Photo de couverture : statue de Fermat à Beaumont-de-Lomagne (France, Tarn & Garonne)

Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N° 135 Janvier-Février 2002

NOTE

* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
* Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
* Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (LaTeX 2ε, Word) ; les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.

  L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.

  Pour les livres :

  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.

  Pour les articles :

  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Éditorial

J. MIEWIS

Au seuil de 2002, je ne voudrais pas faillir à la tradition des souhaits de nouvelle année. Et le principal vœux que je formulerais à l'attention de la communauté mathématique et plus généralement du monde de l'enseignement en Communauté française est que la prochaine Saint-Nicolas nous soit un peu moins amère.

Souvenez-vous, le 4 décembre 2001, l'OCDE ([1]) nous livrait PISA ([2]) . Cette enquête ([3]) pratiquée en 2000 dans 23 pays auprès des jeunes scolarisés de 15 ans emballa rapidement la presse qui y vit surtout une disparité de résultats entre nos deux communautés linguistiques et éducatives.

D'après les rédacteurs de ce rapport, PISA organisait une enquête extrêmement fouillée en lecture — où plusieurs niveaux de compétences étaient étudiés — ainsi qu'en mathématique et science, domaines « mineurs » au sens où moins d'items y étaient consacrés ([4]). Voici quelques réflexions que j'aimerais partager avec vous à propos des résultats en mathématique pour la Communauté française.

Les difficultés inhérentes à la conception d'objectifs, à la rédaction des questions et surtout à la délicate élaboration de grille d'évaluation ne peuvent être passées sous silence, mais chacun s'accordera à dire qu'il ne faudrait pas y voir l'arbre qui cacherait la forêt.

Les résultats moyens pour tous les pays participants au test ont été ramenés à un score moyen standardisé de 500 (m), affecté d'un écart type standard de 100 (σ). La Communauté Française se caractérise par $m = 491$ et $\sigma = 111$ ([5]). D'un point de vue statistique, ces performances ne nous éloignent pas significativement de la moyenne.

Notre écart est le plus grand de tous les pays examinés. Cela signifie que chez nous, l'écart entre les « bons » et les « mauvais » résultats est très

---

([1]) l'Organisation de Coopération et de Développement Economique

([2]) The OECD Programme for International Student Assessment

([3]) résultats et modèles de questions : http://www.pisa.oecd.org/

([4]) rapport de Mme Dominique Lafontaine, gestionnaire de PISA pour la Communauté française de Belgique, Service de pédagogie expérimentale, Ulg.

([5]) Communauté Flammande $m = 543$ et $\sigma = 96$,
voir : http://www.ond.vlaanderen.be:80/schooldirect/bijlagen0102/Pisa/pisa_samen.htm

accentué. L'examen des percentiles confirment que les 25% de nos meilleurs élèves rivalisent sans complexe avec la moyenne de l'OCDE alors que les 25% de nos élèves les plus faibles sont beaucoup plus faibles que la moyenne des élèves faibles.

Il est important néanmoins de souligner que 57 % seulement de nos élèves testés se trouvaient dans la bonne classe. Pour ces élèves « à l'heure », les résultats ($m = 545$) sont tout autres !

L'énorme base de donnée de l'OCDE permet également de ventiler les résultats suivant le statut socio-professionnel des parents ou suivant l'origine ethnique de l'élève : ces deux facteurs conduisent indiscutablement à des performances différentes.

Mutatis mutandis, on pourrait trouver les mêmes causes de disparité dans les résultats des tests de lecture et de sciences.

Au travers de ces brèves considérations, on peut à tout le moins conclure que notre pratique actuelle ne permet pas aux élèves fragilisés par les circonstances de la vie d'espérer rejoindre le peloton moyen. Or, ces plus faibles doivent en bonne logique pédagogique être notre souci premier. Le résultat de notre Communauté face aux autres pays m'indiffère quelque peu. Nos impuissances à mieux gérer l'échec, la différence, les inégalités m'énervent !

Nos programmes — par exemple le retour à deux niveaux de cours au second cycle — notre pédagogie, notre ouverture d'esprit, notre disponibilité devraient viser à combler ces handicaps : nous ne sommes pas là pour former des bêtes de concours, nous devons rester au service de toute la Communauté, même de ceux qui ont peu d'aptitude ou de motivation pour l'école. Là est la forêt.

Les arbres, nous en connaissons tous : le sous-financement récurrent, le chagrin de 1990, l'abusive panacée du redoublement, le décret-mission ressenti par d'aucuns comme une perte d'autonomie, l'absence de réelle évaluation des pratiques pédagogiques pour cause de remaniements trop fréquents... Alors, PISA, un arbre de plus ?

Sauvons la forêt. ([6])

([6]) P.S. : Si vous désirez réagir sur ce sujet — ou sur tout autre d'ailleurs — sachez que nos colonnes vous sont ouvertes.

Voyager dans la nébuleuse des triplets pythagoriciens à l'aide d'une matrice

M. COYETTE, *Collège Notre-Dame, Wavre*

Mots-clés : Triplets pythagoriciens, matrices, valeurs et vecteurs propres, itérations.

Même si le nouveau programme est trop chargé ou éparpillé, il est essentiel de prendre le temps d'utiliser les nouveaux outils introduits dans un autre contexte que celui de départ, surtout si ce contexte semble inattendu. Intriguer, surprendre, passionner, imprimer durablement les esprits : n'est-ce pas là aussi un des buts poursuivis par l'enseignant ?

Dans cet article, je vous propose de découvrir comment les matrices peuvent être utilisées pour voyager dans la nébuleuse des triplets pythagoriciens. Je démontre également que chaque triplet pythagoricien primitif s'écrit d'une manière unique en fonction du triplet $[3, 4, 5]$. Enfin, j'aborde les problèmes de limites de rapports des coefficients des triplets pythagoriciens sur certaines orbites définies par les matrices introduites. Je retrouve ainsi quelques « propriétés remarquables » démontrées dans un cas particulier par *D. Lambert* dans [3].

Les triplets pythagoriciens sont des triplets d'entiers strictement positifs $[a, b, c]$ vérifiant l'équation $a^2 + b^2 = c^2$.

Un triplet pythagoricien est *primitif* si, de plus, a, b et c sont premiers entre eux.

Il est bien connu que tous les triplets pythagoriciens primitifs peuvent s'écrire sous la forme décrite ci-dessous. Une démonstration de ce résultat peut être trouvée dans [1] et [2]. Dans [4], L. lemaire démontre également ce résultat tout en le situant dans l'optique du théorème de *Fermat-Wiles*.

Adresse de l'auteur: Michel Coyette, rue du monastère, 83, 1330 - Rixensart

Théorème 1

Pour m et n entiers strictement positifs, premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair, tels que m est strictement supérieur à n :

$$a = 2mn \qquad b = m^2 - n^2 \qquad c = m^2 + n^2$$

$[a, b, c]$ forme un triplet pythagoricien primitif. De plus, tous les triplets pythagoriciens primitifs possèdent ce format.

Les triplets pythagoriciens sont des multiples des triplets primitifs. Ainsi $[9, 12, 15]$ est un multiple de $[3, 4, 5]$. Notons que $[9, 12, 15]$ n'est pas du format $[m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2]$ pour m et n entiers.

Théorème 2

Si $[a, b, c]$ est un triplet pythagoricien, alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

forme aussi un nouveau triplet.

La différence des deux premières composantes du nouveau triplet est égale à $a - b$.

Si $[a, b, c]$ est un triplet pythagoricien primitif, le nouveau triplet est également primitif.

Démonstration

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b + 2c \\ a + 2b + 2c \\ 2a + 2b + 3c \end{pmatrix}$$

Montrons que $[2a + b + 2c, a + 2b + 2c, 2a + 2b + 3c]$ forme un triplet pythagoricien.

$$(2a + b + 2c)^2 + (a + 2b + 2c)^2 = 5a^2 + 5b^2 + 8c^2 + 8ab + 12bc + 12ac$$

D'autre part,

$$(2a+2b+3c)^2 = 4a^2+4b^2+9c^2+8ab+12bc+12ac$$

Puisque $[a,b,c]$ forme un triplet pythagoricien, $a^2+b^2=c^2$ et donc

$$(2a+2b+3c)^2 = 5a^2+5b^2+8c^2+8ab+12bc+12ac$$

et

$$(2a+2b+3c)^2 = (2a+b+2c)^2+(a+2b+2c)^2.$$

$[2a+b+2c, a+2b+2c, 2a+2b+3c]$ forme un triplet pythagoricien.

De plus la différence des deux premières composantes reste égale à $a-b$.

La matrice inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ vaut $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Notons

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

De là, si p est un facteur commun à a_1, b_1 et c_1, alors il est aussi diviseur commun de a, b et c.

Nous avons donc montré que si $[a,b,c]$ est primitif,

alors $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est également primitif.

★ ★

★

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ permet donc de voyager dans la nébuleuse des triplets pythagoriciens.

Dans la suite de cet article, je noterai $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Si $[a, b, c]$ est un triplet pythagoricien, $A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donne une suite de triplets pythagoriciens dont la différence des deux premières composantes reste invariante.

Par exemple : $A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 29 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 \\ 120 \\ 169 \end{pmatrix}$

Il est ainsi possible de parcourir l'orbite des triplets pythagoriciens dont la différence des deux premières composantes vaut 1.

De même, $A\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 55 \\ 73 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 48 \\ 55 \\ 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 297 \\ 304 \\ 425 \end{pmatrix}$

De nouveau, il s'agit ici de suivre une orbite de triplets pythagoriciens dont la différence des deux premières composantes vaut 7. Constatons que nous ne suivons pas l'orbite de tous les tripets dont la différence vaut 7.

$[8, 15, 17]$ fait partie d'une autre orbite.

Ainsi, $A\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 72 \\ 97 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 65 \\ 72 \\ 97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 396 \\ 403 \\ 565 \end{pmatrix}$

De même, $\begin{pmatrix} 11 \\ 60 \\ 61 \end{pmatrix}$ inaugure une orbite sur laquelle la différence des deux premières composantes vaut 49. Une autre orbite est entamée par $\begin{pmatrix} 104 \\ 153 \\ 185 \end{pmatrix}$.

De nouveau, ces deux triplets sont situés sur des orbites distinctes.

À partir de chaque triplet, il est possible de construire deux nouvelles orbites. Pour $[a,b,c]$ un triplet pythagoricien, $A\begin{pmatrix}-a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}-b\\a\\c\end{pmatrix}$ inaugurent deux nouvelles orbites le long desquelles la différence des deux premières composantes vaut $a+b$. Il est possible de traduire ces changements d'orbites par les matrices $\begin{pmatrix}-2&1&2\\-1&2&2\\-2&2&3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix}$.

En effet, $\begin{pmatrix}-2&1&2\\-1&2&2\\-2&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Dans la suite de cet article, je noterai

$$B=\begin{pmatrix}-2&1&2\\-1&2&2\\-2&2&3\end{pmatrix} \text{ et } C=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix}$$

Ainsi $B\begin{pmatrix}11\\60\\61\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}160\\231\\281\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}11\\60\\61\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\84\\85\end{pmatrix}$

Définition

Une matrice D conserve la propriété des sommes des carrés si et seulement si pour

$$a^2+b^2=c^2 \text{ et } D\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}, \text{ alors } a_1^2+b_1^2=c_1^2.$$

La proposition suivante donne quelques matrices qui conservent la propriété de la somme des carrés.

Proposition

Les matrices suivantes conservent la propriété des sommes des carrés :

$$B=\begin{pmatrix}-2&1&2\\-1&2&2\\-2&2&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix},$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&2\\1&2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix},\ C^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&-1&2\\-2&-2&3\end{pmatrix}$$

Démonstration

On vérifie facilement les valeurs des matrices A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} .

Pour la démonstration en elle-même, il suffit de constater que chacune de ces matrices peut s'écrire comme un produit de matrices ayant la propriété.

$$B=\begin{pmatrix}-2&1&2\\-1&2&2\\-2&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&2\\1&2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}$$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&-1&2\\-2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&2\\1&2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}$$

Théorème 3

Si $[a,b,c]$ forme un triplet pythagoricien primitif distinct de $[3,4,5]$ tel que $a<b<c$, un **seul** des trois triplets suivants est un triplet pythagoricien vérifiant $0<a'<b'<c'<c$.

$$A^{-1}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}$$

$$C^{-1}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}$$

Démonstration

$[a,b,c]$ forme un triplet pythagoricien primitif tel que $a<b<c$.

Comme chacune des matrices données conserve la somme des carrés, il suffit de prouver que $0<a'<b'<c'<c$.

- $2a+b-2c\neq 0$.
  En effet, imaginons
  $$\begin{aligned} 2a+b&=2c\\ 4a^2+b^2+4ab&=4c^2\\ 4a^2+b^2+4ab&=4a^2+4b^2\\ 4ab&=3b^2\\ 4a&=3b\end{aligned}$$
  Comme a et b sont premiers entre eux, $a=3$ et $b=4$, ce qui est impossible par hypothèse sur $[a,b,c]$.

- Comme $2c<2a+2b$, $-2a-2b+3c<c$ et $\boxed{c'<c}$
- $3a+3b\neq 4c$ car $a+b$ est impair.
- $3a+4b<5c$. En effet
  $$\begin{aligned} (4a-3b)^2&>0\\ 16a^2+9b^2-24ab&>0\\ 25a^2+25b^2&>9a^2+16b^2+24ab\\ 25c^2&>(3a+4b)^2\\ 5c&>3a+4b\end{aligned}$$

▶ Premier cas : $2a+b-2c>0$

Regardons $A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

Comme $a<b$, $2a+b-2c<a+2b-2c$.
Comme $3a+4b<5c$, $a+2b-2c<-2a-2b+3c$.
$[a',b',c']$ forme bien un triplet pythagoricien tel que $\boxed{0<a'<b'<c'}$

▶ Deuxième cas : $2a+b-2c<0$ et $3a+3b-4c>0$

Regardons $B^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

Comme $4c<3a+3b$, $-2a-b+2c<a+2b-2c$.
Comme $3a+4b<5c$, $a+2b-2c<-2a-2b+3c$.
$[a',b',c']$ forme bien un triplet pythagoricien tel que $\boxed{0<a'<b'<c'}$

▶ Troisième cas : $2a+b-2c<0$ et $3a+3b-4c<0$

Regardons

$$C^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

$0<a+2b-2c$. En effet, comme
$$\begin{aligned} &4a^2 < a^2+4ab \\ &4a^2+4b^2 < a^2+4ab+4b^2 \\ &4c^2 < a^2+4ab+4b^2 \\ &4c^2 < (a+2b)^2 \\ &2c < a+2b \\ &0 < a+2b-2c \end{aligned}$$

Comme $3a+3b<4c$, $a+2b-2c<-2a-b+2c$.
Comme $b<c$, $-2a-b+2c<-2a-2b+3c$.
$[a',b',c']$ forme bien un triplet pythagoricien tel que $\boxed{0<a'<b'<c'}$

À partir d'un triplet pythagoricien primitif, il est donc possible de « descendre » dans la nébuleuse. Ce processus s'arrête uniquement lorsque l'orbite de descente arrive à [3,4,5]. Donc chaque triplet primitif peut être atteint à partir de [3,4,5] en multipliant par les matrices A, B, C .

La décomposition en fonction de [3,4,5] et des trois matrices est unique. De plus, dans chaque triplet pythagoricien primitif, la différence des deux premières composantes vaut 1 ou la somme des deux premières composantes d'un autre triplet pythagoricien.

★ ★
★

Les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sont égales à $3+2\sqrt{2}$, $3-2\sqrt{2}$ et 1.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $3+2\sqrt{2}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $3-2\sqrt{2}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 1.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \tfrac{a+b+c\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \tfrac{a+b-c\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + \tfrac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notons $\alpha_1 = \frac{a+b+c\sqrt{2}}{4}$ $\lambda_1 = 3+2\sqrt{2}$

$\alpha_2 = \frac{a+b-c\sqrt{2}}{4}$ $\lambda_2 = 3-2\sqrt{2}$

$\alpha_3 = \frac{a-b}{2}$ $\lambda_3 = 1$

$\alpha_1 \neq 0$ si $a, b,$ et c sont des nombres entiers strictement positifs.

Théorème 4

$[a, b, c]$ forme un triplet pythagoricien.

Notons $A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour n entier strictement positif.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{c_n}{a_n} = \sqrt{2}$$

Démonstration

$$A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \lambda_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \alpha_2 \lambda_2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\lambda_1 > \lambda_2$, le terme en λ_1^n devient dominant lorsque n tend vers l'infini.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \alpha_3}{\alpha_1 \lambda_1^{n-1} + \alpha_2 \lambda_2^{n-1} + \alpha_3}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \lambda_1 \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n + \frac{\alpha_3}{\lambda_1^n}}{\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1} + \frac{\alpha_3}{\lambda_1^{n-1}}}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

De même, il est possible de démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} \text{ sont égales à } 3 + 2\sqrt{2}$$

.

Enfin,

$$\frac{c_n}{b_n} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^n \sqrt{2} - \alpha_2 \lambda_2^n \sqrt{2}}{\alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n - \alpha_3}$$

$$\frac{c_n}{b_n} = \frac{\alpha_1 \sqrt{2} - \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \sqrt{2}}{\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n - \frac{\alpha_3}{\lambda_1^n}}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{c_n}{b_n} = \sqrt{2}$$

Il en va de même pour $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{c_n}{a_n} = \sqrt{2}$

D. Lambert [3] démontre ces propriétés dans le cas particulier $b - a = 1$ sans utiliser la matrice A .

Il faut remarquer qu'il y a deux orbites distinctes pour chaque valeur possible de $b - a$ distinctes de 1, lorsque $[a, b, c]$ est un triplet primitif. C'est sur chacune de ces deux orbites qu'il est possible d'observer ce comportement asymptotique. Pour les autres triplets, le nombre d'orbites de cette sorte est encore plus important.

Il convient donc de bien distinguer ces différentes orbites afin d'observer le comportement asymptotique démontré dans le théorème précédent ([1]).

★ ★
★

Les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sont égales à $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$ et -1.

([1]) La construction donnée dans [3] pour le cas $b - a = p^2$ ne distingue pas ces différentes orbites. De plus, cette construction ne donne, dans le cas envisagé, que des multiples des triplets pythagoriciens tels que $b - a = 1$. Ainsi, le triplet $[11, 60, 61]$ est exclu par la construction.

$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $2+\sqrt{3}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $2-\sqrt{3}$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à -1.

Une argumentation similaire permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 5

Notons $B^n\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour n entier strictement positif.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = 2+\sqrt{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \sqrt{3} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{c_n} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

★ ★

★

Pour la troisième matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ la situation est différente.

En effet, la seule valeur propre est 1.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 1. Les autres vecteurs propres de C sont des multiples de ce vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 6

Notons $C^n\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour n entier strictement positif.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1$$

Démonstration

Pour n entier strictement positif, il est aisé de démontrer les deux égalités suivantes :

$$C^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2n \\ 2n \end{pmatrix} \text{ et } C^n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n \\ 2n^2 \\ 2n^2+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c-b)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C^n\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2n \\ 2n \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c-b)\begin{pmatrix} 2n \\ 2n^2 \\ 2n^2+1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{2na+b+(c-b)2n^2}{2(n-1)a+b+(c-b)2(n-1)^2}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = 1$$

De même, il est possible de démontrer $\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = 1$

Comme

$$\frac{b_n}{c_n} = \frac{2na+b+(c-b)2n^2}{2na+b+(c-b)(2n^2+1)}$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1.$$

Bibliographie

[1] Famelart M., À la recherche des triplets pythagoriciens, *Math-Jeunes*, 1993, n° 62, p. 11–13.

[2] Festraets-Hamoir Cl., Malgré les programmes, comment introduire de l'arithmétique dans l'enseignement, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, n° 38, p. 5–30.

[3] Lambert D., Divertissements mathématiques : une propriété remarquable des triplets pythagoriciens, *Revue des questions Scientifiques*, 1996, n° 167 (1), p. 39–44.

[4] Lemaire L., La recherche mathématique aujourd'hui, *Mathématique et Pédagogie*, 2000, n° 128, p. 7-35.

Du bon usage des non-théorèmes.

Pour résoudre l'équation $2\ln(x-2) = \ln(x-3) + \ln x$, il suffit d'utiliser la non-identité : $q \ln x = \ln qx$ pour obtenir directement la bonne (?) solution.

$$\begin{gathered}
\ln(2x-4) = \ln x(x-3) \\
2x - 4 = x^2 - 3x \\
x^2 - 5x + 4 = 0 \\
(x-4)(x-1) = 0 \\
S = \{4\}
\end{gathered}$$

car on rejette $x = 1$ à cause des conditions d'existence.

Activités mathématiques et environnement calculatrice : ouvertures et fermetures.

L. TROUCHE, *IREM et équipe ERES, Montpellier.*

Résumé. ([1])

Les ressorts de l'apprentissage des mathématiques sont complexes. G. Brousseau [4] a mis en évidence l'importance des situations a-didactiques pour que l'élève avance de son propre mouvement et le rôle clef du professeur pour la négociation du contrat didactique. L'introduction d'outils de calculs puissants dans le cours de mathématiques modifie les termes de ce contrat et produit des effets variés sur les comportements des élèves. On le vérifie :

- en observant des travaux d'élèves confrontés au même problème, avec les mêmes outils, mais dans des contextes institutionnels différents;
- en observant notre propre comportement de praticien des mathématiques.

Ce type d'outils semble susciter une grande diversité de mouvements, parfois opposés : mouvement de concrétisation et mouvement d'abstraction, mouvement de diversification et mouvement de fixation, mouvement de distraction et mouvement d'approfondissement. Le contrôle de cette diversité par le maître impose une organisation spécifique de la classe et une gestion particulière du temps de l'étude.

Adresse de l'auteur: Luc TROUCHE, Département de Mathématiques, Université Montpellier 2, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5.
e-mail : trouche@math.univ-montp2.fr

([1]) *Cet article est le texte d'une conférence donnée le 22 août 01, à Charleroi, à l'occasion du Congrès de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française. Je tiens à remercier ici la SBPMef et l'organisation T^3 (« Teachers Teaching with Technology ») de Belgique pour cette invitation.*

1. Situations, activités, situations-problèmes.

1.1. Une orientation des programmes, qui n'est pas vraiment nouvelle.

Après la réforme des « mathématiques modernes » , prônant un certain formalisme, la contre-réforme des années 80 a promu une autre conception des mathématiques, reposant principalement sur la résolution de problèmes. Ont alors fleuri dans les programmes les expressions du type « expérimentation » , « situations-problèmes » , « activités » , etc. Ces expressions et ces préoccupations ne sont pas nouvelles. On les trouve déjà dans les programmes français de 1957 ([2]) qui détaillent le contenu d'une démarche expérimentale :

> L'observation des faits, des individus, de leur comportement, que les éléments en cause soient concrets ou abstraits, est la première opération, sensorielle ou mentale, intervenant dans toute recherche. Mais l'expérimentation, c'est-à-dire une observation de phénomènes volontairement provoqués dans des conditions déterminées d'avance, et non pas imposées de l'extérieur, se présente naturellement à l'esprit actif et curieux comme une espèce de nécessité.
>
> Bien entendu, elle ne porte pas obligatoirement sur les objets matériels ; elle peut être, ou devenir, une sorte d'expérimentation figurée, comportant une série de gestes imaginés, mais qui seraient effectivement réalisables.
>
> La phase essentielle d'une telle recherche est, bien entendu, celle de l'interprétation des résultats, qui permettra de dégager des conclusions : elle nécessite une analyse qui doit être conduite avec un soin extrême et, en mathématiques, la nature des êtres mis en jeu oblige à prendre des précautions particulières qu'il importe de faire comprendre aux débutants.
>
> Car une expérience, quelle qu'elle soit, ne met en jeu que des objets particuliers, en nombre limité : dès lors, même si elle est répétée plusieurs fois, en modifiant quelque donnée, elle ne révèle, en toute rigueur, qu'un résultat valable dans telle ou telle condition ; c'est là le premier point qui doit être expliqué et acquis.

([2]) Instructions complémentaires relatives à l'enseignement des mathématiques, janvier 1957

Vient alors la critique : les opérations que j'ai réalisées, ou que j'ai imaginé, sont-elles conditionnées inévitablement par les situations et par les éléments particuliers sur lesquels j'ai travaillé ?

