Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N° 136 Mars-Avril 2002

NOTE

* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
* Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
* Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant ($\LaTeX 2_\varepsilon$, Word); les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.

  L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.

  Pour les livres :

  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.

  Pour les articles :

  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

 Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée.

Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Éditorial

J. NAVEZ

J'espère que vous apprécierez comme moi le texte d'une conférence remarquable faite par Miguel De Guzmàn lors des Journées Nationales de l'APMEP qui ont eu lieu à Lille. Ce texte figure dans le présent numéro de Mathématique et Pédagogie.

L'analyse de l'enseignement des mathématiques faite par l'auteur est très profonde et très pertinente. Je voudrais en souligner certains points et montrer combien ils peuvent intéresser notre communauté.

L'introduction en Europe des mathématiques dites « modernes " » a poussé les mathématiciens vers le formalisme, la rigueur et un certain abandon de l'intuition dans la construction de la Science. De Guzmàn dit que les conséquences de cette introduction furent néfastes et plus particulièrement en ce qui concerne la géométrie. C'est vrai que la recherche des fondements est un exercice fastidieux qui intéresse peu les élèves et que l'on peut remplacer en première approche par un consensus intuitif sur les propriétés de base. Je voudrais cependant que le « retour du balancier » n'induise pas uniquement que des mathématiques utilitaires, récréatives et superficielles. La rigueur et les démonstrations sérieuses, le caractère déductif et les mathématiques totalement inutiles mais si esthétiques ne devraient pas être confinées à de petits îlots dans le programme.

Il faut aussi se rendre compte que puisque la résolution de problèmes, l'introduction de mathématiques discrètes et l'usage des nouveaux moyens de calcul doivent absolument faire partie des programmes du primaire et du secondaire, il faut bien soulager ces programmes d'autres contenus. Mais lesquels ? Ne supprimons pas trop vite des contenus actuellement considérés comme peu fréquentables comme par exemple les exercices répétitifs de calcul algébrique. Je vois souvent des étudiants de première candidature désespérément accrochés à leur calculatrice parce que le problème qu'ils doivent résoudre implique le signe d'un trinôme du second degré ou parce que la solution d'une équation du premier degré est $\frac{3}{7}$ mais découverte avec 4 décimales et qu'il faut la substituer au carré (ou pire) dans deux autres expressions.

En ce qui concerne la formation initiale, je rejoins également De Guzmàn lorsqu'il précise l'énorme carence d'une formation adaptée de nos étudiants.

En mathématique, la formation universitaire est essentiellement orientée vers la recherche de pointe aussi bien dans les méthodes que dans les contenus, quelques concessions sont faites en ce qui concerne les mathématiques orientées vers des pratiques économiques ou statistiques mais à un niveau qui intéresse prioritairement des utilisateurs financiers et industriels. La transmission des connaissances est un devoir essentiel que nous devons assurer aux générations qui nous suivent. Il faut donc que le professeur de mathématique reçoive une formation vraiment adaptée et j'espère que l'Université pourra profiter de la réforme dite 3-5-8 (Bologne) pour réformer son cursus sinon d'autres institutions vont immanquablement prendre la relève pour la formation des enseignants. Il faut aussi une revalorisation peut être plus que morale des enseignants pour insuffler un élan novateur dans nos pratiques d'enseignement.

Le cinquième recueil des questions des Olympiades Mathématiques Belges est en chantier ! Il couvrira les épreuves des années 1999 à 2002. Sa parution coïncidera avec l'ouverture du Congrès 2002 de notre association (21,22 et 23 août à Soignies). Son coût restera modique de manière à ne pas constituer un obstacle à son acquisition par les élèves à la fois comme outil de préparation à l'OMB et comme source importante de problèmes pour le cours.

De la Fraction au Nombre

A. CHEVALIER et C. DOCQ, *GEM — UCL*

2^e^partie : les engrenages dans les vélos.

Mots clés : fraction, rapport, engrenage.

Chaque histoire personnelle de l'apprentissage des fractions commence tôt, avec les premières expériences concrètes de partage. Elle se poursuit longtemps, jusqu'à l'acquisition du concept de nombre, en passant par la découverte de diverses facettes des fractions et des opérations.

Le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) a préparé quelques séquences d'activités qui jalonnent cet apprentissage. Dans cet article, nous vous en proposons une, destinée à des élèves du premier degré et qui amène à réfléchir sur le fonctionnement d'un dérailleur ([1]).

La première partie contient la description des activités proposées aux élèves et la seconde propose les solutions et les commentaires épistémologiques pointant les différentes facettes du concept de fraction à l'oeuvre.

Activités.

1. Dans la salle, il y a deux vélos dont un avec trois plateaux à l'avant et six à l'arrière (vélo vert) et un autre avec un plateau à l'avant et six à l'arrière (vélo gris) ([2]). Nous indiquons au tableau la réflexion suivante :

« Tous ces plateaux, c'est du bluff »

2. Voici deux représentations qui peuvent vous aider : ([3])

([0]) Adresses des auteurs : Anne Chevalier, rue de l'eau vive, 15, 1420 Braine l'Alleud, e-mail : a_chev@encbw.be, Christine Docq, drève du bonheur, 16 , 1150 - Bruxelles, christine.docq@brutele.be

([1]) L'activité décrite dans cet article a fait l'objet d'un atelier au Congrès annuel en août 2000 à Seraing.

([2]) Il va de soi qu'il faut adapter cette séquence aux vélos disponibles.

([3]) Cette représentation n'est fournie qu'au moment où les participants manisfestent le besoin de compter le nombre de dents de chaque roue.

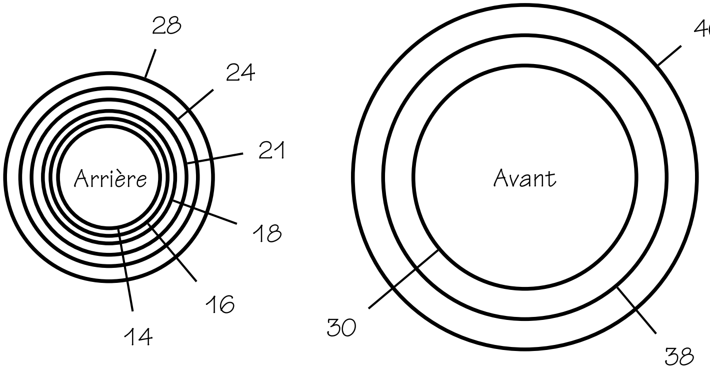


Fig. 1 : Schéma du vélo vert.

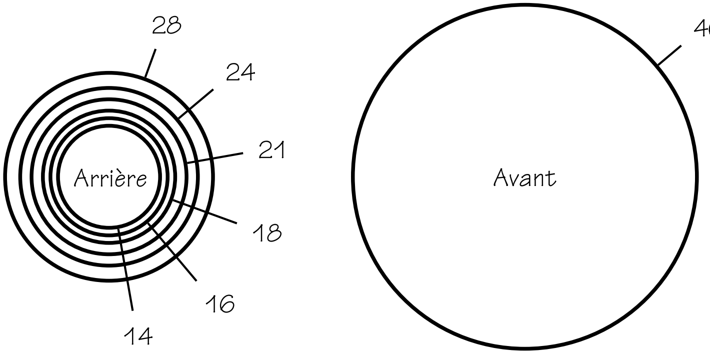


Fig. 2 : Schéma du vélo gris.

Solutions et commentaires.

1. Les élèves sont invités à former des petits groupes, à s'approcher des vélos, à les observer, les manipuler afin de réagir le plus objectivement possible à la phrase écrite au tableau. Pour certains, c'est déjà une découverte de constater le nombre de plateaux différents et d'observer que ceux de devant sont plus grands que ceux de derrière. Pour avancer dans la réflexion, il faut fixer son attention sur une association possible d'un plateau avant et d'un plateau arrière et essayer de

comprendre ou observer ce qui se passe quand on se met à tourner le pédalier. Certains peuvent essayer concrètement en mesurant la distance parcourue au sol par tour de pédale (appelée développement), d'autres vont calculer ce développement à partir du diamètre de la roue et du nombre de dents des plateaux. C'est le moment de fournir les informations relatives au nombre de dents des plateaux des deux vélos.

2. Pour comprendre le fonctionnement d'un dérailleur, il faut passer par les observations suivantes :

   - les dents des plateaux avant et arrière ont la même forme et la même taille quel que soit leur diamètre de façon à pouvoir s'emboîter dans les maillons d'une même chaîne ;
   - lorsque le plateau du pédalier fait un tour :
     - il tourne d'un certain nombre de dents d_A et le plateau entrainé tourne du même nombre de dents d_A ;
     - le nombre de tours réalisés par le plateau arrière dépend aussi du nombre de dents d_B de la roue arrière. Il est d'autant plus élevé que d_B est petit et que d_A est grand.

   Considérons le cas particulier où $d_A = 30$ et $d_B = 14$.

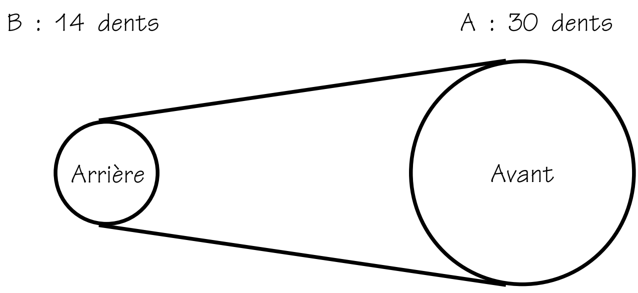


Fig. 3 : Cas particulier.

Pendant que le plateau avant réalise un tour complet, 30 dents sont engrenées. Puisque qu'une chaîne relie les deux roues, un même nombre de dents sont engrenées au plateau arrière, ce qui fait tourner le plateau arrière de 2 tours et $\frac{2}{14}$ de tour, qui correspond à $\frac{30}{14}$ de tours.

Ce raisonnement permet de conclure que chaque fois que le plateau du pédalier fait un tour, le plateau arrière fait un nombre de tours égal à $\frac{d_A}{d_B}$ qui n'est évidemment pas toujours entier. Le plateau arrière étant lié à la roue arrière, celle-ci réalise donc ce même nombre de tours.

Par tour de pédalier, on avance d'une distance d'autant plus grande que :

- le rapport $\frac{d_A}{d_B}$ est élevé ;
- le diamètre de la roue arrière du vélo est grand.

Pour connaître toutes les possibilités qui sont offertes pour un vélo donné, il faut envisager tous les rapports possibles. Les cyclistes parlent de « braquets ([4]) » ou de « vitesses ([5]) » à propos de ces rapports. Le tableau ci-dessous reprend ces différents rapports pour le vélo vert. Remarquons que toutes les possibilités du vélo gris se retrouvent dans la dernière colonne.

d_A ► d_B ▼	30	38	46
14	$\frac{30}{14} = \frac{15}{7}$	$\frac{38}{14} = \frac{19}{7}$	$\frac{46}{14} = \frac{23}{7}$
16	$\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$	$\frac{38}{16} = \frac{19}{8}$	$\frac{46}{16} = \frac{23}{8}$
18	$\frac{30}{18} = \frac{5}{3}$	$\frac{38}{18} = \frac{19}{9}$	$\frac{46}{18} = \frac{23}{9}$
21	$\frac{30}{21} = \frac{10}{7}$	$\frac{38}{21}$	$\frac{46}{21}$
24	$\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$	$\frac{38}{24} = \frac{19}{12}$	$\frac{46}{24} = \frac{23}{12}$
28	$\frac{30}{28} = \frac{15}{14}$	$\frac{38}{28} = \frac{19}{14}$	$\frac{46}{28} = \frac{23}{14}$

([4]) On peut s'étonner du fait que, dans les médias, les braquets soient présentés sous forme de produit $d_A \times d_B$ au lieu de rapport $\frac{d_A}{d_B}$

([5]) Le terme est mal choisi dans la mesure où il n'est pas question ici de distance parcourue par unité de temps.

Pour analyser un tel tableau , il faut comparer et ordonner ces différents rapports qui sont ici tous fractionnaires.

Le plus petit rapport est celui qu'on obtient en choisissant le plus petit numérateur et le plus grand dénominateur c.-à-d. $\frac{30}{28}$; tandis que *le plus grand s'obtient à partir du plus grand numérateur et du plus petit dénominateur c.-à-d.*$\frac{46}{14}$.

La classification par ordre croissant des rapports $\frac{d_A}{d_B}$ est la suivante :

$$\frac{15}{14}, \frac{5}{4}, \frac{19}{14}, \frac{10}{7}, \frac{19}{12}, \frac{23}{14}, \frac{5}{3}, \frac{38}{21}, \frac{15}{8}, \frac{23}{12}, \frac{19}{9}, \frac{15}{7}, \frac{46}{21}, \frac{19}{8}, \frac{23}{9}, \frac{19}{7}, \frac{23}{8}, \frac{23}{7}$$

Pour procéder à cette mise en ordre des différents rapports, il faut comparer les rapports deux par deux.

Toutes les fractions d'une même colonne ont même numérateur. La plus petite aura le plus grand dénominateur. Elles s'ordonnent par ordre décroissant de dénominateur.
Toutes les fractions d'une même ligne ont même dénominateur. La plus petite aura le plus petit numérateur. Elles s'ordonnent par ordre croissant de numérateur.

Malheureusement (pour les élèves!) l'ordre de toutes ces fractions ne correspond ni à celui des colonnes, ni à celui des lignes. On est donc amené à comparer des fractions n'ayant ni même numérateur, ni même dénominateur. Plusieurs techniques sont possibles :

- *On réduit facilement au même dénominateur :*
  $\frac{10}{7}$ et $\frac{19}{14}$ correspondent à $\frac{20}{14}$ et $\frac{19}{14}$. Donc, $\frac{10}{7} > \frac{19}{14}$.
- *On décompose les fractions à partir d'un entier proche :*
  $\frac{19}{8}$ et $\frac{23}{9}$ correspondent à $\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8}$ et $\frac{23}{9} = 2 + \frac{5}{9}$.
  Or $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ et $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$, donc $\frac{19}{8} < \frac{23}{9}$.

  $\frac{23}{14}$ et $\frac{5}{3}$ correspondent à $\frac{23}{14} = 2 - \frac{5}{14}$ et $\frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{3}$.
  Or $\frac{5}{14} > \frac{1}{3}$, donc $\frac{23}{14} < \frac{5}{3}$.

La succession des 18 rapports sous forme de fractions permet difficilement de cerner leurs positions relatives. A ce stade, on est amené *à exprimer ces rapports à l'aide de nombres décimaux.*
Les situer sur trois droites graduées (une par plateau, placée l'une en dessous de l'autre) peut aussi aider à visualiser les positions relatives des rapports.

Les questions suivantes permettent de poursuivre la réflexion à propos du fonctionnement d'un vélo avec différents plateaux.

- Pour mieux se rendre compte des variations des « vitesses », calculez le rapport entre la plus grande et la plus petite, calculez les écarts absolus et relatifs d'une « vitesse » à l'autre.
- Un vendeur donne le conseil d'utilisation suivant : « Associez le grand plateau avant avec les trois plus petits plateaux arrière, le plateau du milieu avec les quatre plateaux du milieu à l'arrière et le petit plateau avant avec les trois grands plateaux arrière ». Comment ce conseil se justifie-t-il d'un point de vue technique ? De cette façon, nos dix-huit « vitesses » annoncées se réduisent à dix. Est-ce vraiment grave ? (Pour y voir plus clair, on peut barrer sur la droite graduée les « vitesses » dont on n'a pas usage.)
- Comment se passent les changements de « vitesse » en pratique ? Passe-t-on toujours d'une « vitesse » à celle qui lui est directement supérieure ou inférieure ?
- Pour chacune de ces « vitesses », calculez la distance parcoure en un tour de pédale (appelée « développement »).

Prolongation possible.

Pour donner suite au travail sur les engrenages relatifs aux vélos, on peut s'intéresser à des successions d'engrenages qui comprennent entre autre des roues solidaires.

Dans un premier temps, on propose aux élèves de découvrir et de comprendre le fonctionnement d'une association de quelques engrenages simples montés à partir d'une boîte de jeux ([6]).

Ensuite, on montre aux élèves des horloges mécaniques sous forme de jeu à construire « Horloge 2000 ([7]) » et on leur pose les questions suivantes :

— *Comment peut-on expliquer que l'aiguille des heures et celle des minutes tournent correctement ?*
— *Quelle est la période (temps d'aller-retour) du balancier ?*

([6]) QUERCETTI, Intelligent toys 3D Gears.
([7]) réf. 2085000, JOUSTRA 67 402 ILLKIRCH CEDEX.

Conclusion

Cette séquence sur les engrenages met en oeuvre des fractions dans des situations où elles apparaissent naturellement comme des rapports. Néanmoins, lorsqu'il s'agit de comparer ces rapports, il est plus facile de les considérer comme des nombres écrits sous forme décimale. L'intérêt des situations relatives aux enchaînements d'engrenages, c'est qu'elles amènent des produits de fractions.

Nous espérons avoir pu vous éclairer sur quelques possibilités de travailler les fractions (et les opérations qui y sont liées) avec des élèves du premier degré dans des contextes variés et porteurs de sens.

★ ★ ★

Déterminez le réalisant (ρ) de l'équation suivante :

$$0,1x^2 - 6,36x + 0,27425 = 0$$

Attention, la traduction des énoncés mathématiques peut parfois prendre des formes étranges. Ainsi l'équation posée se traduit

en allemand	$0,01x^2 - 1,4x + 0,10425 = 0$
en autrichien	$0,01x^2 - 3,71x + 0,095 = 0$
en espagnol	$0,1x^2 - 12,9x + 0,06 = 0$
en français	$0,01x^2 - 2,57x + 1,13325 = 0$
en finlandais	$0,01x^2 - 2,44x + 0,19675 = 0$
en grec	$0,01x^2 - 18,46x + 0,54 = 0$
en irlandais	$0,01x^2 - 0,89x + 0,1134 = 0$
en italien	$x^2 - 44,1x + 2,135 = 0$
en néerlandais	$0,01x^2 - 1,49x + 0,40975 = 0$
en portugais	$0,01x^2 - 14,16x + 0,59 = 0$

Il est impossible de traduire ce problème en anglais, en suédois ou en danois.

(Aimablement communiqué par Michel Coyette de Rixensart.)

$\rho_{belge} = 40,3399$, $\rho_{allemand} = 1,95583$, $\rho_{autrichien} = 13,7603$, $\rho_{espagnol} = 166,386$
$\rho_{francais} = 6,55957$, $\rho_{finlandais} = 5,94573$, $\rho_{grec} = 340,75$, $\rho_{irlandais} = 0,787564$
$\rho_{italien} = 1936,27$, $\rho_{neerlandais} = 2,20371$, $\rho_{portugais} = 200,482$

Cabri et les complexes

C. RANDOUR-GABRIEL, *A.R. Gatti de Gamond, Formatrice T-CUBE Belgique.*

Introduction.

Les figures ci-dessous ont été construites avec les élèves de 6ème à 6h de mathématique par semaine. Cette présentation permet une approche et un développement aisés de la théorie des nombres complexes. Le calcul dans $\mathbb{C}$ n'apparaît plus comme un jeu de symboles copié sur les règles du calcul dans $\mathbb{R}$ mais prend un sens concret et demande une réflexion plutôt que des automatismes noyant les concepts fondamentaux. Le but de ce texte n'est pas de développer un cours sur les complexes, mais de montrer la richesse des possibilités qu'offre Cabri et de suggérer divers problèmes à résoudre avec les élèves.

Complexe et similitude directe.

Dès qu'un point d'une droite représente *o* et un autre point l'unité, les nombres réels sont en bijection avec les points de cette droite.

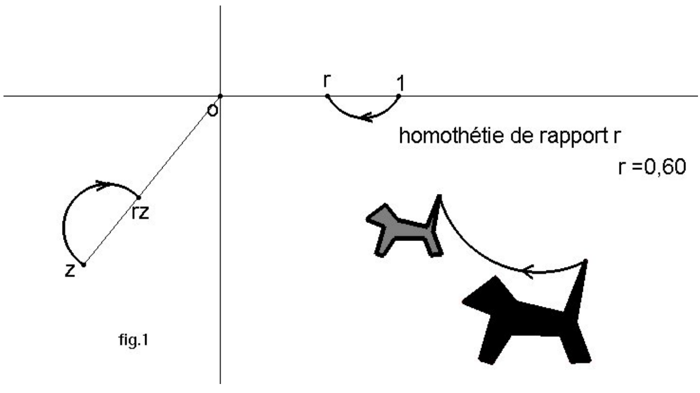


fig.1

Adresse de l'auteur: Chantal RANDOUR-GABRIEL, rue du magistrat, 46, 1050 - Bruxelles
e-mail : ch.randour@brutele.be

Tout réel *r* est associé à une homothétie du plan de centre *o*. (fig. 1)

Les rotations du plan de centre *o* sont représentées sur le cercle trigonométrique.

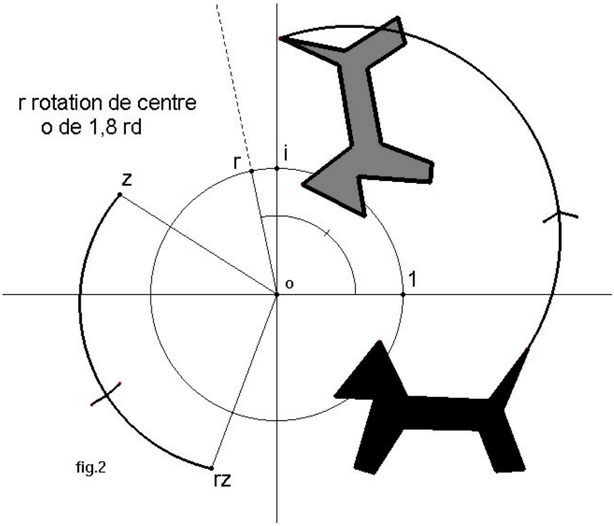


fig.2

Représentons la droite réelle et le cercle trigonométrique ensemble. Le centre *o*, l'unité, le sens trigonométrique et l'origine des angles sont fixés. Tout point *c* du plan euclidien orienté peut être associé à une similitude directe.

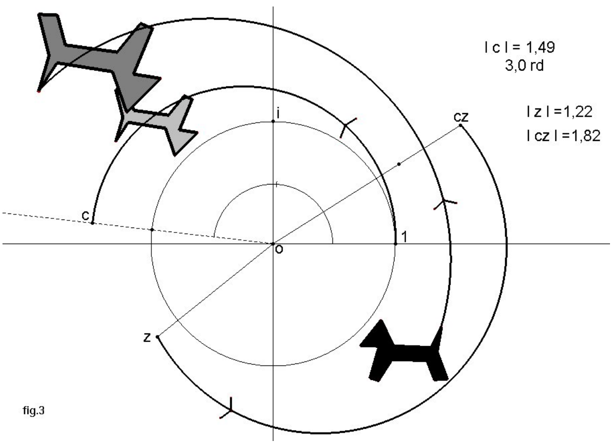
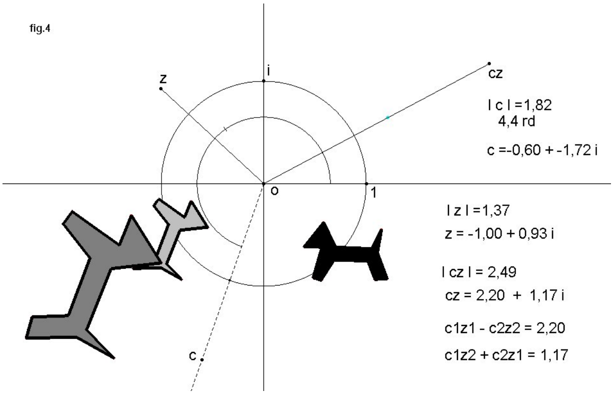


fig.3

 elles le sont, ni même à priori si elles peuvent l'être.

Un complexe apparaît dans le plan comme représentant d'une similitude directe et comme point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et donc comme vecteur.

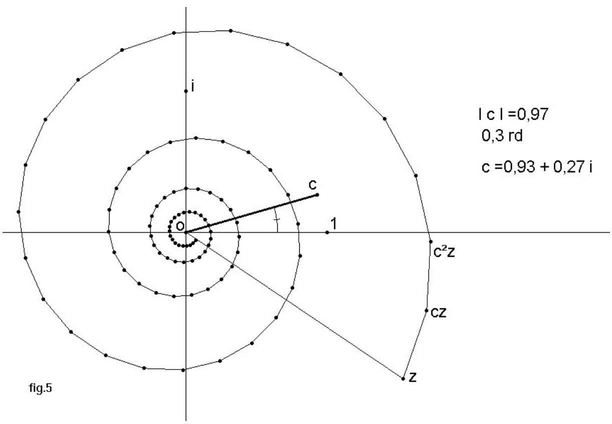
Cette double présentation permet d'établir une **loi de multiplication** et une **loi d'addition** sur $\mathbb{C}$ en « copiant » l'addition des vecteurs du plan et la composition des similitudes directes de centre *o* du plan.



Une macro-construction peut être associée à la multiplication par le complexe *c*.

En appliquant la multiplication par *c* à *z* et aux produits successifs, on décrit l'orbite des $z \cdot c^n$

Voici quelques orbites obtenues en déplaçant *c*.



