Y$
D	M	F
$M - Y$	H	$M - X$

(3M)

Les lignes horizontales et verticales du pourtour ont aussi pour somme $3M$, d'où

$$B = M - X - Y, \quad D = M - X + Y, \quad F = M + X - Y, \quad H = M + X + Y$$

et le C.M.

$M+X$	$M-X-Y$	$M+Y$
$M-X+Y$	M	$M+X-Y$
$M-Y$	$M+X+Y$	$M-X$

(3M)

Trois constantes M,X,Y déterminent tout C.M.. Ce constat a été fait par le mathématicien anglais **Lee SALLOWS**, professeur à Nimègue (NL), dans son article The lost Theorem, *Mathematical Intelligencer*, 1997, 4, 51–54.

Les lignes du pourtour ne sont pas en P.A. Mais rappelons ([2]) que *chaque terme de coin est la moyenne arithmétique des deux termes éloignés de lui d'un saut de cavalier.*

Il y a donc 4 P.A. :

B, G, F ou $M-X-Y$, $M-Y$, $M+X-Y$ avec pour raison X
F, A, H ou $M+X-Y$, $M+X$, $M+X+Y$ avec pour raison Y
H, C, D ou $M+X+Y$, $M+Y$, $M-X+Y$ avec pour raison $-X$
D, I, B ou $M-X+Y$, $M-X$, $M-X-Y$ avec pour raison $-Y$

En partant par exemple de B avec un cavalier et en faisant un tour complet, on parcourt les 4 P.A. qui s'annulent mutuellement.

$B+X=G,\ G+X=F,\ \dots\ F+Y=A,\ A+Y=H,\ \dots$

$H-x=C,\ C-X=D,\ \dots\ D-Y=I,\ I-Y=B$

- Exemple :

Prenons le C.M. à 7 carrés en le tournant de manière à ce que l'élément le plus petit soit en B :

222121	23^2	565^2
527^2	425^2	289^2
205^2	360721	373^2

(541875)

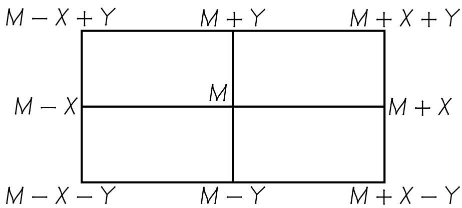
On y découvre 8 P.A. :

([2]) voir *Mathématique et Pédagogie* n° 131, p 30.

23^2, 205^2, 289^2 de raison $X = 41496$
527^2, 565^2, 360721 de raison X
373^2, 425^2, 222121 de raison X
289^2, 222121, 360721 de raison $Y = 138600$
23^2, 373^2, 527^2 de raison Y
205^2, 425^2, 565^2 de raison Y
23^2, 425^2, 360721 de raison $X + Y = 180096$
289^2, 425^2, 527^2 de raison $Y - X = 97104$

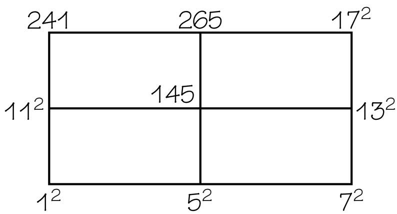
Il faut donc trouver 2 P.A. de même raison, et deux autres d'une autre raison, et réussir à les placer dans le carré. Mais au lieu de se perdre dans les sauts de cavalier, on peut aussi déplier le C.M. et inscrire ses éléments autour d'un rectangle, comme s'ils étaient les coordonnées des sommets et des milieux :

RECTANGLE : $\uparrow$ Y , $\rightarrow$ X



- Exemple 1 :

Choisissons $X = 24$, $Y = 120$. En partant de 1^2, on aura le rectangle



d'où le C.M.

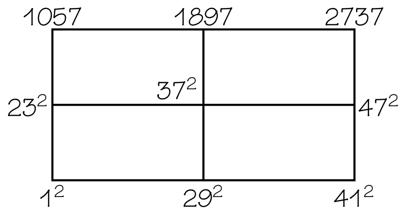
13^2	1^2	265
241	145	7^2
5^2	17^2	11^2

(435)

C'est le plus petit C.M. à 6 carrés. A remarquer que le terme central n'est pas un carré. Mais cette construction est toujours hasardeuse, 5 termes construits sont des carrés, le sixième (11^2) est un don du ciel.

Nous partirons donc de deux P.A. « parallèles » de même raison, par exemple : 1^2, 29^2, 41^2 et 23^2, 37^2, 47^2 de raison 840.

Rectangle : $X = 840, Y = 528$



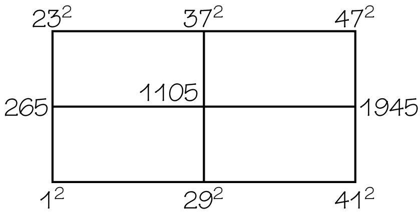
d'où le C.M.

47^2	1^2	1897
1057	37^2	41^2
29^2	2737	23^2

(4107)

Mais on peut aussi placer les deux P.A. parallèles sur deux côtés parallèles du rectangle, et compléter une ligne moyenne. La raison verticale serait alors $Y = 264$

Rectangle : $X = 840, Y = 264$



d'où le C.M.

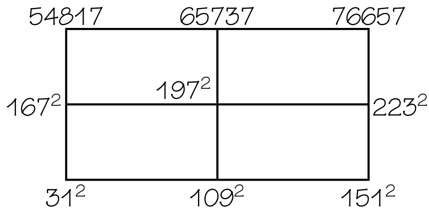
1945	1^2	37^2
23^2	1105	41^2
29^2	47^2	265

(3315)

- *Autre exemple :*

31^2, 109^2, 151^2 *et* 167^2, 197^2, 223^2 *de raison* 10920

Rectangle : $X = 10920, Y = 26928$



d'où le C.M.

223^2	31^2	65737
54817	197^2	151^2
109^2	76657	167^2

(116427)

On peut essayer la même démarche, pour trouver éventuellement un septième carré.

J'ai l'impression que cette méthode sera plus rapide pour arriver au fameux C.M. des 9 carrés, mais je puis me tromper. **Martin GARDNER**, *mathématicien américain bien connu du grand public, a offert un prix de 100$ à toute personne qui soit présenterait un C.M. de 9 carrés, soit démontrerait que cette construction est impossible. L'offre date de 1996, et personne n'est arrivé au but. Y arriverez-vous ?*

Mathématique et Bande Dessinée

F. POURBAIX, *Université de Mons-Hainaut et Athénée Royal Jean Rey (Couvin)*

1. Introduction

1.1. Un mélange explosif

> *Chacun sait, hélas, qu'un cours ou un texte de vulgarisation est une joie...pour l'auteur. La bande dessinée scientifique, au contraire, c'est le triomphe du lecteur !*

Tel est le début de la post-face du *Géométricon* de Jean-Pierre Petit, un album de bandes dessinées destiné à introduire des notions de géométrie euclidienne ou pas ...

Le communément nommé *neuvième art* permettrait-il donc d'aborder des thèmes scientifiques (et notamment mathématiques !) avec aisance, et peut-être sans cet aspect rébarbatif que peuvent avoir les manuels scolaires habituels auprès des élèves du primaire ou du secondaire ([1]) ? A vous de juger !

Avant de nous plonger dans quelques exemples de ces albums illustrés qui tentent d'enseigner des mathématiques, tentons un peu de cerner la vision que la bande dessinée *classique* présente de cette science si particulière à laquelle nous nous intéressons ici ...

1.2. Le mathématicien et les maths dans la BD

De célèbres fins limiers nous diraient très certainement :
— *Tout commence avec le professeur Tournesol !*
— *Je dirais même plus, Tryphon Tournesol est au début de tout.*

Adresse de l'auteur: Frédéric Pourbaix, Rue de Pont-à-Celles 55, 6183 Trazegnies, fred-pourbaix@tiscalinet.be

([1]) Voire même leurs aînés !

... et ils n'auraient peut-être pas tout-à-fait tort. A travers la bande dessinée, l'image du mathématicien passe en effet souvent par celle du *savant complet* ([2]), stéréotype qui a l'avantage d'être reconnu auprès du grand public. Il semble que l'on ne parle explicitement de la profession ([3]) spécialisée de mathématicien que dans le cas où les personnages évoqués sont profs (car la référence est universelle) ou informaticiens (car c'est dans l'air du temps...depuis un bon bout de temps!)...

L'idée de savant complet prend son essor dans les années cinquante, un premier âge d'or de la bande dessinée en Europe, avec les deux grandes pointures que sont le professeur Tournesol dans les aventures de Tintin (dues à *Georges Rémi dit Hergé, est-il besoin de le rappeler*) et le comte Pacôme Hégésippe Adélard Ladislas de Champignac dans les aventures de Spirou (dues à l'époque au talent de André Franquin).

Champignac à l'œuvre...

Toutes les grandes *familles* de héros nées aux alentours de cette époque — et certaines plus tardivement — vont se retrouver affublées d'un savant à tout faire, ce qui permet dans les scénarii un accès aisé à des inventions farfelues ou des explications pseudo-scientifiques. Du druide Panoramix au Grand Schtroumpf, ces personnages sont légion, et ce phénomène ne se limite pas à la bande dessinée européenne! Les comics américains ne sont pas en reste avec Géo Trouvetout (Disney) ou le professeur Xavier (*The*

([2]) C'est la plus fréquente, mais ce n'est pas la seule. On trouve en effet — et heureusement! — quelques mathématiciens et savants qui échappent à ce carcan parmi les personnages de fiction.

([3]) A propos des mathématiciens, on peut difficilement parler d'*une* profession, à moins de les définir comme des gens qui *résolvent des problèmes*. Mais c'est un autre débat!

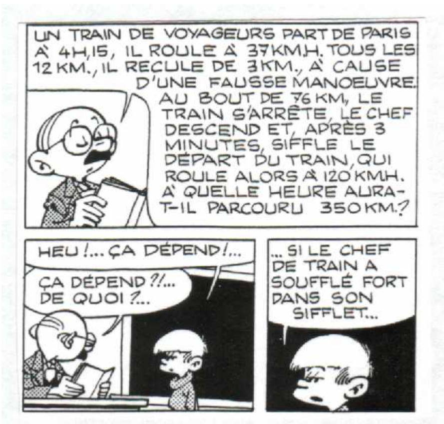
X-Men ; les mangas japonais ont quant à eux leur Ido Daisuke (*GUMN*) ou leur parodique Tortue Géniale (*Dragonball*)...Et cette liste est bien loin d'être exhaustive !

Mais tonnerre de Brest, nous serions des rustres si nous omettions de citer leur ancêtre à tous, le *savant Cosinus* du dessinateur français Georges Colomb (alias Christophe, également auteur de la *famille Fenouillard*), l'un des précurseurs de la bande dessinée en Europe. Ce personnage, actif à la fin du 19*eme* et au début du 20*eme* siècle, devance donc de loin les savants susnommés. Il s'inspire d'un authentique mathématicien connu de tous : Jacques Salomon Hadamard !

Jacques Hadamard naît en France en 1865. Il étudie à l'Ecole Normale et obtient son doctorat en 1892. Il aide à fonder l'analyse fonctionnelle et s'intéresse aux nombres premiers. A sa mort en 1963, il laisse de nombreux travaux, et notamment un ouvrage intitulé La psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.

Pendant longtemps, la science fait cependant peur. Rappelons que la première apparition du comte de Champignac ([4]) n'est pas très conviviale, et que d'autres scientifiques comme le grand Zorglub ([5]) ou encore le professeur Septimus ([6]) ont mis plus d'une fois le monde en danger (voir ci-dessous). Yves Chaland et Luc Cornillon ont d'ailleurs repris ces peurs de façon ironique dans leur album *Intrépide*, en hommage à ces BD des années 50-60 dites de style *atome*.

Nous avons parlé des savants complets...Mais les maths, dans tout ça ? Pendant longtemps, les mathématiques n'apparaissent pas, ou de façon très caricaturale, dans la BD.



Un extrait de La bosse des maths*, un mini-récit du journal de Spirou dû à la plume de Francis, dans lequel un jeune élève très peu doué pour les mathématiques en deviendra un champion suite à un coup sur la tête.*

Il faut attendre les années 70 (un second âge d'or ?) où la maturation du public de la bande dessinée, l'essor de la science-fiction et la demande des

([4]) Dans *Il y a un sorcier à Champignac*, par A. Franquin aux éditions Dupuis.
([5]) Dans *Z comme Zorglub*, toujours par Franquin chez Dupuis.
([6]) Dans *La Marque Jaune*, une aventure de Blake et Mortimer par E.P. Jacobs.

média (conquête de l'espace et surtout de la Lune) permettront l'ouverture du lectorat moyen aux sciences. Des séries comme les aventures de la délicieuse *Yoko Tsuno* de Roger Leloup regorgeront de véritables chercheurs scientifiques, à commencer par l'héroïne elle-même ([7])! On peut enfin aborder des thèmes plus ardus, dont parfois des mathématiques.

C'est une époque ou des revues comme *Métal Hurlant* vont révéler de nombreux auteurs de bande dessinée *adulte*. Jean Giraud ([8]), alias Gir ou Moebius en sera la star incontestée et abordera des concepts inédits. Notons que son pseudonyme est un hommage au mathématicien Allemand Augusus Ferdinand Möbius, né à Schulpforta en 1790 et mort en 1868 à Leipzig. Le ruban de Möbius est en effet un symbole de la dichotomie de l'oeuvre de Giraud/Moebius, artiste pourtant unique.

À gauche, un portrait du mathématicien par André Franquin et à droite, un autoportrait de l'auteur multifacette : de Möbius à Moebius, cherchez l'erreur!

Dans le domaine de l'humour, quelques mathématiciens de renom se verront métamorphosés en personnages de comic strips. Après Jacques Hadamard, c'est Léonard de Vinci (*Léonard* par Turk et De Groot), Isaac Newton (*Les Dingodossiers* de Gotlib et Goscinny) et Albert Einstein en personne (*La vie d'Einstein* par Daniel Goossens [10]) qui vivront dans un univers de bulles.

([7]) Electronicienne japonaise...
([8]) Notons que ce n'était pas un inconnu et qu'il dessinait déjà les aventures du lieutenant Blueberry dans un registre plus classique.

Mais l'aventure ne s'arrête pas là, et les choses sérieuses ne font que commencer... Entrons à présent dans l'univers des bandes dessinées qui nous posent au cours de leur trame des questions sur les mathématiques.

2. Des BD qui posent des questions

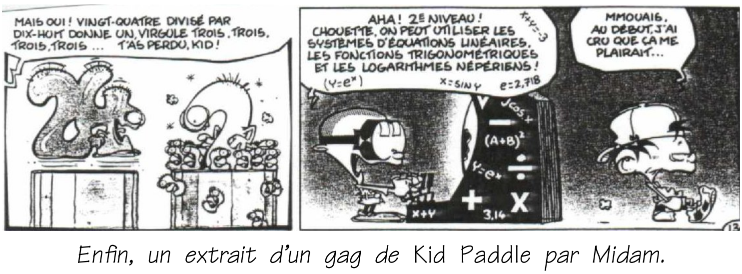
2.1. Quelques mots

Il y a, parmi les auteurs de bandes dessinées, de véritables scientifiques qui sommeillent — où qui sont même bien réveillés — et il n'est pas rare de trouver dans leurs oeuvres des références directes au monde des mathématiques, qu'ils s'amusent à disperser de ci, de là. Les illustrations qui suivent témoignent de ces petites notes éparses...

Et ainsi de suite pendant plus d'un quart d'heure.

Des extraits de La Conversation *de* François Boucq, *du* Grand Secret *de* Marco et Velhman *et du* Théorème de Morcom *de Goffin et Peeters.*

Ces images sont tirées de Sodomie fractale et Pénétrations non-euclidiennes *de Clarke !*

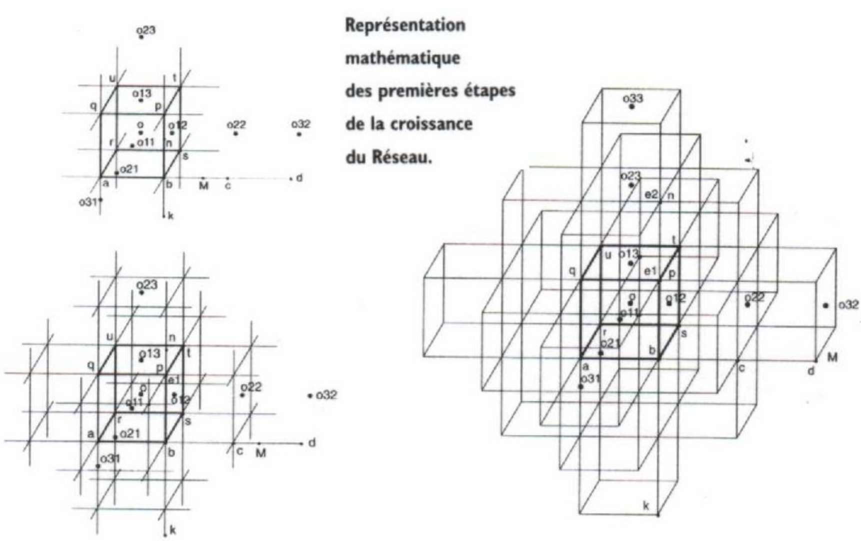


Enfin, un extrait d'un gag de Kid Paddle *par* Midam.

