Photo de couverture : Sphère (?) inox de 8m de diamètre par Serge Gangolf (Marche)

Mathématique et Pédagogie

Sommaire

Articles

Rubriques

N° 137 Mai-Juin 2002

NOTE

* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be

* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.

* Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.

* Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (LaTeX 2_ε, Word) ; les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.
L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).

* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
Pour les articles :
Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.

* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.

* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Éditorial

CH. VAN HOOSTE

Mathématiques, au carrefour des méthodes,

c'est le thème de notre prochain congrès.

Enseigner les mathématiques aujourd'hui n'est pas chose aisée. Beaucoup d'entre nous ne savent d'ailleurs plus à quel saint se vouer, ni quel chemin suivre.

Certains pédagogues prônent l'enseignement par situations-problèmes et les programmes actuels exigent un enseignement par compétences. Nous constatons que les (bons) élèves ne manipulent pas bien l'algèbre élémentaire, mais nous entendons dire que le drill n'apporte rien. Tous les conseils reçus nous certifient que les cours ex-cathedra sont à proscrire, que l'élève doit être actif et découvrir les mathématiques par lui-même. Cependant, dans nos universités, la plupart des cours se donnent ex-cathedra, à coups de transparents.

Par ailleurs, nous ne devons surtout pas négliger qu'il faut donner du sens à nos théorèmes, à nos exercices. Et dans tout ça, ne pas oublier non plus la calculatrice graphique ! Et les logiciels informatiques, pardi !

Et puis, il nous reste aussi, obstinément collée à l'oreille, une ou l'autre phrase-choc : « Mieux vaut une tête bien faite qu'une tête trop pleine » ! « Apprendre à apprendre », « Mathématique pour tous », ...

Nous voilà donc complètement déboussolés au beau milieu du carrefour des méthodes et nous ne savons plus très bien quelle voie emprunter dans cet enseignement en spirale.

Si, comme la plupart d'entre nous, vous êtes perplexe et vous hésitez entre « mathématiques à consommer » et « mathématiques à penser », alors ne vous laissez pas enfermer dans le labyrinthe des théories pédagogiques ; venez assister à notre congrès. Des collègues expérimentés poseront certainement quelques précieux poteaux indicateurs dans ce carrefour des méthodes. La route à suivre pour venir nous rejoindre est celle de Soignies et, à chaque carrefour, laissez-vous guider par Saint-Vincent.

Et puis, *avec* **Nico HIRTT** *comme conférencier*, il y aura une bombe au milieu du carrefour.

★ ★
★

Le premier octobre 2001, Monsieur Pierre HAZETTE, Ministre de l'Enseignement secondaire et de l'Enseignement spécial, avait mis à l'étude le projet d'un retour à deux cours de Mathématique au second degré au lieu d'un cours unique. Dans le cadre de cette réflexion, il avait sollicité l'avis de la SBPMef. Vous trouverez ci-dessous la copie du rapport que je lui ai fait parvenir au nom de la société.

Réorganisation des cours de mathématique au second degré de l'enseignement secondaire de transition.

- Situation actuelle (depuis 1993) : 5 heures hebdomadaires dans toutes les classes.
- Situation antérieure : 4 ou 6 heures par semaine.
- Souhait de la SBPMef : revenir à la situation antérieure.

1. Position de la SBPMef.

Dès 1993, la SBPMef s'est mobilisée contre l'instauration d'un cours unique en mathématique au second degré et, depuis lors, elle n'a cessé d'en dénoncer les conséquences : classes hétérogènes très difficiles à gérer, perte de rigueur mathématique, démotivation des élèves plus doués, découragement d'une partie du corps professoral, ...

Voici un extrait de l'article *A propos des « Quarante propositions pour l'enseignement obligatoire, à la rencontre du désirable et du possible »*, publié en 1996 dans la revue *Mathématique et Pédagogie*, numéro 107, pages 81-86) :

« La SBPMef s'est prononcée à plusieurs reprises contre la certification unique en mathématique au second degré. Les enseignants de ce degré estiment généralement que la population actuelle des classes concernées est trop hétérogène du point de vue des aptitudes mathématiques pour qu'il soit raisonnable de poursuivre les mêmes objectifs avec tous les élèves. La SBPMef demande en conséquence que soient rétablis les deux niveaux qui existaient précédemment, à 4 h. et 6 h. »

Aujourd'hui, au vu des résultats catastrophiques de cette réforme de 1993, nous ne pouvons que réitérer ce souhait de revenir le plus rapidement possible à deux cours de mathématique au second degré.

2. Enquête.

Dans votre lettre datée du 1er octobre 2001, vous sollicitiez l'avis de la SBPMef en vue d'étudier une éventuelle modification dans la répartition du nombre d'heures de mathématique au deuxième degré de l'enseignement de transition.

Lors de sa réunion du 4 octobre, la Commission Pédagogique de la SBPMef a préconisé que tous les membres de la SBPMef puissent donner leur avis sur un sujet aussi important.

Le Conseil d'Administration, réuni le 26 novembre, a entériné cette demande.

Via notre revue SBPM-Infor, dans le numéro expédié dans la première quinzaine de décembre, nous avons alors lancé un appel aux membres de notre association pour qu'ils s'expriment à propos du projet.

3. Résultats de l'enquête.

À l'unanimité, les avis reçus, soit oralement, soit par écrit, sont favorables à une redistribution des heures de mathématique au second degré.

Ces avis émanent, d'une part, de l'ensemble des membres du Conseil d'Administration et des membres de la Commission Pédagogique de la SBPMef, d'autre part, de collègues rencontrés lors du congrès ou lors de journées pédagogiques, enfin, de membres de la SBPMef qui ont répondu à l'appel lancé dans le SBPM-Infor. Ils sont donnés par des professeurs de mathématique de l'enseignement secondaire, régents ou licenciés, par des préfets d'étude répondant au nom de l'ensemble des profs de mathématique de leur école, ainsi que par des professeurs d'université donnant cours en faculté de sciences ou de sciences appliquées. Ils viennent aussi bien de professeurs de l'enseignement de la Communauté Française que de professeurs des autres réseaux d'enseignement, notre société étant pluraliste.

Enfin bref, il y a, en faveur du projet, une mobilisation générale de tous les gens de terrain, de tous ceux qui sont confrontés directement avec le problème de l'enseignement des mathématiques en Wallonie et à Bruxelles, du prof dépassé par l'impossibilité de donner cours pour tous, simultanément, au second degré jusqu'au professeur de faculté qui voit arriver des étudiants de moins en moins bien armés pour aborder et assimiler les matières de l'enseignement supérieur, en passant par le chef d'établissement qui déplore les échecs en mathématique lors des délibérations de fin d'année.

Cependant, il faut légèrement nuancer la manière dont le projet est compris. Pour une très grosse majorité des collègues, il s'agit bel et bien de revenir à deux grilles, à savoir 6 heures ou 4 heures de mathématique hebdomadaires. L'autre partie des collègues verrait, souvent pour des raisons de moindre changement, un tronc commun en mathématique et des heures de renforcement pour les élèves qui désireraient s'orienter vers une option forte en mathématique au troisième degré.

4. Arguments développés.

Des classes trop hétérogènes au second degré n'ont pas contribué à faire progresser les plus faibles, mais ont provoqué une diminution du niveau d'exigence et de rigueur pour l'ensemble des élèves.

Entre autres, un collègue de l'enseignement libre nous dit « Nous avons toujours de bons et même de très bons élèves. Malheureusement, il y a un renversement de la norme. Ce ne sont plus les meilleurs qui tirent ceux qui peinent, ce sont ceux qui n'ont pas encore le goût pour l'effort qui tentent de marginaliser ceux qui voudraient progresser ». Une uniformisation du niveau de l'enseignement et une diminution de la charge de travail scolaire accentuent l'écart entre les jeunes issus de milieux défavorisés et ceux provenant de familles aisées.

Un prof de la CF explique : « Du foutoir inextricable des classes de mathématique, seuls ceux qui sont soutenus hors de l'école pourront s'en sortir (vérification des devoirs et leçons, aide parentale, cours particuliers, ...). Aussi, en option forte au troisième degré (8 heures par semaine), retrouve-t-on essentiellement des enfants de professeurs, de cadres, de parents ayant une profession libérale, ... »

Au second degré, confronté à des élèves de capacités différentes, de motivations divergentes, voire opposées, le professeur est souvent amené à délaisser les parties les plus difficiles de la matière, à diminuer ses exigences, à fermer les yeux sur un nombre de plus en plus grand de lacunes, à accepter des copies d'interrogations ou d'examens de moins en moins bien rédigées en vue de laisser réussir le plus grand nombre possible d'élèves.

Un professeur d'université en faculté de sciences appliquées témoigne : « je constate, avec mes collègues que les étudiants éprouvent de plus en plus de difficultés, manquent d'habitude de travail et ont une formation mathématique de plus en plus superficielle. [...] Dans le secondaire [...], la plupart des difficultés pouvant être causes d'échec ont été gommées en vue de promouvoir la réussite : ainsi la résolution de problèmes, l'étude et l'élaboration de petites démonstrations, la rédaction de raisonnements ont souvent disparu de la formation ».

Vu le fait que les élèves les moins motivés par les mathématiques contribuent, plus ou moins involontairement, à ralentir le cours, à en diminuer la qualité, il en résulte un affaiblissement général du niveau des meilleurs élèves qui sortent du second degré.

Un collègue d'athénée s'exprime à ce sujet : « [Une] très forte hétérogénéité [règne] dans les compositions de classes privant les élèves motivés d'une ambiance positive devant les études sérieuses. Ainsi on peut voir dès la troisième année certains élèves poser les questions « Pourquoi faut-il démontrer ? »; « Il suffit de voir »; « On vous croit »; « Pourquoi faut-il retenir telle loi ? ». En quatrième année, le phénomène s'amplifie. « On n'en fera plus l'an prochain ! » Quelle image donnent-ils aux élèves motivés ? Quelle est l'ambiance de travail qui en découle ? »

Dans un climat souvent très tendu, les bons élèves se démotivent, certains régressent et finissent par rejeter un cours qui piétine, qui ne répond plus à leurs attentes. D'aucuns perdent l'habitude de travailler et s'enlisent ensuite dans un refus systématique de l'effort, leurs capacités intellectuelles initiales leur procurant encore de bonnes notes malgré tout. Arrivés au troisième degré, sans peine et sans méthode de travail, beaucoup d'élèves doivent déchante : des échecs apparaissent ! Des drames aussi pour un nombre non négligeable d'entre eux : certains sont forcés de redoubler une année, d'autres préfèrent changer d'option et revoir leur choix de grille scientifique à la baisse.

Un professeur de l'enseignement libre de Liège nous dit ceci : « L'expérience d'un cours unique pour tous les élèves [au second degré] montre quelques faiblesses ; celles-ci se marquent dès le début de la cinquième année : ainsi quelques 10% des étudiants qui s'inscrivent au cours de math 8 h l'abandonnent après un mois ou deux. Ils ne peuvent s'adapter à une vision des mathématiques plus théorique [...]. L'élève qui n'a quasi jamais rencontré de théorie dans son parcours du tronc commun est très étonné de ce qui lui arrive et transforme son choix initial positif en un deuxième choix souvent déséquilibré. [...] La possibilité du dédoublement de cours au second degré permettrait aux élèves de découvrir un peu plus tôt quelques tournures d'esprit vers l'art de la démonstration et le besoin d'une structuration théorique nécessaire pour asseoir des bases solides en mathématique. »

Ce professeur précise qu'en outre, un nombre grandissant d'élèves quittent aussi le cours de math 6 pour celui de math 4 en cinquième année pour des raisons similaires d'adaptation aux exigences en mathématique, plus fortes au troisième degré qu'au second.

Un autre acteur de terrain résume la situation : « La constante imprécision que les professeurs sont obligés de tolérer se traduit à la longue par une compréhension très imparfaite de la matière. Les sciences et les mathématiques sont des matières cumulatives. Tout faux départ se paie. »

La plupart des arguments développés par les membres de notre association peuvent se retrouver sous une forme plus ou moins semblable dans ce qui précède.

À ceux-ci, nous ajouterons une raison de démocratisation très bien clarifiée par une de nos collègues : « [...], il conviendrait d'offrir aux élèves que les sciences en général et les mathématiques en particulier ne rebutent pas, la possibilité de cultiver leur goût naturel pour l'expérimentation, la réflexion, la résolution de problèmes et le maniement de notions et de méthodes relativement abstraites. Il ne s'agit pas d'uniformiser l'enseignement et de faire passer tous les jeunes dans le même moule, ce qui ne peut qu'induire un nivellement par le bas. Après tout, il n'est pas non plus question d'en faire tous des scientifiques ou des ingénieurs. Et rien n'indique qu'il y ait là une échelle de valeurs. Mais il s'agit de laisser aux jeunes talents la possibilité de s'épanouir dans leurs domaines de prédilection, et ce, grâce à un enseignement public. »

Celle-ci cite alors **Georges GUSDORF** (*L'Université en question*, Payot, Paris, 1964) : « La promotion des meilleurs doit donner une chance à tous ceux qui ont une chance. Mais, elle se renierait elle-même à vouloir prendre en charge, malgré eux, ceux qui ne présentent pas les aptitudes nécessaires [...] Le sens d'une véritable démocratisation de l'enseignement [...] n'est pas de proclamer que tous les jeunes gens ont indifféremment capacité et vocation d'entrer dans les Universités, mais bien de faire en sorte que tous ceux qui ont capacité réelle et vocation pour les hautes études puissent aller jusqu'au bout de leurs possibilités, sans que des obstacles matériels opposent à leurs aspirations une fin de non recevoir [...] La démocratie ne consiste nullement à faire accueil à n'importe qui, elle ne doit pas correspondre à un abaissement systématique du niveau des études; elle ne doit pas substituer aux critères de valeur personnelle des critères philanthropiques ou politico-sociologiques. »

Voici encore un court extrait de son courrier : « Le fait d'imposer [...] 5 heures de mathématique à tous [au second degré], quelles que soient leurs motivations et leurs aptitudes, ne peut que dégoûter, tant les uns que les autres, car il n'est pas possible dans cette matière de dispenser un enseignement à la fois unique et adapté à tous. »

La volonté de garder un tronc commun en mathématique jusqu'à 16 ans dénote par rapport à l'ensemble des disciplines ou filières proposées aux élèves. En effet, dès le premier degré, les élèves ont la possibilité de choisir ou non le cours de latin, ils peuvent aussi opter pour le néerlandais ou l'anglais comme première langue étrangère. Dans l'enseignement technique de transition, au second degré, les élèves sont amenés à se différencier en ce qui concerne la (les) technique(s) étudiée(s).

En mathématique, il y a lieu de distinguer « connaissances universelles », celles que devrait posséder tout citoyen, et « connaissances spécifiques », celles qui, peu à peu, vont former un scientifique. Il semble raisonnable actuellement de situer la rupture entre les modes d'acquisition de ces deux types de connaissances à la fin du premier degré de l'enseignement secondaire. Au-delà, il y aura une perte d'efficacité de notre enseignement.

D'une part, des matières non adaptées, en nombre et en complexité, dispensées à des élèves non promis à une carrière scientifique, constituent des obstacles excessifs dans leur parcours scolaire et contribuent à les rebuter et à les éloigner des mathématiques du citoyen.

D'autre part, une progression trop lente et un manque d'acquisition de méthodes de travail handicapent sérieusement ceux qui souhaiteraient s'engager vers les sciences. Pour certains, ceux de force moyenne, le dommage est fatal car, au troisième degré, les difficultés sont aujourd'hui cumulées. Non seulement, l'élève doit essayer d'y acquérir une tournure d'esprit scientifique (analyse d'un problème, expérimentation, conjectures, tentatives de démonstration, ...) , mais il doit aussi retrouver rigueur et logique. A cela, s'ajoute le fait que, pour palier aux manquements, une bonne partie du premier trimestre de la cinquième année est souvent consacrée à une « remise à niveau » (second degré en algèbre non assimilé, géométrie dans l'espace bâclée ou non vue, ...) , ce qui diminue d'autant le temps qui devrait être imparti aux matières figurant réellement dans les programmes de cette cinquième année. Dans un système mieux organisé, ces élèves s'en seraient tirés honorablement et auraient pu progresser de manière constante.

5. Impact budgétaire.

Le retour à deux niveaux de mathématiques au second degré ne devrait pas avoir d'impact budgétaire négatif. D'après les calculs faits par certains collègues pour leur propre école, il n'y aurait pas plus d'heures organisées avec ce système qu'actuellement. En moyenne, à deux classes de math 5 heures, il devrait correspondre une classe de math 6 et une classe de math 4, donc 10 heures dispensées dans les deux cas. Un chef d'établissement d'environ 600 élèves estime qu'il y aura une diminution du nombre d'heures dans sa propre école : 24 au lieu de 25.

Par contre, notre analyse prévoit même un impact budgétaire global positif. En effet, si la mesure était adoptée, il y aurait certainement un moins grand nombre d'échecs en mathématique aussi bien dans le second degré qu'au troisième. Or, souvent un échec dans une branche importante, provoque chez l'élève un découragement et, par effet boule de neige, entraîne d'autres échecs et ... le redoublement de classe. Sans compter que parfois l'élève s'accoutume assez rapidement à l'échec.

6. Synthèse.

Loin de favoriser une élévation globale du niveau en mathématique, la situation actuelle contribue à augmenter l'écart entre les jeunes. Parmi eux, il y a ceux qui restent motivés malgré tout, une très petite minorité. Puis les autres : les « faibles » qui n'ont pas les capacités nécessaires pour suivre un cours de mathématique de niveau normal, les « non motivés », qui ont les capacités suffisantes mais n'ont pas le goût de l'effort, les « non matheux », qui ont d'autres aspirations que les mathématiques — ce qui est tout à fait légitime —, les « influençables », qui se joignent, souvent forcés et contraints, à la majorité des « non motivés » et « non matheux ». Cela fait un mélange, très hétérogène, souvent explosif qui engendre ras-le-bol chez les professeurs, laissez-aller dans la rigueur et chahut chez les élèves.

Séparer les élèves en deux niveaux de mathématique ne peut être que bénéfique. Les classes resteront hétérogènes mais les écarts entre élèves seront moins importants. Cela engendrera dans chacun des deux niveaux une meilleure ambiance de travail et permettra d'obtenir un meilleur rendement, notamment en ce qui concerne la méthode de travail. Dans l'option forte, les élèves seront mieux préparés aux exigences des options 6 ou 8 heures de mathématique du troisième degré ; dans l'autre option, la pression des mathématiques sera beaucoup moins importante, les élèves auront plus de temps à consacrer à ce qui les motive véritablement. Pour cette seconde option, le programme devra être adapté ; on pourrait y mettre plus de « mathématique du citoyen » et faire disparaître cette horrible équation « mathématique = échec ». Un changement d'option devra être permis entre la troisième et quatrième années afin qu'un élève puisse revoir son choix dans un sens comme dans l'autre.

Globalement, ce retour à deux niveaux de cours devrait faire diminuer sensiblement le nombre d'échecs aussi bien au second qu'au troisième degré et ne devrait pas faire augmenter le nombre d'heures-professeurs organisées en mathématique. L'impact budgétaire de cette réorganisation sera nécessairement positif.

Problèmes, Situations-Problèmes en Mathématique.

M. SCHNEIDER, *Faculté universitaires de Namur, Sedess de Liège.*

Thème récurrent dans les déclarations de principe sur l'enseignement des mathématiques, la résolution de problèmes est plus que jamais d'actualité dans la réforme des compétences. Dans la foulée, l'expression « situation-problème » envahit toutes les disciplines, après avoir constitué un emblème de renouveau dans l'enseignement des mathématiques depuis plus de vingt ans, sous l'impulsion, en Belgique, de Nicolas Rouche.

Le but de cet exposé est d'approfondir ces concepts de problème et de situation-problème au sein de l'enseignement des mathématiques, pour pouvoir en discriminer les enjeux didactiques respectifs, au delà d'une première distinction souvent faite entre problèmes d'introduction et problèmes d'application (cf. e.a. [8] et [9]). Mon analyse prendra la forme d'une sorte de visite guidée de « lieux » divers, en particulier la psychologie cognitive et la didactique, où les regards portés sur les problèmes sont sensiblement différents. Cette confrontation permettra, me semble-t-il, de mieux discerner les contours de ce que ce qu'on pourrait appeler une situation-problème et d'en mieux appréhender le fonctionnement. De cette étude multidimensionnelle ressortira une manière d'articuler problèmes et situations-problèmes dans le cadre d'une évaluation tant formative que certificative.

1. De l'idée de difficulté aux obstacles psychologiques.

Un premier sentiment que l'on peut éprouver lorsqu'on pense à la résolution de problème est exprimé par Henri Poincaré en ces termes : « Ne dites pas : ce problème est difficile. Sinon, ce ne serait pas un problème ». Tel sentiment me semble souvent associé, dans les propos de personnes que j'ai interrogées, à l'idée que résoudre un problème, c'est penser à une

Adresse de l'auteur: Maggy Schneider, Dennenboslaan, 14, 3090 - Overijse
e-mail : Maggy.Schneider@fundp.ac.be

solution qui ne s'impose pas d'elle-même, à laquelle on ne peut aboutir sans s'éloigner considérablement des sentiers battus et de ses propres habitudes mentales, une solution originale, peut-être « simpliste » lorsqu'on la considère a posteriori, mais à laquelle on ne songe pas d'instinct : l'œuf de Colomb en est une belle illustration.

Cette façon d'appréhender les problèmes, dans les deux sens du verbe, touche aux préoccupations des psychologues du comportement, ainsi nommés dans un traité de psychologie expérimentale des années 80 (voir [19]). Parmi eux, P. Oléron [33] étudie l'impact des « attitudes et habitudes » du sujet qui font obstacle à la résolution de problèmes. Par exemple, les restrictions mentales implicites que plusieurs expériences mettent à jour, telles celle réalisée par N.R.F. Maier à propos du problème des neuf points. Il s'agit de relier neuf points disposés en carré (Fig. 1) par quatre segments tracés sans lever le crayon du papier. La solution, illustrée par la Fig. 2, exige que l'on sorte des limites du carré. Or, de nombreuses personnes ne pensent pas à le faire, évoquant même à tort qu'on le leur a interdit, et éprouvent donc des difficultés à résoudre le problème.

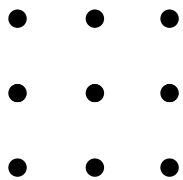


Fig. 1

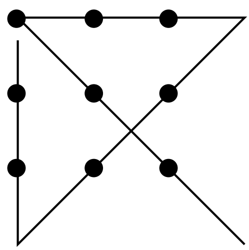


Fig. 2

Un autre exemple classique est le problème des allumettes de K. Duncker qui consiste à construire quatre triangles équilatéraux avec six allumettes sans chevauchement de celles-ci : la solution attendue est un tétraèdre, soit une figure de l'espace. Or, beaucoup de sujets se restreignent d'office au plan pour chercher la solution sans que personne ne leur ait imposé. Le blocage est tel qu'il peut subsister après une exploration combinatoire mettant en correspondance allumettes et triangles, ainsi qu'observé par J.P. Cazzaro et al. ([8] et [9]). La question soulevée par ces exemples est bien

 le piano; on peut l'apprendre par imitation et pratique.

celle des restrictions mentales implicites qui consistent à s'imaginer des interdits que l'énoncé du problème ne stipule pas.

Parmi les attitudes et habitudes de sujets confrontés à des problèmes, P. Oléron [33] pointe également la propension à aborder et à traiter comme un vrai problème un problème-piège, c'est-à-dire une « attrape » qui a l'allure d'un problème comme l'énoncé suivant :

> Une échelle de corde longue de 10 pieds est accrochée au bordage d'un navire. Les échelons sont espacés d'un pied et l'échelon le plus bas touche la surface de la mer. La marée monte à la vitesse de six pouces par heure. Quand les trois premiers échelons seront-ils recouverts par l'eau ?