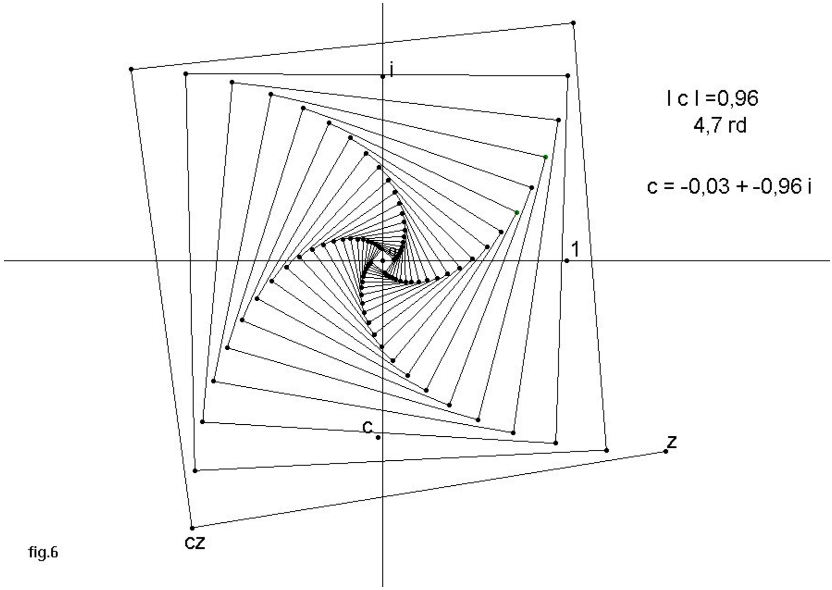


fig.6

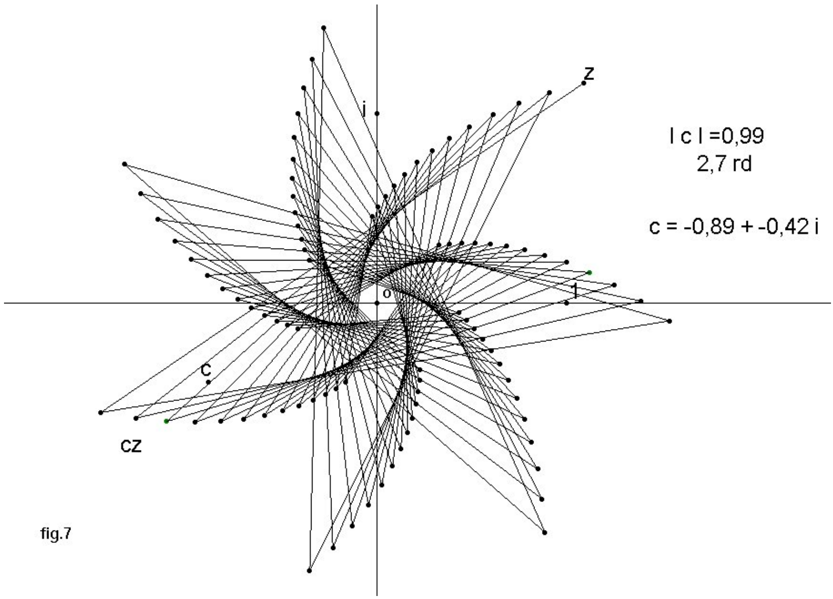


fig.7

 des réformateurs modernes de la Géométrie, personne, parmi les

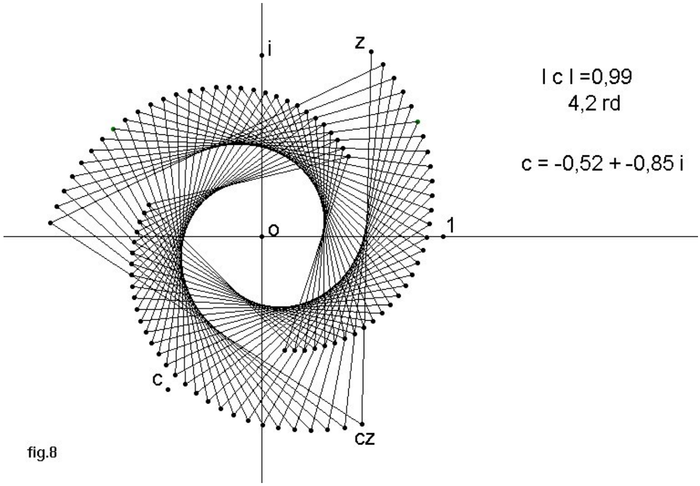


fig.8

Chaque complexe non nul admet un **inverse** comme chaque similitude directe non nulle admet une réciproque.

Voici un complexe c, son inverse et les similitudes associées.

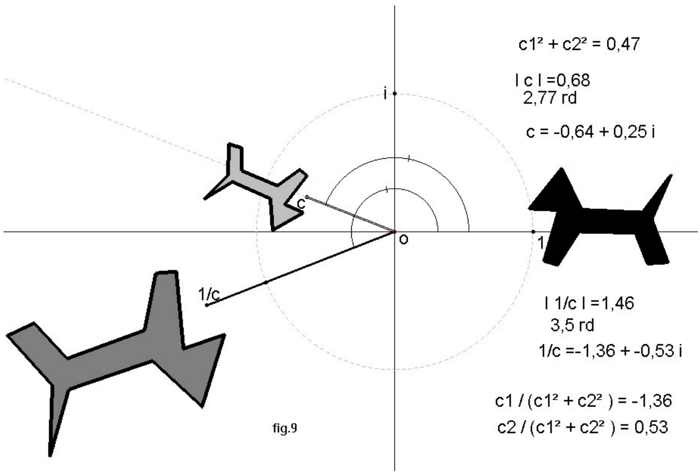


fig.9

Chaque complexe admet des **racines n-iemes**.

Voici les racines 13-ieme de c et les similitudes associées.

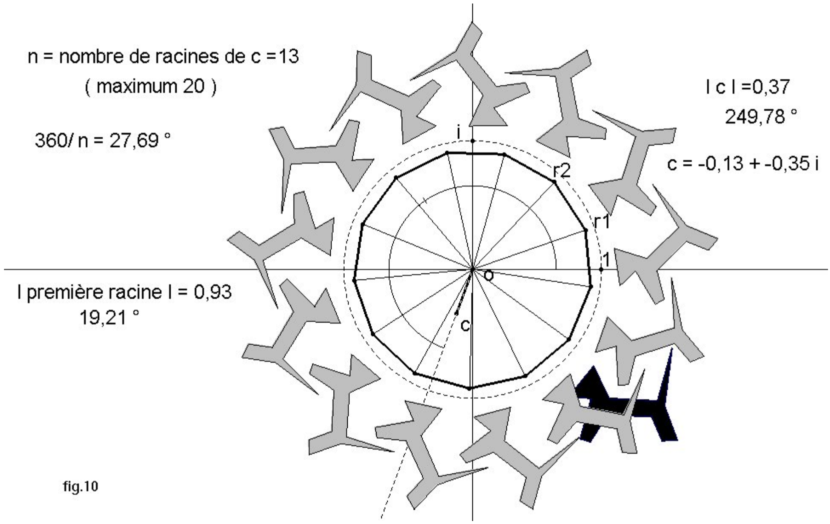


fig.10

En particulier chaque complexe admet 2 **racines carrées**.

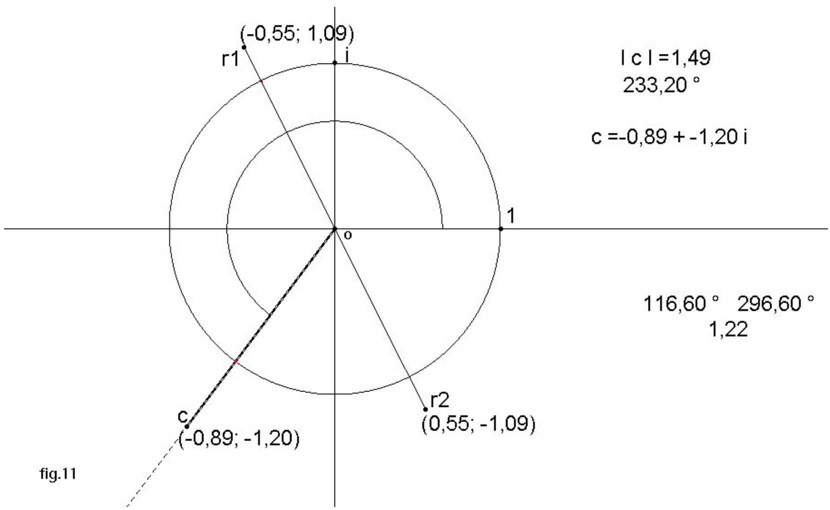


fig.11

Voici les racines 5-ieme de c et l'image d'un chien par les similitudes associées à ces racines.

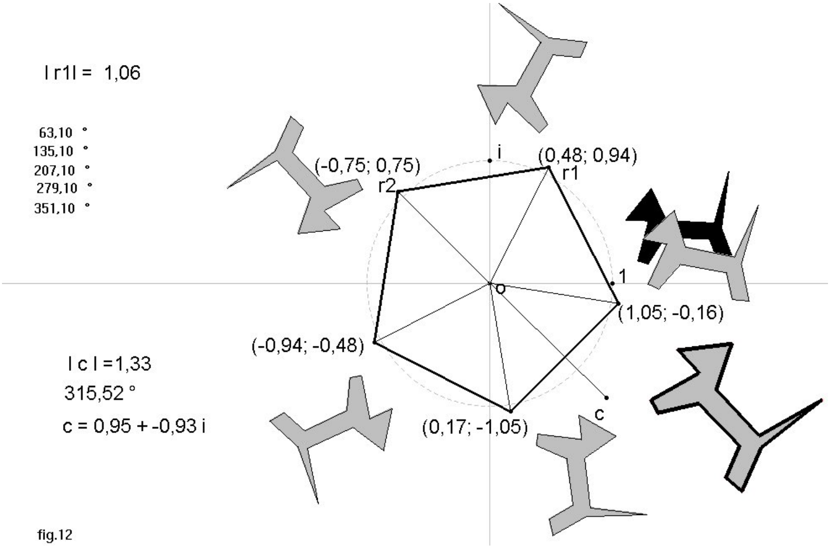


fig.12

Voici l'orbite des $z \cdot c^m$ *avec* $m < 0$ *ou encore* $z. \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^n$ *avec* $n = -m$

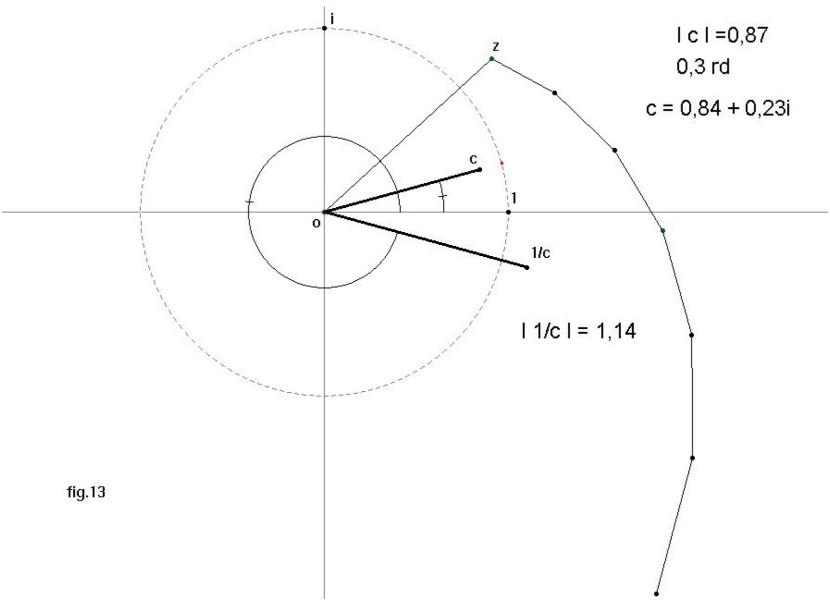


fig.13

Résolution de l'équation du second degré à coefficients complexes.

- Créer une macro donnant les coordonnées et plaçant le complexe $z_1.z_2$ à partir des coordonnées de z_1 et z_2 dans le repère O, 1, i choisi.
- Dans le plan complexe choisir 3 points a, b, c.
- Construire b^2, ac, $4ac$ en utilisant la macro produit de 2 complexes avec les coordonnées.
- Construire $b^2 - 4ac$ par translation.
- Construire géométriquement les racines carrées de $b^2 - 4ac$.
- Construire le vecteur $-b$ et les images des racines par ce vecteur.
- Construire géométriquement $\frac{1}{a}$ et le milieu de o et $\frac{1}{a}$.
- Multiplier ce complexe aux translatés des racines.

Redéfinir a ou b ou c pour obtenir les solutions de quelques équations particulières.

Voici les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ et leur lieu lorsque a varie sur une droite comprenant O.

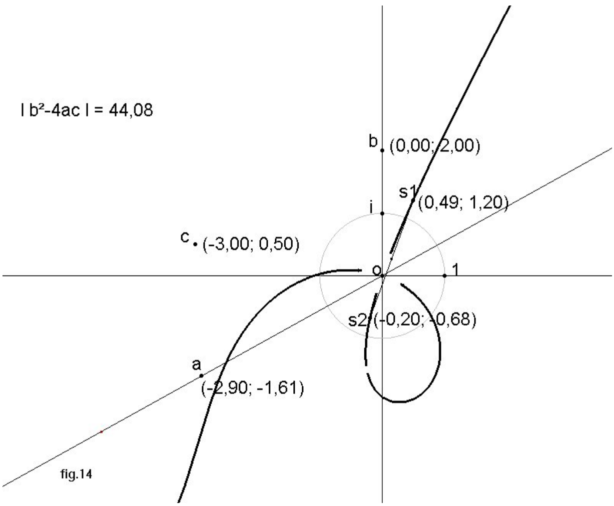


fig.14

Image d'un complexe par une fonction du second degré à coefficients complexes.

Dans le plan complexe, choisir a, b, c, x et indiquer leurs coordonnées.

Construire en utilisant la macro plaçant le produit de 2 complexes et des constructions géométriques, les nombres $\frac{-b}{(2a)}$, $b^2 - 4ac$ et $\frac{(b^2-4ac)}{(4a)}$.

Construire

$$x - \frac{b}{2a}, \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2, a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{et} \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Redéfinir x en le plaçant sur un cercle ou une droite et observer la trace ou le lieu de son image.

Voici x et $f(x) = ax^2 + bx + c$

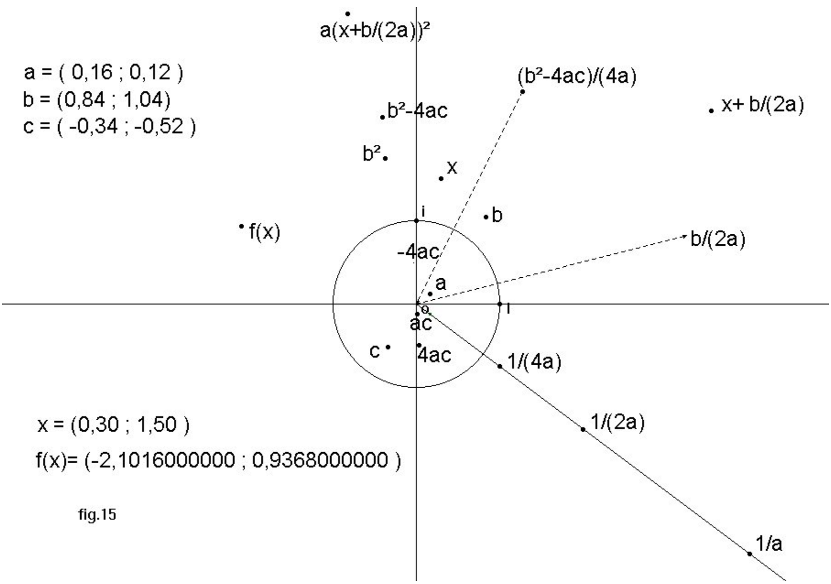


fig.15

Voici l'image d'une droite par cette fonction f.

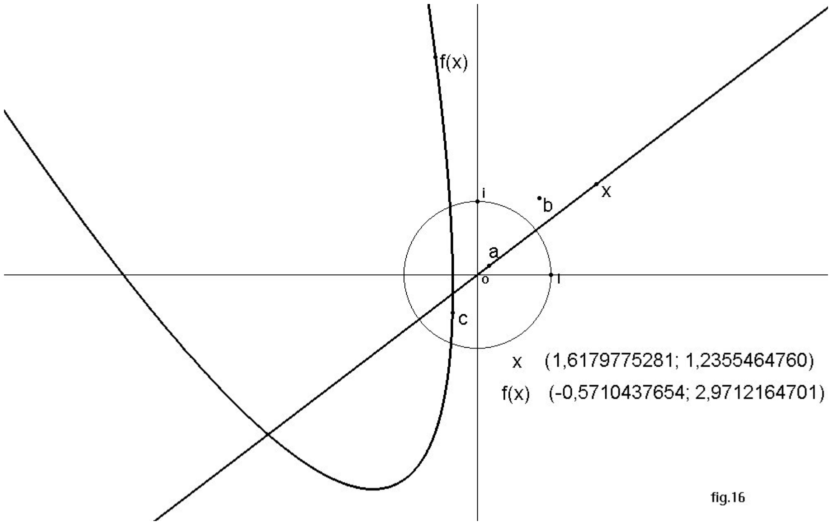


fig.16

Et l'image d'un cercle par cette même fonction *f*.

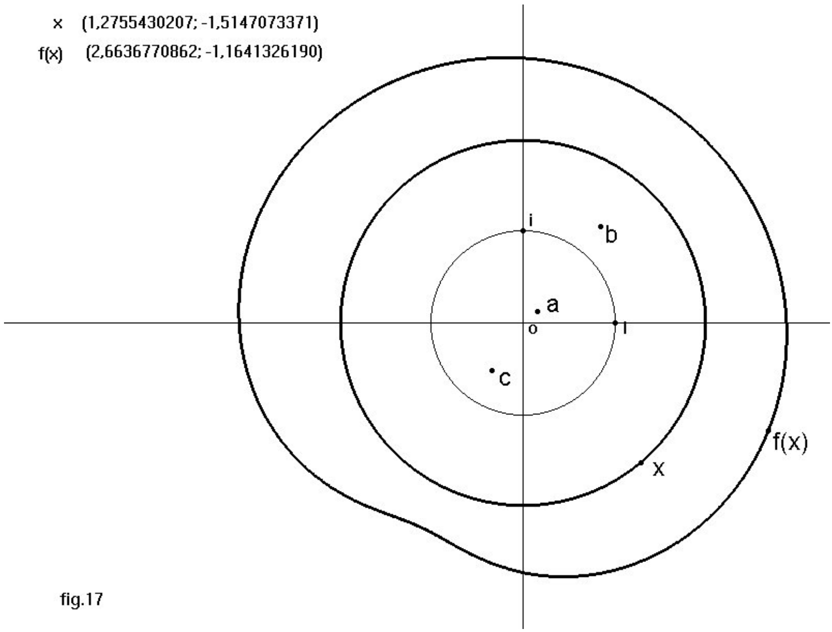


fig.17

Voici l'image d'un autre cercle de centre *o* par cette fonction *f*.

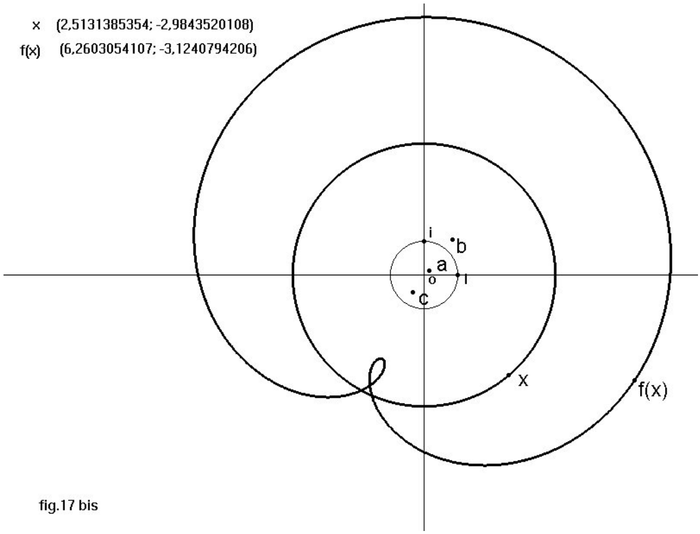


fig.17 bis

Complexes et matrices.

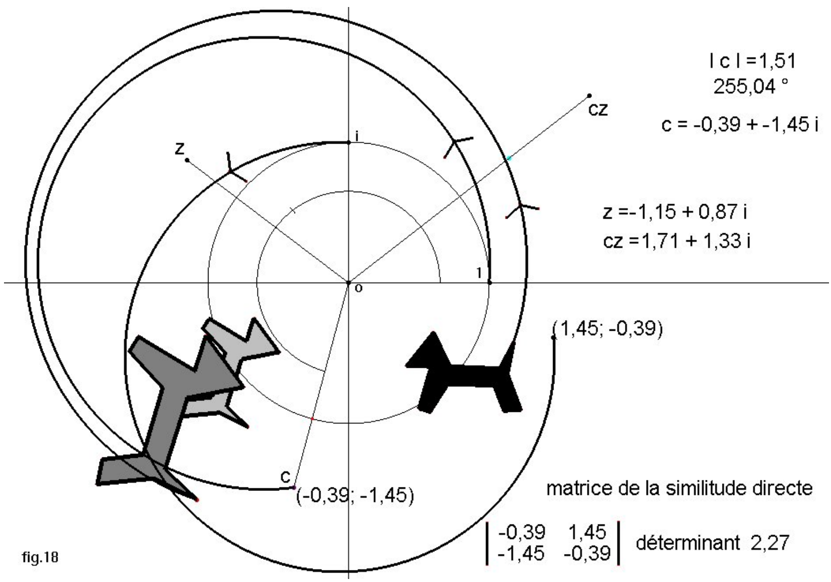


fig.18

Recherche de l'équation de l'image d'une droite par la fonction $z \to z^2$.

- Dans le plan euclidien orienté, choisir 2 complexes a et b.
- Construire la droite comprenant ces 2 points.
- Afficher les coordonnées de ces 2 points dans la base O,1,i.
- Placer un point c sur cette droite et construire c^2 en utilisant la macro produit de 2 complexes.
- Afficher le lieu de c^2 lorsque c varie.
- Choisir 2 autres points sur la droite.
- Construire l'image de a, b, et des 2 nouveaux points.
- Dessiner la conique comprenant les 5 images.
- Afficher les équations de la droite et de la conique.

a et b déterminent une droite

$a = a_1 + a_2 i$

$b = b_1 + b_2 i$

$t = \frac{y-a_2}{b_2-a_2} = \frac{x_1-a_1}{b_1-a_1}$

$x_1 = (b_1 - a_1)t + a_1$

$y = (b_2 - a_2)t + a_2$

L'équation de la droite peut s'écrire $z = x + yi$

La courbe transformée de la droite est

$$z^2 = ((b_1 - a_1)t + a_1)^2 - ((b_2 - a_2)t - a_2)^2 + 2((b_1 - a_1)t + a_1)((b_2 - a_2)t + a_2)i$$

En posant

$p_1 = b_1 - a_1$ et $p_2 = b_2 - a_2$

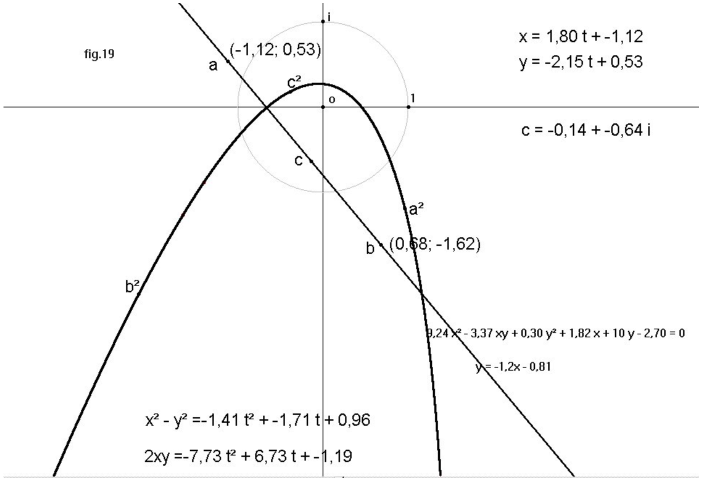
$z^2 = (p_1 t + a_1)^2 - (p_2 t + a_2)^2 + 2(p_1 t + a_1)(p_2 t + a_2)$

$z^2 = (p_1^2 - p_2^2)t^2 + 2(a_1 p_1 - a - 2p_2)t + a_1^2 - a_2 + (2p_1 p_2 t^2 + 2(a_2 p_1 + a_1 p_2)t + 2a_1 a_2)i$

ou $u = (p_1^2 - p_2^2)t^2 + 2(a_1 p_1 - a_2 p_2)t + a_1^2 - a_2$

$v = 2p_1 p_2 t^2 + 2(a_2 p_1 + a_1 p_2)t + 2a_1 a_2$

si $z^2 = u + vi$



Fonction exponentielle.