2.2. Le réseau d'Urbicande

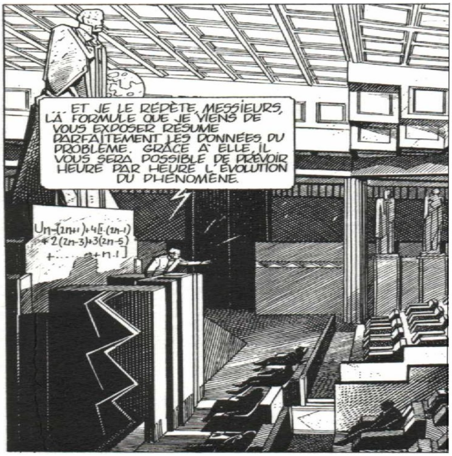
Tout le monde a déjà tenu en main un jour ou l'autre un exemplaire du *Rubik's cube*, dû à l'inventeur de casse-têtes mathématiques Erno Rubik. Ce cube est composé de 27 cubes élémentaires auxquels on peut faire subir des rotations par tranches. Chaque face présente neuf carrés de couleur, et le but est de transformer le cube de manière à n'avoir qu'une seule couleur présente sur chaque face.

Dans leur album *La fièvre d'Urbicande* ([15]) François Schuiten et Benoit Peeters créent un jeu de mots à propos de ce cube en introduisant un problème de réseau cubique dont la découverte modifie le destin d'un architecte de la cité d'Urbicande nommé Eugen *Robick*. Le réseau d'Urbicande grandit par étapes successives ([9]). C'est au départ un cube, puis un nouveau cube apparait sur chaque face...A chaque étape, chaque face libre de la construction voit naître un nouveau cube. Dans le *Guide des cités obscures* ([16]) à la section concernant Urbicande, nous voyons un shéma du phénomène :

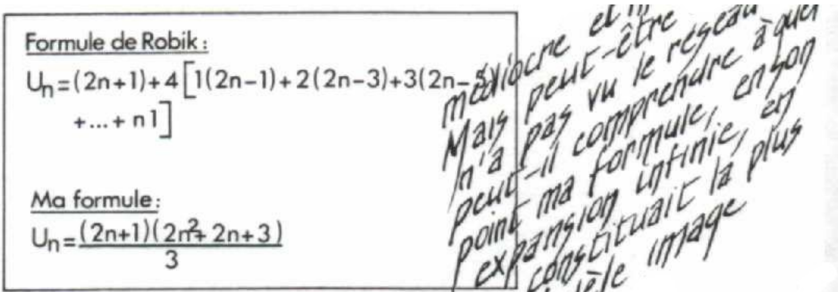


([9]) Dans l'album, les auteurs compliquent l'histoire en modifiant aussi la *taille* des cubes, et les conséquences sont très lourdes.

Eugen Robick lui-même, qui passera le restant de ses jours à étudier le réseau mystérieusement apparu dans sa cité, sera le premier à mettre en équation l'évolution du réseau. Nous le voyons ci-après en train d'essayer de convaincre les membres de l'académie du bien-fondé de ses théories. La formule au tableau donne le nombre total de cubes présents à l'étape *n*.



Quelques années après la disparition du réseau du champ de vision des humains, le professeur R. De Brok se penchera à nouveau sur le problème. Ses réflexions sont réunies dans une petite plaquette devenue très rare et intitulée *Le mystère d'Urbicande*. A cette occasion, il reprend les travaux de Robick et améliore sa formule.



Un extrait des notes de R. De Brok concernant l'aspect mathématique du phénomène du réseau d'Urbicande. On y voit une formule plus esthétique que celle de Robick.

Et voilà qui peut donner des idées d'activité en classe en explicitant le passage de la formule de Robick à la formule de De Brok :

$$\begin{aligned} u_n &= (2n+1) + 4.((2n-1) + 2(2n-3) + 3(2n-5) + \cdots + n) \\ &= (2n+1) + 4.\sum_{k=1}^{n} k(2n-2k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2n+1)+4.\sum_{k=1}^{n}(2n+1)k \quad -4.\sum_{k=1}^{n}2k^2 \\
&= (2n+1).(1+\frac{4n(n+1)}{2})-\frac{8(n+n^2).(2n+1)}{6} \\
&= (2n+1).(1+(2n^2+2n)-\frac{4}{3}(n+n^2)) \\
&= (2n+1).(\frac{2}{3}n^2+\frac{2}{3}n+1) \\
&= (2n+1).\frac{2n^2+2n+3}{3}
\end{aligned}$$

Mais je sais que la série des *Cités Obscures* est très connue des professeurs de mathématique, et l'extrait ci-dessus a déjà maintes fois été utilisé !

Rendons quand même les honneurs à qui de droit : l'esprit général, l'esthétisme et parfois même les personnages des albums ([10]) de Schuiten et Peeters sont directement tirés de la revue de vulgarisation scientifique (souvent même pseudo-scientifique) *Je sais Tout* publiée au début de ce siècle...

3. Des BD qui donnent des réponses

3.1. Avant d'entrer dans le vif du sujet

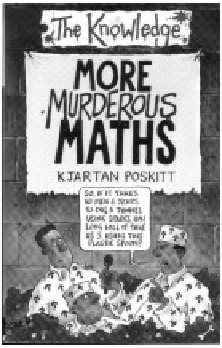
Il est des bandes dessinées à caractère didactique dont le but avoué est d'introduire véritablement des notions mathématiques.

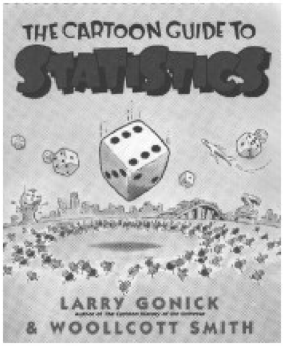
Plusieurs approches sont possibles :

— au sein d'une histoire de fiction, des personnages rencontrent des problèmes de mathématique brefs et les résolvent ;
— une théorie plus complète est développée tout au long d'un album, dans lequel on ne trouve pas — ou très peu — de récit servant de support ;

([10]) Remarquons de plus que cette série n'échappe pas à la présence d'un *savant à tout faire* récurrent : le professeur Wappendorf.

— des notions de mathématiques sont présentées dans un texte conventionnel, et la BD n'intervient que pour illustrer, animer ou dynamiser certaines séquences.

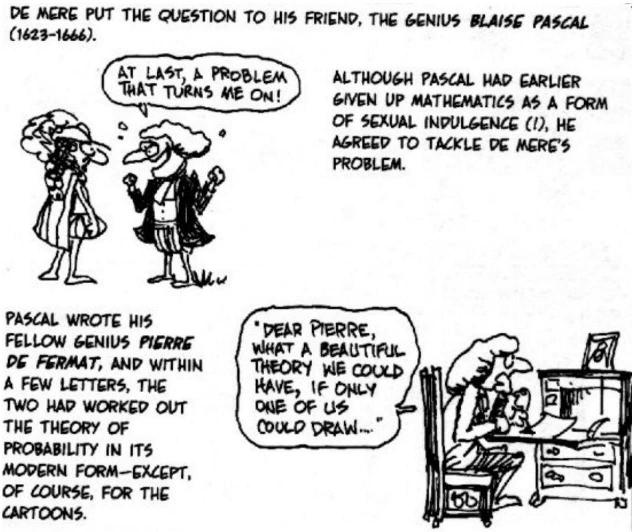




La dernière catégorie semble très développée dans les pays anglo-saxons, où des collections complètes d'ouvrages sont publiée sur ce principe ! Les séries *The Cartoon Guide* et *Horrible Science* en sont d'imposants exemples . . .

3.2. Regardons d'un peu plus près...

Voici une planche extraite du *Géométricon* de Jean-Pierre Petit, un physicien français très médiatique.



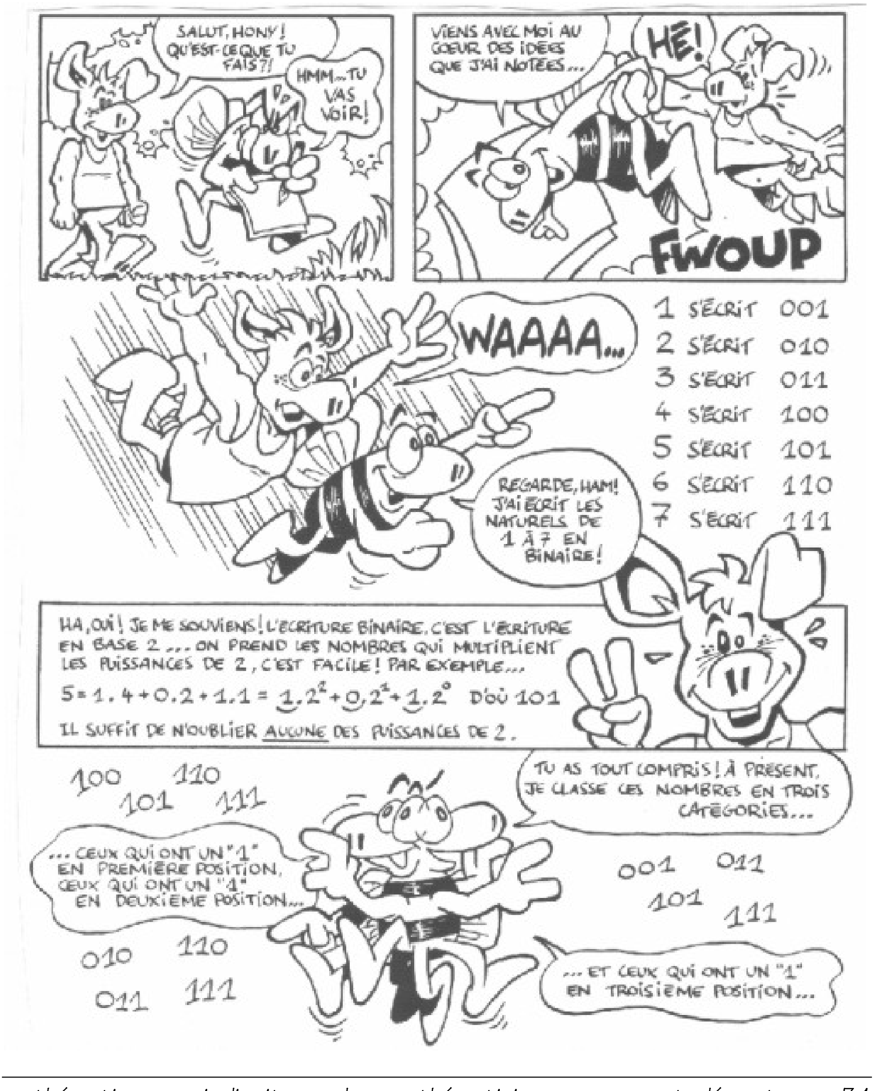
En direct de New-York City, ce guide de statistiques à l'usage des débutants est dû à la plume du dessinateur Larry Gonick et à l'expérience du statisticien Woolcott Smith.

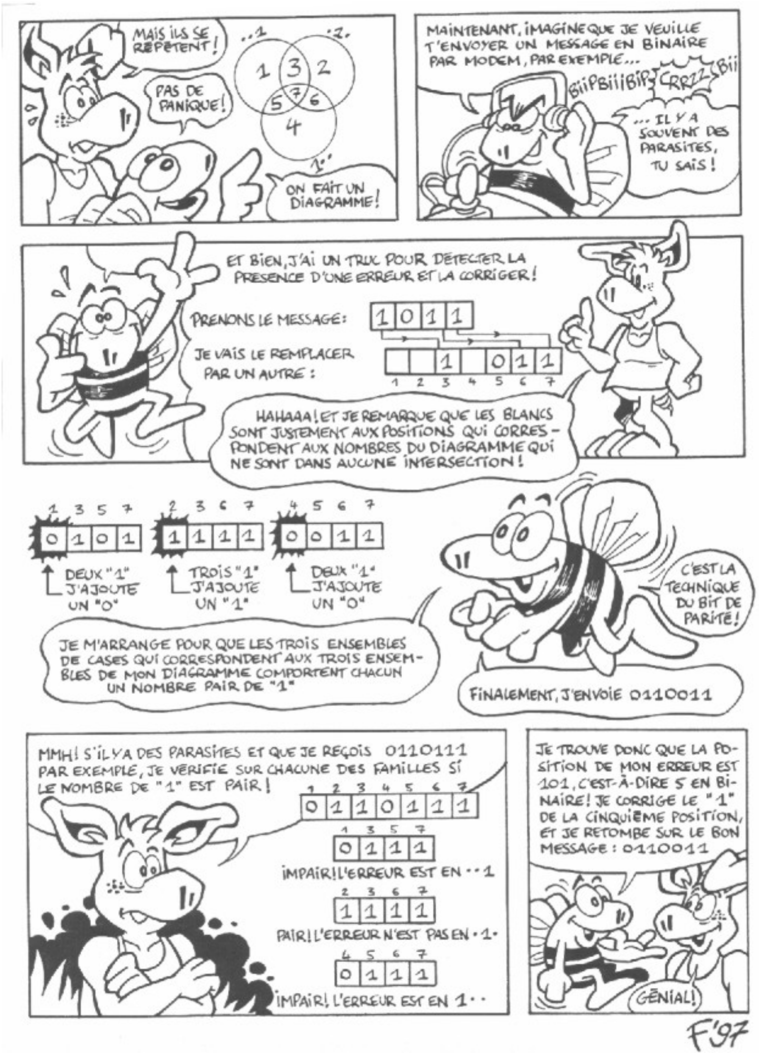
Ces dessins nous viennent du dessinateur Alexis, au sein des pages de l'éphémère journal pirate *Le Trombone Illustré.*

 dire " démontré ". Il y avait, disions-nous, un théorème de

3.3. Un *exemple* parlant

Voici un *exemple in extenso* extrait du magazine *Math-Jeunes* publié par la SBPMef.





Les deux héros présentent rapidement de petites théories amusantes — ou parfois des éléments essentiels — avec un dynamisme et un humour souvent absent des manuels !

3.4. Une conclusion

L'emploi en classe, où en tant que lectures conseillées à des élèves, de bandes dessinées didactiques peut faciliter la découverte de notion nouvelles. C'est «le morceau de sucre qui aide la médecine à couler» comme disait Mary Poppins ! Mais on peut aller plus loin et voir dans ce moyen d'expression des possibilités de mise en scène qu'un enseignement ordinaire ne permet pas. Le rythme de lecture reste propre à chacun, et l'élève dispose d'un support écrit qui peut lui servir de référence à tout moment. Des images fortes peuvent rester attachées à une notion mathématique pour la vie, et la mémoire y fera plus facilement appel (*expérience vécue* !).

Voilà en tous cas un vecteur ([11]) d'apprentissage personnel des mathématiques — n'empèchant d'ailleurs guère des commentaires au sein d'un cours — qui tout comme les logiciels didactiques ([12]) et les livres d'exercices « *de vacances* » complète et devance l'enseignement scolaire.

A vous d'en découvrir au hasard des librairies, d'en faire lire, et qui sait, d'en réaliser avec vos petits doigts...

En route vers de nouvelles aventures !

4. Bibliographie

Bibliographie

[1] Nick Arnold, *Fatal Forces*, Horrible Science, Scholastic Ltd, 1998.

[2] R. de Brok, *Le mystère d'Urbicande*, Presses de l'Académie des Sciences de Brüsel.

[3] Clarke, *Sodomie fractale et pénétrations non-euclidiennes*, Fluide Glacial n°279, septembre 1999.

[4] Collectif, *Le Journal de Spirou*, éditions Dupuis.

[5] Collectif, *Fluide Glacial*, éditions Audie.

[6] Collectif, *Le Trombone Illustré*, éditions Dupuis, 1977.

[7] A. Deledicq, J.-C. Deledicq et F. Casiro, *Les Maths et la Plume*, Les Malices du Kangourou, ACL éditions 1996.