- Si oui, les conséquences obtenues n'ont de valeur que pour ces situations et pour ces éléments ;
- Sinon, une nouvelle question se pose, ou plutôt une suite de questions, où l'abstraction devient peu à peu dominante : les opérations restent-elles possibles et les résultats restent-ils valables si je modifie certaines données ? Ces modifications sont-elles, à leur tour, assujetties à quelques restrictions ? Les résultats restent-ils valables quelles que soient ces modifications ? Ainsi s'organise une réflexion, lente et progressive, qui doit accrocher et retenir l'attention, et donner accès aux formes, abstraites et générales, propres à la pensée mathématique.

La ressemblance avec la note de service de 1994 est frappante :

> Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une résolution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé, ne sont que des éléments différents d'une même activité mathématique.
>
> Dans ce contexte, la clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs importants. Cependant la maîtrise du raisonnement et du langage mathématique doit être placée dans une logique de progression. **On se gardera donc de toute formalisation excessive**, aussi bien pour les énoncés que pour les démonstrations. En particulier, le vocabulaire et les notations ne sont pas imposés a priori ; ils s'introduisent en cours d'étude selon un critère d'utilité.

1.2. Une nécessité didactique.

Cette orientation est conforme à la *théorie des situations didactiques*, élaborée par G. Brousseau [4] :

> La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées par un choix judicieux des « problèmes » qu'il lui propose. Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter, doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura vraiment acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même, dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée **situation adidactique**.

Cette conception met l'accent sur la responsabilité du maître dans le choix des problèmes, leur dévolution à l'élève (il faut que celui-ci accepte de rentrer dans le jeu de la résolution) et sur la responsabilité de l'élève, qui doit évoluer de son propre mouvement. Les deux protagonistes, le maître et l'élève, sont liés par un contrat didactique, qui « détermine — explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement — ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre ».

1.3. Les situations adidactiques et l'intégration des outils de calcul.

A partir des années 90, la volonté institutionnelle de développer une pratique des mathématiques liée à l'activité propre de l'élève apparaît fortement liée à l'intégration des nouveaux outils de calcul (calculatrices graphiques, tableurs et logiciels de géométrie) : ces outils permettent de représenter des objets mathématiques, de manipuler ces représentations et semblent donc se prêter particulièrement bien à une démarche de conjectures, preuves et réfutations.

Mais ces outils ne sont pas tout à fait neutres, ils ne se « contentent » pas de représenter des objets mathématiques : ils les déforment d'une certaine façon ([3]) , ils proposent des réponses et structurent — relativement — l'action de l'utilisateur. Comment dans cette situation peut-on dire encore que *l'élève évolue de son propre mouvement*? De quoi *l'élève et le maître sont-ils encore responsables l'un devant l'autre* et quelle est la place de ces outils dans le *contrat didactique*? Pour répondre à ces questions, nous allons d'abord examiner des travaux d'élèves, confrontés au même problème, avec les mêmes outils, dans des contextes différents.

2. Même problème, même type d'outils, contextes différents.

2.1. Présentation du problème.

Le problème suivant a été proposé à deux classes (niveau seconde) au Canada et en Israël [7].

`Pour la famille A (cf. figure 1), la largeur augmente chaque année d'une unité, la longueur demeure constante, égale à 8 unités. Pour B, la largeur et la longueur du rectangle augmentent chaque année d'une unité. Pour C, la longieur double chaque année, et la largeur demeure égale à` $\frac{1}{4}$.

`Etudier le problème par groupe. Commencer par conjecturer des réponses aux questions suivantes :`

1. `Comparer les aires des 3 familles de rectangles au long des années. Quelle est la situation initiale ? Quelle famille (s) prendra le dessus sur l'autre (les autres) et quand ?`
2. `Quelle année chacune des familles dépassera 1000 unités carré ?`

`Vérifier ensuite vos hypothèses avec des outils mathématiques (l'aide d'une calculatrice graphique est recommandée). Essayer d'être aussi précis que possible.`

([3]) N. Balacheff [2] parle *de transposition informatique* pour désigner « ce travail sur la connaissance qui en permet une représentation symbolique et la mise en œuvre de cette représentation par un dispositif informatique ».

Ecrire un rapport de recherche pour chaque groupe. Essayer de décrire vos conjectures et ce sur quoi elles sont basées. Quelle sorte de débat votre groupe a-t-il eu ?

Décrire les voies utilisées pour résoudre le problème et la façon avec laquelle vous avez utilisé votre calculatrice graphique.

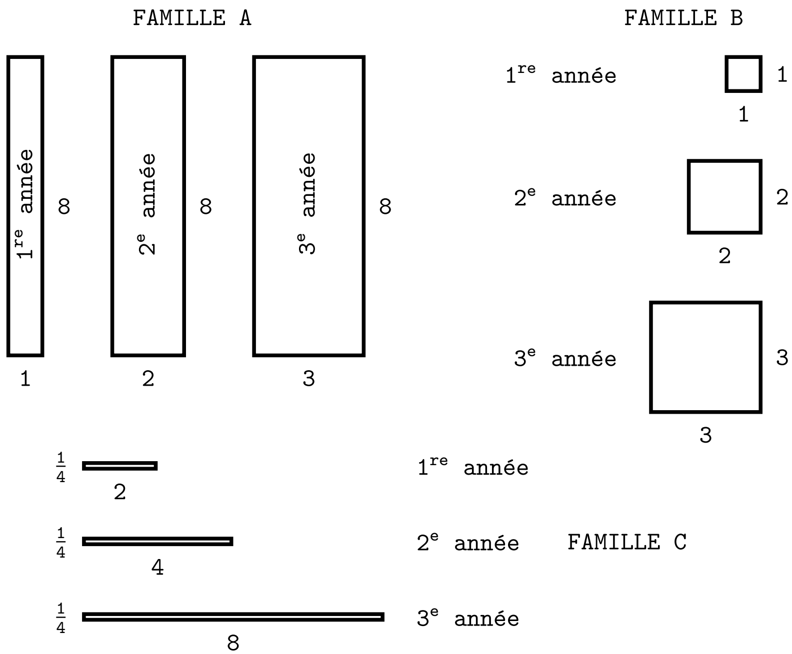


Figure 1. L'évolution de trois familles de rectangles.

2.2. Premier type de résolution. (Israël)

Cette activité a été proposée à des élèves qui avaient suivi un cours intégrant des calculatrices graphiques (TI-81), et qui avaient donc l'habitude des changements de représentations (algébrique, graphique, numérique) pour un objet mathématique.

Pour savoir quelle famille de rectangle prendra le dessus, les élèves utilisent leur intuition et/ou des calculs à la main (ils calculent les aires des familles de rectangle pour quelques valeurs). Ils obtiennent alors des formules algébriques (avec quelques difficultés pour la famille C, $y = \frac{1}{4} \times 2^x$), et utilisent ensuite leur calculatrice graphique pour obtenir une représentation graphique du phénomène (Cf. figure 2).

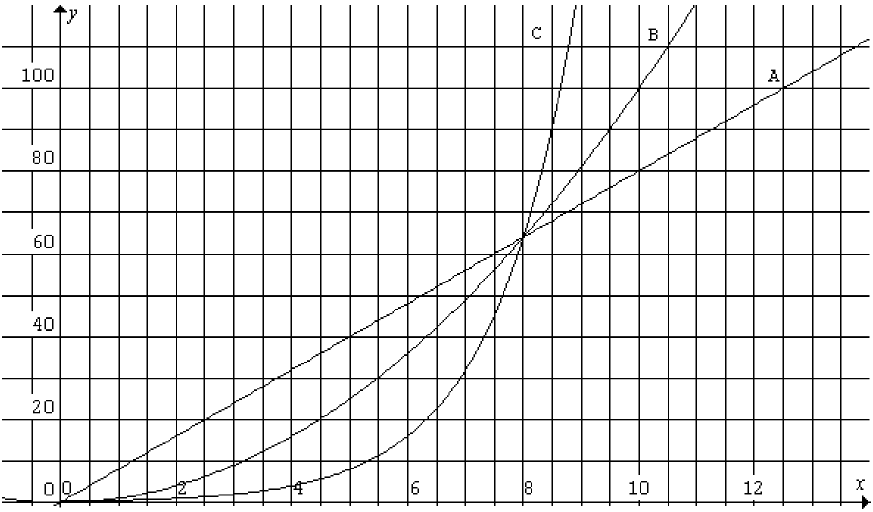


Figure 2. Une représentation de ce que les élèves ont obtenu sur leur calculatrice.

Le professeur discute alors avec la classe les résultats et les stratégies. Les élèves déclarent que, à la 8^e année, les trois familles ont même aire, et que, à partir de cette année, la famille C prend le dessus, et la famille B reste entre les deux. La certitude du résultat s'impose à partir des différentes représentations proposées par la calculatrice (même si ce n'était pas le résultat imaginé au départ). Les élèves essaient cependant de réinterpréter ce résultat en confrontant les différentes représentations du phénomène (algébrique, numérique, graphique, géométrique).

La preuve émerge ici des interactions des élèves avec la calculatrice. C'est un nouveau type de preuve qui se constitue dans cet environnement ; sa légitimité sociale se construit dans la classe.

2.3. Deuxième type de résolution. (Canada)

La classe dont il est question ici a aussi l'habitude de travailler dans des environnements de calculatrices graphiques (il s'agit de calculatrices graphiques TI-83 plus). On décrit les différentes étapes du travail d'un groupe de trois élèves (deux filles et un garçon).

Premier round : obtenir de la calculatrice une expression algébrique de la situation.

Le groupe crée une table de valeurs, pour les trois suites (jusqu'à la dixième année) sur le papier. Des remarques sont faites sur les lois de croissance :

- la loi « carré » apparaît pour la famille B ;
- il apparaît un point d'intersection pour les trois phénomènes ;
- la famille C, de façon surprenante, semble l'emporter.

L'un des élèves propose : « nous pourrions faire les équations pour chaque famille et comparer sur la calculatrice graphique pour voir où cela se coupe ». Pour obtenir ces équations, le groupe utilise une calculatrice graphique, entre les listes des 5 premières valeurs pour chaque suite (dans le menu des données statistiques) et utilise la commande de régression linéaire pour obtenir les trois droites d'ajustement. Il obtient ainsi, pour les trois phénomènes, les équations $y = 8x$, $y = 6x-7$, $y = 1,8x - 2,3$; les trois droites apparaissent sur une fenêtre standard (cf. figure 3).

Deuxième round : reconnaître que la calculatrice n'a pas fait le travail attendu.

Un élève remarque que les courbes ne se coupent pas au point attendu. Le groupe va alors essayer d'arranger cette situation, en changeant d'abord la fenêtre pour obtenir les graphiques dans le premier quadrant (cf. figure 4). Cela ne va pas mieux. Il essaie alors d'obtenir de la calculatrice les coordonnées du point d'intersection par une commande ad hoc : la réponse de la machine est qu'il n'y a pas d'intersection. Il semble admettre alors que la calculatrice n'a pas fait le travail que l'on attendait d'elle.

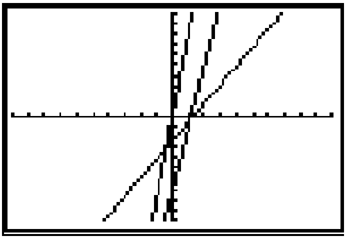


Figure 3. Droites de régression sur une fenêtre standard

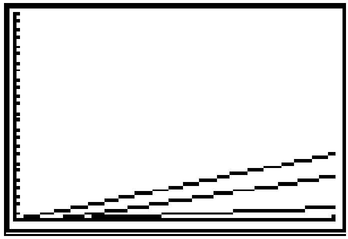


Figure 4. Droites de régression sur une fenêtre ajustée

Troisième round : un changement de point de vue.

Un élève substitue 8 dans les expressions algébriques proposées par la calculatrice, il trouve bien 64 pour la famille A, mais 41 et 12,1 pour B et C, alors que les trois suites devaient se rencontrer à ce point. Ils vérifient la régression linéaire pour B, et remarquent que le coefficient de corrélation est 0,98, donc que le résultat n'est pas « à 100 % sûr ». Un élève remarque : « peut-être que ce n'est pas une régression linéaire ? »

Quatrième round : insister pour que la calculatrice fasse le travail.

Le groupe recherche donc d'autres régressions. La régression cubique pour B fournit l'équation $y = x^2$, avec un coefficient de corrélation égal à 1. Un élève remarque l'évidence et constate : « si nous ne l'avons pas vu avant, c'est parce que nous étions absorbés par la calculatrice ! »

Toutes les autres régressions sont testées pour la famille C, jusqu'à ce que la régression exponentielle fournisse $y = 0,25 \times 2^x$, avec un coefficient de corrélation égal à 1. Des vérifications à l'aide de calcul sur papier permettent de contrôler que cette équation permet bien de retrouver les résultats déjà établis.

Les trois équations sont entrées dans l'éditeur de fonctions, la vérification graphique (croissances comparées et point d'intersection) semble convaincre le groupe que les réponses sont désormais convenables.

2.4. Quelques éléments de conclusion.

Des facteurs techniques et institutionnels peuvent expliquer les différences de résolution entre les deux classes :

- la classe canadienne disposait de calculatrices plus complexes, donc disposant de plus de commandes (en particulier du point de vue des types de régression) ;
- le traitement de données issues de « problèmes réels » en Amérique du Nord explique sans doute le recours naturel à une stratégie d'interpolation de données, à partir d'un fichier statistique.

Mais, dans les deux cas, apparaissent des éléments communs :

- l'influence de la calculatrice sur les méthodes de preuve ;
- l'influence de la calculatrice sur l'économie de résolution : confrontation des résultats dans différents cadres ou au contraire fixation sur une seule application (pour rechercher une régression convenable), alternance de phases de réflexion « stratégique » et de phases d'utilisation mécanique des commandes disponibles ;
- la prédominance du cadre graphique pour voir, montrer et prouver.

Dans ces phases de recherche, la calculatrice préstructure bien, de façon relative, l'action de l'élève. On ne peut pas dire que, dans ces conditions, *l'élève avance de son propre mouvement*, et, du point de vue du contrat didactique, le maître aura sans doute des difficultés pour juger des connaissances qui auront été construites (les élèves ont par exemple utilisé une régression exponentielle, qui est parfaitement hors programme à ce niveau : qu'en auront-il retenu ?)

3. Une analyse de notre propre comportement de praticien des mathématiques.

Après avoir observé des résolutions de problèmes dans un contexte d'apprentissage, nous allons voir ce qu'il en est quand nous plaçons nous-mêmes, comme praticiens des mathématiques, dans des situations de recherche en « environnement calculatrices ». Je présenterai deux problèmes (j'avais prévu de présenter un seul problème, mais le « problème du jour »proposé au Congrès de la SBPMef m'a donné l'occasion d'une deuxième illustration).

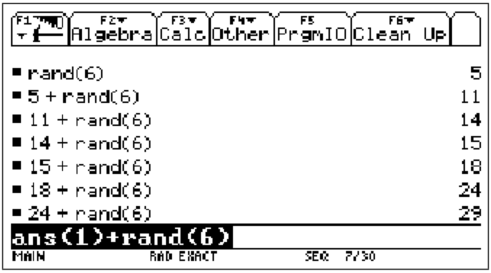
3.1. Le jeu de l'oie.

Présentation du problème.

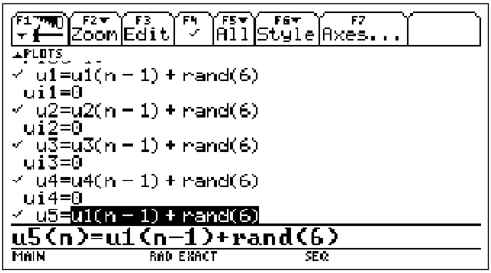
On se déplace sur un jeu de l'oie « infini », dont les cases sont indicées par les entiers successifs à partir de 0 (la case 0 étant la case de départ), grâce à un dé à 6 faces (non truqué). On se propose de calculer la probabilité P_{100} de tomber sur la case 100 et la probabilité P_n de tomber sur la case n puis de déterminer un équivalent de cette suite à l'infini. Nous traiterons ce problème dans un environnement de calculatrice symbolique TI-92 (Texas Instruments) ([4]).

Premier abord théorico-pratique.

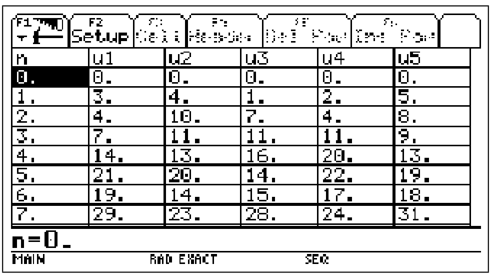
Il est possible de simuler cette marche aléatoire grâce à la commande RANDOM de la calculatrice. C'est une tentation assez « naturelle », au début d'un problème, de voir le phénomène en cause, qui traduit ce que l'on pourrait appeler un mouvement de *concrétisation*.



On peut aller encore plus loin dans cette voie, en utilisant l'éditeur de suites pour disposer simultanément de plusieurs marches aléatoires.



Petit problème : alors que ces suites sont, par nature, croissantes (et ne peuvent pas croitre de plus de 6 à chaque coup), les tables de valeurs (cf. ci-contre) font apparaître de curieux phénomènes …



n	u1	u2	u3	u4	u5
0.	0.	0.	0.	0.	0.
1.	3.	4.	1.	2.	5.
2.	4.	10.	7.	4.	8.
3.	7.	11.	11.	11.	9.
4.	14.	13.	16.	20.	13.
5.	21.	20.	14.	22.	19.
6.	19.	14.	15.	17.	18.
7.	29.	23.	28.	24.	31.

([4]) Cette calculatrice contient un logiciel de calcul formel, Derive

On pourrait essayer d'expliquer ces perturbations, ce qui n'est pas sans intérêt mathématique ([5]), mais nous éloigne du problème de départ (j'appele ce phénomène un mouvement de *distraction*). Puis, une fois réparé ce dysfonctionnement, on pourrait construire un nouveau programme de simulation, pour répondre à la première question du problème de façon « fréquentiste » : on réalise 1000 simulations, on calcule la fréquence de l'événement « tomber sur la case 100 », qui devrait donner une bonne estimation de P_{100}.

Ou alors on pourrait changer de méthode, en calculant les premières probabilités, ce que nous ferons plutôt ici :

- il est clair que P_0 est égal à 1 (il est certain que l'on commence le jeu) ;
- pour tomber sur la case 1, il est nécessaire d'obtenir le 1 ; d'où $P_1 = \frac{1}{6}$;
- pour tomber sur la case 2, deux possibilités : obtenir 2 avec un dé ou obtenir deux fois le 1 (avec donc deux lancers de dé) ; d'où $P_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{36}$;
- pour tomber sur la case 3, on peut faire 3, ou 1-2, ou 2-1, ou 1-1-1 ; d'où $P_3 = \frac{1}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{1}{6^3}$.

Si l'on veut pouvoir définir cette suite pour la calculatrice, il nous faut une formule générale.

Cela se traduit par un mouvement d'*abstraction*. On peut rechercher une loi de formation des résultats successifs :

- en observant les résultats déjà obtenus ;
- en réfléchissant au processus lui-même.

La première piste fait apparaître les puissances successives de 6 au dénominateur (puisqu'on lance un dé, deux dés ...) ; une observation attentive des numérateurs peut faire apparaître le « triangle de Pascal » : 1, puis 1-1, puis 1-2-1 ...

La deuxième piste permet de confirmer ce résultat : pour tomber sur la case n avec p lancers de dé, il faut partager n en p morceaux non vides. Cela revient à placer $(p-1)$ « cloisons » dans les $(n-1)$ espaces séparant les n cases. Cela fait bien C_{n-1}^{p-1} possibilités.

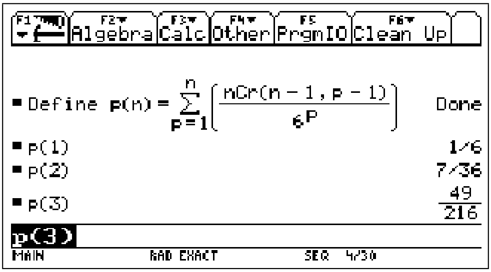
Le résultat serait donc, $\forall n > 0$:

([5]) Il semble que la calculatrice procède de façon récursive, en recalculant à l'étape n la somme de n lancers aléatoires. A l'étape n, on a donc un résultat compris entre n et $6n$, mais qui peut être inférieur au résultat de l'étape $n-1$.

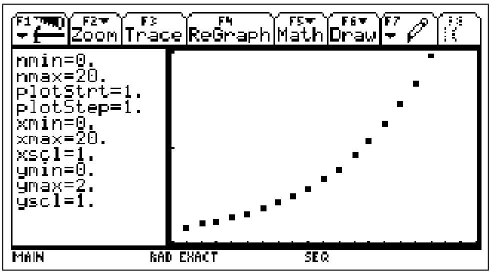
$$P_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{p-1}}{6^p}$$

On peut réfléchir à la validité de la formule au-delà des premiers rangs, ou, poussés par le mouvement de concrétisation, essayer de voir « ce que cela donne ».

Il est possible d'écrire cette suite pour le logiciel, de calculer les premiers termes pour contrôler la coïncidence avec les résultats déjà calculés.



Problème : si l'on calcule des termes un peu plus loin, ils dépassent assez vite 1, ce qui est gênant pour des probabilités : la croissance de la suite semble même de type exponentielle.



On peut donner une explication de ce phénomène d'une manière algébrique, en donnant à P_n une expression plus simple, à partir du « binôme de Newton » :

$$P_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{p-1}}{6^p} = \frac{1}{6} \sum_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1} \frac{1}{6^{p-1}} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \frac{1}{6^k} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

Le caractère exponentiel de la formule apparaît bien.

On peut aussi réfléchir au domaine de validité de la formule. La forme donnée à P_n suppose que l'on puisse obtenir la case n avec 1 dé, ou 2 dés …ou n dés. A partir de la case 7, cela ne s'applique plus, puisque le 7 ne peut pas être obtenu avec un seul dé ! Ainsi

$$P_7 = \sum_{p=2}^{7} \frac{C_6^{p-1}}{6^p}$$

De même à partir de la case 13, la case ne peut plus être obtenue avec 2 dés : la somme part de $p = 3$.

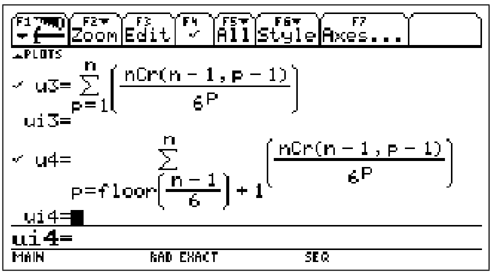
On peut essayer alors de « réparer » la formule. On est alors poussés par un mouvement *de fixation* : en environnement calculatrice, lorsque l'on travaille dans une application donnée, avec des commandes bien connues, on a souvent la tentation de poursuivre le travail dans le même cadre, le même registre. En changer est coûteux en temps et en énergie.

Poursuivre le travail sur cette formule peut se faire « au hasard », en modifiant telle ou telle partie de la formule, et en contrôlant que cela marche bien (on retrouverait le mouvement de distraction déjà évoqué), ou alors en essayant de mieux comprendre le phénomène, ce que j'appelle un mouvement d'*approfondissement*. C'est dans cette deuxième voie que nous nous engagerons ici ...

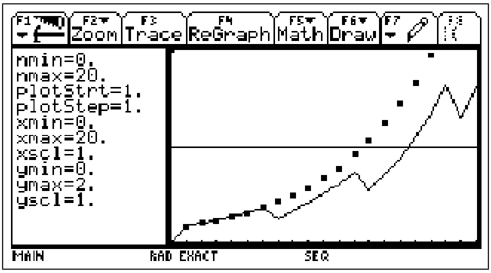
Plus généralement, la somme doit être effectuée à partir de la partie entière de $\frac{n-1}{6}+1$. D'où une expression générale de P_n qui paraît raisonnable :

$$P_n = \sum_{E\left(\frac{n-1}{6}\right)}^{n} \frac{C_{n-1}^{p-1}}{6^p}$$

Il est possible là encore d'écrire cette suite pour le logiciel. Le calcul des premiers termes semble raisonnable. Par contre, si l'on regarde un peu plus loin, cela ne l'est plus : les probabilités dépassent 1, on retrouve l'apparence exponentielle de la progression.



On a représenté ci-contre la première suite (avec des petits carrés) et la suite « arrangée » avec des points reliés. On observe bien la coïncidence des deux suites pour les six premiers termes, et le dépassement de la valeur 1 par les deux suites.



Un peu de réflexion : cela vient du fait que, pour $n = 9$ par exemple, si l'on partage le parcours en deux, il pourra très bien y avoir avec ce dénombrement une étape de 1 (ce qui est possible) et une étape de 8 (impossible avec un dé normalement constitué).