Si $c = x + yi$, $exp(c) = exp(x) + (cos\,(y) + i\,sin\,(y))$

Image d'une droite :

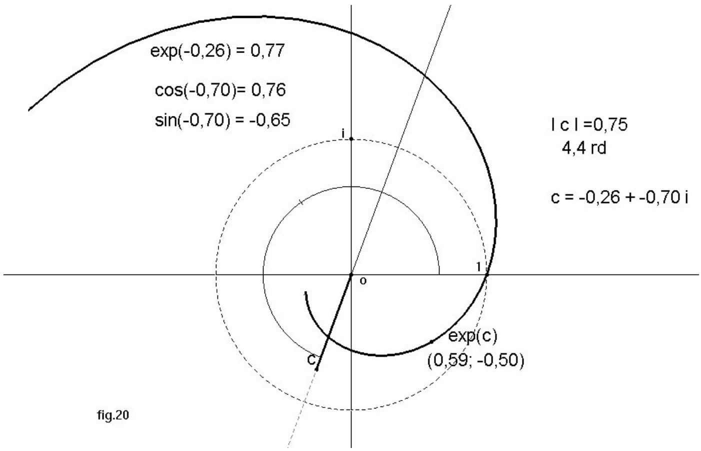


Image d'un cercle :

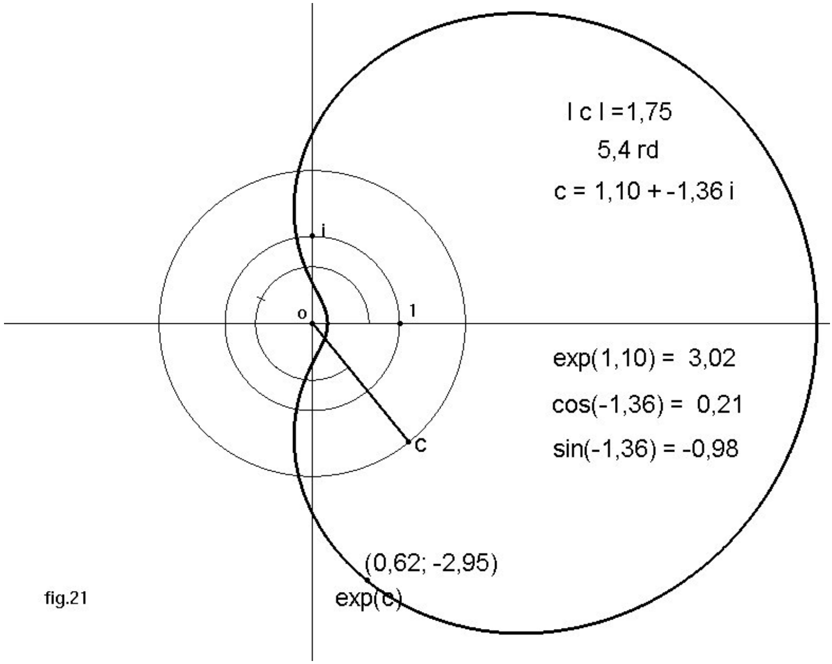


fig.21

Bibliographie

[1] Murray R. Spiegel, *Variables Complexes, Cours et Problèmes*, Série Schaum McGraw-Hill, 1973.

[2] Irem, *Images, Imaginaires, Imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*, Ellipses, Paris, 1998.

[3] Papy, *Mathématique Moderne 6*, Labor-Didier, Bruxelles, 1966.

[4] Wegner, Tyler, Peterson, Branderhorst, Waite Group, *Fractals for Windows*, 1992.

Les illustrations ont été réalisées sur Cabri-Géomètre II sur PC, Laborde et Bellemain, Texas Instruments.

Les images 18 et 19 ont été capturées par Paint Shop Pro 6.01, Jasc Software.

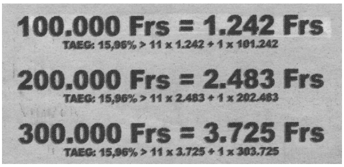
Mathématique et Pédagogie n°136, 27–38, 2002

Exploitation en mathématique générale de publicités financières

J. BAIR et D. JUSTENS, ***Université de Liège***
Institut Cooremans (HEFF), Bruxelles

1. Présentation

Tous les jours, de nombreux organismes financiers nous proposent des contrats de prêts et de financements fort variés dont ils font une publicité attrayante. L'utilisation de formules « choc », amusantes par leur côté absurde, ne doit pas faire oublier le caractère commercial sous-jacent et la volonté parfois bien claire de ne pas informer le client si pas de l'abuser. A titre d'exemple, considérons la publicité suivante que nous analyserons dans la suite :



Certes, aucun être sensé ne peut se laisser leurrer par une présentation aussi manifestement éloignée de la réalité objective. Mais peut-on affirmer que chacun est capable de se diriger dans les labyrinthes de la finance, de choisir ses emprunts et ses investissements de manière rationnelle, d'acheter des produits d'épargne en toute connaissance de cause ? Et surtout, n'avons-nous, en tant que mathématiciens, aucune responsabilité dans la formation civique des futurs citoyens ?

Il nous apparaît qu'une formation sérieuse en finance s'avère de plus en plus indispensable à l'homme moderne. L'achat de simples produits

[0] Adresses des auteurs : Bair, Jacques, Université de Liège, Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales, 7, Boulevard du Rectorat, Bat B31, 4000 Liège.
Justens, Daniel, Haute Ecole Francisco Ferrer, Departement Economique Type Long, Place Anneessens, 11, 1000 Bruxelles.

d'épargne, comme les obligations d'Etat, ces investissements dits *de bons pères de famille*, requiert aujourd'hui une mathématique de troisième cycle, lesdits produits étant assortis d'options sur taux difficilement valorisables et nécessitant l'utilisation de résultats récents ([1])

Sans aller jusque là, et sans exiger de tous une formation de ce niveau, il nous semble néanmoins indispensable d'aborder dès le secondaire des problèmes financiers concrets, illustrant certains résultats mathématiques (dits « purs ») qui sont au programme, les intégrant ainsi dans la réalité et, par là, facilitant la compréhension en profondeur de notions abstraites, tout en participant à la formation citoyenne. Nous le déplorons, les programmes n'abordent pas les matières financières en tant que telles. Mais nous montrons que l'on peut contourner cet écueil en considérant la mathématique de la finance comme une *application numérique* de certains points du programme.

Nous avons choisi de traiter quelques problèmes simples, issus de journaux « toutes boîtes ». Nous montrons comment une bonne compréhension des notions mathématiques de base des programmes et comment une attitude cohérente et maîtrisée face à un « problème », permet d'analyser les cas traités en les dépouillant de leurs dehors publicitaires pour ne plus laisser place qu'à la rationnalité des chiffres et des affirmations justifiables.

Les enseignants intéressés par les très nombreuses utilisations pédagogiques de la mathématique financière et de la mathématique appliquée à l'économie au niveau du secondaire peuvent consulter [3]. Nous traitons ici une publicité de la région liégeoise, distribuée depuis plusieurs mois déjà et de laquelle nous dégageons trois volets :

— une ouverture de crédit,
— des prêts à tempérament (prêts personnels ou pour des voitures neuves),
— un regroupement de crédits.

Nous nous proposons d'analyser ces trois types de contrat dans le but de vérifier la pertinence des données numériques, et de déduire de ces exemples des formules générales et approchées. Les résultats d'algèbre financière classique sont supposés connus. Le lecteur intéressé peut consulter [8] ou [2].

([1]) Neutralité au risque (voir [8] et [6]) et mesures *forward neutres* (voir [5]).

2. Ouverture de crédit

Le premier des trois types de contrat est celui dont nous avons proposé l'image à titre d'illustration. La firme propose de mettre à la disposition d'un débiteur une somme de 100000 BEF (2) (ou 200000 BEF, ou 300000 BEF) pendant un an. A la fin de cette année, la somme empruntée devra être intégralement remboursée. A titre de rémunération du service rendu, le débiteur devra en outre payer à la fin de chacun des 12 mois de l'année une somme constante comprenant le paiement des intérêts (qui ne remboursent pas le capital) et des frais de gestion.

Portons notre attention sur la première valeur numérique de 100000 BEF. La publicité joue sur l'égalité « 100000 BEF = 1242 BEF », qui est certes attrayante, mais manifestement incomplète, cette deuxième somme devant être payée 12 fois et ne représentant que la partie *usufruit* (3) du contrat. Après quoi le client doit restituer (amortir) la somme empruntée, ce qui est effectivement signalé (en caractères beaucoup plus petits) sur la publicité qui propose la formule de remboursement

$$« 11 \times 1242 + 1 \times 101242 »$$

Le texte complet reprend une série de données numériques que nous allons traiter tout en construisant un modèle général pour de tels contrats. Les informations chiffrées données dans la publicité sont reprises dans le tableau suivant au sein duquel apparaissent plusieurs taux annuels. L'un d'entre eux est le classique et légal TAEG (4) (taux annuel effectif global), mais l'organisme prêteur introduit également un « nouveau taux » baptisé *taux débiteur annuel actuariel* qui détermine l'intérêt (hors frais de gestion) à payer sur l'année, proportionnellement au montant de la réserve demandée. On obtient le tableau :

(2) Note de l'éditeur : ce texte reproduit une conférence donnée au congrès de Charleroi en Août 2001 : pour cette raison et en cohérence avec les illustrations, nous avons gardé l'« ancienne monnaie »!

(3) *Rémunération du service par opposition à la nue-propriété (somme des amortissements) qui constitue la restitution de la somme empruntée.*

(4) Pour une analyse exhaustive du TAEG et pour la démonstration de la procédure de convergence préconisée par le législateur, voir [2].

Donnée numérique	Interprétation concrète	Notation générale
100000 BEF	montant de la réserve	R
1242 BEF	chacun des 11 premiers versements mensuels pour payer les frais de gestion et les intérêts	F
101242 BEF	valeur du dernier versement	D
125 BEF/m	frais de gestion mensuel	G
14.25 %	taux débiteur annuel actuariel	j
15.96 %	taux annuel effectif global	i

Remarquons tout d'abord que

$$D = R + F$$

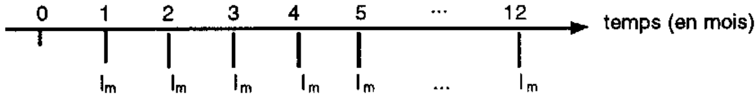
Désignons par j_m le taux mensuel équivalent ([5]) à j. L'égalité des valeurs acquises d'un capital C placé pendant 12 mois au taux j_m ou pendant un an au taux j livre :

$$C(1 + j_m)^{12} = C(1 + j)$$

Ou encore :

$$j_m = (1 + j)^{\frac{1}{12}} - 1$$

Compte tenu du système de remboursement choisi selon lequel le seul paiement des intérêts n'amortit aucun capital, l'intérêt à payer sur l'année, qui est égal à $t \times R$, doit être remboursé par 12 paiements mensuels des intérêts, tous de valeur notée I_m. A la date d'équivalence $t = 12$ (en mois), on équilibre l'intérêt $t \times R$ et la somme des valeurs acquises (c'est-à-dire actualisées en $t = 12$) pour chaque paiement mensuel I_m, et ceci conformément au diagramme suivant des flux financiers :



([5]) Taux donnant même valeur acquise pour des placements de capitaux identiques pendant des périodes égales mais avec des durées de capitalisation différentes.

En choisissant le temps $t = 12$ comme date d'équivalence, la condition d'équilibre des flux financiers actualisés opposés est donnée ([6]) par :

$$I_m \frac{(1+j_m)^{12}-1}{j_m} = j \times R.$$

Or, la relation d'équivalence des taux livre

$$(1+j_m)^{12} = 1 + j$$

d'où l'on tire aisément

$$I_m = j_m \times R$$

l'intérêt mensuel à payer est donc (tout naturellement) égal au produit de la somme R empruntée par le taux débiteur mensuel.

Comme chacun des 11 premiers versements mensuels se décompose en la somme de l'intérêt I_m et des frais de gestion, à savoir

$$F = I_m + G,$$

on trouve

$$F = j_m \times R + G.$$

Ainsi, pour $R = 100000$, $G = 125$, $j = 14.25$ %, on a

$$\begin{aligned} j_m &= \sqrt[12]{1.1425} - 1 = 0.1179814 \\ I_m &= 0.1179814 \times 100000 \simeq 1117 \end{aligned}$$

et on retrouve bien

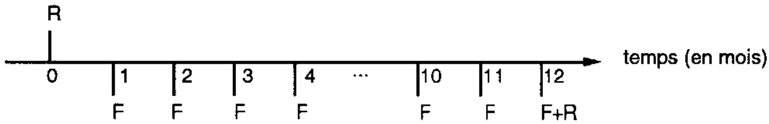
$$F \simeq 1117 + 125 = 1242.$$

Par ailleurs, le TAEG est le taux annuel qui égale les flux financiers actualisés positifs et négatifs représentés sur ce diagramme :

En choisissant le temps $t = 12$ (en mois) comme date d'équivalence et en notant i_m le taux mensuel équivalent à i, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$R(1+i_m)^{12} = F\,\frac{(1+i_m)^{12}-1}{i_m} + R.$$

([6]) Pour le calcul de valeurs futures de suites de capitaux égaux : voir [8].



Remarquons au passage qu'il est intéressant de choisir $t = 12$ comme date d'équivalence, car on peut alors exploiter la formule d'équivalence des taux

$$(1 + i_m)^{12} = 1 + i$$

ce qui permet de trouver :

$$i_m = \frac{F}{R} \quad \text{ou} \quad F = R(\sqrt[12]{1+i} - 1).$$

Par exemple,

$$100000\,(\sqrt[12]{1.1596} - 1) = 1241.6$$

Une première approximation du TAEG est obtenue en remplaçant i par le taux annuel proportionnel à i_m, soit

$$i \simeq 12 \times i_m,$$

d'où l'on tire

$$i \simeq \frac{12 \times M}{R}.$$

L'exemple numérique livre

$$i \simeq \frac{12 \times 1242}{100000} = 0.14904$$

soit un taux annuel de 14.9

Une meilleure approximation de i se calcule en prenant le développement de Mac Laurin de $(1 + i_m)^{12}$ jusqu'à l'ordre 2, à savoir :

$$\frac{(1 + i_m)^{12} - 1}{i_m} \approx \frac{1 + 12 \times i_m + \frac{12 \times 11}{2} \times i_m^2 - 1}{i_m} = 66 \times i_m + 12$$

ce qui permet d'écrire

$$R \times (1 + i) \approx M \times (66 \times i_m + 12) + R$$

ou encore

$$i \times R \approx \frac{66}{12} \times i \times M + 12 \times M$$

pour donner finalement

$$\approx \frac{24 \times M}{2 \times R - 11 \times M}$$

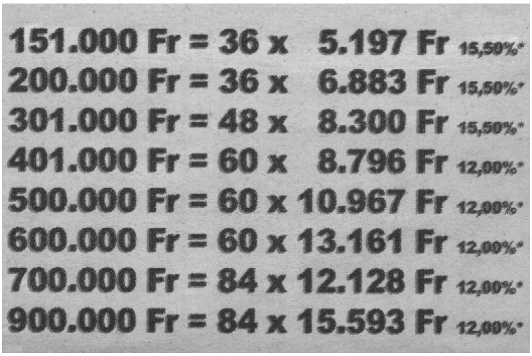
Pour les donnés numériques ci-dessus, on a

$$i \approx \frac{24 \times 1242}{2 \times 100000 - 11 \times 1242} = 0.1599673$$

soit un taux de 15.99 %, ce qui est très proche de la réalité. En fait, avec ce taux approximatif, chacun des 11 premiers versements mensuels devrait être de 1244 BEF, ce qui représente à peine une majoration de 2 BEF par mois pour le débiteur.

3. Prêts à tempérament

Il s'agit de rembourser une somme empruntée E par n versements mensuels constants, de valeur c. La publicité que nous étudions propose :

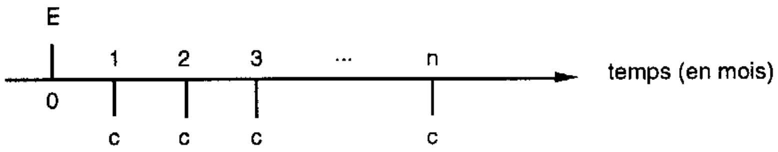


151.000 Fr	=	36 x	5.197 Fr	15,50%*
200.000 Fr	=	36 x	6.883 Fr	15,50%*
301.000 Fr	=	48 x	8.300 Fr	15,50%*
401.000 Fr	=	60 x	8.796 Fr	12,00%*
500.000 Fr	=	60 x	10.967 Fr	12,00%*
600.000 Fr	=	60 x	13.161 Fr	12,00%*
700.000 Fr	=	84 x	12.128 Fr	12,00%*
900.000 Fr	=	84 x	15.593 Fr	12,00%*

On en tire le diagramme suivant des flux financiers :

En adoptant l'origine des temps $t = 0$ comme date d'équivalence, l'équilibre des flux financiers actualisés opposés est atteint lorsque

$$E = c \times \frac{1 - (1 + i_m)^{-n}}{i_n}$$



où i_m désigne toujours le taux mensuel équivalent au TAEG i.

On peut même estimer c en connaissant E et i en ne faisant appel qu'à des opérations arithmétiques élémentaires (somme, différence, produit, quotient). En effet, en développant jusqu'à l'ordre 2 l'expression

$$(1+i_m)^{-n}$$

on trouve :

$$E \simeq c\,\frac{1-\left[1-n\times i_m - n\times\frac{(-n-1)}{2}\times i_m^2\right]}{i_m} = c\times m\times\left[1-\frac{(n+1)}{2}\times i_m\right]$$

En approchant i_m par le taux proportionnel $\frac{i}{12}$ et en prenant la partie linéaire du développement de Mac Laurin général de $\frac{1}{1-x}$, à savoir $1+x$, on est conduit à

$$c \simeq \frac{E}{n}\,\frac{1}{1-\left(\frac{n+1}{24}\right)\times i} \approx \frac{E}{n}\left[1+\left(\frac{n+1}{24}\right)\times i\right]$$

En approchant $\frac{n+1}{n}$ par 1 et 24 par 25, on trouve finalement

$$c \cong \frac{E}{n}+\frac{4\times i\times E}{100}$$

$\frac{E}{n}$ peut être regardé comme l'amortissement mensuel constant, tandis que $\frac{4\times i\times E}{100}$ représente alors approximativement la charge financière mensuelle de l'emprunt.

Prenons par exemple le premier cas de l'annonce et fixons

$E = 151000$, $n = 36$ et $i = 0.155$; on obtient :

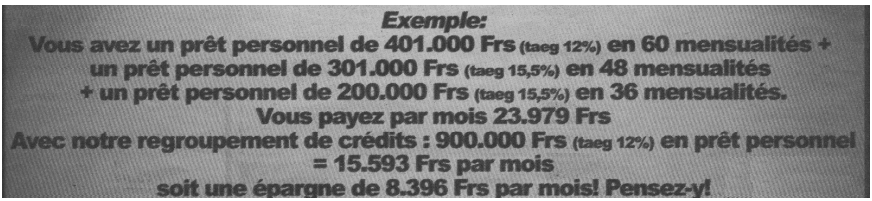
$$c \;\cong\; \frac{151000}{36}+\frac{4\times 0.155\times 151000}{100}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4194 + 936 \\
&= 5130 \text{ BEF}
\end{aligned}
$$

ce qui est assez proche de la réalité, à savoir 5197 BEF.

4. Regroupement de crédits

La dernière proposition, concernant les regroupements de crédits, est nettement plus critiquable, bien que la firme se présente comme spécialisée dans de telles opérations. La publicité se fait au moyen d'un exemple que nous nous proposons de traiter en détails et dont nous possédons plusieurs versions successives significativement différentes quoique distantes de quelques mois seulement. Le remboursement total pour les crédits cumulés de 902 000 a baissé, sans raison économique valable, en moins d'un an de plus de 3 000 francs, passant de 27 184 à 23 979. Notons que les différences de durées de remboursement n'apparaissent pas explicitement. L'annonceur propose :



Les durées de remboursement de la publicité en question se basent sur les exigences du législateur qui impose une durée maximale de remboursement en fonction du montant emprunté. Le jeu du regroupement table évidemment sur un allongement de cette durée (et sur une baisse du TAEG pour des montants plus élevés).

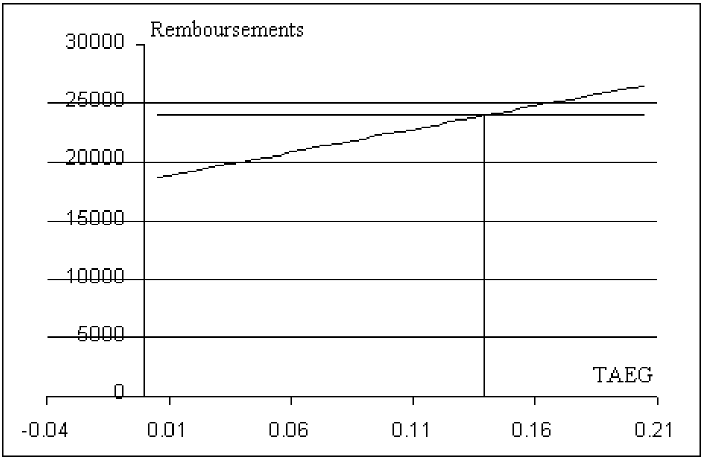
Soient trois emprunts de montants 401000, 301000 et 200000 BEF de durées (légales) respectives 60, 48 et 36 mois. Le taux annuel i (TAEG) génère un taux mensuel

$$i_m = \sqrt[12]{1+i} - 1$$

et donc un remboursement initial (qui devient dégressif à mesure des remboursements d'emprunts successifs) égal à

$$\frac{401000 \times i_m}{1-(1+i_m)^{-60}} + \frac{301000 \times i_m}{1-(1+i_m)^{-48}} + \frac{200000 \times i_m}{1-(1+i_m)^{-36}}$$

On peut représenter graphiquement ce remboursement initial, valable pendant les trois premières années, en fonction du TAEG i :



L'intersection de la courbe obtenue avec l'horizontale d'ordonnée 23979 (reprise dans l'annonce) est voisine d'un TAEG de $0,14$, correspondant à un taux mensuel équivalent $i_m = 0.01098$. En fait l'annonce se contente de sommer les trois propositions de crédit à tempérament traitées plus haut. Le client paye donc :

$$36 \times 6883 + 48 \times 8300 + 60 \times 8796$$

Pour rembourser 900 000 il devra débourser

$$84 \times 15593$$

L'arnaque de cette annonce est multiple.

— Les montants proposés ne sont pas exactement équivalents. En utilisant un TAEG de 0.12 (avec $i_m = 0.009489$), le remboursement pour

902 000 (et non 900 000) donne :

$$\frac{(902000)(0.009489)}{1-(1.009489)^{-60}} = 15628$$

et non 15 593, soit une différence (à répercuter 84 fois) de 35.

- La publicité table sur un TAEG d'autant moins élevé que les montants empruntés sont importants. Cette manière de procéder n'est évidemment valable que si l'on considère qu'un emprunt de montant élevé ne s'octroye qu'à un bon client que l'on va tarifer à un taux moindre ...
- L'annonce néglige en outre de signaler l'allongement significatif de la durée du contrat, puisque les remboursements, tous de même valeur, se feront pendant 84 mois, alors que les prêts initiaux étaient remboursés en 3, 4 ou 5 ans.
- Dans un premier temps, l'annonceur considérait un remboursement cumulé égal à $7438 + 9137 + 10609 = 27184$ ce qui correspondait à un taux moyen de l'ordre de 0.22 ou encore à un taux mensuel de 0.0167. Aucune considération économique ne pouvait justifier l'utilisation de taux aussi hauts. Cette dernière « erreur » a donc été corrigée.

La situation correcte par référence aux durées maximales légales de remboursement, est donc la suivante. Pendant les 36 premiers mois, le débiteur enregistre une économie mensuelle de $23979 - 15593 = 8386$ BEF. A partir du 37^e mois, le remboursement des 200000 BEF s'achève et le client ne rembourse plus que $8300 + 8796 = 17096$ BEF et l'économie mensuelle tombe à $17096 - 15593 = 1503$ BEF. A partir du 49^e mois, la situation se retourne contre le client qui réalise une « économie négative » de $8796 - 15593 = -6797$ BEF. Au delà du 60^e mois et jusqu'au terme du contrat, soit deux ans plus tard, il « perdra » l'intégralité du remboursement, soit 15593 BEF par mois.

5. Conclusions

Ces exemples montrent qu'aujourd'hui, la théorie de la mathématique financière est de plus en plus souvent utilisée correctement. Cette constatation est assez récente, mais conforme à la loi de 1992 régissant les prêts à tempérament. Ce point positif constitue assurément une percée importante de la mathématique financière ... ainsi qu'une réelle garantie pour le débiteur. Néanmoins, et le dernier exemple traité en apporte la preuve, il convient de rester fort vigilant pour ne pas se laisser « leurrer » par des publicités, attrayantes à première vue, mais peu rationnelles ... et probablement très rémunératrices pour les organismes financiers qui s'efforcent toujours d'exploiter les consommateurs ignorant la mathématique financière.

Bibliographie

[1] BAIR J. - HAESBROECK G. - HAESBROECK J.J. (2000) : *Formation mathématique par la résolution de problèmes*, De Boeck Université, Bruxelles.

[2] BAIR, J. - HAESBROECK, G. - JUSTENS, D. - ROSOUX, J. (1998) : *Modéles mathématiques en finance : de l'incohérence à l'incertitude ou au chaos*, Presses Ferrer (Ville de Bruxelles), Collection Economie.

[3] BAIR, J. - JUSTENS, D. - ROSOUX, J. - MARON, S. (2001) : *Applications pédagogiques de la mathématique financière*, Presses Ferrer, Edition Luc Pire.