Nous reviendrons plus loin sur ce phénomène pour en montrer une autre interprétation, liée au champ de la didactique et, par là, la relativité d'une lecture faite à l'intérieur d'un cadre de recherche trop peu systémique car n'incorporant pas d'aspects institutionnels.

Je termine la « visite » rapide chez les psychologues du comportement en évoquant les éventuels facteurs inhibiteurs ou facilitateurs d'un énoncé de problème ou de sa structure et leur possible impact sur sa résolution. Ainsi, P. Oléron [33] incrimine la structure du carré des neuf points de N.R.F. Maier qui induirait plus le tracé de lignes horizontales ou verticales que celui des lignes obliques nécessaires à sa résolution.

Dans le cadre de ce texte, j'utiliserai l'expression *d'obstacle psychologique* pour désigner de tels phénomènes d'abord par référence à la psychologie du comportement et puis aussi en raison d'une analogie naïve : lorsqu'on dit de quelqu'un qu'il a des problèmes psychologiques, c'est souvent pour dire qu'il en est « encombré », c'est-à-dire que ses problèmes rétrécissent son champ de conscience tout comme le font les habitudes mentales. S'il me paraît important de pointer ici ce type d'obstacles, c'est parce que ces derniers font écran à d'autres perspectives d'utilisation des problèmes dans l'enseignement. On ne peut bien sûr exclure de tels obstacles au détour de certains contenus scolaires, comme nous le verrons ci-dessous, mais se polariser là-dessus pousse à croire que la résolution de problèmes ne peut être réservée qu'à quelques élèves particulièrement inventifs, capables de penser « à côté ». Cela empêche donc de concevoir que des organisations didactiques, prenant appui sur des résolutions de problèmes, puissent déboucher sur de réelles constructions de savoirs, à l'échelle d'une classe ordinaire.

Et pourtant, un tel modèle d'enseignement peut fonctionner sous certaines conditions, comme développé à la section 3.

Il ne faudrait cependant pas négliger les obstacles psychologiques qui peuvent être renforcés en certaines circonstances. Les entreprises savent quel est le poids des habitudes mentales de leurs employés, elles qui, à l'occasion de « brainstorming », soumettent l'un ou l'autre problème à des personnes étrangères à l'entreprise et donc « libres » de toute habitude dans la façon d'envisager les solutions. De même, dans le contexte scolaire, les élèves peuvent être confrontés à de tels obstacles.

J'en donnerai deux exemples. Dans certains cas, tel que celui illustré par la Fig. 3, la construction de la section d'un cube par un plan dont on donne trois points suppose que l'on prolonge des segments en droites. Or, le contexte même du problème et sa solution font intervenir des figures géométriques limitées par essence : un polyèdre dont les faces sont des polygones et une solution polygonale composée de segments. La résolution suppose donc d'étendre ces figures au-delà de leurs limites, c'est-à-dire de passer outre une restriction induite par le problème lui-même.

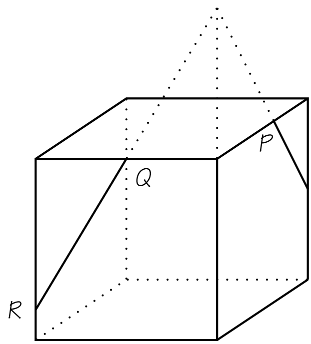


Fig. 3

Et l'on peut observer précisément que certains futurs professeurs qui « sèchent » pour la première fois devant ce type de questions parviennent à résoudre le problème de manière autonome dès qu'on leur a spécifié que rien n'interdisait de prolonger des segments en droites.

Un deuxième exemple a trait au caractère inhibiteur d'un énoncé de problème sur les intérêts composés où l'on explique aux élèves, qu'à la fin de l'année, on ajoute au capital les intérêts de l'année écoulée. Ainsi que l'ont observé C. Hauchart et N. Rouche [26], cette formulation provoque chez eux un calcul à structure additive et retarde, voire bloque, la perception de la suite géométrique sous-jacente que seul un calcul à structure multiplicative peut faire apparaître.

2. Des « méthodes » de résolution de problèmes existent-elles ?

Les questions soulevées supra, ainsi que d'autres, traitées par les psychologues du comportement, sont aujourd'hui relayées par les psychologues cognitivistes qui étudient « comment les humains perçoivent, comment ils dirigent leur attention, comment ils gèrent leurs interactions avec l'environnement, comment ils apprennent, comment ils comprennent, comment ils parviennent à réutiliser l'information qu'ils ont intégrée en mémoire à long terme, comment ils transfèrent leurs connaissances d'une situation à une autre ». (voir [51]).

2.1. Différentes phases de la résolution d'un problème.

En matière de résolution de problèmes, le champ d'investigation de la psychologie cognitive est large : cela va des stratégies de résolution de problèmes et de la métacognition à l'étude des conditions qui facilitent ou entravent le transfert des apprentissages d'un problème à un autre. En particulier, ce courant de recherches s'intéresse aux différentes phases de résolution de problèmes. Ainsi, A.H. Schœnfeld [48] distingue six étapes importantes dans la résolution d'un problème, qu'il soit mathématique ou non :

- la lecture de l'énoncé,
- l'analyse du problème,
- l'exploration des solutions possibles,
- la planification d'une ou de plusieurs stratégies de solution,
- l'application de la ou des solutions,
- la vérification de la solution en regard des données initiales.

Dans le cadre d'une réflexion sur la formation des concepts, A. Sfard [50] identifie trois phases que l'on peut résumer très brièvement ainsi :

- intériorisation ou phase d'appropriation du problème,
- condensation ou phase d'éclaircissement, de maturation,
- réification ou phase de clarté.

J.P. Cazzaro et al. ([8] [9]) exploitent ce découpage tant pour modéliser la résolution d'un problème que pour construire des séquences d'enseignement ou pour structurer des grilles d'évaluation de la compétence de résolution de problèmes. Je reviendrai au fur et à mesure sur chacun de ces trois usages.

2.2. Stratégies spécifiques et stratégies générales.

En ce qui concerne les stratégies de résolution de problèmes, il y a lieu de distinguer stratégies spécifiques liées à un contenu disciplinaire et stratégies générales. On identifie facilement les premières en mathématiques : par exemple, la méthode de programmation linéaire ou celle des dérivées pour optimiser une grandeur variable. Les secondes sont indépendantes des contenus disciplinaires. Il s'agit, par exemple, du chaînage arrière, au sens de E. D. Gagné [20], qui consiste à considérer d'abord, non l'état initial du problème comme dans le chaînage avant, mais le but désiré pour réduire progressivement l'écart entre ce but et l'état initial, ou encore le raisonnement par analogie sous-tendu par la question : « quel problème similaire ai-je déjà résolu ? » Notons que le premier exemple s'exprime par des formes plus ou moins opérationnelles en mathématique, selon qu'on l'exploite pour prouver une identité trigonométrique ou pour établir le plan d'une démonstration géométrique. Quant au second, il nous ramène insensiblement aux stratégies spécifiques.

2.3. Comportement d'experts versus comportement de novices.

Au delà de la description de phases dans la résolution de problèmes ou du relevé de stratégies de résolution, je voudrais pointer ici les recherches qui mettent en évidence un comportement sensiblement différent entre les experts et les novices confrontés à un problème qui relève de la compétence des premiers. A.H. Schœnfeld [48] observe que les uns et les autres exploitent différemment les étapes mentionnées plus haut : par exemple, les experts passent beaucoup plus de temps que les novices à analyser les données du problème. Cette observation, est à rapprocher d'une autre faite par plusieurs chercheurs [29] et [14] à propos de problèmes de physique : les experts passent ce temps à situer le problème dans une classe bien identifiée, en se référant à une organisation fortement hiérarchisée de classes de problèmes qu'ils ont en mémoire.

2.4. De l'importance des stratégies spécifiques aux obstacles méthodologiques.

Somme toute, les faits décrits ci-dessus ne me paraissent pas étonnants. Le tout est de savoir ce qu'il faut en tirer comme conclusion sur l'apprentissage et sur l'enseignement : doit-on en conclure qu'une manière d'apprendre aux élèves à résoudre des problèmes est de leur apprendre à résoudre des classes successives et organisées de problèmes à l'intérieur des disciplines scolaires ? Peut-on miser, comme certains programmes le prévoient, sur un enseignement de stratégies générales ? Après avoir fait écho de ce débat sensible au sein de la psychologie cognitive, J. Tardif [51] souligne l'inefficacité des enseignements de stratégies générales, telle qu'éprouvée par plusieurs recherches, et rapporte la conclusion de plusieurs chercheurs : « l'enseignement de stratégies spécifiques de résolution de problèmes est une orientation qui rend le plus probable le transfert des apprentissages ». Il clôture son chapitre sur la résolution de problèmes et le transfert par une synthèse relative aux facteurs influant sur l'enseignement et l'apprentissage des stratégies de résolution de problèmes. Les deux premiers facteurs sont le développement d'une base de stratégies spécifiques et l'organisation de ces connaissances dans la mémoire à long terme et le troisième a trait à la métacognition, à savoir l'importance d'un enseignement explicite des stratégies et de leurs conditions d'utilisation.

Je ne concluerai pas personnellement à ce stade. Je reviendrai plus tard sur l'importance des classes de problèmes pour pouvoir croiser plusieurs approches de la question. Pour l'instant, je me contenterai de montrer, au moyen de deux exemples, l'importance d'un enseignement de stratégies spécifiques. Le premier exemple est le raisonnement par récurrence qui est, vis-à-vis d'une certaine classe de problèmes, une technique particulièrement opérationnelle en même temps que très inventive. Imaginez que l'on demande à des élèves de prouver l'écriture polynomiale de la somme des cubes des n premiers nombres entiers. S'ils ont appris la preuve par récurrence, cette tâche n'est plus pour eux un problème : elle se solde par un calcul numérique en ce qui concerne l'amorce de récurrence et une vérification algébrique pour ce qui est de la chaîne. Par ailleurs, on peut difficilement imaginer de « faire découvrir » aux élèves un tel mécanisme de preuve dont l'essence et la portée ont été mises en évidence par une réflexion de haut vol sur les fondements des mathématiques. Le deuxième exemple est la méthode des deux lieux exploitée pour résoudre des problèmes de constructions géométriques face auxquels beaucoup d'élèves se sentent complètement démunis. Le groupe

COJEREM [15] et [16] a montré qu'une telle méthode permet de structurer leur recherche et de les rendre relativement autonomes en mettant en évidence des questions-clés, des étapes incontournables qui ne sont pas liées à un seul problème, mais à toute une classe.

L'absence de telles méthodes dans le registre des connaissances spécifiques des élèves rend donc quasiment inabordables des classes entières de problèmes. J'utiliserai l'expression d'*obstacles méthodologiques* à la résolution de problèmes pour nommer ce manque de stratégies spécifiques. Par là, je voudrais souligner aussi que la modélisation d'une démarche de résolution d'un problème en phases d'intériorisation, de condensation et de réification me paraît bien insuffisante pour fournir à qui que ce soit une aide substantielle pour résoudre un problème. Si ce n'est — et c'est loin d'être négligeable — d'apprendre aux élèves à assumer un certain désarroi inéluctable au moment de la phase d'appropriation du problème.

J'ajouterai encore que certaines stratégies spécifiques peuvent être l'embryon de démarches de pensée générales et productives. Ainsi, comme je l'ai développé dans [46], les problèmes de constructions géométriques mobilisant la méthode des deux lieux habituent les élèves à trouver des objets, de quelque nature qu'ils soient, devant satisfaire plusieurs contraintes : l'idée est de faire jouer une contrainte à la fois pour déterminer non pas un objet mais toute une classe d'objets et de chercher ensuite l'objet inconnu à l'intersection des classes ainsi trouvées.

Cette démarche peut être illustrée dans des contextes fort diversifiés. Par exemple, déterminer une fonction satisfaisant à des conditions particulières parmi toute une classe paramétrée de fonctions, les paramètres étant fixés en faisant intervenir les contraintes successivement. Ou encore, déterminer la signification d'un mot dans un texte de langue étrangère parmi une classe de significations possibles en recoupant d'autres considérations : la phrase dans laquelle ce mot est inséré, le thème du texte qui contient la phrase et même la portée de l'œuvre dont le texte est extrait.

3. Situations adidactiques comme modèles de situations-problèmes .

3.1. Un enseignement et un apprentissage marqués du sceau de l'institution scolaire.

S'intéressant à la manière dont les humains raisonnent, ainsi que le dit J. Tardif [51], la psychologie cognitive ne distingue nullement un humain-élève d'un humain rencontré dans la rue. La théorie anthropologique de Y. Chevallard [11] et [12] regarde au contraire les individus comme des êtres dont le comportement s'explique par leur assujettissement à une institution. En l'occurrence, l'école fait les enfants élèves pour reprendre l'expression d'A. Mercier [31], ce qui n'est pas sans rappeler une plainte souvent formulée par les professeurs : *les élèves sont scolaires*. Mais plutôt que d'en faire un sujet de mécontentement, la didactique des mathématiques, telle qu'elle se définit dans une certaine école française, prend ce fait en considération autrement que dans le registre moral et s'intéresse à l'enseignement et à l'apprentissage de savoirs particuliers, les savoirs mathématiques, au sein de l'institution scolaire, c'est-à-dire sans négliger les dimensions institutionnelles de l'analyse. C'est ainsi que la didactique interprétera en termes de contrat didactique (concept sur lequel je reviendrai), la propension des élèves à tenter de résoudre des problèmes-pièges type « âge du capitaine » ou comme celui mentionné plus haut : les élèves s'attendent à ce que tout problème posé au sein de l'école ait une réponse et que cette réponse mobilise des opérations enseignées.

Plus généralement, les obstacles psychologiques apparaissent sous un jour nouveau à la lumière de la théorie anthropologique. Pensons à l'exemple des brainstroming : seraient-ils aussi indispensables si les personnes travaillant au sein d'une institution n'y étaient pas aussi « assujetties »?

3.2. Dévoluer la construction des savoirs.

C'est à l'intérieur de la problématique décrite ci-dessus qu'il convient de placer, me semble-t-il, une réflexion sur les situations-problèmes. Une incursion dans la théorie des situations didactiques de G. Brousseau [5], à l'origine de ce courant de recherches en didactique, permet de le comprendre.

Cette théorie constitue une grille de lecture des phénomènes d'enseignement, inspirée des théories constructivistes de l'apprentissage.

Commençons par décrire une situation extraite de cet ouvrage. Il s'agit de distinguer et de désigner 5 tas d'environ 200 feuilles de même format et de même couleur, les feuilles se différenciant par leur épaisseur seulement. L'instrument de mesure disponible (un pied à coulisse ou un double-décimètre) ne permet pas de mesurer l'épaisseur d'une quelconque de ces feuilles. On demande aux élèves d'imaginer un *code* qui permettrait à quelqu'un de reconnaître un tas de feuilles choisi parmi tous. Les codes sont éprouvés lors d'un jeu de communication : des équipes de 4 ou 5 enfants vont se séparer chacune en « émetteurs » et « récepteurs ». Les groupes d'émetteurs choisissent un tas de feuilles tandis que les groupes de récepteurs sont isolés derrière un rideau. Les premiers transmettent aux seconds un message qui doit leur permettre d'identifier le tas choisi. Les récepteurs disposent eux aussi des mêmes tas de feuilles et des mêmes instruments. Le professeur se contente de faire passer les messages dans un sens, les réponses dans l'autre et de constater avec les élèves les échecs et les réussites. Il les incite, au besoin en modifiant les équipes, à confronter les messages et à considérer que ce sont ces derniers plutôt que les élèves eux-mêmes qui sont " « gagnants » ou « perdants ». Après une phase de découragement au cours de laquelle les élèves réalisent l'impossibilité de mesurer l'épaisseur d'une seule feuille de papier, certains suggèrent de prendre plusieurs feuilles à la fois et de mesurer l'épaisseur du tas prélevé : soit en choisissant au départ un nombre connu de feuilles dont ils mesurent l'épaisseur, soit en choisissant une épaisseur et en comptant le nombre de feuilles correspondantes, soit encore en misant sur le hasard. Ils réalisent ainsi qu'un *code* efficace doit comporter deux nombres dans un ordre précisé : par exemple, 60 pour le nombre de feuilles et 7 pour le nombre de millimètres mesurés. L'imprécision inhérente à l'expérience pousse les élèves à trouver des critères pour invalider certains messages et les achemine peu à peu d'une dialectique d'action vers une dialectique de formulation et de validation. Aux critiques personnelles : « tu as manqué de soin » et aux preuves pragmatiques : « tel type de message fonctionne » se substituent peu à peu des preuves intellectuelles : « des tas composés d'un même nombre de feuilles de types différents ne peuvent conduire à de mêmes épaisseurs » ou « deux fois plus de feuilles pour un même tas ne peut que doubler l'épaisseur ». Sur base des contradictions relevées, le modèle d'action devient peu à peu explicite et fait l'objet d'une formulation : le couple (60, 7) est évidemment équivalent au couple (120, 14) et c'est là-dessus que le professeur tablera pour introduire in fine l'équivalence de couples, la représentation d'une classe d'équivalence par la fraction $\frac{7}{60}$ comme notation conventionnelle et les rationnels en tant que mesures. Je reviendrai plus loin sur cette dernière phase.

Les dialectiques d'action, de formulation et de validation illustrées dans l'exemple ci-dessus cadrent ce que G. Brousseau appelle une **situation adidactique**. Ce dernier qualificatif renvoie à deux caractéristiques :

- la situation adidactique comporte une question, un « problème »(au sens commun du terme) qui ne peuvent être résolus sans impliquer la construction d'un savoir, celui précisément visé par l'enseignement en cours ; une situation adidactique est donc toujours spécifique d'un savoir donné ;
- la construction de ce savoir est « dévolue » à l'élève, le professeur se refusant à le transmettre et abdiquant, pour un temps, une part de son intention d'enseigner : d'où le « alpha privatif » qui débute le mot adidactique.

Dans l'exemple précédent, le professeur fait dévolution à l'élève de la mise au point d'un codage pour désigner un tas de feuilles parmi plusieurs. Il s'efface, se contentant de faciliter la réalisation matérielle des tâches ou les échanges entre élèves comme un « bon » animateur, au sens de la dynamique de groupes, s'en tient strictement à une directivité de procédure en évitant toute intervention de fond.

3.3. Le contrat didactique et le milieu.

Le paradoxe de la dévolution, un « contrat » implicite.

Le processus de dévolution est d'autant plus délicat qu'il s'inscrit dans une institution scolaire. Cela se traduit par un paradoxe identifié par G. Brousseau [5] et ses conséquences : en substance, le maître cherche à faire construire un savoir par les élèves sans avoir à le leur présenter. Les élèves savent que le maître connaît ce savoir et cherchent à le lui faire dire, à deviner ses intentions, pour réaliser « à l'économie » le comportement souhaité par ce dernier. Il arrive, bien souvent, que le professeur souscrive à cette demande, vendant la mèche pour obtenir ce comportement à n'importe quel prix tout en faisant semblant de le reconnaître comme indice de l'apprentissage réalisé. Ce paradoxe est à l'origine du concept de **contrat didactique**, essentiellement implicite puisque l'objet de ce contrat est le savoir connu du maître seul. La dévolution propose un contrat en rupture par rapport au contrat didactique classique selon lequel l'articulation entre l'enseignement et l'apprentissage est régulée par des règles implicites et perçues comme allant de soi, parmi lesquelles : le professeur explique la théorie et les exercices que l'élève doit savoir faire ; l'élève exécute ces exercices en imitant le professeur.

Un comportement négocié « à la baisse. »

L'exemple suivant, emprunté à C. Comiti et D. Grenier [17] illustre les effets du contrat. Il s'agit d'un cours sur la racine carrée. L'objectif déclaré du professeur à l'adresse des expérimentateurs est « qu'on ait à notre disposition de nouveaux nombres ». Au cours de la leçon précédente, l'enseignant a révisé les propriétés des carrés et explicité la relation racine carrée/carré sur des exemples. Il espère ici faire formuler collectivement par le groupe-classe la définition de la racine carrée. Après bien des péripéties (dont nous ne parlerons pas ici dont une confusion entre carré et racine carrée partagée par plusieurs élèves), l'un d'eux exprime : « Un nombre que l'on a multiplié par lui-même pour obtenir Grand a ». Le professeur voit le parti qu'il peut tirer de cette intervention, mais le passé utilisé par l'élève l'embête. En effet, les fonctions « carré » et « racine carrée » étant réciproques, on trouve bien l'opération identique en les composant dans un ordre quelconque. Cependant le passé utilisé par l'élève induit un ordre qui l'empêche d'atteindre de nouveaux nombres puisqu'il n'obtiendra alors que des racines de carrés d'entiers ou de rationnels. Mais que peut dire le professeur sans déflorer lui-même l'existence de nouveaux nombres ? Il opte alors pour une argumentation qui n'a plus rien à voir avec le savoir concerné, soit l'esthétique de la formulation : « Un nombre que l'on a multiplié ..., que l'on a multiplié ..., cherche donc à formuler de manière élégante les choses. Multiplié, par lui-même, pour obtenir A. Qui nous propose autre chose ? Pourquoi est ce qu'il faut mettre au passé, là ? C'est indispensable de le mettre au passé ? » Et le même élève de répondre : « Au présent, Madame ! » au grand soulagement du professeur, du moins on l'imagine. Cet exemple illustre bien la difficulté du professeur à dévoluer véritablement à l'élève la formulation de la « racine carrée » : le contrat lié à cet objet de savoir ne va pas de soi. Le professeur se rabat alors sur une forme de contrat qui lui permet d'arriver à ses fins sans avoir à dire tout lui-même, mais sans vraiment faire réaliser aux élèves l'apprentissage visé. Le cas est classique.

Un milieu pour faire fonctionner la dévolution.

De tels effets de contrat sont d'autant plus à craindre que l'objet de la dévolution est gros, comme peut l'être la résolution d'un problème. D'où l'intérêt d'un milieu sur lequel peut s'appuyer le professeur pour dévoluer vraiment la situation sans biaiser en vendant finalement la mèche « au bas prix ». L'exemple décrit ci-dessous fait apparaître le logiciel « cabri-géomètre » comme milieu d'apprentissage du concept de figure géométrique. Comme le développent C. Laborde et al. [28], une figure géométrique, tel un parallélogramme, se distingue d'un dessin qui la représente par le fait que ce dernier ne rend pas compte du domaine de variation des éléments constitutifs de l'objet géométrique : seule une description discursive peut lever les ambiguïtés du dessin ou relever ses particularités. Une certaine confusion entre figure géométrique et dessin est parfois entretenue dans les manuels comme le montrent ces auteurs et la distinction entre les deux est loin d'être maîtrisée par les élèves du secondaire inférieur. C'est ainsi que ceux-ci décodent, en termes de dessin à tracer, une activité qui s'inscrit dans l'exploitation des figures géométriques. Une expérience observée par D. Grenier [23] est, à cet égard, très significative. Un professeur demande à ses élèves de tracer l'axe de symétrie d'un trapèze isocèle en utilisant une règle non graduée et une équerre, attendant d'eux qu'ils se réfèrent à une figure géométrique dotée de propriétés sur lesquelles s'appuyer, en l'occurrence : les côtés opposés non parallèles du trapèze, segments homologues de la symétrie, se coupent sur l'axe cherché. Au lieu de répondre aux attentes du professeur, les élèves interprètent la tâche en termes de tracé de dessin qu'ils réalisent, soit au jugé, soit en détournant les instruments qu'ils transforment en instruments de mesure, par exemple, en se servant de la section de la règle comme unité de mesure. Pour les remettre sur le « droit chemin », le professeur demande davantage de précision dans le tracé mais cette exigence ne conduit pas au comportement attendu, tant l'idée de précision est associée pour les élèves à celle de mesure. C. Laborde et al. [28] commentent cette situation en se référant au paradoxe de la dévolution décrit plus haut : « Une situation voulue adidactique dans sa conception donne lieu à une réalisation en classe qui fonctionne essentiellement sur l'appel à deviner ce qu'attend l'enseignant ». Ils en concluent les limites des contraintes liées aux instruments, par exemple, le recours à une règle non graduée et proposent de pallier cette situation par la construction de « cabri-dessins ». Supposons par exemple, qu'il faille construire, par un point P, une droite parallèle à une droite d et décrivons une solution d'élève observée par les auteurs. L'élève crée le point de base A en utilisant une « primitive de dessin pur » du logiciel, puis le symétrique A' de A par rapport à P par le biais d'une « primitive géométrique » (Fig. 4). Pour lui, la droite AA' est la droite demandée et il croit avoir satisfait à la tâche car il ne réalise pas que le choix de A, au jugé pour que AP ait l'air parallèle à d, rend caduque au sens géométrique la construction faite. C'est là que le renvoi de l'élève au milieu cabri peut lui faire comprendre qu'il a réalisé un dessin et non une figure géométrique. En déplaçant le point P ou la droite d sur le logiciel, à l'invite du professeur, l'élève verra sa construction disqualifiée par le fait que la droite construite ne reste pas parallèle à d lors de ce déplacement (Fig. 5). Le logiciel fournissant cette rétroaction, le professeur peut vraiment dévoluer à l'élève des constructions de figures géométriques, pourvu qu'il exige, dans les consignes, que la construction résiste à de tels déplacements.