Notre nouvelle formule ne nous a fait gagner qu'une case ; elle est vraie pour $n = 7$, fausse ensuite. Remarquons que, mouvement de concrétisation oblige, il a été plus tentant pour nous de vérifier qu'elle « tournait bien » plutôt que de réfléchir abstraitement à son domaine de validité. Remarquons enfin que ce travail de recherche s'est développé dans plusieurs applications de la calculatrice : observations graphiques, numériques, algébriques, se sont conjuguées. C'est l'expression d'un mouvement de *diversification*, qui semble favorisé par ce type d'environnement.

Un deuxième abord du problème.

On pourrait tenter d'arranger encore la formule, dans une sorte d'acharnement thérapeutique, ou alors changer complètement de point de vue (ce qui nécessite une certaine expertise !) Puisque que l'on connaît les premiers résultats, ne pourrait-on pas trouver une formule de récurrence ?

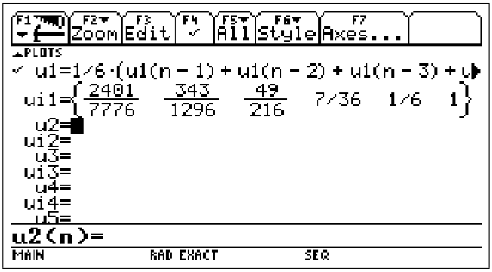
Supposons donc connus les résultats jusqu'au rang $n-1$, et calculons P_n.

Si l'on tombe sur la case n, où était-on juste avant ? Bien entendu, soit sur la case $n-1$, soit sur la case $n-2$, soit sur la case $n-3$, soit sur la case $n-4$, soit sur la case $n-5$, soit sur la case $n-6$. La formule dite « des probabilités totales » donne aussitôt :

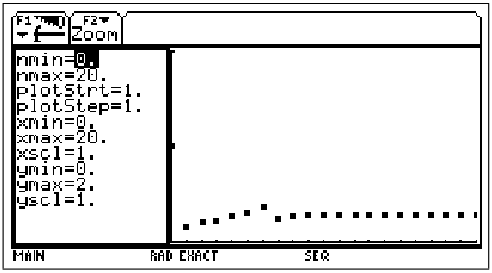
$$P_n = \frac{1}{6}\left(P_{n-1} + P_{n-2} + P_{n-3} + P_{n-4} + P_{n-5} + P_{n-6}\right)$$

On en déduit aussitôt, du fait du caractère isobarycentrique de la formule, que la suite est bornée par P_0 et P_5.

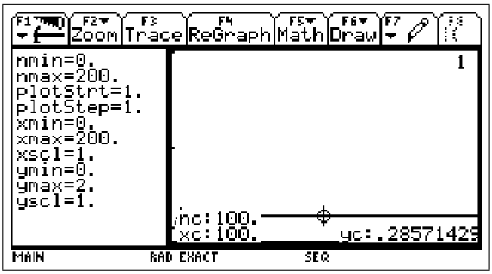
Petit coup d'œil sur la suite ainsi définie (on utilise ici l'éditeur de suites de la TI-92, qui fonctionne en calcul approché). La représentation graphique, avec la même fenêtre que pour les précédentes tentatives, fait enfin apparaître un phénomène raisonnable pour une probabilité.



La suite ne semble pas monotone, un certain nombre de « cassures » semblent apparaître (la première apparaît pour $n = 8$, c'est-à-dire à partir du moment où notre première formule perdait sa validité).



Le graphique suggère une convergence de la suite. Le dernier écran ci-contre indique en effet une « stabilisation » de la suite autour d'une valeur numérique, dont une valeur approchée serait 0,28571429.



On pourrait, mouvement de concrétisation oblige, poursuivre l'observation encore plus loin. L'expérience prouve que, à ce stade là, on se pose souvent la question : est-ce que le nombre trouvé n'est pas « connu », ou plutôt : ne pourrait-on pas inférer de cette valeur approchée la valeur exacte de la limite cherchée ?

Ou alors, par un nouveau mouvement d'abstraction, on peut se poser quelques questions théoriques :

- relatives à l'étude générale des suites : pourrait-on déterminer la limite éventuelle de la suite, nécessairement solution de l'équation $x = \frac{1}{6}(6x)$, *obtenue en « passant à la limite » la formule de récurrence ? Pas si simple ... Une suite récurrente de type isobarycentrique converge-t-elle nécessairement ? Sans doute ...*

- relatives au phénomène étudié : *on pourrait se souvenir qu'il s'agit du lancer d'un dé, et de l'avancement sur des cases numérotées.* Quelle *est la longueur « moyenne » d'un déplacement élémentaire ?* L'espérance *mathématique de la variable aléatoire égale au résultat du dé est* $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$. *Cela veut dire que, asymptotiquement, une case sur 3,5 cases est atteinte. Cela traduit que la probabilité qu'une case soit atteinte est égale à* $\frac{1}{3,5} = \frac{2}{7}$, *on retrouve la valeur approchée suggérée par la calculatrice.*

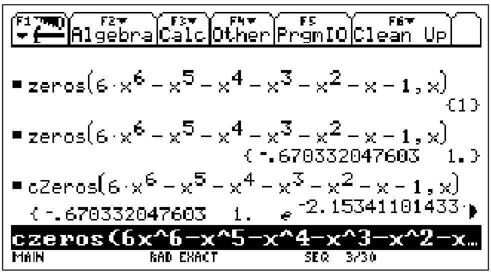
Un *dernier approfondissement.*

Nous voudrions *obtenir une expression générale de la suite, permettant le calcul direct de* P_n. Soit donc à étudier la récurrence linéaire :

$$P_n = \frac{1}{6}\left(P_{n-1} + P_{n-2} + P_{n-3} + P_{n-4} + P_{n-5} + P_{n-6}\right)$$

Il *est clair que, si deux suites vérifient cette récurrence linéaire, toute combinaison linéaire de ces deux suites la vérifie aussi.* Cette structure *d'espace vectoriel nous oriente vers la recherche d'une base de l'espace, ce que l'on fait usuellement à partir de suites géométriques.*

La raison x *de ces suites vérifie nécessairement :*
$x^6 = \frac{1}{6}\left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)$
Le logiciel nous donne une solution rationnelle égale à 1, une solution irrationnelle égale, *en valeur approchée à* -0,670332047603 *et quatre solutions complexes conjuguées deux à deux.*



Au *total, nous obtenons ainsi 6 racines, dont une, évidente, est égale exactement à 1 (les autres sont données par le logiciel en valeur approchée) :*

$q_1 = 1$; $\quad q_2 \approx -0,670332047603$;
$q_3 \approx 0,682822522296 \times e^{2,15341101433\ i}$; $\quad q_4 = \overline{q_3}$;
$q_5 \approx 0,730249966749 \times e^{1.15614777299\ i}$; $\quad q_6 = \overline{q_5}$;

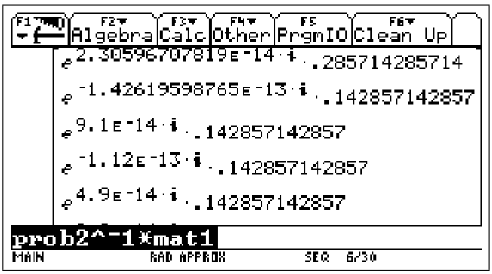
Deux remarques décisives pour notre problème :

- les 6 racines sont distinctes, nous disposons donc de 6 suites géométriques distinctes vérifiant la relation de récurrence et donc d'une base de notre espace ;
- les modules des 5 racines distinctes de 1 sont tous strictement inférieurs à 1 ; l'une des suites géométriques est donc stationnaire, les autres convergent vers 0.

Toute combinaison linéaire de ces six suites géométriques vérifie aussi la relation de récurrence : il nous suffit donc de chercher dans cet espace la suite qui coïncide avec la suite P_n sur les six premières valeurs, soit :

$$\begin{cases} a + b \cdot q_2^0 + c \cdot q_3^0 + d \cdot q_4^0 + e \cdot q_5^0 + f \cdot q_6^0 = P_0 = 1 \\ a + b \cdot q_2^1 + c \cdot q_3^1 + d \cdot q_4^1 + e \cdot q_5^1 + f \cdot q_6^1 = P_1 = \frac{1}{6} \\ a + b \cdot q_2^2 + c \cdot q_3^2 + d \cdot q_4^2 + e \cdot q_5^2 + f \cdot q_6^2 = P_2 = \frac{7}{36} \\ a + b \cdot q_2^3 + c \cdot q_3^3 + d \cdot q_4^3 + e \cdot q_5^3 + f \cdot q_6^3 = P_3 = \frac{49}{216} \\ a + b \cdot q_2^4 + c \cdot q_3^4 + d \cdot q_4^4 + e \cdot q_5^4 + f \cdot q_6^4 = P_4 = \frac{343}{1296} \\ a + b \cdot q_2^5 + c \cdot q_3^5 + d \cdot q_4^5 + e \cdot q_5^5 + f \cdot q_6^5 = P_5 = \frac{2401}{7776} \end{cases}$$

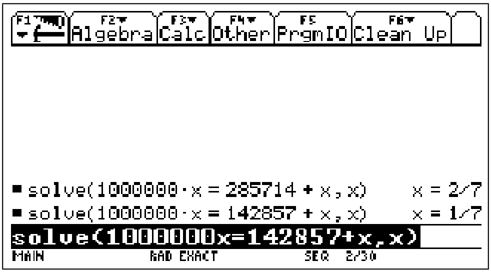
Ce système de type Vandermonde est de Cramer puisque les 6 racines du polynôme sont distinctes. L'utilisation de notre logiciel fournit des valeurs approchées pour a, b, c, d, e et f. Une première conjecture : les arguments très proches de 0 sont peut-être effectivement nuls.



Ce qui donnerait une expression approchée de P_n :

$$P_n \approx 0,285714285714 + 0.142857142857 \left(q_2^n + q_3^n + q_4^n + q_5^n + q_6^n\right)$$

Une deuxième conjecture (osée, mais qui ne relève pas du hasard : nous avons déjà rencontré $\frac{2}{7}$ dans le problème) : s'agirait-il de nombres rationnels ?



Deux résolutions d'équations simples (Cf. ci-contre !) indiquent que l'on aurait alors : $a = \frac{2}{7}, b = c = d = e = f = \frac{1}{7}$

Peut-on valider, ou réfuter cette conjecture ? En remplaçant a, b, c, d, e, f par leurs valeurs conjecturées dans le système linéaire, on aurait :

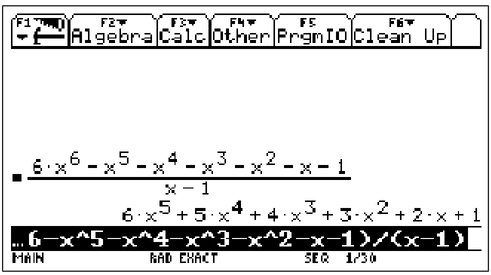
$$\begin{cases} 2+1+1+1+1+1 = 7 \\ 2+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6 = \frac{7}{6} \\ 2+q_2^2+q_3^2+q_4^2+q_5^2+q_6^2 = \frac{49}{36} \\ 2+q_2^3+q_3^3+q_4^3+q_5^3+q_6^3 = \frac{343}{216} \\ 2+q_2^4+q_3^4+q_4^4+q_5^4+q_6^4 = \frac{2401}{1296} \\ 2+q_2^5+q_3^5+q_4^5+q_5^5+q_6^5 = \frac{16807}{7776} \end{cases}$$

La première équation est bien vérifiée, les suivantes deviennent, après simplification :

$$\begin{cases} q_2+q_3+q_4+q_5+q_6 = -\frac{5}{6} \\ q_2^2+q_3^2+q_4^2+q_5^2+q_6^2 = -\frac{23}{36} \\ q_2^3+q_3^3+q_4^3+q_5^3+q_6^3 = -\frac{89}{216} \\ q_2^4+q_3^4+q_4^4+q_5^4+q_6^4 = -\frac{191}{1296} \\ q_2^5+q_3^5+q_4^5+q_5^5+q_6^5 = \frac{1255}{7776} \end{cases}$$

(la somme des carrés est négative, ce qui ne pose pas de problèmes particuliers : quatre des cinq racines ne sont pas réelles).

Or les nombres $q_2, \ldots, q_6$ sont racines d'une équation simple (Cf. ci-contre).
Les relations coefficients/racines nous permettent de contrôler sans peine que le système d'équations est bien vérifié, à partir des fonctions symétriques élémentaires des racines :



$$q_2+q_3+q_4+q_5+q_6 \;=\; \sigma_1 = -\frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} q_2^2+q_3^2+q_4^2+q_5^2+q_6^2 &= (q_2+q_3+q_4+q_5+q_6)^2 - 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant 6} q_iq_j \\ &= (\sigma_1)^2 - 2\sigma_2 \\ &= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 - 2\times\frac{4}{6} \\ &= -\frac{23}{36} \end{aligned}$$

etc.

Conclusion : nous avons bien : $a=\frac{2}{7}, b=c=d=e=f=\frac{1}{7}$

D'où l'expression de la suite :

$$P_n = \frac{2}{7} + \frac{1}{7}\left(q_2^n+q_3^n+q_4^n+q_5^n+q_6^n\right)$$

avec le module des suites géométriques strictement inférieur à 1.

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{2}{7}$$

ce qui est bien conforme à l'observation de la suite déjà réalisée.

On peut dès lors évaluer la vitesse de convergence de la suite ; il suffit d'évaluer l'écart entre P_n et sa limite. Il est donné par la somme de 5 suites géométriques. Le comportement asymptotique est contrôlé par la (ou les) suites dont la raison a le module le plus grand. Il suffit de se reporter aux valeurs des différentes raisons pour pouvoir conclure :

$$\left|P_n - \frac{2}{7}\right| \approx \frac{1}{7}\left(q_5^n+q_6^n\right)$$

<u>En conclusion provisoire :</u>

On ne travaille pas tout à fait de la même façon avec un logiciel de calcul, ou sans :

- le recours facile à l'observation numérique ou graphique peut stimuler l'investigation, les conjectures ;

- on observe une sorte de balancement entre des mouvements contraires : concrétisation et abstraction, fixation et diversification, distraction et approfondissement. Qui dit balancement ne dit pas forcément équilibre entre ces mouvements contraires. Les expériences que nous avons menées [12] montrent une dispersion des comportements des élèves entre des pôles extrêmes, par exemple entre un pôle « bricoleur », sensible aux mouvements de concrétisation (via la calculatrice, de fixation et de distraction, et un pôle « théorique », sensible aux mouvements d'abstraction, de diversification et d'approfondissement ;
- certains mécanismes de calcul s'installent dans un environnement de calcul numérique, par exemple le travail en calcul approché et la tentative d'inférer des valeurs approchées des valeurs exactes. Pour le mathématicien « professionnel », ceci se fait sous le contrôle de la théorie (ou au moins sous une certaine vigilance épistémologique). Pour l'apprenti mathématicien, il peut se créer là certaines idées du calcul infinitésimal dangereuses.

Cette reconnaissance de l'influence de l'outil de calcul sur le travail mathématique des élèves apparaît de plus en plus dans les recherches qui se mènent aujourd'hui [9].

3.2. Angles en progression géométrique.

Le deuxième problème a été proposé hier ([6]) par les organisateurs du Congrès : il s'agit de rechercher les triangles dont les angles sont mesurés, en degrés, par des nombres entiers en progression géométrique. Le traitement de ce problème dans un environnement calculatrice m'a paru être une bonne occasion d'illustrer les mouvements décrits ci-dessus.

Il s'agit donc de rechercher trois nombres entiers naturels inférieurs à 180, a, b et c, avec $c = 180 - a - b$, en progression géométrique, c'est-à-dire vérifiant

$$b^2 = a \times (180 - a - b) \qquad (1)$$

Ce problème est un problème de complexité réduite : on peut étudier tous les cas possibles (180 pour a, 180 pour b), et sélectionner les couples

([6]) Note de l'éditeur : Il s'agit d'un problème proposé le mardi 21 août 2001 aux congressistes de Charleroi ; la conférence de M. Trouche a lieu le lendemain mercredi 22 août.

solutions (informatiquement, un petit programme résout cela en quelques secondes). Cette méthode est un peu insatisfaisante pour le mathématicien : elle donne l'impression de marcher à l'aveuglette, sans approfondir le problème posé.

Méthode « paramétrique ».

Si je me laisse aller à un mouvement de concrétisation, je vais essayer de visualiser l'ensemble des solutions, ce qui va me conduire à changer le cadre du problème. L'équation 1 est l'équation d'une conique. La méthode de Gauss permet de mettre cette équation sous une forme facilement paramétrisable :

$$a^2 - 180a + ab + b^2 = 0$$

Puis

$$\left(a - 90 + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b + 60)^2 = 10800$$

Et enfin

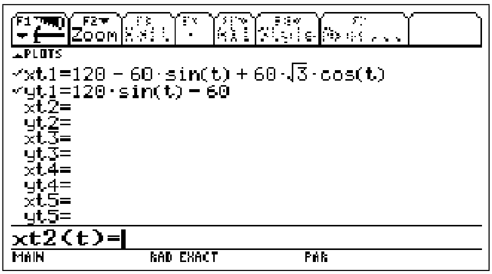
$$\frac{\left(a - 90 + \frac{b}{2}\right)^2}{\left(60\sqrt{3}\right)^2} + \frac{\left(b + 60\right)^2}{120^2} = 1$$

En posant

$$\frac{a - 90 + \frac{b}{2}}{60\sqrt{3}} = \cos t \quad \text{et} \quad \frac{b + 60}{120} = \sin t$$

on obtient l'équation paramétrique de la conique : c'est une ellipse.

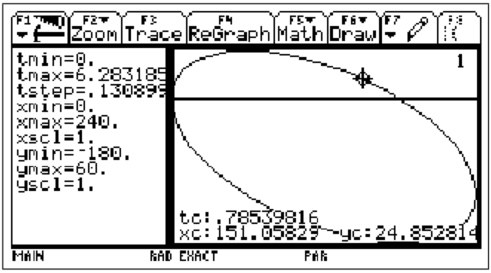
Le problème consiste dès lors à rechercher les points à coordonnées entières dans le premier quadrant. La recherche de ces points, aussi bien dans l'application graphique par la commande `TRACE` que dans un tableau de valeurs est infructueuse.



Le réglage de cette commande sur le paramètre t ne permet pas de détecter les points à coordonnées entières ([7]).

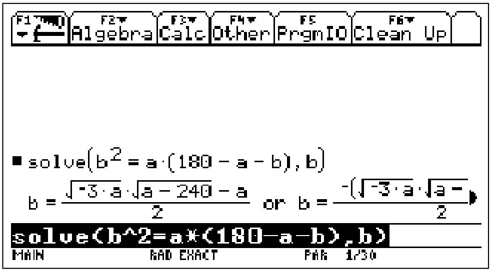
([7]) Evidemment, si nous disposions d'un écran plus grand, nous pourrions localiser les points proches de coordonnées entières en réalisant un quadrillage de l'écran en coordonnées entières : le produit de 641 par 6700417 !)

Cette vue du problème donne cependant des informations utiles : b est nécessairement inférieur à 60, a est inférieur ou égal à 180 (ce que nous savions déjà).

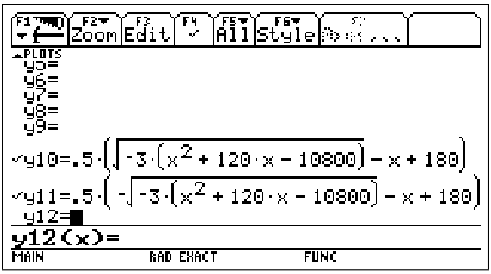


Méthode « résolution d'équation ».

Revenons à l'équation 1. La calculatrice permet de la résoudre (il faut faire le choix de l'inconnue : le choix de calculer a en fonction de b est plus pertinent que le choix contraire, du fait qu'il y a moins de valeurs possibles pour b que pour a).

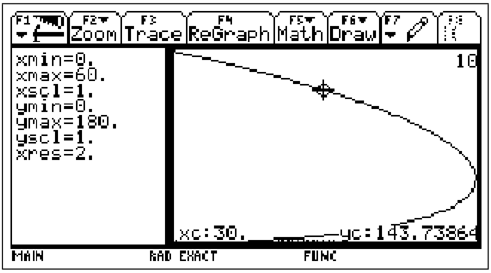


Les deux classes de solutions peuvent être entrées dans l'éditeur de fonctions.

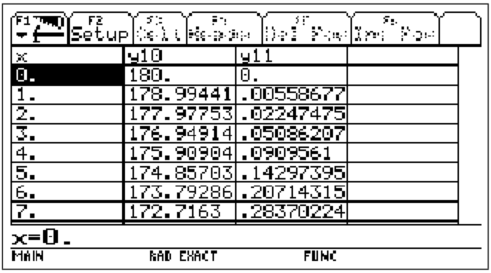


tous les points de la courbe « très proches » de nœuds du quadrillage seraient des candidats solutions à examiner de plus près par le calcul. La petitesse de l'écran de la calculatrice rend cette méthode assez difficile à mettre en œuvre (sauf à examiner la courbe petit tronçon par petit tronçon…)

L'utilisation de l'application graphique montre la même ellipse, mais sous un autre angle : n'oublions pas que nous avons exprimé *a* en fonction de *b*, c'est-à-dire, par rapport à la courbe paramétrée, *x* en fonction de *y* !



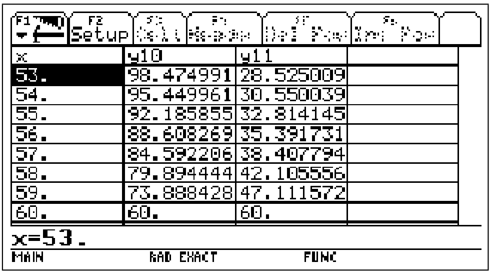
L'utilisation d'une table de valeurs est cependant plus pertinente que l'utilisation de l'application graphique : le réglage de la table permet en effet de choisir pour *x* les valeurs entières successives entre 0 et 60.



x	y10	y11
0.	180.	0.
1.	178.99441	.00558677
2.	177.97753	.02247475
3.	176.94914	.05086207
4.	175.90904	.0909561
5.	174.85703	.14297395
6.	173.79286	.20714315
7.	172.7163	.28370224

x=0.

La complexité du problème est donc nettement réduite par rapport à la situation de départ : au lieu de tester 180×180 valeurs, l'on a que 60 tests à faire. L'analyse des résultats indique qu'il n'y a que les triplets triviaux solutions : (180, 0, 0) et (60, 60, 60).



x	y10	y11
53.	98.474991	28.525009
54.	95.449961	30.550039
55.	92.185855	32.814145
56.	88.608269	35.391731
57.	84.592206	38.407794
58.	79.894444	42.105556
59.	73.888428	47.111572
60.	60.	60.

x=53.

Cette analyse doit être conduite avec une grande vigilance : les valeurs données par la calculatrice sont approchées, une valeur de 37,9999 pourrait très bien se révéler être en fait entière !

Fin du problème donc. La disposition d'une calculatrice symbolique nous a permis de le considérer sous des angles différents, de changer de cadre (les cadres graphiques, numériques, et algébriques ont été mis à contribution). Il a fallu concilier des images apparamment contradictoires (les deux points de vue sur l'ellipse), reformuler le problème, reconnaître des objets familiers (une équation du second degré à une inconnue, ce qui a nécessité le choix d'un

42 *La démonstration en est très malaisée et je vous avoue que je n'ai pu*

paramètre). On retrouve les préoccupations des rédacteurs des programmes sur les « situations-problèmes »(Cf. 1.a.).

Cette mise en œuvre a été possible grâce à l'expertise du professeur de mathématique, qui a privilégié plutôt des mouvements de *diversification* et d'*approfondissement*. Une question demeure : le mouvement de *concrétisation*, qui a poussé à obtenir une représentation visible du problème sous la forme d'une courbe, ne nous a-t-il pas détourné d'une autre solution, arithmétique, qui n'aurait pas nécessité l'utilisation d'une calculatrice ? Je laisse la question au lecteur...

Notons enfin que le mouvement d'approfondissement pourrait suggérer d'éventuels prolongements de ce problème : que se passerait-il si, au lieu d'entiers, on cherchait des nombres rationnels en progression géométrique ? Que se passerait-il si l'on choisissait de mesurer les angles en radians ? Le passage des entiers aux rationnels modifie fortement la contribution de la calculatrice (il ne s'agirait plus alors d'examiner un nombre fini de cas...)