[4] BAIR J. - JUSTENS D. (1995) : Du taux de chargement annuel réel au taux annuel effectif global, *Mathématique et Pédagogie*, 101, pp. 53-63.

[5] BRACE, A - GATAREK, D. - MUSIELA M. (1997) : The Market model of interest rate dynamics, *Mathematical Finance*, 7, 2, pp. 127-155.

[6] ESCH, L. - JUSTENS, D. - GEUSKENS, N. - MOEREMANS, G. (2001) : *Modélisation de produits financiers à risque réduit*, Presses Ferrer, Edition Luc Pire.

[7] HULL, J. C. (2000) : *Options, Futures & Other Derivatives*, Fourth Edition, Prentice-Hall International Inc, New Jersey.

[8] JUSTENS D. - ROSOUX J. (1995) : *Introduction à la mathématique financière*, Editions de Boeck Université, Bruxelles.

Situation-problème

Jean-Pierre Mathieu

Tas de briques

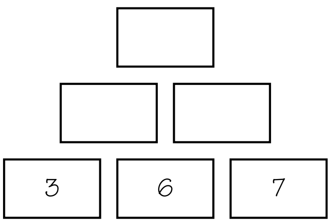
1. Introduction.

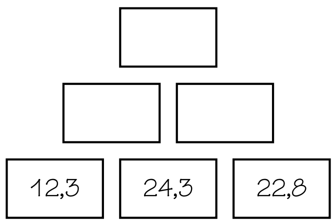
La revue « Math-Jeunes » est un excellent outil pour qui veut pratiquer la pédagogie des situations. C'est un article « Le mur des nombres » ([1]) qui a été exploité ici, avec des élèves de 2^e et pour lequel des prolongements ont été trouvés. Le titre « Tas de Briques » a été choisi pour ne pas réutiliser celui de l'article. On peut exploiter « Tas de briques » en fin de 1re ou en début de 2^e.

2. Mise en situation.

Complète les tas de briques : le nombre à compléter sur chaque brique est la somme des nombres écrits sur les briques qui la soutiennent.

- Pas difficile :

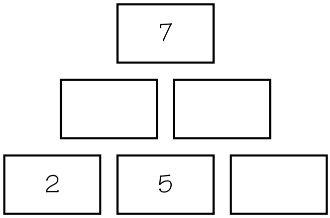


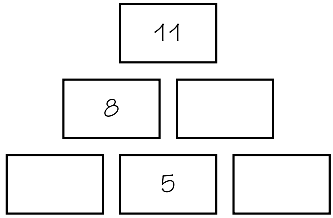


- Un peu plus difficile :

Adresse de l'auteur: Jean-Pierre MATHIEU, rue Marquebreucq, 51, 6220 - Lambusart

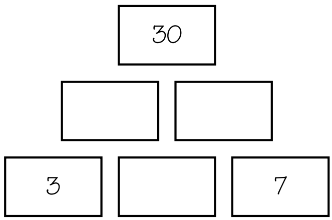
([1]) paru dans le numéro 88 du mois de Mars 1999 sous la plume de Guy NOEL





Les élèves s'en sortent très bien; si les nombres entiers n'ont pas encore été vus, le second exercice doit amener la réflexion chez les élèves de 1re en ce qui concerne le nombre à écrire à droite de 5.

- C'est ici qu'arrive le plat de résistance :



1. Certains élèves ne trouvent pas.

2. D'autres sentent bien, comme l'indique l'article, qu'il faut trouver le nombre à mettre entre 3 et 7. Courageusement, ils essayent : « Supposons que je place 1, j'aurai 4 et 8 et la somme fera 12, cela ne va pas; j'essaye 2 etc … » et cela jusqu'au moment où j'obtiendrai la solution. Bel effort!

3. Enfin, les autres se disent : « j'ai un nombre à placer entre 3 et 7 donc la somme des nombres écrits sur les briques de l'étage du milieu contient le double du nombre à trouver +10; je dois donc retrancher 10 de 30 et ce résultat est le double du nombre à trouver; donc le nombre cherché est 10 » Ouf!

4. Personne ne pense à employer une lettre pour désigner le nombre à placer entre 3 et 7.

5. Le professeur suggère alors l'emploi d'une lettre mais la classe est divisée. Certains disent que cela ne sert à rien puisque de toute manière la solution est trouvée mais ceux qui n'avaient rien trouvé ou trouvé avec peine se disent qu'après tout on n'a rien à perdre.

3. Exploitation de la situation.

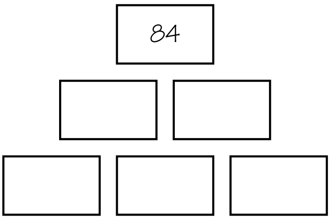
On arrive facilement à écrire que : $3 + x + x + 7 = 30$ et à partir de là, les élèves ont reconnu les exercices du chapitre des équations qu'ils avaient vus l'an dernier.

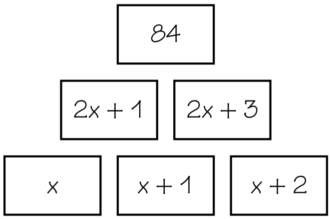
Très vite, après résolution, les élèves ont écrit : $x = 10$. Ensuite, la solution trouvée a été vérifiée.

4. Prolongements possibles.

Après cette première situation, à l'issue de laquelle des exercices de fixation ont été proposés, on peut prolonger en employant des nombres consécutifs.

Le professeur revient avec le tas de briques suivant : il ajoute qu'il faut placer 3 nombres consécutifs sur l'étage du bas ; le plus petit étant écrit le plus « à gauche ».





x est un nombre naturel

Comme les élèves connaissaient la manière d'écrire 3 nombres consécutifs, le tas de briques s'est complété et plus personne ne s'est lancé dans des calculs longs et fastidieux.

Finalement, on aura : $2x + 1 + 2x + 3 = 84$ d'où la solution $S = \{20\}$ et les nombres cherchés sont 20, 21 et 22.

1. Plusieurs élèves ont remarqué que le nombre écrit au sommet du tas est le quadruple du nombre placé au milieu sur l'étage du bas, ce qui permet de résoudre l'exercice facilement. En effet : $2x + 1 + 2x + 3 = 4x = 4 \cdot (x + 1)$.

2. la somme de 2 nombres impairs consécutifs est un multiple de 4. Voir le point 1 ci-dessus pour la justification.
3. On peut également remarquer que la somme de 2 nombres consécutifs est un nombre impair. En effet : $x + x + 1 = 2x + 1$
4. On peut découvrir que la somme de 3 nombres consécutifs est le triple du moyen. On a : $x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3 = 3 \cdot (x + 1)$
5. Finalement, on peut découvrir que pour 3 nombres consécutifs la somme des extrêmes est le double du moyen. On a : $x + x + 2 = 2x + 2 = 2 \cdot (x + 1)$

Petite astuce.

e est définit par $\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$

Si l'on définit E_α par $\int_1^{E_\alpha} \frac{dt}{t^{1-\alpha}} = 1$ nous aurons $e = \lim_{\alpha \to 0} E_\alpha$

Or

$$\int_1^{E_\alpha} \frac{dt}{t^{1-\alpha}} = \int_1^{E_\alpha} t^{\alpha-1} dt = \left[\frac{t^\alpha}{\alpha} \right]_1^{E_\alpha} = \frac{E_\alpha^\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{E_\alpha^\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow E_\alpha^\alpha - 1 = \alpha \Leftrightarrow E_\alpha^\alpha = \alpha + 1 \Leftrightarrow E_\alpha = (\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ainsi $\lim_{\alpha \to 0} (\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

Internet Corner.

Si vous cherchez une situation-problème originale, nous vous conseillons les documents pédagogiques de l'Ecole et Observatoire des Sciences de la Terre de Strasbourg. On y apprend (entre autres) comment localiser un tremblement de Terre par la méthode des cercles ou celle des hyperboles.

`http://isc.u-Strasbg.fr`

Vous pouvez rejoindre de là le site Virtual Earthquake de l'Université de Los Angeles où vous pouvez vous entraîner en direct à de telles localisations (avec corrigés, mais malheureusement cette partie en anglais).

Problèmes actuels dans l'enseignement des mathématiques

M. DE GUZMÁN, *Universidad Complutense de Madrid.*

1. Changements profonds dans l'enseignement des mathématiques.

Les quatre dernières décennies ont donné lieu à des bouleversements profonds dans l'enseignement des mathématiques. Aux efforts fournis par la communauté internationale d'experts afin de trouver les modèles appropriés, il apparaît comme une évidence que nous ne sommes pas encore sortis de cette période d'expérimentation et de changement.

Le mouvement des années 60 — 70 en direction des maths modernes entraîna une profonde transformation de l'enseignement dans les contenus et les méthodes. Parmi les principales caractéristiques de ce mouvement, on peut distinguer :

- La mise en valeur des structures abstraites dans divers domaines notamment l'algèbre ;
- la volonté d'approfondir la rigueur logique par la compréhension, en opposant même parfois celle-ci aux aspects opératoires et manipulatoires ;
- par voie de conséquence, l'importance donnée aux fondements au travers des notions initiales de la théorie des ensembles et au travers de la pratique de l'algèbre où la rigueur est plus facile à atteindre ;

Adresse de l'auteur: Miguel de Guzmán, mdeguzman@bitmailer.net
Note de l'éditeur : Miguel de Guzmán est membre de l'académie des Sciences espagnole et argentine. Il a été président de l'ICMI « International Commission on Mathematical Instruction » de 1991 à 1999. Il a publié une soixantaine de livres et une quinzaine de papiers au sujet de l'enseignement des mathématiques. Il a présenté l'essentiel des idées développées dans ce texte lors d'une conférence aux rencontres de l'APMEP à Lille en octobre 2001.

- le sacrifice de la géométrie élémentaire et de la géométrie dans l'espace qui sont plus difficile à fonder rigoureusement ;
- sur le plan des activités pratiquées, la conséquence naturelle a été l'éviction de problèmes intéressants dans lesquels la géométrie avait une « trop » grande part et leur substitution par des exercices qui confinaient à la tautologie, l'algèbre à ce niveau élémentaire ne permettant guère d'aller plus loin.

Dans les années 70, on perçut que bon nombre des modifications introduites n'avaient pas été opportunes : la sustitution de la géométrie par l'algèbre avait vidé les mathématiques élémentaires de problèmes intéressants. La carence évidente d'intuition spaciale fut une autre conséquence désastreuse de l'évacuation de la géométrie. C'est d'ailleurs un défaut que l'on remarque encore aujourd'hui sur les personnes qui ont reçu leur formation à l'époque.

On peut dire que les inconvénients survenus suite à l'introduction des maths modernes dépassent largement les avantages que l'on visait : rigueur dans le fondement, compréhension des structures, modernisme (rapprochement avec la recherche fondamentale).

Dans les années 70 — 80, le débat fut souvent passionné et violent au sujet des valeurs et des contre-valeurs des tendances qui se dessinaient, il donna lieu à une intense recherche de méthodes mieux adaptées pour affronter les nouveaux défis de l'enseignement de notre discipline. Ce débat fur alimenter en partie par la communauté mathématique internationale.

A l'heure actuelle, il semble bien clair qu'au sein de cette communauté un changement profond se réalise, tout au moins en ce qui concerne l'*enseignement* des mathématiques.

Il est révélateur de remarquer que dans la dernière classification des domaines d'activités présumée par l'A.M.S. (American Mathematical Society) en 2000, celle-ci introduit pour la première fois un champ intitulé « Mathematical Education » (97 - XX) au même rang que, par exemple, « Differential Geometry » (53 - XX).

Par ailleurs, à l'évidence, dans les pays les plus avancés dans le domaine mathématique, l'intérêt de nombreuses mathématiques, l'intérêt de nombreux mathématiciens professionnels pour les problèmes posés par l'enseignement est croissant, y compris l'enseignement au niveau universitaire ... Des articles écrits très récemment par des mathématiciens prestigieux placent l'enseignement mathématique comme une des priorités au bon développement de la communauté mathématique ... (GROMOV - P.A. GRIFFITHS).

Ainsi, un problème fortement enraciné, celui de l'éloignement des mathématiciens chercheurs avec l'enseignement de leur discipline, auquel je faisais allusion dans une conférence (ICME8 à Séville en 1996), semble orienté vers une possible solution.

2. Tendances générales actuelles.

2.1. Une considération de fond : qu'est-ce qu'une activité mathématique ?

La réponse que l'on donne à cette question influence fortement, de manière plus effective qu'il n'y paraît, les attitudes et les méthodes d'enseignement. Le virage vers les « maths modernes » se déroule à l'apogée du courant formaliste (BOURBAKI) en mathématiques. On est en droit de penser à priori à une relation de cause à effet. De fait, certaines personnes les plus influentes sur le mouvement didactique des années 60, comme DIEUDONNE, furent des membres du groupe BOURBAKI.

Sur les 20 dernières années, particulièrement après la publication de la thèse doctorale de I. LAKATOS (76), « Proofs and refutations », des changements assez profonds se sont produits dans le champ des idées concernant la nature de l'activité mathématique.

L'activité scientifique en général est une exploration de certaines structures du réel, pris au sens large, en tant que réalité physique ou mentale. L'activité mathématique est confrontée à un type de structures permettant des traitements particuliers comme :

- une symbolique adaptée, permettant de représenter efficacement, du point de vue opératoire, les entités que l'on manipule,
- une manipulation rationnelle rigoureuse, qui impose l'accord de tous ceux qui admettent les hypothèses conventionnelles de départ,
- une maîtrise effective de la réalité vers laquelle on la dirige, d'abord rationnelle du modèle mental que l'on construit, puis le cas échéant, de la réalité extérieure modélisée.

La définition ancienne des mathématiques, comme science du nombre et de l'étendue, n'est pas du tout incompatible avec celle que nous proposons ici, elle correspond plutôt à un stade des mathématiques dans lequel la confrontation au réel s'était cristallisée sur deux aspects fondamentaux :

- la complexité due à la multiplicité (celle qui donne naissance au nombre, à l'arithmétique),
- la complexité due à l'espace (qui donne lieu à la géométrie qui n'est autre que l'étude de l'étendue) ...

Plus tard, le même esprit mathématique devrait affronter :

- la complexité du symbole (algèbre),
- la complexité du changement et de la causalité certaine ou déterministe (calcul),
- la complexité de l'incertitude dans une causalité multiple incontrôlable (probabilités, statistiques),
- la complexité de la structure formelle de la pensée (logique mathématique) ...

2.2. Philosophie des mathématiques et de leur enseignement.

Dans la première moitié du XX^{e} siècle, on s'est intensément préocupé de problèmes de fondement, particulièrement à la suite des travaux de GÖDEL (1930). Dans la seconde moitié, on a ensuite focalisé son attention sur le caractère quasi empirique de l'activité mathématique (LAKATOS), ainsi que sur les aspects relatifs à l'histoire et à l'immersion des mathématiques dans la culture de la société qui les engendre (R.- L. WILDER), en considérant les mathématiques comme un sous système culturel dont les caractéristiques sont en grande partie communes à d'autres systèmes similaires.

De tels changements en profondeur de la compréhension et de la façon dont les mathématiciens ressentent leur propre activité ont provoqué de manière plus ou moins consciente des fluctuations importantes sur les considérations à propos de l'enseignement des mathématiques et ce qu'il doit être.

2.3. Appui permanent sur l'intuition directe du concret et sur la réalité.

Dans les années 1980, on reconnût généralement avoir considérablement exagéré les tendances vers les « mathématiques modernes »pour ce qui est de l'importance de la structure abstraite des mathématiques.

Il est nécessaire de ne pas négliger l'intuition en général, la manipulation opératoire de l'espace et des symboles.

Il est bien sûr important de ne pas abandonner la compréhension de ce que l'on fait sûr, mais nous ne devons pas permettre que cet effort de compréhension laisse passer au second plan les contenus intuitifs de notre esprit dans son approche aux objets mathématiques.

Si les mathématiques sont une science qui possède beaucoup plus que ce que l'on pensait jusqu'à présent une nature empirique, principalement au niveau de la recherche, il faut prendre en compte beaucoup plus intensément, lors de son étude, l'expérience et la manipulation des objets que l'on y rencontre.

La formalisation rigoureuse des expériences initiales correspond à un stade ultérieur. A chaque phase du développement mental, comme à chaque étape historique ou à chaque niveau scientifique correspond sa propre rigueur.

Pour mieux comprendre cette féconde interaction entre le réel et les mathématiques, il est bon de faire appel d'une part, à l'histoire même des mathématiques qui nous révèle ce processus d'émergence de nos mathématiques à travers le temps et d'autre part, aux applications des mathématiques qui mettent en évidence la fertilité et la puissance de cette science. C'est ainsi, que l'on montre comment les mathématiques, tout comme les autres sciences, ont procédé par approximations successives, par essais/erreurs avec des tentatives parfois fructueuses, parfois stériles, jusqu'à atteindre une certaine maturité mais toujours perfectible.

Notre enseignement idéal devrait essayer de refléter ce caractère profondément humain des mathématiques, gagnant ainsi en accessibilité, dynamisme, intérêt et séduction.

2.4. Les cheminements de la pensée mathématique : le point central de l'enseignement mathématique.

Une des tendances les plus répandues aujourd'hui consiste à ancrer l'enseignement sur la transmission des cheminements de pensée propres aux mathématiques plutôt que sur les contenus mathématiques eux-mêmes.

Les mathématiques sont surtout un savoir-faire, une science dans laquelle la méthode est clairement plus importante que le contenu. C'est pourquoi on accorde une grande importance à l'étude des questions, en grande partie communes à la psychologie cognitive, qui se réfèrent aux processus mentaux de résolution de problèmes.

Par ailleurs, on a de plus en plus conscience de la vitesse avec laquelle pour des raisons très diverses, il devient nécessaire de changer les priorités de l'enseignement de certains contenus. Notre civilisation est en perpétuelle vertigineuse transformation, il est donc évident que les processus de pensée les plus efficaces, ceux qui ne deviennent pas obsolètes, sont ce que nous avons de plus précieux à transmettre à nos jeunes. Les contenus deviennent rapidement ce que WHITEHEAD a appelé « des idées inertes », des idées qui ne sont qu'un poids mort, incapables de se combiner à d'autres pour former des constellations dynamiques, pour aborder les problèmes du présent.

C'est dans cette direction que se focalise les efforts intenses à transmettre des stratégies heuristiques tournées vers la résolution de problèmes en général, à stimuler la résolution autonome de véritables problèmes plutôt que la simple transmission de recettes dans chaque matière.

2.5. L'attention portée à de nouveaux outils en relation avec les avancées technologiques : utilisation de programmes de calculs formels.

L'apparition d'outils aussi puissants que la calculatrice et l'ordinateur actuels commence à influencer fortement l'orientation de notre éducation mathématique primaire, secondaire et universitaire, en cherchant à utiliser au mieux ces instruments.

De nombreux paramètres tels que le coût, l'inertie, la nouveauté, le manque de formation des professeurs, l'hostilité de certains, font que l'on a pas encore trouvé des modèles pleinement satisfaisants. C'est là un des défis importants de l'actualité. On peut déjà prévoir que notre façon d'enseigner et même les contenus vont subir des réformes drastiques.

Il faudra mettre l'accent, pour la même raison, sur la compréhension du processus mathématique plutôt que sur l'exécution de certaines routines qui, dans notre situation actuelle occupent encore une grande partie de l'énergie de nos élèves, avec pour conséquence le sentiment de perdre son temps à cela.

Ce qui sera véritablement important, sera la préparation pour un dialogue intelligent avec les outils qui existent déjà ; dont certains élèves disposent et d'autres disposeront très prochainement.

2.6. Utilisation d'Internet pour l'enseignement des mathématiques.

Internet est un instrument très mouvant qui admet différentes utilisations en mathématiques. Ces utilisations commencent à être maîtrisées. On peut trouver sur la toile une information très riche et Internet facilite les relations entre tous les membres de la communauté éducative.

2.7. Prise de conscience de l'importance de la motivation.

On observe généralement la recherche de la motivation de l'élève d'un point de vue très large, non limitée à l'intérêt intrinsèque des mathématiques et de leurs applications. Il s'agit de mettre en évidence les interconnections des mathématiques avec l'évolution de la culture, l'histoire et le développement de la société.

Il est de plus en plus clair que l'importance des éléments affectifs qui mobilisent l'esprit dans son occupation mathématique est énorme. Une grande partie des échecs en mathématiques de nombreux étudiants prend sa source dans un positionnement affectif initial, totalement destructeur de ses propres potentialités dans ce domaine.

Ce positionnement est souvent provoqué par une mauvaise introduction de la part de leurs enseignants. C'est pourquoi on essaye aussi, de diverses façons, que les étudiants perçoivent le sentiment esthétique, le plaisir ludique que les mathématiques peuvent leur apporter afin de les amener vers elles de manière plus profondément personnelle et humaine.

Dans notre monde contemporain, où la tendance à la déshumanisation de la science est forte, où la culture se dépersonnalise en s'informatisant, il est de plus en plus nécessaire de garder un savoir humaniste dans lequel l'homme et la machine occupent chacun le lieu qui lui correspond. C'est à cette tâche importante que l'enseignement mathématique adéquat peut contribuer.

3. Changements souhaitables dans les principes méthodologiques.

Au vu des tendances générales pointées dans le paragraphe précédent, on peut citer quelques principes méthodologiques qui pourraient guider notre enseignement de manière adaptée.

3.1. Une acquisition des processus typiques de la pensée mathématique.

- la mise en culture au travers d'un apprentissage actif,
- le rôle de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques.

Quelle forme doit prendre le processus d'apprentissage mathématique à n'importe quel niveau ? Une forme semblable à celle que l'homme a suivi lors de sa création des idées mathématiques ; une forme similaire à celle que le mathématicien professionnel utilise lorsqu'il affronte le problème de la mathématisation, de la parcelle de réalité dont il s'occupe ?

Il s'agit en premier lieu de se mettre *en contact avec la réalité* mathématisable qui a donné lieu aux concepts mathématiques que nous voulons explorer avec nos élèves. Pour cela, nous avons intérêt à connaître à fond le *contexte historique* qui sert de cadre à ces concepts. Pour quelles raisons la communauté mathématique s'est-elle occupée à un certain moment avec insistance d'un certain thème et en a-t-elle fait le véritable centre de son exploration parfois sur une période de plusieurs siècles ? Il est extrêmement *utile d'essayer d'observer une situation avec la même perplexité que les mathématiciens de l'époque l'avaient contemplée.* La présentation qui nous est faite dans de nombreux manuels ressemble trop souvent à un roman policier qui serait raconté à l'envers et donc sans intérêt. La même histoire racontée à l'endroit pourrait être véritablement passionnante.

Normalement, *l'histoire nous donne un magnifique cadre* pour les différents thèmes, les problèmes qui ont fait surgir les concepts importants dans la matière, elle nous donne aussi un éclairage sur les raisons qui ont conduit l'homme à s'en occuper avec intérêt. Si nous connaissons l'évolution des idées dont nous prétendons nous occuper, nous saurons alors parfaitement la place qu'elles occupent dans leurs différentes conséquences, applications intéressantes qu'elles ont pu apporter, et nous pourrons faire le point sur les diverses théories qui ont pu en dériver.

3.2. La modélisation mathématique de la réalité.

Il peut aussi arriver que *l'approche initiale d'un concept mathématique se fasse dans le cadre d'une tentative directe de modélisation de la réalité*, dans laquelle le professeur sait pertinemment que les structures mathématiques en question doivent forcèmment apparaître. On peut faire appel pour cela, aux autres sciences qui font usage des mathématiques, à des situations de la réalité quotidienne, ou à la présentation de jeux stratégiques desquels il n'est pas rare, tout au long de l'histoire, de voir surgir des idées mathématiques de grande profondeur.

Placés avec nos élèves dans les situations-problèmes qui ont engendré les idées dont nous souhaitons nous occuper, nous devons encourager la recherche autonome, la découverte personnelle, à la fois des structures mathématiques simples et des solutions aux problèmes intéressants en relation avec celles qui surgissent de manière naturelle.

Bien sûr, nous ne pouvons espérer que nos élèves découvrent en deux semaines ce que l'humanité a élaboré sur plusieurs siècles de travail intensif de la part des esprits les plus brillants de l'époque ... Cependant, *une recherche guidée, qui préserve le plaisir de la découverte*, qui privilégie la détection de techniques concrètes, de stratégies utiles de la pensée, est un objectif réaliste de l'enseignement et de l'apprentissage de notre discipline.

Ainsi conçue, la théorie retrouve tout son sens; pleinement motivée, elle est beaucoup plus assimilable. Son application à la résolution de problèmes, qui auraient pu paraître inaccessibles autrement, peut devenir une véritable source de satisfaction et de plaisir intellectuel, d'étonnement devant la puissance de la pensée mathématique, et finalement d'attirance envers les mathématiques.

3.3. L'heuristique (« PROBLEM SOLVING ») dans l'enseignement des maths.

L'enseignement par la résolution de problèmes est actuellement la méthode la plus souvent évoquée pour mettre en pratique le principe général d'un apprentissage actif et de « mise en culture » mentionné plus haut. Au fond, l'objectif est de transmettre de manière systématique les cheminements de pensée efficaces à la résolution de véritables problèmes.

Un « véritable problème » revient schématiquement à se trouver dans une situation, à vouloir en atteindre une autre, parfois bien connue, parfois plus vaguement, et ne pas connaître le trajet ...