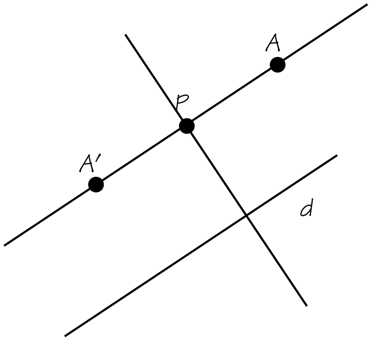


Fig. 4

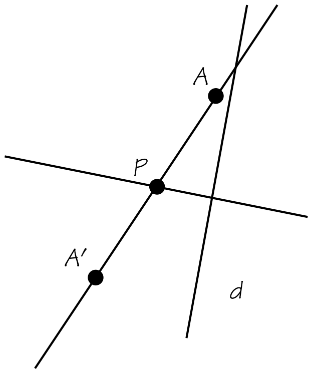


Fig. 5

De manière générale, le **milieu** est ce sur quoi peut s'appuyer le professeur pour dévoluer aux élèves une part du savoir visé. Les composantes de ce milieu sont multiples, tantôt plus cognitives, tantôt plus sociales. Un matériel utilisé, le cas échéant, tel le logiciel *cabri-géomètre*, le ou les problème(s) proposé(s) avec ses (leurs) caractéristiques en font partie. Mais le milieu est aussi fait des échanges entre élèves, comme clairement illustré par la situation des feuilles de papier, de même que de leurs expériences et acquis antérieurs. On ne peut cerner ce milieu, pour une situation déterminée, sans faire l'économie d'une analyse épistémologique et didactique. J'y reviendrai à la section 3.5.

Modèle théorique des situations adidactiques, idéologie des situations-problèmes.

Au terme des sections 3.1 à 3.3., je voudrais prendre position. Il me semble que les concepts de situation adidactique, de contrat et de milieu cadrent un fonctionnement possible de ce que j'ai envie d'appeler les situations-problèmes, étant consciente d'utiliser ce mot d'une manière plus précise que son usage habituel. Comme A. Robert [37] je ressens comme une ironie du sort le fait que l'expression situation-problème soit absente de la théorie des situations didactiques de G. Brousseau. Cette dernière en effet procure des outils d'analyse qui permettent au professeur de savoir si le comportement de ses élèves relève plus d'effets de contrat que d'interactions avec la situation proposée. C'est grâce au concept de contrat didactique, me semble-t-il, que le modèle des situations adidactiques est un vrai modèle théorique au sens de K. Popper [35], c'est-à-dire un modèle falsifiable pour lequel on peut imaginer une situation où il est mis en défaut. Effectivement, c'est l'analyse du contrat qui permet de déterminer si les conditions d'enseignement et d'apprentissage sont bien celles des situations adidactiques. C'est pour cela d'ailleurs que le contrat didactique est un outil pertinent pour analyser des leçons « ordinaires » qui échappent à ce modèle, comme le montre l'exemple de la racine carrée.

Cela dit, la construction de situations adidactiques ne va pas de soi, aux dires des chercheurs qui s'y sont attelés, surtout en ce qui concerne des concepts plus unificateurs, tel que celui de limite d'une fonction (cf. e.a. [30] [47]. Et à vouloir à tout prix enseigner dans ce cadre, on se contente trop souvent de situations qui ne peuvent fonctionner sans effets de contrat au risque de s'éloigner sensiblement du but cherché : organiser le face à face de l'élève avec le savoir, but qu'un exposé permet d'atteindre parfois mieux, pourvu qu'il comporte des aspects épistémologiques. C'est pourquoi, la « sacralisation » des situations-problèmes, la transformation de théories constructivistes en idéologie ne me paraissent pas sans danger, si l'on n'outille pas les professeurs de concepts de didactique.

3.4. Dépersonnaliser et décontextualiser les savoirs en vue de les institutionnaliser.

A la dévolution fait pendant le processus d'institutionnalisation par lequel « Quelqu'un d'extérieur vient pointer les activités de l'élève et identifie celles qui ont un intérêt, un statut culturel »(G. Brousseau, [5]). En effet, Les situations adidactiques doivent permettre aux élèves de réaliser des apprentissages sans apport extérieur de connaissances, le rôle du professeur se réduisant pratiquement à des actes logistiques. Il incombe cependant à ce dernier la conception ou, à tout le moins, le choix de la situation adidactique susceptible de provoquer l'apprentissage souhaité. Dans cette tâche, il joue le rôle d'intermédiaire entre les élèves et le savoir qu'il doit enseigner sur mandat de l'institution scolaire et, à travers elle, de la société. Aux yeux des élèves, il apparaît comme le seul garant pouvant attester que l'apprentissage visé est bien réalisé et que, par conséquent, l'enseignement a été effectif. Lui seul peut fournir cette confirmation, les élèves ignorant le but qu'il leur est assigné, ne fût-ce qu'à cause des options didactiques prises. Les processus de dévolution et d'institutionnalisation apparaissent donc comme deux démarches symétriques qui forment ensemble une boucle partant des savoirs pour y revenir. Par le processus de dévolution, le professeur aménage les savoirs pour que leur construction soit à portée des élèves ; par le processus d'institutionnalisation, il reconnaît certaines des connaissances engagées par les élèves comme des savoirs reconnus utiles pour la société.

Une bonne articulation des processus de dévolution et d'institutionnalistion suppose non seulement des apports d'information de la part du professeur mais aussi des « **mécanismes** » **de dépersonnalisation et de décontextualisation** chez l'élève que nous illustrons ci-dessous à travers l'exemple de la situation des feuilles de papier. Souvenons-nous que, pour tester les codages, les élèves sont mis en équipes : émetteurs d'un côté, récepteurs de l'autre. Ces équipes changent d'un moment à l'autre, ce qui empêche de déterminer des gagnants et des perdants. Par contre, le jeu de communication permet de déclarer quelles sont les stratégies gagnantes, c'est-à-dire les codages efficaces qui permettent aux récepteurs de déterminer le tas de feuilles choisi par les émetteurs. Ce ne sont donc pas les performances des individus qui sont sur la sellette, mais les connaissances elles-mêmes, ainsi « dépersonnalisées ».

Ce jeu de communication débouche sur l'identification de couples équivalents, la relation d'équivalence étant mise en évidence par les messages incohérents qui la transgressent. Chaque classe d'équivalence définit un rationnel qui correspond à la mesure d'une feuille de papier. Mais ce changement de regard est un apport du professeur qui « transforme »en savoirs institutionnalisés les connaissances des élèves en précisant le vocabulaire et les notations conventionnellement associés, notamment, l'écriture d'une fraction. Pour institutionnaliser les rationnels en tant que mesures, le professeur doit pouvoir les dégager de situations diverses. Il le fait ici en les faisant travailler par les élèves comme mesures d'autres grandeurs dans des situations de communication assez semblables à celles des feuilles de papier : des émetteurs doivent désigner à l'adresse de récepteurs des clous choisis parmi des tas de clous de poids différents, des récipients choisis parmi des verres de diverses capacités, des baguettes prises parmi plusieurs de longueurs différentes. A chaque fois, l'objet unité est suffisamment grand par rapport aux mesures des objets à désigner pour que les élèves soient obligés de prendre plusieurs objets de la même sorte et de convertir à terme leur mode de désignation en mesure fractionnaire. Le professeur table alors sur une « décontextualisation » qui permettra à l'élève de dégager les mesures fractionnaires des situations rencontrées pour les percevoir comme des mesures d'objets quelconques rendues nécessaires parce que l'étalon de mesure est plus grand que les objets à mesurer.

3.5. La nécessité d'une analyse épistémologique et didactique.

Une variété épistémologique ...

Construire des situations adidactiques n'est pas chose aisée, comme déjà dit plus haut. D'autant, qu'à chaque savoir, est associé plusieurs sens, plusieurs emplois qui nécessitent, chacun, de faire l'objet de situations adidactiques différentes. Une analyse épistémologique a priori, confortée ou infirmée par une expérimentation sur le terrain, se révèle ici nécessaire. Ainsi, la situation des feuilles de papier fait partie d'une vaste ingénierie didactique relative aux rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire (voir [7]). Si cette ingénierie est aussi vaste, c'est que leurs auteurs estiment que le sens de ces nombres et de leur représentation décimale est a priori multiple et fonction de la situation dans laquelle ils sont mobilisés. Nous n'en donnons ici qu'un aperçu très partiel. La situation des feuilles de papier conduit, on l'a vu, à une construction des rationnels qui s'appuie sur des équivalences de couples. Pour leur donner le statut de nombres, on les implique dans des problèmes d'épaisseur qui supposent des opérations : somme, différence, produit et division par un entier. Ensuite, comme dit plus haut, d'autres problèmes analogues, avec des clous, des verres et des bandelettes les font apparaître comme mesures incontournables dès que les unités de référence sont plus grandes que les objets à mesurer. A ce stade, le produit de deux rationnels n'est pas étudié, n'ayant pas de signification dans le contexte proposé. Suit une construction des décimaux dans un processus adidactique qui consiste, selon des modalités diverses et que nous ne préciserons pas ici, à localiser des fractions dans des intervalles de plus en plus petits. Inspirées par l'usage de la règle, les fractions décimales sont privilégiées par les élèves comme bornes d'intervalles en raison de facilités de calcul et de repérage. Les nombres décimaux sont alors présentés comme une réécriture commode de ces fractions, un « ostensif » qui se prête aux calculs. L'ingénierie comporte également l'étude de la similitude et des applications linéaires, par le biais, entre autres, d'un problème d'agrandissement d'un puzzle. Dans ce contexte, le produit de deux rationnels (éventuellement sous forme décimale) prend deux sens distincts : image d'une mesure rationnelle par un opérateur rationnel d'agrandissement ou de réduction, rationnel associé à une application linéaire composée de deux autres. Le sens du produit-mesure (par exemple, l'aire d'un rectangle aux dimensions rationnelles) doit être géré dans un autre contexte. De même, la division prend-elle, dans cette ingénierie didactique des sens variés dépassant l'idée de partage, Diviser, c'est bien sûr partager, encore que les conditions de partage peuvent considérablement différer d'une situation à l'autre (par exemple, la quantité à partager peut être répartie d'emblée en lots inégaux). Mais diviser, c'est aussi trouver une commune mesure à deux grandeurs, c'est trouver le terme manquant d'un produit (par exemple, trouver le prix d'une chemise sachant que 12 chemises identiques ont coûté 1020 francs), c'est trouver la réciproque d'une application linéaire multiplicative ...

... qui suppose des traitements didactiques diversifiés.

J'utiliserai l'expression « variété épistémologique » pour désigner cette multiplicité des sens associés à un concept, illustrée ci-dessus. Cette variété est telle, la plupart du temps, que la modélisation d'une séquence d'apprentissage d'un concept au moyen des trois étapes d'A. Sfard [50] ne peut suffire et doit être complétée d'une analyse épistémologique. Prenons l'exemple de la modélisation du concept de limite d'une suite numérique, telle que développée par J.P. Cazzaro et al. [8] et [9]. Pour ces auteurs, l'étape d'intériorisation consiste à faire explorer le problème du flocon de Von Koch. D'autres exemples s'y ajoutent lors de la phase de condensation : exemples géométriques ou cinématiques, comme la carpette de Sierpinski et problèmes numériques comme l'écriture décimale des nombres rationnels. L'étape de réification est faite d'une synthèse et de la préparation de prolongements ultérieurs vers l'étude des limites de fonctions. Mais, pourquoi de tels exemples, en quoi les contextes particuliers choisis poussent-ils les élèves à conceptualiser, pourquoi commencer par le cas de limites de suites, les différents cas de limites de fonctions soulèvent-ils des difficultés spécifiques ? De telles questions ne semblent pas prises en compte ici. Et pourtant, elles permettent de prévoir les réactions des élèves observées par ces auteurs et de les interpréter a posteriori.

Voici, de manière très allusive, quelques éléments propres à structurer une telle réflexion. I. Bloch [3] analyse en quelles circonstances l'exemple du flocon de Von Koch favorise une conceptualisation de la limite chez les élèves. C.

Hauchart et N. Rouche [26] montrent, au cas par cas, comment le contexte des problèmes permet de faire travailler des résultats relatifs au concept de limite de suite, par exemple, sur quel type de situation les élèves apprennent à rectifier l'intuition fausse selon laquelle une suite positive décroissante devrait tendre vers 0. Les auteurs du projet AHA [24] et [25] analysent en quoi le comportement asymptotique d'une suite est plus naturel à concevoir que d'autres cas de limites de fonctions. Quant à moi ([40] et [45]), je mets en évidence que le concept de limite soulève des difficultés spécifiques lorsqu'il détermine la valeur exacte, en la définissant, de grandeurs telles que vitesses instantanées ou aires curvilignes. Pour ces raisons, il me semble que le concept de limite ne peut s'abstraire d'exemples divers, si riches et diversifiés soient-ils, sans traitements didactiques tellement spécifiques des situations proposées qu'ils ne peuvent se rabattre sur un cheminement structuré par les phases d'intériorisation, de condensation et de réification.

De même, l'apprentissage du concept d'intégrale définie comporte des aspects fort divers qui ne peuvent se réduire au schéma qu'en proposent G. Noël et al. [8] et [9] en s'inspirant des mêmes étapes d'A. Sfard. En effet, la standardisation au moyen d'aires sous une courbe de problèmes divers de grandeurs : aires, volumes, travail d'une force, ... ainsi que l'approximation d'aires sous une courbe au moyen de sommes d'aires de rectangles ne vont pas de soi. Leur traduction (ou la tentative) en termes de situations adidactiques suppose toute une réflexion épistémologique et didactique qui prévoit les difficultés des élèves, les analyse et les prend en compte si l'on prétend leur dévoluer ces savoirs (sur des éléments d'une telle réflexion, voir M. Schneider, [40] et projet AHA, [24] et [25].

Un contexte aux antipodes des obstacles psychologiques et méthodologiques ; des situations qui font des élèves des analystes de savoirs plus que des résolveurs de problèmes.

L'analyse épistémologique et didactique comporte également l'étude des conditions d'émergence dans la classe des différents savoirs visés. Dans l'exemple détaillé plus haut, le fait de faire travailler les élèves sur des feuilles de papier dont l'épaisseur ne peut être mesurée avec l'instrument disponible joue un rôle déterminant : c'est en misant sur ce « dysfonctionnement » qu'on les pousse les élèves à dépasser le système des nombres entiers comme seul référent de mesures. On est loin ici des problèmes pensés avec le regard des obstacles psychologiques ou des obstacles méthodologiques. On n'attend pas des élèves qu'ils résolvent un problème en s'écartant des sentiers battus ou en exploitant des stratégies spécifiques ou générales de résolution de problèmes. L'intention est d'obliger la classe à tester des messages faits de deux nombres entiers de manière à faire apparaître une connaissance appropriée : l'équivalence de couples garantit la désignation d'un seul tas de feuilles. Pour cela, il faut avoir l'idée de prendre plusieurs feuilles à la fois pour les mesurer, mais le contexte même y pousse, puisqu'il n'autorise aucune autre stratégie. Et quand bien même, aucun élève ne la suggérerait, le professeur peut le faire lui-même sans empêcher que le jeu de communication, par sa structure tant que par son objet, fasse éprouver aux élèves l'ambiguïté de certains messages et par là la nécessité de la relation d'équivalence. Il s'agit donc de favoriser entre les élèves une sorte de débat scientifique auquel une certaine réalité donne prise. Tous les élèves n'y jouent pas le même rôle. Ce sont donc les caractéristiques du problème proposé (ses variables didactiques diraient certains) qui mènent la classe vers le savoir visé.

Pour résumer cette perspective, je dirais que, dans la théorie des situations didactiques de G. Brousseau [5], l'élève n'est pas un résolveur de problèmes mais, avec ses pairs, un analyste de savoirs. En insistant bien sûr sur le fait que c'est la situation, avec ses caractéristiques didactiques, qui font des élèves de tels constructeurs. Dans un tel cadre théorique, le problème des allumettes de K. Duncker par exemple, tel que formulé plus haut, n'a pas de sens. Il faudrait pouvoir l'inscrire dans un milieu qui lui en donne, tel que le milieu de la construction de modèles spatiaux au moyen d'appareils articulés. Mais sans doute, d'aucuns déploreraient alors la perte prévisible de l'obstacle psychologique sous-jacent.

Un contexte que peut inspirer l'histoire des mathématiques, un « concret » relatif.

Un certain regard sur l'histoire des mathématiques peut inspirer des contextes porteurs de situations adidactiques, pourvu que ce regard soit confronté à des expérimentations en classe. Prenons l'exemple de la dérivée. Trois problématiques sont à l'origine de ce concept dans l'histoire des mathématiques : la détermination de tangentes, le calcul des extrémés et celui des vitesses. Comme j'ai pu l'observer (M. Schneider, [40] et [41]), des problèmes s'inscrivant dans les deux premiers contextes ne sont pas forcément pensés par les élèves en termes de taux de variation et à fortiori de dérivée. Ils ont de la tangente une conception statique et globale, héritée du cas du cercle : une tangente est une droite qui ne rencontre globalement la courbe qu'en un seul point. Quant aux extrémés, ils ne les perçoivent pas volontiers, ainsi qu'on peut l'imaginer chez Fermat, comme des points aux environs desquels le taux de variation est faible. Reste le contexte des vitesses ... pourvu que les élèves soient confrontés à une vitesse qu'ils ressentent variable d'un point de vue intuitif. Ces considérations nous amènent à certains problèmes de vitesses liées tel celui qui consiste à s'interroger sur la vitesse de variation de l'aire d'un disque dont le rayon croît à vitesse constante. (sur l'analyse de tels problèmes, cf. M. Schneider, [40] [45] et AHA [24] et [25]).

Mais, diront certains, un tel problème est-il suffisamment concret ? On peut certes le « contextualiser », ainsi que fait dans AHA, en évoquant une onde circulaire dont le front progresse à vitesse constante. Cependant, il s'agit là d'un habillage relativement factice dans la mesure où les physiciens ne s'intéressent pas aux ondes pour répondre à ce genre de questions. Cet exemple m'amène à incriminer une volonté par trop farouche de vouloir partir à tout prix de questions « concrètes », entendez par là de questions issues de la vie courante ou d'autres disciplines, au prix soit d'une certaine dénaturation du problème, soit d'un enrobage qui risque de parasiter la réflexion des élèves. Tant de questions simples, d'apparence anodine, sont à l'origine de grandes théories mathématiques tout en ayant a priori un sens pour les élèves. Tel est le cas du calcul d'une aire délimitée partiellement ou totalement par une courbe. Point n'est besoin d'en faire le profil d'une piste de skateboard à repeindre pour y intéresser les élèves. Notons qu'il n'est pas difficile d'insérer un tel calcul d'aire sous une courbe dans un contexte concret : c'est l'espace parcouru par un mobile si la courbe précise sa vitesse et c'est l'énergie consommée par une ville dans le cas où la courbe donne la puissance électrique. Cependant, comme observé par M. Schneider [40] et J.P. Cassaro et al. [8] et [9], le calcul de telles grandeurs n'est pas facilement interprété par les élèves en termes d'aire sous une courbe.

3.6. Des connaissances-obstacles aux obstacles épistémologiques comme opportunités inéluctables d'exploitation de situations-problèmes.

S'inspirant de l'épistémologie de G. Bachelard [1] sur la construction des sciences, G. Brousseau [5] défend l'idée que des savoirs nouveaux sont construits par l'élève contre des savoirs anciens. Un exemple significatif est fourni, me semble-t-il, par les procédures additives observées, d'une part, par B. Inhelder et al. [27] et, d'autre part, par G. Brousseau chez des enfants qui tentent d'agrandir une figure géométrique. Par exemple, agrandir un puzzle de telle sorte qu'un de ses côtés qui mesure 4 cm en mesure 7 sur la version agrandie. Une procédure additive observée par G. Brousseau est la suivante : les enfants ajoutent 3 cm, soit la différence entre 7 et 4, à chacune des dimensions de chaque morceau. Comme relaté par A. Berté [2], certains d'entre eux, devant l'impossibilité de recoller les morceaux obtenus, corrigent cette procédure en ajoutant à chaque dimension les $\frac{3}{4}$ de celle-ci, c'est-à-dire en relativisant la différence 3 grâce au rapport de $\frac{1}{4}$ qui ramène chaque dimension à l'unité. La situation d'agrandissement du puzzle les achemine ainsi peu à peu vers un calcul de structure multiplicative.

Quelle est l'origine de tels savoirs anciens qui font obstacle aux nouveaux savoirs à acquérir ? G. Brousseau [5] en distingue trois. « **Les obstacles ontogéniques** sont ceux qui surviennent du fait des limitations neurophysiologiques e.a. du sujet à un moment donné de son développement : il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts à cet âge-là », dit cet auteur. En cela, il se réfère aux travaux de la psychologie génétique, en particulier à ceux de J. Piaget et de ses collaborateurs qui ont interprété les acquisitions intellectuelles des enfants en termes de stades de développement. Je crois que les procédures additives dont il est question ci-dessus et d'autres sont de cet ordre, étant interprétées par J. Piaget lui-même comme précédant la formation du stade des opérations formelles qui se met en place entre 11-12 ans et 14-15 ans et dont le schème de proportionnalité constitue une des acquisitions caractéristiques.

Les obstacles d'origine didactique et d'origine épistémologique sont parents, d'après G. Brousseau. Les premiers « sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif ». Ainsi en serait-il de certaines erreurs relatives aux décimaux telles que 1,3 + 2,9 = 3,12. Celles-ci, qui consistent à manipuler les décimaux comme des couples de naturels, seraient favorisées par une certaine présentation scolaire qui attache les décimaux à des mesures. Elle les identifie ainsi, et c'est là que le bât blesse, à des naturels munis d'une virgule qui expriment la mesure d'une grandeur dans une unité bien choisie : ainsi, 3,25 mètre, c'est 325 cm exprimé en mètres. Quant aux obstacles épistémologiques, importés des travaux de Bachelard en didactique des mathématiques, ils semblent incontournables, inhérents aux sciences elles-mêmes dont la construction, d'après G. Bachelard [1], ne peut faire l'économie de tels obstacles :

> [...] c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement,

> qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques.