4. Eléments pour l'organisation du temps et de l'espace de l'étude.

Les problèmes relatifs à l'intégration des instruments ne sont pas propres aux mathématiques. P. Rabardel ([10] et in [1]) distingue l'*outil technique*, qui est donné, et l'*instrument*, qui est construit par l'utilisateur. Cette genèse instrumentale relève d'un processus individuel, propre à l'utilisateur, mais aussi d'un processus collectif, lié au cadre social du travail. Nous avons vu par exemple, à travers l'exemple des deux classes (voir 2.) combien le contexte institutionnel peut influer sur le comportement des élèves. Nous avons aussi montré ([12]) comment les contraintes qu'une calculatrice symbolique impose à l'élève peuvent influer sur les connaissances construites.

La prise en compte par le professeur des outils des élèves est donc décisive. Cette intégration requiert une organisation spécifique de l'espace et du temps de travail. Nous avons montré par exemple ([3]) l'importance de la socialisation du travail instrumenté des élèves à partir d'un dispositif de rétroprojection. (Cf. figure 5) D'autres types d'organisation sont aussi sans doute utiles (en particulier des dispositifs de TP, des systèmes d'évaluation et d'auto-évaluation du travail instrumenté des élèves.

Ils reposent sur des énoncés particuliers, nécessitant l'aller-retour entre le travail avec la calculatrice et le travail papier-crayon, et sur une autre organisation de l'étude, qui laisse du temps au temps ([8]).

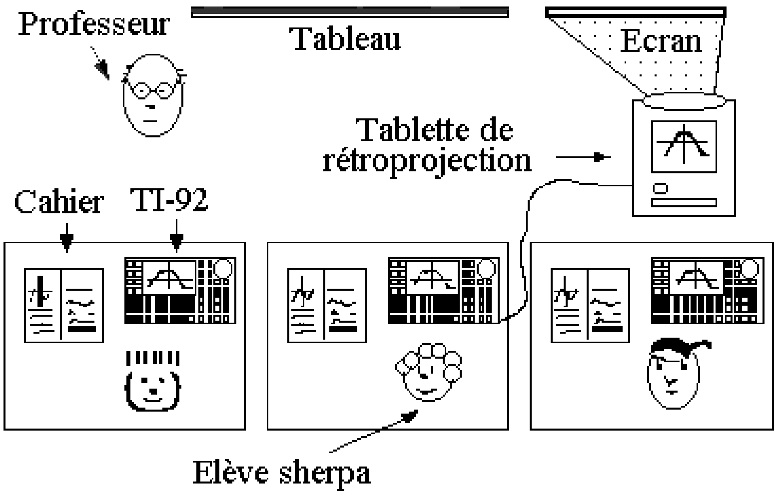


Figure 5. *Une organisation particulière de la classe en environnement calculatrice.*

Mettre au point un dispositif de travail n'est pas chose facile : il ne s'agit pas seulement de construire une architecture particulière, il faut encore préciser ses modes d'exploitation, en relation avec des objectifs pédagogiques. Par exemple, pour le dispositif de l'*élève-sherpa* (Cf. figure 5), il est possible de choisir cet élève au hasard, ou de choisir un élève en difficulté, il est possible de laisser cette responsabilité au même élève pendant toute l'heure, ou de changer à chaque exercice, il est possible pour le maître de guider son pas sur celui de cet élève, ou au contraire de précipiter les choses, etc. L'intégration d'outils complexes augmente le nombre de variables didactiques sur lesquelles le maître va pouvoir (devoir ?) agir, augmente donc la complexité de la tâche du professeur et sa gestion du contrat didactique.

Une récente enquête (Cf. figure 6) montre la faiblesse de l'intégration des calculatrices dans les classes de lycée en France.

([8]) Des recherches récentes ([5], [8]) ont donné quelques éléments de réponse pour la construction de nouvelles organisations de travail. On trouvera en particulier une synthèse de travaux sur les calculatrices symboliques dans [6], à paraître.

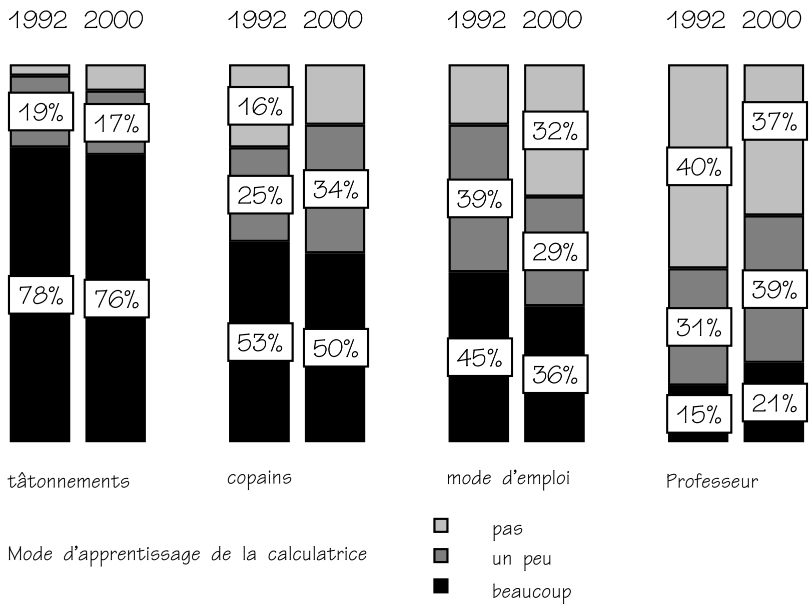


Figure 6. Comment avez-vous appris à vous servir de votre calculatrice ?

Comparaison des résultats de deux enquêtes, en 1992 et 2000 (IREM de Montpellier, 2001)

C'est un indice de la difficulté (mathématique, didactique et psychologique) de cette intégration. En prendre la mesure supposerait, pour l'institution scolaire, de ne pas se contenter de prescriptions formelles, mais de modifier en profondeur les dispositifs de formation initiale et continue des professeurs de mathématiques ([9]), et, sans doute (mais cela n'est pas propre aux mathématiques), leurs conditions de travail.

Bibliographie

[1] BAILLEUL Marc (coord. par), Les instruments dans la pratique et l'enseignement des mathématiques, in *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*, 2000, Caen, IUFM.

([9]) Par exemple, dans l'académie de Montpellier, l'IREM a été à l'initiative de la mise en place du SFODEM (dispositif de suivi de formation à distance pour les enseignants de mathématiques), qui permet un accompagnement continu de l'intégration des nouvelles technologies dans la classe.

[2] BALACHEFF Nicolas, Didactique et intelligence artificielle, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1994, vol 14, n° 1/2, pp. 9-42.

[3] BERNARD René, FAURE Christian, NOGUÈS Maryse, NOUAZÉ Yvon et TROUCHE Luc, *Pour une prise en compte des calculatrices symboliques en lycée*, 1998, IREM, Université Montpellier 2.

[4] BROUSSEAU Guy, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherche en didactique des mathématiques*, 1986, 7(2), pp. 33-115.

[5] GUIN Dominique (coord. par), Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques, *Actes du colloque francophone européen*, 1999, IREM, Université Montpellier 2.

[6] GUIN Dominique et TROUCHE Luc (coord. par), *Calculatrices symboliques : faire d'un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*, à paraître, La Pensée Sauvage Editions, Grenoble.

[7] HERSHKOWITZ Rina et KIERAN Carolyn, *Algorithmic and meaningful ways of joining together representatives within same mathematical activity : an experience with graphing calculators*, 2001, PME 25, pp. 95-107, Freudenthal Institut, Pays-Bas.

[8] LAGRANGE Jean-baptiste et LENNE Dominique (coord. par), *Calcul formel et apprentissage des mathématiques*, 2001, INRP.

[9] LAGRANGE Jean-baptiste, ARTIGUE Michèle, LABORDE Colette et TROUCHE Luc, *A meta study on IC technologies in Education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration into the teaching of mathematics*, 2001, PME 25, pp. 111-122, Freudenthal Institut, Pays-Bas.

[10] RABARDEL Pierre, *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris, 1995.

[11] TROUCHE Luc & al., *Faire des mathématiques dans un environnement de calculatrices symboliques, 38 variations sur un thème imposé*, 1998, IREM, Université Montpellier 2.

[12] TROUCHE Luc, La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques, *Educational Studies in Mathematics*, 2000, Vol. 41, n° 2, pp. 239-264. Kluwer Academic Publishers.

Mathématique et Pédagogie n°135, 47–59, 2002 47

Géométrie élémentaire.

P. MARLIER, *ancien professeur à l'Ecole Normale des Rivageois, Liège.*

1. Introduction.

1.1. Les idées. (1)

En Communauté Wallonie-Bruxelles, la notion de « compétence » est une pièce essentielle de l'organisation des études : compétences terminales, transversales ou disciplinaires, pour la fin du secondaire ; pour la fin du primaire et le début du secondaire, on retient plutôt la notion de compétences-socles. Ce sont les capacités qu'on voudrait voir acquises en principe par la totalité des élèves. Pour y arriver la méthode miracle serait la *pédagogie différenciée* selon laquelle le professeur disposerait d'une telle panoplie d'approches des socles à mettre en place que tout gamin (2) trouverait un chemin adapté à ses capacités individuelles, à ses centres d'intérêt, à son milieu culturel, ...

S'il est permis d'ironiser sur l'aspect irréaliste de contraintes méthodologiques qu'on veut imposer à tout le monde enseignant, avec, semblerait-il parfois, une obligation de résultats, il n'est pas interdit de penser qu'après tout, nous avons tous rêvé (3) que nous allions tout expliquer tellement bien que chaque enfant en tirerait profit et arriverait à maîtriser les choses que la société pense utile de proposer à ses apprentissages.

Ce qui suit est donc écrit dans une optique positive : plutôt que de penser que l'organisation de l'école m'empêche de réaliser ce que mon extraordinaire génie accomplirait s'il avait les mains libres et s'il disposait

Adresse de l'auteur: Pierre MARLIER, rue de Plainevaux, 185/15, 4100 - Seraing
e-mail : pierremarlier@swing.be

(1) A des retouches près, ceci est le texte d'une communication faite à notre congrès de Seraing, puis au Congrès 2000 de l'APMEP à Nice. Merci à Michèle Pécal, organisatrice de ce congrès, pour l'autorisation de le publier dans *Mathématique et Pédagogie* alors qu'il se trouve déjà dans les actes du congrès (sur CD).

(2) Le mot est employé ici dans le sens qu'il a habituellement en France dans le milieu des écoles où il désigne les élèves, garçons ou filles, qui ne sont pas encore des adolescents. C'est peut-être un équivalent de ce qu'on appelait précédemment les « potaches ».

(3) C'est un pensionné qui écrit ceci.

des moyens adéquats, on va essayer de comprendre ce que le pouvoir nous demande de faire, et d'imaginer des moyens de le mettre en œuvre, en supposant qu'il n'y a pas nécessairement contradiction entre mon idéal et celui de ceux qui ont la responsabilité du système scolaire.

Pour ce qui est de la différenciation des approches, l'idée de base est que l'intelligence humaine s'exprime de manière multiforme mais que très généralement, l'école n'en privilégie que certaines modalités. La conviction sous-jacente est que l'écrit ou la parole ne sont pas les seuls modes d'expression de l'intelligence : celle-ci est présente aussi dans le travail des doigts, pas seulement des doigts qui écrivent. On imagine donc de rendre droit de cité à la manipulation comme voie d'accès au savoir, même s'il reste vrai que dans notre culture, c'est le discours surtout écrit qui en est le vecteur, et que l'objectif de l'école est d'introduire les jeunes à la culture de leur société.

Ceci amène à réfléchir sur les supports de notre enseignement. En géométrie, par exemple, comment espérer que les enfants raisonnent de manière intéressante (pour eux tout autant que de notre point de vue) sur une figure si mal faite qu'il est malaisé d'y voir quoi que ce soit ? Or faire un dessin géométrique soigné est une réelle difficulté pour certains. On va donc voir s'il existe des façons accessibles de la surmonter.

Et que dire du discours qui accompagne de tels supports graphiques ? Il est souvent bien opaque pour les non-initiés. Les « démonstrations sans paroles » ([4]) qui sont dans un premier temps simplement proposées aux élèves mais qu'on leur demande d'expliquer, sont un autre exemple d'approche différenciée telle que proposée ici.

« Socle » est un mot-image ; il convient d'en préciser l'acception. Dans cette réflexion, on lui donne deux sens intimement liés. En premier lieu c'est, comme on l'a dit, l'ensemble des connaissances et savoir-faire qu'on estime utiles voire nécessaires pour qu'un individu ne soit pas un handicapé culturel dans le monde dans lequel il vit ; ceci implique bien évidemment qu'en principe ces compétences soient maîtrisées par tout le monde. En pratique on dira, compte tenu de l'erreur humaine et de beaucoup d'autres éléments de contexte, que l'objectif est qu'à des épreuves d'évaluation portant sur ces socles, 80 à 90% de la population réussisse des scores de 80 à 90% du total possible. Il n'est pas sûr qu'on dispose actuellement de tests permettant une telle évaluation.

([4]) Vous trouverez en annexe à la page 59, un exemple de telle démonstration.

L'autre sens du mot est davantage lié à l'image. Une compétence-socle est une compétence sur laquelle on peut bâtir autre chose : une vision approfondie de la notion exposée, d'autres compétences, d'autres savoir-faire…Ceci signifie que nous voulons nous attaquer au défi de proposer une méthode d'enseignement qui à la fois assure aux plus faibles ([5]) l'accès aux notions de base et offre aux autres des prolongements intéressants. Evidemment, ceci suppose qu'il ne soit pas jugé indécent de donner aux plus forts un os à ronger intéressant et instructif pendant qu'on s'occupe de ceux qui ont plus de difficulté. Dans une optique de pédagogie différenciée, est-il tellement inconcevable que les élèves ne fassent pas tous la même chose à tout moment ?

1.2. Le matériel.

La planche à clous « de Marlier » a trois caractéristiques : elle n'a pas de clous ; ce n'est pas nécessairement une planche ; elle n'est pas « de Marlier ».

L'idée de base est d'utiliser un géoplan mais, pour des raisons qu'on verra plus loin, on a remplacé les clous par des trous qu'on a forés sur les sommets d'un quadrillage dessiné (ou collé) sur la planche. Le diamètre des trous est tel qu'on peut assez facilement y mettre ou en retirer des clous dûment calibrés de manière qu'il tiennent assez quand on les y met mais qu'on puisse les retirer sans pince et sans se meurtrir les doigts. Il n'est pas indispensable que ce soit une planche : une plaque de frigolite (polystyrène expansé) prise en sandwich entre deux cartons sur lesquels sont collés des feuilles où sont dessinés le quadrillage peut fort bien faire l'affaire. Cela a même l'avantage d'être très léger et facile à manipuler. De plus on n'a pas à s'inquiéter des calibres respectifs des trous et des clous : les trous sont créés en enfonçant les clous. L'inconvénient est qu'un tel outil ne résistera sans doute pas très bien à un usage intensif. Mais comme ce matériel est assez facile à renouveler… Ajoutons dans le même esprit qu'il est opportun (et facile) de coller sur celle planche une feuille de papier reproduisant le quadrillage. Quand la feuille est salie par l'usage ou

([5]) Le mot « faible » provoque de la répulsion chez certains. Je leur suggère de remplacer partout dans le texte ce mot par « mal-apprenant » ou « mal-comprenant ». Je tiens à signaler que tout au long de ma carrière j'ai eu dans mes attributions des classes « faibles » (tant par le nombre d'heures que par les capacités ou le goût des élèves, selon les cas) avec qui très généralement j'ai eu des rapports amicaux et dont je garde le meilleur souvenir.

par des ajouts qu'on y a fait, on revient facilement au point de départ en renouvelant la feuille.

D'après des informations recueillies à source fiable, cette idée d'un support où n'apparaissent que les points qu'on veut mettre en évidence n'est pas nouvelle. On rencontre parfois, au gré de promenades champêtres, des choses qu'on prend pour des sources et qui ne sont que de modestes résurgences. Je reconnais volontiers à d'autres qui l'ont fait avant moi et dont je ne me souviens pas, le mérite de ce qu'inconsciemment je leur dois et qui a opportunément refait surface dans mon esprit.

1.3. Encore quelques principes.

1. Prendre le géoplan comme outil privilégié de l'apprentissage de la géométrie ne relève pas seulement de considérations pratiques ou d'opportunités pédagogiques. La géométrie euclidienne traditionnelle se fait en principe sur une feuille blanche et n'utilise comme outils que la règle et le compas. Le géoplan est un lieu **quadrillé**. Son équivalent-papier est la feuille **quadrillée... dont on utilise le quadrillage** pour des constructions géométriques, pour des mesures de longueurs ou d'aires, pour la construction de parallèles ou de perpendiculaires. Habituellement, par une sorte de purisme euclidien, on ne le fait pas, et les élèves utilisent leur papier quadrillé comme si le quadrillage n'existait pas : s'ils tracent un cercle, ils ne songent pas par exemple à placer la pointe sèche du compas sur un sommet du quadrillage, si le cercle a 5 cm de rayon, on mesure cette longueur sur la règle graduée sans songer à repérer 10 carrés de la feuille,... Le parti pris de l'approche ici proposée est d'**utiliser systématiquement le quadrillage**. Démission condamnable d'enseignants qui au nom de la perspective « socles » choisissent le nivellement par le bas? Pas si sûr. En filigrane, parfois fort apparent ([6]) , de cette façon de faire, on peut clairement apercevoir l'approche cartésienne de la géométrie, ce qui, si on mène bien le projet, ne lui enlève pas son aspect synthétique qui reste essentiel.

([6]) En particulier quand on abordera le problème de la transcription au cahier de l'élève de l'approche plus manipulatoire avec le géoplan. On n'imagine pas en effet qu'un enseignement digne de ce nom s'évapore avec le coup de sonnette marquant la fin de l'heure de cours.

2. On peut facilement imaginer des pavages ([7]) du plan autres que quadrangulaires : rectangulaires, par des triangles isocèles ou équilatéraux,... On peut en particulier se demander si (et pourquoi) sur un pavage en triangles équilatéraux on peut faire apparaître des carrés ou si (et pourquoi) sur un quadrillage on peut ou non faire apparaître des triangles équilatéraux ; on peut aussi chercher parmi les propriétés ou constructions possibles mises en évidence sur le quadrillage quelles sont celles qui sont conservées si les pavés sont des rectangles ou des parallélogrammes. Si, comme on l'a dit, l'idée de prolongement ou de dépassement du niveau de base n'est pas à exclure, on ne manquera par de remarquer que les dépassements ici énoncés sont d'un niveau beaucoup plus élevé que le niveau de base. On ne les recommande donc guère, même avec de bons élèves ; on en proposera de plus adéquats au cours de l'exposé.
3. Cette approche n'est pas exclusive, bien au contraire. Bien sûr que les élèves doivent continuer de savoir dessiner aux instruments (et donc qu'ils doivent l'apprendre) ; on proposera d'ailleurs des moyens de transposer au cahier des figures faites au géoplan. Par ailleurs, des logiciels comme CABRI-géomètre, avec leurs figures « qui bougent » ont inspiré l'idée de faire quelque chose qui y ressemble quand on ne dispose pas d'ordinateur ou quand on veut que les élèves manipulent. Il n'y a donc certainement aucune incompatibilité entre ces logiciels et ce qui est proposé ici. En outre, comme on l'a déjà dit, dans une optique de pédagogie différenciée la multiplicité des approches n'est pas un défaut.

2. Premières situations.

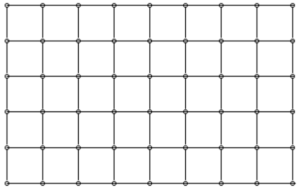
2.1. Aires et périmètres de rectangles.

L'outil qui est ma référence actuelle se présente comme dans la figure de la page 52. Une première activité à proposer aux élèves est de leur

([7]) On aura compris que le choix de vocabulaire fait ici est de réserver le mot de « quadrillage » à la désignation d'un pavage par des carrés (en d'autres termes à une situation sous-jacente d'axes orthonormés). Certains pensent qu'il n'y a pas de difficulté à parler de *quadrillage rectangulaire* ou *triangulaire* ou...Le choix fait ici se base d'une part sur le fait que le latin « quadratus » signifie « carré » et d'autre part sur le fait qu'il est intéressant, dans une perspective « socles » d'avoir un mot privilégié pour la situation de référence (axes orthonormés).

demander combien il y a de lignes de carrés, combien de colonnes de carrés, combien de carrés en tout, combien de lignes de trous, combien de colonnes de trous,. . .

Si on laisse à tous les élèves le temps et l'opportunité d'exprimer leur recherche, on constatera certainement que les raisonnements « Il y a cinq lignes de huit carrés donc en tout 40 carrés » ou « Il y a 6 lignes de 9 trous, donc en tout 54 trous » ne sont pas évidents pour tout le monde.



Mais n'est-ce pas une bonne situation-problème que de proposer un dénombrement où il y a risque de « s'emmêler les pinceaux » mais pour lequel une stratégie de comptage limité (avec risque d'erreur assez réduit) et petite opération arithmétique est bien plus performante.

Autres questions du même tonneau :

1. Un géoplan comportant cinq lignes de sept clous est-il identique à un géoplan ayant quatre lignes de six carrés ?
2. Quelle est l'aire (exprimée en « p », « p » comme « pavés ») d'un rectangle ayant six lignes de quatre trous ? Quelle est en son périmètre (exprimé en « c », « c » comme « côté d'un pavé ») ? Il est bien entendu opportun de faire apparaître ce rectangle sur le géoplan.
3. Sur notre géoplan-type, quelle est l'aire d'une ligne de huit carrés ? quel en est le périmètre ? Et si on supprime un (deux, trois) carré(s) à une des extrémités ?
4. Un pré rectangulaire mesure 70 *m* de long et 40 *m* de large. On l'entoure d'une clôture mais en laissant une ouverture de 20 *m* de large sur une des longueurs. On place un piquet de clôture tous les 10 mètres (mais pas au milieu de la « porte »). Combien faut-il de piquets ? Quelle longueur de fil est nécessaire si on met un fil en haut des piquets et un à mi-hauteur. Faire un modèle réduit de ce pré sur le géoplan.
5. Même exercice que le précédent, mais les dimensions du pré sont 49 *m* pour la longueur et 35 *m* pour la largeur.

Un avantage de la méthode ici proposée, c'est que l'élève va construire lui-même le modèle réduit et pas seulement regarder la figure que le maître a dessinée au tableau. Il peut toucher les objets dont on parle. Il plante les clous dans la planche comme on plante les piquets autour du pré ; il peut compter les « piquets » un à un en les touchant avec son doigt, de même que les intervalles d'élastique.

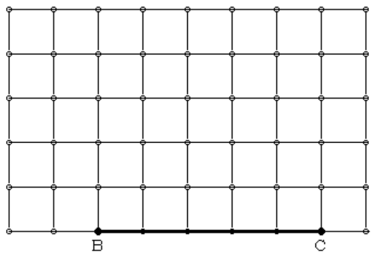
Du point de vue de la pédagogie différenciée, on peut fort bien imaginer que les élèves les plus forts fassent les exercices 4 et 5, et même d'autres qu'on leur inventera. De même, il est fort pensable que dans la construction du « modèle réduit » sur le géoplan, on laisse le choix de l'échelle aux élèves comme supposé dans la manière de formuler l'énoncé, mais qu'on aide les moins inventifs à choisir la bonne échelle.

On pourra aussi laisser ceux qui n'ont pas besoin de ce support intuitif qu'est le géoplan passer directement à la phase dessinée dans le cahier tandis que les autres se livreront à un fructueux exercice *d'essai-erreur* que le géoplan permet fort bien.

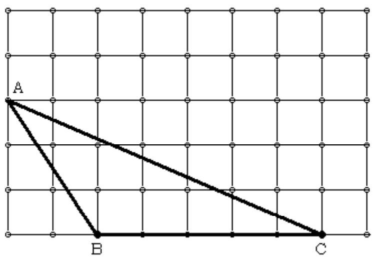
2.2. Les triangles et leurs angles.

Sur le géoplan, on a placé deux clous et un élastique pour déterminer un segment [*BC*].

On demande aux élèves de placer un point A et les élastiques appropriés pour que le triangle *ABC* ait deux angles obtus, ou un angle obtus et un angle droit, ou deux angles droits. C'est l'occasion de (se) rappeler que la somme des angles d'un triangle vaut toujours deux droits.



On demande ensuite de faire apparaître un triangle ayant un angle obtus. Il est probable que l'angle obtus demandé sera en *B* ou en *C*, comme par exemple sur la figure ci-contre.