Nos manuels en général débordent d'exercices mais manquent cruellement de véritables problèmes. L'apparence est parfois trompeuse : les exercices aussi se présentent souvent comme un trajet entre deux situations (déterminer le coefficient de x^7 dans le développement de $(1+x)^{32}$ ...) Mais si cette activité, qui fut un véritable problème pour les algébristes du XVI^e siècle, se trouve comme c'est généralement le cas, à la fin d'un chapitre sur le binôme de Newton, il ne constitue plus, en aucune façon, un défi. L'élève connaît bien le chemin, il est tout tracé. S'il n'arrive pas à résoudre un tel problème, il sait déjà que tout ce qu'il a à faire c'est de réviser sa leçon.

L'enseignement par la résolution des problèmes met l'accent sur les cheminements de la pensée, sur les processus d'apprentissage et il prend les contenus mathématiques, dont la valeur ne doit pas du tout être mise de côté, comme un champ d'opération privilégié dans cette tâche de prise de contact avec les formes de pensée efficaces.

Il s'agit de considérer que les points les plus importants sont :

- que l'élève manipule les objets mathématiques ;
- qu'il active sa propre capacité mental ;
- qu'il exerce sa créativité ;
- qu'il réfléchisse sur son propre processus de pensée de manière à l'améliorer consciemment ;
- que dans la mesure du possible, il effectue des transferts de ces activités à d'autres aspects de son travail mental ;
- qu'il prenne confiance en lui-même ;
- qu'il s'amuse de sa propre activité mentale ;
- qu'il se prépare à de nouveaux problèmes de la science et peut être aussi de sa vie quotidienne ;

- qu'il se prépare aux nouveaux défis de la technologie et de la science.

Quels sont les avantages de ce type d'enseignement ? A quoi bon se fatiguer à obtenir de tels objectifs ?

Je rassemble ici quelques arguments intéressants :

- ce que nous avons de meilleur à apporter à nos jeunes c'est la possibilité de résoudre par eux-mêmes leurs propres problèmes ;
- le monde évolue très rapidement : les processus d'adaptation aux changements de notre science et de notre culture ne seront jamais obsolètes ;
- le travail peut devenir attirant, amusant, satisfaisant, épanouissant et créatif ;
- nombreux parmi les apprentissages que l'on consolide ainsi, sont ceux qui possèdent un caractère universel non limité au monde des mathématiques ;
- ce type d'enseignement est applicable à tous les âges.

Où est la nouveauté ? N'a-t-on pas toujours appris à résoudre des problèmes dans le cours de mathématiques ?

Il est possible que les bons enseignants de tous les temps aient utilisé de manière spontanée les méthodes que nous préconisons ici. Mais, ce que l'on a vu faire traditionnellement par une bonne partie de nos enseignants peut se résumer dans les phases suivantes : Exposition de contenus - exemples - exercices faciles - exercices plus difficiles - problèmes ...

La présentation d'un thème mathématique basé dans l'esprit de la résolution de problèmes devrait plus ou moins procéder de la manière suivante :

- proposition de la situation-problème dont le thème va surgir (basée sur l'histoire, les applications, les modèles et jeux ...) ;
- manipulation en autonomie par les élèves ;
- familiarisation avec les difficultés de la situation ;
- élaboration de stratégies possibles ;
- essais divers par les élèves ;
- recherche des outils élaborés tout au long de l'histoire (contenus motivés) ;
- choix de stratégies ;
- résolution des problèmes ;
- analyse critique (réflexions sur le processus) ;
- formalisation (le cas échéant) ;

- *généralisation ;*
- nouveaux problèmes ;
- transferts possibles de résultats, de méthodes, d'idées ...

Pendant tout le processus, l'axe principal doit être l'activité propre de l'élève dirigée par le professeur qui le met en position de participer sans lui retirer le plaisir de chercher lui-même ce que les grands mathématiciens ont obtenu avec autant d'efforts. Les avantages du procédé lorsqu'il est bien mené sont clairs : activité contre passivité, motivation contre ennui, acquisition de processus actifs contre rigidité de routines bêtes qui se perdent dans l'oubli ...

D'après moi, cette méthode d'enseignement par la résolution des problèmes présente quelques difficultés qui ne semblent pas encore résolues de manière satisfaisante dans l'esprit de certains professeurs surtout en ce qui concerne la façon de la mettre en pratique. Il s'agit d'harmoniser de manière adéquate les deux composantes qui la constitue, la composante heuristique c'est à dire l'attention portée au cheminement de pensée, et celle des contenus spécifiques de la pensée mathématique.

Il me semble qu'il existe dans la littérature actuelle bon nombre d'écrits dont l'aspect principal est centré sur le côté heuristique mis en pratique dans des contextes divers, certains purement ludiques, d'autres plus mathématiques. Certaines de ces œuvres réalisent à la perfection, à mon avis, leur objectif de transmettre, dans l'esprit même, l'attitude de résolution de problèmes. En revanche, je crois qu'il n'y a pas encore eu de tentatives sérieuses et soutenues à produire des œuvres qui appliquent l'esprit de la résolution de problèmes à la transmission des contenus mathématiques de différents niveaux que nous estimons aujourd'hui devoir être présents dans notre enseignement.

Ce qui arrive souvent à des professeurs convaincus du bien fondé des objectifs relatifs à la transmission des cheminements de pensée, c'est qu'ils vivent une espèce de schizophrénie, peut être par manque de modèles adéquats, entre les deux pôles de leur enseignement, les contenus et les procédés. Le vendredi par exemple, ils mettent l'accent sur des cheminements de pensée dans le cadre de situations qui n'ont rien à voir avec les programmes de maths, et les autres jours de la semaine, ils vont s'appliquer avec leurs élèves à voir et revoir les contenus du programme sans se rappeler à aucun moment, ce qu'ils ont fait le vendredi précédent. Il serait éminemment nécessaire que surgissent des modèles, fussent-ils partiels, qui intègrent de manière harmonieuse les deux aspects de notre enseignement.

De toute façon, on peut probablement affirmer que celui qui est complètement imprégné de cette esprit de résolution de problème affrontera de manière plus adaptée sa tâche de transmission des contenus.

3.4. Du rôle de l'histoire dans le processus de formation du mathématicien.

De mon point de vue, une certaine connaissance de l'histoire des mathématiques devrait faire partie du bagage indispensable du mathématicien en général et du professeur en particulier, quel que soit le niveau auquel il enseigne. Non seulement pour l'utiliser comme un moyen, un instrument dans son propre enseignement, mais de manière plus élémentaire parce que l'histoire peut lui apporter une vision véritablement humaine de la science et des mathématiques, vision dont le mathématicien éprouve parfois un grand besoin.

Le point de vue historique transforme de simples faits ou découvertes sans âme en fragments de connaissances recherchés avec passion en de nombreuses occasions par des êtres de chair et de sang qui ont ressenti une joie immense en vivant cela. Combien de ces théorèmes rencontrés dans le cadre de nos études, et qui nous ont alors semblé des vérités sorties de l'ombre pour se diriger vers le néant, ont changé d'aspect dès lors que nous sommes allés plus avant dans la théorie en envisageant son contexte historique ...

La perspective historique nous rapproche des mathématiques comme science HUMAINE, démystifiée, avançant parfois à grand peine, se trompant même en diverses occasions, mais capable de corriger ses erreurs. Elle nous rapproche des personnalités des hommes qui l'ont fait progresser au cours des siècles, avec des motivations distinctes.

Au niveau de la connaissance approfondie des mathématiques elles-mêmes, l'histoire nous procure un cadre dans lequel les éléments apparaissent dans leur véritable perspective. Cela représente un enrichissement important, aussi bien pour le mathématicien « praticien » que pour celui qui enseigne.

Si chaque élément de connaissance mathématique de nos manuels se voyait affecter un numéro de siècle (en tolérant une large approximation), on verrait les numéros sauter de manière folle, parfois dans une même page ou un même paragraphe. Les ensembles, les nombres naturels, les systèmes de numération, les nombres rationnels, réels, complexes, ... des dizaines de siècles d'écart, en arrière, en avant, de nouveau en arrière ... c'est vertigineux !

Il ne s'agit pas de faire prendre conscience à nos élèves de toutes les circonstances. L'ordre logique n'est pas forcément l'ordre historique, et l'ordre didactique idéal ne coïncide peut-être avec aucun des deux, mais le professeur devrait savoir comment les choses sont survenues pour :

- mieux comprendre les difficultés de l'homme en général à élaborer les idées mathémathiques, et à travers cela les difficultés de ses propres élèves,
- mieux comprendre l'enchaînement des idées, leurs filiations, leurs motivations et les variations de la symphonie mathématique ...,
- utiliser ce savoir comme un guide fiable pour sa propre pédagogie.

La connaissance de l'histoire donne une vision dynamique de l'évolution des mathématiques. On peut repérer la motivation des idées et de leurs développements à leur naissance. C'est là que l'on peut chercher des idées originales dans toute leur simplicité, encore habitées par le sens de l'aventure que l'on fait trop souvent disparaître dans les manuels ...

Comme dit avec justesse O.TOEPLITZ :

> « Pour ce qui concerne tous les thèmes de base du calcul infinitésimal, théorème de la moyenne, série de Taylor, ... on ne pose jamais la question *Pourquoi précisément comme cela ?* ou bien *Comment en est-on arrivé là ?* Pourtant ces questions ont dû objectivement être source d'une intense recherche ... Si nous retournions à l'origine de ces idées, elles perdraient cette apparence de mort et de faits disséqués et retrouveraient une vie fraîche et motivante ».

Une telle vision dynamique nous donnerait les moyens pour remplir différentes tâches intéressantes dans notre travail éducatif :

- la possibilité d'extrapolation vers le futur,
- l'immersion créative dans les difficultés du passé,
- la mise en évidence du caractère tortueux des chemins de l'invention, avec la perception de l'ambiguïté, de l'obscurité, des confusions initiales.

Par ailleurs, la connaissance de l'histoire des maths et de la biographie de ses créateurs les plus importants nous rend pleinement conscient du caractère profondément historique, c'est à dire dépendant du moment et des circonstances sociales environnementales ... ainsi que des impacts mutuels et forts que la culture en général, la philosophie, les mathématiques, la technologie, les diverses sciences ont exercées les unes sur les autres. Ce dernier aspect, les mathématiciens eux-mêmes enfermés dans leur travail technique n'en sont pas toujours conscients, et cela à cause de la forme dans laquelle les mathématiques leurs sont présentées, comme si elles étaient à l'abri des avatars de l'histoire.

Malheureusement, aussi bien pour l'étudiant qui veut se plonger dans la recherche mathématique, comme pour celui qui voudrait se consacrer à ses applications à l'enseignement, l'histoire des maths est généralement totalement absente de la formation universitaire. A mon sens, il y aurait un extraordinaire intérêt à ce que les différentes matières que nous enseignons se complètent de leur aspect historique, comme je l'ai dit plus haut, et que tous nos étudiants reçoivent au moins un bref panorama global du développement historique de la science qui va les occuper toute leur vie.

3.5. De l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement mathématique.

L'intérêt de la connaissance historique ne consiste pas à disposer d'une batterie de petites histoires et d'anecdotes curieuses qui serviraient d'interludes à nos élèves. L'histoire peut et doit être utilisée par exemple, pour comprendre et faire comprendre une idée compliquée de la manière la plus appropriée. Celui qui n'a pas la moindre idée des méandres que la pensée mathématique a dû parcourir dans le cas par exemple, de la notion de nombres complexes, pourra se sentir en droit d'introduire dans son enseignement les complexes comme « l'ensemble des couples de nombres réels sur lesquels sont établies les opérations suivantes ... ». En revanche, celui qui saura que ni Euler ni Gauss ne sont parvenus à donner une telle rigueur aux nombres complexes et qu'ils ont pu malgré tout faire des choses merveilleuses en relation avec eux, s'interrogera très sérieusement sur la pertinence à essayer d'introduire les complexes dans leur structure cristallisée, anti-naturelle et difficile à avaler qu'ils ont obtenue après plusieurs siècles de travail.

Les différentes méthodes de la pensée mathématique, comme l'induction, la pensée algébrique, la géométrie analytique, le calcul infinitésimal, la topologie, les probabilités ... ont surgi dans des circonstances historiques très intéressantes et très singulières, souvent dans l'esprit de penseurs très particuliers, dont il est très utile de rappeler les mérites, moins par souci de justice que par leur exemplarité.

L'histoire devrait être un outil important pour des objectifs comme :

- mettre en évidence le mode d'apparition très singulier des idées en mathématiques,
- mettre dans un cadre temporel et spatial les grandes idées, les grands problèmes, en relation avec leurs motivations et leurs antécédents,
- signaler les problèmes ouverts de chaque époque, leur évolution, la situation dans laquelle ils se trouvent actuellement,
- pointer les connexions historiques des mathématiques avec les autres sciences, c'est de cette interaction que sont nées de nombreuses idées importantes.

3.6. La modélisation et les applications dans l'enseignement des mathématiques.

Actuellement, il existe un fort courant soutenant que l'apprentissage des mathématiques doit être réalisé non pas en explorant directement les constructions mathématiques en elles-mêmes, dans les diverses structures qui se sont cristallisées au cours des siècles, mais plutôt dans un contact permanent avec les situations du monde réel qui leur ont donné et qui continuent à leur donner leur motivation et leur vitalité.

Ce courant est en parfaite consonance avec les idées que j'ai développées précédemment et me semble en être un corollaire naturel. Comme nous l'avons vu, les mathématiques voient leur origine dans une tentative d'exploration, dans un mode très particulier, des différentes structures complexes qui s'y prêtent. Le création du mathématicien se réalise spontanément dans cet effort pour dominer les aspects mathématisables de la réalité. L'enseignement devrait donc se donner comme objectif principal la « mise en culture », en essayant d'apporter à la jeunesse de notre société cet esprit mathématique.

Il me semble évident que, si nous limitions notre enseignement à une simple présentation des résultats qui constituent l'édifice purement théorique qui s'est développé, en laissant de côté son origine dans les problèmes que la réalité présente et ses applications pour résoudre de nouveaux problèmes, nous cacherions une part très importante et substantielle de ce que les mathématiques sont en réalité. Sans compter que nous nous passerions, par la même occasion, du pouvoir de motivation que la modélisation et les applications représentent ...

3.7. Le rôle du jeu dans l'enseignement des mathématiques.

De tous temps, l'activité mathématique a comporté une composante ludique. Elle a donné lieu à une bonne part des découvertes les plus importantes ...

Le jeu présente quelques caractéristiques singulières selon l'analyse de J. HUIZINGA dans son œuvre *Homo studens* :

- C'est une activité LIBRE, au sens de la paideia grecque, c'est à dire une activité que l'on exerce pour elle-même, et non pour le profit que l'on peut en tirer.
- Elle possède une certaine fonction dans le développement de l'homme. Comme chez les autres animaux, le « petit d'homme » joue et se prépare grâce au jeu à la vie. L'homme adulte joue, lui aussi, et éprouve dans le jeu un sentiment de libération, d'évasion, de relaxation.
- Le jeu, ça « ne plaisante pas ». Si on ne prend pas son jeu au sérieux, ça casse le jeu ...
- Comme la création artistique, le jeu procure du plaisir à travers sa contemplation ou son exécution ...
- Il se fait « en marge » de la vie ordinaire, aussi bien dans l'espace que dans le temps.
- Des éléments de tension existent durant le jeu, dont la libération provoque un grand plaisir, une émotion vive.
- Il crée des liens spéciaux entre les participants.
- Par ses règles, le jeu crée et impose un nouvel ordre, une nouvelle vie, pleine de rythme et d'harmonie.

Une analyse rapide de ce que représente l'activité mathématique suffit à nous autoriser la conclusion que des traces de tout cela existent en elle ... Les mathématiques sont « aussi » un jeu, mais c'est un jeu qui nécessite d'autres aspects pour fonctionner, le « scientifique, l'instrumental, le philosophique ... » Une fois rassemblés, tous ces aspects constituent dans les mathématiques l'un des axes véritables de notre culture.

Si le jeu et les mathématiques possèdent dans leur nature propre autant de points communs, il n'est pas moins vrai qu'ils participent l'un et l'autre des mêmes caractéristiques en ce qui concerne leur pratique.

Cela est particulièrement intéressant lorsque nous recherchons les méthodes les plus appropriées pour transmettre à nos élèves l'intérêt profond et l'enthousiasme que les mathématiques peuvent engendrer et pour amener une première familiarisation avec les processus usuels de l'activité mathématique ...

Un jeu commence par l'introduction d'une série de règles, d'un certain nombre d'objets ou pièces dont la fonction dans le jeu est définie par les règles, en procédant exactement de la même manière que l'on établit une théorie axiomatique par définition implicite : « On se donne trois systèmes d'objets. Les objets du premier système seront appelés points, ceux du second système seront appelés droites, ... » (HILBERT, *Grundlagen der Geometrie)*.

Qui veut être initié à la pratique d'un jeu doit d'abord se familiariser avec ses règles, mettre les pièces en relation les unes avec les autres, tout comme le débutant en mathématiques compare et fait interagir les premiers éléments de la théorie les uns avec les autres. Ce sont là les exercices élémentaires d'un jeu ou d'une théorie mathématique. Qui veut aller plus loin dans la maîtrise du jeu acquiert progressivement quelques techniques simples qui, dans des circonstances répétitives, ont conduit au succès. Nous avons là les premiers résultats et lemmes de base de la théorie qui se rendent facilement accessibles dès la première familiarisation avec des problèmes simples ...

Une exploration plus approfondie du jeu et un vécu plus important procurent la connaissance des chemins particuliers qu'ont utilisés ceux qui ont été les plus grands maîtres du jeu. Ce sont là les stratégies d'un niveau plus complexe qui ont nécessité une intuition spéciale dans la mesure où elles se trouvent parfois très éloignées des éléments initiaux du jeu. Cela correspond en mathématiques à la phase dans laquelle l'étudiant essaie d'assimiler et de s'approprier les grands théorèmes et méthodes qui ont été créés au cours de l'histoire. Ce sont les procédés des esprits les plus créatifs qui sont maintenant à sa disposition afin qu'il les utilise dans des situations plus confuses et délicates.

Plus tard, dans des jeux plus sophistiqués, où la réserve de problèmes ne se tarit jamais, le joueur expert, essaie de résoudre de manière originale des situations du jeu qui n'ont jamais été explorées auparavant. Cela correspond à la confrontation en mathématique avec les problèmes ouverts de la théorie.

Finalement, peu nombreux sont les gens capables de créer de nouveaux jeux, riches en idées intéressantes et en situations pouvant motiver des stratégies et des techniques de jeux novatrices. C'est là le parallèle à la création de nouvelles théories mathématiques, fertiles en idées et problèmes, et comportant des applications permettant de résoudre de nouveaux problèmes ouverts en mathématique et de révéler des niveaux de la réalité plus profonds qui jusqu'alors étaient restés dans l'ombre.

Les mathématiques et le jeu ont vu leurs chemins se croiser très fréquemment au cours des siècles. C'est souvent que dans l'histoire des mathématiques l'apparition d'une observation ingénieuse, faite sur un mode ludique, a conduit à de nouvelles formes de la pensée. Dans l'antiquité, on peut citer le « I ching » comme l'une des origines de la pensée combinatoire, et à une époque plus moderne on peut citer les FIBONACCI, CARDAN, FERMAT, PASCAL, LEIBNIZ, EULER, Daniel BERNOULLI ...

Sur l'intérêt des jeux pour éveiller l'attention des étudiants, Martin GARDNER s'est exprimé avec pertinence. Il est un des grands experts de notre temps sur la présentation lucide, intéressante et profonde de nombreux jeux depuis des années dans ses colonnes de la revue américaine « Scientific American » (Carnaval mathématique, Prologue) :

> Assurément, le meilleur moyen pour réveiller un étudiant, consiste à lui offrir un jeu à intrigue, puzzle, casse-tête, blague, paradoxe, avec un habillage mathématique où n'importe laquelle parmi la vingtaine de choses que les professeurs ennuyeux tendent à éviter parce qu'elles paraissent frivoles.

Tout mathématicien expert commence son approche à quelque question que ce soit de son champ d'investigation avec le même esprit explorateur que celui d'un enfant qui se familiarise avec un jouet neuf, ouvert à la surprise, empli d'une curiosité profonde devant le mystère qu'il espère éclaircir peu à peu, avec l'enthousiasme de la découverte. Pourquoi ne pas utiliser ce même esprit dans notre approche pédagogique aux mathématiques ? C'est dans sa puissance à transmettre à l'étudiant la façon correcte de se positionner face aux problèmes mathématiques que réside le grand bénéfice de cette approche ludique.

Les mathématiques sont un grand jeu sophistiqué qui de plus et simultanément possèdent également les caractéristiques d'une œuvre d'art intellectuelle, procurent une lumière intense dans l'exploration de l'univers et comportent de grandes répercussions pratiques. Comme nous l'avons vu plus haut, on peut utiliser avantageusement ses applications, son histoire, ses relations avec la philosophie ou les autres aspects de l'esprit humain, mais peut-être aucun de ces moyens ne peut transmettre l'état d'esprit idéal pour faire des mathématiques, mieux qu'un jeu bien choisi.

3.8. Importance actuelle de la motivation et de la présentation.

Nos élèves se trouvent de nos jours dans un bombardement intense de techniques de communications particulièrement puissantes et attirantes. Dans notre enseignement lorsque nous cherchons à capter une part substantielle de leur attention, c'est à une forte concurrence que nous nous opposons. Il faut que nous prenions en compte en permanence et que notre système éducatif essaie d'exploiter à fond des outils comme : la vidéo, la télévision, la radio, le journal, la bande dessinée, l'illustration, la participation directe ...

Je pense que nous sommes encore bien loin de profiter au mieux dans notre enseignement des possibilités que nous ouvrent les moyens techniques dont nous disposons déjà. Je donnerai une simple suggestion pratique à titre d'exemple : nous connaissons tous autour de nous des enseignants très bien préparés à servir d'exemple pour l'enseignement de certains thèmes qui sont pour la plupart d'entre nous de véritables casse-têtes, les probabilités par exemple. Ces professeurs sont souvent appelés dans des lieux différents pour répéter les mêmes idées sur le même thème. Ne serait-il pas beaucoup plus efficace et moins coûteux qu'un organisme quelconque qui ne serait pas en recherche d'un profit économique, produise une série de cassettes vidéo et les rende accessibles à un plus grand nombre de personnes ?

3.9. Engouement pour les mathématiques.

L'activité physique est un plaisir pour une personne en bonne santé. L'activité intellectuelle aussi. Les mathématiques, orientées comme un savoir faire autonome, avec un guide adapté, est un exercice attirant. De fait, bon nombre d'enfants très jeunes sont initiés de manière agréable par des activités et des manipulations qui constituent un départ raisonnable à la connaissance mathématique. Ce qui se produit souvent, c'est que quelque temps après, notre système n'a pas su maintenir cet intérêt et a noyé par des abstractions injustifiées et à contre temps le développement mathématique de l'enfant. Le goût pour la découverte en mathématique est possible et fortement motivant pour dépasser les autres aspects plus routiniers (qui restent indispensables) de son apprentissage. La prise en compte des applications possibles de la pensée mathématique dans les autres sciences et dans la technologie actuelle peut également amener la surprise et le plaisir chez de nombreuses personnes plus intéressées par la pratique. D'autres se sentiront plus émues à contempler les impacts que les mathématiques ont exercé sur l'histoire et la philosophie de l'homme ou devant la biographie de tel ou tel mathématicien célèbre.

Il faut à tout prix casser l'idée reçue et fortement enracinée dans notre société, probablement issue de blocages au cours de l'enfance de bon nombre d'entre nous, que les mathématiques sont nécessairement ennuyeuses, fermées, inutiles, inhumaines et très difficiles.

4. Tendances au niveau des contenus.

Les tendances générales décrites au chapitre précédent, suggèrent de manière naturelle quelques réformes au niveau des contenus des programmes scolaires qui se voient introduits avec plus ou moins d'élan et parfois même de manière expérimentale.

4.1. Un glissement vers les mathématiques discrètes?

Les mathématiques du XIX^{e} et XX^{e} siècles ont été dominées par le continu. L'analyse, par sa puissance et ses répercussions sur les applications techniques, a joué un rôle dominant. L'ordinateur semble modifier aujourdhui cette situation.

L'avènement des ordinateurs avec leur immense capacité de calcul, avec leur grande vitesse, leur adaptabilité, leur puissance de représentation graphique, les possibilités qu'ils ouvrent aux calculs formels ... a ouvert une multitude de nouveaux horizons, dont l'inspiration n'est plus seulement la physique comme dans les développements des siècles précédents, mais aussi les autres sciences comme l'économie, les sciences de l'organisation, la biologie ... dont les problèmes étaient jusqu'à présents opaques en partie à cause de la masse énorme d'informations qu'elles devaient traiter pour pouvoir approcher les intuitions mathématiques valables pour conduire à des processus de résolutions dans ces domaines.

D'un autre côté, l'accent mis sur les algorithmes discrets, utilisés en informatique et dans la modélisation de divers phénomènes par le biais de l'ordinateur, a donné lieu à un glissement des mathématiques actuelles vers le domaine du discret. Certaines parties de ce domaine sont suffisamment élémentaires pour pouvoir avantageusement faire partie du programme de l'enseignement secondaire. La combinatoire classique, ainsi que ses aspects modernes, comme la théorie des graphes ou la géométrie combinatoire, peuvent être considérés comme de bons candidats. La théorie élémentaire des nombres, qui n'a jamais disparu des programmes de certains pays pourrait en être un autre.