([11]) Sans jouer sur les mots !

([12]) ...qui ne sont pas des concurrents de ces BD, puisqu'ils ne fonctionnent pas sur le même principe et n'ont pas toujours les mêmes buts.

[8] Alain Goffin et Benoit Peeters, *Le théorème de Morcom*, Les Humanoïdes Associés 1992.

[9] Larry Gonick and Woolcott Smith, *The cartoon guide to statistics*, HarperPerennial, New York USA, 1993.

[10] Daniel Goossens, *La vie d'Einstein*, éditions Audie/Fluide Glacial 1980.

[11] Midam, *Kid Paddle*, plusieurs albums aux éditions Dupuis, 1997.

[12] Jean-Pierre Petit, *Anselme Lanturlu*, plusieurs albums aux éditions Belin, Paris, 1980.

[13] Kjartan Poskitt, *Murderous Maths*, The Knowledge, Scholastic Ltd, 1998.

[14] Frédéric Pourbaix, *Ham et Hony*, régulièrement dans le magazine Math-Jeunes, SBPMef.

[15] François Schuiten et Benoit Peeters, *La fièvre d'Urbicande*, éditions Casterman 1992.

[16] François Schuiten et Benoit Peeters, *Le guide des Cités Obscures*, éditions Casterman 1996.

[17] Ian Stewart, *Rose Polymath*, plusieurs albums aux éditions Belin, Paris, 1980.

[18] Turk et DeGroot, *Léonard*, plusieurs albums chez divers éditeurs.

Voltaire et le devin

Voltaire disait : « *Un astrologue ne saurait avoir le privilège de se tromper toujours* ».

Un calcul tout simple permet de mieux comprendre cette réflexion.

Imaginons qu'un « devin » vous annonce 10 évènements qui ont chacun 1 chance sur 3 d'arriver. Savez-vous que la probabilité que l'un d'entre eux, au moins, se produise est de plus de 98% ?

Mathématiquement, il s'agit d'une loi binomiale $\mathfrak{Bi}(10, \frac{1}{3})$ pour laquelle vous recherchez la $P(\mathfrak{X} > 0) = 1 - P(\mathfrak{X} = 0) = 1 - C_{10}^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 1 - 0.017 = 0.983$

Stupéfiant, non ?

Une question de l'O.M.B. 2000 se prolonge en un curieux problème

S. COURTOIS ET F. DENIS,

La question suivante fut posée lors de l'Olympiade Midi Finale 2000 ; une solution fut récompensée du prix Van Hamme.

Par les sommets** A **et** B **d'un triangle** ABC**, deux droites sont tracées de manière à partager l'intérieur du triangle en quatre régions : trois triangles et un quadrilatère. Si trois de ces régions sont de même aire, montrer que le quadrilatère est l'une d'entre elles.

Un deuxième problème en découle naturellement. Etant donné un triangle** ABC**, comment tracer deux droites** BD **et** CE **se coupant en** F**, de manière à partager l'intérieur du triangle en quatre régions telles que trois de ces régions, dont le quadrilatère comme il a été prouvé précédemment, soient de même aire ?

Schéma de la résolution exposée ci-dessous

Il s'agit de déterminer les positions de D et E sur les côtés AC et AB du triangle (Figure 1).

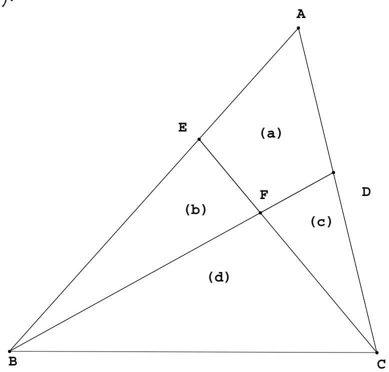


Figure 1

• **Deux cas** se présentent, suivant la disposition des trois régions dans ABC : $(a) = (b) = (c)$ ou $(a) = (b) = (d)$.

Adresse des auteurs : S. Courtois, Raatshovenstraat 83, 3400 Landen et F. Denis, rue Duchêne 9, 4120 Neupré

• **Si le triangle** *ABC* **est équilatéral**, la résolution du problème est simplifiée grâce à l'existence de symétries orthogonales dans le premier cas et de rotations de 120° dans le deuxième cas.
• **Une transformation affine** (étirement ou cisaillement) applique les solutions trouvées dans le triangle équilatéral à tout triangle quelconque de même base, grâce au fait que la relation permettant de déterminer la position de *D* et de *E* est préservée par l'affinité.

1. Solution dans le cas particulier du triangle équilatéral.

1.1. Première solution.

Les trois parties (*a*), (*b*), (*c*) ont la même aire.

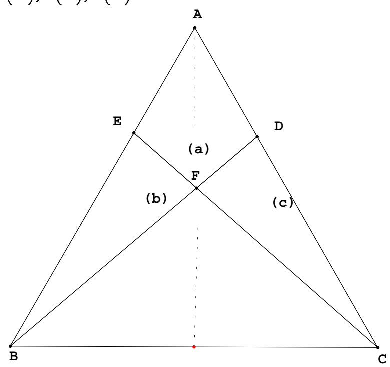


Figure 2

On a

$$(a) + (b) = (a) + (c) \qquad (1)$$

$$(a) + (b) = \text{ Aire } ADB = \text{ Aire } ABC \times \frac{AD}{AC}$$

$$(a) + (c) = \text{ Aire } AEC = \text{ Aire } ABC \times \frac{AE}{AB}$$

De (1), il découle $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$, soit $AD = AE$ Dès lors la symétrie d'axe *A* du triangle équilatéral échange *BD* et *CE* et l'axe passe par leur intersection *F*.

Le triangle AEF a comme aire $\frac{(a)}{2}$ ou $\frac{(b)}{2}$, la moitié de EBF. Donc AE vaut la moitié de EB.

Les points D et E occupent des positions sur les côtés AC et AB du triangle déterminées comme suit :

E **et** D **partagent** AB **et** AC **dans le rapport** $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

1.2. Deuxième solution.

Les trois parties (a), (b), (d) ont la même aire (Figure 3).

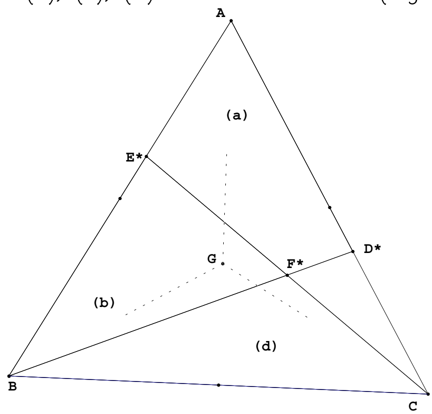


Figure 3

Nous nommons les points D^*, E^*, F^* sur la figure, mais pour la facilité des écritures nous les notons ici D, E, F.

On a

$$(a) + (b) = (b) + (d) \qquad (1)$$

$$(a) + (b) = \text{ Aire } ADB = \text{ Aire } ABC \times \frac{AD}{AC}$$

$$(b) + (d) = \text{ Aire } BEC = \text{ Aire } ABC \times \frac{BE}{AB}$$

De (1), il découle $\frac{AD}{AC} = \frac{BE}{AB}$, soit $AD = BE$

Dès lors les triangles AEC et CDB sont isométriques par la rotation de 120°, centrée au centre G du triangle ABC. On a $AE = DC$.

Puisque $(b) = (d)$, les triangles EFB et FCB de même aire et de même hauteur ont des bases de même longueur, EF et FC : F est milieu de $[EC]$.

Déterminons les positions des points D **et** E **sur les côtés** AC **et** AB **du triangle.** La parallèle à DB, menée par le point C coupe le prolongement de AB en B' (Figure 4).

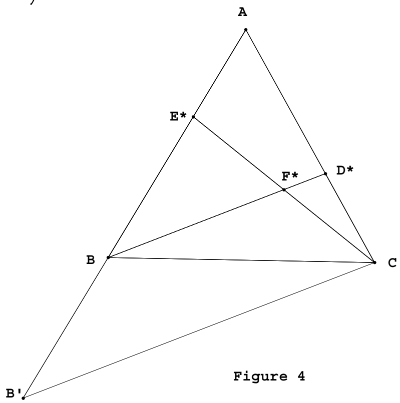


Figure 4

Puisque $EF = FC$, $BB' = EB$, lui-même égal à AD.

Dans $AB'C$, avec BD parallèle à $B'C$, on a $\frac{AB}{AD} = \frac{BB'}{DC}$ qui, en revenant aux notations de la figure, s'écrit respectivement

$\frac{BA}{BE^*} = \frac{BE^*}{E^*A}$, E^* divise intérieurement le côté BA en moyenne et extrême raison.

$\frac{AC}{AD^*} = \frac{AD^*}{D^*C}$, et D^* divise intérieurement le côté AC en moyenne et extrême raison.

D^* **et** E^* **partagent les côtés** BA **et** AC **du triangle dans la section dorée.**

Pour en rappeler la valeur, posons $AB = 1$ et $EB = x$, l'équation $\frac{1}{x} = \frac{x}{(1-x)}$ ou $x^2 + x - 1 = 0$, a comme racine positive $\frac{(-1+\sqrt{5})}{2} = 0,618\ldots$ (soit φ, la section dorée, aisément constructible).

Il y a évidemment une solution « bis », qui n'est pas représentée mais qu'on pourrait noter D°, E°, F° symétrique de E^*, D^*, F^*, par rapport à l'axe de symétrie passant par A.

Le logiciel Cabri permet d'effectuer aisément ces constructions dans le triangle équilatéral, de vérifier expérimentalement les positions de D **et** E **sur les côtés du triangle ainsi que l'égalité des aires des**

trois régions du triangle. Il permet aussi d'augurer ce qui se passe si A **occupe diverses positions dans le plan,** B **et** C **restant fixes.**

2. Cas général du triangle quelconque

Partons à présent à un triangle quelconque $A'BC$.

Les solutions trouvées sur le triangle équilatéral ABC de même base BC se transportent sur $A'BC$, par la transformation affine appliquant (A, B, C) sur (A', B, C).

En effet, la transformation affine conserve le rapport de section de trois points alignés et elle conserve l'égalité des aires.

Voici trois procédés de construction qui s'appuient sur cette transformation ; la figure 5 illustre la construction des pointsD'^*, E'^*, F'^*, images de D^*, E^*, F^* qui s'appuient sur cette transformation (Figure 5).

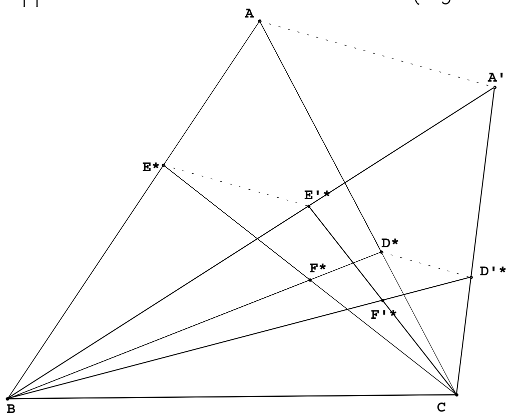


Figure 5

● On peut construire le triangle équilatéral ABC et les points D, E et F, D^*, E^* et F^*. Si AA' coupe BC, **l'étirement** d'axe BC, qui applique A sur A', applique aussi les points D, E et F, D^*, E^* et F^* respectivement sur D', E' et F', D'^*, E'^* et F'^* qui sont les points recherchés. Montrons à titre d'exemple le procédé de construction du point D'^* : $D^*D'^*$ parallèle à AA' et D'^* appartient à $A'C'$. Si AA' est parallèle à BC, **le cisaillement** d'axe BC qui applique A sur A' fournit les points recherchés.

● Sans recourir à la construction du triangle équilatéral, on peut **s'appuyer**

sur l'invariance des rapports de section par la transformation affine. Les points D', E' et D'^*, E'^* partagent eux aussi les côtés de $A'BC$ dans les rapports $\frac{1}{3}$ et φ, comme on l'a montré plus haut.

- Les points D' et D'^*, E' et E'^* s'obtiennent aussi directement sur les côtés du triangle quelconque $A'BC$ en **s'appuyant sur l'invariance des abscisses.** Ces points ont, par rapport au repère (B, BC, BA'), les mêmes coordonnées que D, D^*, E , E^* par rapport au repère (B, BC, BA).

Pour être complet, il faut ajouter la solution symétrique du deuxième cas, nommée D'°, E'°, F'° dans le triangle quelconque, obtenue comme image de F'^*, D', E'^* par la symétrie oblique de direction BC, ayant pour axe la médiane de $A'BC$ issue de A' (Figure 6).

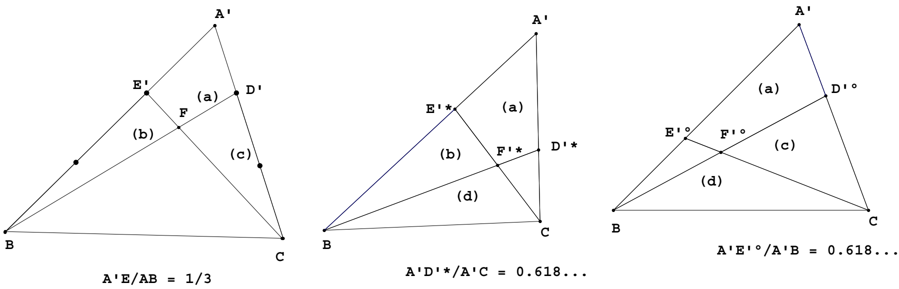


Figure 6

Un outil à votre disposition

Une liste de discussion consacrée à l'enseignement des mathématiques est disponible sur le site de la SBPMef. Elle est destinée à l'échange de questions et d'opinions sur tout sujet susceptible d'intéresser les enseignants de mathématique de tous les niveaux, « du maternel à l'université ». N'hésitez pas à y faire part de vos préoccupations, à y solliciter des informations ou encore de l'aide. Parmi les abonnés, il s'en trouvera certainement qui pourront vous répondre.

Pour vous abonner à la liste, envoyez par courrier électronique à l'adresse `majordomo@umh.ac.be` le message d'une ligne suivant (évitez toute signature) : `subscribe sbpmlist`

Vous recevrez alors automatiquement (et gratuitement) tous les messages électroniques envoyés à la liste. Pour envoyer un message à la liste, il suffit de l'envoyer à l'adresse `sbpmlist@umh.ac.be`

Les nombres premiers

CHRISTIAN RADOUX, ***Université de Mons-Hainaut***

0. Avertissement.

Ce n'est pas sans réticences que j'ai rédigé ce texte, compte tenu de son caractère décousu et de son fond que je persiste à trouver scientifiquement banal. Au départ, il s'agissait seulement de « distraire » par un petit exposé, largement improvisé, les collègues accompagnant leurs élèves aux épreuves des Olympiades Mathématiques dans nos locaux montois. A ma grande surprise (mais si, mais si !), cette initiative de mon « vieil » ami Henri Pools a suscité à son tour une invitation de Claude Villers, autre complice de longue date, au Congrès de Seraing. J'avais prévu maintes digressions possibles, en sens très divers, pour répondre à des attentes que je soupçonnais fort variées. La séance a dépassé mes prévisions ...

Et finalement, quand Jules Miewis m'a demandé cet article « compte-rendu » à un moment où j'étais débordé, j'ai profité du délai pour lui demander de bien y réfléchir. Cet avertissement pour me « dédouaner » du résultat que vous allez contempler.

1. Généralités.

En mathématiques, tout nous ramène toujours à deux concepts de base : l'espace et le nombre, quelle que soit la technicité de leurs avatars modernes. Et le nombre premier joue, dans l'univers numérique, un peu le rôle de l'atome en chimie. Cela explique assez largement la fascination qu'il a toujours exercée sur les mathématiciens. Sans parler de la superbe beauté de tant de théorèmes le concernant.

2. Il *existe* une infinité de nombres premiers.

Un des plus merveilleux exemples de « l'art pour l'art » du temps d' *Euclide* ! Cette joie esthétique, cette curiosité pure qu'un enseignement à l'utilitarisme fanatique croit devoir bannir est pour moi la pulsion la plus profonde en mathématiques.

Voici cette preuve, à la fois si belle et si limpide.

Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers : $2, 3, 5, 7, 11, \cdots, p$

Soit alors $N \overset{\text{déf}}{=} 1 + 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots \times p$

N, qui surpasse p, est donc composé. Mais alors, il est divisible par un nombre premier *q* qui apparaît lui-même dans la liste complète $2, 3, 5, 7, 11, \cdots, p$

Ainsi, par différence, *q* divise 1. C'est absurde.