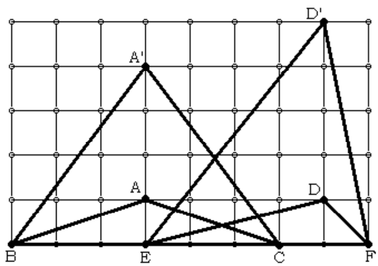


Expérience faite avec quelques élèves faibles, la question apparaît plus difficile si on demande que l'angle obtus soit en *A*. Et c'est bien compréhensible. Dans le premier cas, l'élève place en premier lieu les éléments qu'on lui donne ; dans celui-ci il doit d'abord imaginer ce que sera la figure terminée avant de placer le clou *A*. Mais ceci peut bien évidemment se résoudre par tâtonnements par la méthode *essai-erreur*. Ces tâtonnements seront l'occasion de découvrir qu'un triangle a toujours au moins deux angles aigus. D'où la classification :

- Un triangle qui a deux angles aigus et le troisième obtus est dit obtusangle ;
- Un triangle qui a deux angles aigus et le troisième droit est dit rectangle ;
- Un triangle qui a deux angles aigus et le troisième également aigu est dit acutangle.

Cette manière de formuler la classification est évidemment bien plus satisfaisante que la formulation habituelle selon laquelle un triangle obtusangle a **un** angle obtus, un triangle rectangle a **un** angle droit, et un triangle acutangle a **trois** angles aigus.

Supposons maintenant que l'élève, avec ou sans l'aide du maître, ait trouvé le triangle ABC dont l'angle $\hat{A}$ est manifestement obtus. On lui demande alors de prendre en considération le triangle $A'BC$ où l'angle $\widehat{A'}$ est manifestement aigu.



Si on tire sur l'élastique pour passer du clou A au clou A', le triangle s'est déformé pour passer de manière continue du caractère obtusangle au caractère acutangle : l'angle $\hat{A}$ a progressivement diminué d'amplitude jusqu'à devenir aigu en $\widehat{A'}$. Il s'est donc trouvé une position intermédiaire où il était droit. Trouver ce point. Expliquer qu'il s'agit bien d'un triangle rectangle.

Même problème si on passe du triangle obtusangle DEF au triangle acutangle $D'EF$. Trouver ce point. Expliquer qu'il s'agit bien d'un triangle rectangle.

Dans le premier cas, le point recherché est sur le quadrillage ; il se trouve une unité sous A' et le triangle est rectangle et isocèle. La justification est assez simple puisque les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont des diagonales des carrés qu'ils traversent ; les angles qu'ils forment avec les horizontales ou les verticales sont des angles de 45°. Quand on dit que c'est assez simple, on ne dit évidemment pas que cela apparaîtra immédiatement à tous les élèves, mais que normalement, après quelques tâtonnements, quelques *essais-erreurs*, la vérité du fait sera acquise pour tout le monde.

Dans le deuxième cas, le point recherché se trouve aussi sur le quadrillage, mais la justification en est un peu plus difficile. On peut la formuler à ce moment, ou, comme fait dans ces feuilles, la reporter à un peu plus loin.

Dans les deux cas, il suffit de déplacer les points A, A' ou D, D' d'un carré vers la gauche pour que le point recherché existe toujours bien mais ne soit plus un point du quadrillage. Il va de soi qu'on commence à quitter ici le niveau des notions de base à maîtriser par tout le monde.

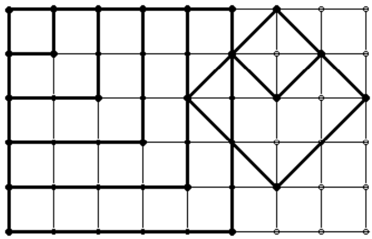
Qui ne voit l'intérêt du recours à des figures « qui bougent » ? S'il se trouve quelques élèves plus forts et qui en outre savent utiliser CABRI, pourquoi ne pas leur poser en outre la question de savoir où se trouvent tous les points A (ou tous les points D) tels que le triangle ABC (ou DEF) est rectangle. Ici, on est assurément bien au-dessus des socles, mais pour ceux qui en sont capables, il prolonge de manière assez naturelle les premières recherches. Est-ce un péché pédagogique que d'ouvrir des perspectives ?

3. Parallélisme et perpendicularité.

Dans cette séquence, on va exploiter systématiquement la notion de perpendicularité qu'on vient de rencontrer une première fois et la notion de parallélisme dont elle est indissociable. Nos pré-requis sont que les élèves ont au moins une notion élémentaire de ce qu'est un carré, un rectangle, un parallélogramme, … Cette requête n'est pas démesurée puisque depuis l'âge d'un an ou deux les enfants ont eu comme jouet un cylindre dans lequel étaient stockés des cylindres et des prismes, à base carrée ou rectangulaire ou … , et un couvercle percé de trous ayant les formes adéquates pour que les solides puissent y passer. Souvent, ils ont appris dès l'école maternelle à nommer ces différentes formes de trous. De toute manière, ces notions font partie du vocabulaire de base : si elles ne sont pas maîtrisées au moment où on aborde ce qui suit, ce peut être le bon moment de les apprendre.

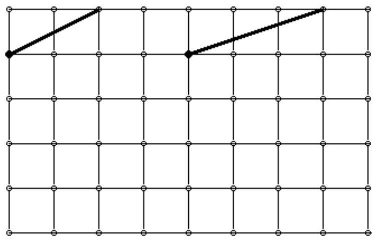
Sur notre géoplan habituel, combien peut-on dessiner de carrés différents (non isométriques) ?

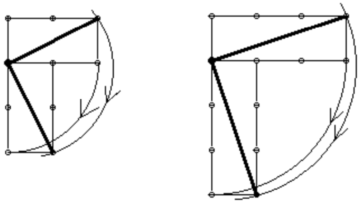
Il est probable que beaucoup d'élèves trouveront les cinq premiers, qui ont leurs côtés sur les lignes du quadrillage, encore qu'il ne soit pas sûr qu'on les ait du premier coup dans la disposition rationnelle où ils se trouvent sur la figure ci-contre ; mais c'est aussi une chose à apprendre que de travailler systématiquement pour arriver à un dénombrement complet.



En fonction de ce qui aura été fait avant, la découverte des deux autres sera facile ou un peu plus laborieuse. Il peut être raisonnable d'estimer que, selon l'âge des enfants, la limite de la maîtrise minimale se situe ici quelque part. Mais plusieurs autres carrés peuvent encore être dessinés sur ce géoplan.

Pour trouver ces carrés supplémentaires, la considération de la figure ci-contre sera sans doute éclairante. Elle suggère dans deux cas la position d'un des côtés des carrés à trouver ; puis le bas de la figure une rotation ; en identifiant le centre de rotation et en tenant compte que les horizontales deviennent verticales et réciproquement, on a, avec certitude, l'angle de la rotation. Par ailleurs, des diagonales de rectangles isométriques sont certainement isométriques. Les figures ainsi obtenues ne peuvent être que des carrés.





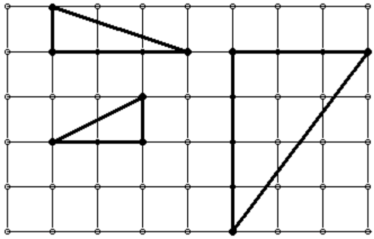
Attention ! Il n'est pas dit que les carrés dont la construction est suggérée sont les seuls possibles. En cherchant bien, vous en trouverez encore deux autres.

Sur notre géoplan habituel, combien peut-on dessiner de rectangles non carrés différents (non isométriques) ? Combien de losanges non carrés différents (non isométriques) ?

Ces deux dernières questions ne relèvent bien sûr pas du niveau de base. Un intérêt qu'elles présentent, outre l'utilisation des notions *de perpendicularité, de parallélisme et d'isométrie des segments, est certainement la nécessité de travailler de manière systématique pour avoir un dénombrement complet.*

4. Aires.

Quelle est l'aire (exprimée en nombre de « p » (pavés)) des triangles dessinés ? *Une des idées qui préside à cette séquence est que l'aire d'une figure s'exprime toujours en nombre de « pavés » qui sont les UA (Unités d'Aire). Pour les mathématiciens, la notion d'aire d'une figure n'a pas de sens puisque l'aire est la classe d'équivalence pour une relation spécifique.*

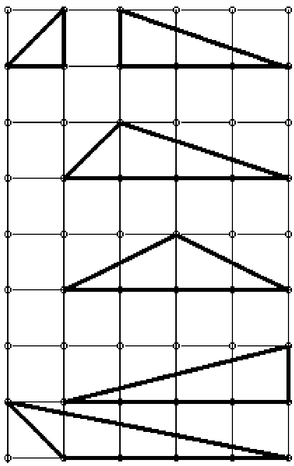


En termes moins savants mais raisonnablement proches de la notion mathématique, et dans un contexte restreint, on peut dire que

Deux figures (rectilignes planes) ont même aire *si et seulement si*

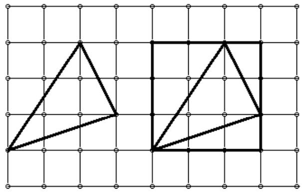
- ***elles sont isométriques*** *ou*
- ***elles sont superposables « par morceaux »*** *ou*
- ***elles peuvent être couvertes par le même nombre de pavés identiques*** *ou*
- ***elles sont la somme ou la différence de figures de même aire (« même aire » étant pris ici dans un des sens précédents).***

Sur la première ligne de la figure ci-contre, un ensemble de deux triangles. Quelle est l' aire de chacun de ces deux triangles ?
Sur la deuxième ligne, la « somme » des deux triangles de la première ligne ; quelle en est l'aire ?
Quelle est l'aire des triangles des troisième et quatrième lignes ?
On serait tenté d'en conclure qu'un triangle est toujours un demi-rectangle. Mais la considération de la figure de la dernière ligne fera prendre conscience que, si c'est vrai, l'explication peut en être un peu moins simple qu'il ne pouvait paraître à première vue.

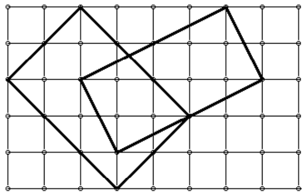


Et si le triangle n'a pas de côté sur une des lignes du quadrillage comme sur la figure ci-dessous ?

Il n'est bien sûr pas dit qu'il faille poser aux élèves la question de l'aire du triangle en leur montrant du premier coup les deux figures ci-contre. Il semble au contraire plus opportun de leur proposer d'abord la figure de gauche puis, s'ils ne trouvent pas, d'entourer le triangle proposé d'un nouvel élastique qui fait apparaître le carré comme à droite. Il reste encore à l'élève à trouver que l'aire demandée est la différence entre de celle du carré et des trois triangles rectangles qui entourent le triangle initial.



Calculer l'aire des onze carrés trouvés précédemment.
Calculer l'aire des rectangles dessinés ci-contre.
Dessiner d'autres quadrilatères (quelconques) et en calculer l'aire.



5. En guise de conclusion.

On espère avoir montré par ces quelques exemples que grâce à un outil assez simple permettant de travailler sur des figures toujours suffisamment proches de la perfection idéale des figures abstraites des mathématiciens, il y a moyen de faire à un niveau élémentaire de la recherche par essais et erreurs et de vrais raisonnements mathématiques.

Si des personnes trouvent ce point de vue intéressant, l'auteur sera heureux de recevoir leurs réactions.

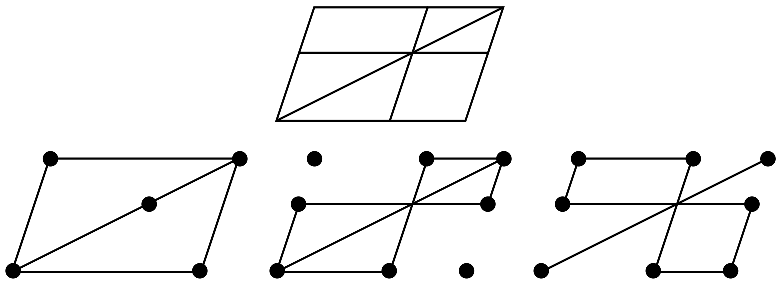
★ ★
★

6. Annexe.

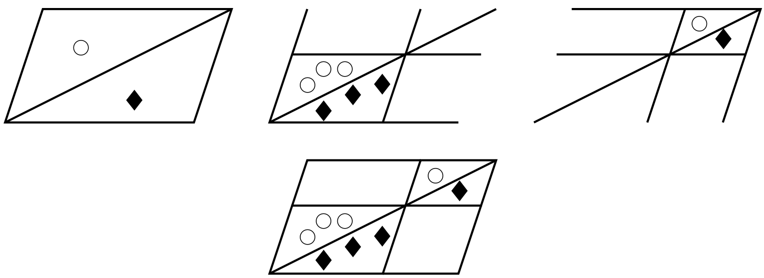
Voici maintenant, comme annoncé dans l'introduction un (double) exemple de démonstration sans parole. Le problème est le suivant :

Etant donné un parallélogramme et une de ses diagonales. Par un point de celle-ci, on trace les parallèles à ses côtés. On crée ainsi, en haut à gauche et en bas à droite, deux parallélogrammes. On demande de démontrer que ces parallélogrammes ont même aire.

Démonstration sans parole 1



Démonstration sans parole 2



Il n'y a plus qu'à verbaliser !

La Capp a cinq ans !

A cette occassion, elle a le plaisir d'inviter tous les membres de toutes les associations à un colloque qui se tiendra à Bruxelles, au

PARLEMENT EUROPEEN

le 17 avril 2002

QUE VISE L'EUROPE EN MATIERE D'EDUCATION ?

Objectifs d'éducation 2002-2004 de l'Union Européenne.

Nous commencerons par une visite du Parlement.

Ensuite, un député européen et des responsables de la Commission européenne nous présenteront les objectifs éducatifs de l'Europe et le programme des activités chargées de les promouvoir.

Le nombre de places étant limité, veuillez vous inscrire rapidement,

soit à la **SBPMef**, rue de la Halle, 15, 7000 - Mons

(tél/fax : 065 / 373729) (e-mail : `sbpm@umh.ac.be`),

soit auprès de **Micheline Denis-Pecheur**,

rue de la Ferme, 11, 5377 - Noiseux

(tél : 086 / 323755) (e-mail : `micheline.denis@skynet.be`)

Accueil à 13h50 au Parlement européen

(entrée Rue de Wiertz à 1040 - Bruxelles)

(document d'identité requis)

Fin de l'activité vers 17h50.

Le problème des treize billes : un autre point de vue

E. OMEY, ***Economische Hogeschool Sint-Aloysius***

1. Introduction.

Dans *Mathématique et Pédagogie* n°133, le professeur Drapier nous proposait le problème suivant :

Soient treize billes de même apparence. Il en existe cependant une (la « mauvaise »), qui est de masse différente de chacune des autres (les « bonnes »). Trouver une méthode identifiant la « mauvaise » bille au moyen d'une balance à double plateau mais ne possédant aucune graduation. Vous pouvez procéder à seulement trois pesées. Durant une pesée, aucune bille ne peut être ajoutée ou retranchée de la balance.

Dans son article, le professeur Drapier donne une solution claire et analytique. Dans cet article, je propose une autre méthode pour identifier la « mauvaise » bille. Dans cette méthode, on essaie de trouver un « *code* » pour la « mauvaise » bille ([1])

2. Résolution.

Nous numérotons les boules de 1 à 13. Nous nous proposons de comparer trois fois deux lots de quatre billes. A chaque pesée de deux lots de quatre billes correspondent trois résultats possibles :

- les deux plateaux sont en équilibre. Cette situation est représentée par le code 0;
- le poids à « gauche » est plus grand que le poids à « droite ». Code 1;

Adresse de l'auteur: Edward Omey - EHSAL, Stormstraat, 2, 1000 - Brussels
omedward@prof.ehsal.be

([1]) Cette méthode a été proposée dans le Scientific American il y a environ 20 ans, mais malheureusement je n'en retrouve pas la référence exacte.

- *le poids à « droite » est plus grand que le poids à « gauche ». Code 2*

Puisqu'il y a trois pesées successives, nous arrivons à $3 \times 3 \times 3 = 27$ cas possibles :

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&0&0&1&0&0&2&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&2&0&1\\ 0&0&2&1&0&2&2&0&2\\ 0&1&0&1&1&0&2&1&0\\ 0&1&1&1&1&1&2&1&1\\ 0&1&2&1&1&2&2&1&2\\ 0&2&0&1&2&0&2&2&0\\ 0&2&1&1&2&1&2&2&1\\ 0&2&2&1&2&2&2&2&2 \end{array}\right|$$

Dans ces 27 cas possibles, il y a trois cas « anormaux » : les codes 0 0 0 ,1 1 1 et 2 2 2

Dans les autres cas il y a une certaine symétrie ou complémentarité. Par exemple, les codes 1 2 1 et 2 1 2 sont complémentaires. En utilisant cette symétrie, nous pouvons réécrire ces 27 cas d'une autre manière dans la table n° 1 ci-dessous :

TABLE 1

cas « anormaux » : 0 0 0 , 1 1 1 , 2 2 2

les autres cas :

cas	complément	valeur
1 0 0	0 0 2	1
0 1 0	0 2 0	2
0 1 1	0 2 2	3
0 1 2	0 2 1	4
1 0 0	2 0 0	5
1 0 1	2 0 2	6
1 0 2	2 0 1	7
1 1 0	2 2 0	8
1 1 2	2 2 1	9
1 2 0	2 1 0	10
1 2 1	2 1 2	11
1 2 2	2 1 1	12

Nous pouvons identifier les 12 cas « normaux » avec les billes 1,2, ...,12. Pour construire les trois fois deux lots de quatre billes, nous changeons la construction de la table n° 1 de telle façon que chaque colonne contienne exactement quatre fois le chiffre 0, quatre fois le chiffre 1 e t quatre fois le chiffre 2. Si nécessaire, on remplace un code par son complément. Nous trouvons le résultat suivant :

TABLE 2

cas	complément	valeur
0 0 2	0 0 1	1
0 2 0	0 1 0	2
0 2 2	0 1 1	3
0 2 1	0 1 2	4
1 0 0	2 0 0	5
1 0 1	2 0 2	6
1 0 2	2 0 1	7
1 1 0	2 2 0	8
2 2 1	1 1 2	9
2 1 0	1 2 0	10
2 1 2	1 2 1	11
2 1 1	1 2 2	12

Les lots de quatre billes que nous allons comparer, correspondent aux chiffres « 1 » et « 2 » dans les colonnes de la première partie de la table 2. Dans la première colonne, nous trouvons un « 1 » aux places 5,6,7 et 8 et un « 2 » aux places 9, 10, 11 et 12. Ces ensembles nous donnent la première pesée. Les autres pesées sont construites de la même façon. Nous trouvons les trois pesées suivantes :

N° 1 : 5 - 6 - 7 - 8 et 9 - 10 - 11 - 12
N° 2 : 8 - 10 - 11 - 12 et 2 - 3 - 4 - 9
N° 3 : 4 - 6 - 9 - 12 et 1 - 3 - 7 - 11

Si par exemple la bille numéro 7 est plus lourde que les autres billes, les trois pesées donnent le code 2 0 1 . Dans la table n° 2, on peut voir que le code 2 0 1 est précisément le code de la bille numéro 7. Le code 1 0 2 donne aussi la bille numéro 7. De la même façon les pesées montrent toujours la bille « mauvaise ». Si le résultat des trois pesées est égal aux codes 0 0 0 , alors la bille numéro 13 est la « mauvaise ».

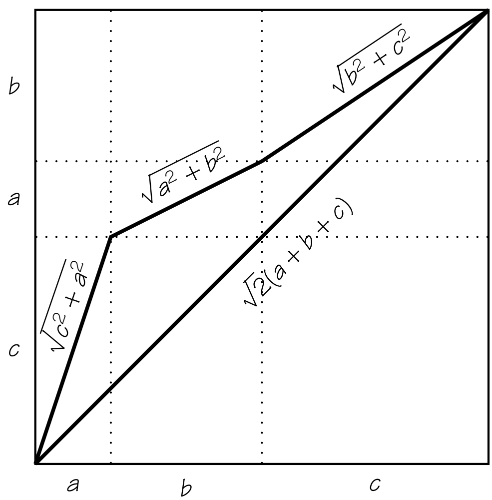
3. Conclusions et remarques.

- Si on considère seulement 12 billes, la procédure ci-dessus nous donne non seulement la « mauvaise », mais permet aussi de conclure si cette bille est plus lourde ou moins lourde que les autres billes.
- Avec 13 billes, 3 pesées sont suffisantes pour trouver la « mauvaise » bille. On a besoin d'une quatrième pesée pour savoir si la treizième bille est plus lourde ou moins lourde que les autres billes.
- On peut se demander combien de pesées sont nécessaires dans le cas où il y a N billes

  1. pour trouver la « mauvaise » bille ;
  2. pour trouver si cette bille est plus lourde ou moins lourde.

Voir une inéquation

$$(a+b+c)\sqrt{2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$$



Le Dernier Théorème de Fermat : Le Graal du monde mathématique.

S. BRIDOUX et L. QUARTA, *Université de Mons-Hainaut*

Introduction.

> *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere : cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*
>
> *Pierre de Fermat*

Dans la première partie du 17^e siècle (1637), Pierre de Fermat a écrit en marge d'un livre : ± *Il n'est pas possible de décomposer un cube en une somme de deux cubes, une puissance quatrième en somme de deux puissances quatrièmes et généralement, aucune puissance d'exposant strictement supérieur à 2 en deux puissances de même exposant.* Autrement dit, Fermat affirmait qu'on ne peut pas trouver d'entiers positifs a, b, c non nuls qui satisfont l'équation $a^n + b^n = c^n$ pour $n \geqslant 3$. De plus, Fermat a ajouté à cet énoncé : ± *J'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir* .

Ce théorème a suscité notre intérêt pour deux raisons essentielles. La première réside dans l'extrême simplicité de l'énoncé; il est formulé dans des termes que tout étudiant peut comprendre. Ensuite, ce problème, d'apparence

Adresse des auteurs : Université de Mons-Hainaut, Institut de Mathématique, « Le Pentagone », 6 Avenue du Champ de Mars, 7000 Mons, e-mail : stephanie.bridoux@umh.ac.be, lucas.quarta@umh.ac.be.

bénigne, a pris la dimension d'une légende puisque ni preuve complète, ni contre-exemple n'en ont été trouvés avant 1995 !

Le Dernier Théorème de Fermat, baptisé ainsi car il est le dernier résultat de Fermat à avoir résisté aux mathématiciens, possède donc une histoire particulièrement riche.

Dans le premier chapitre, nous proposons d'en retracer les grandes étapes. La seconde partie est consacrée à la preuve du cas $n = 4$, le seul qui ait été réellement démontré par Fermat lui-même.

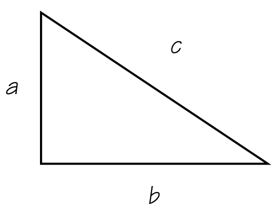
1. Un peu d'histoire

1.1. Les origines

Pierre de Fermat (1601-1665) était juge au Parlement de Toulouse. Il faut savoir qu'à l'époque, la tradition veut que les enfants issus de familles bourgeoises étudient le droit. Il consacrait son temps libre a étudier les mathématiques. C'est pour cette raison que certains historiens l'appellent, à tort, le « Prince des Amateurs ».

L'une des sources d'inspiration de Fermat était l'**Arithmetica**. Il s'agit d'un recueil de problèmes liés à la Théorie des Nombres écrit par **Diophante** environ trois siècles après J.C.. Fermat en possédait une traduction latine éditée en 1621 et commentée par **Claude Gaspard Bachet de Meziriac** (1581-1638). Il y trouve une suite d'observations qui touchent au **Théorème de Pythagore** (6^e siècle avant J.C.) : *dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit est le carré de la longueur de l'hypoténuse.*

Diophante recherchait tous les triangles rectangles dont les 3 côtés sont de longueur entière. Mathématiquement, nous écrivons :



$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ \text{a, b, c des entiers positifs.} \end{cases}$$

 est composé de deux carrés, comme 5, 13, 29, 37, etc...

Remarquons que si a et b sont choisis au hasard, alors c a peu de chances d'être entier.

Une solution (a, b, c) du problème est appelée **triplet pythagoricien**, comme par exemple $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ et $(8, 15, 17)$.

D'autre part, si (a, b, c) est un triplet pythagoricien, alors (ka, kb, kc) où k est un entier positif en est un aussi. Par conséquent, il existe **une infinité** de triplets pythagoriciens.