Diverses tentatives ont été réalisées afin d'introduire ces éléments et quelques autres similaires appartenant aux mathématiques discrètes dans l'enseignement mathématique de base. Il advient que cela ne semble possible qu'au sacrifice d'autres portions des mathématiques plus importantes dont on ne voit pas bien comment se passer. Bien qu'il paraisse assez évident que les mathématiques du futur seront différentes à cause de la présence de l'ordinateur, on ne distingue pas encore clairement comment tout cela va se mettre en place au niveau des contenus de l'enseignement primaire et secondaire.

4.2. Impacts de méthodes modernes de calcul sur les contenus d'enseignement.

Il n'y a pas si longtemps dans nos écoles élémentaires, il fallait apporter une grande énergie et beaucoup de temps à des exercices routiniers comme la division d'un nombre à 6 chiffres par un autre de 4 chiffres, ou l'extraction de racines carrées à la main en s'arrêtant à la 3^e décimale. A un niveau plus élevé, il fallait manipuler avec dextérité et vitesse les tables de logarithmes et leurs différentes interpolations. Aujourd'hui, la présence de la calculatrice de poche nous permet d'être d'accord pour dire que cette énergie et ce temps sont mieux employés à d'autres activités. De telles opérations sont intéressantes en tant qu'algorithmes intelligents et profonds mais pour la virtuosité routinière, ils sont superflus.

Actuellement, dans le secondaire et dans les premières années de l'enseignement universitaire nous utilisons beaucoup de temps et d'énergie pour que nos élèves acquièrent une certaine adresse dans le calcul des dérivés, des primitives, dans la résolution de systèmes linéaires, le produit de matrices, la représentation graphique de fonctions ... Toutes ces compétences sont incorporées avec de nombreuses autres beaucoup plus sophistiquées dans nos programmes actuels de calculs formels.

In fine, il est clair que notre enseignement du calcul, de l'algèbre, de la probabilité et des statistiques, doit se reporter dans le futur vers des sentiers distincts de ceux que nous suivons aujourd'hui. Il faudra mettre l'accent sur la compréhension et l'interprétation de ce que l'on est en train de faire, en revanche, l'énergie utilisée à augmenter son agilité dans des actions que la machine réalisent mieux et plus vite sera superflue. Dans la constitution des programmes d'enseignement nous devrons nous interroger en permanence, sur ce qui vaut la peine d'y appliquer de l'effort er de l'intelligence et sur ce que nous pouvons confier aux machines.

Le progrès de l'intelligence humaine consiste finalement à convertir en routine des opérations qui au départ représentaient un véritable défi mental, et lorsque c'est possible confier la réalisation de telles routines à des machines. C'est à ce prix que nous pouvons libérer la plus grande partie de notre capacité mentale à la résolution des problèmes qui sont encore trop profonds pour les outils dont nous disposons. N'ayez crainte que la source de ce type de problèmes ne se tarisse un jour !

4.3. Un retour vers la pensée géométrique et l'intuition spatiale.

Le courant des maths modernes s'est rendu coupable d'un abandon injustifié de la géométrie intuitive dans nos programmes. En réaction à cela on considère aujourd'hui comme une nécessité incontournable d'un point de vue didactique, scientifique, historique, de retrouver le contenu spatial et intuitif dans toutes les mathématiques, et non plus seulement en ce qui concerne la géométrie.

A l'évidence, depuis une quarantaine d'années, la pensée géométrique traverse une profonde dépression dans l'enseignement mathématique de base, primaire et secondaire. En parlant de la pensée géométrique je ne me réfère pas à l'enseignement de la géométrie globalement basé sur les « Eléments » d'Euclide, mais à quelque chose de beaucoup plus profond et élémentaire encore qui se trouve être la mise en culture de cette « région » des mathématiques, inspirée par la capacité de l'homme à explorer rationnellement l'espace physique dans lequel il vit, et à la fois soucieux de stimuler cette même capacité.

Il suffit de jeter un coup d'œil sur nos manuels scolaires et les programmes de notre enseignement primaire et secondaire pour constater cette situation qui n'est pas une particularité chez nous. En réalité, il s'agit d'un phénomène universel qui est dû à mon avis dans une large mesure, à l'évolution même des mathématiques depuis le début du XX^e siècle approximativement.

La crise des fondements a poussé les mathématiciens vers le formalisme, la rigueur, un certain abandon de l'intuition dans la construction de la science. Ce qui fut efficace pour le fondement de la science, fut considéré également comme intéressant pour la transmission des connaissances.

Les conséquences en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques en général furent néfastes, mais particulièrement néfastes pour la pensée géométrique. A cette idée de rechercher les fondements rationnels, associée avec une mauvaise interprétation des analyses de certains psycho-pédagogues sur la structure évolutive de la connaissance de l'enfant, s'est attachée la focalisation sur la théorie des ensembles et la recherche de la rigueur. Or la géométrie, au niveau élémentaire, est difficile à formaliser de manière adaptée, et c'est ainsi que dans cette tentative on perdit du même coup la pensée géométrique, l'intuition spatiale et la source la plus importante de véritables problèmes et de résultats intéressants, abordables avec un outillage facilement assimilable, source qui ne s'est pas tarie au cours des siècles. Le XIX^e siècle fut le siècle d'or du développement de la géométrie élémentaire. L'enseignement initial en mathématique se consacrait alors traditionnellement à cette géométrie, qui vivait à l'ombre de créations très intéressantes et très à la mode dans le milieu de la recherche, comme la géométrie descriptive, la géométrie projective, la géométrie synthétique, les géométries non-euclidiennes ... Le même sens géométrique qui stimula les développements spectaculaires du XIX^e siècle est encore bien vivant aujourd'hui dans des domaines comme la théorie des graphes, la théorie des corps convexes, la géométrie combinatoire, quelques chapitres de la théorie de l'optimisation, la topologie ... On peut signaler quelques points communs à tous ces développements : une relation forte à l'intuition spatiale, une certaine composante ludique et peut être un rejet tacite de développements analytiques excessifs.

Dans notre enseignement élémentaire actuel, on ne trouve pas le moindre écho de toutes ces matières dont la profondeur se manifeste pourtant de plus en plus clairement. Elles sont seulement prises en compte au niveau supérieur de l'enseignement et à celui des mathématiques récréatives. Mais cette mathématique récréative n'a pas encore trouvé dans nos contrées le chemin de l'école. Paradoxalement, nous interdisons le jeu à ceux qui en tireraient le plus de plaisir et de bénéfice.

Tout le monde semble aujourd'hui d'accord sur la nécessité d'un retour de l'esprit géométrique au niveau de l'enseignement des maths. En revanche, la façon de mener à bien ce retour n'est pas très claire. Il convient d'éviter les extrêmes déjà rencontrés par exemple dans l'introduction de la géométrie du triangle qui fut en vogue à la fin du XIX^{e}. Il faut aussi éviter une introduction soutenue rigoureusement par une géométrie axiomatique.

Une orientation saine pourrait consister à établir une base d'opérations à travers quelques principes intuitivement évidents à partir desquels on pourrait soulever les développements locaux intéressants de la géométrie métrique classique, choisis sur leur beauté et leur profondeur. Les œuvres élémentaires de COXETER pourraient être un exemple à suivre sur ce terrain.

4.4. Domaine de la pensée aléatoire, probabilités et statistique.

Les probabilités et la statistique sont des composantes très importantes de notre culture et possèdent des applications dans de nombreuses sciences spécifiques. Elles devraient constituer une part importante du bagage culturel de base du citoyen de notre société. Tous les systèmes éducatifs semblent s'accorder sur ce point. Effectivement, nombreux sont les pays qui incluent dans leur programme d'enseignement secondaire ces matières. En revanche il y en a peu où cet enseignement est mené à bien avec l'efficacité souhaitée. En Espagne, je crois que ce phénomène est dû en partie à la difficulté même de la matière en question, mais aussi à une certaine carence en formation adaptée des professeurs pour cette tâche. Peut-être nous manque-t-il de bons modèles de leur enseignement.

5. Une tâche bien compliquée ?

Il serait plus juste de parler de la complexité à décrire cette tâche. Mais on peut trouver des tâches « clés » qui pourront éclairer, soutenir et recadrer toutes les autres tâches. L'idée de la « mise en culture » est une des clés de cette complexité apparente. Et la clé fondamentale en est évidente : la disponibilité d'enseignants bien préparés pour cette mission.

L'enseignement mathématique doit être conçu comme un processus d'immersion aux façons de procéder propres au milieu mathématique, comme un apprenti artiste qui s'imprègne, comme par osmose de la façon singulière de voir les choses qui caractérisent l'école qu'il fréquente. Cette idée a des répercussions profondes sur l'orientation donnée à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques, mais pour ce qui est de sa réalisation, il est absolument indispensable que les professeurs en contact direct avec les élèves aient toutes compétences pour la mener à terme ...

6. Désidérata.

Je voudrais suggérer, très sommairement, quelques projets dont notre communauté mathématique pourrait et devrait, à mon avis, s'occuper tout particulièrement.

6.1. Servons-nous de la pratique des mathématiques pour stimuler des valeurs éthiques.

Les mathématiques d'aujourd'hui, qui trouvent leur origine au VI^e siècle avant J-C chez les pythagoriciens et qui a élevé notre science et notre culture occidentale à de tels sommets, a surgi au sein de ce que Van der WAERDEN appela avec raison une communauté scientifique et confrérie religieuse. Pendant plusieurs siècles l'empreinte du pythagorisme imprégna notre culture de nombreux aspects profondément éthiques.

A l'heure actuelle, je pense que nous avons converti une grande partie de notre science en technique pure, et que nous ne sommes plus suffisamment conscients des possibilités qu'offre la pratique mathématique, à tous niveaux pour stimuler les valeurs éthiques.

Il serait bon, d'après moi, que nous autres mathématiciens nous essayions de nous en imprégner, et d'éclabousser les autres, particulièrement les plus jeunes de ces valeurs sans lesquelles notre civilisation ne peut survivre.

6.2. Prenons garde à la formation initiale et continue des enseignants.

En 1908, Félix KLEIN écrivait en guise d'introduction à ses leçons sur « Les mathématiques élémentaires d'un point de vue supérieur » :

> ... Depuis longtemps les universitaires se préoccupent exclusivement de leur science, sans concéder la moindre attention au besoin de l'école, sans essayer le moins du monde d'établir une connexion avec les mathématiques de l'école. Quel a été le résultat de cette pratique ? Le jeune étudiant de l'université se voyait, au départ, confronté à des problèmes qui ne lui rappelaient pas du tout ce qui l'avait occupé à l'école. Naturellement, il oubliait toutes ces choses rapidement et complètement. Lorsque, à la fin de ses études il se transformait en professeur, il se trouvait subitement dans la situation de devoir enseigner les mathématiques élémentaires traditionnelles dans le mode pédant des générations antérieures ; et dans la mesure où il était à peine capable, sans aucune aide, de percevoir la connexion entre sa tâche et les mathématiques étudiées à l'université, il recourait très vite à la méthode d'enseignement « qui avait fait ses preuves », et de ses études universitaires ne restait plus qu'une mémoire plus ou moins agréable qui n'avait aucune influence sur son enseignement.

Près d'un siècle est passé, et je ne pense pas que l'on puisse dire que la situation se soit améliorée, tout au moins pour ce qui concerne la formation initiale que reçoivent nos étudiants jusqu'à la licence.

Ce que la société est en droit d'espérer de l'université, pour ce qui est de la formation initiale des gens à qui elle va confier l'enseignement mathématique des plus jeunes, pourrait se composer de :

- une composante scientifique adaptée à sa tâche spécifique,
- une connaissance pratique des moyens adaptés de transmission des attitudes et des savoirs que l'activité mathématique comporte,
- une connaissance intégrée des répercussions culturelles de ce savoir spécifique.

Si on se penche attentivement sur les programmes d'études de la majorité de nos universités, on constate d'importantes carences sur les aspects qui pourraient conduire à cette formation adaptée de nos enseignants.

A mon avis, les cours complémentaires ajoutés à la fin des études de licence dans le but de procurer une formation pédagogique raisonnable, pas plus que les cours de formation continue ne peuvent se substituer à la formation intensive que l'on devrait stimuler réellement pendant les années universitaires où l'étudiant est beaucoup plus réceptif.

Je pense que les universités qui ne négligent pas ouvertement ce devoir envers la société sont rares. Il est urgent de mettre la main à la pâte afin de remédier à cette situation rapidement.

6.3. Gardons un œil sur la recherche en didactique.

Comme nous l'avons vu, l'enseignement mathématique est une activité interdisciplinaire, extraordinairement complexe, qui embrasse des savoirs relatifs, non seulement, aux mathématiques, mais aussi à d'autres sciences qui en font emploi, à la psychologie et aux sciences de l'éducation ...

Ce n'est que très récemment qu'un domaine a été défini, avec des tâches de recherches propres, difficiles et comportant de profondes conséquences du côté pratique. On peut affirmer que dans le système universitaire la didactique des mathématiques n'a pas encore trouvé une situation adaptée. Pourtant on voit se former des groupes de travail produisant des résultats importants.

6.4. Prenons soin de la culture mathématique de la société. Vulgarisation des mathématiques.

Plusieurs de nos pays se trouvent par des siècles de traditions imprégnés d'une culture fortement tournée vers ses composantes humanistes. En Espagne, par exemple, le mot culture semble synonyme de littérature, peinture, musique ... Parmi les personnalités célèbres nombreuses sont celles qui n'ont aucune honte à confesser ouvertement leur profonde ignorance des éléments les plus basiques des mathématiques et de la science et paraissent même s'en vanter.

Les pages de nos journaux ne semblent pas encore avoir remarqué que les sciences et en particulier les mathématiques constituent de nos jours un des piliers de la culture humaine. Il serait souhaitable que tous les membres de la communauté mathématique et scientifique, nous nous efforcions à mettre en évidence devant la société la présence influante des mathématiques et de la science sur la culture. Une société consciente de ce que la science représente pour son développement se rendra collectivement plus sensible aux problèmes de l'enseignement aux plus jeunes.

La communauté mathématique internationale prête, depuis peu, beaucoup d'attention à se donner les moyens d'une vulgarisation réussie des mathématiques.

6.5. Sachons reconnaître les talents précoces.

Il est certain que dans nos écoles, un certain nombre d'élèves possèdent un don intellectuel exceptionnel pour les mathématiques. Ces talents passeront parfois plus ou moins inaperçus, et plutôt négligés à cause de l'impossibilité pour les professeurs de leur appliquer l'attention nécessaire. Ce sont des gens, qui ont au début un grand appétit pour l'école, mais qui passent à un stade d'ennui, de frustration et de désintérêt pouvant les conduire jusqu'à l'apathie après une période scolaire de grande souffrance.

Par ailleurs, ce sont des talents qui pourraient rendre des services exceptionnels à notre société, si on ne les gâchait pas. C'est une grande responsabilité sociale que ce gâchis causé par notre négligence. En Espagne, actuellement aucun organisme, qu'il soit public ou privé, ne prête une attention continue, afin de détecter, stimuler et orienter le talent extraordinaire et précoce en mathématique ni en aucune autre science. Il existe bien, et c'est largement justifié, une attention, un appui et un traitement spécial réservé aux déficients intellectuels, mais on ne prend aucun soin des surdoués.

On peut penser, et ce n'est pas sans fondement, que le talent précoce en mathématique est plus facile à détecter et à stimuler que dans d'autres sciences. De fait, depuis longtemps des expérimentations ont été réalisées avec succès dans bon nombre de pays. Il y a différents moyens de cerner le problème et parmi eux certains ne sont pas d'un coût excessif, particulièrement si l'on prend en compte le rendement à long terme d'une action bien menée. En Amérique du Sud l'émergence de quelques personnalités au talent extraordinaire à produit un effet important sur le développement mathématique de leur pays respectif. Il est possible qu'une action soutenue afin de détecter et stimuler les talents précoces pourrait dans des délais raisonnables placer nos pays à un niveau mathématique et scientifique beaucoup plus élevé.

Les publications de l'**A**ssociation des **P**rofesseurs de **M**athématiques de l'**E**nseignement **P**ublic (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

— Les brochures signalées par * sont de publication récente.

— Le prix « *adhérent* » concerne l'A.P.M.E.P. **et la S.B.P.M.ef**.

N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix, en € , *sans port*	
	<u>Collège</u>	public	adhérent
*503	La jubilation en mathématiques		
	Fichiers Evariste : 480 problèmes tirés de différents tournois et rallyes mathématiques	4.90	**3.80**
98/132	*2 tomes :*	21,35	**15,25**
502	EXCEL-Classe, CD-Rom (Version individuelle)	16.75	**16.75**
55	*Géométrie expérimentale avec CABRI*	13.40	**12.65**
119	Jeux 5 (Des activités mathématiques au collège)		
	Série EVAPM : Evaluation 6^e (première chez nous!)	11	**7.60**
112/118	2 fascicules : Analyses et résultats & Dossier professeur	17.50	**12.15**
352	Tableur et mathématiques au Collège	12,20	**9,90**
451	Concours Australien de mathématiques	15,85	**11**
250/	Panoramas de compétitions mathématiques		
*251	*Panoramath 96 & Panoramath 2*	25,90	**12,50**
	<u>Lycée</u>		
*138	Statistiques en classe de seconde	8.70	**6**
*120	Classeur informatisé de documents math. - 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	45,95	**30,50**
	Version 26 installations, port compris	91,45	**61**
	CD-Rom de mise à jour	10,65	**7,60**
90/	Série EVAPM : Evaluation 1re (cinquième chez nous!)		
107/108	3 fascicules	21.35	**14.50**
*305	GALION-Thèmes Seconde : 10 thèmes programme 2000	11,45	**9,90**
*450	MathÉvasion : 46 activités en bandes dessinées	7,60	**5,35**
	Avec CABRI, faire de la géométrie en jouant		
124/125	*2 tomes déjà paru*	17,55	**10,65**
*129	Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaires	9.90	**6.85**
121	Maths en scène : Commentaires des 22 thèmes de l'expo « Mathématiques 2000 » utilisable indépendamment	11,00	**7,60**
402	Jeux du Scientific American	20.60	**14.50**

PORT (prix indicatif) : 1 brochure : 2,50 €; 2 ou 3 brochures : 4,00 € et au-dessus de 3 : 6,50 €

Les éléments

J. NAVEZ, *Université de Liège*

Il n'y a pas si longtemps, les élèves des écoles moyennes et des humanités avaient le plaisir (c'est du moins ce que les professeurs espéraient) d'étudier la géométrie dans deux manuels, un pour la géométrie plane et l'autre pour la géométrie de l'espace. Bizarrement, les chapitres de ces livres dont les éditions successives se comptaient par dizaines ne s'appelaient pas chapitres mais livres.

Il s'agit bien sûr d'une transposition contemporaine de l'œuvre magistrale d'EUCLIDE, les « Eléments », dont la première version a été créée il y a plus de 22 siècles. Aujourd'hui, le progrès et la lutte contre l'échec aidant, les élèves ont le plaisir d'étudier la géométrie dans le meilleur des cas sous forme de rondelles insérées dans leur manuel annuel de mathématiques et dans le plus mauvais des cas sous forme de photocopies (souvent appelées stencils) dont le processus de détérioration est accentué par la compression de la farde de latin-bio-maths-religion-gym-anglais, symbole de l'unicité du savoir. Mais revenons à Euclide.

L'activité géométrique de l'homme plonge ses racines dans la nuit des temps. Même si on se limite aux exposés systématiques de géométrie consignés par écrit, les plus anciens parvenus jusqu'à nous remontent à plus de 3000 ans.

C'est essentiellement dans le monde grec, durant le dernier millénaire avant Jésus Christ que la géométrie s'est structurée en une discipline mathématique procédant de manière déductive et rigoureuse à partir d'évidences admises au départ. L'œuvre admirable des grecs fut transmise à la postérité au travers des remarquables « Eléments » d'Euclide.

Adresse de l'auteur: Jacques Navez, rue des Comtes de Salm 3, 6690 Vielsalm

Les lignes de force de la géométrie vont dans trois directions : les méthodes axiomatiques, les méthodes algébriques et les méthodes différentielles. Pendant 23 siècles, l'étude de la géométrie a été conditionnée par la méthode axiomatique et les « Eléments » ont constitué la référence principale en cette matière.

L'exposé qui suit comporte trois parties :

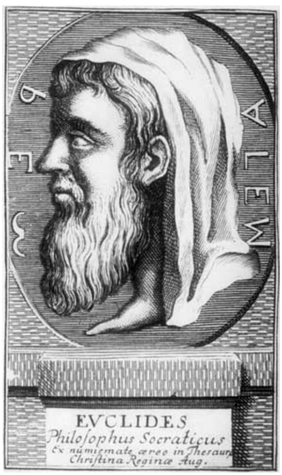
- un aperçu historique sur Euclide, son œuvre et la transmission des « Eléments » jusqu'à nous ;
- le contenu des « Eléments » ;
- l'influence de l'œuvre d'Euclide sur l'enseignement actuel de la géométrie.

Les recherches historiques et mathématiques qui gravitent autour de l'œuvre d'Euclide sont extrêmement nombreuses, le lecteur qui souhaiterait en savoir plus devrait consulter :

- « *The Thirteen Books of Euclid's Elements* » dont le texte original dû à HEIBERG a été traduit en anglais, enrichi et commenté par Sir Thomas L. HEATH (Publications DOVER, New York, 3 volumes, 1956) ;
- le département d'histoire des mathématiques de l'Université de St Andrews en Angleterre qui publie sur Internet une excellente documentation.

1. Aperçu historique

Les dates proposées en ce qui concerne la vie d'Euclide varient d'un auteur à l'autre, on peut trouver de 365 à environ 300 BC, de 350 à 280 BC, de 330 à 275 BC, . . . , mais comme on est à peu près sûr du règne du roi PTOLÉMÉE, de 306 à 283 BC, on peut dire qu'Euclide était en pleine maturité aux environs de 300 BC.
Formé à Athènes par les disciples de PLATON, Euclide fonda une école et enseigna les mathématiques à Alexandrie en Egypte sous le règne de Ptolémée.



Euclide a d'ailleurs probablement été le précepteur de certains enfants proches du roi. La remarquable pérennité des Eléments font qu'Euclide peut être considéré comme le modèle des professeurs de mathématiques de l'Antiquité.

La transmission des Eléments s'est faite d'une part par la voie scolastique (grec puis latin) et d'autre part, par la tradition arabe. L'invention de l'imprimerie en a permis son immense diffusion puisque c'est le second livre le plus édité au monde, le premier étant la Bible.

Les travaux originaux d'Euclide et de ses prédécesseurs ARCHIMÈDE et APOLLONIUS sont perdus, la source la plus ancienne et la plus fiable étant celle des *Commentaires* de PROCLUS (410–485 AD). Plutôt philosophe que mathématicien, ce disciple de l'école néo-platonique qui avait étudié en Grèce et à Alexandrie, a lui-même enseigné les mathématiques.

A vrai dire, quelques fragments postérieurs seulement d'un siècle à la mort d'Euclide ont été trouvés sur l'île Eléphantine en 1906–1907 et quelques autres fragments datant de 75–125 AD ont aussi été retrouvés.

CICÉRON parle d'Euclide et il est certain que l'œuvre d'Euclide a été assez tôt, au moins partiellement, traduite en latin. Les deux meilleures traductions dont nous disposons sont celles de Gherard de CREMONA (1114–1187 AD) récemment retrouvée et celle de Johannes CAMPANUS (13e siècle).

Plus d'un millier d'éditions des Eléments ont été imprimées depuis la première datée de 1482 (Imprimée à Venise par Erhard RATDOLT et contenant la traduction latine de Campanus).

La transmission s'est également faite par la voie arabe. Le calife AL MANSOUR (754- 775 AD) envoya une mission auprès de l'empereur de Byzance et il obtint parmi d'autres livres grecs, une copie de l'œuvre d'Euclide.

Le calife AL MAMOUN (813-833 AD) obtint également une copie de la part des byzantins. La version des Eléments par AL HAJJAJ fut une des premières traductions du grec vers l'arabe, elle fut réalisée durant le règne du calife HAROUN AL RASHID (786– 809 AD).

La seconde version arabe fut celle de ISHAQ BEN HUNAIN améliorée par THABIT BEN QURRA et fut réalisée aux environs de 900 AD.

La troisième version qui nous est actuellement accessible est celle de AT TUSI (1201– 1274 AD) dont l'édition apparaît en deux formes, une plus réduite et une plus étendue. L'édition la plus étendue a survécu à Florence et a été publiée à Rome en 1594. L'édition la plus courte a survécu à Berlin, Munich, Oxford, au British Museum, à l'India Office et à Constantinople ; elle a été imprimée à Constantinople en 1801 et les six premiers livres à Calcutta en 1824.

2. Le contenu des Eléments

Les éléments comportent 13 livres dont 8 sont dits « géométriques » et 5 sont dits « arithmétiques » :

— livres I à VI : géométrie plane,
— livres VII à XI : arithmétique,
— livres XII et XIII : géométrie de l'espace.