3. Comment se répartissent globalement les nombres premiers ?

Un rapide coup d'oeil à une table fait vite apparaître leur raréfaction ($\Pi(10^n)$ désigne ici le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à 10^n).

n	$\Pi(10^n)$
1	4
2	25
3	168
4	1 229
5	9 592
6	78 498
7	664 579
8	5 761 455
9	50 847 534
10	455 052 511

n	$\Pi(10^n)$
11	4 118 054 813
12	37 607 912 018
13	346 065 536 839
14	3 204 941 750 802
15	29 844 570 422 669
16	279 238 341 033 925
17	2 623 557 157 654 233
18	24 739 954 287 740 860
19	234 057 667 276 344 607
20	2 220 819 602 560 918 840

En fait :

$$\Pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$$

Le symbole d'équivalence $\sim$ a un sens bien précis : le quotient des deux membres tend vers 1 lorsque *n* tend vers l'infini. Autre façon de dire cela : l'erreur relative commise en remplaçant $\Pi(n)$ par $\frac{n}{\ln n}$ tend alors vers 0.

La démonstration de ce théorème fondamental est une longue saga qui remonte à *Euler*, pour aboutir à *Hadamard* et à *de la Vallée-Poussin*, en passant par *Legendre*, *Riemann*, etc.

4. L'identité fondamentale dans la preuve.

Elle est elle-même due au génie prophétique d'*Euler*. Soit

$$\zeta(s) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

(la fameuse fonction zeta « de *Riemann* »)

Supposons ici, pour simplifier que la partie réelle du nombre complexe s soit strictement supérieure à 1, ce qui assure immédiatement la convergence absolue de cette série. Alors

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

(P désignant l'ensemble des nombres premiers)

En effet,

$$\prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \in P} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ms}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

puisque tout naturel s'exprime de façon unique (à l'ordre près) comme produit de puissances de nombres premiers.

L'étude analytique fine de zeta, prolongée au plan complexe tout entier, excepté en 1, où elle possède un pôle simple de résidu 1, était dès lors au coeur de l'aventure.

Signalons à ce propos la conjecture (1859) toujours ouverte de *Riemann* :

Tous les zéros « non triviaux » de zeta ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$

Elle reste le noyau dur de très profondes questions de théorie analytique des nombres.

5. Logiciels.

A Seraing, nous avons joué un peu avec deux logiciels de ma fabrication permettant de calculer $\Pi(n)$, ainsi que le n-ième nombre premier pour « de grandes » valeurs de n. Ils sont téléchargeables (gratuitement bien sûr), parmi environ 70 autres programmes, à partir de ma page `WEB` à l'Université de Mons. L'adresse est :

`http://www.umh.ac.be/~nombres`

6. Records.

Le nombre « de Mersenne »

$$M_p \overset{\text{déf}}{=} 2^p - 1$$

ne peut évidemment être premier que si p est lui-même premier. La réciproque est fausse :

$$M_{11} = 23 \times 89$$

On dispose d'un test particulier (*Pepin-Lucas-Lehmer*), assez facilement programmable pour voir ce qu'il en est. C'est pourquoi les plus grands nombres premiers connus ont pratiquement toujours été des nombres de Mersenne.

A l'adresse suivante :

`http://www.mersenne.org`

on peut télécharger gratuitement un logiciel réalisant le test en question (la partie la plus complexe à programmer était celle de la multiprécision, compte tenu de la taille gigantesque des nombres à traiter.)

Cela permet de participer, selon une procédure clairement décrite, à l'opération **GIMPS** : *Great Internet Mersenne Prime Search*. Après avoir choisi une tranche numérique qui reste à explorer, on y active le logiciel, alors parti pour des semaines, voire des mois de calcul. Rassurez-vous : on peut l'interrompre à volonté, pour ensuite redémarrer à partir de l'endroit déjà atteint.

C'est ainsi que des amateurs, de très jeunes étudiants ont successivement écrit leur nom au livre des records. Actuellement, il s'agit de Nayan Hajratwala, avec le nombre premier de 2 098 960 chiffres décimaux $M_{6\ 972\ 593}$

7. Quelques applications analytiques de la loi de distribution des nombres premiers.

La loi

$$\Pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$$

peut aussi bien s'écrire

$$\frac{\Pi(n)}{n} \sim \frac{1}{\ln n}$$

qui fait apparaître ce qu'on pourrait appeler la fonction « densité » des nombres premiers.

Soit maintenant une fonction f continue sur $[2, \infty[$

Un « raisonnement de physicien » nous dicte alors l'équivalence suivante :

$$f(2) + f(3) + f(5) + f(7) + f(11) + \cdots + f(p) \sim \int_2^p \frac{f(x)}{\ln x} dx$$

Bien sûr, ceci demande une preuve rigoureuse.

Voyons maintenant ce que cela donne dans trois cas particuliers remarquables

1. On connaît le mode de divergence de la série harmonique

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \big) - \ln n \Big) = \gamma$$

où la constante d'Euler $\gamma = 0,577\ 215\ 664\ 9\ldots$
Si l'on pose $f(x) = \frac{1}{x}$ dans la loi de sommation ci-dessus, on trouve tout de suite

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{p} \sim \ln\big(\ln p\big)$$

La série des inverses des nombres premiers reste divergente, en dépit de son caractère de plus en plus « lacunaire ». Mais sa « vitesse de divergence » est bien moindre.

et les conclusions) s'il est vrai ou faux.

On peut démontrer que, de façon bien plus précise,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{p}=\ln\big(\ln p\big)+a+O\big(\frac{1}{\ln p}\big)$$

où la constante $a = 0,261\ 497\ 212\ 8\ldots$

2. En posant $f(x) = \ln x$ dans la formule de sommation, on obtient encore plus immédiatement

$$\ln 2+\ln 3+\ln 5+\ln 7+\ln 11+\cdots+\ln p \sim p$$

3. Signalons la formule de *Mertens*

$$\big(1-\frac{1}{2}\big)\big(1-\frac{1}{3}\big)\big(1-\frac{1}{5}\big)\big(1-\frac{1}{7}\big)\big(1-\frac{1}{11}\big)\cdots\big(1-\frac{1}{p}\big)\sim\frac{e^{-\gamma}}{\ln p}$$

où γ est à nouveau la constante d'Euler. ($e^{-\gamma} = 0,561\ 459\ 483\ 5\ldots$)
Bien entendu, la formule triviale

$$\prod_{k=2}^{n}\big(1-\frac{1}{k}\big)=\frac{1}{n}$$

permet encore de voir l'empreinte de la raréfaction des nombres premiers dans la suite des naturels.

8. Une preuve directe.

Parmi les sujets proposés à ce moment de l'exposé est alors apparu un intérêt majoritaire pour une preuve directe, autonome, de la divergence de

$$\sum_{p\in P}\frac{1}{p}$$

Voici cette démonstration qui, par contre, ne donne aucune idée, quant à la « vitesse de divergence ».

Posons $p_1 = 1,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11,\ \ldots$

1. Appelons $N_j(x)$ le nombre de naturels $n \leqslant x$ qui ne sont divisibles par aucun p_k d'indice $k > j$.

 —Bon, eh bien, je te donne une orange. Je la coupe en petits

Tout naturel n pouvant évidemment s'écrire sous la forme $a^2 \times b$, avec b sans facteur carré, cela donne $a \leqslant \sqrt{n} \leqslant \sqrt{x}$

Par ailleurs,

$$b = \prod_{k=1}^{j} p_k^{\alpha_k}$$

où chaque α_k est dans $\{0,1\}$

A priori, b est donc susceptible de prendre 2^j valeurs.

D'où la (très grossière!) majoration $N_j(x) \leqslant 2^j\sqrt{x}$

2. Supposons maintenant que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$$

converge. On peut alors choisir j (jusqu'ici quelconque) de telle sorte que

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{p_k} < \frac{1}{2}$$

Or, le nombre de $n \leqslant x$ divisibles par p_k est la partie entière de $\frac{x}{p_k}$, elle-même majorée par $\frac{x}{p_k}$

Ainsi, $x - N_j(x)$, nombre des $n \leqslant x$ divisibles par au moins un p_k d'indice $k > j$, satisfait à la majoration (également très grossière!)

$$x - N_j(x) \leqslant \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{x}{p_k} < \frac{x}{2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{2} < N_j(x)$$

3. Les deux points précédents de ce raisonnement donnent alors

$$\frac{x}{2} < 2^j\sqrt{x}$$

ou encore

$$x < 2^{2j+2}$$

Ceci contredit le caractère arbitraire de x. L'hypothèse de convergence est donc absurde.

9. Une formule « probabiliste ».

Pour exploiter les dix minutes qui me restaient, j'ai alors proposé d'explorer un lien vers la géométrie, l'algèbre, la combinatoire, les probabilités, etc. Comme tout ce qui précède est essentiellement analytique, je m'attendais au choix de l'algèbre. Il y avait tant de jolies choses à dire, à partir des bons vieux théorèmes de Fermat

Si p est premier et ne divise pas x, alors $x^{p-1} \equiv 1$ modulo p

et de Wilson

p est premier si et seulement si p divise $1 + (p-1)!$

Mais non, une majorité claire se prononça pour les probabilités. J'ai donc terminé par le problème suivant. En termes fort vaseux,

Quelle est la probabilité pour que deux naturels pris au hasard soient premiers entre eux.

Le soin de la formalisation de l'énoncé et du raisonnement vous est laissé, comme elle le fut à l'honorable assemblée ...

1. Soit p un nombre premier fixé.
   La « probabilité » pour que les naturels m et n soient tous deux divisibles par p est $\frac{1}{p^2}$. L'événement complémentaire a pour probabilité $1-\frac{1}{p^2}$. Comme cet événement doit se produire pour tout p, la probabilité cherchée est
   $$\prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$
   en vertu d'une « indépendance » que vous devinez.
2. D'après l'identité d'Euler du paragraphe 4 ci-dessus, elle est donc aussi $\frac{1}{\zeta(2)}$.
3. La façon la plus classique de conclure est ici d'invoquer la série de Fourier pour x^2 dans $]-\pi, +\pi[$. Elle donne $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, ce qui résout explicitement le problème :

   la probabilité demandée est $\frac{6}{\pi^2}$

Mais, dans un exposé aussi informel, qui entendait surtout privilégier les idées, plutôt que l'écriture rigoureuse (elle aussi nécessaire, bien sûr), la tentation était grande de terminer par un autre coup de génie d'Euler. Le voici, tel qu'il l'a donné. Son absence totale de rigueur est facile à corriger pour qui connaît la convergence uniforme et les techniques élémentaires relatives aux séries et produits infinis. Mais, comme dans l'exposé de Seraing, je me bornerai à l'aspect vraiment ludique des superbes idées d'Euler.

Les racines de $\sin z = 0$ sont 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 4\pi$, ... Elles sont simples, puisque $(\sin z)' = \cos z$ ne peut s'annuler en même temps que $\sin z$.

Par analogie avec la factorisation d'un polynôme, Euler écrit donc

$$\sin z = Az\Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\Big)\cdots$$

(anticipant ainsi sur la belle formule de *Weierstrass* pour la factorisation des fonctions entières, dont la fonction ... eulérienne Gamma sera l'une des plus belles illustrations !)

Divisant cette formule par z, faisant tendre ensuite z vers 0, exploitant

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

et permutant au passage allègrement cette limite avec celle résidant dans le produit infini, Euler constate que $A = 1$.

En résumé, nous avons donc

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\Big)$$

Mais, par ailleurs, la formule de *Taylor* fournit

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Identifiant sans scrupules (le théorème « des zéros isolés » dans la théorie de *Cauchy* justifiera tout cela), il obtient, pour le terme « en z^3 »

$$-\frac{1}{3!} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}$$

En d'autres termes

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Bien sûr, la partition précise reste à écrire, mais c'est la mélodie qui importe et justifie le solfège, et non l'inverse ! L'enseignement l'oublie trop souvent.

10. Conclusion.

J'ai été très sincèrement surpris par l'excellent accueil réservé, à deux reprises en outre, à cet exposé aux carences pourtant énormes. Il y a manifestement une demande pour un retour « aux sources », c'est-à-dire aux idées, qui ne s'embarrasse pas d'emblée d'une rigueur formelle, dont je répète qu'elle sera strictement nécessaire un jour, si lourde soit-elle éventuellement. A méditer ! ...

11. A lire.

Je conseille très vivement la lecture de deux petits chefs-d'oeuvre de vulgarisation :

- Gérald Tenenbaum et Michel Mendès France, *Les nombres premiers* P.U.F., Collection « Que sais-je ? » n° 571, 1997.
- Jean-Paul Delahaye, *Merveilleux nombres premiers*, Editions Belin, Collection « Pour la Science », 2000
  (On y trouvera d'autres questions survolées à Seraing, comme l'écriture « en spirale » des naturels et la détection du fameux « bug » du « Pentium » par Thomas Nicely, à partir de recherche sur les nombres premiers)

Le beau, mais coûteux Paulo Ribenboim, *Nombres premiers : mystères et records* P.U.F., collection Mathématiques, 1994, pourra aussi intéresser les curieux.

Au reste, si l'éducation de la jeunesse est négligée, ne nous en prenons qu'à nous-mêmes et au peu de considération que nous témoignons à ceux qui s'en chargent.
Ds l'article « Collège » de l'Encyclopédie de d'Alembert (1717-1783)

Interrupteurs : Tangentes à un cercle

J-P. HOUBEN, *Université Catholique de Louvain*

Mots-clés : Cabri-Géomètre, interrupteur, tangentes.

Nous allons utiliser un interrupteur multiple pour montrer la construction progressive des tangentes à un cercle. Le même procédé peut être employé pour d'autres animations.

La construction des tangentes issues d'un point P extérieur à un cercle de centre O se fait en quatre étapes. A savoir :

- prendre le point milieu M entre le point O et le point P,
- tracer le cercle centré en ce milieu M et passant par le point P,
- rechercher les intersections A et B du cercle de départ et du cercle construit,
- tracer les tangentes PA et PB.

Il y a donc quatre constructions successives. Nous aurons dès lors besoin d'un interrupteur formé de quatre intervalles emboîtés sur une même droite.

Commençons par tracer les éléments initiaux de la figure : le cercle de centre O et le point P, d'où devront être construites les tangentes au cercle.

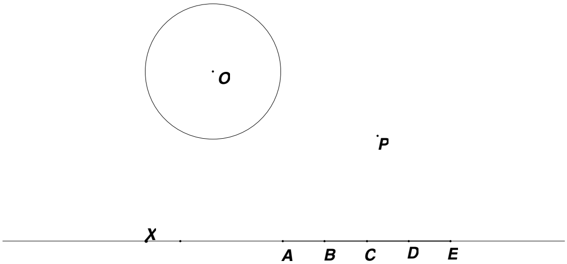
Préparons ensuite les interrupteurs, en traçant une droite horizontale d au bas de l'écran et en fixant sur celle-ci cinq points [1] A, B, C, D et E afin de définir les segments [2] emboîtés $[A, E]$, $[B, E]$, $[C, E]$ et $[D, E]$.

Mettons sur la droite d un point X que nous allons déplacer. C'est lui qui matérialisera l'interrupteur. Nous avons donc le dessin :

Adresse de l'auteur: Houben Jean-Paul, rue de l'Eglise, 78, B 1301 Bierges

(1) **Points** / *Point sur objet*

(2) **Droites** / *Segment*

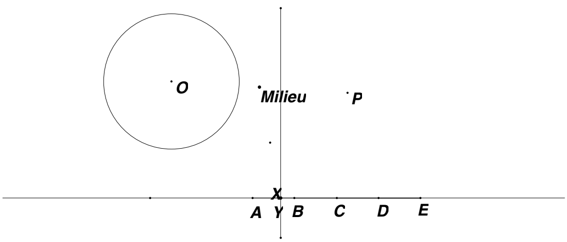


Considérons maintenant le premier élément du dessin animé : le point M milieu du segment $[O, P]$. Mettons le point X entre les points A et B.

Il appartient donc seulement au segment $[A, E]$. Par le point X, traçons la perpendiculaire (³) à la droite d. Puis recherchons l'intersection de cette perpendiculaire avec le segment $[A, E]$. Cette intersection Y n'existe que si X est un point du segment $[A, E]$. Servons-nous de ce point Y pour dédoubler le point M. Pour cela, prenons le milieu de YM (⁴), puis construisons le symétrique de Y (⁵) par rapport à ce milieu. Nous obtenons ainsi un dédoublement du point M que nous désignons par le mot **Milieu** (⁶).