A titre d'exemple, je proposerais un obstacle dont j'ai argumenté ailleurs [40] et [42] le caractère épistémologique : l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions. Il se manifeste par des glissements mentaux inconscients et indus du monde des grandeurs à celui de leurs nombres-mesures lorsque sont en jeu des grandeurs de dimensions distinctes. Un tel glissement est à l'origine d'une conviction partagée par plusieurs personnes : les volumes de deux solides de révolution sont entre eux comme les aires des surfaces qui les engendrent par rotation. Cette intuition et d'autres relevant du même obstacle ne semblent liées ni à l'âge des individus, ni même, pour certaines, à leur formation en mathématiques ; elles s'observent dans l'histoire des mathématiques ; elles sont récurrentes et persistantes : elles résistent aux mises en garde et ressurgissent sans crier gare. Elles sont de plus liées, ainsi que montré dans M. Schneider (à paraître), à d'autres réactions multiples, indices d'une vision trop exclusivement positiviste des sciences : conception géométrique de la limite, réserves exprimées vis-à-vis du concept de vitesse instantanée.

C'est ce caractère inextricable des obstacles épistémologiques, illustré sur l'exemple ci-dessus, qui les rend, à mon avis, incontournables et qui en fait de belles opportunités d'emploi des situations-problèmes. En effet, la prise de conscience de tels obstacles est essentiellement personnelle. S'il y a quelque chose qui doit être dévolu aux élèves, c'est donc bien une telle prise de conscience sans laquelle les savoirs nouveaux ne peuvent être que juxtaposés dans leur mental, aux côtés de savoirs anciens qui leur font obstacle sans vraiment remettre ces derniers en question.

3.7. Des savoirs mis en texte, la progression du temps didactique.

Comme dit plus haut, la théorie anthropologique du didactique envisage l'acte d'enseignement à travers un prisme résolument institutionnel. Mais l'on ne peut cerner l'assujettissement à l'institution scolaire des principaux acteurs de l'enseignement sans tenir compte d'une réalité dont on perçoit mal les enjeux tant qu'on la considère comme allant de soi, à savoir que le propre des mathématiques enseignées à l'école est d'être figée dans des textes : les fameux programmes que tout professeur se doit d'honorer. Des phénomènes multiples, liés à cette réalité, sont étudiés en didactique. A commencer par les chances de viabilité d'un contenu d'enseignement dans les programmes : ainsi, un sujet isolé, qui ne peut s'accrocher à une organisation plus vaste a peu de chances de subsister, comme l'a montré L. Rajoson [36]. J'y reviens ci-dessous. Mais, au delà des programmes, Y. Chevallard et al. [13], Y. Chevallard [10] et A. Mercier [31] et [32] montrent l'importance du temps didactique, c'est-à-dire de la progression dans ce texte du savoir. Cette importance est telle que le professeur se définit non seulement comme quelqu'un qui sait plus que l'élève, mais plus encore comme « quelqu'un qui sait avant » ce dernier. C'est une manière de souligner qu'a priori seul le professeur peut faire avancer le temps didactique en passant d'un sujet à l'autre ou le suspendre par des rappels ou des séances d'exercices répétitifs. Qui plus est, cela détermine le partage des responsabilités entre professeur et élèves : les véritables leviers de commande de l'enseignement sont aux mains de celui qui a le pouvoir de faire progresser le temps didactique.

De ceci découle que le processus de dévolution d'un problème ne peut être réel sans déboucher sur une progression effective dans le texte du savoir. Le problème dévolu doit donc apporter un écot non négligeable à la théorie mathématique en cours de construction pour qu'en prenant le problème à son compte avec ses pairs, l'élève puisse de lui-même faire progresser le temps didactique. Qui plus est, le pouvoir des élèves sur le temps didactique est d'autant plus grand que le professeur leur dévolue une responsabilité dans l'institutionnalisation des savoirs construits. C'est ce que réalise G. Sensevy [49] par le biais d'un « journal des fractions », texte émanant des élèves et témoignant de leur avancée dans l'exploration des propriétés des fractions.

Enfin, tout porte à privilégier les organisations globales et hiérarchisées dans lesquelles trouvent à se greffer les savoirs dévolus. Rapprochant les recherches de L. Rajoson [36] de celles de J. Centeno (G. Brousseau et J. Centeno, [6]) sur la mémoire didactique, A. Mercier [32] montre le double intérêt des problèmes qui s'intègrent dans une structure plus vaste :

> Cet auteur [Rajoson] montre qu'un objet d'enseignement doit, au delà du texte dans lequel il s'insère, faire partie d'une organisation d'objets beaucoup plus vaste que le simple problème qu'il résout ou la question qu'il aide à poser précisément ; il nomme une telle organisation « un tout-structuré », tandis que Centeno montre l'intérêt didactique d'une telle « structure », qui

> est d'aider le professeur à créer une mémoire didactique forte en s'appuyant sur le système des objets du tout structuré, qui offrent de nombreuses occasions de s'appeler l'un l'autre.

Partant de là, A. Mercier invite les chercheurs qui observent l'acte d'enseignement à s'émanciper ...

> ... des formes de questionnement issues de l'observation psychologique de la résolution de problèmes pour étudier, non plus la résolution d'UN problème, mais l'enseignement de suites de séquences : les passages d'une séquence à l'autre, les rappels, les interpellations d'élèves particuliers faisant référence à leur activité passée, les débats portant sur la reconstruction des savoirs antérieurement connus (ou l'absence de tels gestes d'enseignement) sont alors les indices de l'existence (ou de l'inexistence) de formes fortes d'adidacticité et de leur gestion explicite par le professeur.

Me plaçant du point de vue du professeur et de son enseignement, j'en tirerais volontiers une hypothèse d'action qu'il me paraît intéressant de mettre à l'épreuve : organiser son enseignement autour de classes de problèmes qui mobilisent tout un pan de théorie et penser la dévolution au niveau de chacune de ces classes. Je reviens sur une telle proposition à la section 4.3.

4. Comment articuler résolution de problèmes et situations-problèmes de l'évaluation formative à l'évaluation certificative ?

4.1. Une compétence globale par excellence : la résolution de problèmes, la question de son articulation avec les situations-problèmes.

Comme dit dans l'introduction, si la résolution de problèmes est tant à l'ordre du jour dans l'enseignement de toutes les disciplines, c'est sous l'impulsion de la réforme des compétences. L'intention est d'articuler la formation et de l'évaluer sur base de la maîtrise de compétences choisies pour leur caractère intégrateur de savoirs et savoirs-faire multiples. De ce point de vue, la résolution de problèmes apparaît comme une compétence globale particulièrement intéressante parce qu'elle en mobilise bien d'autres. C'est au point que les mathématiques se voient disputer par les autres disciplines scolaires cette compétence royale qui pouvait apparaître jadis, à tort ou à raison, presque comme leur monopole. Cela n'empêche certains de souligner avec force que la résolution de problèmes est une compétence globale qui trouve à s'exercer de manière particulièment propice au sein du cours de mathématiques. C'est ce qu'illustrent e.a. J.P. Cassaro et al. [8] et [9] au moyen d'une moisson d'exemples particulièrement riche. A l'appui de cette thèse, j'évoquerais, si besoin est, qu'une des caractéristiques prégnantes des mathématiques est d'avoir été constituées, au cours des siècles, comme méthodes de résolution de problèmes. Pensons, à titre d'illustration, au seul problème de l'évaluation des grandeurs et aux théories qui sont nées de là : des rapports de grandeurs aux mesures fractionnaires, du théorème de Pythagore et des grandeurs incommensurables aux nombres irrationnels, de l'évaluation des grandeurs inaccessibles à la trigonométrie, des aires curvilignes au calcul intégral, ...

Mais quel rôle jouent les situations-problèmes dans cette finalité du cours de mathématique jugée si importante, à savoir apprendre aux élèves à résoudre des problèmes ? La réponse à cette question ne va pas de soi tant sont différents, bien que non disjoints, les univers dans lesquels s'inscrivent les problèmes tels qu'on les perçoit en psychologie cognitive, d'une part, et les situations-problèmes issues de la didactique, d'autre part, comme j'ai tenté de le montrer par la typologie des obstacles détaillée au long de ce texte. Au risque d'un propos fort dichotomique, je dirais : d'un côté, la présence ou l'absence d'obstacles psychologiques ou méthodologiques conditionnent les performances d'individus-résolveurs de problèmes ; de l'autre, des situations adidactiques mobilisant des obstacles ontogéniques, didactiques et épistémologiques rendent les élèves, ensemble, analystes de savoirs en leur permettant ne fût-ce que d'éprouver les limites de savoirs anciens.

4.2. Penser les situations-problèmes comme évaluation formative de la compétence « résolution de problèmes » ?

Une première optique serait de considérer les situations-problèmes comme l'occasion d'une évaluation formative de la compétence « résolution de problème ». C'est celle défendue par J.P. Cassaro et al. [8] et [9] qui, comme nous l'avons vu plus haut, jouent sur un outil commun, les phases d'A. Sfard, tant pour structurer le cours que l'évaluation. En effet, une des trois hypothèses de travail avancées par ces auteurs est, comme ils disent, d'intégrer l'évaluation dans l'enseignement par la problématisation du cours : « Cela signifie d'abord qu'on ne peut évaluer que ce qui a été enseigné. Dès lors, évaluer la résolution de problèmes postule l'existence d'un véritable enseignement de la méthode expérimentale en mathématique. C'est évidemment à cela que la problématisation du cours veut contribuer ! ».

Sans doute est-il vrai que les démarches engagées par les élèves à l'occasion des situations-problèmes qui leur sont proposées participent à un entraînement à la résolution de problèmes. D'une certaine façon, c'est bien le moins. N'est-ce pas ce que souhaitent favoriser C. Hauchart et N. Rouche [26] dans leur projet d'enseignement des limites de suites en ponctuant les solutions des fiches de travail d'acquis méthodologiques réinvestissables dans les activités mathématiques ultérieures tels que le passage du registre numérique au registre graphique ? Réciproquement, les démarches méthodologiques peuvent faciliter l'émergence des savoirs : par exemple, c'est en pensant le problème des intérêts composés sous forme multiplicative, sans effectuer les calculs, que les élèves prennent conscience de la présence d'une suite géométrique. Cependant, l'optique décrite plus haut ne me paraît pas sans risque. Elle requiert à tout le moins une négociation serrée, du moment que l'on envisage les situations-problèmes à la lumière du modèle des situations adidactiques, comme je le développe ci-dessous.

Un premier écueil est lié à la nécessaire « dépersonnalisation » que suppose une bonne articulation des processus de dévolution et d'institutionnalisation des situations adidactiques (cf. section 3.4) : il importe que l'élève se polarise sur le savoir mis en jeu et son efficacité à résoudre le problème, quelle que soit la personne qui propose ce savoir : lui-même, un de ses pairs ou, pourquoi pas, le professeur. A contrario, avoir conscience que la situation-problème lui sert de piste d'essai pour s'entraîner à la résolution de futurs problèmes inédits risque de recentrer les préoccupations de l'élève sur sa propre créativité ou la pertinence de ses choix à lui, et ainsi de « repersonnaliser » le jeu. Et cela, même si, comme le proposent J.P. Cassaro [8] et [9] très judicieusement par ailleurs, l'évaluation doit prendre en compte toutes les démarches de recherche, y compris celles qui n'aboutissent pas.

Je vois une deuxième difficulté dans le choix même des situations-problèmes conçues, comme on l'a vu, pour mettre en jeu un savoir donné et/ou éprouver les limites d'un savoir ancien. Elles sont donc choisies prioritairement en référence à des savoirs ou à des obstacles précis. Et non en fonction des stratégies de résolution de problèmes qu'elles permettraient de mettre en évidence. La situation des feuilles de papier décrite plus haut n'est pas forcément intéressante de ce dernier point de vue. Je n'exclus évidemment pas qu'une situation puisse être porteuse à ces deux égards. Cependant, certaines démarches de résolution de problèmes font à ce point obstacle, au sens d'obstacles psychologiques, qu'elles peuvent parasiter la dévolution du problème. De par leurs caractérisques, les situations adidactiques devraient éviter de tels obstacles qui feraient impasse pour une partie des élèves si l'on veut pouvoir jouer la dévolution. De ce point de vue, le problème du tracé d'une section plane d'un cube qui implique le prolongement de segments en droites peut difficilement assumer le rôle de situation-problème, à moins de pouvoir en imaginer une transpostion adidactique. Par contre, le procédé une fois décrit par le professeur, ce dernier peut dévoluer aux élèves la formulation des propriétés géométriques qui le valident. Tôt ou tard, des choix s'imposeront : les tenants de la résolution de problèmes choisiront leurs énoncés en fonction des principes heuristiques qu'ils permettent de mettre en évidence et les partisans des situations-problèmes en fonction de l'analyse épistémologique des savoirs visés. Il n'est pas sûr qu'ils fassent souvent les mêmes choix. A cet égard, il est un phénomène qui m'apparaît intéressant à observer. Pour beaucoup de professeurs, n'est de « situation-problème » intéressante qu'une situation qui mobilise une traduction en langage mathématique d'un énoncé du langage véhiculaire. De tels problèmes seront privilégiés d'office, même si leur portée mathématique est insignifiante. Par contre, seront plus facilement discréditées des questions telles que : « Peut-on paver le plan avec un quadrilatère quelconque ? » parce qu'il n'y a pas de telle traduction à la clé, alors que cette question débouche, comme montré par C. Docq [18], sur la construction d'un savoir relatif à la somme des angles d'un quadrilatère. Il me semble qu'on assiste là à une dérive méthodologique qui n'est pas sans rappeler celle observée par A. Robert et al. [38] dans l'enseignement du premier degré en France : « L'apprentissage méthodologique de la résolution de problèmes vidait les mathématiques, au profit de la lecture de l'énoncé, du tri d'information, etc. ».

A cela s'ajoute des difficultés spécifiques soulevées par la dévolution de la résolution de problèmes, en tant que compétence, et analysées par G. Brousseau [5] en termes de contrat didactique. Comme montré à la section 3.3, pour dévoluer un apprentissage aux élèves, le professeur doit pouvoir s'appuyer sur un milieu dont le problème proposé et les échanges entre élèves peuvent constituer des éléments essentiels. S'il peut rompre le contrat didactique classique c'est parce qu'il peut renvoyer les élèves au milieu pour juger par eux-mêmes de l'efficacité de leurs procédures, pourvu que ce dernier puisse procurer les rétroactions nécessaires pour cela. Mais sur quoi peut s'appuyer le professeur pour dévoluer la démarche de résolution de problèmes, si ce n'est sur des conseils heuristiques, à la manière de G. Polya [34], tels que « Dessinez une figure, introduisez la notation appropriée, quelle est l'inconnue ... »? Or, de tels conseils ne semblent pas fournir un appui suffisamment consistant, aux dires des psychologues cognitivistes eux-mêmes (cf. section 2). Pourtant, à la lumière du contrat didactique, l'élève est en droit d'espérer du professeur la donnée d'un milieu efficace pour qu'il puisse se guider lui-même. G. Brousseau en conclut : « On doit donc s'attendre à ce que l'élève reçoive toutes les indications du professeur sur le même mode : comme des moyens « efficaces » de résoudre des problèmes (tels que des algorithmes) et ceci même si le professeur les choisit de façon à ce qu'elles relancent la recherche de l'élève, l'encouragent, l'aident sans toucher à l'essentiel de ce qui doit rester à sa charge. Ainsi, les indications de type heuristique seront demandées, données et reçues au sein d'un malentendu, suggestions incertaines pour l'un, connaissances comparables aux algorithmes ou aux théorèmes de mathématiques pour l'autre ».

4.3. Apprendre à résoudre des problèmes, classe de problèmes par classe de problèmes.

Compte tenu des difficultés décrites à la section précédente et de l'ensemble des éléments recueillis dans cet article, je voudrais défendre une autre manière d'articuler résolution de problèmes et situations-problèmes. Je la schématise comme suit. Des questions relevant d'une même problématique seraient exposées d'entrée de jeu aux élèves; elles leur seraient ensuite dévolues pourvu qu'elles aient pu se traduire en situations adidactiques, ou, à défaut, explorées par le professeur devant les élèves (auquel cas, on ne parlera évidemment pas de situation-problème, ...). De cet examen qui ferait ressortir l'essence commune de ces questions devrait émerger une technique type de résolution. Les questions seraient alors cristallisées en une classe de problèmes et le discours technologique qui valide cette « technique » (au sens large du terme) déboucherait sur un embryon (ou un pan de théorie), lequel institutionnaliserait la technique comme répondant à cette classe de problèmes. Les élèves seraient alors entraînés à la résolution de problèmes de cette classe et invités à explorer le domaine d'opérationnalité de la technique de résolution jusqu'à en éprouver les limites. Ils seraient enfin évalués sur leur capacité à transférer la méthode de résolution à de nouveaux problèmes de la même classe (M. Schneider, [47]). Il me semble que ce scénario rejoint la lecture que fait J. Gascon [21] des organisations praxéologiques d'Y. Chevallard [12]. Il a quelque parenté aussi, je crois, avec l'idée de famille de problèmes illustrée par les travaux du GEM (e.a. [22]), du COJEREM [15] et [16] et de AHA [24] et [25]. Peut-être évoquera-t-il, pour certains, le concept de famille de situations de X. Roegiers [39]. Cependant, à regarder de plus près les exemples suggérés par cet auteur, je ne retrouve pas forcément dans les situations d'une même famille la proximité sémantique qui caractérise les problèmes d'une même classe fédérés par des questions semblables.

A la lumière des travaux de didactique exploités ici, un tel canevas se justifie pleinement pourvu qu'il satisfasse aux précautions méthodologiques décrites supra, principalement l'analyse épistémologique qui déterminera la classe, ou plutôt les classes de problèmes constitutives des différents sens du savoir visé. Par ailleurs, il est cohérent avec les résultats de la psychologie cognitive. Je reprendrai quatre arguments qui m'apparaissent essentiels.

- Seule une classe entière de problèmes (et non pas un problème isolé) peut susciter le processus de décontextualisation sans lequel dévolution et institutionnalisation ne peuvent s'articuler convenablement (section 3.4). N'est-ce pas pour souligner l'appartenance à une même classe de divers problèmes faisant fonctionner le même sens d'un même savoir que G. Brousseau [5] parle de situation fondamentale associée à ce sens du savoir en question ?
- Du point de vue de la progression du temps didactique, seule une classe de problèmes fait vivre une question dans la durée. L'organisation d'un cours autour de classes de problèmes dévolues aux élèves fait participer ceux-ci à l'institutionnalisation des savoirs dévolus, chaque classe débouchant sur un morceau suffisamment consistant de théorie et sur l'entraînement à une technique associée, c'est-à-dire sur une entité bien visible du cours. En leur donnant ainsi prise sur le temps didactique, le professeur modifie réellement le partage classique des responsabilités entre ses élèves et lui (section 3.7).
- La dévolution aux élèves d'un premier problème de la classe, d'un second, etc. et d'une réflexion sur leur essence commune leur demande un certain investissement tant psychologique qu'intellectuel. Ce dernier est en quelque sorte « rentabilisé » par l'entraînement répétitif et l'évaluation portant sur des problèmes de la même classe. Il serait heureux de joindre à cette évaluation des questions de restitution por-

tant sur « l'histoire » de la construction du savoir, telle que réalisée par la classe. Ce compromis scolaire, éprouvé d'une fois à l'autre, permet aux élèves d'accepter plus sereinement la rupture du contrat didactique classique que constitue la dévolution de problèmes. Il fait en quelque sorte partie du milieu (section 3.3).

- Ce canevas favorise l'identification de classes de problèmes et, ce faisant, s'inspire du fonctionnement des experts — tel qu'observé par les psychologues cognitivistes — lorsqu'ils résolvent un problème qui relève de leur compétence en identifiant la classe à laquelle il appartient (section 2.3).

Dans une telle perspective, les savoirs construits outillent les élèves pour résoudre une classe particulière de problèmes, puis une autre et ainsi de proche en proche de sorte qu'ils disposent d'un arsenal de connaissances leur permettant de faire face à un nombre sans cesse croissant de types de problèmes. Cette optique bouleverse l'opposition classique entre savoirs et compétences, de même qu'elle permet de voir la « tête bien faite » et la « tête bien pleine » de Montaigne autrement qu'antagonistes : un individu armé pour résoudre des problèmes serait un individu dont la tête aurait engrangé de nombreuses classes de problèmes, ainsi que les méthodes appropriées. Encore faut-il, comme le souligne J. Tardif [51] et [52], que ces classes de problèmes fassent partie d'une organisation fortement hiérarchisée dans la mémoire à long terme des élèves. Sans doute est-ce sur cette organisation, évolutive en fonction du niveau des élèves évidemment, que devrait porter le discours métacognitif du professeur sur lequel insiste également le même auteur. Ce faisant, n'explique-t-on pas essentiellement les mathématiques, celles-ci étant par essence une telle organisation rationnelle ?

Peut-être que là-dessus pourrait se greffer un discours plus transversal qui étudie les démarches de pensée telles que mises en évidence par G. Polya [34], au delà de ses conseils heuristiques ? Encore faudrait-il analyser les conditions didactiques de cette greffe. Cependant, un tel discours ne me semble pas si vain a priori. Après tout, comprendre que la recherche d'un point à l'intersection de deux lieux, la construction d'un triangle à une similitude près et la recherche d'une fonction en passant par une classe paramétrée relève d'une seule et même idée : se donner des « degrés de liberté » en oubliant momentanément des contraintes m'a paru éclairer des démarches fort disparates et c'est une des raisons profondes qui m'a fait me pencher sur le modèle des deux lieux (M. Schneider, [46]).

Mais, on n'évalue pas la compétence « résolution de problèmes » dans le scénario décrit ci-dessus, objecteront certains. De fait, à force de faire explorer aux élèves le domaine de validité d'une technique de résolution associée à une classe de problèmes, on ne peut guère, au terme de l'apprentissage en cours, que tester leur capacité à exploiter cette même technique pour résoudre un problème qu'ils identifient d'office, contrat didactique oblige, comme faisant partie de la classe étudiée. Cependant, un enjeu de transfert non négligeable se profile dès que l'élève, susceptible de maîtriser plusieurs classes de problèmes, doit reconnaître à quelle classe appartient tel ou tel problème qui lui est proposé, tout comme un expert le ferait d'ailleurs. D'où l'intérêt de proposer des évaluations où, de manière affichée et effective, différentes classes de problèmes sont brassées d'une année à l'autre, afin d'éviter les effets de contrat poussant l'élève à adopter telle méthode ou telle autre en fonction des contenus de programmes travaillés pendant l'année en cours. Ainsi, si un problème doit être modélisé par une fonction, il y a des chances actuellement qu'il s'agisse d'une fonction exponentielle ou logarithme lorsque la question est posée en 6^e puisque les autres types de fonctions font partie des programmes d'autres années.

De toute façon, on ne peut évaluer qu'une performance, à savoir l'exercice d'une compétence dans une situation donnée. Ce que nous pouvons observer, c'est que l'élève a résolu ou non, et comment, tel ou tel problème particulier. Il faut donc accepter que le reste nous échappe. La volonté de vouloir éprouver un quelconque « potentiel » de l'élève à transférer sa démarche à n'importe quel autre problème ne relève-elle pas de ce que dénonce J. Tardif [52] par l'expression « la pierre philosophale du transfert » en citant, e.a. B. Rey : « L'idée de compétence transversale n'est qu'une idée de pédagogue ou de didacticien qui souhaite optimiser les effets de l'enseignement et qui voudrait que les acquis des élèves s'étendent bien au-delà de leur domaine d'apprentissage » ? Je trouve qu'un tel propos s'applique déjà à l'illusion d'une forme de transversalité, restreinte aux seules mathématiques, de la compétence « résolution de problème ». Et, sans être bien compétente pour en juger, je crains, dans les autres disciplines, une formation articulée autour de grilles de compétences très « transversales » qui me font penser, mutatis mutandis, aux stratégies générales de résolution de problème dont l'efficacité, je le rappelle, n'est absolument pas établie.