La structure générale de chaque livre est la suivante :

1. Les définitions des objets géométriques, comme par exemple :
   — un point est ce qui n'a aucune partie,
   — une ligne est une longueur sans largeur,
   — une droite est une ligne dont l'extension entre deux quelconques de ses points vaut la distance entre ces points,
   — une surface est ce qui possède longueur et largeur seulement,
   — un plan est une surface dont l'extension entre deux quelconques de ses droites vaut l'aire entre ces droites,
   — un trilatère est la figure formée par trois droites d'un même plan,
   — des droites parallèles sont des droites coplanaires qui prolongées indéfiniment de part et d'autre ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.
2. Les axiomes

   La poursuite du discours nécessite de ne pas rester bloqué devant une difficulté qu'une attitude commune basée sur le bon sens peut lever : ce sont les notions communes ou axiomes. Par exemple :

   — les égaux à un même tiers sont égaux,
   — les figures superposables sont égales.
3. Les postulats (seulement dans le livre I)

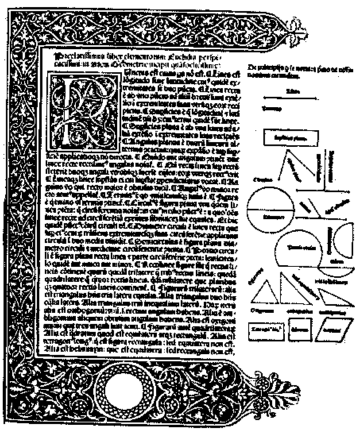
   Ce sont des exigences du discours, c'est à dire des conditions préalables que l'interlocuteur doit concéder s'il désire participer à la discussion. Par exemple :

   — de tout point à tout autre point, on peut tracer une et une seule ligne droite,

— de tout point on peut tracer une droite parallèle à une droite donnée.

4. Les propositions Elles sont démontrées, elles sont des conséquences logiques des axiomes et des postulats . Elles se répartissent en deux classes :
   — les théorèmes,
   — les problèmes de construction.

La méthode d'Euclide possède bien des avantages car on entre directement dans la structure globalement perceptible de la géométrie, les notions de parallélisme, de perpendicularité, de mesure des longueurs et des angles, les nombres rationnels (définition différente de l'actuelle) ou non sont directement liés. Tout ceci concorde avec la vision intuitive de la géométrie.



Euclide insiste fortement sur l'étude des figures planes formées par 2 points (segment), 3 points (triangle), 4 points (quadrangle) et sur les figures formées par 2 droites (angle), 3 droites (trilatère), 4 droites (quadrilatère) ; ces figures et leurs conditions d'égalité deviennent rapidement des outils importants de démonstration. Cette démarche est logique et naturelle dans l'étude des figures. Toutes les propositions qui sont des problèmes de construction sont très soignées et ceci confère un caractère d'applicabilité immédiate à la théorie.

Euclide insiste fortement sur l'étude des figures planes formées par 2 points (segment), 3 points (triangle), 4 points (quadrangle) et sur les figures formées par 2 droites (angle), 3 droites (trilatère), 4 droites (quadrilatère) ; ces figures et leurs conditions d'égalité deviennent rapidement des outils importants de démonstration. Cette démarche est logique et naturelle dans l'étude des figures. Toutes les propositions qui sont des problèmes de construction sont très soignées et ceci confère un caractère d'applicabilité immédiate à la théorie.

Par contre, certaines définitions n'en sont pas toujours réellement car elles font appel à d'autres notions (exemple : l'extension). Certains postulats ou axiomes sont superflus ou surabondants et plus grave l'axiomatique n'est pas complète, mais il est vrai que certains aspects de la théorie des nombres peuvent la compléter (exemple : continuité sur la droite).

La méthode d'Euclide a assurément permis l'essor au 19e siècle de la méthode axiomatique mise en forme par HILBERT.

Dans cette méthode on démarre avec des éléments fondamentaux (*dingen*) non définis : points, droites, plans qui sont uniquement contraints à suivre des règles bien précises, les axiomes, et les théorèmes sont des conséquences logiques des axiomes. Mais la plupart des auteurs des manuels pour l'enseignement secondaire se sont constamment heurtés à deux écueils inhérents à la méthode axiomatique :

- ils n'osent pas pour des raisons pédagogiques franchir le pas des « dingen » de Hilbert et se retrouvent avec des définitions encore plus sujettes à caution que celles d'Euclide comme par exemple : le point est la figure la plus simple que l'on puisse dessiner dans le plan, on appelle surface plane la surface d'une eau calme, le dessus d'une table,. . .
- l'axiomatique elle-même a toujours provoqué des querelles byzantines pour obtenir un système d'axiomes dans lequel il y a le moins de superflu possible,
- enfin le fonds projectif réapparaît parfois là où on s'y attend le moins et provoque des bizarreries apparentes ; exemple : axiome de l'ordre sur une droite différent de l'axiome de l'ordre dans un faisceau de demi-droites.

C'est pourquoi jusqu'aux années 1960, les concepteurs de programmes et de manuels pour le secondaire ont préféré une introduction naïve dans le style d'Euclide plutôt qu'une approche strictement axiomatique réservée à certains cours d'université.

3. Influence de l'œuvre d'Euclide sur l'enseignement actuel

La pérennité de l'œuvre d'Euclide est à elle seule une justification suffisante pour prouver l'influence qu'elle a eue jusqu'à nos jours. Mais il ne faut pas croire que les choses n'ont pas évolué.

- De l'Antiquité jusqu'au 19e siècle, le texte d'Euclide qu'il soit réservé à quelques initiés ou plus largement diffusé a constamment été amélioré et remanié par les plus grands mathématiciens mais la structure de l'œuvre n'a guère changé. Au xvii^{e} siècle, la géométrie analytique (DESCARTES) et l'étude des coniques (PASCAL) se sont simplement greffées sur la structure euclidienne.

— Sous l'influence du développement de la géométrie projective au xix^{e} siècle (PONCELET, VON STAUDT, ENRIQUES), une approche plus rigoureuse et plus systématique des fondements de la géométrie a été entreprise de manière à faire de la géométrie euclidienne un modèle de géométrie axiomatique. On peut considérer qu'un des sommets de ce mouvement a été atteint avec le livre de D. HILBERT, « Grundlagen der Geometrie ».

— Des recherches sur les géométries non-euclidiennes menées notamment par RIEMANN et LOBATCHEVSKI , au 19e siècle, ont souligné l'importance fondamentale des postulats de base.

— Sous l'influence du développement de la théorie des groupes (GALOIS, CARTAN), la géométrie a paru un moment se simplifier fortement au point de vue conceptuel pour ne plus apparaître que comme l'étude des propriétés invariantes sous l'action de certains groupes de transformations.

  Il est évident qu'une telle approche ne peut pas convenir à une première étude de la géométrie et qu'elle met en jeu des concepts d'une abstraction telle que l'image du modèle mathématique en risque d'être altéré.

— Par suite du développement de la théorie des espaces vectoriels et des espaces affins (CARTAN), la géométrie euclidienne a pu également entrer dans un cadre purement algébrique.

  Malheureusement, cette vision des choses conduit inéluctablement à ne plus faire que de la géométrie analytique et fait fi de toutes les constructions classiques dont les caractères de simplicité et d'utilité ne sont plus à démontrer. La géométrie analytique ne doit rester qu'un outil au service de la géométrie.

— Des recherches récentes en psycho-pédagogie peuvent également avoir un impact sur l'enseignement de la géométrie. Il s'agit de l'étude de la perception par de jeunes enfants de concepts fondamentaux comme : « d'abord l'espace ou d'abord le plan », « d'abord les parallèles ou d'abord les perpendiculaires », les mesures de longueur, d'aires, de volumes.

  De toutes façons, quelle que soit la façon dont on aborde la géométrie, son étude est constamment associée à celle des nombres réels. Cela,

Euclide l'avait magistralement compris puisque 5 livres des éléments sont consacrés en fait à la théorie des nombres.
Malgré le bouillonnement des idées dans la seconde moitié du xix^e siècle et la première moitié du xx^{e}siècle, les plus grands mathématiciens ont témoigné leur admiration pour Euclide et on peut citer parmi d'autres : LEGENDRE, GAUSS, RIEMANN, ENRIQUES, HADAMARD, EINSTEIN.
HADAMARD a écrit : « Les Eléments d'Euclide ont été enseignés durant de longs siècles aux Universités, puis aux Lycées et Collèges, sous des formes très diverses et plus ou moins heureusement modifiés mais cet ouvrage capital a toujours servi de base aux ouvrages ultérieurs ».

4. Les programmes

Jusqu'au années 60, les programmes de géométrie du secondaire ont constamment fait référence à l'œuvre d'Euclide puisqu'ils mentionnaient souvent nommément : Livre I, livre V, ...

Lors de la réforme des mathématiques modernes, on a tenté de combiner la méthode vectorielle et la méthode des groupes de transformations.

Le principe de la méthode vectorielle est le suivant : on effectue d'abord la construction des nombres réels, on étudie alors les espaces vectoriels réels avec leurs propriétés usuelles, on donne la définition d'un espace affin associé à un espace vectoriel réel, on introduit le produit scalaire et la notion d'espace vectoriel euclidien et enfin la notion d'espace affin euclidien. On constate après coup qu'un espace affin euclidien de dimension 2 constitue un modèle satisfaisant pour l'étude de la géométrie plane.

Les avantages théoriques de cette approche sont nombreux : pas de problèmes avec les éléments fondamentaux, généralisation immédiate quelque soit la dimension, outils de travail standardisés ...

Les inconvénients sont apparus assez vite : structure algébrique très lourde à assimiler, trop de théorie, exercices de type analytique répétitifs et sans grâce.

Le principe de la méthode des groupes de s est le suivant : on étudie le groupe des projectivités, le groupe des affinités, le groupe des similitudes, le groupe des isométries et leurs sous-groupes; on étudie ensuite leurs invariants. L'avantage de cette méthode est la présentation élégante et générale qui peut s'étendre à la résolution de cas plus difficiles. Par contre si tout le monde s'accorde sur la nécessité d'étudier les transformations et de résoudre ainsi de manière élégante certains problèmes, le passage aux invariants n'est pas une démarche simple et directe.

5. Perspectives et conclusions

Plusieurs essais de nouveaux programmes concernant l'enseignement de la géométrie plane ont vu le jour mais n'ont pas donné le résultat escompté. Alourdissant la théorie de base, ils ont souvent pour conséquence de conduire à des notions qui sont purement mémorisées, négligeant ainsi un des objectifs essentiels, celui d'être un outil permettant de résoudre des problèmes.

Au Roi PTOLÉMÉE qui lui demandait s'il n'y avait pas de façon plus simple pour apprendre la géométrie, Euclide répondit : « il n'y a pas de voie royale pour étudier la géométrie ». En le paraphrasant, on peut dire qu'il n'existe pas de solution miracle qui allierait la clarté méthodologique avec l'élégance mathématique.

Il y aurait pourtant moyen de trouver des compromis (à la belge ?). Voici une proposition exemplative :

— on part du schéma général des géométries axiomatiques mais en recourant comme Euclide aux « définitions » pour éviter l'écueil des « dingen » ; ensuite, on ne craint pas de mettre la barre suffisamment haut en ce qui concerne certains « axiomes » (ex. : admettre les cas d'égalité des triangles) et enfin, on accentue comme Euclide les problèmes de construction et les exercices d'application ;
— l'étude des transformations élémentaires et de leurs invariants immédiats apporte un outil appréciable ;
— quand les exemples introductifs sont établis, l'étude des espaces vectoriels s'introduit naturellement et on peut alors disposer de la géométrie analytique comme outil supplémentaire.

Au lieu d'opposer les diverses méthodologies, il faut plutôt essayer d'en tirer une synergie. Bien entendu, l'élégance mathématique pure y perdra, mais l'élégance n'est pas un objectif essentiel de l'enseignement de la géométrie.

Beaucoup de mathématiciens ont maintenant pris conscience de cette situation et souhaitent remédier au désordre crée par l'introduction hâtive de nouveaux programmes successifs.

Dans nos classes

Yolande Noël-Roch

Cette rubrique est analogue à celle qui a paru dans le numéro 135 de la revue mais nous allons cette fois décrypter des grilles à partir de **produits** donnés sur chaque ligne et chaque colonne (et non plus à partir de sommes).

Cette fois encore, tous les niveaux de difficulté peuvent être créés. Nous allons en donner quelques exemples. Les conventions restent les mêmes : il s'agit de trouver la valeur de chacun des symboles utilisés sachant qu'un symbole donné cache toujours un même nombre à l'intérieur d'une grille donnée.

1. Enseignement primaire

Voici une grille qui peut être proposée à des enfants ne disposant que des « tables par 2 et 3 ».

♣	♡	6
♢	♡	12
8	9	

Grille 1.

En troisième et quatrième années, quand les enfants maîtrisent mieux la multiplication, les calculs peuvent être plus difficiles (grille 2) ou l'énigme peut admettre plusieurs solutions (grille 3).

♡	♢	56
♣	♢	42
48	49	

Grille 2.

♡	♢	20
♣	♠	12
8	30	

Grille 3.

Tous les commentaires de l'article précédent restent valables ici. Rappelons en style télégraphique

— **redondance** des données
— **ouverture** possible du problème
— création possible de grilles **par les élèves**

Adresse de l'auteur: Yolande Noël-Roch, 86 rue de la Culée, 6927 Resteigne

2. Enseignement secondaire

2.1. En première année

Ce jeu amène les puissances, par exemple dans le décryptage de la grille suivante

♡	♡	♡	125
♢	♣	♣	300
♢	♠	♡	30
45	100	250	

Grille 4.

Le problème peut être « retourné » : peut-on trouver une grille 2×2 dont les quatre produits donnés sont

— **le même** carré parfait ?
— **deux** carrés parfaits différents ?
— **trois** carrés parfaits différents ?
— **quatre** carrés parfaits différents ?

Voici une grille dont le décryptage reste très facile ...surtout si on choisit bien les premières lignes ou colonnes à exploiter !

♡	♣	♡	75
♢	♠	♣	294
♢	♡	♡	50
20	735	75	

Grille 5.

2.2. En deuxième année

Bien qu'à première vue plus compliquée que les précédentes, la grille suivante reste facilement décryptable si on prend la peine de bien l'observer avant de se lancer dans des calculs. Mais cette fois, la décomposition des produits en facteurs premiers devient indispensable.

Précisons le problème :

Découvrir les nombres cachés sous les symboles ♡, ♢, ♣ et ♠, sachant qu'ils sont entiers, strictement plus grands que 1 et strictement plus petits que 11. Deux symboles différents ont des valeurs différentes.

$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	9800
$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	1323
$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	2058
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	4200
$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	378
1260	2700	588	24010	882	

Grille 6.

La ligne 3 ne contient que les deux symboles $\diamondsuit$ et $\clubsuit$ et les égalités $1323 = 3^3 \times 7^2 = \diamondsuit^3 \times \clubsuit^2$ nous donnent immédiatement $\diamondsuit = 3$ et $\clubsuit = 7$. Le report de ces valeurs dans la colonne 3 révèle la valeur de $\heartsuit^2$ tandis que la valeur de $\spadesuit$ peut être déduite de la colonne 2.

2.3. En troisième et quatrième années

Le décryptage de grilles permet d'introduire ou de faire appliquer les « règles des exposants » :

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

$$(a^n)^p = a^{np}$$

en échappant aux séries d'exercices routiniers sur le sujet.

$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	1536
$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	1280
$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	288
$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	2000
$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	4500
7200	800	80	2880	3840	

Grille 7.

La ligne 3 de cette grille nous donne l'équation $288 = 2^5 \times 3^2 = \heartsuit^3 \times \clubsuit^2$. Si l'attribution d'un facteur 3 à $\clubsuit$ est claire, la répartition des facteurs 2 l'est moins. Nous voici confrontés à la décomposition de 2^5 en $2^3 \times 2^2$ pour trouver $\heartsuit = 2$ et $\clubsuit = 6$. Le reste du décryptage par la colonne 3 pour $\diamondsuit$ et la colonne 2 pour $\spadesuit$ montrera l'intérêt des décompositions en facteurs pour épargner des calculs.

Le travail aurait été simplifié en exploitant d'abord la colonne 3 … peut-être l'aviez-vous constaté ?

Voici une autre grille dont le décryptage peut faire découvrir ou appliquer les « deux règles des exposants » citées plus haut.

♣	♣	♠	♠	♣	4096
♢	♢	♠	♡	♠	16000
♣	♡	♢	♡	♣	8000
♢	♢	♡	♠	♣	8000
♢	♡	♣	♢	♢	5000
2000	10000	12800	32000	2560	

Grille 8.

Seule la ligne 1 ne fait intervenir que deux symboles mais elle donne $♠^2 \times ♣^3 = 2^{12}$*. La résolution dépend évidemment de la maîtrise acquise dans le maniement des exposants.* **Entre nous**, *nous pouvons utiliser directement la recherche de 12 comme somme d'un multiple de 2 et d'un multiple de 3 (multiples non nuls !) ...ce qui conduit à* $12 = 6 + 6$ *donc* $♠ = 2^3 = 8$ *et* $♣ = 2^2 = 4$*. Avec les élèves, vous serez sans doute amenés à exploiter la situation autrement.*

Voici enfin une grille dans laquelle toutes les lignes et colonnes font intervenir au moins trois symboles, son décryptage est donc un peu plus compliqué.

♢	♡	♡	♡	♠	48000
♡	♢	♣	♡	♡	24000
♡	♣	♠	♠	♡	25600
♢	♢	♣	♠	♠	9216
♠	♣	♡	♢	♢	11520
28800	5760	12800	38400	38400	

Grille 9.

Considérons par exemple la ligne 1 et les colonnes 1 et 4 qui font intervenir les trois symboles ♡, ♢ et ♠ : nous disposons de trois égalités $♡^3 \times ♢ \times ♠ = 2^7 \times 3 \times 5^3$, $♡^2 \times ♢^2 \times ♠ = 2^7 \times 3^2 \times 5^2$ *et* $♡^2 \times ♢ \times ♠^2 = 2^9 \times 3 \times 5^2$.

Nous pouvons en déduire que le facteur 3 intervient nécessairement dans ♢ qui peut donc valoir 3 mais aussi 6 (répartition des facteurs 2 ?) ...mais pas 15 puisque tous les nombres valent au plus 10.

— *Si* $♢ = 3$*, alors* $♡^3 \times ♠ = 2^7 \times 5^3$, $♡^2 \times ♠ = 2^7 \times 5^2$ *et* $♡^2 \times ♠^2 = 2^9 \times 5^2$*. Des deux premières égalités, nous déduisons* $♡ = 5$ *et ceci conduit* pour ♠ à des valeurs trop élevées et incompatibles d'une égalité à l'autre. La piste $\diamondsuit = 3$ doit donc être abandonnée.

– Si $\diamondsuit = 2{\times}3$, alors $\heartsuit^3{\times}\spadesuit = 2^6{\times}5^3$, $\heartsuit^2{\times}\spadesuit = 2^5{\times}5^2$ et $\heartsuit^2{\times}\spadesuit^2 = 2^8{\times}5^2$. Les deux premières égalités donnent $\heartsuit = 2 \times 5$ et les deux dernières $\spadesuit = 2^3$, valeurs qui vérifient les trois égalités.

Nous n'avons que l'embarras du choix pour terminer notre décryptage !

3. Pour nous exercer

Voici quelques grilles générées aléatoirement (tous niveaux confondus !), nous avons même introduit la **possibilité d'attribuer la valeur 1 à un des symboles**. Cette modification des conditions données dans l'énoncé ne simplifie pas le décryptage ! Bon amusement !

♢	♣	♠	♢	♢	6048
♡	♢	♡	♢	♡	36000
♣	♣	♢	♡	♢	5760
♢	♢	♣	♠	♢	6048
♣	♠	♡	♢	♡	16800
5760	4032	160800	15120	21600	

♢	♢	♠	♠	♡	15876
♠	♡	♡	♠	♡	35721
♣	♢	♠	♡	♠	5292
♣	♠	♠	♢	♡	5292
♡	♠	♡	♡	♢	30618
1512	15876	27783	23814	30618	

♠	♡	♣	♡	♢	1280
♢	♣	♡	♣	♡	256
♢	♢	♠	♠	♠	2000
♠	♠	♢	♠	♢	2000
♣	♡	♠	♣	♡	320
400	1280	800	200	5120	

♡	♢	♡	♢	♡	8192
♣	♣	♡	♢	♢	512
♣	♡	♣	♠	♢	896
♣	♣	♣	♡	♠	448
♠	♡	♢	♢	♡	7168
448	1024	1024	3584	7168	

♢	♠	♣	♠	♡	2916
♢	♡	♢	♢	♣	324
♠	♣	♠	♢	♡	2916
♡	♢	♢	♣	♣	648
♡	♠	♡	♡	♣	432
324	2916	972	972	864	

♡	♣	♠	♢	♠	3888
♢	♢	♡	♣	♢	768
♡	♡	♢	♠	♢	576
♠	♢	♠	♢	♠	11664
♢	♡	♣	♢	♢	768
576	384	3888	3456	5184	

♠	♣	♠	♠	♢	14580
♡	♣	♣	♢	♠	900
♡	♢	♣	♠	♣	900
♣	♠	♠	♣	♠	18225
♢	♢	♣	♣	♠	3600
180	3600	10125	8100	14580	

♠	♣	♠	♠	♠	39366
♡	♢	♡	♡	♢	200
♣	♣	♡	♣	♡	864
♡	♠	♣	♠	♡	1944
♡	♡	♠	♡	♠	648
432	3240	1944	1944	1620	

Bibliographie

Th. Gilbert et N. Rouche, *La notion d'infini*, Ellipses, Paris, 2001, ISBN: 2-7298-0617-2.

Depuis de nombreuses années, les membres du GEM et du groupe AHA s'intéressent à l'analyse et notamment à la notion d'infini. On se souviendra en particulier des publications suivantes : **Rencontres avec l'infini**, (proposition 2 du GEM, 1981), **Apprivoiser l'infini**, (par C. Hauchart et N. Rouche, Ciaco, 1987), **Faire la droite avec des points**, (par T. Gilbert, B. Jadin et P. Tilleuil, in « Histoire d'infini », IREM de Brest, 1994) et **Vers l'infini pas à pas** (par le groupe AHA, De Boeck, 1999). C'est dire que le présent ouvrage est le fruit d'une réflexion de longue durée. Mais à la différence des documents cités plus haut, il ne s'adresse pas particulièrement aux enseignants, ce qui ne veut pas évidemment pas dire que ceux-ci ne sauraient en tirer profit.

L'objectif visé par les auteurs est clairement indiqué dans l'avant-propos :

> *L'infini pose questions, ou plutôt les infinis posent des questions, variables selon les contextes. [...] L'infini appartient-il à la réalité ou au seul univers des idées ? [...] Existe-t-il en fait [...] ou n'exprime-t-il qu'une extrapolation possible ? [...] Les parallèles se rencontrent-elles vraiment à l'infini ? [...] Pourquoi, lorsqu'on coupe une droite en deux [...] obtient-on deux demi-droites non symétriques ? [...] Pourquoi faut-il que des décimaux illimités qui n'ont aucune régularité apparente soient aussi des nombres et à quoi peuvent-ils bien servir ? [...]*

et

> *Cet ouvrage s'adresse à toute personne que l'infini intrigue. Bien que sa lecture demande une bonne dose d'attention, il ne suppose qu'en de rares passages des connaissances mathématiques dépassant celles de la fin de l'enseignement secondaire.*

L'objectif est donc ambitieux : à travers une analyse approfondie de phénomènes divers, physiques, géométriques, artistiques, mettre en place un concept qui permet « d'apporter quelque clarté sur les démarches du sens commun » et répondre aux questions que ce concept ne manque pas de susciter. Il s'agit aussi de « connaître et approfondir les liens et les contrastes entre la pensée commune ou philosophique et la pensée mathématique ». Disons immédiatement que les auteurs atteignent largement cet objectif.

L'ouvrage comporte six chapitres entrecoupés d'exercices (dont les solutions figurent en fin de volume). Le premier est consacré aux suites et séries numériques, et aux passages à la limite. C'est l'occasion de rencontrer la différence entre « infini actuel » et « infini potentiel », les paradoxes de Zénon et quelques problèmes plaisants et délectables. Dans le but de faire comprendre avant de formaliser, les auteurs se permettent un style très informel. Dans cette phase en quelque sorte expérimentale, ils ne vont donc pas justifier rigoureusement toutes les démarches, ni même signaler tous les endroits où des justifications seraient nécessaires. Mais que le lecteur mathématicien se rassure : le dernier paragraphe du chapitre, intitulé « Vers plus de rigueur » remet les choses en place.

Le second chapitre, intitulé « L'infini est-il dans la réalité ? » explore quelques situations physiques supplémentaires, qui débouchent sur une conclusion partielle : « la pensée de l'infini convient jusqu'à un certain point à certaines situations réelles ».

Le troisième chapitre peut être considéré comme une approche de la géométrie projective. Largement consacré à l'étude des règles du dessin en perspective, il montre comment l'introduction de points à l'infini s'impose dans ce cadre et comment on est finalement amené à ne plus faire de distinctions entre les points à l'infini et les « vrais » points, ce qui ne va pas sans soulever de nouveaux « problèmes existentiels ».