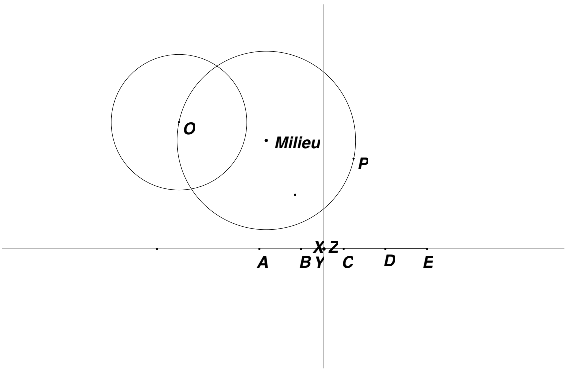
Cachons maintenant le point initial M et le point Y (⁷). Nous pouvons, si nous le désirons, épaissir le point nommé **Milieu**. Pour cela il faut, au-dessus des icônes de Cabri-Géomètre, sélectionner la rubrique **Options** et y choisir **Montrer les attributs**.

Cela étant fait, lorsqu'on sélectionne **Aspect**/*Épaissir*, on peut choisir dans les attributs affichés le **point** et épaissir la marque du point qui a pour nom **Milieu**. Nous pouvons maintenant vérifier que tout se déroule comme prévu en déplaçant vers la gauche le point X hors du segment $[A, E]$.



(3) **Constructions** / *Droite perpendiculaire*
(4) **Constructions** / *Milieu*
(5) **Transformations**/ *Symétrie centrale*
(6) **Affichage** / *Nommer*
(7) **Aspect** / *Cacher/Montrer*

Continuons notre animation en mettant maintenant le point X entre B et C. Ce point appartient aux deux segments $[A,E]$ et $[B,E]$. Recherchons l'intersection Z de la perpendiculaire passant par X avec le segment $[B,E]$. Servons-nous du point Z pour dédoubler le point **Milieu** : il y a maintenant un troisième point en M. C'est ce dernier point que nous prendrons comme centre du cercle passant par P ([8]). Mais il faut bien choisir le centre. En effet, en s'approchant de Milieu apparaît le message **quel objet ?**. En cliquant sur la souris, on a en premier **Ce point Milieu** et, en dessous, **Ce point**. Si vous aviez oublié de cacher le point M vous auriez dans l'ordre : **Ce point** M, **Ce point Milieu** puis **Ce point**. Dans tous les cas, c'est le dernier point à prendre comme centre du cercle qui passera par le point P. Nous avons alors l'image :



Avant de continuer, cachons le point milieu entre Y et **Milieu** ([9]).

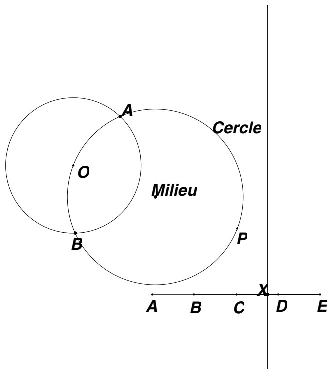
Construisons maintenant, sans les nommer, les intersections des deux cercles ([10]) .

Puis déplaçons le point X entre C et D. Le point X est commun aux trois intervalles $[A,E]$, $[B,E]$ et $[C,E]$. Recherchons l'intersection de la perpendiculaire en X à d avec le segment $[C,E]$. Ce point d'intersection T va servir à dédoubler chacun des points communs aux deux cercles. Pour chacun d'eux, nous devrons refaire la même construction :

- prendre le milieu de T et du point d'intersection,
- rechercher le symétrique de T par rapport à ce milieu

([8]) **Courbes** / *Cercle*
([9]) **Aspect** / *Cacher/Montrer*
([10]) **Points** / *Points sur deux objets*

Désignons successivement ces symétriques : A et B et cachons les intersections initiales des deux cercles. Nous avons alors l'image :

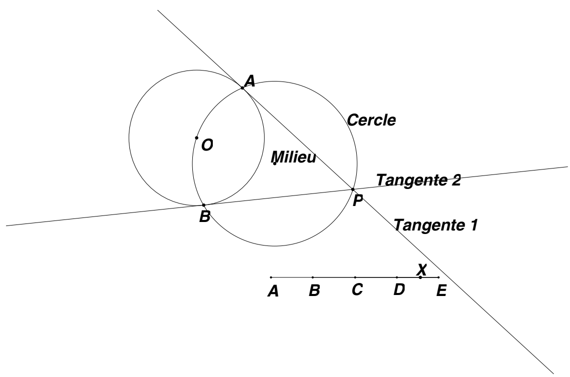


Il nous reste à dessiner les tangentes qui ne doivent être vues qu'en dernier lieu lorsque le point X est un point de l'intervalle $[D, E]$. Glissons le point X entre D et E. Recherchons l'intersection U de la perpendiculaire avec le segment $[D, E]$. Dédoublons le point P en utilisant le point U. Pour cela il nous faut :

- prendre le milieu de U et de P,
- rechercher le symétrique Q de U par rapport à ce milieu

Terminons par le tracé des droites AQ et BQ que nous pouvons nommer : Tangente1 et Tangente2 ([11]).

En y cachant les éléments indésirables ([12]), nous obtenons enfin l'image :



([11]) **Aspect** / *Cacher/Montrer*
([12]) **Aspect** / *Cacher/Montrer*

Il suffit maintenant de déplacer le point X pour faire apparaître les divers détails de la construction. Mais pour ne pas avoir de problème lorsqu'on cherche à prendre le point Y, il faut ne pas avoir oublié de cacher ([13]) les points qui sont en superposition avec le point X.

Cette technique de construction avec un interrupteur logique est utile pour illustrer la suite des images dans une construction géométrique comme on vient de le faire. Mais elle peut aussi servir pour montrer, par une suite de figures, l'approche d'une nouvelle situation mathématique. On pourrait l'utiliser pour :

- visualiser la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- montrer les étapes de la construction de l'image d'un point ou d'un objet pour une transformation comme une translation, une homothétie, une rotation, une symétrie orthogonale, une symétrie axiale ou encore une symétrie axiale non orthogonale.
- construire, dans une pyramide, la section par un plan .
- ...

Nous avons dans cet article rencontré plusieurs fois la même construction, à savoir :

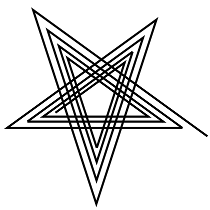
- prendre le milieu de deux points,
- rechercher le symétrique du premier par rapport à ce milieu.

Aussi dans un prochain article verrons-nous comment construire et définir une macro.

Les **JOLYGONES** sont des courbes obtenues en joignant les points définis par les équations de récurrence paramétrique :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + k^n \cos(n \times t) \\ y_{n+1} = y_n + k^n \sin(n \times t) \end{cases}$$

amorcée par $x_0 = y_0 = 0$.
L'aspect des courbes obtenues est très variable suivant les valeurs données à k et à t. Voici à titre d'exemple le jolygone $k = 0.95$ et $t = \frac{2\pi}{5}$.
Pour en savoir plus :
`http://perso.wanadoo.fr/math-art/`



([13]) **Aspect**/*Cacher/Montrer*

Une publication de la Commission Pédagogique de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française.*

Le succès rencontré par notre dossier pédagogique n° 6 a rapidement mené à l'épuisement de notre premier tirage.

Bonne nouvelle : le fascicule est à nouveau disponible aux conditions habituelles précisées dans « Le coin du trésorier » en fin de revue.

Alice et Brigitte ont pris des vacances dans un endroit de rêve : des conditions de vie très proches de la nature (comprenez entre autres : logement sous tente), mille et une possibilités d'activités sportives, de loisir, de détente, ..., le tout à un prix intéressant. Le prospectus annonce, pour la période envisagée une température moyenne de 25° et une brise légère. Alice est revenue enchantée; Béatrice très mécontente : un gros rhume, des mauvaises nuits fréquentes, des maux de tête, ... Ah! Si elle avait su que les écarts de température étaient importants et en particulier que nuits et petits matins étaient frais!

Il y a des situations que la connaissance de la seule moyenne ne suffit absolument pas à résumer. Il y en a d'autres dont la moyenne est la seule approche valable. Qu'est-ce donc par exemple que ma taille ou mon poids? Ce dossier pédagogique, conçu dans l'optique de « la mathématique du ci toyen », comporte certes des aspects techniques (définitions, formules, histogrammes, ... mais c'est d'abord une réflexion à partir de situations ayant à voir avec le quotidien, en particulier celui des élèves.

Programmation : les entrées/sorties

F. MICHEL, *Ecole Decroly*

Les entrées/sorties (I/O) sont souvent une source de problèmes en programmation car elles dépendent de l'operating system (OS). Si l'on se limite à une console en mode texte comme l'écran DOS de Windows98 ou le terminal de Linux, les I/O sont gérées par des instructions du langage lui-même ; on verra cela en C++ (gpp et dev-C++). Si par contre on souhaite un écran graphique, il faudra faire appel à des compléments très dépendants du système comme l'API de Windows. On peut utiliser alors un interface graphique adapté comme C++Builder pour Windows9x et PCForm pour WindowsCE ou kDevelop pour Linux. On peut aussi utiliser des interpréteurs installés sur les différents systèmes qui font tourner des scripts qui sont indépendants de l'OS.

Nous passons en revue ces différentes possibilités en illustrant chaque fois avec la simulation d'une machine à additionner. Le lecteur peut vérifier ses connaissances en ajoutant d'autres opérations ; cela peut faire l'objet d'un bon cours d'informatique.

1. Interpréteurs

L'interpréteur étant lancé, l'addition sera généralement immédiate, comme dans une calculatrice.

1.1. Python (Win9x, WinCE, Linux, Mac)

Parmi les interpréteurs, Python (`http://www.python.org`) semble se positionner comme le produit le mieux adapté aux besoins du mathématicien. Il se présente de façon identique dans la plupart des OS y compris WindowsCE qui est utilisé sur les ordinateurs de poche (HPC). On peut immédiatement observer l'effet des instructions à l'écran comme ci-dessous :

```
>>>123+456
579
```

Adresse de l'auteur: F. Michel, avenue des Campanules 28, 1170 Bruxelles,
e-mail : francis_michel@yahoo.com

1.2. Forth (Win9x, WinCE, Palm, Linux, Mac)

Pour Linux et Windows on peut installer kForth : `http://www.ccreweb.org/`. C'est un des plus anciens interpréteurs mais toujours mis à jour et un des langages privilégiés pour les PDA (Palm par exemple). Il utilise une logique polonaise inverse comme les calculatrices HP. Pour additionner, on tape : `123 456 + .`

```
579 ok
```

Le point est nécessaire en fin de ligne pour afficher le résultat qui se trouve dans le stack.

On peut aussi utiliser les simulations de calculatrices ou tout autre logiciel de math :

RPNCalc :	`http://tom.boldt.ca`
HP :	`http://www.hp.com`
Pari-GP :	`http://www.parigp-home.de/`
ArtSGraph :	`http://www.artsoft.ru`

2. Compilateurs.

Dans le cas des compilateurs les entrées/sorties doivent être gérées par le programme lui-même ; en mode texte c'est relativement simple mais beaucoup plus complexe dans des environnements graphiques.

2.1. gpp (Win9x *avec* Cygwin, Linux)

Le compilateur C++ le plus classique est gpp. On peut le faire tourner sous Windows avec CygWin : `http ://www.cygwin.com` ou sous Linux (installé par défaut). On commence par taper le programme avec l'éditeur `vi` : ne pas oublier de donner une extension `.cpp` au nom du fichier `plus.cpp` :

```
#include <iostream>
int main()
{
int x;
int y;
cin>>x;
cin>>y;
cout<<x+y;
}
```

On le compile avec l'instruction : `gpp plus.cpp` qui donnera l'exécutable `a.exe`. On le fera tourner avec l'instruction : `./a`

Le programme attend deux nombres et donne ensuite leur somme.

2.2. dev-C++ (Win9x)

Voir `http://www.bloodshed.net/`.

Voici un compilateur gratuit sous Windows qui possède une belle interface graphique. Il s'installe sans difficultés avec un setup habituel. On ouvre un nouveau projet console et on tape le code :

```
#include <iostream>
int main(int argc, char *argv[])
{
 int x,y;
 cin>>x;
 cin>>y;
 cout<<x+y;
 cin>>x;
}
```

Le dernier `cin` sert à maintenir la fenêtre DOS ouverte pour la lecture de la somme. Ici aussi le compilateur fournit un exécutable. Pour les courageux il est possible d'utiliser l'API de Windows pour avoir une fenêtre graphique mais d'autres solutions plus simples sont proposées ci-dessous.

2.3. C++Builder (Win9x)

On trouve une demo sur `http://www.borland.fr`. Le logiciel complet coûte environ 100 ECU. On dessine trois « EditBox » et un « Button » auquel on associe le code :

```
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObjet *Sender)
{
float x,y;
x=StrToFloat(Edit1->Text);
y=StrToFloat(Edit2->Text);
Edit3->Text=FloatToStr(x+y);
}
```

Après compilation on a une fenêtre avec trois boîtes d'édition et un bouton pour l'addition.

2.4. PCForm (WinCE)

Les compilateurs se trouvent sur les sites : **http://www.networkdynamics.co.uk** et **http://www.orbworks.com**.

On peut aussi faire du développement visuel en C sous WindowsCE. Pour les applications mathématiques au niveau secondaire ce système est bien assez performant. On trouve dans le commerce des petits ordinateurs de poche à des prix de plus en plus bas. Il faut cependant noter que plusieurs OS sont adoptés par ces machines et qu'il faut être attentif aux versions des logiciels proposés.

Avec PCForm on dessinera trois « TextBox » et un « Button ». Au bouton on associe le code pour click() :

```
Button1_Click()
{
float x,y;
x=editget(CTL_TEXT1);
y=editget(CTL_TEXT2);
editset(CTL_TEXT3,x+y);
}
```

Après compilation avec PocketC on a un écran avec trois boites d'édition et un bouton pour l'addition.

2.5. JavaScript (Win9x, Linux, Mac)

L'intérêt de JavaScript est notamment la possibilité de l'intégrer dans une page web. Seul un « browser » du type Explorer ou Netscape est nécessaire pour faire tourner le programme suivant :

```
<HTML>
<BODY>
<SCRIPT LANGUAGE="JavaScript">
x=parseFloat (window.prompt("x="));
y=parseFloat (window.prompt("y="));
document.write(eval(x+y));
</SCRIPT>
```

```
</BODY>
</HTML>
```

Ou mieux :

```
<HTML>
<SCRIPT LANGUAGE="JavaScript">
function add(){
      x=parseFloat (document.f1.v1.value);
      y=parseFloat (document.f1.v2.value);
      z=eval(x+y);
      document.f1.v3.value=z;}
<\SCRIPT>
<BODY>
<form name="f1">
<INPUT NAME="v1"></P>
<INPUT NAME="v2"></P>
<INPUT NAME="v3"></P>
<INPUT TYPE="button" VALUE="add" onClick="add();"
</form>
</BODY>
</HTML>
```

2.6. Python (Win9x, WinCE, Linux, *Mac*)

On peut utiliser `http://www.python.org`

Au lieu de faire tourner Python en interpréteur on peut rédiger un script avec Tk : le script suivant est utilisable sous Windows98 ou Linux. On recopie le code dans un fichier `plus.py` qui sera interprétable par Python préalablement installé.

```
from Tkinter import *
def plus():
   global e1,f1,f2
   x=float(f1.get())
   y=float(f2.get())
   z=x+y
   e1.configure(text=str(z))
def init():
   win=Tk()
   global e1,f1,f2
```

```
    e1=Label(win,text='0')
    e1.grid(row=1)
    f1=Entry(win)
    f1.grid(row=2)
    f2=Entry(win)
    f2.grid(row=3)
    b1=Button(win,command=plus,text='+')
    b1.grid(row=4)
init()
mainloop()
```

Cela donne une fenêtre avec deux boîtes d'entrée, le bouton + et le résultat.

3. Conclusion

En guise de conclusion, il me paraît que les différentes possibilités présentées donnent une idée des orientations actuelles en programmation ; on devrait encore ajouter un langage fonctionnel comme Clean mais le traitement des I/O est difficile à maîtriser dans ce cas. Personnellement, ma préférence va vers les produits suivants :

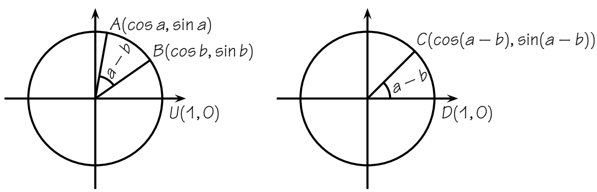
Python et Tk comme interpréteur

C++Builder pour produire un exécutable

La HP49 simulée ou non comme calculatrice

J'espère recevoir les commentaires de mes lecteurs pour orienter mon travail futur. N'hésitez pas à me contacter.