Je conclurais cette section par une position relative à l'évaluation certificative. Au vu de ce qui précède, celle-ci doit être, me semble-t-il, principalement axée sur la capacité des élèves à transférer d'une situation à l'autre des stratégies spécifiques de résolution de problèmes enseignées au préalable. En insistant, comme fait plus haut, sur un brassage de ces stratégies d'une année à l'autre beaucoup plus important qu'à l'heure actuelle. Et, pour ne pas être plus puriste qu'il ne faut, je pense que rien n'empêche de réserver une petite part de l'évaluation à la résolution de problèmes plus inédits, en imaginant, comme J.P. Cassaro et al. [8] et [9] le proposent, d'autres modalités d'évaluation que le seul test écrit en un temps limité.

Conclusion.

Un autre article serait nécessaire pour poser la question du choix des classes de problèmes en lesquels découper l'enseignement. Certains exemples sont faciles à imaginer que j'ai évoqué plus haut : l'évaluation de grandeurs inaccessibles, la détermination de vitesses variables. Encore faut-il négocier un enchevêtrement entre les classes de problèmes d'un côté et les contenus de programmes de l'autre. Ainsi, d'une part, l'évaluation des distances inaccessibles mobilise autant les triangles semblables et le théorème de Pythagore que la trigonométrie ; d'autre part, le calcul des dérivées ne sert pas qu'à déterminer des vitesses. En outre, d'autres contenus scolaires sont plus difficiles à « problématiser », par le fait que les mathématiques constitue une organisation rationnelle revisitée au cours du temps, en fonction de projets intellectuels parfois plus spéculatifs. Ainsi, la relecture, en termes de transformations, de la géométrie euclidienne a-t-elle conduit à des problèmes scolaires dont la portée est insignifiante, comme la construction d'un point par une transformation donnée. Je renvoie sur ce sujet aux observations du COJEREM [15] et [16], de même qu'à ses tentatives de rendre une certaine opérationnalité aux transformations du plan, par le biais de problèmes de constructions, et de donner un sens, à l'échelle du secondaire, à cette idée féconde qui consiste à travailler « à une transformation près ». Du pain reste donc sur la planche …

Bibliographie

[1] Bachelard G., *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, 1980, J. Vrin.

[2] Berte A., *Mathématique dynamique*, Paris, 1993, Nathan.

[3] Bloch I., *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée-université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*, Thèse de l'Université de Bordeaux I, 2000.

[4] Brousseau G., Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1983, 4-2, 165-198.

[5] Brousseau G., *La théorie des situations didactiques*, Grenoble, 1998, La Pensée sauvage.

[6] Brousseau G., Centeno J., Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1992, 11-2.3, 167-210.

[7] Brousseau N., Brousseau G., *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bordeaux, 1987, LADIST.

[8] Cazzaro J.-P., Noël G., Pourbaix F., Tilleuil P., Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes, 1, *Mathématique et Pédagogie*, 2001, 130, 39-63.

[9] Cazzaro J.-P., Noël G., Pourbaix F., Tilleuil P., Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes, 2, *Mathématique et Pédagogie*, 2001, 131, 37-54.

[10] Chevallard Y., *Pour la didactique*, Marseille, 1991, IREM.

[11] Chevallard Y., Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1992, 12-1, 72-112.

[12] Chevallard Y., L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1999, 19-2, 221-265.

[13] Chevallard Y., Mercier A., *Sur la formation du temps didactique*, Marseille, 1987, IREM.

[14] Chi M.T.H., Glaser R., Rees, E., Expertise in problem solving. In R.J. Sternberg (dir.), *Advances in the psychology of human intelligence*, 1982, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, 161-183.

[15] COJEREM, *Des situations pour enseigner la géométrie, Guide méthodologique*, Bruxelles, 1995, De Boeck et Larcier.

[16] COJEREM, *Géométrie en situations, Notions pour l'élève*, Bruxelles, 1995, De Boeck et Larcier.

[17] Comiti C., Grenier D., *Régulations didactiques et changements de contrat*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 1997, 17-3, 55-80.

[18] Docq C., *Analyse épistémologique comparative de deux enseignements de la géométrie plane vers l'âge de douze ans*, Thèse de l'Université catholique de Louvain, 1992.

[19] Fraisse P. et Piaget J., *Traité de psychologie expérimentale, tome VII L'intelligence*, Paris, 3e éd. 1980, Presses universitaires de France.

[20] Gagné E.D., *The cognitive psychology of school learning*, Boston, 1985, Little, Brown and Company.

[21] Gascon J., Evolution de la didactica de las matematicas como disciplina cientifica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1998, 18-1, 7-34.

[22] GEM, *Problèmes isopérimétriques élémentaires*, Bruxelles, 1991, Ciaco.

[23] Grenier D., *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale*, Thèse de l'Université Joseph Fourier de Grenoble, 1988.

[24] Groupe AHA, *Vers l'infini pas à pas, manuel pour l'élève*, Bruxelles, 1999, De Boeck Wesmael.

[25] Groupe AHA, *Vers l'infini pas à pas, guide méthodologique*, Bruxelles, 1999, De Boeck Wesmael.

[26] Hauchart C., Rouche N., *Apprivoiser l'infini*, Bruxelles, 1987, Ciaco.

[27] Inhelder B. et Piaget J., *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, Paris, 2^e éd. 1970, Presses universitaires de France.

[28] Laborde C, Capponi B., Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1994, 14-1.2, 165-209.

[29] Larkin J.H., McDermott J., Simon D.P., Simon, H.A., Expert and novice performance in solving physics problems, *Science*, 1980, 208, 1335-1442.

[30] Legrand, *La problématique des situations fondamentales*, Repères IREM, 1997, 27, 81-125.

[31] Mercier A., *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*, Thèse de Doctorat de l'Université de Bordeaux I, 1992.

[32] Mercier A., *Sur l'espace-temps didactique*, Note de Synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Provence, 1999.

[33] Oleron P., Les activités intellectuelles in FRAISSE P. et PIAGET J. *Traité de psychologie expérimentale*, tome VII L'intelligence, Paris, 3^e éd. 1980, Presses universitaires de France.

[34] Polya G., *La découverte des mathématiques*, Paris, 1967, Dunod.

[35] Popper K., *La logique de la découverte scientifique*, Paris, 1973, Payot.

[36] Rajoson L., *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*, Thèse de Doctorat de l'Université d'Aix-Marseille II, 1988.

[37] Robert A., *Situations-problèmes : théorie et pratique en classe de mathématiques - éléments du passage entre modélisation didactique et pratiques effectives en classe*, IUFM de Versailles, (sans date).

[38] Robert A., Lattuati M., Penninckx J., *L'enseignement des Mathématiques au Lycée, Un point de vue didactique*, Paris, 1999, Ellipses.

[39] Roegiers X., *Une pédagogie de l'intégration*, Bruxelles, 2000, De Boeck Université.

[40] Schneider M., *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, Thèse de l'Université catholique de Louvain, 1988.

[41] Schneider M., Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, *Repères IREM*, 1991, 5, 65-81.

[42] Schneider M., Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1991, 11-2.3, 241-294.

[43] Schneider M., Un fossé entre le concept d'intégrale définie et une première perception des aires et des volumes, *Mathématique et Pédagogie*, 1991, 81, 85-104.

[44] Schneider M., D'une première perception des aires et des volumes au calcul des primitives, *Mathématique et Pédagogie*, 1991, 82, 29-50.

[45] Schneider M., A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané, *Educational Studies in Mathematics*, 1992, 23, 317-350.

[46] Schneider M., Problèmes de lieux, Problèmes de construction résolus par la méthode des deux lieux, *Document d'accompagnement du Programme de Mathématiques*, 1997/0279/075A, L1-L22.

[47] Schneider M., Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques, A propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2001, 21-1.2, 7-56.

[48] Schœnfeld A.H., Teaching mathematical thinking and problem solving, In L.B. Resnick et L.E. Klopfer (dir.), *Toward the thinking curriculum : Current cognitive research*, Alexandria, VA : Association for Supervision and Curriculum Development, 1989, 83-104.

[49] Sensevy G., Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1996, 16-1, 7-46.

[50] Sfard, A., On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 1991, 22, 1-36.

[51] Tardif J., *Pour un enseignement stratégique, Les Editions Logiques*, Montréal, 1992.

[52] Tardif J., *Le transfert des apprentissages*, Les Editions Logiques, Montréal, 1999.

Les carrés des carrés, (4)

J. SEGERS,

Réflexions sur le carré magique 3×3 (C.M.) [1]

1. Pourquoi des nombres impairs?

Revenons sur ce paragraphe de la deuxième partie [2]. La conclusion en était : un carré de carrés n'a de chances d'exister que si les termes carrés, écrits en système octal, ont tous le même chiffre d'unité, soit 0, 1 ou 4.

Néanmoins, on peut atteindre une certaine régularité si on dispose les éléments de chaque espèce de manière à en rencontrer un dans chaque ligne et dans chaque colonne, comme dans l'exemple suivant :

$(j0)_{oct}$	$(k1)_{oct}$	$(l4)_{oct}$
$(n1)_{oct}$	$(p4)_{oct}$	$(q0)_{oct}$
$(r4)_{oct}$	$(s0)_{oct}$	$(t1)_{oct}$

Nous voyons que les sommes des 3 lignes se terminent par 5_{oct}, les sommes des 3 colonnes également, et même la somme de la diagonale NO-SE. Seule la somme de l'autre diagonale est différente, elle se termine par 4_{oct}, car $4_{oct} + 4_{oct} + 4_{oct} = 14_{oct}$. Si on écrit les termes dans un autre ordre, en permutant par exemple deux lignes ou deux colonnes, nous aurons toujours 7 sommes se terminant par 5_{oct}, et une se terminant par 0_{oct}, 3_{oct} ou 4_{oct}. Si maintenant, par exemple, nous remplaçons les termes se terminant par 4_{oct} par d'autres se terminant par 0_{oct}, les conclusions seraient semblables : 7 sommes de même dernier chiffre, une différente. Un tel carré de carrés n'est pas magique, mais s'en approche, nous l'appellerons presque magique (C.P.M.). Nous en trouverons par la suite.

Adresse de l'auteur: Jack Segers, Rue Hocheporte, 107/063, B4000 Liège.

[1] Les carrés de carrés (1), voir *Mathématique et Pédagogie* n° 131, p. 29-33
Les carrés de carrés (2), voir *Mathématique et Pédagogie* n° 132, p. 5.11
Les carrés de carrés (3), voir *Mathématique et Pédagogie* n° 133, p. 11-18

[2] *Mathématique et Pédagogie* n° 132, p. 9

2. La construction de progressions arithmétiques parallèles.

Le troisième chapitre de la troisième parte [3] se terminait par la construction de carrés magiques d'au moins 6 carrés avec deux progressions arithmétiques dites parallèles, c'est-à-dire de même raison. Comment les trouve-t-on ? Y aurait-il moyen d'en construire trois ?

Considérons un naturel m composé, divisible par plusieurs autres naturels et en particulier par le nombre 4. Si $n = \frac{m}{4}$ et d est un diviseur de n, alors pour $\frac{n}{d} = q$, nous aurons

$$(q+d)^2 - (q-d)^2 = [(q+d)-(q-d)] \times [(q+d)+(q-d)] = 2d \times 2q = 4n = m$$

Pour que $q-d$ soit positif, il faut que $d \leqslant q$, donc $d^2 \leqslant n$

C'est ainsi que nous trouverons des couples de carrés présentant la même différence m. Si nous trouvons deux couples avec un terme commun, nous avons 3 termes formant une P.A. de raison m. Et si nous trouvons plus d'une P.A., nous pouvons former un C.M. avec au moins 6 carrés.

Exemple : $m = 840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$, $n = \frac{840}{4} = 210$

$$\begin{array}{llll}
\frac{n}{d} = q & ,\ q \pm d & \text{donne} & (q+d)^2 - (q-d)^2 = m \\
\frac{210}{1} = 210 & ,\ 210 \pm 1 & \text{donne} & 211^2 - 209^2 = 840 \\
\frac{210}{2} = 105 & ,\ 105 \pm 2 & \text{donne} & 107^2 - 103^2 = 840 \\
\frac{210}{3} = 70 & ,\ 70 \pm 3 & \text{donne} & 73^2 - 67^2 = 840 \\
\frac{210}{5} = 42 & ,\ 42 \pm 5 & \text{donne} & 47^2 - 37^2 = 840 \quad \triangledown \\
\frac{210}{6} = 35 & ,\ 35 \pm 6 & \text{donne} & 41^2 - 29^2 = 840 \quad \lozenge \\
\frac{210}{7} = 30 & ,\ 30 \pm 7 & \text{donne} & 37^2 - 23^2 = 840 \quad \triangledown \\
\frac{210}{10} = 21 & ,\ 21 \pm 10 & \text{donne} & 31^2 - 11^2 = 840 \\
\frac{210}{14} = 15 & ,\ 15 \pm 14 & \text{donne} & 29^2 - 1^2 = 840 \quad \lozenge
\end{array}$$

On trouve deux fois un terme commun, 37^2 (signalé par $\triangledown$) et 29^2 (signalé par $\lozenge$). On trouve ainsi deux P.A. de même raison 840 :

$$1^2 — 29^2 — 41^2 \quad \text{et} \quad 23^2 — 37^2 — 47^2$$

qui ont déja servi dans le troisième chapitre [4]

[3] *Mathématique et Pédagogie* n° 133 p. 14
[4] *Mathématique et Pédagogie* n° 133 p. 17

Avec la raison 5280, on trouve de la même manière deux P.A., l'une avec trois termes pairs, l'autre avec trois termes impairs :

$$7^2 — 73^2 — 103^2 \quad \text{et} \quad 98^2 — 122^2 — 142^2$$

ce qui donne le C.M. :

142^2	7^2	24439
19159	122^2	103^2
73^2	29719	98^2

(44652)

On constate qu'il y a bien moyen de construire un C.M. avec 6 carrés, dont 3 sont impairs et 3 pairs, mais non pas deux.

Voici 3 P.A. parallèles, c'est-à-dire de la même raison 43680, dont deux comprennent des nombres pairs, et un des nombres impairs :

$$62^2 — 218^2 — 302^2 \text{ , } 103^2 — 233^2 — 313^2 \text{ ,}$$
$$334^2 — 394^2 — 446^2$$

Il y a moyen de construire 4 C.M. comprenant chaque fois 2 de ces P.A.; mais avant de construire ceux comprenant les deux P.A. à nombres pairs il faudra les simplifier au moins par 2^2. Mais construisons un carré avec les 3 P.A. :

394^2	62^2	313^2
302^2	233^2	334^2
103^2	446^2	218^2

et vérifions les sommes. Nous obtenons 7 fois $257049 = 507^2 = (3 \times 13^2)^2$ et une fois $162867 = 3 \times 233^2$ pour la diagonale NE-SO. Il s'agit donc d'un C.P.M.. **Lee SALLOWS** ([5]) exhibe un autre C.P.M. du même genre :

113^2	2^2	94^2
82^2	74^2	97^2
46^2	127^2	58^2

avec 7 sommes égales à $21609 = (3 \times 7^2)^2$ et une diagonale (NE-SO) égale à $16428 = 3 \times 74^2$.

([5]) déjà cité dans *Mathématique et Pédagogie* n° 133 p. 15

3. Le nombre 18480.

Le nombre 18480 ne semble pas être très particulier, $18480 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$. Il produit une seule P.A. que nous appelons PA_1 : 17^2 — 137^2 — 193^2, avec pour raison 18480.

Si nous multiplions par 2^2, le nouveau nombre 73920 génère $PA_1 \times 2^2$, soit 34^2 — 274^2 — 386^2 et une nouvelle PA_2 : 71^2 — 281^2 — 391^2. Avec ces deux P.A., on peut construire un C.M. :

391^2	34^2	82846
8926	281^2	386^2
274^2	156766	71^2

(236883)

Maintenant multiplions le nombre 18480 par 3^2, le nouveau nombre 166320 génère $PA_1 \times 3^2$ soit 51^2 — 411^2 — 579^2 et une nouvelle PA_3, 1457^2 — 1513^2 — 1567^2, avec lesquelles on peut construire deux C.M. :

1567^2	51^2	4409417
4243097	1513^2	579^2
411^2	4575737	1457^2

(6867507)

1395365	51^2	1513^2
1457^2	1229045	579^2
411^2	1567^2	1062725

(3687135)

Maintenant nous multiplions 18480 par 6^2 : le nouveau nombre 665280 est aussi un multiple des deux nombres précédents. Il génère donc 3 P.A. :

$PA_1 \times 6^2$: 102^2 — 822^2 — 1158^2
$PA_2 \times 3^2$: 213^2 — 843^2 — 1173^2
$PA_3 \times 2^2$: 2914^2 — 3026^2 — 3134^2

Nous pouvons construire un nouveau C.M. avec les deux dernières P.A. :

3134^2	213^2	17602703
16937423	3026^2	1173^2
843^2	18267983	2914^2

(27470028)

mais aussi un C.P.M. avec les 3 P.A. :

1173^2	102^2	3026^2
2914^2	843^2	1158^2
822^2	3134^2	213^2

avec 7 sommes de $10543009 = 3247^2 = (17 \times 191)^2$ et une diagonale se sommant à $2131947 = 3 \times 843^2$.

Je n'ai pas encore trouvé le CP idéal à 9 carrés, c'est-à-dire avec 3 P.A. parallèles et *équidistantes*.

Note : Contrairement à ce que j'ai suggéré dans *Mathématique et Pédagogie* n° 131 p. 33, il existe bien un C.M. comprenant neuf nombres premiers *consécutifs* ; il a été trouvé par un ordinateur géant, le Cray Computer installé dans un laboratoire nord-américain, et malgré ses termes de plus de 10 chiffres, il s'agit du plus simple C.M. satisfaisant à la condition imposée. Le voici :

1,480,028,201	1,480,028,129	1,480,028,183
1,480,028,153	1,480,028,171	1,480,028,189
1,480,028,159	1,480,028,213	1,480,028,141

(4,440,084,513)

écrit tel que les américains évrivent de grands nombres, et tel qu'il figure dans un article de Martin Gardner, pour le moment le mathématicien le mieux connu du monde, soit « The magic of 3×3 » dans l'ancienne revue américaine *QUAMTUM* de Janvier-Février 1996.

★ ★
★

Certains affirment que le pape est le plus grand des cardinaux ... mais d'autres font remarquer que cela ne se peut puisque chaque pape a un successeur.

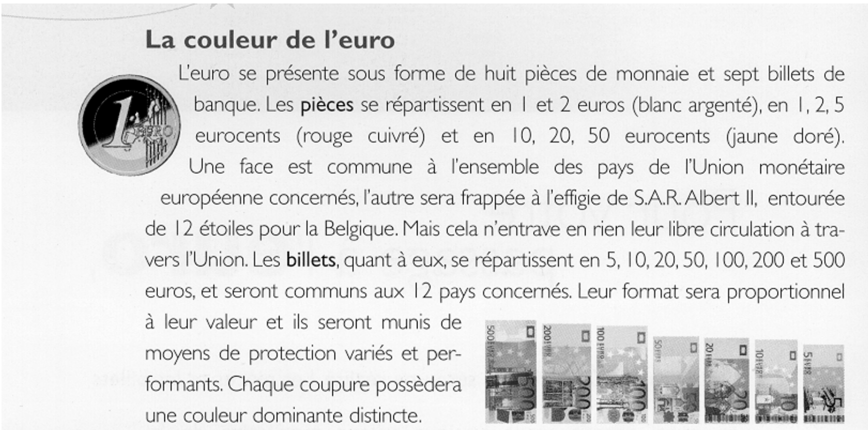
 Mathématique et Pédagogie n°137, 54–56, 2002

Situation-problème

Robert Haine

Euro-proportionnel ?

Dans un prospectus édité par la Poste ([1]), consacré au « Passage à l'euro, à la bonne heure », on peut lire : « Leur format sera proportionnel à leur valeur » ceci au sujet des nouveaux billets.



La couleur de l'euro

L'euro se présente sous forme de huit pièces de monnaie et sept billets de banque. Les **pièces** se répartissent en 1 et 2 euros (blanc argenté), en 1, 2, 5 eurocents (rouge cuivré) et en 10, 20, 50 eurocents (jaune doré). Une face est commune à l'ensemble des pays de l'Union monétaire européenne concernés, l'autre sera frappée à l'effigie de S.A.R. Albert II, entourée de 12 étoiles pour la Belgique. Mais cela n'entrave en rien leur libre circulation à travers l'Union. Les **billets**, quant à eux, se répartissent en 5, 10, 20, 50, 100, 200 et 500 euros, et seront communs aux 12 pays concernés. Leur format sera proportionnel à leur valeur et ils seront munis de moyens de protection variés et performants. Chaque coupure possèdera une couleur dominante distincte.

Outre que j'ai sursauté, je me suis dit que cela demandait vérification surtout en me basant sur la définition de « proportionnel ».

Si l'on veut bien se rappeler que deux suites de nombres sont (directement) proportionnelles lorsque le rapport de 2 nombres correspondants de chaque suite est constant, on peut calculer les rapports suivants ([2]) à propos des billets :

Adresse de l'auteur: Robert Haine, Rue de Gaillarmont, 8, 4032 - Chénée.
e-mail : robert.haine@win.be

([1]) Banque de la Poste, question de bon sens, Réf. B0503051

([2]) J'ai laissé tomber la 3e décimale, ce qui n'enlève rien au commentaire, mais flatte seulement ma paresse

Valeur du billet (€)	5	10	20	50	100	200	500
Longueur du billet (cm)	12	12.6	13.3	14	14.7	15.2	15.9
Largeur du billet (cm)	6	6.6	7.1	7.6	8.2	8.2	8.2
Demi-périmètre (cm) (3)	18	19.2	20.4	21.6	22.9	23.4	24.1
Aire (cm^2)	72	83.96	94.43	106.4	120.54	124.6	130.38
Rapport $\frac{\text{Valeur}}{\text{Longueur}}$	0.4	0.79	1.5	3.57	6.8	13.15	31.4
Rapport $\frac{\text{Valeur}}{\text{Largeur}}$	0.83	0.15	2.81	6.57	12.19	24.39	60.97
Rapport $\frac{\text{Valeur}}{\text{Demi-périmètre}}$	0.27	0.52	0.98	2.31	4.36	8.54	20.7
Rapport $\frac{\text{Valeur}}{\text{Aire}}$	0.07	0.12	0.21	0.47	0.83	1.6	3.83

Conclusion partielle : sur aucune des quatre dernières lignes n'apparaît le moindre signe d'un rapport constant ! De tous temps, nous les professeurs de Mathématiques, exigeons que nos élèves utilisent le terme propre et gardent la signification exacte de celui-ci afin de ne pas l'utiliser à tort et à travers ...Le responsable du texte en question aurait peut-être bien fait de consulter le dictionnaire à défaut de consulter son ancien professeur de Mathématiques.

Par souci de vérifier — et malgré tout de trouver — à qui les valeurs seraient proportionnelles, j'ai envisagé, comme pour les écrans TV caractérisés uniquement par la longueur de leur diagonale, qu'il y aurait proportionnalité entre les valeurs et les longueurs des diagonales des billets.

Valeur du billet (€)	5	10	20	50	100	200	500
Longueur de la diagonale (mm)	135	143	150	156	165	171	178
Rapport $\frac{\text{Valeur}}{\text{Diagonale}}$	0.037	0.069	0.13	0.32	0.606	1.16	2.8

Hélas, il n'y a pas plus de proportionnalité ici que précédemment.