Observons enfin que si m et n sont des entiers positifs tels que $m > n$, alors en posant $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ et $c = m^2 + n^2$, on a bien

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

En conclusion : soit k, m, n des entiers positifs tels que $m > n$. En posant $a = k(m^2 - n^2)$, $b = 2kmn$ et $c = k(m^2 + n^2)$, alors (a, b, c) est un triplet pythagoricien et on peut vérifier (cfr. [8], par exemple) que ces formules donnent toutes les solutions. Ce problème est un exemple de résolution d'**équation diophantienne**, c'est-à-dire une équation dont on recherche les solutions en nombres entiers.

Fermat ne s'est pas contenté de comprendre le texte de Diophante. Il s'est aussi posé des questions qui sont naturellement soulevées par les résultats donnés. C'est donc à la suite de ce problème sur la somme de deux carrés que Fermat s'est demandé si on pouvait aussi résoudre en nombres entiers l'équation $a^3 + b^3 = c^3$ ou plus généralement $a^n + b^n = c^n$ pour n entier strictement supérieur à 2. C'est dans la marge de son exemplaire qu'il a noté sa conjecture et cette fameuse remarque qui en a fait une légende.

L'histoire du Dernier Théorème a réellement commencé cinq ans après la mort de Fermat. En effet, comme il n'avait pas beaucoup explicité ses travaux, ses notes ont dû être reconstituées à partir de sa correspondance et de remarques analogues à celles qu'on trouve dans l'Arithmetica. En 1670, son fils Samuël a republié une version de cet ouvrage incluant les observations de son père. C'est à ce moment que démarre véritablement l'histoire de ce mythe.

1.2. Des tentatives de preuve

Les essais ont rapidement montré la difficulté de trouver une solution entière à l'équation $a^n + b^n = c^n$ pour $n \geqslant 3$. On peut d'ailleurs se demander comment une simple modification d'exposant peut transformer une équation qui possède une infinité de solutions en une équation impossible.

De **Fermat** lui-même, on connaît une démonstration pour $n = 4$. Il s'agit d'une preuve par l'absurde dont la technique est connue sous le nom de Méthode de la Descente Infinie. Ce sera l'objet du chapitre 2.

L. Euler (1707-1783) s'en est servi comme point de départ de ses travaux. Il a plus ou moins donné une preuve du cas $n = 3$ dans laquelle il a dû recourir aux **nombres imaginaires** (nombres complexes).

En 1825, **A.M. Legendre** (1752-1833) et **L. Dirichlet** (1805-1859) ont achevé le cas $n = 5$ en s'inspirant des idées de la mathématicienne **S. Germain** (1776-1831). Le cas $n = 7$ a à peu près cédé à **G. Lamé** (1795-1880) un peu plus tard.

Entre 1750 et 1850, tous ces travaux ont aussi mené aux observations suivantes.

Tout d'abord, la preuve de Fermat pour $n = 4$ était aussi valable pour $n = 8, 12, 16, \ldots, (4m), \ldots$ où m est un entier positif. En effet, l'équation de Fermat peut s'écrire $a^{(4m)} + b^{(4m)} = c^{(4m)}$, ce qui est équivalent à $(a^m)^4 + (b^m)^4 = (c^m)^4$. De même, la preuve d'Euler pour $n = 3$ impliquait que le théorème était aussi vérifié par les exposants multiples de 3. Plus généralement, dès que la conjecture de Fermat est démontrée pour un exposant n, elle l'est aussi pour ses multiples car

$$a^{mn} + b^{mn} = c^{mn} \quad \text{s'écrit} \quad (a^m)^n + (b^m)^n = (c^m)^n.$$

Autrement dit, si on ne trouvait pas de solution pour l'exposant n, on n'en trouvait pas non plus pour ses multiples. Par conséquent, « il suffisait » de prouver le théorème pour l'exposant 4 et les exposants n premiers puisque tout nombre supérieur à 2 est un multiple de ces nombres. Soulignons que le problème n'en est pas simplifié pour autant car on sait, depuis **Euclide** (3^e siècle avant JC), qu'il existe une infinité de nombres premiers.

En 1850, **E. Kummer** (1810-1893) a raflé tous les exposants premiers inférieurs à 100, sauf 37, 59 et 67. Il a introduit **les nombres premiers réguliers** et une notion qui fut à la base de la théorie des idéaux.

Pendant plus d'un siècle, l'histoire du théorème a consisté à vaincre les uns après les autres les exposants premiers et les ordinateurs ont étendu le champ des exposants accessibles. Toutefois, une machine, aussi puissante soit-elle, ne permet pas de résoudre des problèmes de type Fermat. En effet, si un ordinateur peut vérifier qu'un grand nombre de triplets (a, b, c) ne satisfont pas l'équation, il ne peut pas effectuer une infinité de calculs et montrer qu'il n'y a aucune solution.

Soulignons que le récit de cette quête vers une démonstration complète est agrémenté d'innombrables travaux, de résultats pertinents et de théorèmes connexes obtenus par une foule de mathématiciens.

Dans les années 80, la célébrité du théorème a suscité l'envie d'essayer de nouveaux points de vue, de nouvelles techniques, pour parvenir à une preuve complète du théorème. C'est à ce moment que le Dernier Théorème de Fermat s'est connecté à des propriétés de nature géométrique.

1.3. La fin de l'histoire

Le 23 juin 1993, lors d'un séminaire tenu à Cambridge (Angleterre), le mathématicien **Andrew Wiles** a fait sensation. Les travaux exposés laissaient entendre qu'une partie de la célèbre conjecture de **Shimura-Taniyama-Weil** venait de céder à Wiles. Ce résultat n'aurait pas dépassé le cercle des mathématiciens professionnels si on avait ignoré que cette conjecture impliquait la démonstration d'un ancien énoncé : le Dernier Theorème de Fermat.

Pour la petite histoire, Andrew Wiles (1953-) connaissait le Théorème de Fermat depuis son enfance. Un jour qu'il cherchait un bouquin à la bibliothèque municipale de Cambridge, son village natal, il a trouvé un livre qui le mentionnait. Depuis ce jour, le Dernier Théorème est devenu la plus grande passion du jeune Andrew.

En 1975, il débute sa thèse sous la direction de **John Coates**. Celui-ci lui conseilla d'abandonner son vieux rêve au vu de la difficulté d'obtenir des résultats probants dans cette direction. Son thème de recherche porte alors sur un domaine apparemment très éloigné de Fermat : **les courbes elliptiques**.

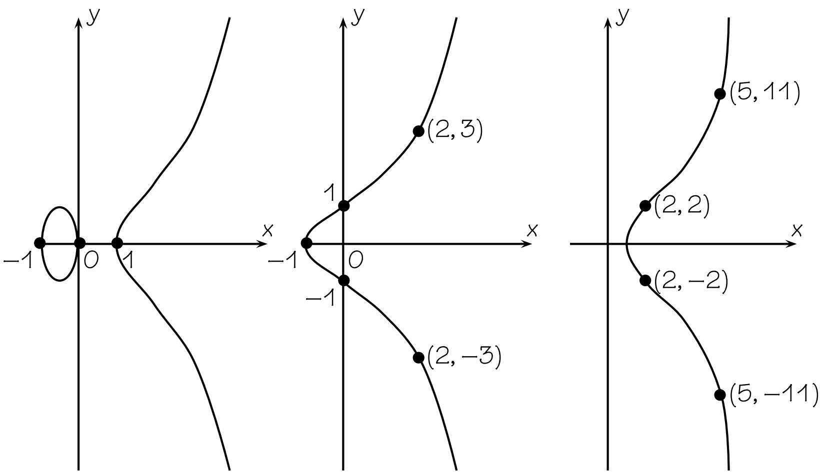
Ce sont des courbes dont l'équation est de la forme

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ et le polynôme de degré 3 n'a pas de racines multiples.

Les courbes ci-dessous sont elliptiques.

(1) $y^2 = x^3 - x$ (2) $y^2 = x^3 + 1$ (3) $y^2 = x^3 - 4$



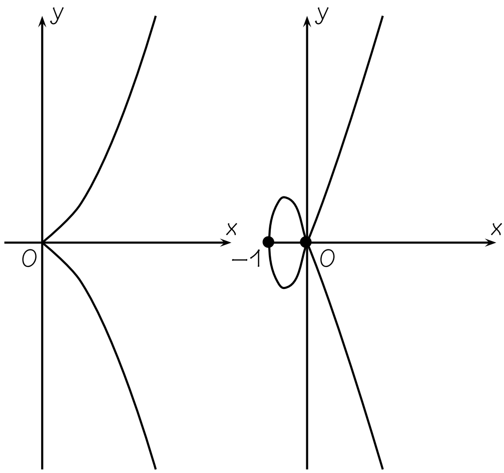
Wiles s'intéresse plus particulièrement à l'étude des points à coordonnées entières et rationnelles des courbes elliptiques (notamment les conjectures de Birch et Swinnerton-Dyen). Pour les exemples (1), (2), (3), les points marqués • sont les seuls points à coordonnées entières. En fait, le Théorème de Mordell assure que toute courbe elliptique ne peut posséder qu'**un nombre fini de points à coordonnées entières**.

Les exemples de la page 71 ne sont donc pas des courbes elliptiques.

La courbe de l'exemple (4) admet une infinité de points à coordonnées entières : ce sont les couples de la forme (n^3, n^2) où $n \in \mathbb{Z}$. Quant à la courbe de l'exemple (5), elle admet une racine double, et n'est donc pas de ce fait une courbe elliptique.

Soulignons cependant qu'une courbe elliptique **peut avoir un nombre infini de points à coordonnées rationnelles**.

(4) $y^2 = x^3$ (2) $y^2 = x^3 + x^2 = x^2(x+1)$



La théorie des courbes elliptiques est très développée. En particulier, dans les années 50, deux mathématiciens japonais de l'Université de Tokyo, Y. Tanyama (1927-1958) et G. Shimura (1930-), ont énoncé une conjecture (encore une !) très ambitieuse : **la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil** (A. Weil (1906-1998)). Elle affirme que toute courbe elliptique possède une propriété de symétrie très forte, à savoir être **modulaire**. Cette notion est très compliquée et nous ne nous aventurerons pas plus loin dans la définition.

Après avoir obtenu sa thèse, Andrew Wiles s'installe à Princeton (USA) où il devient professeur à l'Université. Il était loin de se douter que la conjecture Shimura-Taniyama-Weil allait lui permettre de réaliser son rêve d'enfance. En effet, **G. Frey** (Université de Essen, Allemagne) annonce, en 1985, que si la conjecture Shimura-Taniyama-Weil est vraie, celle de Fermat l'est aussi. Ce résultat, totalement prouvé par **K. Ribet** (Université de Berkeley, USA) un an plus tard, se base sur les idées suivantes. Si la conjecture de Fermat était fausse, il existerait des entiers positifs a, b, c non nuls et n supérieur à 2 tels que $a^n + b^n = c^n$. On pourrait alors construire la courbe elliptique d'équation

$$y^2 = x(x - a^n)(x + b^n).$$

Si la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil était vraie, cette courbe devrait être modulaire. Or, Frey affirme qu'elle ne l'est pas. Elle est donc incompatible avec la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil. D'où la contradiction.

Wiles comprit qu'il lui suffisait alors de prouver cette conjecture et il décida d'abandonner tout travail qui ne concernait pas Fermat. Bien que le temps était aux échanges et aux collaborations, Wiles a travaillé seul, sans publier de résultats partiels à la plupart de ses collègues. Au terme de 7 années d'acharnement, Wiles pensait être arrivé au bout de ses peines. Né à Cambridge, c'est là qu'il avait conçu sa passion pour les nombres et qu'il y avait rencontré le Dernier Théorème. Il pensait donc que le colloque organisé en 1993 à l'Isaac Newton Mathematical Institute de Cambridge, était le moment adéquat pour exposer ses travaux. A la suite de ses conférences, Wiles soumet un article (de 200 pages) au journal spécialisé « Annals of Mathematics ». Vu l'ampleur du travail à examiner, six experts sont désignés pour vérifier sa preuve. Malheureusement, ceux-ci mettent le doigt sur une faille sérieuse dans le raisonnement. Wiles va donc s'isoler à nouveau afin de compléter sa preuve. Il y parviendra deux ans plus tard avec la collaboration de **Richard Taylor** (Université de Harvard, USA), un de ses anciens étudiants.

La version finale de la démonstration sera publiée en 1995 [11] et [10].

2. Preuve du cas $n = 4$

2.1. Lien avec la théorie des courbes elliptiques

Le cas $n = 4$ de la conjecture est le seul qui a été prouvé par Pierre de Fermat lui-même. Il obtient ce résultat comme corollaire de la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Les seules solutions à coordonnées rationnelles de l'équation $y^2 = x^3 - x$ sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.*

Comment obtenir le cas $n = 4$ de la conjecture à partir de cette proposition ?

Supposons qu'il existe une solution non triviale (x, y, z) $(xyz \neq 0)$ de l'équation $x^4 + y^4 = z^4$. En soustrayant y^4 dans chaque membre et en les multipliant par $\frac{z^2}{y^6}$ (opération licite puisque $y \neq 0$), on voit que le triplet (x, y, z) vérifie

$$\left(\frac{x^2 z}{y^3}\right)^2 = \left(\frac{z^2}{y^2}\right)^3 - \frac{z^2}{y^2}.$$

Si on pose $X = \frac{z^2}{y^2}$ et $Y = \frac{x^2 z}{y^2}$, on a : $Y^2 = X^3 - X$ avec $Y \neq 0$, ce qui contredit la proposition 2.1. Il est donc impossible de trouver une solution non triviale de l'équation $x^4 + y^4 = z^4$.

En réalité, la proposition 2.1 est une formulation « moderne » des résultats obtenus par Fermat. Il s'intéressait au fait suivant :

(2.2) Existe-t-il un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont des entiers et tel que son aire est le carré d'un nombre entier ?

La **réponse est négative** et Fermat en donne une preuve dans la marge de l'Arithmetica. Dans un langage plus actuel, cette preuve peut être considérée comme une véritable étude de la **courbe elliptique** d'équation $y^2 = x^3 - x$. Voyons comment la proposition (2.1) implique (2.2). Par l'absurde, supposons que (2.2) ne soit pas vérifiée : soient $a, b, c \in \mathbb{N}^\star$ tels que $a^2 + b^2 = c^2$ et $\frac{1}{2}ab = K^2$. On a donc (cf. paragraphe 1.1 — triplets pythagoriciens) $a = m^2 - n^2$ et $b = 2mn$. Ainsi, $(m^2 - n^2)mn = K^2$, ou encore $m^3 n - mn^3 = K^2$. En divisant par n^4, on obtient $\left(\frac{m}{n}\right)^3 - \frac{m}{n} = \left(\frac{K}{n^2}\right)^2$. Donc $\left(\frac{m}{n}, \frac{K}{n^2}\right)$ est un point à coordonnées rationnelles de la courbe elliptique $y^2 = x^3 - x$ avec $\frac{K}{n^2} \neq 0$, d'où la contradiction.

La preuve de la proposition 2.1 que nous donnons ci-après est une « variante » de la preuve de 2.2 donnée par Fermat [7].

2.2. Preuve de la proposition 2.1

2.2.1. Remarques préliminaires

Remarquons tout d'abord que $y^2 = x^3 - x = (x - 1)x(x + 1)$.

Considérons les trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned} G &:= \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : y^2 = (x-1)x(x+1)\}, \\ G^\star &:= \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : y^2 = (x-1)x(x+1), y \neq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= G \setminus \{(0,0),(1,0),(-1,0)\}, \\ C &:= \{(u,v,w) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} : u^2+1 = v^2 = w^2-1\}, \end{aligned}$$

ainsi que les trois applications f, g et h suivantes :

$$G^\star \underset{\overset{f}{\longleftarrow}}{\overset{g}{\longrightarrow}} C \overset{h}{\longrightarrow} G$$

$$\begin{aligned} f(u,v,w) &:= \big(u^2+1+uv+vw+wu, (u+v)(v+w)(w+u)\big) \\ g(x,y) &:= \left(\frac{1}{2y}\left[(x-1)^2-2\right], \frac{1}{2y}(x^2+1), \frac{1}{2y}[(x+1)^2-2]\right) \\ h(u,v,w) &:= (u^2+1, uvw) \end{aligned}$$

Les applications f et g sont réciproques.

Puisque l'application g est surjective, l'image de $h\circ g : G^\star \to G$ est identique à celle de h :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(h\circ g) = \mathrm{Im}\ h = \{&(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} : y^2 = (x-1)x(x+1) \\ &\text{et } x, (x+1) \text{ et } (x-1) \text{ sont des carrés de nombres rationnels}\} \end{aligned}$$

Nous en déduisons le fait suivant :

(2.3) *Quelle que soit la solution rationnelle* (x_0, y_0) *de l'équation* $y^2 = x^3 - x$*, telle que* x_0*,* (x_0-1) *et* (x_0+1) *sont des carrés de nombres rationnels, on peut trouver une autre solution* (x_1, y_1) *de cette équation, différente de* $(0,0)$*,* $(1,0)$ *et* $(-1,0)$*, telle que* $(h\circ g)(x_1,y_1) = (x_0,y_0)$.

Avant d'expliquer comment nous utiliserons cette remarque, introduisons la notion de **« Hauteur d'un nombre rationnel »**.

Soit $q \in \mathbb{Q}$. Ecrivons-le sous sa forme irréductible : $q = \frac{n}{d}$, où n et d sont deux entiers premiers entre eux ($d \neq 0$). On définit la hauteur de q par

$$\boxed{H(q) := \max(|n|, |d|)}$$

Exemples :

$$H\left(-\frac{5}{8}\right) = 8 \quad , \quad H\left(\frac{7}{2}\right) = 7 \quad , \quad H(2) = 2 \quad , \quad H(0) = 1 \quad (\text{car } 0 = \tfrac{0}{1})$$

Remarquons que $H(q)$ est toujours un nombre naturel. Ce sera la base de la stratégie que nous allons adopter.

2.2.2. Stratégie : le principe de la descente infinie

Nous allons procéder par l'absurde. Supposons qu'il existe une solution rationnelle de l'équation $y^2 = x^3 - x$ autre que $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Soit (x_0, y_0) une solution de cette équation telle que la hauteur de la première coordonnée soit minimale : $H(x_0)$ est le plus petit possible.

Nous allons construire une solution (x_1, y_1), différente de $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et telle que $H(x_1) < H(x_0)$, ce qui est absurde.

Trois étapes pour mettre en œuvre cette stratégie

A. Montrer qu'on peut supposer que $x_0 > 1$.

B. Prouver que x_0, $x_0 - 1$ et $x_0 + 1$ sont tous les trois le carré d'un nombre rationnel.

   Par la remarque préliminaire (2.3), on sait alors qu'il existe une autre solution (x_1, y_1) différente de $(0, 0)$, $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ telle que $(h \circ g)(x_1, y_1) = (x_0, y_0)$.

C. Prouver que $H(x_1) < H(x_0)$, d'où la contradiction.

2.2.3. La démonstration.

Soit (x_0, y_0) une solution rationnelle de l'équation $y^2 = x^3 - x$ autre que $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, et telle que $H(x_0)$ est minimal. Nous allons vérifier les trois étapes de la stratégie exposée précédemment afin d'obtenir une contradiction.

A. Commençons par remarquer que si (x, y) est une solution rationnelle de $y^2 = x^3 - x$, différente de $(0, 0)$, alors en divisant les deux membres de l'égalité par x^4 (OK, car $x \neq 0$), $\left(-\frac{1}{x}, \frac{y}{x^2}\right)$ en est une autre.

   De plus, $H(x) = H\left(-\frac{1}{x}\right)$. On peut donc supposer $x_0 > 0$.

   D'où, $x_0 + 1 > 0$ et, puisque $0 < y_0^2 = (x_0 - 1)x_0(x_0 + 1)$, on a : $\boxed{x_0 > 1}$

B. Soit $x_0 = \frac{m}{n}$ où $m > n > 0$ et m, n premiers entre eux. Ainsi, $H(x_0) = m$.

B.1. Montrons que l'un au moins des deux naturels m et n est pair. Par l'absurde : supposons que m et n sont impairs.
Posons

$$x_0' = \frac{x_0+1}{x_0-1} = \frac{(m+n)/2}{(m-n)/2}.$$

On vérifie que $\left(x_0', \frac{2y_0}{(x_0-1)^2}\right)$ est une autre solution rationnelle de $y^2 = x^3 - x$. Mais, puisque

$$H(x_0') \leqslant \max\left(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}\right) = \frac{m+n}{2} < m = H(x_0),$$

on aboutit à la contradiction de la minimalité de $H(x_0)$.

B.2. On en déduit que m ou n est pair et que l'autre est impair car ces deux entiers sont premiers entre eux.

B.3. Puisque $y_0^2 = (x_0-1)x_0(x_0+1) = \frac{mn(m-n)(m+n)}{n^4}$, le produit $mn(m-n)(m+n)$ est le carré du rationnel n^2y_0.
Or, ce produit est naturel, donc $mn(m-n)(m+n)$ est le carré d'un naturel (il suffit de considérer la décomposition d'un naturel en ses facteurs premiers).

B.4. $n, m, (m+n)$ et $(m-n)$ sont deux à deux premiers entre eux.
En effet, le seul cas non trivial concerne $(m+n)$ et $(m-n)$. Si on suppose qu'il existe un diviseur commun, alors ce nombre divise aussi $(m+n)+(m-n) = 2m$ et $(m+n)-(m-n) = 2n$. Ce diviseur commun est donc 2. Or $(m+n)$ et $(m-n)$ sont deux nombres impairs. On aboutit à une contradiction.

B.5. Ainsi $n, m, (n+m)$ et $(m-n)$ sont tous les quatre le carré d'un naturel car leur produit l'est aussi et ils sont premiers entre eux (à nouveau, il suffit de considérer la décomposition d'un naturel en ses facteurs premiers).
D'où,

$$x_0 = \frac{m}{n}, x_0 - 1 = \frac{m-n}{n} \quad \text{et} \quad x_0 + 1 = \frac{m+n}{n}$$

sont tous les trois le carré d'un nombre rationnel.

C. Par la remarque préliminaire (2.3), nous pouvons considérer la solution (x_1, y_1) de $y^2 = x^3 - x$ telle que $(h \circ g)(x_1, y_1) = (x_0, y_0)$.

C.1. Par définition de l'application $h \circ g$, on a :

$$x_0 = \frac{(x_1^2+1)^2}{4(x_1^3 - x_1)}$$

C.2. Si on écrit $x_1 = \frac{r}{s}$ où r et s sont deux entiers premiers entre eux, on a d'une part :

$$H(x_1) = \max(|r|, |s|) \geqslant 2$$

puisque $x_1 \notin \{0, 1, -1\}$. D'autre part :

$$x_0 = \frac{(r^2+s^2)^2}{4rs(r^2-s^2)} \tag{1}$$

C.3. Montrons que le plus grand commun diviseur du numérateur et du dénominateur du membre de droite de (1) est au plus 4.
On montre facilement ([1]) que le facteur **premier** commun au numérateur et au dénominateur est au plus 2. Donc, le plus grand facteur commun est une puissance de 2. Si (x^2+s^2) est pair, alors r **et** s doivent être impairs. C'est-à-dire que r^2 et s^2 ont pour reste 1 lors de la division par 4 et que la somme (r^2+s^2) a pour reste 2 lors de la division par 4. Donc $(r^2+s^2)^2$ n'est pas divisible par 8.

C.4. On a donc :

$$\begin{aligned} H(x_0) \geqslant \frac{1}{4}(r^2+s^2)^2 &= \frac{1}{4}(r^4+2r^2s^2+s^4) \\ &\geqslant \frac{1}{4}\max(|r|,|s|)^4 = \frac{1}{4}H(x_1)^4 > H(x_1) \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est stricte puisque $H(x_1) \geqslant 2$.

([1]) Soit p un nombre premier qui divise à la fois $(r^2+s^2)^2$ et $4rs(r^2-s^2)$ où r et s sont deux entiers premiers entre eux. Prouvons que $p = 2$. Puisque p divise $4rs(r^2-s^2)$, on a les quatre possibilités suivantes (ne s'excluant pas nécessairement l'une l'autre) :

i. **p divise 4 :** et donc $p = 2$.

ii. **p divise r :** puisque r et s sont premiers entre eux, p ne divise pas s. Ceci contredit le fait que p divise aussi r^2+s^2.

iii. **p divise s :** similaire au cas 2, impossible.

iv. **p divise r^2-s^2 :** puisque p divise aussi r^2+s^2, p divise à la fois $(r^2-s^2)+(r^2+s^2) = 2r^2$ et $(r^2+s^2)-(r^2-s^2) = 2s^2$.
Ceci implique que $p = 2$ car r et s sont premiers entre eux.