Démonstration originale



$d^2(A,B) = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 2 - 2\cos a \cos b - 2 \sin a \sin b$

$d^2(C,D) = (\cos(a-b) - 1)^2 + \sin^2(a-b) = 2 - 2\cos(a-b)$

Faire du ciel le meilleur endroit de la terre !

M. COYETTE, ***Collège Notre-Dame, Wavre.***

Les vacances, enfin ! Oubliées, les copies d'examens ; oubliés, les éventuels recours ; oubliés, les élèves turbulents ou apathiques (tout compte fait, ils étaient plutôt bien, les élèves, cette année) ; oubliés, les avatars du programme (rebelle à toute tentative d'application si ce n'est la plus triviale...). Les vacances, enfin !

25 juillet 2001, 7h35. Aéroport de Bruxelles. Vous avez fait enregistrer vos bagages à bord du vol Pythagorician Airlines portant le numéro 3 141592. Vous êtes bien installé à bord de l'Airbus 320 flambant neuf qui doit vous conduire en deux heures « vers des cieux toujours bleus, des pays imbéciles où jamais il ne pleut ([1]) ». L'avion est en bout de piste. Le pilote se prépare au décollage. Certains passagers rêvent déjà au séjour merveilleux qui les attend en fin de vol. D'autres pensent aux dernières catastrophes aériennes... Il y a un an, le Concorde en feu ([2]). La ville de Gonesse... juste au bout des pistes de Roissy.

Le pilote d'un avion doit connaître très exactement la masse de son appareil lors du décollage. La masse à vide de l'engin est bien connue, la masse des bagages de soute l'est aussi. Rappelez-vous : les bagages ont été pesés à l'enregistrement. La masse du carburant embarqué dans les réservoirs a été soigneusement mesurée. Par contre, cela fait des années que l'on ne pèse plus les passagers avant l'embarquement à bord. Imaginez un instant la tête des passagères au moment de défiler sur la balance... Le nombre de passagers est cependant connu.

C'est l'association internationale de l'aviation civile qui détermine la masse moyenne du passager. Cette masse moyenne peut même varier suivant le type d'appareil et la destination. Ainsi, la masse moyenne des passagers à destination du Japon est inférieure à celle des passagers pour d'autres destinations. Le pilote n'a plus qu'à multiplier cette masse moyenne par le nombre de passagers pour obtenir une estimation de la masse globale des passagers embarqués et ainsi connaître la masse totale de son avion. Il peut donc estimer l'instant idéal du décollage de son appareil.

Adresse de l'auteur: Rue Albert Ier,77, 1330 Rixensart

([1]) G. Brassens - *L'orage*

([2]) en ce qui concerne le Concorde, on ne peut plus vraiment parler d'avion flambant neuf...

Cette manière de procéder en faisant usage de moyennes est sans doute à l'origine de catastrophes aériennes... Ainsi, en décembre 1985, un avion DC - 8 d'une compagnie aérienne charter américaine s'est écrasé au Canada, tuant ses 248 passagers. Ceux-ci étaient de jeunes militaires américains solidement bâtis qui venaient de servir au Proche-Orient. Ils revenaient dans leur famille pour la fête de Noël. Ils avaient fait leurs achats de Noël dans les marchés du Caire et rentraient au pays les bras chargés de cadeaux...

Suite à cette catastrophe, le bureau américain pour la sécurité aérienne (NTSB ([3])) et l'agence canadienne pour la sécurité aérienne ont établi que le pilote civil avait *sous-estimé* de près de cinq tonnes le chargement de son appareil. Le pilote avait compté la masse standard *civile* pour chaque passager et ses bagages à main. Selon les estimations de l'armée, la masse moyenne des militaires embarqués était de 20 kilos supérieure à la moyenne civile ([4])...

Après cet accident, le NTSB a demandé à l'administration fédérale de l'aviation civile, ainsi qu'au Pentagone, de mettre en oeuvre une procédure standard pour déterminer le chargement réel d'un avion et de ne plus se fier aux moyennes communément acceptées dans des situations où ces moyennes ne sont pas applicables...

Chaque année, je raconte cette lamentable histoire de moyennes. Il y a deux ans, un de mes élèves me répondit qu'il vérifierait mes dires (son père est pilote de ligne). Le lendemain, je recevais le document officiel de la SABENA donnant les moyennes de masse-passager à ses pilotes.

```
                  GENERAL INSTRUCTION
               MASS VALUES FOR PASSENGERS
     The passengers weight as approved by the Belgian CAA,
                  will be as follows:

General rule - regular flights:

 Adults                       : 84 kg
 Children ( 2 - 12 years )    : 35 kg
 Infants                      :  0 kg
```

([3]) National Transport Safety Board

([4]) D'après un article paru dans La Libre Belgique, 27 février 1986, p.3

 atomes." J'avais gagné. De fait je gagnais à tout les coups.

```
Exceptions:

 1) If required by payload
    ( on all aircraft except B.747 ),
    adult's weight may be split according
    to actual male/female distribution :
    MALE : 88 kg           FEMALE : 70 kg

 2) BRU-NRT-BRU                : from March 1997
                                 until 30 March 2002
    Adults                     : 70 kg summer seasons
                                 73 kg winter seasons
    Children ( 2 - 12 years)   : 35 kg
    Infants                    : 10 kg
```

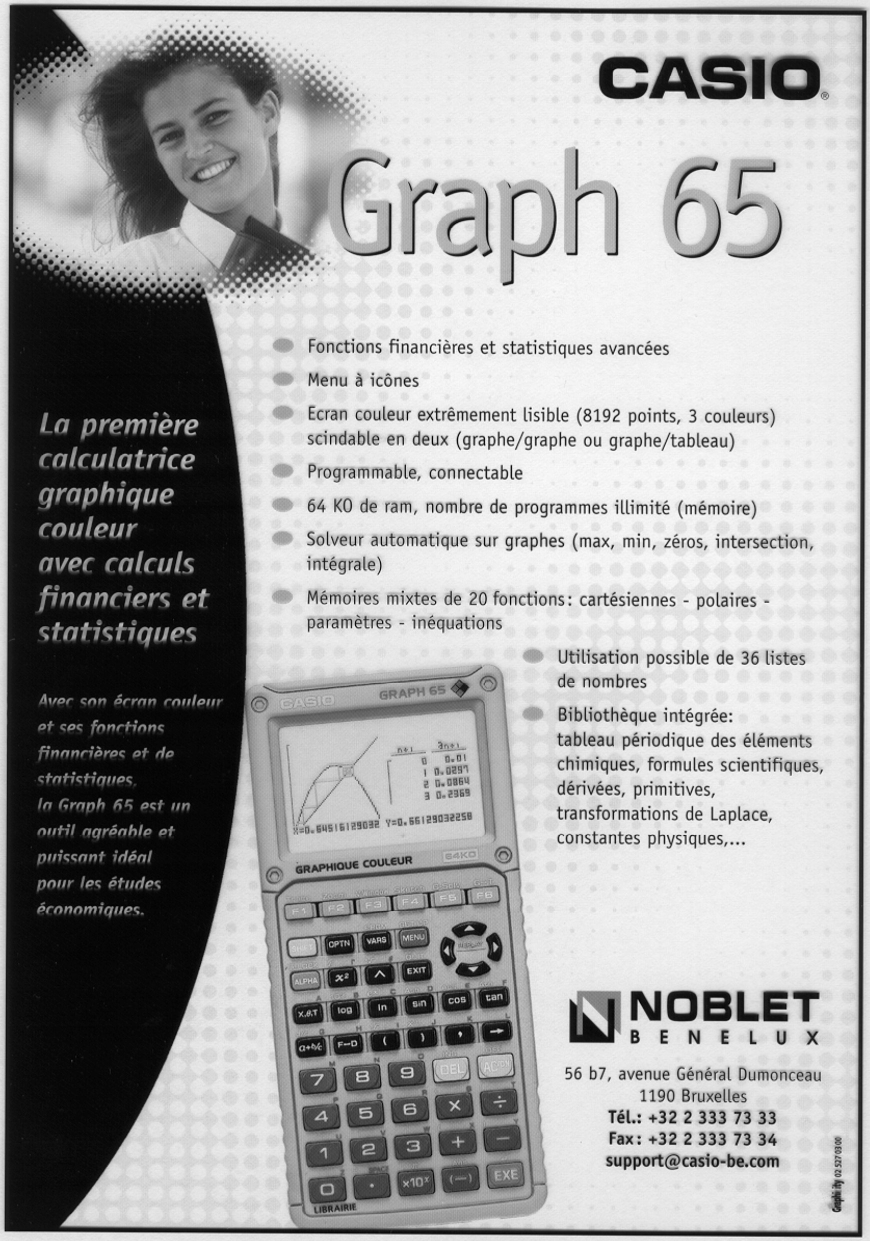
`NRT` désigne `NARITA` l'aéroport international de TOKYO.

Une autre information peut être associée à cette moyenne. Des passagers de très forte corpulence se plaignent de devoir payer deux places pour leur voyage. Bien sûr, ils peuvent ainsi occuper deux sièges...Mais il s'agit sans doute aussi de tenir compte de leur poids pour ne pas trop dépasser la moyenne des masses admises pour chaque passager. C'est une façon d'assurer la sécurité du vol. On ne fait cependant jamais allusion à ce problème évident de sécurité dans ce cas.

L'avion a décollé sans encombre. Vous vous plongez dans la lecture d'un hebdomadaire célèbre. Tiens un avion? Une publicité d'Air France annonce « Faire du ciel le meilleur endroit de la Terre ». Quelques pages plus loin, Lufthansa va plus loin (quoique...) « Lufthansa, vous n'en reviendrez pas ([5]) ». Rassurez-vous! Le transport aérien est un des moyens de transport les plus sûrs au monde. Et la probabilité d'un vol sans histoire est égale à 0,99...Mais il s'agit là d'un autre chapitre des mathématiques, d'une autre histoire et d'un autre article peut-être.

Bonnes vacances! Et si vous devez prendre l'avion, espérons que vous ne voyagerez pas en compagnie de tous les membres d'un club de Sumo en partance pour leur voyage annuel de détente...

([5]) Ces deux publicités étaient diffusées au moment de l'accident du Concorde, en 2000



CASIO
Graph 65
Fonctions financières et statistiques avancées
Menu à icônes
Ecran couleur extrêmement lisible (8192 points, 3 couleurs) scindable en deux (graphe/graphe ou graphe/tableau)
Programmable, connectable
64 KO de ram, nombre de programmes illimité (mémoire)
Solveur automatique sur graphes (max, min, zéros, intersection, intégrale)
Mémoires mixtes de 20 fonctions: cartésiennes - polaires - paramètres - inéquations
Utilisation possible de 36 listes de nombres
Bibliothèque intégrée: tableau périodique des éléments chimiques, formules scientifiques, dérivées, primitives, transformations de Laplace, constantes physiques,...
La première calculatrice graphique couleur avec calculs financiers et statistiques
Avec son écran couleur et ses fonctions financières et de statistiques, la Graph 65 est un outil agréable et puissant idéal pour les études économiques.
GRAPH 65
GRAPHIQUE COULEUR
64KO
LIBRAIRIE
NOBLET
BENELUX
56 b7, avenue Général Dumonceau
1190 Bruxelles
Tél.: +32 2 333 73 33
Fax: +32 2 333 73 34
support@casio-be.com

Surprises imaginaires

F. ROBERT GRAAS, *Inspecteur honoraire.*

Où ai-je lu — car je jure n'avoir point inventé ce propos « gaillard » — que GAUSS gardait dans ses tiroirs des recherches sur les nombres complexes qu'il aurait considérés — à cette époque de leurs grands débuts — comme les « parties honteuses » des mathématiques ? ...

Nous n'en sommes plus là ... mais en tout cas pour l'enseignement secondaire, le prestigieux interrogateur que fut le professeur H.-G. GARNIR à l'examen d'entrée à la Faculté Polytechnique de l'Université de Liège, a rendu un service inappréciable en sortant, de livres russes, m'a-t-on chuchoté, de véritables curiosités « complexes ». Mais je n'ai jamais pu en voir de telles dans les nombreux « sborniki ouprajniezmie matematiki ([1]) » que j'ai pu voir et acheter dans des librairies ou telles maisons de pionniers, derrière le défunt rideau de fer in illo tempore. Cela secouait rudement le cocotier et faisait éclater bien des routines.

Les candidats ne devaient pas nécessairement résoudre ces questions : le professeur jaugeait leurs réactions avec sagesse.

Cependant, ce « sport » ne fut pas une exclusivité du professeur GARNIR. Çà et là, en Belgique et à l'étranger, de petits diamants mathématiques apparaissaient dans ce secteur.

De ce trésor — qui corrigerait utilement la maladie de certains professeurs amateurs de questions « tordues » sans intérêt réel — on peut trouver un lot important dans les éditions récentes (?) en annexe du *Traité de Trigonométrie rectiligne* de **N.-J. Schons** aux éditions de la Procure (Namur - Bruxelles).

Dans un prochain numéro de la revue, on trouvera de nouvelles séries, parfois un peu plus difficiles qui, une fois encore, devraient piquer la curiosité, stimuler la recherche et donner une meilleure base aux futurs mathématiciens de tous poils.

Quatre séries sont prévues :

1. le point de vue algébrique.
2. le point de vue goniométrique.

Adresse de l'auteur: Rue de Gembloux, 35, 5002 Saint-Servais

([1]) Recueils d'exercices de mathématique

3. le point de vue géométrique.
4. Moivre et Newton.

L'origine des énoncés sera indiquée par des sigles appropriés. Les solutions n'exigent pas des développements longs propres à faire oublier ce que l'on cherche ...

Internet Corner.

Au hasard de la toile, nous avons découvert(?) **les mathématiques en fer blanc**.

http ://www.lille.iufm.fr/labo/pagesProjets/leparc/boite/accueil.html

Pierre-André CARON nous présente une séquence de cours des plus complète sur la situation-problème de la forme des boîtes de conserve cylindrique. D'une qualité esthétique parfaite, avec même des notices historiques sur le problème de DIDON créant les limites de Carthage, le site déroule pour nous plusieurs approches de la situation.
Approche numérique, approche avec un tableur (on peut télécharger les feuilles de calcul nécessaires), approche avec un traceur de courbe (idem), et bien sûr, approche par le calcul de la dérivée.
Quittant les boîtes, Caron s'engouffre dans les casseroles...
Signalons que toutes les adresses de téléchargement de tous les outils utilisés sont regroupées en fin de séquence. A découvrir...

http ://www.educnet.education.fr/math/boite.htm

est un site où Michèle HELAL aborde avec un pareil talent la situation-problème légèrement plus complexe de la boîte de conserve parallélépipédique. Ici aussi, les différentes approches sont parcourues. On y vérifie quelle est la meilleure découpe possible du « patron » de la boîte dans la feuille rectangulaire donnée. A exploiter !

Revue des revues

Bulletin de l'APMEP, n° 430, Septembre–Octobre 2000.

- Communiquer notre passion des mathématiques tels sont, à la fois, le titre et le thème de l'éditorial du Président Rémi Belloeil. Il y insiste pour que les enseignants prennent conscience que les mathématiques ne sont pas d'abord des techniques e à appliquer mais avant tout des situations-problèmes à formuler et à étudier ainsi que des structures à construire.
- La rubrique « Dans nos classes » comporte deux articles.
  Le premier, intitulé « Observer, expliquer, justifier, démontrer à partir de la cinquième est dû à un groupe de travail "Activités mathématiques au collège ». Le sujet présenté consiste en problèmes de géométrie sur les triangles et les quadrilatères. Les auteurs souhaitent amener les élèves à observer, analyser, justifier et s'exprimer ce qui constitue, à n'en pas douter un bel objectif. De nombreux exemples sont présentés et commentés.
  Le deuxième article dont l'auteur est Jacques Verdier, a pour titre « deux ou trois petites choses que je sais de la médiane ». Il s'agit ici de la notion statistique de médiane. L'auteur traite de la définition de cette notion et s'appuie pour cela sur des exemples bien convaincants.
- Vient ensuite un copieux dossier sur la géométrie. Il comporte cinq articles. Les trois premiers sont des textes de réflexion générale.
  On trouve d'abord « Un rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement » par une commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Comment se situe l'enseignement de la géométrie élémentaire en cette fin de vingtième siècle ?, Faut-il encore enseigner la géométrie aujourd'hui au collège et au lycée ?, Comment analyser l'évolution de l'enseignement de la géométrie, au collège et au lycée, dans les dernières décennies ? sont les questions qu'aborde ce texte.
  Dans le texte « Comment repenser l'enseignement de la géométrie », Nicolas Rouche fournit nombre de raisons objectives de repenser cet enseignement.
  Dans « Quelques remarques autour des cas d'égalité » Rudolf Bkouche traite des liens et distinctions entre mouvement et égalités.
  Les deux autres articles sont des études plus ciblées.