Par curiosité enfin, je me suis demandé si les dimensions des billets répondaient aux critères habituellement invoqués du point de vue de l'esthétique, à savoir si le rapport $\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$ donnait ou non le fameux nombre d'or ... 1.618 ...

Valeur du billet (€)	5	10	20	50	100	200	500
Longueur de la diagonale (mm)	135	143	150	156	165	171	178
Rapport $\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$	2	1.9	1.87	1.84	1.79	1.85	1.93

(3) Pourquoi demi-périmètre et pas périmètre ? Simplement parce que c'est plus simple à calculer et que cela ne change rien au caractère de proportionnalité

Alors, là, pas de chances ! A la lecture des 5 premiers rapports, je me dis que le plus gros billet va aussi être le plus beau. Une fois de plus , j'ai déchanté.

Vous aviez dit « proportionnel » ? Bizarre, ... moi je dis bizarre.

Et si vraiment, « on » avait voulu avoir des formats « proportionnels » aux valeurs faciales des billets, on aurait obtenu, en partant du billet de moindre valeur — 5€, dont la longueur est de 12 cm —, des billets dont les longueurs respectives eussent été : 24, 48, 120, 240, 480, 960 et 2400 cm : (24 m : on l'a échappé belle !)

De la même manière, en prenant la largeur (6 cm) du billet de 5€comme point de départ, on aurait obtenu la suite des largeurs 12, 24, 60, 120, 240 et 600 cm ! Vous imaginez des billets de 6 m de large ?

Inversément, si l'on prend la longueur (15.8 cm) du billet le plus grand comme point de départ d'une suite décroissante, on arriverait à des billets dont les longueurs seraient respectivement 6.32, 3.16, 1.58, 0.63, 0.316 et pour le plus petit 0.158 cm !

Enfin pour terminer ce petit jeu, si l'on démare avec la largeur du plus grand billet (8.2 cm) et que l'on crée les largeurs proportionnelles aux valeurs faciales, on aurait eu 3.28, 1.64, 0.82, 0.328, 0.164 et 0.082 cm ! Tout cela est évidemment aussi inconcevable qu'un billet de 6 m de large !

Point encore fatigué, je me suis demandé si cette proportionnalité ne s'appliquait pas aux pièces. Armé de mon vernier, j'ai alors mesuré l'épaisseur et le diamètre de chacune des pièces. Voici les résultats, entachés éventuellement d'une légère erreur de mesure. N'ayant pas de balance de précision, je n'ai pas mesuré les poids de chacune des pièces. Avis aux lecteurs ...

Pièce	1 cent	2 cent	5 cent	10 cent	20 cent	50 cent	1€	2€
Epaisseur (mm) Diamètre (mm)	1.5 16.4	1.5 18.9	1.5 21.4	2 19.9	2.2 22.3	2.5 24.3	2.5 23.3	2.2 25.8
Rapport $\frac{\text{Valeur}}{\text{Epaisseur}}$	0.66	1.33	3.33	5	9.09	20	40 (4)	90
Rapport $\frac{\text{Valeur}}{\text{Diamètre}}$	0.06	0.1	0.23	0.5	0.89	2.05	4.29	7.75

La proportionnalité anoncée ne se rapporte donc pas non plus aux pièces !

(4) Si l'on veut observer une proportionnalité entre les nombres des deux suites, il faut bien entendu que les unités ne varient pas : on a donc remplacé respectivement 1€ et 2€ par 100 et 200 centimes.

Des Macros pour Cabri-Géomètre.

J.-P. HOUBEN, *Université Catholique de Louvain.*

Mots-clés : Cabri-Géomètre, macros, carrés, tangentes.

Lorsqu'une figure peut être construite à partir d'une série d'éléments primitifs dits *éléments initiaux* et d'une suite de constructions bien définies et d'objets de Cabri-Géomètre, on peut construire une macro. C'est ce que nous allons illustrer par quelques exemples dans cet article.

1. Construction d'un carré.

Le problème est :

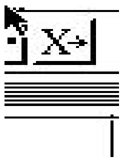
Construire un carré admettant un segment donné comme côté.

Soit un segment donné $[A, B]$. On peut d'abord construire en A la perpendiculaire au segment $[A, B]$. Puis reporter la longueur du segment sur cette perpendiculaire. Pour cela, traçons le cercle de centre A passant par B et recherchons l'intersection D de la perpendiculaire avec le cercle. On a ainsi les trois premiers sommets du carré : A, B et D.

Le quatrième sommet C peut être obtenu soit par des parallèles et leur intersection (fig. 1 p. 58), soit en recherchant le milieu de $[BD]$, puis le symétrique C de A par rapport à ce milieu (fig. 2 p. 58).

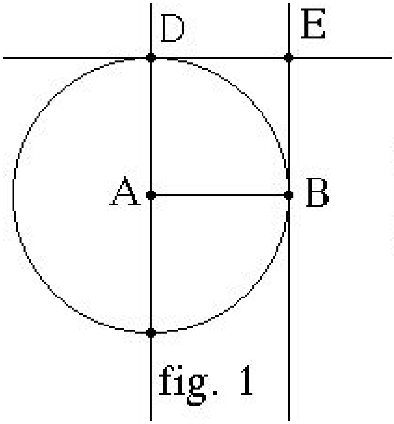
On achève la construction en traçant les segments $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$.

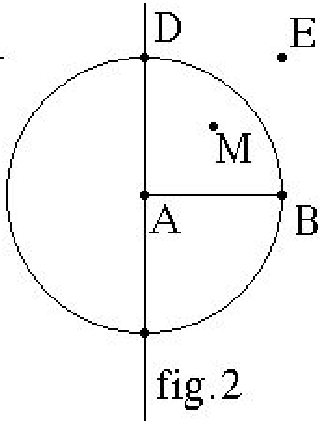
Il faut maintenant définir la macro en utilisant l'outil des macros marqué par l'icône ci-contre. Lorsqu'on clique cette icône avec la souris nous obtenons le menu de droite :



En choisissant la première option *Objets initiaux* on va, dans notre cas, désigner soit le segment, soit, ce qui est mieux, les deux sommets A et B

Adresse de l'auteur: Jean-Pol Houben, rue de l'Eglise, 78, 1301 - Bierges
e-mail : Houben@anma.ucl.ac.be





du futur carré. C'est mieux car, *dans ce cas*, on peut construire un carré en respectant l'ordre des sommets.

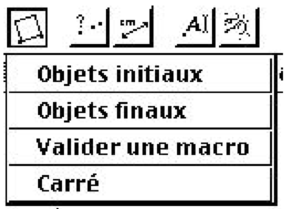
En choisissant la seconde option *Objets finaux* on va désigner pour le carré les deux autres sommets *C* et *D* et tous les segments du carré. Il faut vérifier si tous les éléments sont bien sélectionnés (*dans ce cas*, ils clignotent à l'écran).

Reste la dernière option : *Valider une macro*

Dans l'ordre, il va falloir :

- *donner un nom à la macro*,
- *construire une icône*,
- *écrire un texte explicatif*,
- *donner un nom pour l'enregistrement*.

Le nom qui va être donné à la macro, est celui qui sera utilisé dans le menu des macros.



Dans les options proposées, en choisissant **Icône** on va pouvoir dessiner point par point l'icône qui apparaîtra en regard du nom dans le menu. On pourra avoir, par exemple, plus tard :

 description soigneuse d'un exemple est de suggérer un procédé plus général

Il y a aussi un texte descriptif à écrire. Il est important de bien le rédiger car c'est celui qui apparaîtra à la demande d'aide. Pour le carré, on écrira par exemple :

`Désigner deux points A et B.`

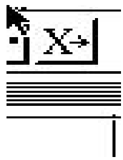
`La macro construit le carré ABCD.`

En dernier lieu, il faut donner un nom au fichier qui va être enregistré (ne pas oublier de cocher cette option avant de désigner un nom). Ce nom, de huit caractères, sera suivi automatiquement de `.MAC` au moment de l'enregistrement, alors que les dessins le sont avec le suffixe `.FIG`

Si on oublie quelque chose, il faut **tout** recommencer.

Lorsqu'une macro a été enregistrée, on la récupèrera plus tard comme on le fait pour une image en allant la chercher dans l'option **Fichier** du menu à la rubrique **Ouvrir** en choisissant le type de fichier : macros (`.MAC`) au lieu de figures (`.FIG`).

Pour vérifier que la macro est bien construite, prenons deux points S et T. Allons dans l'icône ci-contre chercher la macro *Carrée*.
Pointons S puis T. Le carré ST ... doit se dessiner.
Pointons enfin T puis S et le carré TS ... inversé se dessine maintenant.



2. Tangentes à un cercle.

Un article précédent nous a permis de construire en animation les tangentes à un cercle issues d'un point extérieur à celui-ci. Nous pouvons profiter de cette construction pour en faire maintenant une macro. Si nous reprenons la construction des tangentes, la macro va se construire comme suit :

Objets initiaux : le cercle avec son centre et le point extérieur.

Objets finaux : les deux tangentes et leur point de contact avec le cercle.

Valider une macro :
 - *nom de la macro :* Tangentes à un cercle

- *dessiner l'icône :* ([1]) voir fig. 3 p. 60
- *écrire le texte d'aide :*

```
Donner un cercle avec son centre,
puis le point d'où l'on tracera les tangentes
```

- *nom de l'enregistrement :Tgs_Cer*

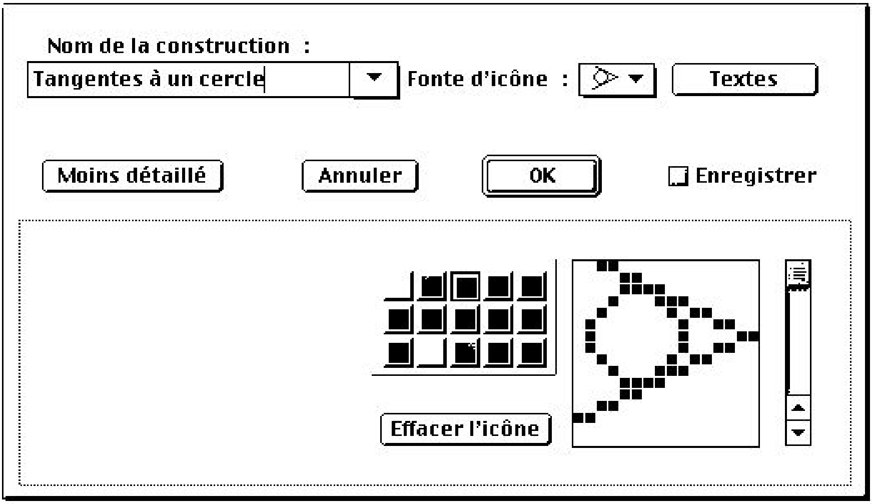


Fig. 3

3. Existe ... Si.

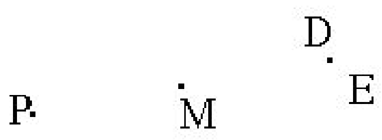
Dans l'article sur les tangentes à un cercle, nous avons rencontré plusieurs fois la même construction, à savoir :

- prendre le milieu du segment déterminé par deux points (donnés),
- rechercher le symétrique du premier point par rapport à ce milieu.

Il est possible de réaliser une macro qui dédouble un point lorsqu'on le montre en premier lieu **si** un autre point, montré en second lieu, existe. En fait le nouveau point existe **si** un autre existe. Ce sera une macro logique qui construit un point **SI** un autre existe.

([1]) L'image produite est celle du programme pour MAC. Pour PC elle sera différente suivant le cas où vous avez une version DOS ou une version Windows

Réalisons d'abord le dessin suivant : deux points que nous désignons par D et P. Le point D sera dédoublé si P existe. Constuisons le milieu M de $[D,P]$. Puis le symétrique de P par rapport à M : E.



Ensuite préparons la macro :

Objets initiaux : pointer dans l'ordre D, puis P.

Objets finaux : ici le point E.

Valider une macro :
- nom de la macro : Existe Si
- dessiner l'icône <<Si>>
- écrire le texte d'aide :
  Dédoublement du premier point désigné SI le second existe
- nom de l'enregistrement : EXIST_SI

4. Cercle passant par trois points.

On ne peut avec Cabri-Géomètre construire directement un cercle passant par trois points. Il faut d'abord rechercher deux médiatrices et leur point d'intersection. En construisant une macro, il suffira de désigner les trois points pour que le cercle se construise.

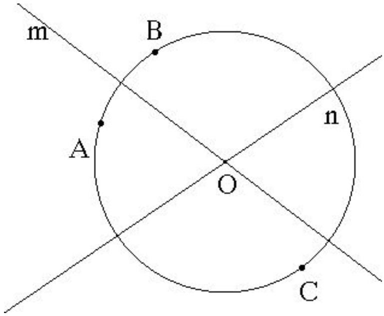
Dans un dessin préliminaire où se trouvent trois points A, B et C, construisons les deux médiatrices m et n des segments $[A, B]$ et $[B, C]$. Celles-ci se rencontrent en O centre du cercle passant par A.

Reste à définir la macro avec ces éléments.

Objets initiaux : Les trois points A, B et C.

Objets finaux : Le cercle construit avec son centre le point O.

Valider une macro :
- nom de la macro : Cercle passant par 3 pts.



- dessiner une icône représentant par exemple un cercle circonscrit à un triangle
- écrire le texte d'aide :

  Désigner trois points *A*, *B* et *C* pour construire le cercle cle passant par ces trois points.
- nom de l'enregistrement : CER_CIRC

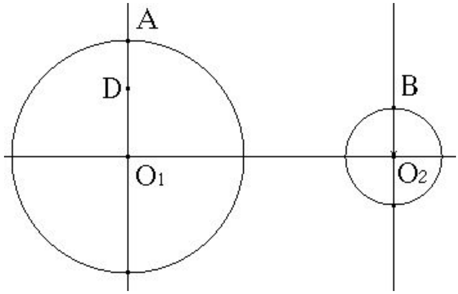
5. Tangentes à deux cercles.

On peut construire les tangentes intérieures et extérieures. Nous allons nous contenter des tangentes extérieures, l'autre construction se faisant de manière semblable. Il s'agit d'une construction plus élaborée qui va nous permettre de découvrir de nouvelles fonctions dans Cabri-Géomètre.

Pour construire les tangentes extérieures à deux cercles de rayons R_1 et R_2 $(R_1 > R_2)$, il faut construire un cercle centré au centre du grand cercle et dont le rayon est la différence des deux rayons $R = R_1 - R_2$. Puis construire les tangentes issues du centre du petit cercle au cercle de rayon R. On termine par les translatés de ces tangentes.

Premier problème : construire le rayon $R = R_1 - R_2$.

Pour calculer cette différence nous allons employer une translation. Pour toute translation, il faut définir un vecteur qui a pour origine un point de l'écran et pour extrémité son image pour la translation. Soit la figure :



Dans celle-ci, nous avons pris des rayons parallèles O_1A et O_2B. Mais pas dans une direction quelconque : les rayons O_1A et O_2B sont perpendiculaires à la droite des centres O_1O_2. Nous ne pouvions pas prendre une direction quelconque, car sinon la macro aurait été **incohérente**. L'ordinateur ne peut réaliser une direction « quelconque ». Définissons ([2]) le vecteur BO_2, et translatons ([3]) le point A suivant ce vecteur pour obtenir le point D.

O_1D est le rayon différence : $R = R_1 - R_2$

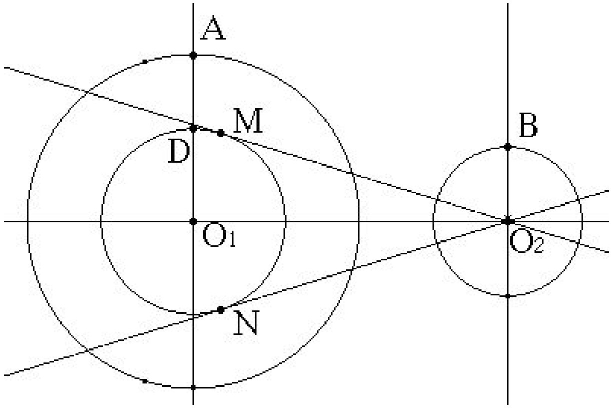
Nous devons maintenant constuire le cercle de rayon ([4]) R, et les tangentes issues du point O_2 à ce cercle. Comme nous avons une macro pour effectuer cette construction : utilisons-la.

Rappelons que, pour charger cette macro, il faut dans le menu **Fichier** prendre la rubrique **Ouvrir**, choisir le type de fichier **.MAC** et désigner le bon répertoire qui contient le fichier `Tgs_Cer.Mac`.

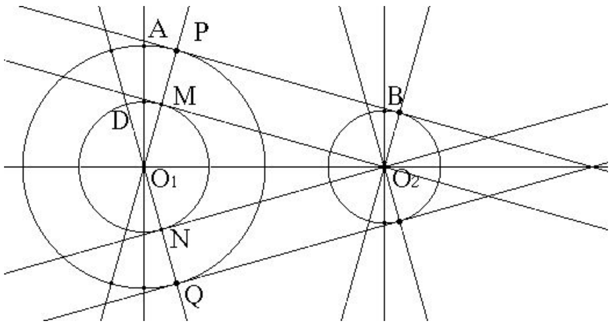
Une fois le fichier chargé, il se trouve à la dernière place après *Valider une macro*. Employons maintenent cette macro en désignant, suivant l'aide ([5]) : le cercle de rayon R, son centre O_1 puis le point O_2 d'où seront tracées les tangentes. Nous nous trouvons avec l'image :

où M et N sont les points de contacts des tangentes. Il reste à tracer les droites O_1M et O_1N et à rechercher leur intersection avec le cercle de centre O_1 donné au départ. Ce sont les points marqués : P et Q. Les tangentes recherchées sont les parallèles menées par P et Q aux tangentes constuites par la macro. Il reste à déterminer les points de contact avec le cercle de centre O_2, soit en traçant les perpendiculaires par O_2 aux tangentes, soit en traçant les parallèles aux rayons du premier cercle. On

([2]) **Droites**/ *Vecteur*
([3]) **Transformations**/ *Translation*
([4]) **Courbes**/ *Cercle*
([5]) voir la macro décrite ci-avant



termine la construction par les points d'intersection avec les tangentes. Ce qui donne la figure finale :



Le dessin étant achevé, il reste à déterminer les éléments de la macro :

Objets initiaux : Le grand cercle et son centre, puis le petit cercle et son centre.

Objets finaux : Les droites tangentes et les quatre points d'intersection

Valider une macro :
- nom de la macro : Tangentes extérieures
- dessiner une icône
- écrire le texte d'aide :

  Pour construire les tangentes extérieures à deux cercles, désigner, dans l'ordre, le grand cercle suivi du centre,

puis le petit cercle et son centre.
- nom de l'enregistrement : TGS_EXT

Problèmes.

On peut envisager d'autres macros, comme par exemple :
- Construire l'orthocentre d'un triangle (c'est-à-dire l'intersection des hauteurs).
- Construire le cercle inscrit à un triangle ABC.
- Diviser un segment en trois parties égales
- Construire un arc capable

Solutions dans un des prochains articles.

Intégrales et séries.

Prenons $x \geqslant 0$, on a

$$\cos x \leqslant 1 \Rightarrow \int_0^x \cos y \ dy \leqslant \int_0^x 1 \ dy$$

Ainsi $\sin x \leqslant x$, et donc

$$\int_0^x \sin y \ dy \leqslant \int_0^x y \ dy$$

Donc $1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$ ou encore $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x$.

En continuant avec cette technique, nous obtenons successivement les inégalités :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$$

$$x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin x \leqslant x$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{3!}$$

Les publications de l'**A**ssociation des **P**rofesseurs de **M**athématiques de l'**E**nseignement **P**ublic (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

— Les brochures signalées par * sont de publication récente.

— Le prix « *adhérent* » concerne l'A.P.M.E.P. **et la S.B.P.M.ef**.

N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix en € *sans port*	
		public	adhérent
*133	... le métier d'enseignant en maths ... au *XXI^e^* siècle	7,60	**5,35**
	Fin Ecoles élémentaires ou Collèges :		
	Fichiers Evariste : 480 problèmes, classifiés, issus de différents tournois et rallyes mathématiques		
98/132	*Ensemble :*	21,35	**15,25**
	Evaluation EVAPM 6^e^ (début Collège, 11 à 12 ans)		
112/118	2 fascicules : Analyses et résultats & Dossier professeur	14,30	**9,85**
*119	Jeux 5 (Des activités mathématiques au collège)		
	Fiches d'activités en A4, photocopiables :	11,00	**7,60**
	Collèges ou Lycées :		
451	Concours Australien de mathématiques (200 sujets)	15,85	**11,00**
551	Espaces-calculatrices : 22 séquences, 7 capacités	11,45	**10,80**
	Lycées :		
138	Statistiques en classe de seconde	8.70	**6**
	Evaluation Terminales 1999 (« Sixièmes belges ») :		
*140	- Fascicule 1 : les résultats	10,00	**7,00**
*141	- Fascicule 2 : leur analyse (mai 2002)		
*143	Enseigner les probabilités au lycée (juin 2002)		
	Lycées et au-delà :		
	Avec Cabri II, jouez et faites de la *géométrie* : (2002)		
*136	Tome 1 : 7 ch. Transformations, Systèmes articulés	10,00	**7,00**
	Tome 2 : *Géométries logique, booléenne, probabiliste et fractale* (mai 2002)		
	Tome 3 : *Géométries hyperbolique, elliptique* (Annoncé)		
	Faire de la *géométrie supérieure* en jouant avec Cabri II (1999) :		
*124	Tome 1 : points, droites, cercles et coniques		
*125	Tome 2 : cubiques (2 tomes ensemble)	17,55	**10,65**
*129	Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaire, par Mathieu SAVIN	9,90	**6,85**

PORT (prix indicatif) : 1 brochure : 2,50 €; 2 ou 3 brochures : 4,00 € et au-dessus de 3 : 6,50 €

Serveur de l'APMEP : **http://www.apmep.asso.fr**

Mathématique et Pédagogie n°137, 67–70, 2002

L'évolution des débouchés pour les licenciés en mathématique de l'ULB

L. LEMAIRE, *Université Libre de Bruxelles*

Deux études, réalisées en 1989 et en 2001 et portant chacune sur les dix dernières promotions de la licence en mathématique de l'Université Libre de Bruxelles, donnent une idée assez précise des carrières des mathématiciens et de leur évolution.

L'enquête de 1989.

Cette enquête a été réalisée par téléphone et a permis de connaître l'activité d'environ 80% des étudiants sortis entre 1980 et 1989.

Les résultats étaient les suivants :

Activité	Pourcentage
Professeur dans l'enseignement secondaire	**37 %**
Travail dans une compagnie privée	
(banque, compagnie d'assurance)	
- en Belgique	33%
- à l'étranger	2%
Total	**35 %**
Enseignant ou chercheur universitaire	
- en Belgique	14%
- à l'étranger	5%
Total	**19%**
Etudiant de troisième cycle	**4%**
Interruption de carrière ou service militaire	**5%**

Adresse de l'auteur: Luc Lemaire, Départment de Mathématique, U.L.B., C.P. 218 Campus Plaine, Université Libre de Bruxelles, 1050 Bruxelles
e-mail : llemaire@ulb.ac.be

L'enquête de 2001.

Cette enquête a été réalisée par envoi de questionnaires, ce qui a permis de poser plus de questions. Par contre, le taux de réponses était moins élevé (55%).

Les résultats sont les suivants :

Activité	Pourcentage
Professeur dans l'enseignement secondaire	**15 %**
Travail dans une compagnie privée	
- Finance ou assurance	22%
- Consultance	8%
- Industrie pharmaceutique	5%
- Informatique	3%
- Autres	3%
Total	**41 %**
Enseignant ou chercheur universitaire	
- en Belgique	32%
- à l'étranger	4%
Total	**36%**
Etudiant de troisième cycle	**7%**
Interruption de carrière	**1%**

Petit avertissement.