On a donc obtenu la contradiction qui conclut la preuve.

■

Nous tenons à remercier M. Paul van Praag, Professeur à l'Université de Mons-Hainaut, pour sa disponibilité et nos fructueuses discussions. Nous remercions aussi M. Jean Doyen, Professeur à l'Université Libre de Bruxelles, pour les documents et conseils qu'il nous a fournis. Enfin, nous adressons un grand merci à Sabine Bouvier, Institut Saint-Joseph à Charleroi, pour son apport dans la rédaction ainsi qu'à Lyane Bouchez pour son aide dans la mise en page de ce document.

Bibliographie

[1] Ballieu M., Le « grand » théorème de Fermat démontré ?, *Math-Jeunes*, **62** (1993), SBPM.

[2] Edwards H., Fermat's Last Theorem, GTM, Springer, 1977.

[3] Goldstein C., Le théorème de Fermat, *La Recherche*, **263**, Mars 1994, vol. 25.

[4] Goldstein C., La conjecture de Fermat est enfin un théorème, *La Recherche*, **277**, Juin 1995, vol. 26.

[5] Goldstein C., Un théorème de Fermat et ses lecteurs, Presses Universitaires de Vincennes.

[6] Horizon : Le Dernier Théorème de Fermat, documentaire réalisé par la BBC.

[7] Kato K., Kurokawa N., Saito T., Number Theory 1, Fermat's Dream, *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 186, AMS 2000.

[8] Lemaire L., La recherche mathématique aujourd'hui (édition an 2000), *Mathématique et Pédagogie*, **128**, septembre–octobre 2000.

[9] Singh S., Le dernier théorème de Fermat, Hachette Littératures.

[10] Taylor R., Wiles A., Ring-Theoretic Properties of Certain Hecke Algebras, *Annals of Mathematics*, **141** (1995), 553-572.

[11] Wiles A., Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem, *Annals of Mathematics*, **141** (1995), 553-572.

Dans nos classes

Yolande Noël-Roch

La rubrique « Jeux » des journaux propose régulièrement des grilles à décrypter : un certain nombre de signes différents cachent des nombres (deux signes différents cachent généralement deux nombres différents, un même signe cache toujours le même nombre). Le décryptage est proposé

— soit à partir des sommes données pour chaque ligne et chaque colonne

— soit à partir des produits donnés pour chaque ligne et chaque colonne

Nous nous occupons ici du cas où les **sommes** sont données. Nous regarderons les produits dans un prochain numéro de la revue.

Nous choisirons des grilles $k \times k$ remplies avec n signes différents. En choisissant k et n et en adaptant la disposition des signes, nous pouvons construire des jeux à décrypter à tous les niveaux d'enseignement.

1. Enseignement primaire

Dès la première primaire, lorsque les élèves calculent essentiellement avec des naturels de 1 à 20, la grille suivante ($n = 3$ et $k = 2$) peut être proposée. Elle admet une solution unique.

♡	♡	6
◇	♣	11
7	10	

Par contre la grille suivante admet deux solutions.

♡	◇	3
♣	♡	8
8	3	

En prenant $n = 4$, de telles grilles ont facilement plus de deux solutions.

Adresse de l'auteur: Yolande Noël-Roch, 86 rue de la Culée, 6927 Resteigne

♡	♢	3
♣	♠	12
8	7	

♡	♢	6
♣	♠	11
8	9	

L'un ou l'autre petit malin remarquera peut-être que les **données sont redondantes** : une quelconque des quatre sommes peut ne pas être donnée. Si on la donne, elle peut servir de preuve (nous ne parlerons pas ici d'équations dépendantes).

Dans la dernière grille, une solution liée à $6 = 3 + 3$ peut amener à rappeler une convention de départ : deux signes différents cachent deux nombres différents … ou amener la classe à abandonner cette convention pour rechercher le plus de solutions possibles !

Bref, dès ce niveau élémentaire, ce jeu crée des problèmes ouverts.

2. Enseignement secondaire

2.1. En première année

Jouons avec les nombres entiers compris entre -10 et $+10$:

La grille ci-contre permet presque à chaque élève de construire « sa » solution. La recherche collective de **toutes** les solutions peut amener une discussion très riche et créer la nécessité de mise en ordre !

♡	♢	-3
♣	♠	3
-9	9	

2.2. En deuxième année

Décryptons dans les réels positifs la grille ci-contre.

♣	♡	♣	2,6
♢	♡	♠	8,6
♡	♡	♠	5
7	4,2	5	

Le principal intérêt est l'observation attentive nécessaire avant de se lancer dans des conjectures et des calculs. En s'y prenant bien, on découvre la valeur de ♡, puis celle de ♠ ou ♣, puis celle de ♣ ou ♠, et finalement celle de ♢.

On peut proposer à chaque élève
— de crypter une grille à l'intention de son(sa) voisin(e),
— de crypter une grille analogue à une grille précédente, mais en ne donnant que les sommes indispensables, sans redondance.

Suivant les méthodes (ou absence de méthode !) utilisées pour construire les grilles, le travail peut provoquer des discussions : existence de grilles sans solution, de grilles en admettant plusieurs.

2.3. En troisième et quatrième années

Voici par exemple deux grilles dans lesquelles les signes cachent des nombres réels :

♠	♡	♠	♢	11,5
♡	♢	♠	♠	11,5
♢	♡	♢	♢	6,5
♣	♢	♣	♡	0,5
5	3	12	9	

♠	♢	♣	♡	♠	6,3
♢	♡	♣	♡	♣	10,5
♠	♢	♡	♣	♢	8,9
♢	♢	♠	♢	♢	9,9
♢	♡	♠	♣	♠	6,3
7,3	4,5	10,8	6,5	11,8	

Les grilles que nous avons choisies pour le degré d'observation ne nécessitent aucun traitement algébrique. Le « détricotage » est du niveau des problèmes d'école primaire. Par contre, avec les deux dernières grilles, l'exploitation algébrique s'impose (mise en équation, calcul avec des inconnues et des équations). Le traitement arithmétique ne suffit plus, les données doivent être structurées par le calcul algébrique : ces grilles donnent une occasion d'aborder les systèmes d'équations linéaires. Ceux qui foncent dans les calculs au lieu d'observer la situation et d'organiser leur recherche se pénalisent manifestement. Nous avons placé les signes de manière à ce que le décryptage ne dépasse pas la résolution d'un ou plusieurs systèmes de deux équations à deux inconnues.

De telles grilles peuvent aider à comprendre le fait qu'un problème peut admettre

— une solution unique
— plusieurs solutions
— aucune solution

si le professeur prépare ses grilles pour y arriver ... ou (avec un peu de chance) s'il demande aux élèves de proposer eux-mêmes des grilles à décrypter.

2.4. En cinquième et sixième années

Vous avez compris : rien n'empêche de créer une grille qui paraît conduire à un système de x équations à y inconnues !

Horreur, c'est interdit, paraît-il, par le programme ... Mais est-il interdit d'apprendre à **regarder** un problème posé, à réfléchir pour découvrir qu'il n'est pas aussi monstrueux qu'on le croyait ?

Voici un exemple.

♢	¶	¶	♡	♠	♠	4,6
♡	♠	¶	♡	♢	¶	0,3
♣	¶	♠	♢	¶	♠	10,61
♢	♢	♡	♡	♣	♡	8,01
♡	♠	¶	♡	¶	♢	0,3
♣	♡	♠	♣	♡	♢	17,32
14,02	4,6	1,1	7,01	6,31	8,1	

La résolution ne nécessite pas de traiter un système de 12 équations à 5 inconnues : ensembles, la ligne 4 et les colonnes 1 et 4 permettent le calcul de trois des cinq inconnues. Le problème permet aussi d'affiner la notion d'équations dépendantes ou non.

Olympiades

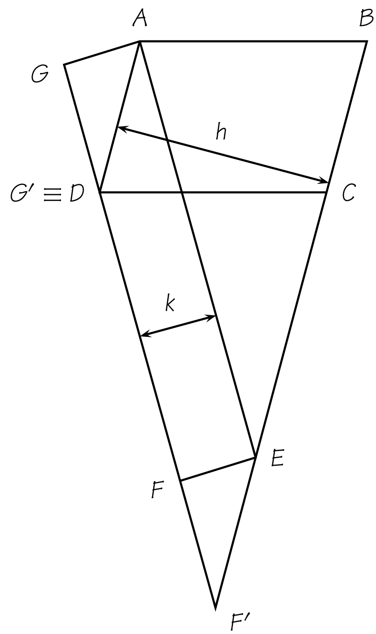
C. Festraets

Voici les solutions des problèmes « midi » et « maxi » de la finale de l'Olympiade Mathématique Belge 2001. Ces solutions ont été choisies parmi les meilleures proposées par les concurrents.

MIDI

1. Les parallélogrammes $ABCD$ et $AEFG$ sont tels que E appartient à la droite BC et D à la droite FG. Comparer les aires de ces deux parallélogrammes. Sont-elles égales ? L'une est-elle toujours plus grande que l'autre ? Si oui, laquelle ?

Solution de Chia-Tche Chang, élève de 4^e^ année au Centre Scolaire Saint Michel à Bruxelles.



Les aires des deux parallélogrammes sont toujours égales.

$ABCD$, $AEFG$, $AEF'G'$ sont trois parallélogrammes.

$AEFG$ et $AEF'G'$ sont deux parallélogrammes répondant aux conditions de la question.

1. Les parallélogrammes $AEFG$ et $AEF'G'$ ont même aire car ils ont même base $[AE]$ et même hauteur k (distance entre AE et sa parallèle passant par D)
   Donc le fait que F soit ou ne soit pas sur BC ne change pas l'aire du parallélogramme.

Adresse de l'auteur: Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C.Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse e-mail festraetscl@brutele.be.

2. EF' est confondue avec BC et $AD \parallel BC$ car $ABCD$ est un parallélogramme, d'où $EF' \parallel AD$. De plus $D \in F'G'$ et $AE \parallel F'G'$, donc $AE \parallel DF'$ et $AEF'D$ est un parallélogramme, donc $G' = D$.
3. $ABCD$ et $AEF'G'$ ont même aire car ils ont même base $[AD]$ et même hauteur h (distance entre les parallèles AD et BC).

D'où les aires des deux parallélogrammes sont égales.

2. Trouver tous les entiers x pour lesquels $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x-\sqrt{x}}$ sont eux-mêmes des entiers.

Solution de François Bonjean, élève de 4^e^année à l'Athénée Royal F. Bovesse à Namur

$\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$, d'où $x \in \mathbb{N}$

$\sqrt{x-\sqrt{x}} \in \mathbb{Z}$, d'où $x-\sqrt{x} \in \mathbb{N}$

Soit a un entier tel que $\sqrt{x-\sqrt{x}} = a$, de là on tire $x-\sqrt{x} = a^2$.

Posons $y = \sqrt{x}$, on obtient $y^2 - y - a^2 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2}$ (1)

Or $y \in \mathbb{Z}$, donc $\sqrt{1+4a^2} = \sqrt{1+(2a)^2} \in \mathbb{Z}$.

Le seul carré inférieur de 1 à un autre est 0; en effet, puisqu'il est évident que ce sont les carrés de deux nombres consécutifs :

$$\begin{aligned} a^2+1 &= (a+1)^2 \\ \Leftrightarrow a^2+1 &= a^2+2a+1 \\ \Leftrightarrow 0 &= 2a \\ \Leftrightarrow a &= 0 \end{aligned}$$

Donc, en revenant aux solutions de l'équation (1), on a $S = \left\{\frac{1\pm\sqrt{1+4.0^2}}{2}\right\} = \{0,1\}$.

3. Déterminer tous les triplets (x, y, z) constitués d'entiers naturels qui satisfont à l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1$$

Solution de Sam Meyer, élève de 4ᵉ année au Lycée français de Luxembourg

Déterminons tous les triplets (x, y, z) qui satisfont à l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1$$

On remarque premièrement que lorsque $x \geqslant 3$, y doit valoir 2. En effet, pour $x \geqslant 3$, $1-\frac{1}{x}$ se rapproche trop de 1 pour qu'on puisse l'écrire $2-\frac{3}{z}$, donc $y \neq 1$ et si $y \geqslant 3$, $\frac{2}{y} \leqslant 1-\frac{1}{x}$ puisque $1-\frac{1}{x} \geqslant \frac{2}{3}$ (on considère toujours que $x \geqslant 3$) et $\frac{2}{y} \leqslant \frac{2}{3}$, or $\frac{3}{z} \neq 0$, donc $1<y<3$, d'où $y=2$.

- Pour $x \geqslant 3$, on a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{2}{2}-\frac{3}{z}=1 \;&\Leftrightarrow\; \frac{1}{x}-\frac{3}{z}=0\\ &\Leftrightarrow\; z-3x=0\\ &\Leftrightarrow\; z=3x\end{aligned}$$

  Donc, si t est un naturel quelconque $z=3t$ et $x=t$.
- Pour $x=2$, observons le comportement de y et de z.
  On a $\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=\frac{1}{2}$
  On observe directement que $y \leqslant 3$, car à partir de $y=4$, $\frac{2}{y} \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui est impossible puisque $\frac{3}{z}>0$ par hypothèse. On a donc un choix réduit pour y (1, 2 ou 3). Calculons z dans chacun des cas :

y	1	2	3
z	2	6	9

  Donc pour $x=2$, les trois triplets possibles sont (2, 1, 2), (2, 2, 6), (2, 3, 9).
- Pour $x=1$, on a

$$\begin{aligned}1+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1 \;&\Leftrightarrow\; \frac{2}{y}-\frac{3}{z}=0\\ &\Leftrightarrow\; 2z-3y=0\end{aligned}$$

  On a donc, pour u un naturel quelconque, $z=3u$ et $y=2u$.
  Récapitulons tous les résultats avec $u \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 3$

x	1	2	2	2	t
y	$2u$	1	2	3	2
z	$3u$	2	6	9	$3t$

4.

(a) Quelles sont toutes les valeurs prises par le reste (par défaut) de la division de a^3 par 7 lorsque a est un naturel quelconque ?

(b) Les entiers naturels a, b, c sont tels que $a^3 + b^3 + c^3$ est divisible par 7. Que vaut le reste de la division de $a \cdot b \cdot c$ par 7 ?

Solution de Cédric Troessaert, élève de 4eannée à l'Institut Centre Ardenne à Libramont

a) Travaillons modulo 7.
Pour a, on a 7 possibilités : $a \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod 7$

$a \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$a^2 \pmod 7$	0	1	4	9	2	3	1
$a^3 \pmod 7$	0	1	1	6	1	1	6

On a 3 possibilités : 0, 1, 6.

b) Comme $6 \equiv -1 \pmod 7$, on a pour chaque terme (a^3, b^3 et c^3) trois possibilités : 0, 1 ou -1 (mod7).
Les deux possibilités pour obtenir

$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \pmod 7$$

sont de combiner soit trois 0, soit un 0, un 1 et un -1. Ce qui donne :

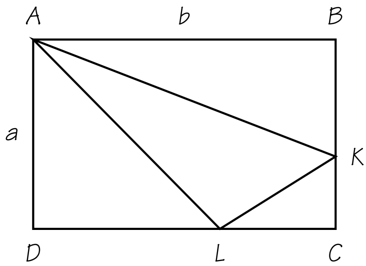
$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 &\equiv 0 \pmod 7 \\ 0 + 1 - 1 &\equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

On a chaque fois au moins un cube multiple de 7. Or si on regarde les calculs du (a), pour obtenir $a^3 \equiv 0 \pmod 7$, il faut que l'on ait $a \equiv 0 \pmod 7$.
Donc un des trois nombres a, b ou c est multiple de 7, d'où $a \cdot b \cdot c$ est multiple de 7 et le reste est 0.

MAXI

1. Etant donné un rectangle $ABCD$, déterminer deux points K et L respectivement sur $[BC]$ et sur $[CD]$ tels que les triangles ABK, AKL et ADL aient la même aire.

Solution de Gregory Fatzaun, élève de 5[e]année au Collège Marie Thérèse de Herve.



a) Pour que le triangle ABK et le triangle ADL aient la même aire, il faut que

$$\frac{b \cdot |BK|}{2} = \frac{a \cdot |DL|}{2}$$

c'est-à-dire

$$|BK| = \frac{a}{b}\,|DL| \qquad (1)$$

b) Si les triangles ABK, ADL, ALK ont la même aire, alors l'aire du rectangle est égale à

$$ab = 3\frac{a \cdot |DL|}{2} + \frac{|KL| \cdot |LC|}{2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
ab &= 3\frac{a \cdot |DL|}{2} + \frac{(b - |DL|) \cdot (a - |KB|)}{2} \\
&= 3\frac{a \cdot |DL|}{2} + \frac{1}{2}\,(b - |DL|) \cdot \left(a - \frac{a}{b}\,|DL|\right) \qquad \text{par 1} \\
&= 3\frac{a \cdot |DL|}{2} + \frac{a}{2b}\,(b - |DL|)^2 \\
b^2 &= \frac{3}{2}b\,|DL| + \frac{1}{2}\,(b - |DL|)^2 \\
&= \frac{3}{2}b\,|DL| + \frac{b^2}{2} - \frac{2b\,|DL|}{2} + \frac{|DL|^2}{2} \\
\frac{b^2}{2} &= \frac{b\,|DL|}{2} + \frac{|DL|^2}{2} \\
0 &= |DL|^2 + b\,|DL| - b^2
\end{aligned}$$

équation du second degré dont le réalisant est $\rho = b^2 + 4b^2 = 5b^2$; les solutions sont

$$\frac{-b \pm \sqrt{5b^2}}{2}$$

Les distances sont toujours positives, donc la solution négative est à rejeter et on a

$$\begin{aligned}
|DL| &= \frac{b\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2} \\
|BK| &= \frac{a\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2} \qquad \text{par } 1
\end{aligned}$$

2. Trouver toutes les solutions du système suivant d'inconnues réelles x, y, u et v.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ u^2 + v^2 = 1 \\ xu + yv = 1 \\ xu - yv = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solution de Vincent Mamédy, élève de 5^e^année à l'Institut Notre Dame du Sacré Coeur de Beauraing.

Nommons respectivement (A), (B), (C) et (D) les quatre équations de ce système.

De (C) et (D), on tire $xu = \frac{3}{4}$ et $yv = \frac{1}{4}$, d'où $x = \frac{3}{4u}$ et $y = \frac{1}{4v}$.

De (A), on tire par substitution :

$$\begin{aligned}
\frac{9}{16u^2} + \frac{1}{16v^2} &= 1 \\
\frac{9v^2 + u^2}{16u^2v^2} &= 1 \\
9v^2 + u^2 &= 16u^2v^2 \\
v &= \frac{\pm u}{\sqrt{16u^2 - 9}}
\end{aligned}$$

Ainsi (x, y, u, v) doit être égal à $\left(\frac{3}{4\alpha}, \frac{\pm\sqrt{16\alpha^2-9}}{4\alpha}, \alpha, \frac{\pm\alpha}{\sqrt{16\alpha^2-9}}\right)$ pour (un) certain(s) $\alpha \in \mathbb{R}$.

De (B), on tire :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{16\alpha^2 - 9} &= 1 \\ 16\alpha^4 - 24\alpha^2 + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation bicarrée admet comme solutions $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-\sqrt{3}}{2}$; ce sont les seules valeurs que α peut prendre.

Ainsi, les solutions du système d'équations sont :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

3. Déterminer tous les réels r tels que -20, 1, 10 et r soient les quatre solutions d'une équation de la forme $p(q(x)) = 0$ dans laquelle $p(x)$ et $q(x)$ sont des trinômes du second degré.

Solution de Antoine Dellieu, élève de 6ᵉannée à l'Institut Saint Joseph de Libramont.

L'équation

$$d\left(ax^2 + bx + c\right)^2 + e\left(ax^2 + bx + c\right) + f = 0$$

est du type $p(q(x) = 0$ où p et q sont des trinômes du second degré.

On peut poser $y = ax^2 + bx + c$.

Alors, nous avons $dy^2 + ey + f = 0$ dont nous appellerons les solutions y_1 et y_2. Dè lors

$$ax^2+bx+c = y_1 \qquad \text{ou} \qquad ax^2+bx+c=y_2$$
$$ax^2+bx+c-y_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad ax^2+bx+c-y_2=0$$

Ces équations ont pour racines les quatre données, à savoir -20, 10, 1 et r. Or on sait que dans tout trinôme du second degré la somme des racines vaut $\frac{-b}{a}$.

Nous remarquons que dans les deux équations ci-dessus, malgré que les racines soient différentes, b et a sont égaux, ce qui signifie que la somme des racines a la même valeur pour les deux équations. Ce qui donne, selon la manière dont peuvent être groupées les racines :

$$-20+1=10+r \qquad \text{ou} \qquad -20+10=1+r \qquad \text{ou} \qquad -20+r=10+1$$

d'où les valeurs de r : -29, -11 ou 31.

4. Les entiers a_0, a_1, a_2, ... , a_{100} satisfont aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} a_1 > a_0 \geqslant 0 \\ a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k \qquad (\text{pour} \quad k=0,1,2,...98 \quad) \end{cases}$$

Comparer les nombres a_{100} et 2^{99}. Sont-ils égaux L'un est-il toujours plus grand que l'autre? Si oui, lequel?

Solution de Jimmy Sudjana, élève de 5^e^année au CES Notre Dame des Champs de Bruxelles.

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 - 2a_0 \\ a_3 &= 3a_2 - 2a_1 \\ a_4 &= 3a_3 - 2a_2 \\ &\vdots \\ a_k &= 3a_{k-1} - 2a_{k-2} \\ a_{k+1} &= 3a_k - 2a_{k-1} \\ a_{k+2} &= 3a_{k+1} - 2a_k \end{aligned}$$

 Et pour ce que les méthodes ordinaires, qui sont dans les Livres, Additionnons membre à membre ces k égalités ($k = 0, 1, 2, ..., 98$), on obtient

$$a_{k+2} + a_{k+1} = 3a_{k+1} + 3a_1 - 2a_1 - 2a_0 \Leftrightarrow a_{k+2} = 2a_{k+1} + a_1 - 2a_0 \qquad (1)$$

Posons $a_0 = n$ et $a_1 = n + r$, $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}_0$, d'où

$$\begin{aligned} a_2 &= n + 3r = n + (2^2 - 1)r \\ a_3 &= 3(n + 3r) - 2(n + r) = n + 7r = n + (2^3 - 1)r \end{aligned}$$

Montrons que si $a_m = n + (2^m - 1)r$, alors $a_{m+1} = n + (2^{m+1} - 1)r$

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= 2a_m + a_1 - 2a_0 \qquad \text{par } (1) \\ &= 2(n + (2^m - 1)r) + (n + r) - 2n \\ &= 2n + (2^{m+1} - 2)r - n + r \\ &= n + (2^{m+1} - 1)r \end{aligned}$$

Par récurrence, on a montré que si $a_0 = n$ et $a_1 = n + r$, alors $a_m = n + (2^{m+1} - 1)r$ ($m = 1, 2, 3, ..., 100$).

De là, $a_{100} = n + (2^{100} - 1)r \geqslant 2^{100} - 1$ car $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}_0$

d'où $a_{100} > 2^{99}$

a_{100} est toujours plus grand que 2^{99}.

L'enseignement est le meilleur moyen d'apprendre, j'en suis toujours convaincu ; en communiquant nos connaissances, nous continuons à découvrir et à apprendre. En outre, cette activité nous oblige chaque fois à une nouvelle formulation de ce que nous désirons exprimer, nous force à de nouveaux essais, à la recherche constante de nouvelles méthodes. Les liens permanents avec la jeunesse nous aident à rester jeunes d'esprit et nous rendent capables de nous étonner constamment.

Erno Rubik.

Les publications de l'**A**ssociation des **P**rofesseurs de **M**athématiques de l'**E**nseignement **P**ublic (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.
— Les brochures signalées par * sont de publication récente.
— Le prix « *adhérent* » concerne l'A.P.M.E.P. **et la S.B.P.M.ef**.