Dans « Demi-plan, convexité et polygone », Dany-Jack Mercier propose une réflexion sur la notion de convexité. Il propose deux activités où elle apparaît.
Daniel Riesz montre dans l'article intitulé « Un triangle bien intéressant »comment retrouver les notions de triangle d'or, de pentagones et décagones réguliers, de pavages non périodiques, ...

— La rubrique « Echanges » propose deux articles.
« Sur l'équation en nombres entiers $n^2 + n + 1 = \beta^3$ » propose une solution de cette équation. Elle est due à Charles Notari.
Dans « Une observation astronomique pose le problème du repérage des directions », Gilbert Walusinski traite de la notion de direction et montre qu'il peut en exister plusieurs définitions.
— Viennent enfin les rubriques habituelles « Les problèmes de l'APMEP », « Matériaux pour une documentation » et « la vie de l'association ».

C. Villers

Bulletin de l'APMEP, n° 432, Janvier-Février 2001.

Ce premier bulletin de l'année 2001 débute par l'éditorial du Président, Rémi Belloeil, qui, après des voeux pour l'année nouvelle, passe en revue les diverses composantes des mathématiques que sont la géométrie, l'analyse, l'arithmétique, la logique, les probabilités et la statistique, du point de vue de la place qu'elles peuvent prendre à l'avenir dans l'enseignement de la branche à laquelle elles appartiennent. Il n'oublie pas de signaler le rôle que peut jouer une association comme l'APMEP dans la réflexion continue sur son enseignement.

Jean-Guillaume Cuaz propose ensuite « Quelques exercices ayant pour thème l'Euro ». Ces exercices traitent essentiellement des problèmes d'arrondi, des écarts qui vont résulter des choix effectués et des écarts qui en résulteront. Des problèmes sont proposés.

Frédéric Junier et François Soulard traitent de Zéro, un nombre à part. Dans des exemples simples, ils illustrent les différents aspects du zéro et montrent les apparences contradictoires qu'il peut revêtir. Ils font ainsi bien comprendre les aspects et la spécificité de zéro.

« Comment expliquer les TPE (travaux personnels encadrés) aux élèves » est un texte de Magali Herreros et de Jean-Paul Bardoulat. Les auteurs ont eu pour premier objectif de bien faire comprendre à leurs élèves ce que sont des TPE. Le thème présenté ici est « temps, rythmes et périodes ». Il est activé dans le travail proposé par la notion de photographie et plus particulièrement par la relation temps de pose, diaphragme qui sont des paramètres importants en la matière.

Avec « Variations sur un mini-problème de géométrie », Henri Bareil nous propose un très intéressant article sur un problème de variation d'une aire. De nombreux points de vue et plusieurs méthodes de calculs sont décrits. Une extension du sujet traité montre que le moindre problème peut donner lieu à des recherches fructueuses sur le plan des notions appliquées ou à introduire.

Un copieux dossier « arithmétique » compte alors 5 sujets.

— « L'arithmétique, pourquoi ? » de Marc Guinot
— « Approximation des nombres réels par des rationnels » de Matthieu Savin
— « Y a-t-il u naturel après 3 ? » de Jean Lofent
— « Quelques activités arithmétiques liées aux codes correcteurs d'erreurs et à la, cryptographie » de Robert Rolland
— « La division simple à l'aide de l'abaque de Gerbert » par Michel Guillemot d'après Bernelin (élève de Gerbert d'Aurillac) sont autant de textes qui montrent que l'arithmétique est une partie des mathématiques qui devait retrouver sa place dans l'enseignement secondaire.

Dans « Dénombrement des polyèdres convexes » Michel Lafond propose une réponse à la question « Combien y a-t-il de polyèdres convexes distincts à n faces ? ». Vous apprendrez ainsi qu'il existe 7 hexaèdres, 34 heptaèdres, 257 octaèdres et ... plus de six millions de dodécaèdres.

La livraison du bulletin comporte encore les rubriques habituelles et toujours fort intéressantes que sont : Avis de recherche, les problème de l'AP-MEP, Matériau pour une documentation, pour un inventaire et des informations sur la vie de l'association.

Claude Villers

Vous souhaitez décloisonner votre enseignement, innover, aiguiser l'intérêt et la créativité de vos élèves ? Relevez avec la *Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs* un nouveau défi.

La CAPP, en accord avec la Société Solvay, a élaboré des outils novateurs, **les ensembles pédagogiques interdisciplinaires (EPI)**, présentés sous la forme de valises ou de coffrets. Quatre thèmes sont traités, à savoir **la Communication, le Temps, Matière et Éléments, Semblable et Différent**

La Communication : *cet EPI vise à faire suivre, par des textes et images, les traces de l'humanité depuis l'antiquité, découvrir par l'observation et la manipulation le rôle de la technique depuis l'invention de l'écriture jusqu'à Internet, voir que l'univers, de l'infiniment petit à l'infiniment grand, à commencer par nous-mêmes, est un immense réseau de communication, participer, par la pratique et le jeu, à une approche de l'interdisciplinarité.*

Le Temps : *cette notion concerne toutes les disciplines.* Les objets et documents rassemblés illustrent l'histoire des horloges, la mesure et la garde du temps, la chronobiologie, la dendrochronologie, les calendriers. Des moulages de crânes préhistoriques, la datation par le carbone 14 ou la thermo-luminescence, l'expression du temps dans la langue sont étudiés. Un choix d'ouvrages et un jeu de cartes original complètent l'EPI.

Matière et Éléments : La matière a, dès l'Antiquité, préoccupé les philosophes, comme le montrent les textes rassemblés. Puis des sciences sont apparues, ainsi que le conte, l'histoire de la chimie, illustrée par une BD. Des échantillons de minerais, minéraux et roches sont présentés, avec fiches expérimentales, descriptives et cassettes ; textes et transparents décrivent les éléments chimiques présents dans notre organisme. Livres, tableaux périodiques, dont une version informatisée, un jeu du type *Trivial Poursuit* complètent l'EPI.

Semblable et Différent : La distinction des ressemblances et des différences est à la base de la démarche scientifique. L'EPI demande de classer divers objets, puis de justifier les critères choisis. Ensuite, pour chaque discipline des exercices portent sur le classement et ses critères. Une phase de réflexion fait prendre conscience de leur rôle dans la vie humaine. L'histoire pose la question de leur valeur relative. Les hommes ont distingué des classes dans leur espèce. Injustices, violences, guerres peuvent en découler. Livres et documents font découvrir que le sujet exige un examen critique attentif.

Comment s'informer ? *Les EPI sont loués aux écoles des conditions déterminées. Pour renseignements, s'adresser à M. Jean-Marie Debry, chaussée des Vignerons 95, 5100 Wépion, Tél. : 081-46 07 53 ou M. Emile Counet, rue Piersotte 12, 5004 Bouge, Tél. :081-21 02 88.*

Dans nos classes

Yolande Noël-Roch

Les énoncés qui ont inspiré cette rubrique sont tirés du manuel suisse **L'Algèbre Mode d'emploi** de G. Charrière. (voir *Mathématique et Pédagogie* n° 131, rubrique Bibliographie).

$\boxed{1.}$ Tous les nombres formés de 1995 chiffres identiques sont multiples de 37.

Les auteurs ont raison mais leur énoncé est inspiré par l'année de parution du livre. En est-il de même pour tous les nombres de 2001 chiffres tous identiques ? Et quelle est l'année la plus proche où cet énoncé pourra être repris ?

$\boxed{2.}$ Calculer, observer et former une conjecture

$$\begin{aligned} 6^2-5^2 &= \\ 56^2-45^2 &= \\ 556^2-445^2 &= \\ 5556^2-4445^2 &= \\ \ldots \end{aligned}$$

$\boxed{3.}$ Deux lettres différentes désignent deux chiffres différents et «DU» désigne le nombre de deux chiffres dont D est le chiffre des dizaines et U le chiffre des unités. (À ne pas confondre avec la notation multiplicative !)

Trouver les chiffres C, D et U sachant que «DU»^{2} = «CDU».

Quelques commentaires.

$\boxed{1.}$ Première idée : chercher une propriété commune à tous les nombres $111\cdots1$, $222\cdots2$, etc formés de 1995 chiffres identiques :

a désignant un chiffre, $aaa\cdots a = a\times 111\cdots 1$.

D'où la question : que se passe-t-il quand on divise $111\cdots1$ par 37 ?

$$\begin{array}{l|l} 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\cdots1 & 3\,7 \\ \cline{2-2} \underline{1\,1\,1} & 3\,0\,0\,3\cdots \\ \quad\;\; 0 & \end{array}$$

Eureka ! $111\cdots1$ est multiple de 37 chaque fois que son nombre de chiffres est multiple de 3.

Il est donc vrai que quel que soit le chiffre a, les nombres $aaa\cdots a$ formés de 1995, 2001, 2004 chiffres sont multiples de 37.

$\boxed{2.}$ Quelle belle occasion de sortir les calculatrices, de commettre des erreurs de frappe, de coincer sur la capacité d'affichage, de conjecturer ...

$$55\,556^2 - 44\,445^2 = 1\,111\,111\,111$$

Chaque fois, nous calculons une différence de deux carrés ... et cela nous permet d'être plus performants que les calculatrices !

$$\begin{array}{rcccccc} 6^2-5^2 & = & (6-5)(6+5) & = & 1\times 11 & = & 11 \\ 56^2-45^2 & = & (56-45)(56+45) & = & 11\times 101 & = & 1\,111 \\ 556^2-445^2 & = & (556-445)(556+445) & = & 111\times 1001 & = & 111\,111 \end{array}$$

La clef du processus apparaît bien dans l'avant-dernière colonne du tableau ci-dessus, en décomposant le second facteur dans les produits à calculer :

Prem. fac.	Deuxième facteur	Produit
1	$11 = 10 + 1$	$10 + 1$
11	$101 = 100 + 1$	$11\,00 + 11$
111	$1001 = 1\,000 + 1$	$111\,000 + 111$
1111	$10001 = 10\,000 + 1$	$1111\,0000 + 1111$

La décomposition du deuxième facteur en puissance de 10 augmentée de 1 justifie bien que le produit est formé successivement de deux blocs identiques au premier facteur.

$\boxed{3.}$ Une question préliminaire peut aider les élèves : quels sont les chiffres des unités possibles dans les carrés parfaits ? Cela fait apparaître que $U = 1$ ou $U = 5$. Il reste à trouver D et C sachant que «DU»^{2} = «CDU».

Revenons à la notation usuelle qui permet le calcul : «DU» $= 10D + U$.

Dès lors, nous savons que
– $(10D + U)^2$ est un nombre formé de **trois chiffres différents**,
– $U = 1$ ou $U = 5$,
– $(10D + U)^2 = 100D^2 + 20DU + U^2$.

Ainsi, $D \leqslant 3$, les seuls nombres à tester sont donc 31, 35, 21, 25 et 15. Seul, $25^2 = 625$ fournit une solution au problème posé.

Olympiades

34 élèves ayant obtenu plus de 100 à la demi-finale de l'*Olympiade Mathématique Belge* ont participé le 29 mars 2001 au 19^{th} *Annual American Invitational Mathematics Examination*. Il s'agit de fournir une réponse comprise entre 1 et 999 à 15 petits problèmes et ce en une heure et demie. Ce test était cette année fort difficile, les deux meilleurs résultats obtenus par un élève de 5^e et un élève de 6^e sont 6/15, les problèmes 10, 11, 12 et 15 n'ont été résolus par aucun des concurrents. Voyons si vous pouvez faire mieux, envoyez-moi vos solutions ; en particulier, je serais intéressée par une solution courte et élégante du problème 15.

1. Trouver la somme de tous les entiers positifs à deux chiffres qui sont divisibles par chacun de leurs chiffres.

2. Un ensemble fini S de nombres distincts a les propriétés suivantes : la moyenne de $S \cup \{1\}$ est inférieure de 13 unités à la moyenne de S et la moyenne de $S \cup \{2001\}$ est supérieure de 27 unités à la moyenne de S. Trouver la moyenne de S.

3. Trouver la somme de toutes les racines, réelles et non réelles, de l'équation $x^{2001} + (\frac{1}{2} - x)^{2001} = 0$, sachant qu'il n'y a pas de racine multiple.

4. Dans un triangle ABC, les angles A et B mesurent respectivement 60 degrés et 45 degrés. La bissectrice de l'angle A coupe le côté BC en T et $AT = 24$. L'aire du triangle ABC peut être écrite sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a, b et c sont des entiers positifs et c n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier. Trouver $a + b + c$.

5. Un triangle équilatéral est inscrit dans l'ellipse d'équation $x^2 + 4y^2 = 4$. Un sommet du triangle est $(0, 1)$, une hauteur est contenue dans l'axe OY et la longueur de chacun de ses côtés est $\sqrt{\frac{m}{n}}$ où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m + n$.

6. On lance quatre fois un déséquilibré. La probabilité que chacun des trois lancers finaux soit au moins aussi grand que le lancer qui le précède

Adresse de l'auteur: Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail festraetscl@brutele.be

peut être exprimée sous la forme $\frac{m}{n}$ où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.

7. Les mesures des côtés du triangle ABC sont $AB = 21$, $AC = 22$ et $BC = 20$. Les points D et E sont respectivement situés sur les côtés AB et AC de telle sorte que DE soit parallèle à BC et contienne le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Dans ce cas, $DE = \frac{m}{n}$ où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.

8. Un nombre entier N est appelé *7-10 double* si les chiffres de sa représentation en base 7 forment un nombre qui en base 10 est le double de N. Par exemple, 51 est un 7-10 double car sa représentation en base 7 est 102. Quel est le plus grand 7-10 double ?

9. Les mesures des côtés du triangle ABC sont $AB = 13$, $AC = 15$ et $BC = 17$. Les points D, E et F sont respectivement situés sur les côtés AB, BC et CA. Supposons $AD = p.AB$, $BE = q.BC$ et $CF = r.CA$, où p, q et r sont positifs et satisfont $p+q+r = \frac{2}{3}$ et $p^2+q^2+r^2 = \frac{2}{5}$. L'aire du triangle DEF divisée par l'aire du triangle ABC peut être écrite sous la forme $\frac{m}{n}$ où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.

10. Soit S l'ensemble des points dont les coordonnées x, y et z sont des entiers satisfaisant $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 3$ et $0 \leqslant z \leqslant 4$. On choisit au hasard deux points de S. La probabilité que le milieu du segment qu'ils déterminent appartienne aussi à S est $\frac{m}{n}$ où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.

11. Dans un réseau rectangulaire comportant 5 lignes et N colonnes, les points sont numérotés de façon consécutive de la gauche vers la droite en commençant par la ligne supérieure. Donc, les points de la ligne supérieure sont numérotés de 1 à N, ceux de la deuxième ligne de $N+1$ à $2N$ et ainsi de suite. Cinq points P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 sont sélectionnés de telle sorte que chaque P_i appartienne à la ligne i. Soit x_i le numéro associé à P_i. Maintenant, renumérotons les points du réseau de haut en bas de façon consécutive en commençant par la première colonne. Soit y_i le numéro associé à P_i dans la nouvelle numérotation. On constate que $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$, $x_3 = y_4$, $x_4 = y_5$ et $x_5 = y_3$. Trouver la plus petite valeur possible pour N.

12. Une sphère est inscrite dans le tétraèdre dont les sommets sont $A = (6,0,0)$, $B = (0,4,0)$, $C = (0,0,2)$ et $D = (0,0,0)$. Le rayon de la sphère est $\frac{m}{n}$ où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.

13. Dans un certain cercle, la corde correspondant à un arc défini par un angle de d degrés mesure 22 centimètres et la corde d'un arc défini par un angle de $2d$ degrés est 20 centimètres plus longue que la corde d'un arc défini par un angle de $3d$ degré, où $d < 120$. La longueur de la corde d'un arc défini par l'angle $3d$ degrés est $-m + \sqrt{n}$ centimètres où m et n sont des entiers positifs. Trouver $m+n$.

14. Un facteur distribue le courrier aux 19 maisons du côté Est de Elm Street. Le facteur remarque que jamais deux maisons adjacentes ne reçoivent du courrier le même jour mais qu'il n'y a jamais plus de deux maisons consécutives qui ne reçoivent pas de courrier le même jour. Combien de schémas différents de distribution de courrier sont possibles ?

15. Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 sont écrits de façon aléatoire sur les faces d'un octaèdre régulier de telle sorte que chaque face contienne un nombre différent. La probabilité qu'il n'y ai pas deux nombres consécutifs, où 8 et 1 sont considérés comme consécutifs, écrits sur des faces partageant la même arête est $\frac{m}{n}$ où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.

Des problèmes et des jeux

Triangles homologiques

Problème n° 244 de *Mathématique et Pédagogie* n° 130

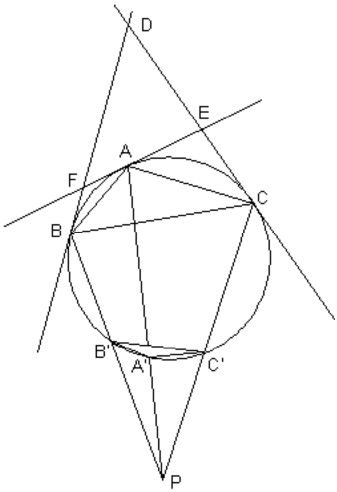
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ. Les tangentes en A, B, C au cercle Γ déterminent un triangle DEF (D étant sur les tangentes en B et C, E sur les tangentes en A et C et F sur les tangentes en A et B). Soit P un point quelconque du plan du triangle ABC et soient A', B', C' respectivement les seconds points de rencontre de PA, PB, PC avec Γ. Démontrer que les droites DA', EB', FC' sont concourantes.

Solution de A. Paternottre de Boussu

Trois rappels :

Adresse de l'auteur: Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen,1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail festraetscl@brutele.be

- si ABC est un triangle inscrit à un cercle Γ, alors le triangle DEF déterminé par les tangentes à Γ en A, B, C (et tel que décrit ci-dessus) est appelé « triangle tangentiel » du triangle ABC ;
- un triangle inscrit à un cercle et son triangle tangentiel sont homologiques (le centre d'homologie est le pôle de l'axe d'homologie) ;
- la relation « être homologique à » est transitive.



Les droites AA', BB', CC' sont, par hypothèse, concourantes en P, donc les triangle ABC est homologique au triangle $A'B'C'$ (1).

Le triangle ABC est homologique à son triangle tangentiel DEF (2).

De (1) et (2), par transitivité, le triangle $A'B'C'$ est homologique au triangle DEF et donc les droites $A'D$, $B'E$, $C'F$ sont concourantes.

Multiple Problème n° 245 de *Mathématique et Pédagogie* n° 130

Si n n'est pas multiple de 3, alors $2^{2n}+2^n+1$ est multiple de 7. Si n est multiple de 3, quel est le reste de la division de $2^{2n}+2^n+1$ par 7 ?

Solution de M. Coyette de Rixensart

$2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$

 Aussi, chaque fois qu'un matheux venait me trouver avec un nouveau

Donc, pour tout entier positif t, $\begin{cases} 2^{3t} \equiv 1 \pmod 7 \\ 2^{3t+1} \equiv 2 \pmod 7 \\ 2^{3t+2} \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}$

– Si $n = 3t$, alors $2^{2n} + 2^n + 1 = 2^{6t} + 2^{3t} + 1 \equiv 3 \pmod 7$.
– Si $n = 3t+1$, alors $2^{2n} + 2^n + 1 = 2^{6t+2} + 2^{3t+1} + 1 \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod 7$.
– Si $n = 3t+2$, alors $2^{2n} + 2^n + 1 = 2^{6t+4} + 2^{3t+2} + 1 \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod 7$.

Bonnes solutions de P. Bornsztein de Pontoise, P. Dassy de Liège, A. Deflavion de Maurage, J. Finoulst de Diepenbeek, J. Goldsteinas de Bruxelles, A. Paternottre de Boussu, J. Rasse de Méan, H.-J. Seiffert de Berlin, C. Troessaert de Libramont, A. Zriwil de Mons et d'un lecteur que je n'ai pu identifier car il a oublié d'indiquer son nom sur sa solution.

Une inégalité pas si évidente

Problème n° 246 de Mathématique et Pédagogie n° 130

x, y, z étant des réels positifs, démontrer que

$$\frac{x^2 - z^2}{y+z} + \frac{y^2 - x^2}{z+x} + \frac{z^2 - y^2}{x+y} \geqslant 0$$

et déterminer quand on a l'égalité.

Solution de P. Bornsztein de Pontoise (France)

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$. Alors $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Et on a

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2 - z^2}{y+z} + \frac{y^2 - x^2}{z+x} + \frac{z^2 - y^2}{x+y} \\
&= \frac{(a-b)c}{b} + \frac{(b-c)a}{c} + \frac{(c-a)b}{a} \\
&\geqslant \frac{ac}{b} - c + \frac{ba}{c} - a + \frac{cb}{a} - b \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) - a + \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{cb}{a}\right) - b + \frac{1}{2}\left(\frac{cb}{a} + \frac{ac}{b}\right) - c
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{2}(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c})-a=a(\frac{b^2+c^2-2bc}{2bc})=\frac{a(b-c)^2}{2bc}$$

En raisonnant de même, on a

$$\frac{1}{2}(\frac{ab}{c}+\frac{cb}{a})-b=\frac{b(a-c)^2}{2ac}\qquad \frac{1}{2}(\frac{cb}{a}+\frac{ac}{b})-c=\frac{c(a-b)^2}{2ab}$$

et en sommant, il vient

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}=\frac{a(b-c)^2}{2bc}+\frac{b(a-c)^2}{2ac}+\frac{c(a-b)^2}{2ab}\geqslant 0$$

avec égalité ssi $a=b=c$, c'est-à-dire $x=y=z$.

Les lecteurs suivants ont envoyé de bonnes solutions : M. Coyette de Rixensart, P. Dassy de Liège, J. Finoulst de Diepenbeek, J. Goldsteinas de Bruxelles, A. Paternottre de Boussu, J. Rasse de Méan, H.-J. Seiffert de Berlin, C. Troessaert de Libramont, A. Zriwil de Mons.

Les solutions des problèmes qui suivent doivent me parvenir pour le 1[er] janvier 2002 au plus tard. Ces problèmes vous sont proposés par J. G. Segers de Liège.

253. Quatre cent quarante-quatre

Le nombre 38 est le plus petit dont le carré se termine par 444. Quel est le nombre suivant ayant la même propriété ?

254. Nature du triangle

A l'intérieur du carré $ABCD$, on construit un point M tel que $\widehat{CDM}=\widehat{DCM}=15°$. Quelle est la nature du triangle ABM ?

255. Fractions

Démontrer que l'égalité suivante est correcte :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{465}-\frac{1}{466}=\frac{1}{234}+\frac{1}{235}+\frac{1}{236}+\cdots+\frac{1}{466}$$

Bibliographie

J. Stewart, traduit par M. Citta-Vanthemsche, *Analyse : concepts et contextes, 2 tomes*, De Boeck Université, 2001.

L'enseignement des mathématiques est en mutation. D'une part, les changements dans la société en général, et chez les élèves en particulier, font en sorte que les centres d'intérêt se modifient : on ne peut donc plus enseigner la même matière qu'auparavant. D'autre part, l'évolution vertigineuse des sciences et de leur didactique nécessite l'apprentissage de nouvelles théories à l'aide de méthodes novatrices, s'appuyant notamment sur des moyens modernes de communication et de transmission du savoir.

Le travail de J. Stewart s'inscrit parfaitement dans l'optique d'un enseignement moderne de l'analyse mathématique. Comme l'indique le titre général des deux tomes, l'idée-maîtresse de ces deux ouvrages consiste à insister sur la compréhension profonde des concepts qui sont présentés dans des contextes motivants. Par exemple, la notion de dérivée est introduite dans de nombreuses situations variées, de manière littéraire et, plus mathématiquement, de manière numérique, graphique et algébrique, en termes de tangente, de vitesse, de taux de variation, avec des applications réelles en physique, chimie, économie, psychologie, écologie, sociologie ; comme l'écrit l'auteur, *ceci illustre le fait que les mathématiques tirent en partie leur puissance de leur caractère abstrait, puisque, selon les mots de J. Fourier, les mathématiques comparent les phénomènes les plus divers et découvrent les analogies secrètes qui les unissent.* (p. 217).

Ces deux livres possèdent notamment les particularités suivantes.

La théorie est présentée de façon très progressive, après le traitement de quelques situations réelles bien sélectionnées et variées. Peu de preuves sont données, mais une explication intuitive est fournie ; seules les démonstrations les moins sophistiquées sont présentées clairement et le plus simplement possible.

Les concepts exposés peuvent être assimilés par des exercices de diverses natures : des exercices classiques d'entraînement, mais aussi des questions théoriques de réflexion, certaines sous la forme de « vrai - faux », de véritables projets de recherches (avec des indications bibliographiques) comprenant des applications qui devraient motiver les élèves, et surtout de nombreux problèmes issus de contextes fort variés, très souvent avec des données réelles. Signalons à ce propos qu'une large partie du premier chapitre est consacrée à la modélisation mathématique et à la résolution de problèmes (selon la théorie de Polya).

L'auteur tient également compte du fait que, désormais, l'apprentissage des mathématiques se fait notamment en recourant à l'usage d'une calculatrice scientifique capable de tracer des graphiques ou d'un ordinateur muni d'un logiciel de calcul symbolique. Il se sert de ces outils pour présenter de manière fort suggestive la matière ; de plus, il donne à différentes reprises des indications pour un bon usage de ces moyens techniques et fournit des exercices intéressants qui peuvent difficilement être résolus sans machine (en repérant ces énoncés par un signe spécial).

Signalons enfin l'excellente présentation matérielle de ces ouvrages très agréables à consulter et qui renferment de multiples figures réalisées avec beaucoup de soin et en couleur ; la traduction de la version américaine est parfaitement adaptée au public européen. En conclusion, nous pensons que ces deux livres apporteront de nombreuses idées au professeur de mathématiques qui souhaite enrichir ses cours. Voici le contenu détaillé des deux tomes.

Volume 1 : fonctions d'une variable, 644 pages + 118 pages d'annexes et index.

- Des fonctions et des modèles.
- Les limites et les dérivées.
- Les règles de dérivation.
- Des applications de la dérivée.
- Les intégrales.
- Des applications de l'intégrale.
- Les équations différentielles.
- Les suites infinies et les séries.

Volume 2 : fonctions de plusieurs variables, pages 645 à 991 + 50 pages d'annexes et d'index

- Les vecteurs et la géométrie de l'espace.
- Les fonctions vectorielles.
- Les dérivées partielles.
- Les intégrales multiples.
- L'analyse vectorielle.

J. Bair

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (septembre 2000)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent Mathématique et Pédagogie, SBPM-Infor et Math-Jeunes.

Belgique :
- Cotisation ordinaire : 807 BEF/20,00 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications) : 1150 BEF/28,5 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 605 BEF-/15,00 €.

Union Européenne : 36,00 €,
Europe hors Union Européenne : 38,00 €,
Hors Europe : envoi prioritaire, 72,00 €, envoi non prioritaire, 42,00 €.

Abonnement à Mathématique et Pédagogie

Belgique : 1049 BEF/26,00 €, Union Européenne : 32,00 €,
Europe hors Union Européenne : 33,00 €,
Hors Europe : envoi prioritaire, 46,00 €, envoi non prioritaire, 34,00 €.

Abonnement à Math-Jeunes Junior et Math-Jeunes

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, inférieur et supérieur, sont idéalement pris par l'intermédiaire d'un professeur.
Abonnement isolé à une des deux revues (4 numéros) :
- Belgique : 200 BEF/4,96 €,
- Union Européenne : 9,2 €,
- Europe hors Union Européenne : 10,2 €,
- Hors Europe : Envoi prioritaire, 20,4 €, envoi non prioritaire : 11,4 €.

Abonnement isolé aux deux revues (7 numéros) :
- Belgique : 350 BEF/8,68 €,
- Union Européenne : 16,5 €,
- Europe hors Union Européenne : 17,17 €,
- Hors Europe : envoi prioritaire, 35,6 €, envoi non prioritaire, 20 €.

Abonnements groupés (au moins 5) à *Math-Jeunes* et *Math-Jeunes Junior*.

Abonnements groupés à une des deux revues : (4 numéros)
- Belgique : 150 BEF/3,72 €,
- Union Européenne : 6 €,
- Europe hors Union Européenne : 7,6 €,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 15,2 €,
  - Envoi non prioritaire : 8,6 €.

Abonnements groupés aux deux revues : (7 numéros)
- Belgique : 265 BEF/6,57 €,
- Union Européenne : 10,6 €,
- Europe hors Union Européenne : 13,4 €,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 26,6 €,
  - Envoi non prioritaire : 15,1 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement au compte de la SBPMef, s'abonner au bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France), le prix de l'abonnement est : 1575 BEF. Ils peuvent également, par la même voie, commander des publications de l'APMEP (voir la page APMEP dans ce numéro).

Vente d'anciens numéros de Mathématique et Pédagogie

Avant 1998 : 30 BEF (0,74 €)/N° + frais de port (Cat. 1),
Années 1999 et 2000 : 100 BEF (2,48 €)/N° + frais de port (Cat. 1).

Vente d'anciens numéros de Math-Jeunes

Avant 1998/1999 : 10 BEF (0,25 €)/N° + frais de port (Cat. 1),
Années 1998/1999 et 1999/2000 : 20 BEF (0,5 €)/N° + frais de port (Cat. 1).

Brochures

Le prix d'une brochure ou d'un cd-rom mentionnés aux tableaux 1 et 2 s'obtient en additionnant le prix de base mentionné dans le tableau 1 ou 2 aux frais de port mentionnés dans le tableau 3 en fonction de la catégorie postale à laquelle appartient la brochure ou le cd-rom. Lorsqu'un prix réduit est mentionné, ce prix est réservé aux membres de la SBPMef et aux étudiants.

Tableau 1 : Prix de base Brochures	Prix plein	Prix réduit	Cat. post.
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 1 au n° 6 épuisés, reste n° 12)	50 BEF 1,24 €	/	2
Série 2 (n° 7 au n° 11 et n° 13)	220 BEF 5,45 €	/	5
Série 3 (n° 14)	220 BEF 5,45 €	/	3
Les 3 séries (n° 7 au n° 14)	300 BEF 7,44 €	/	6
Dossiers d'explorations didactiques			
Dossier 2 (Autour du plus grand commun diviseur)	75 BEF 1,86 €	50 BEF 1,24 €	4
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	75 BEF 1,86 €	50 BEF 1,24 €	4
Dossier 5 (Matrices et Produit scalaire)	300 BEF 7,44 €	250 BEF 6,18 €	4
Dossier 6 (Statistiques)			
Moins de 11 ex.	300 BEF/ex. 7,44 €/ex.	250 BEF/ex. 6,18 €/ex.	4
Par groupes de 11 ex.	3000 BEF 74,44 €	2500 BEF 61,8 €	4
Olympiades Mathématiques Belges			
Tome 4			
De 1 à 4 ex.	220 BEF/ex. 5,45 €/ex.	/	7
De 5 à 9 ex.	200 BEF/ex. 4,96 €/ex.	/	8
De 10 à 19 ex.	180 BEF/ex. 4,46 €/ex.	/	8
Plus de 19 ex.	160 BEF/ex. 3,97 €/ex.	/	8
Jacques Bair			
Mathématique et Sport	200 BEF 4,96 €	150 BEF 3,72 €	3
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie,...	500 BEF 12,39 €	400 BEF 9,92 €	5

Tableau 2 : Prix de base CD-Rom	Prix plein	Prix réduit	Cat. post.
Programmes mathématiques de G. Robert	200 BEF 4,96 €	/	7

Tableau 3 : Frais de port

Caté-gorie	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe,
1	10 F/0,25 €	1,61 €	1,74 €	4,09 €
2	25 F/0,62 €	0,99 €	1,12 €	1,98 €
3	40 F/0,99 €	1,61 €	1,74 €	4,21 €
4	60 F/1,49 €	2,48 €	3,22 €	7,93 €
5	80 F/1,98 €	2,97 €	3,22 €	7,93 €
6	100 F/2,48 €	3,72 €	5,70 €	14,87 €
7	50 F/1,24 €	2,73 €	3,22 €	4,09 €
8	Consulter le secrétariat			

Pour effectuer une commande, il vous suffit de verser le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique :
Effectuer vos paiements au compte 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons.

Si vous habitez en France :
Nous vous demandons d'effectuer votre versement en Euros uniquement sur le compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef 15 rue de la Halle à B-7000 Mons, Belgique.

Si vous habitez ailleurs :
Effectuez de préférence un virement international au compte
CCP (giro) 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons, Belgique.
Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement "giro"), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.