Dans l'enquête de 2001, le nombre de chercheurs universitaires en Belgique est probablement surévalué. En effet, le taux de réponses parmi eux a dû être plus élevé, simplement parce qu'il était plus facile de les contacter.

Notons aussi qu'il s'agit d'enquêtes sur les dix dernières promotions, et qu'une partie des enseignants ou chercheurs des universités passent plus tard dans le privé.

Quelques conclusions.

La première observation est que les licenciés en mathématique trouvent facilement du travail, dans des métiers où ils utilisent leur formation. Dans l'enquête de 2001, il apparaît que le temps moyen pour trouver un premier emploi a été de 36 jours.

Enseignement secondaire.

Les années 90 ont été des années noires pour l'enseignement en Communauté française de Belgique, autant du point de vue du financement que de l'attitude générale de la société vis-à-vis de l'école.

Le résultat est clair : on passe de 37% à 15% de licenciés en mathématique qui se tournent vers l'enseignement secondaire.

Les questionnaires de 2001 montrent en fait qu'ils sont plus nombreux à prévoir d'entrer dans l'enseignement lorsqu'ils s'inscrivent en mathématique, mais qu'ils découvrent ensuite les autres possibilités de carrières.

Espérons que le pouvoir politique et la société en général se ressaisiront et se souviendront qu'il est indispensable d'investir dans la formation des jeunes.

Travail dans une compagnie privée.

Ces métiers représentaient déjà 35% en 1989 - et on passe à 41%.

On peut aussi remarquer une plus grande variété de débouchés : si en 1989 il s'agissait surtout de mathématiques actuarielles (sociétés d'assurances), les mathématiques ont maintenant des applications directes en finance, dans l'industrie pharmaceutique (biostatistique), en consultance (recherche opérationnelle).

L'informatique ne représente que 3%.

Notons que c'est l'étude des débouchés en 1989 qui a amené le département de mathématique de l'ULB à créer une orientation « probabilité, statistique, recherche opérationnelle » qui est choisie par la moitié de nos étudiants et accélère leur démarrage dans ce secteur.

Enseignant ou chercheur universitaire.

Encore une augmentation de 19 à 36%.

Ces carrières de recherche commencent par une thèse de doctorat, réalisée en tant qu'assistant à l'université ou chercheur attaché au FNRS ou au FRIA.

Il est aussi très agréable de souligner que nos licenciés sont bien accueillis dans des programmes de doctorat des universités les plus prestigieuses. Dans les dix dernières promotions de l'ULB, on compte trois thèses terminées ou en cours à Oxford, une à Harvard et trois à Stanford !

Le niveau élevé des études en Belgique est largement reconnu internationalement.

Etudiants de troisième cycle.

Sont repris dans cette catégorie divers diplômes supplémentaires menant soit à la recherche soit à une entrée plus pointue dans le privé (actuariat, administration des entreprises, marketing et communication ...)

En résumé.

Les portes de carrières variées sont largement ouvertes aux licenciés en mathématique, et je suis convaincu qu'on pourrait doubler le nombre d'étudiants sans saturer le marché.

Il y a pour moi une question d'information : peu de rhétoriciens sont conscients de l'actualité de la recherche en mathématique, des nouvelles applications de cette science à des disciplines variées (finance, biologie, pharmacie, télécommunication, GSM, ...), de la variété des carrières offertes.

Un site (`http://www.ulb.ac.be/assoc/bms/info`) regroupe un certain nombre de ces sujets, y compris l'article « La recherche mathématique aujourd'hui » paru dans *Mathématique et Pédagogie* n° 128 (2000) 7-35.

Surprises imaginaires.

F. R. GRAAS, *Inspecteur honoraire*

1. Forme ALGEBRIQUE. ([1])

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: a) $|z| - z = 1 + 2i$ b) $|z| + z = 2 + i$ (U)
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\left|\frac{1+i\sqrt{17}}{4} - \cos x\right| < 1$ (U)
3. Les coefficients de $ax^2+bx+c = 0$ forment, dans l'ordre de l'énoncé, une progression géométrique et sont positifs. Y-a-t-il des racines réelles ? Sans résoudre, montrer que $x_1^3 = x_2^3$ et $x_1^3 = -(x_1 + x_2)^3$ (F)
4. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des racines de $x^n + nax + b = 0$, on a $\prod_{i=2}^{n}\left(\alpha_1 - \alpha_i\right) = n(\alpha_1^{n-1} + a)$ (Lg)
5. Deux progressions, l'une arithmétique et l'autre géométrique commencent par $A + Bi$ et ont le même nombre de terme. Les raisons sont i pour la première et $1 + i$ pour la deuxième. Calculer A et B si les sommes sont égales. (Lv)
6. Résoudre $\left(x^2 - a^2 + 1\right)^2 + 4a^2 = 0$ (Lv)
7. Trouver Z tel que $\overline{Z} = Z^3 - 2Z + q \quad (q \in \mathbb{R})$ (F)
8. $|\alpha\xi + \beta\eta|^2 - \left|\overline{\beta\xi} + \overline{\alpha\eta}\right|^2 = \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right)\left(|\xi|^2 - |\eta|^2\right)$ (Lg)
9. Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, démontrer $|2\alpha-\beta-\gamma|^2+|2\beta-\alpha-\gamma|^2+|2\gamma-\alpha-\beta|^2 = 3\left[|\alpha - \beta|^2 + |\beta - \gamma|^2 + |\gamma - \alpha|^2\right]$ (Lg)
10. Si $Z_1, Z_2, \cdots Z_p \in \mathbb{C}$, démontrer $\frac{\left|\sum_{k=1}^{p} Z_k\right|}{1+\left|\sum_{k=1}^{p} Z_k\right|} \leqslant \sum_{k=1}^{p} \frac{|Z_k|}{1+|Z_k|}$ (Lg)
11. Les Z étant complexes, démontrer $\left|1 - \overline{Z_0 Z}\right|^2 - |Z - Z_0|^2 = (1 - |ZZ_0|)^2 - (|Z| - |Z_0|)^2$ (Lg)
12. Calculer $\sqrt[3]{2 + 11i}$ (Lg)

Adresse de l'auteur: F. Robert Graas, Rue de Gembloux, 35, 5002 - Saint-Servais.

([1]) **voir l'annonce de cette série dans *Mathématique et Pédagogie* n° 133 page 67**

2. FORME GONIOMETRIQUE.

1. Calculer le module et l'argument de $a\frac{1+bi}{1-bi}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ (F)
2. Calculer le module et l'argument de $Z = z + iz$ si $z = \rho \text{ cis } \theta$ (EM)
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $x^6 + x^3(1+x)^3 + (x+1)^6 = 0$ (F)
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(x+ai)^2 + (x-ai)^2 = (x^2+a^2)^3$ $(a \in \mathbb{R})$ (Lg)
5. α et β étant conjugués, calculer $A = \prod_{k=1}^{n} \left(\alpha^k + \beta^k\right)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ (F)
6. Mettre sous forme goniométrique simple
   $E = [\cos\alpha + \cos\beta) + i(\sin\alpha + \sin\beta)]^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ (Lg)
7. Résoudre
   $1 + 2z + 2^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ (Lg)
8. Résoudre
   $x^4 - 4x^3 \cos a \cos b + 2x^2(1 + \cos 2a + \cos 2b) - 4x \cos a \cos b + 1 = 0$
   (Lg)
9. Factoriser successivement dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$:
   $E = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{11}$ (Lg)
10. Si α est une racine complexe 7^e de 1, $\alpha + \alpha^6$, $\alpha^2 + \alpha^5$, $\alpha^3 + \alpha^4$ sont racines de $z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$ (Lg)
11. Calculer le reste de la division de
    $(\cos a + x\sin a)(\cos b + x \sin b)\ldots(\cos l + x \sin l)$ par (x^2+1) (Lg)
12. Démonter que $D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ \cos n\theta & \cos(n+1)\theta & \cos(n+3)\theta \\ \sin n\theta & \sin(n+1)\theta & \sin(n+3)\theta \end{vmatrix}$ est divisible par
    $1 - 2x\cos\theta + x^2$ (F)
13. Démontrer que $\cos 3\theta - \cos 3\alpha$ est divisble par $(\cos\theta - \cos\alpha)$, par $\left(\cos\theta - \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$ et par $\left(\cos\theta - \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)\right)$. Trouver le quotient de l'expression initiale par le produit des trois diviseurs. (Lg)
14. Calculer $S = \sum_{p=0}^{n} \cos px \sin(n-p)x$ (Lg)
15. Résoudre $\left(x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}\right)^{n+1} - \left(x - \sqrt{x^2-\alpha^2}\right)^{n+1} = 0$ (Lg)
16. Démontrer que z et z' étant deux nombres complexes quelqconques, on a $|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} - \sqrt{zz'}\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + \sqrt{zz'}\right|$ (Lg)

3. Forme GEOMETRIQUE.

1. Si ω est un nombre complexe de module 1, quel est le lieu de l'image de $z = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$? (Lg)
2. Trouver $z = x + yi$ tel que i, z et iz forment un triangle équilatéral. (F)
3. On considère un point M situé sur le cercle $(O, 1)$ dans XOY orthonormé. Soit Z son affixe, on pose $\widehat{OX, OM} = \alpha$ avec $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Calculer le module et l'argument de $Z = 1+z+z^2$. Donner une construction géométrique simple de M' image de Z. (F)
4. On donne l'équation $z^3 - z^2(1 + a + ia) + az(1 + i + ia) - ia^2 = 0$ Trouver a pour que les 3 racines forment un triangle équilatéral. (F)
5. Calculer $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left| a + b\omega^k \right|^2$ où a et $b \in \mathbb{C}$ et $\omega^n = 1$ $(\omega \neq 1, n \in \mathbb{N})$ représenter géométriquement. (Lg)
6. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ et $\frac{z-z_1}{z-z_2} = \lambda\alpha$, trouver le lieu de z (Lg)
7. Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ et si $\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma} : \frac{\delta-\alpha}{\delta-\gamma}$ ([2]) est réel, les images de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont concycliques (Lg)
8. Calculer l'orthocentre du triangle $\operatorname{cis}\alpha$, $\operatorname{cis}\beta$, $\operatorname{cis}\gamma$ (Lg)
9. Etudier les transformations du plan complexe données par :
   (a) $Z = z_1(z + z_2)$
   (b) $Z = z_1 z + z_2$ (z_1 et z_2 sont fixes) (F)
10. On donne $A \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On demande $z' \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{z'}{z} + \frac{z}{z'} = 2A$. Représenter dans le plan. (F)
11. Donner le lieu de l'image de $z \in \mathbb{C}$ si $|z^2 + 1| = 1$ (F)
12. Calculer $z \in \mathbb{C}$ si $|z + z^3| = 2$ (F)

([2]) = rapport anharmonique

4. HORS SERIE.

1. Démonter que $\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ (Lg)
2. Démontrer que
$$\left(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots\right)^2 + \left(C_n^1 + C_n^4 + \cdots\right)^2 + \left(C_n^2 + C_n^5 + \cdots\right)^2 = \frac{1}{3}(4^n + 2)$$
(Lg)
3. Dans le plan d'Argand, on prend OA sur OX puis AB perpendiculaire à OB avec $\widehat{OA, OB} = \frac{2\pi}{n}$, puis BC perpendiculaire à OC avec $\widehat{OB, OC} = \frac{2\pi}{n}$, etc. Calculer la somme des longueurs $AB + BC + \cdots + KL$ où L est sur OX. (Le « myosotis »). (Lg)

Références.

EM	:	Ecole Royale Militaire
F	:	Hautes Ecoles Françaises
Lg	:	Faculté des Sciences Appliquées - Université de Liège
Lv	:	Faculté des Sciences Appliquées - Université de Louvain
U	:	Ex - URSS

Internet Corner.

Nous avons découvert $M\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma$. Ce site propose des animations comme supports de notions mathématiques. Il utilise abondamment les appliquettes *Java*; il est donc préférable d'avoir un navigateur récent. On doit ce merveilleux site à Jean-Paul Quelen, professeur de mathématique au Lycée Jean Monnet de Strasbourg.
Le niveau mathématique de chaque dossier (Géométrie, Analyse, Probabilité, Fractales, Equations différentielles, Courbes planes, Logiciel GAVA,...) a été précisé mais rien ne vous empêche, si vous êtes amateurs de dessins animés (?) d'aller explorer ces dossiers car un parcours pour les non scientifiques a été prévu.

Vous le trouverez à l'adresse `http://perso.wanadoo.fr/jpq/`

Dans nos classes

Yolande Noël-Roch

Voici dix enoncés tirés du livre de Gérard **Charrière** « L'algèbre, mode d'emploi ». Cet ouvrage a été signalé dans la rubrique *Bibliographie* de *Mathématique et Pédagogie* n° 131 (mars-avril 2001). Ils sont regroupés en deux exercices proposés en page 262.

1. Le carré d'un nombre pair est un multiple de 4.
2. Le carré d'un nombre impair donne un reste 1 lorsqu'on le divise par 8.
3. Soit trois nombres entiers consécutifs. Le carré du deuxième, diminué de 1, est égal au produit des deux autres.
4. Pour élever au carré un nombre qui se termine par 5, on multiplie le nombre de ses dizaines par le nombre de ses dizaines augmenta de 1 ; le produit obtenu donne le nombre des centaines du résultat cherché ; il suffit alors d'ajouter 25.
5. Un carré parfait possède un nombre impair de diviseurs.
6. On enlève 1 à un carré impair puis on divise par 2 ; on ajoute 1 au quotient obtenu. Le résultat est la somme des carrés de deux nombres impairs consécutifs.
7. Tout multiple de 8 est la différence des carrés de deux nombres impairs consécutifs.
8. Tout nombre impair est le différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs.
9. $n^2 + (n+1)^2 + n^2 \times (n+1)^2$ est un carré parfait.
10. La somme des carrés de deux nombres impairs n'est pas un carré parfait.

J'ai choisi cette (longue ?) série d'exercices à cause de l'adaptabilité qu'elle permet à tous les niveaux des premières années du secondaire.

1. En troisième année.

Proposée sous la forme ci-dessus, elle permet de tester le niveau atteint par les élèves à comprendre le sens d'une proposition énoncée dans

Adresse de l'auteur: Yolande Noël-Roch, 86 rue de la Culée, 6927 Resteigne

une forme aussi proche que possible du langage — dit — courant. Cette compréhension étant contrôlée par la capacité de traduire la proposition sous une forme algébrique. Il restera encore à maîtriser suffisamment le calcul littéral pour démontrer l'exactitude de la proposition. Voici donc une activité fondamentale dans l'apprentissage du raisonnement (mathématique et autre!). L'intérêt du paquet de dix énoncés serait de laisser à chaque élève un travail à sa portée, en laissant les plus futés aller le plus loin possible. Dans l'autre sens, des élèves bloqués devant les énoncés pourraient avoir besoin d'exemples pour comprendre la signification des propositions, pour prolonger les exemples numériques et seulement ensuite induire une généralisation. Ces cas correspondent à ce qui va être envisagé dans les première et deuxième années.

Les notions à traduire de leur forme « littéraire » à une forme « littérale » (ou « algébrique ») sont

— un nombre pair (ou impair).
— des entiers successifs.
— somme, différence, produit, quotient.
— des nombres impairs successifs.
— existence d'un nombre qui ...
— inexistence d'un nombre qui ...

Le problème d'inexistence étant l'os à ronger pour les élèves les plus rapides et les plus astucieux?

L'exercice 2 teste l'efficacité de l'alternance impair-pair dans la succession des entiers, l'exercice 5 met en évidence l'intérêt de la décomposition en facteurs premiers pour évaluer le nombre de diviseurs d'un naturel. Enfin, carré d'un produit, d'une somme et factorisation viennent à bout de toutes les justifications.

2. En première et deuxième années.

Dès la première année, les exercices 1, 2, 3, 4 et 8 présentés différemment conduisent à

— prendre conscience d'une propriété
— induire une généralisation
— « algébriser » la propriété
— convaincre de la validité de la propriété
— introduire la mise en évidence

— introduire le carré d'une somme
— exploiter le système de numération décimale

2.1. Exemple de l'exercice 2.

Complète le tableau suivant

			Division de $(2n+1)^2$ par 8	
n	$2n+1$	$(2n+1)^2$	quotient entier	reste
1	3	9	1	1
2	5			
3				
4				
5				

Des conjectures peuvent ensuite être élaborées collectivement.

Si certaines sont fausses, elles donneront de belles occasions de jouer le jeu du contre-exemple. L'analyse avec toute la classe doit conduire progressivement à une formulation proche de celle qui est fournie comme énoncé 2 en début d'article.

Enfin, l'algébrisation et le calcul de $(2n+1) \times (2n+1)$ conduisent à $4n^2+4n+1$. Le plus délicat reste à faire découvrir
— « le reste est 1 » est synonyme de « $4n^2+4n$ est multiple de 8 »
— $4n^2+4n = 4n(n+1)$ et un des facteurs n ou $n+1$ est multiple de 2.

2.2. Exemple de l'exercice 8.

Complète le tableau suivant

nombre impair	différence de carrés
$1 = 2 \times 0 + 1$	$1 = 1^2 - 0^2$
$3 = 2 \times 1 + 1$	$3 = 2^2 - 1^2$
$5 = 2 \times 2 + 1$	
$7 = \dots$	
$11 = \dots$	
$21 = \dots$	

Que remarques-tu à propos des deux nombres dont on calcule les carrés ?

A partir des exemples, complète l'égalité $2n+1 = (\qquad)^2 - (\qquad)^2$

Comme dans l'exercice 2, la fin consistera à écarter les conjectures fausses ... et à justifier la bonne. Une fois encore, les élèves auront eu l'occasion de **construire** des égalités littérales. Cela semble indispensable pour assimiler petit à petit l'usage des lettres en mathématique.

2.3. En troisième année et au-delà

Les exercices 5, 7—9, et 10 sont intéressants pour des raisons diverses.

En bref, l'exercice 5 montre l'intérêt de la factorisation car si $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors n admet $(a_1+1)\times(a_2+1)\times\cdots\times(a_k+1)$ diviseurs.

Comme tous les exposants des facteurs premiers sont pairs dans la décomposition d'un carré parfait, le nombre de ses diviseurs est donné par un produit de nombres impairs ... ce produit est donc impair.

Les exercices 7, 8 et 9 posent tous un **problème d'existence**. Avec une bonne maîtrise des produits remarquables, le flair donne une réponse immédiate. Sinon, diverses approches sont fructueuses

- pour mémoire, la recherche sur des cas particuliers, la conjecture, la preuve
- la recherche d'un nombre x tel que $8n = (2x+1)^2 - (2x-1)^2$ pour l'ex. 7, le traitement analogue de $2n+1 = (x+1)^2 - x^2$ pour l'ex. 8.
- L'exercice 9 conduit à un éclatement des termes qui doit être suivi de la phase plus difficile d'une factorisation qui doit être maîtrisée pour atteindre une écriture du type annoncé (ici le carré de n^2+n+1). Ce genre de jonglerie n'est facile que pour une minorité d'élèves.

L'exercice 10 pose un **problème d'inexistence**. Cette fois, plus question d'illustrer, nous n'échappons pas au besoin de **démontrer**. De plus, ce genre de démonstration par l'absurde est courte et j'espère qu'elle peut être comprise ... au moins par certains élèves à ce niveau.

Supposons en effet avoir découvert un carré parfait, soit x^2 qui est la somme des carrés de deux nombres impairs, soit $2n+1$ et $2k+1$. Nous aurions ainsi

$$x^2 = (2n+1)^2 + (2k+1)^2$$

Le second membre de l'égalité étant un nombre pair, x^2 l'est aussi. Mais alors x contient un facteur 2 et x^2 est multiple de 4. Cette propriété est incompatble avec une égalité tirée de la précédente, qui donne un premier membre multiple de 4 :

$$x^2 - 4n^2 - 4n - 4k^2 - 4k = 2$$

Olympiades

C. Festraets

Voici les solutions des problèmes proposés au second jour de l'Olympiade Mathématique Internationale de 2001. ces solutions sont dues à Pierre Bornsztein de Pontoise (France).

Problème 4

Soit n un entier impair strictement supérieur à 1, et k_1, k_2, ... , k_n des entiers donnés. Pour chacune des $n!$ permutations $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, on pose

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$

Montrer qu'il existe deux permutations b et c distinctes, telles que $n!$ divise $S(b) - S(c)$.

Solution

Par l'absurde : supposons que deux permutations distinctes quelconques aient des restes différents modulo $n!$.

Soit σ l'ensemble des $n!$ permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$, et

$$S = \sum_{a \in \sigma} S(a)$$

Alors :

$$\begin{aligned} S &= (1 + 2 + \dots + n!)(\bmod n!) \\ &= \frac{n!(n!+1)}{2}(\bmod n!) \\ &= \frac{n!}{2}(\bmod n!) \end{aligned}$$

en particulier, $S \neq 0(\bmod n!)$.

Adresse de l'auteur: Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C.Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse e-mail festraetscl@brutele.be.

Mais on a aussi :

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{a\in\sigma}\sum_{i=1}^{n} k_i a_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(k_i\left(\sum_{a\in\sigma} a_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_i\,(1\times(n-1)! + 2\times(n-1)! + \cdots \; + n\times(n-1)!)
\end{aligned}
$$

(car, pour $1 \leqslant i, p \leqslant n$ fixés, il y a exactement $(n-1)!$ permutations telles que $a_i = p$)

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{n+1}{2} n! \sum_{i=1}^{n} k_i \\
&= 0(\mod n!) \quad \text{, puisque n est impair}
\end{aligned}
$$

D'où contradiction.

Par suite, il existe deux permutations distinctes, notées b et c, telles que $S(b) = S(c)(\mod n!)$, c'est-à-dire $S(b) - S(c)$ est divisible par $n!$

Problème 5

Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ rencontre BC en P, et la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ rencontre CA en Q. On sait que l'angle $\widehat{BAC}$ a pour valeur 60^o et que $AB + BP = AQ + BQ$. Quelles sont les valeurs possibles des angles du triangle ABC ?

Solution

On va prouver que $\widehat{ABC} = 80^o$ et $\widehat{ACB} = 40^o$.

Soient $X \in [AB)$ tel que $AX = AB+BP$, et $Y \in [AC)$ tel que $AY = AQ+QB$. Donc $BX = BP$ et $QY = BQ$.

Les triangles APX et APY ont le côté AP en commun et $AX = AY$; de plus $\widehat{XAP} = \widehat{PAY}$, donc les triangles APX et APY sont isométriques. En particulier, on a alors

$$\widehat{AXP} = \widehat{AYP} \tag{1}$$

Le triangle BXP étant isocèle en B, on a :

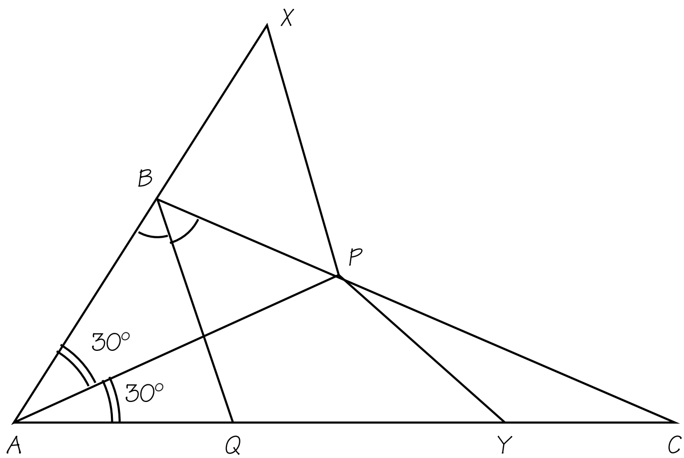
$\widehat{AXP} = \widehat{BXP} = \frac{180^\circ - \widehat{XBP}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{QBP}$,

d'où $\widehat{AYP} = \widehat{QBP}$.