N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix en € *sans port*	
	<u>Collège</u>	public	adhérent
*503	La jubilation en mathématiques		
	Fichiers Evariste : 480 problèmes tirés de différents tournois et rallyes mathématiques	4.90	**3.80**
98/132	*2 tomes :*	21,35	**15,25**
502	EXCEL-Classe, CD-Rom (Version individuelle)	16.75	**16.75**
55	*Géométrie expérimentale avec CABRI*	13.40	**12.65**
119	Jeux 5 (Des activités mathématiques au collège)		
	Série EVAPM : Evaluation 6^{e} (première chez nous !)	11	**7.60**
112/118	2 fascicules : Analyses et résultats & Dossier professeur	17.50	**12.15**
352	Tableur et mathématiques au Collège	12,20	**9,90**
451	Concours Australien de mathématiques	15,85	**11**
250/	Panoramas de compétitions mathématiques		
*251	*Panoramath 96 & Panoramath 2*	25,90	**12,50**
	<u>Lycée</u>		
*138	*Statistiques en classe de seconde*	8.70	**6**
*120	Classeur informatisé de documents math. - 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	45,95	**30,50**
	Version 26 installations, port compris	91,45	**61**
	CD-Rom de mise à jour	10,65	**7,60**
90/	Série EVAPM : Evaluation 1re (cinquième chez nous !)		
107/108	3 fascicules	21.35	**14.50**
*305	GALION-Thèmes Seconde : 10 thèmes programme 2000	11,45	**9,90**
*450	MathÉvasion : 46 activités en bandes dessinées	7,60	**5,35**
	Avec CABRI, faire de la géométrie en jouant		
124/125	*2 tomes déjà paru*	17,55	**10,65**
*129	Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaires	9.90	**6.85**
121	Maths en scène : Commentaires des 22 thèmes de l'expo « Mathématiques 2000 » utilisable indépendamment	11,00	**7,60**
402	Jeux du Scientific American	20.60	**14.50**

PORT (prix indicatif) : 1 brochure : 2,50 € ; 2 ou 3 brochures : 4,00 € et au-dessus de 3 : 6,50 €

Serveur de l'APMEP : `http://www.apmep.asso.fr`

Des Problèmes et de jeux

C. Festraets

Recouvrement

Problème n° 250 de Mathématique et Pédagogie n° 132.

Tout rationnel de l'intervalle $]0;1]$ *peut être écrit sous la forme* $\frac{a}{b}$ *(a et b premiers entre eux) et recouvert par l'intervalle* $\left[\frac{a}{b}-\frac{1}{4b^2};\frac{a}{b}+\frac{1}{4b^2}\right]$. *Démontrer que* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *n'est recouvert par aucun de ces intervalles.*

Solution de M. COYETTE de Rixensart

On sait que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Imaginons a et b entiers strictement positifs tels que $a<b$.

$\frac{a}{b}$ n'est pas solution de l'équation $2x^2-1=0$, d'où

$$\begin{aligned}
2\frac{a^2}{b^2}-1 &\neq 0\\
2a^2-b^2 &\neq 0\\
\left|2a^2-b^2\right| &\geqslant 1\\
\left|\sqrt{2}a-b\right| &\geqslant \frac{1}{\left|\sqrt{2}a+b\right|}\\
\left|a-\frac{b}{\sqrt{2}}\right| &\geqslant \frac{1}{2a+\sqrt{2}b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a}{b}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| &\geqslant \frac{1}{2ab+\sqrt{2}b^2}\\
\left|\frac{a}{b}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| &> \frac{1}{(2+\sqrt{2})b^2}\\
\left|\frac{a}{b}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| &> \frac{1}{(2+\sqrt{2})b^2}\\
\left|\frac{a}{b}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| &> \frac{1}{4b^2}
\end{aligned}$$

Bonnes solutions de P. BORNSZTEIN de Pontoise, P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek et J. GOLDSTEINAS de Bruxelles.

Adresse de l'auteur: Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C.FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse e-mail festraetscl@brutele.be.

$n^{\text{ème}}$ premier

Problème n° 251 de *Mathématique et Pédagogie* n° 132.

Dans la suite des entiers naturels, on désigne par p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. Démontrer que $p_n < 2^{2^n}$.

Solution de P. BORNSZTEIN de Pontoise (France)

D'après le théorème de Tchebytcheff (postulat de Bertrand) :

pour tout entier $k \geqslant 2$, il existe un nombre premier dans l'intervalle $]k; 2k[$.

Ainsi, on a clairement $p_{n+1} < 2p_n$.

De $p_1 = 2$, il vient alors par récurrence $p_n \leqslant 2^n$, avec égalité si et seulement si $n = 1$. Ce qui fournit une meilleure majoration que celle demandée.

Notons que le théorème des nombres premiers peut s'énoncer : $p_n \sim n\ln(n)$, ce qui laisse entrevoir que des majorations du type $p_n < a^n$ où $a > 1$ sont vite assez peu précises...

En fait, avec quelques calculs « à la Tchebytcheff », on peut prouver par exemple que pour $n \geqslant 2$, on a $\frac{n\ln(n)}{9\ln(2)} < p_n < \frac{8n\ln(n)}{\ln(2)}$.

Les lecteurs suivants ont envoyé de bonnes solutions : M. COYETTE de Rixensart, P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek et J. GOLDSTEINAS de Bruxelles.

Equation fonctionnelle

Problème n° 252 de *Mathématique et Pédagogie* n° 132.

Soit f une fonction définie sur l'ensemble des entiers positifs et ayant ses valeurs dans le même ensemble. Sachant que $f(f(n) + f(m)) = m + n$ pour tous les entiers positifs m et n, déterminer toutes les valeurs possibles de $f(2001)$.

Solution de P. LE GAL

f est surjective car tout entier positif m est l'image de $f(m) + f(0)$.

f est injective car : $f(m) = f(n) \Rightarrow f(f(m)+f(m)) = f(f(n)+f(n)) = 2m = 2n$, d'où $m = n$.

Donc f est bijective et admet une réciproque f^{-1}.

Pour tout entier positif m on a : $f(m)+f(0)=f^{-1}(m)$, donc si on pose $n=f^{-1}(m)$, pour tout entier positif n, on a $f(f(n))+f(0)=n$.

Cette relation est vraie aussi pour 0 : $f(f(0))+f(0)=0$. Or f et $f\circ f$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. D'où $f(0)=0$.

Donc pour tout entier positif n, $(f\circ f)(n)=n$; f est une involution de $\mathbb{N}$.

Posons $a=f(1)$ (donc $f(a)=1$).

Montrons par récurrence que $f(n)=na$.

La relation est vraie pour 0 et 1. Supposons la vraie pour n. Alors : $f(n+1)=f(f(na)+f(a))$ car f est involutive et l'hypothèse $f(n)=na$ entraîne $f(na)=n$.

Donc $f(n+1)=na+a=(n+1)a$. La récurrence est établie.

La relation $f(n)=na$ est aussi vraie pour l'entier na, on a donc $f(na)=(na)a=na^2$. Or $f(na)=n$, donc $a^2=1$, donc $a=1$ car $a\in\mathbb{N}$. D'où f est l'application identique de $\mathbb{N}$ et $f(2001)=2001$.

Bonnes solutions de P. BORNSZTEIN de Pontoise, J. FINOULST de Diepenbeek et J. GOLDSTEINAS de Bruxelles.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir avant le 1er mai 2002.

259. Rond, rond, rond ...

Déterminer tous les nombres entiers strictement positifs a, b et c tels que $b^2=ac-ab-bc$. (proposé par M. Coyette de Rixensart)

260. Côtés et aire

a, b, c sont les côtés d'un triangle d'aire A. Démontrer que $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\cdot A$. Quand l'égalité a-t-elle lieu ?

261. Diviseur et reste

Si r est le reste de la division par d de chacun des nombres 1059, 1417 et 2312 et si d est un entier positif strictement supérieur à 1, déterminer la valeur de $d-r$.

Revue des revues

Claude Villers

Cette revue — comme bien d'autres — fait partie de la bibliothèque de la SBPMef située au local du 15, rue de la Halle à Mons où elle peut être consultée dans les heures de bureaux. Ch. Depotte assure également un service de prêt de ce portefeuille de lecture.

Bulletin de l'APMEP - N 431 Novembre-Décembre 2000

Cette livraison du bulletin de l'APMEP comporte d'abord l' éditorial du Président Rémi Belloeil. Intitulé « L'aveugle et le paralytique », il plaide sur la complémentarité des divers branches des mathématiques et sur la nécessité d'une formation continuée intégrant les outils modernes de calcul.

Dans l'article « Angles et rapporteur » Monique Maze signale les difficultés qu'éprouvent les jeunes élèves pour s'approprier le système symbolique mis en oeuvre dans l'instrumente de mesure des angles et propose une activité au cours de laquelle les élèves peuvent évoluer vers une utilisation lucide du rapporteur.

Eric Roditi étudie dans « Ordre de grandeur et multiplication des décimaux », une méthode de contrôle du produit de deux décimaux, montre les services qu'elle peut rendre et comment il convient de l'utiliser.

Jean-Pierre Richeton en collaboration avec Dominique Maillard expose le déroulement de « Séances d'aide individualisée français-mathématiques ». L'expérience a paru assez concluante aux auteurs par l'intérêt suscité chez les élèves par la synergie des deux matières trop souvent jugées incompatibles.

Une grande partie de ce numéro est alors consacrée à la suite du dossier « Géométrie » traité dans le n° 430 de la revue.

6 textes retiennent tout notre intérêt.

1. Dans « Figures et géométrie », Rémi Langevin souhaite « promouvoir une approche visuelle de la géométrie » des textes développent des généralités sur la géométrie et son enseignement.
2. Dans un article « Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie au collège », Daniel

Perrin illustre par la notion d'aire une recherche d'un équilibre entre divers points de vue.

3. « Géométrie du secondaire et programme d'Erlangen » donne l'occasion à Michel Carral de tracer les grandes lignes de ce que devrait être un enseignement de la géométrie dans le secondaire qui serait basé sur le programme d'Erlangen.
4. Dans « Voir ce que l'on dit, dire ce que l'on voit », René Guitart propose une réflexion approfondie sur la géométrie, les concepts et les outils.
5. « Enseigner la géométrie avec un ordinateur » donne l'occasion à Roger Cuppens de plaider en faveur de l'enseignement de la géométrie et propose d'utiliser l'ordinateur pour privilégier les concepts de base. Trois annexes à l'article traitent « Les cas d'égalité des triangles vu par Cabri », « Faire de l'analyse avec Cabri » et « Cabri et le hasard ».
6. Dans « triangles isométriques et configurations », Bernard Destainville décrit un système de repérage des transformations isométriques à l'aide de leurs caractéristiques.

Le bulletin comporte encore une présentation de « Gerbert, savant et pape de l'an Mil » par Michel Guillemot ainsi que les rubriques permanentes : Avis de recherche (souvent des problèmes à résoudre), Les problèmes de l'APMEP, Présentation de brochures et Matériaux pour une documentation.

Bulletin de l'APMEP n° 433 Mars-Avril 2001

« Les nouveaux programmes et la liberté pédagogique » est le titre de l'éditorial du Président, de l'APMEP, Rémi Belloeuil.

L'auteur y note que « la liberté de l'enseignant s'exerce dans un cadre précis qui comporte un certain nombre de contraintes ». Ce sont ces limites et d'autres encore, à la liberté pédagogique qui font l'objet du texte présenté.

La rubrique « Dans nos classe » propose ensuite quatre textes :

— « Quelques réflexions à propos des dysfonctionnements des multiplications et des divisions par des puissances de 10 » par Boris Véron.
L'auteur émet quelques idées sur la façon d'opérer des élèves qui doivent effectuer des multiplications par 10 et ses puissances positives. Il propose ensuite une réflexion sur le cadre classique dans lequel ces opérations s'effectuent et présente alors la manière dont il aborde e classe la division par les puissances de 10 dont les exposants sont négatifs.

– « pourquoi la dérivée de $(3x+2)^2$ n'est-elle pas $2(3x+2)$« par Rémi Belloeuil.
L'article montre comment il est possible de donner du sens à la formule usuelle en rendant naturel le calcule de la dérivée d'une fonction composée.
– « La triple approche : un modèle de l'activité mathématique des élèves » par Catherine Sackur et Jean-Philippe Drouhard.
Les auteurs y développent l'idée que toute activité peut-être étudiée de trois points de vue différents par ailleurs indissociables : l'espace psychologique, l'espace social et l'espace réel.
– « Profession : guide » par Patricia Richard-Felici
Il s'agit d'un texte court qui présente le problème bien connu d'un élève intelligent cependant inhibé par les mathématiques.
La rubrique suivante propose la deuxième partie d'un dossier sur l'arithmétique. Outre l'introduction de Daniel Reisz, cinq articles traitent du sujet.
– « Fractions égyptiennes » de Mathieu Savin. L'auteur y étudie la méthode égyptienne d'expression des fractions puis démontre que toute fraction rationnelle positive et strictement inférieure à 1 s'exprime comme somme de fractions unitaires.
– « Les calculatrices : quelques algorithmes utiles aux élèves ».
Il s'agit ici de quelques extraits de la brochure « Enseigner l'arithmétique » réalisée par l'IREM de Poitiers. Des algorithmes de calcul (organigrammes) sont présentés et commentés : quotient et reste de la division de deux entiers, diviseurs communs de deux nombres, *PGCD* de a et b par l'algorithme d'Euclide, *PGCD* et *ppcm* de a et b par l'algorithme de Borel, test pour savoir si un nombre est premier. Décomposition en facteurs premiers, changement de base de numération, ...
– « Générations géométriques et algébriques des triplets pythagoriciens » par André Stoll.
L'auteur présente une construction simple de toutes les fractions pythagoriciennes x/y telles que $x^2+y^2=z^2$ avec x, y, z entiers naturels non nuls et premiers entre eux trouvée dans la revue « L'ouvert » et, surtout, démontre que chaque triplet est ainsi obtenu une et une seule fois.
– « Le théorème de Gauss dans les Eléments d'Euclide ? » par Michel Henry.
L'auteur y présente une belle application : pour tout entier n, n est entier ou irrationnel !

— « Le billard arithmétique » par Pierre Delhay
Cet article traite du problème classique de la trajectoire d'une boule sur un billard rectangulaire quadrillé. La rubrique « Pour chercher et approfondir » propose alors le articles suivants :
  * « Cabri-Géomètre et systèmes dynamiques » par Abderrahman Ait Ouassarah
    Il s'agit de la présentation d'une utilisation du logiciel pour visualiser certaines propriétés qualitatives des systèmes dynamiques. La dimension animation que permet le logiciel apporte un nouveau style de simulation sur ces systèmes et jette un nouvel éclairage sur leur enseignement.
  * « Un tracé empirique d'arcs de cercle » par Joël Le Lay
    Il s'agit d'une étude réalisée à la suite d'une question pratique : comment poser des bordures de trottoir en arc de cercle s'il n'est pas possible d'accéder au centre ?
    Une méthode pratique de résolution du problème est étudiée théoriquement.
  * « Le théorème du sandwich » par André Duhoux
    C'est la présentation du fait qu'un sandwich au jambon et au beurre peut être coupé par un plan qui partage le pain, le beurre et le jambon en volumes égaux.

  La livraison du bulletin comporte encore les rubriques habituelles et toujours fort intéressantes que sont : Les problème de l'APMEP, Matériau pour une documentation ainsi que des informations sur la vie de l'association.

Internet Corner.

Nous vous recommandons le très beau site de Mathématique animée de **Louis A. Talman**, professeur au Département de Mathématique au Metropolitan State College of Denver. Près de 25 théorèmes ou propriétés mathématiques remarquables nous sont montrées en animation.
Certaines de ces animations sont parfois longues à télécharger, vu la complexité des dessins qui les composent, mais cela en vaut la peine.

`http://clem.mscd.edu/~talmanl/MathAnim.html`

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Janvier 2002)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent Mathématique et Pédagogie, SBPM-Infor et Math-Jeunes.

Belgique :
- Cotisation *ordinaire* : 20 €
- Cotisation *familiale* (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications) : 28,50 €
- Cotisation *réduite* (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Union Européenne : 36 €,
Europe hors Union Européenne : 38 €,
Hors Europe : *envoi prioritaire*, 72 €, *envoi non prioritaire*, 42 €.

Abonnement à Mathématique et Pédagogie

Belgique : 26 €, Union Européenne : 32 €,
Europe hors Union Européenne : 33 €,
Hors Europe : *envoi prioritaire*, 46 €, *envoi non prioritaire*, 34 €.

Abonnement à Math-Jeunes Junior et Math-Jeunes

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, inférieur et supérieur, sont idéalement pris par l'intermédiaire d'un professeur.
Abonnement isolé à *une des deux revues* (4 numéros) :
- Belgique : 4,96 €,
- Union Européenne : 9,20 €,
- Europe hors Union Européenne : 10,20 €,
- Hors Europe : Envoi prioritaire, 20,40 €, *envoi non prioritaire* : 11,40 €.

Abonnement isolé *aux deux revues* (7 numéros) :
- Belgique : 8,68 €,
- Union Européenne : 16,50 €,
- Europe hors Union Européenne : 17,17 €,
- Hors Europe : *envoi prioritaire*, 35,60 €, *envoi non prioritaire*, 20 €.

Abonnements groupés (au moins 5) à *Math-Jeunes* et *Math-Jeunes Junior*.

Abonnements groupés à une des deux revues : (4 numéros)
- Belgique : 3,72 €,
- Union Européenne : 6 €,
- Europe hors Union Européenne : 7,60 €,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 15,20 €,
  - Envoi non prioritaire : 8,60 €.

Abonnements groupés aux deux revues : (7 numéros)
- Belgique : 6,57 €,
- Union Européenne : 10,60 €,
- Europe hors Union Européenne : 13,40 €,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 26,60 €,
  - Envoi non prioritaire : 15,10 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement au compte de la SBPMef, s'abonner au bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France), le prix de l'abonnement est : 40 €. Ils peuvent également, par la même voie, commander des publications de l'APMEP (voir la page APMEP dans ce numéro).

Vente d'anciens numéros de Mathématique et Pédagogie

Avant 1999 : 0,74 €/N° + frais de port (Cat. 1),
Années 2000 et 2001 : 2,48 €/N° + frais de port (Cat. 1).

Vente d'anciens numéros de Math-Jeunes

Avant 1999/2000 : 0,25 €/N° + frais de port (Cat. 1),
Années 2000/2001 : 0,50 €/N° + frais de port (Cat. 1).

Brochures

Le prix d'une brochure ou d'un cd-rom mentionnés aux tableaux 1 et 2 s'obtient en additionnant le prix de base mentionné dans le tableau 1 ou 2 aux frais de port mentionnés dans le tableau 3 en fonction de la catégorie postale à laquelle appartient la brochure ou le cd-rom. Lorsqu'un prix réduit est mentionné, ce prix est réservé aux membres de la SBPMef et aux étudiants.

Tableau 1 : Prix de base Brochures	Prix plein	Prix réduit	Cat. post.
Séries RENOVER			
Série 1 (n^o 1 au n^o 6 épuisés, reste n^o 12)	1,24 €	/	2
Série 2 (n^o 7 au n^o 11 et n^o 13)	5,45 €	/	5
Série 3 (n^o 14)	5,45 €	/	3
Les 3 séries (n^o 7 au n^o 14)	7,44 €	/	6
Dossiers d'explorations didactiques			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,86 €	1,24 €	4
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,86 €	1,24 €	4
Dossier 6 (Statistiques)			
Moins de 11 ex.	7,44 €/ex.	6,18 €/ex.	7
Par groupes de 11 ex.	74,44 €	61,8 €	8
Olympiades Mathématiques Belges			
Tome 4 (1 ex.)	5.50 €		1
De 2 à 3 ex.	5,50 €/ex.	/	6
De 4 à 6 ex.	5 €/ex.	/	7
De 7 à 13 ex.	4,50 €/ex.	/	8
Plus de 14 ex.	4 €/ex.	/	8
Jacques Bair			
Mathématique et Sport	4,96 €	3,72 €	3
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie,...	12,39 €	9,92 €	5
Tableau 2 : Prix de base CD-Rom			
G. Robert			
Programmes mathématiques	4,96 €	/	3

Tableau 3 : Frais de port

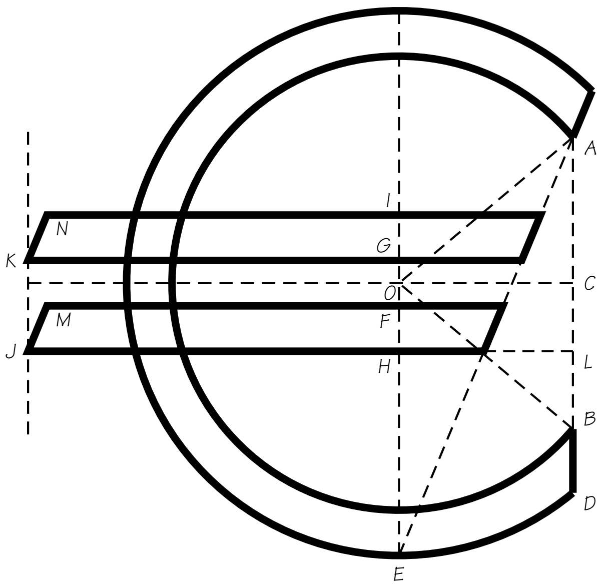
Catégorie	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe,
1	0,25 €	1,61 €	1,74 €	4,09 €
2	0,67 €	0,99 €	1,12 €	1,98 €
3	1,07 €	1,61 €	1,74 €	4,21 €
4	1,44 €	2,48 €	3,22 €	7,93 €
5	1,98 €	2,97 €	3,22 €	7,93 €
6	2,48 €	3,72 €	5,70 €	14,87 €
7	2,97 €	2,73 €	3,22 €	4,09 €
8	Consulter le secrétariat			

Pour effectuer une commande, il vous suffit de verser le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique :
Effectuer vos paiements au compte 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons.

Si vous habitez en France :
Nous vous demandons d'effectuer votre versement en Euros uniquement sur le compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef 15 rue de la Halle à B-7000 Mons, Belgique.

Si vous habitez ailleurs :
Effectuez de préférence un virement international au compte
CCP « giro » 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons, Belgique.
Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement « giro »), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.



$|OA| = x$

Cercle $(O, |OA|)$

$\widehat{AOC} = \widehat{COB} = 40°$

$|OD| = \frac{6}{5}x$

Cercle $(O, |OD|)$

$\widehat{COE} = 90°$

$|OF| = |OG| = \frac{x}{10}$

$|FH| = |GI| = \frac{x}{5}$

$JK // AB$

$|JL| = \frac{12}{5}x$

$JM // KN // EA$

Le premier passeport de l'enseignant... qui octroie des réductions et des gratuités !

Pour celles et ceux qui ne connaîtraient pas encore le système de la carte et les avantages qu'elle octroie à ses détenteurs, nous vous rappelons que le détenteur d'une **Carte PROF** :

- peut entrer **gratuitement, à titre privé,** dans plus de 170 musées et attractions de Belgique (soit un gain de +/- 700 euros au cas où il visiterait une seule fois chacune des attractions),

- reçoit **en cadeau**, une brochure couleur qui lui indique les endroits où fonctionne le principe de la carte et lui fournit une foule de renseignements pratiques (jusqu'à épuisement du stock),

- bénéficie d'autres avantages annoncés dans le **bulletin bimestriel Profs-Infos** : autres avantages culturels et touristiques, invitations à nos manifestations "Profs-Contacts", et autres.

Cette année, plus que jamais, votre **Carte PROF** s'européanise. Nous n'avons jamais eu, en effet, autant de témoignages de professeurs qui ont pu utiliser leur passeport à l'étranger (voir nos courriers des lecteurs).

Nouveautés pour 2002...

- avantage réservé uniquement au titulaire de la Carte PROF pour l'achat privé de matériel APPLE (voir PROFS-INFOS de janvier),

- tarif préférentiel (exclusif Carte PROF) sur les abonnements de la D.H., Libre Belgique et Libre Match. (voir PROFS-INFOS de janvier)

Comment procéder?

☞ Remplissez le formulaire ci-dessous et dûment complété et signé à l'adresse ci-après:

Carte PROF - route de Beaufays, 64
4140 SPRIMONT.
☎ 04.234.32.44 - E-mail: info@lcd.be.

DEMANDE POUR L'OBTENTION DE LA **CARTE PROF 2002** N°: FR / 335/

NOM (de jeune fille) :

PRENOM :

ADRESSE : N°

CODE POST. : LOCALITE :

N° DE MATRICULE ENSEIGNANT :

Branche enseignée: ....

Niveau d'enseignement: ☐ maternel ☐ primaire ☐ secondaire ☐ supérieur ☐ technique ☐ éducateur ☐ autre: ....

(cochez les cases adéquates s.v.p.)

Signature :

Tél. (privé) N°...........................

☐ J'ai déjà eu une Carte PROF.
Mon N° de carte était : ....

☐ Je n'ai jamais eu de Carte PROF.

☐ Je désire recevoir **1 Carte PROF 2002** au prix de **10 €.**

☐ Je joins un chèque de .... BEF au nom de Carte PROF.

Cachet de l'Ecole

Non valable sans cachet