Avec le quatrième chapitre (Faire la droite avec des points) les questions de type épistémologique prennent plus d'ampleur. Des citations de Pascal, Berkeley, Galilée, Aristote et de Méré montrent comment le concept mathématique de droite a été difficile à dégager des considérations physiques qui l'encombraient. On pourrait presque dire qu'une véritable « guerre de sécession » a été nécessaire pour que la mathématique s'affranchisse de la tutelle de la physique. (Un autre épisode de cette guerre s'est déroulé lors de la création des géométries non euclidiennes.) La question centrale, qui remontait aux pythagoriciens, portait sur la possibilité de diviser indéfiniment une droite en morceaux. Cela était-il compatible avec le fait qu'une droite soit constituée de points, lesquels sont évidemment indivisibles ? Le chapitre se termine par l'exposé du point de vue axiomatique : un exposé rapide, peut-être même trop rapide : l'axiome de Pasch étant très méconnu, l'énoncé de cet axiome et l'explicitation de ses liens avec les propriétés topologiques du plan affine réel auraient constitué un « plus ».

Le cinquième chapitre est consacré aux nombres réels : mesures, écritures ou objets de calculs. On sait qu'on retrouve à propos des nombres réels, les mêmes problèmes qu'à propos des points d'une droite. C'est bien naturel puisque les deux structures sont isomorphes. Mais dans le cas des réels, la situation est peut-être encore plus troublante. Quel est donc « le dernier nombre avant 1 »? Pourquoi n'est ce pas $0,9999999999999999\ldots$? Etc. Le chapitre comporte de larges extraits de textes de Bolzano traitant des questions liées à la complétude de $\mathbb{R}$. Il présente aussi avec quelques détails les constructions du corps des réels par Dedekind et Cantor ainsi que le point de vue axiomatique de Dieudonné. Enfin, le dernier paragraphe de ce chapitre évoque encore quelques autres constructions des réels. Les auteurs ne mentionnent cependant ni la contribution d'Emil Artin (dans son ouvrage *Geometric Algebra*), ni celle de Georges Papy (dans *Géométrie affine plane et nombres réels* ou *Mathématique moderne 2*) malgré l'influence de ces travaux — en Belgique — durant les années soixantes.

Le sixième et dernier chapitre a pour titre « L'infini accepté ». On y trouvera la construction de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers (à l'aide de classes d'équivalence de couples), la définition (par les axiomes de Peano) de l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels, les démonstrations par récurrence, les « paradoxes de l'infini » (notamment l'existence de bijections entre $\mathbb{N}$ et des parties propres de $\mathbb{N}$), la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$, et des exemples de parties « monstrueuses » de $\mathbb{R}$ (ensemble triadique de Cantor, ensembles de mesure nulle, ...).

L'énumération des contenus des différents chapitres montre la richesse de l'ouvrage. Bien entendu, le sujet n'est pas épuisé. Par exemple, l'infini en probabilité n'est que très rapidement évoqué. On devine que les auteurs ont été dans l'obligation de faire des choix.

Ajoutons enfin que l'ouvrage est remarquablement rédigé, agréable à lire et qu'il comporte une bibliographie importante.

G. Noël

Olympiades

C. Festraets

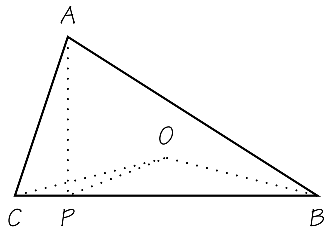
Voici les solutions des trois premiers problèmes de l'Olympiade Mathématique Internationale 2001. Ces solutions m'ont ét énvoyées par P. BORNSZTEIN de Pontoise (France).

Problème 1

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et dont O est le centre du cercle circonscrit. Soit P le pied de la hauteur abaissée de A sur BC. On suppose que $\widehat{BCA} \geqslant \widehat{ABC} + 30^\circ$*. Montrer que* $\widehat{CAB} + \widehat{COP} < 90^\circ$.

Solution

Dans les conditions de l'énoncé, le point O est intérieur à ABC, et $P \in]BC[$.



On a alors : $\widehat{COB} = 2\widehat{BAC}$,

et ainsi, dans OCB isocèle en O, $\widehat{OCP} = \widehat{OCB} = \dfrac{\pi - 2\widehat{BAC}}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{BAC}$.

Puisque $90^\circ - \widehat{CAB} = \widehat{OCP}$, il suffit de prouver que $OP > CP$.

Or avec les notations usuelles, on a :

$$\begin{aligned} CP &= b\cos(\widehat{C}) \qquad \text{(dans } ACP\text{, rectangle en } P\text{)} \\ &= 2R\sin(\widehat{B})\cos(\widehat{C}) \qquad \text{(loi des sinus)} \\ &= R(\sin(\widehat{B}+\widehat{C}) - \sin(\widehat{C}-\widehat{B})) \\ &< R(1 - \sin(\widehat{C}-\widehat{B})) \end{aligned}$$

Adresse de l'auteur: Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C.Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse e-mail festraetscl@brutele.be.

$\leqslant \frac{R}{2}$ (par hypothèse)

Et donc $OP > OC - PC = R - PC > PC$. D'où la conclusion.

Problème 2

Prouver que : $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$ pour tous réels a, b, c strictement positifs.

Solution

Soit a, b, c des réels strictement positifs.

L'inégalité à prouver est homogène, on peut donc supposer que

$$a + b + c = 1. \tag{1}$$

La fonction $(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}})$ est convexe, donc d'après l'inégalité de Jensen et la relation (1) : $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab)}}$$

Il suffit donc de prouver que $a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab) \leqslant 1$,

c'est-à-dire $a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \leqslant 1$.

Or $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc)$,

donc $a^3 + b^3 + c^3 + 24abc = 1 - 3(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 - 6abc)$.

Il suffit donc de prouver que $a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 \geqslant 6abc$,

ce qui découle directement de l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\frac{a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2}{6} \geqslant (a^6b^6c^6)^{\frac{1}{6}} = abc \tag{2}$$

Finalement, on a

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1 \tag{3}$$

et l'égalité ne peut avoir lieu que si elle a lieu dans (2), c'est-à-dire que pour $a = b = c$. Or il est facile de vérifier que si $a = b = c$, alors il y a égalité dans (3).

Problème 3

Vingt-et-une filles et vingt-et-un garçons ont participé à une compétition mathématique.

- *Chaque participant a résolu au plus six problèmes;*

- *pour chaque fille et pour chaque garçon, un même problème, au moins, a été résolu par chacun d'eux.*

Montrer qu'il y a un problème au moins qui a été résolu par au moins trois filles et trois garçons.

Solution

Par l'absurde : supposons qu'aucun des problèmes n'ait été résolu par au moins trois filles et trois garçons.

Alors chaque problème n'a été résolu que par au plus deux filles ou au plus deux garçons. Un problème résolu par au plus deux filles (resp. deux garçons) sera dit de type F (resp. de type G). Un problème résolu est donc de type F ou de type G.

D'après l'énoncé, le nombre de couples (fille, garçon) dont les deux membres ont résolu un même problème est 21^2.

D'après ci-dessus, chacun de ces couples a résolu un problème de type F ou un problème de type G.

Pour une fille f donnée, celle-ci a résolu au plus six problèmes. Puisqu'elle a résolu au moins un problème en commun avec chacun des garçons, le principe des tiroirs assure que l'un des problèmes résolu par f l'a été aussi par au moins $\frac{21}{6} > 2$ des garçons. Il s'en suit que f n'a résolu qu'au plus 5 problèmes de type G. Pour chacun de ces problèmes, on a au plus deux choix pour le garçon.

Puisque le choix de f est arbitraire, le nombre de couples (fille, garçon) dont les deux membres ont résolu un même problème de type G ne dépasse donc pas $21 \times 5 \times 2$.

De même, le nombre de couples (fille, garçon) dont les deux membres ont résolu un même problème de type F ne dépasse pas $21 \times 5 \times 2$.

Il s'en suit que le nombre total de couples (fille, garçon) dont les deux membres ont résolu un même problème est inférieur ou égal à $2 \times 21 \times 5 \times 2 = 20 \times 21 < 21^2$. Contradiction.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets

Quatre cent quarante-quatre

Problème n° 253 de *Mathématique et Pédagogie* n° 133.

Le nombre 38 est le plus petit dont le carré se termine par 444. Quel est le nombre suivant ayant la même propriété ?

Solution de J.FINOULST de Diepenbeek

Soit k un entier positif dont le carré se termine par 444. Si x représente le nombre des milliers de k^2, on peut écrire

$$1000x + 444 = k^2$$

Si le nombre k^2 est inférieur à 1000, $x = 0$ et la relation (1) n'a aucune solution dans $\mathbb{N}$.

Si $x = 1$, on trouve $1000 + 444 = 38^2$.

De la relation (1), on déduit de k est pair et en posant $k = 2t$, on obtient

$$t^2 = 250(x-1) + 19^2$$

ou

$$(t-19)(t+19) = 250(x-1)$$

Du membre de gauche, les deux facteurs sont pairs et un des facteurs est aussi divisible par 125. On peut conclure que

$$t - 19 = 250u$$

ou

$$t + 19 = 250u$$

et, tenant compte de $k = 2t$, on a

$$k = 500u + 38$$

ou

$$k = 500u - 38$$

Adresse de l'auteur: Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C.FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse e-mail festraetscl@brutele.be.

On trouve ainsi successivement 38, 462, 538, 962, 1038, ...

Le nombre recherché est donc 462.

Bonnes solutions de P. BORNSZTEIN de Pontoise, M. COYETTE de Rixensart, P. DASSY de Liège, R. LAUMEN de Deurne, P. LE GALL de Metz, B. LOISEAU de Mouscron, V. MALMEDY de Beauraing, A. PATERNOTTRE de Boussu, H.-J. SEIFFERT de Berlin et A. ZRIWIL de Mons.

Nature du triangle

Problème n° 254 de *Mathématique et Pédagogie* n° 133.

A l'intérieur du carré ABCD, on construit un point M tel que les angles CDM et DCM mesurent 15 degrés. Quelle est la nature du triangle ABM ?

A propos de ce problème, R. LAUMEN de Deurne nous apporte les renseignements que voici.

> Cette question est vieille de 52 ans et elle a déjà eu une vie turbulente. Elle a été posée à l'examen final de 1949 d'une école normale aux Pays-Bas. On demandait de prouver que le triangle *ABM* était équilatéral, mais sans l'usage de la goniométrie ou de raisonnement par l'absurde. En fait, on voulait une solution avec des arguments purement géométriques. A l'examen même, aucun candidat n'a su donner une solution de ce genre. En avril 1999, cette même question (avec la restriction mentionnée) a été posée dans « Natuur en Techniek » un journal avec un coin de problèmes géré par Jan de Geus. En juin 1999, une solution a été publiée, mais elle était fausse ! Dans l'édition de juillet, une rectification a été faite, mais pas de solution correcte.

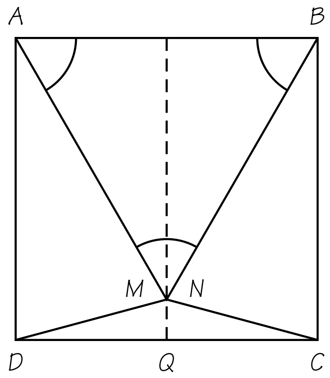
Plusieurs lecteurs ont proposés des solutions purement géométriques. Les voici.

Solution de B. LOISEAU de Mouscron et de C. VILLERS de Hyon.

Notons que le point *M* choisi à l'intérieur tel que les angles *CDM* et *DCM* valent tous les deux 15° est unique.

Construisons donc un point N à l'intérieur du carré, tel que ABN soit équilatéral (il est aussi unique). Nous allons montrer que les angles CDM et DCM valent tous les deux 15^o. Dès lors par l'unicité de M, on a $M = N$, et ABM est bien équilatéral.

Par construction, $\widehat{ABN} = 60^o$, donc $\widehat{NBC} = 30^o$; mais $AB = BJN$ donc $BN = BC$, donc $\widehat{BNC} = \widehat{BCN} = \frac{180^o-30^o}{2} = 75^o$. Donc $\widehat{NCD} = 15^o$. De même $NDC = 15^o$ car N est sur la médiatrice de $[AB]$ donc de $[CD]$.



Solution de P.BORNSZTEIN de Pontoise.

MDC est isocèle en M, donc $MD = MC$ et $\widehat{ADM} = 90^o - 15^o = \widehat{BCM}$. De plus $AD = BC$.

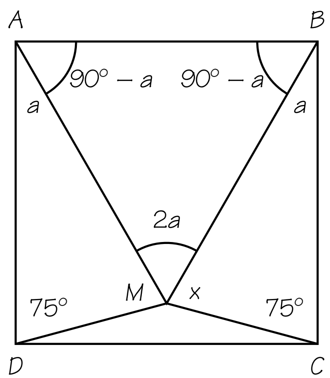
On en déduit que les triangles AMD et BMC sont isométriques.

En particulier, $AM = BM$, ce qui assure que AMB est isocèle en M.

Posons $\widehat{AMB} = 2a$ en degrés.

On en déduit facilement que $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 90^o - a$ et donc $\widehat{MBC} = \widehat{MAD} = a$.

On pose $x = \widehat{BMC}$.
On a alors $2a \geqslant 60^o$ ssi $a \geqslant 30^o$
c-à-d $x \leqslant 75^o$
c-à-d $BC \leqslant BM$
c-à-d $AB \leqslant BM$
c-à-d $2a \leqslant 90^o - a$
ou encore $a \leqslant 30^o$
c-à-d $2a \leqslant 60^o$
Il en découle clairement que $2a = 60^o$, et donc que ABM est équilatéral.

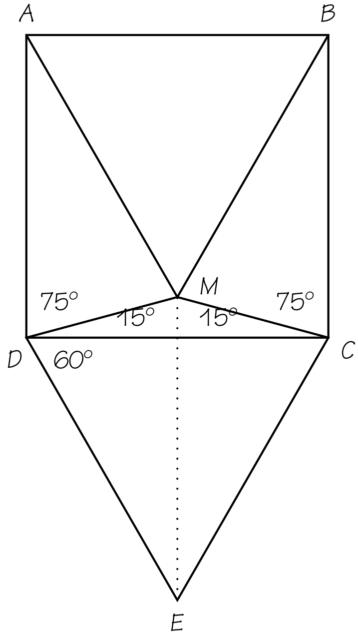


Solution de P. DASSY de Liège et R. LAUMEN de Deurne.

Construisons le triangle équilatéral DCE extérieur au carré.
Il est clair que la droite EM est la médiatrice du segment $[DC]$. D'où $\widehat{DME} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ et le triangle DEM est isocèle.
Traçons les segments $[AM]$ et $[BM]$.
Considérons les triangles ADM et EDM :

$$\begin{cases} |AD| = |DE| & \text{(par construction)} \\ \widehat{ADM} = \widehat{EDM} & \text{(par construction)} \\ [DM] & \text{commun aux deux triangles} \end{cases}$$

Donc les triangles sont isomériques et par conséquent ADM est un triangle isocèle et $|AM| = |AD| = |AB|$.
Par un raisonnement analogue, $|BM| = |BC| = |AB|$.
Et donc le triangle ABM est équilatéral.



Bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek, P. LE GALL de Metz, A. PATERNOTTRE de Boussu, J. RASSE de Méan et A. ZRIWIL de Mons.

Fractions Problème n° 255 de *Mathématique et Pédagogie* n° 133.

Démontrer que l'égalité suivante est correcte.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{465} - \frac{1}{466} = \frac{1}{234} + \frac{1}{235} + \cdots + \frac{1}{466}$$

Solution de P. DASSY de Liège.

On peut généraliser le problème en démontrant que pour n entier positif :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

De fait, si on remplace n par 233, on trouve bien l'égalité à démontrer.

Démontrons la relation générale par récurrence.

Elle est vraie pour $n = 1$; en effet, on obtient $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Hypothèse : $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

Thèse : $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$
$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$

Démonstration

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\\
&= \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+2})\\
&= \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}
\end{aligned}$$

Solutions *également correctes de* P. BORNSZTEIN *de* Pontoise, M. COYETTE *de* Rixensart, J. FINOULST *de* Diepenbeek, R. LAUMEN *de* Deurne, P. LE GALL *de* Metz, B. LOISEAU *de* Mouscron, A. PATERNOTTRE *de* Boussu, J. RASSE *de* Méan, H.-J. SEIFFERT *de* Berlin *et* A. ZRIWIL *de* Mons.

Les 25 mathématiciens Jeux *de Mathématique et Pédagogie* n° 134.

Voici la solution du jeu des 25 mathématiciens. F. DROUIN de Chauvoncourt (France) m'a transmis la solution parue dans la revue de l'A.P.M.E.P. et j'y ai encore ajouté quelques noms fournis par d'autres lecteurs, vous constaterez qu'il y en a nettement plus de 25. Merci à J. DOYEN, P. DUPONT, B. LOISEAU, C. PIERROUX et C. VILLERS.

> « Ce jour-là, il fit beau. Naquit (Fibonacci) alors dans le village (Levi) un garçon. Tous les gueux de la (Gödel) campagne, qui jouaient et travaillaient dans les champs, lâchèrent boules (Boole), billes, dés, cartes, (Descartes) bêches et râteaux.(Sténotherme (Erathostène, Noether) : « se dit d'un animal marin qui exige une température (Ampère) constante du milieu (Lie) »). Ils s'étaient rassemblés sur la place (Laplace) du village, devant une énorme meule érodée (Euler). Le médecin examinait la mère qui portait un châle (Chasles) de soie : « Ton coeur palpite, ta gorge (Pythagore) est enflée ! Il faut faire appel

(Appel et Pell) au prêtre Lambert (Lambert) ! » Un garçon fut désigné pour le quérir. « Moi, vraiment (Moivre) ? » Le docteur insista et le jeune (Lejeune) homme se mit en route.

Une fois dans la forêt, il aperçut une arche. Immédiatement (Archimède), il pénétra dans la grotte par un porche monumental. Escaladant (Thalès) les parois, il parvint au sommet et vit la grange (Lagrange) où consultait le magicien. Celui-ci avait le nez percé (Neper) le visage ridé et une longue barbe. Devant la porte, la foule se pressait pour profiter de ses conseils médicaux. Chirurgien (Cauchy) à ses heures, il était (Tait) en train d'opérer un malade. Le messager surgit brusquement dans la pièce. Le mage s'énerva. « Ajournez tous vos rendez-vous ! Nous avons besoin (Bezout !!) de vos services immédiatement ! » lui répondit le garçon. « Puisque c'est urgent, je vais tout de suite faire ma (Fermat) potion, je vais aussi y ajouter ces aromates (Cesaro) qui donneront (Heron) un meilleur goût. »

Il s'en vint au chevet de la malade. « On se tait lors (Taylor) d'une telle intervention ! Qu'on ne (Connes) me déconcentre pas ! » Scalpel (Pascal) à la main, il commença l'opération. « Maintenant, il faut laisser agir le processus biochimique (Biot). Dès qu'elle sera remise, donnez-lui du nectar, c'est mieux qu' l'hydromel (Euclide). Mais en échange de mes services, j'exige d'emporter avec moi le nouveau-né ! » « Comment ? c'est un scandale, Lambert (d'Alembert) ! » « Il nous berne ou il (Bernoulli) imagine qu'on va le laisser faire ? » Le sorcier se gaussa (Gauss) : « Je crains que vous n'ayez pas le choix ». Aussitôt, il arracha le (Chasles, une deuxième fois) nourrisson, et, sur le mur son ombre se décalqua. « Chien (Al Kaschi) ! Il nous le payera ! ». Le sorcier avait disparu.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir pour le 1er septembre 2002 au plus tard.

262. Voici l'euro

Je reçois un chèque en euros, et je vais à la banque pour l'encaisser. Le caissier se trompe, confond les euros et les centimes d'euro, et me donne autant d'euros que le chèque comporte de centimes, et autant de centimes que le chèque indique d'euros. Je n'y fais pas attention et ne m'aperçois pas de l'erreur.

Je vais au bistro d'à côté et commande une bonne bière. Après avoir payé 2,25 euros pour la bière, je constate qu'il me reste exactement le double du montant du chèque !

Quel était le montant de ce chèque ?

(Proposé par J.G. SEGERS)

263. Minimum

Soit a, b, c, A, B, C, D des réels constants, a, b, c étant tous trois non nuls et au moins un des réels A, B, C étant non nul. Déterminer le minimum de $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$ sachant que x, y, z vérifient $Ax+By+Cz=D$.

264. Puissance de 3

n étant un entier positif, démontrer que si 4^n+2^n+1 est premier, alors n est une puissance de 3.

Pour effectuer une commande, il vous suffit de verser le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique :
Effectuer vos paiements au compte 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons.

Si vous habitez en France :
Nous vous demandons d'effectuer votre versement en Euros uniquement sur le compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef 15 rue de la Halle à B-7000 Mons, Belgique.

Si vous habitez ailleurs :
Effectuez de préférence un virement international au compte CCP « giro » 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons, Belgique.
Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement « giro »), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Janvier 2002)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent Mathématique et Pédagogie, SBPM-Infor et Math-Jeunes.

Belgique :
- Cotisation *ordinaire* : 20 €
- Cotisation familiale (*réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications*) : 28,50 €
- Cotisation réduite (*réservée aux étudiants et aux sans-emploi*) : 15 €.

Union Européenne : 36 €,
Europe hors Union Européenne : 38 €,
Hors Europe : *envoi prioritaire*, 72 €, *envoi non prioritaire*, 42 €.

Abonnement à Mathématique et Pédagogie

Belgique : 26 €, Union Européenne : 32 €,
Europe hors Union Européenne : 33 €,
Hors Europe : *envoi prioritaire*, 46 €, *envoi non prioritaire*, 34 €.

Abonnement à Math-Jeunes Junior et Math-Jeunes

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, inférieur et supérieur, sont idéalement pris par l'intermédiaire d'un professeur.
Abonnement isolé à *une des deux revues (4 numéros)* :
- Belgique : 4,96 €,
- Union Européenne : 9,20 €,
- Europe hors Union Européenne : 10,20 €,
- Hors Europe : Envoi prioritaire, 20,40 €, *envoi non prioritaire* : 11,40 €.

Abonnement isolé *aux deux revues (7 numéros)* :
- Belgique : 8,68 €,
- Union Européenne : 16,50 €,
- Europe hors Union Européenne : 17,17 €,
- Hors Europe : *envoi prioritaire*, 35,60 €, *envoi non prioritaire*, 20 €.

Abonnements groupés (au moins 5) à *Math-Jeunes* et *Math-Jeunes Junior*.

Abonnements groupés à une des deux revues : (4 numéros)
- Belgique : 3,72 €,
- Union Européenne : 6 €,
- Europe hors Union Européenne : 7,60 €,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 15,20 €,
  - Envoi non prioritaire : 8,60 €.

Abonnements groupés aux deux revues : (7 numéros)
- Belgique : 6,57 €,
- Union Européenne : 10,60 €,
- Europe hors Union Européenne : 13,40 €,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 26,60 €,
  - Envoi non prioritaire : 15,10 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement au compte de la SBPMef, s'abonner au bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France), le prix de l'abonnement est : 40 €. Ils peuvent également, par la même voie, commander des publications de l'APMEP (voir la page APMEP dans ce numéro).

Vente d'anciens numéros de Mathématique et Pédagogie

Avant 1999 : 0,74 €/N° + frais de port (Cat. 1),
Années 2000 et 2001 : 2,48 €/N° + frais de port (Cat. 1).

Vente d'anciens numéros de Math-Jeunes

Avant 1999/2000 : 0,25 €/N° + frais de port (Cat. 1),
Années 2000/2001 : 0,50 €/N° + frais de port (Cat. 1).

Brochures

Le prix d'une brochure ou d'un cd-rom mentionnés aux tableaux 1 et 2 s'obtient en additionnant le prix de base mentionné dans le tableau 1 ou 2 aux frais de port mentionnés dans le tableau 3 en fonction de la catégorie postale à laquelle appartient la brochure ou le cd-rom. Lorsqu'un prix réduit est mentionné, ce prix est réservé aux membres de la SBPMef et aux étudiants.

Tableau 1 : Prix de base Brochures	Prix plein	Prix réduit	Cat. post.
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 1 au n° 6 épuisés, reste n° 12)	1,24 €	/	2
Série 2 (n° 7 au n° 11 et n° 13)	5,45 €	/	5
Série 3 (n° 14)	5,45 €	/	3
Les 3 séries (n° 7 au n° 14)	7,44 €	/	6
Dossiers d'explorations didactiques			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,86 €	1,24 €	4
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,86 €	1,24 €	4
Dossier 6 (Statistiques)			
Moins de 11 ex.	7,44 €/ex.	6,18 €/ex.	7
Par groupes de 11 ex.	74,44 €	61,8 €	8
Olympiades Mathématiques Belges			
Tome 4 (1 ex.)	5.50 €		1
De 2 à 3 ex.	5,50 €/ex.	/	6
De 4 à 6 ex.	5 €/ex.	/	7
De 7 à 13 ex.	4,50 €/ex.	/	8
Plus de 14 ex.	4 €/ex.	/	8
Jacques Bair			
Mathématique et Sport	4,96 €	3,72 €	3
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie,...	12,39 €	9,92 €	5
Tableau 2 : Prix de base CD-Rom			
G. Robert			
Programmes mathématiques	4,96 €	/	3

Tableau 3 : Frais de port

Caté-gorie	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe,
1	0,25 €	1,61 €	1,74 €	4,09 €
2	0,67 €	0,99 €	1,12 €	1,98 €
3	1,07 €	1,61 €	1,74 €	4,21 €
4	1,44 €	2,48 €	3,22 €	7,93 €
5	1,98 €	2,97 €	3,22 €	7,93 €
6	2,48 €	3,72 €	5,70 €	14,87 €
7	2,97 €	2,73 €	3,22 €	4,09 €
8	Consulter le secrétariat			