La loi des sinus dans les triangles BPQ et PQY conduit alors à :

$\frac{BQ}{\sin\widehat{BPQ}} = \frac{PQ}{\sin\widehat{QBP}} = \frac{PQ}{\sin\widehat{QYP}} = \frac{QY}{\sin\widehat{QPY}} = \frac{BQ}{\sin\widehat{QPY}}$

D'où $\sin\widehat{BPQ} = \sin\widehat{QPY}$.



Cas 1 : si $\widehat{BPQ} = \widehat{QPY}$

Alors les triangles BPQ et YPQ sont semblables. En particulier, on a $\widehat{BQP} = \widehat{PQY}$. Le point P appartient donc à la bissectrice extérieure de $\widehat{AQB}$. Comme il appartient aussi à la bissectrice intérieure de $\widehat{BAQ}$, c'est donc le centre du cercle exinscrit par rapport à l'angle A dans ABQ. Mais alors P appartient aussi à la bissectrice extérieure de $\widehat{ABQ}$.

Les bissectrices intérieure et extérieure étant perpendiculaires, on a $\frac{1}{2}\widehat{ABQ} + \widehat{QBP} = 90^\circ$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 90^\circ$, soit donc $\widehat{ABC} = 120^\circ$.

Mais puisque $\widehat{BAC} = 60^o$, on a alors $\widehat{ACB} = 0^o$. *Contradiction !*

Cas 2 : si $\widehat{BPQ} = 180^o - \widehat{QPY}$

Alors les points B, P, Y sont alignés. C'est-à-dire $Y = C$.

Et la relation 1 conduit à $\widehat{ACB} = \widehat{CBQ} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$.

Puisque $\widehat{BAC} = 60^o$, on en déduit que $\widehat{ABC} = 80^o$ et $\widehat{ACB} = 40^o$.

Réciproquement :

si $\widehat{BAC} = 60^o$, $\widehat{ABC} = 80^o$ et $\widehat{ACB} = 40^o$

La loi des sinus dans ABP conduit facilement à : $AB + BP = AB\left(1 + \frac{\sin 30^o}{\sin 70^o}\right)$

et dans ABQ à : $AQ + QB = AB\left(\frac{\sin 40^o}{\sin 80^o} + \frac{\sin 60^o}{\sin 80^o}\right)$.

Il s'agit de vérifier que

$\sin 70^o(\sin 40^o + \sin 60^o) = \sin 80^o(\sin 70^o + \sin 30^o)$

Or :

$$\begin{aligned}\sin 70^o(\sin 40^o + \sin 60^o) &= 2\sin 70^o \sin 50^o \cos 10^o \\ &= \sin 50^o(\sin 80^o + \sin 60^o)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin 80^o(\sin 70^o + \sin 30^o) &= 2\sin 80^o \sin 50^o \cos 20^o \\ &= \sin 50^o(\sin 100^o + \sin 60^o)\end{aligned}$$

Comme $\sin 80^o = \sin 100^o$, le résultat est assuré.

Problème 6

Soient a, b, c, d des entiers tels que $a > b > c > d > 0$.

On suppose que $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$.

Montrer que $ab + cd$ n'est pas un nombre premier.

Solution

Soient a, b, c, d des entiers tels que $a > b > c > d > 0$.

La condition $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$ est équivalente à $b^2 + d^2 - a^2 - c^2 + bd + ac = 0$.

Cela entraîne que

$$\begin{aligned}(a+c-b+d)(a+c+b-d) &= a^2+c^2-b^2-d^2+2bd+2ac\\ &= 3(ac+bd)\\ &= 3(b+d+a-c)(b+d-a+c)\end{aligned}$$

Posons $s = a + b + c + d$, $x = s - 2a$, $y = s - 2b$, $z = s - 2c$, $t = s - 2d$.

Il est clair alors que x, y, z, t sont des entiers deux à deux distincts et de même parité, que y, z, $t > 0$ (puisque $a > b$, c, d), et que $3xz = yt$ (ce qui conduit à $x > 0$). De plus $4(ab + cd) = (s - x)(s - y) + (s - z)(s - t)$.

Donc, après développement et comme $x+y+z+t = 2s$, on a : $4(ab+cd) = xy + zt$.

Il s'agit donc de prouver que $p = \frac{xy+zt}{4}$ n'est pas premier.

On va prouver cela sans utiliser la relation d'ordre entre x, y, z et t qui est induite de celle portant sur a, b, c, d. Notons qu'alors y et t jouent des rôles symétriques.

De $3xz = yt$, on déduit que y ou t est divisible par 3. Par exemple, $y = 3k$, avec $k > 0$ entier. Et donc $xz = kt$.

Posons $\frac{x}{k} = \frac{t}{z} = \frac{u}{v}$ où u, $v \in \mathbb{N}^*$ et $u \wedge v = 1$.

Alors il existe m, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = mu$, $k = mv$, $t = nu$ et $z = nv$.

D'où $p = \frac{uv(3m^2+n^2)}{4}$.

- Si x, y, z, t sont tous impairs, alors u, v, m, n sont impairs. Ainsi p n'est premier qu'à la condition $u = v = 1$. Mais alors cela contredit le fait que $z \neq t$.
- Si x, y, z, t sont tous pairs, alors on pose $x = 2x'$, $k = 2k'$, $z = 2z'$, $t = 2t'$.
  On a alors $x'z' = k't'$, d'où l'on déduit comme précédemment que $x = m'u'$, $k = m'v'$, $t = n'u'$, $z = n'v'$, avec m', n', u', $v' \in \mathbb{N}^*$.
  Or $p = \frac{xy+zt}{4} = 3x'k' + z't' = u'v'(3(m')^2 + (n')^2)$.
  Puisque $3(m')^2 + (n')^2 > 1$, on ne peut avoir p premier que si $u' = v' = 1$, ce qui amène à la même contradiction que ci-dessus.

La conclusion s'en suit.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets

Plus petit dénominateur

Problème n° 256 de *Mathématique et Pédagogie* n° 134.

Il existe une infinité de fractions dont le carré est compris entre 11 et 12. Trouver parmi ces fractions celle qui a le plus petit dénominateur.

Solution de A. PATERNOTTRE de Boussu

Soit $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}_0$) une fraction telle que $11 \leqslant \left(\frac{p}{q}\right)^2 \leqslant 12$.

Ces inégalités peuvent encore s'écrire :

$$11q^2 \leqslant p^2 \leqslant 12q^2 \qquad (1)$$

Cherchons des nombres naturels p satisfaisant à 1 :

- Si $q = 1$, alors $(1) \Leftrightarrow 11 \leqslant p^2 \leqslant 12$
  Aucun nombre naturel n'a son carré compris entre 11 et 12. Donc $q \neq 1$.
- Si $q = 2$, alors $(1) \Leftrightarrow 44 \leqslant p^2 \leqslant 48$
  Aucun nombre naturel n'a son carré compris entre 44 et 48. Donc $q \neq 2$.
- Si $q = 3$, alors $(1) \Leftrightarrow 99 \leqslant p^2 \leqslant 108$
  Seul le nombre naturel 10 a son carré compris entre 99 et 108. Dès lors $\frac{p}{q} = \frac{10}{3}$.

Remarque de M. COYETTE de Rixensart

D'autres fractions dont le carré se trouve entre 11 et 12 peuvent être trouvées en cherchant les solutions entières de l'équation $a^2 - 11b^2 = 1$.

Ces solutions sont données par $\begin{pmatrix} 10 & 33 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont des entiers solutions de l'équation.

En effet,

$$(10a + 33b)^2 - 11(3a + 10b)^2$$

Adresse de l'auteur: Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C.Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse e-mail festraetscl@brutele.be.

$$
\begin{aligned}
&= 100a^2 + 1089b^2 + 660ab - 99a^2 - 1100b^2 - 660ab \\
&= a^2 - 11b^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Ainsi, en partant de la solution $\frac{10}{3}$, on obtient

$\begin{pmatrix} 10 & 33 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 199 \\ 60 \end{pmatrix}$, ce qui donne la fraction $\frac{199}{60}$.

De même, $\begin{pmatrix} 10 & 33 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 199 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3970 \\ 1197 \end{pmatrix}$.

La solution suivante donnée par cette matrice sera $a = 79201$ et $b = 23880$. Il est ainsi possible de construire une infinité de fractions dont le carré est de plus en plus proche de 11.

De nombreuses autre fractions existent. Par exemple, $\frac{17}{5}$, $\frac{24}{7}$, $\frac{31}{9}$, $\frac{37}{11}$, $\frac{38}{11}$, ...

Bonnes solutions aussi de J. ANSEEUW de Roeselare, P. BORNSZTEIN de Pontoise, P. DASSY de Liège, P. DUPONT de Grez-Doiceau, J. FINOULST de Diepenbeek, B. LOISEAU de Mouscron et J. RASSE de Méan.

Racines

Problème n° 257 de Mathématique et Pédagogie n° 134.

Prouver que si a et b sont deux racines de $x^4 + x^3 - 1 = 0$, alors ab est racine de $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$.

Solution de P. BORNSZTEIN de Pontoise (France)

On note a, b, c, d les quatre racines de $P(x) = x^4 + x^3 - 1$.

Soient $p = ab$, $q = a + b$, $r = cd$, et $s = c + d$.

Alors, d'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme,

on a : $\left\{\begin{array}{rcll} 1 &=& -(a+b+c+d) = -q - s & (1) \\ 0 &=& ab + bc + cd + da + ac + bd = qs + p + r & (2) \\ 0 &=& abc + bcd + cda + abd = ps + qr & (3) \\ -1 &=& abcd = pr & (4) \end{array}\right.$

De (1) et (4), on déduit que $s = -1 - q$ et $r = -\frac{1}{p}$.

Alors (2) et (3) s'écrivent :

$0 = q(-1-q) + p - \frac{1}{p}$ et $0 = p(-1-q) - \frac{q}{p}$

c'est-à-dire $q(1+q) = p - \frac{1}{p}$ et $q = -\frac{p^2}{1+p^2}$

d'où $-\frac{p^2}{1+p^2}(1 - \frac{p^2}{1+p^2}) = p - \frac{1}{p}$

ce qui donne $p^6 + p^4 + p^3 - p^2 - 1 = 0$.

Solution de P. DUPONT de Grez-Doiceau

Il faut d'abord apporter à l'énoncé une petite précision : « Si a et b sont deux racines distinctes de $x^4 + x^3 - 1 = 0$, alors ... »; en effet, $x^4 + x^3 - 1 = 0$ a une racine voisine de 0,819173 dont le carré n'est pas racine de $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$.

Le reste est juste un petit chipotage sur les polynômes symétriques. Soit a, b, c et d les quatre racines de $x^4 + x^3 - 1 = 0$; posons $p = abcd$, $q = abc + abd + acd + bcd$, $r = ab + ac + ad + bc + bd + cd$ et $s = a + b + c + d$; nous savons que ces quatre expressions sont alternativement égales et opposées aux coefficients de l'équation : $p = -1$, $q = r = 0$, $s = -1$.

Posons encore $A = ab$, $B = ac$, ... , $F = cd$.

Pour former l'équation $x^6 - Ux^5 + Tx^4 - Sx^3 + +Rx^2 - Qx + P = 0$ dont ces six nombres sont les racines, calculons :

$$\begin{aligned}
P &= ABCDEF \\
&= abacadbcbdcd \\
&= (abcd)^3 \\
&= -p^3 \\
&= -1 \\
Q &= ABCDE + ABCDF + ABCEF + ABDEF + ACDEF + BCDEF \\
&= abacadbcbd + \cdots + acadbcbdcd \\
&= (abcd)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\
&= p^2 r \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$R = ABCD + ABCE + \cdots + CDEF \qquad [15 termes]$$

$$
\begin{aligned}
&= abacadbc + abacadbd + \cdots + adbcbdcd\\
&= abcd(a^2bc + a^2bd + \cdots + bcd^2 + 3abcd)\\
&= p(rs - p)\\
&= -1\\
S &= ABC + ABD + \cdots + DEF \qquad\qquad [20 termes]\\
&= abacad + abacbc + \cdots + bcbdcd\\
&= abcd[(a + b + c + d)2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)]\\
&\qquad\qquad +(abc + abd + acd + bcd)2\\
&= p(s^2 - 2r) + q^2\\
&= -1\\
T &= AB + AC + \cdots + EF \qquad\qquad [15 termes]\\
&= abacad + abacbc \cdots + bcbdcd\\
&= (a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) - abcd\\
&= rs - p\\
&= 1\\
U &= A + B + C + D + E + F\\
&= ab + ac + ad + bc + bd + cd\\
&= r\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Nous obtenons donc l'équation $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$.

J'ai aussi reçu de **bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare, M. COYETTE de Rixensart, P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek, P. LE GALL de Metz, B. LOISEAU de Mouscron, A. PATERNOTTRE de Boussu et J. RASSE de Méan**.

Un tas de briques

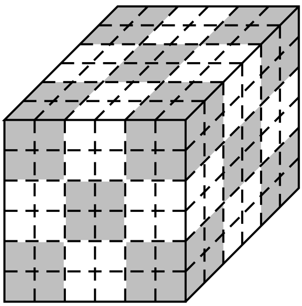
Problème n° 258 de Mathématique et Pédagogie n° 134.

Est-il possible de remplir un cube $6 \times 6 \times 6$ avec des briques $1 \times 2 \times 4$?

Solution de B. LOISEAU de Mouscron

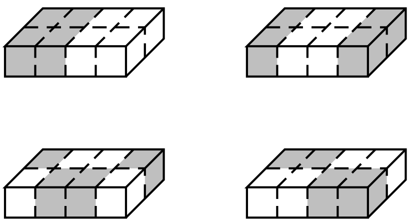
Il n'est pas possible de remplir un cube $6 \times 6 \times 6$ avec des briques $1 \times 2 \times 4$.

En effet imaginons que ce soit possible. On peut alors considérer notre cube comme un assemblage de cubes $1 \times 1 \times 1$; de même, les briques peuvent être considérées comme des assemblages de 8 tels cubes. Si nous travaillons avec de tels petits cubes unitaires de deux couleurs, les uns gris, les autres blancs, il est évidemment possible (si on peut construire un cube avec de telles briques) de constituer un cube avec une répartition de cubes unitaires gris et blancs choisie arbitrairement. Par exemple celle-ci :



les cubes unitaires gris et blancs étant regroupés par huit pour former des cubes $2 \times 2 \times 2$ monochromes. Dans un tel assemblage, on note qu'il y a plus de cubes gris que de blancs (14 cubes $2 \times 2 \times 2$ gris contre 13 blancs).

Or si à l'intérieur d'un tel assemblage on regroupe des cubes pour former des briques $1 \times 2 \times 4$, on voit facilement que c'est nécessairement selon une des configurations suivantes, à l'orientation près :



Et que dès lors il y a dans chaque brique autant de cubes unitaires blancs que de gris : donc on ne peut reconstituer le cube entier avec ces briques puisqu'on n'arrivera jamais à obtenir plus de cubes gris que de blancs.

Les lecteurs suivants ont aussi envoyé des **solutions correctes : J. ANSEEUW de Roeselare, P. BORNSZTEIN de Pontoise, P.DUPONT de Grez-Doiceau, J. FINOULST de Diepenbeek, A. PATERNOTTRE de Boussu et J. RASSE de Méan**.

★ ★
★

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir avant le 1er novembre 2002.

265. Un, deux, trois, ...

a, b, ... , n sont des naturels distincts dont le plus grand facteur premier est 3. Démontrer que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{n}<3$$

266. Des carrés.

Montrer que si $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ et $A_3B_3C_3D_3$ sont trois carrés, les centres de gravité $A_GB_GC_GD_G$ des triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ et $D_1D_2D_3$ sont également les sommets d'un carré.

(énoncé proposé par P. DUPONT)

267. Moyenne géométrique.

Soient Γ le cercle inscrit au triangle ABC et Γ_A le cercle exinscrit dans l'angle A de ce triangle. Démontrer que la moyenne géométrique des rayons de Γ et de Γ_A est inférieure à la longueur du côté $[BC]$.

Bibliographie

J. Miewis

M. Castiaux, Ph. Close et R. Janssens, *Mathématiques : des situations pour apprendre*, De Boeck, Bruxelles, 2001, ISBN: 2-8041-3785-6.

Conforme aux nouveaux programmes, cette nouvelle collection est rédigée dans l'esprit des *socles de compétence* et de *l'enseignement en spirale*.

Un cahier d'activités — présenté sous forme de feuilles détachables préperforées — propose aux élèves de nombreuses situations dans le but de développer chez eux des activités de découvertes, d'entrainement et de recherche.

Un manuel de référence l'accompagne et regroupe

- des notions théoriques avec référence au cahier;
- des « Comment faire » pratiques;
- des anecdotes historiques relatives à certaines notions abordées;
- plusieurs index (des « Comment faire? », des notations et alphabétique) qui en facilitent l'utilisation.

A la fin de chaque séquence de leçon, sont regroupées d'intéressantes « questions pour apprendre » en référence au manuel de synthèse : les élèves peuvent donc contrôler plus facilement leurs connaissances. Les synthèses des chapitres sont très complètes. Un solutionnaire des exercices supplémentaires est également proposé.

Assez étrangement, les deux fascicules sont imprimées en vert et rose, ce qui au départ surprend un peu par l'atténuation du contraste que cela implique. Certaines pages sont très condensées et utilisent un petit format de lettres.

A. Maingain, B. Dufour, sous la direction de G. Fourez, *Approches didactiques de l'interdisciplinarité*, De Boeck Université, Bruxelles, 2002, 283 pages, format 240 × 160, ISBN: 2-8041-3839-9.

Différentes instances de l'enseignement valorisent aujourd'hui les démarches qui créent des passerelles entre les disciplines. Gérard Fourez dans son avant-propos souligne l'intention des auteurs : « On s'imagine trop souvent qu'il suffit de réunir quelques spécialistes de différentes disciplines pour que, par un effet magique, le travail interdisciplinaire ait lieu. En fait, l'usage méthodique des disciplines pour éclairer une situation précise — c'est-à-dire l'interdisciplinarité — exige un apprentissage. Ce qui fait l'originalité de ce volume, c'est de clarifier les implications épistémologiques de ces démarches et de proposer des méthodes précises en vues de tels apprentissages ».

Ce livre s'adresse plus particulièrement aux enseignants des classes terminales de l'enseignement secondaire général, aux formateurs de formateurs et aux étudiants qui se destinent aux métiers de formation et d'éducation.

L'ouvrage distingue et étudie en profondeur les concepts d'interdisciplinarité et de transdisciplinarité. Le premier consiste à intégrer des apports disciplinaires en vue de se donner une représentation d'une situation, d'une problématique, d'une notion de caractère complexe, étape réflexive nécessaire avant de porter un jugement, de prendre une décision ou de mener une action. Le second consiste à tranférer, d'un champ disciplianire à un autre des modèles, lois, concepts, compétence ou outils.

Les auteurs ont réfléchi à l'évaluation de tels apprentissages : question qu'ils reconnaissent extrèmement complexe tant pour les théoriciens que pour les praticiens, l'idéal — ici aussi — étant de mettre davantage l'accent sur l'apprentissage que sur la sanction de ce dernier. Ils justifient longuement une intéressante grille d'autoévaluation des compétences interdisciplinaires.

Si ce livre ne s'adresse pas stricto sensu à un public de mathématicien, certains d'entre nous vivent ou viveront de telles expériences interdisciplianires : une réflexion de portée générale ne peut que nous éclairer sur cet aspect de notre métier : apprendre à nos élèves à construire des « ilots de rationalité ».

Luc Lismont et Nicolas Rouche, *Formes et mouvements, Perspectives pour l'enseignement de la Géométrie*, CREM, Nivelles, 2001, 315 pages, format A4, ISBN : 2-930161-02-7.

Partant du constat que la situation actuelle de l'enseignement de la géométrie continue à poser des problèmes — discipline parent pauvre en primaire, disparition de l'axiomatique conduisant au deuil de la rigueur, débat ouvert sur la preuve —, l'équipe du CREM (coordonnée par L. Lismont et N. Rouche) se propose d'examiner dans cette étude l'apprentissage de la géométrie, de chercher les conditions de sa pertinence et les modalités possibles de son évolution sans heurt à travers toute la jeunesse. Le texte est lisible par les enseignants de tous les niveaux, ce qui est le leitmotiv de cette collection *Mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte*.

L'ouvrage est divisée en six parties.

— *Les origines de la géométrie* : dans cette première partie, on tente de montrer comment se forment les premiers concepts, comment naissent les premières implications évidentes. La géométrie se laisse approcher par l'histoire, l'ethnologie, la psychologie génétique mais surtout par des phénomènes intrigants, des choses qui, dans notre environnement, sont assez aisément constatables mais non immédiatement explicables (pourquoi une bande de papier que l'on noue prend-elle la forme d'un pentagone régulier ? d'où proviennent les ombres ? ...)

— *Une géométrie naturelle* : l'exposé tente de montrer qu'une géométrie argumentée sérieusement peut s'appuyer sur des moyens de connaissance tels que des expériences, des perceptions de symétries, des mouvements continus. Cet exposé est construit à l'écart de tout contexte familier, pour mieux mettre en évidence la logique propre à cette géométrie intuitive et informelle. Les thèmes abordés sont :
  — Perpendiculaires et obliques
  — Trois segments
  — Rectangles, cercles et angles
  — Parallèles et angles
  — Le théorème de Pythagore
  — Parallèles et longueurs

— *La géométrie en classe à douze ans* expose dans quels contextes et à travers quelles activités des enseignants du début du secondaire proposent d'éveiller la curiosité géométriques de leurs élèves, et comment ils les amènent à construire des éléments de théorie satisfaisant cette curiosité. Deux exemples d'enseignement sont proposés : soit l'idée d'assemblage des figures, soit l'idée des figures en mouvement.

— La quatrième partie étudie comment *représenter les objets* : ceux-ci sont souvent peu accessibles à la perception parcequ'ils sont mals placés, vus incomplètement. Il s'en suit un nécessaire va-et-vient entre l'objet et les représentations de toutes sortes. Sont étudiées :
  — les projections orthogonales
  — les perpectives parallèles (cavalières)
  — la perspective centrale

  Pour chacune, les auteurs vérifient si l'on parle bien de la même chose dans la civilisation, dans la réalité et dans l'enseignement.

— la cinquième partie explique le développement de la structure linéaire en partant des opérations élémentaires sur les grandeurs et en passant par la notion de mesure, la proportionnalité et les vecteurs.
— enfin la dernière partie expose le thème de l'orientation, en passant par les horloges et les tire-bouchons, jusqu'aux changements de base dans un espace vectoriel.

Luc Lismont et Nicolas Rouche, *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM, Nivelles, 2001, 402 pages, format A4, ISBN : 2-930161-03-5.

Cet ouvrage est inspiré sur le plan épistémologique par l'étude *Formes et mouvements*. Il propose, sur le double thème de la construction et de la représentation, des **situations-problèmes** pour apprendre la géométrie de la prime enfance à l'âge adulte. Les situations ne couvrent pas tout le programme ; elles n'épuissent pas non plus ce qui pourrait être regroupé dans ces thèmes. La théorie a été limitée à ce qui est strictement nécessaire à la compréhension des problèmes traités. Les auteurs suggèrent simplement que pour passer à un niveau théorique plus difficile, il convient de proposer aux élèves (demandeurs) des questions et problèmes plus difficiles.

La présentation des « fiches » situations-problèmes est uniforme : elle reprend les rubriques :

- De quoi s'agit-il ?
- Quels sont les enjeux ? (Matières couvertes, compétences visées, Références aux programmes, aux Socles de compétences et aux Compétences terminales)
- De quoi a-t-on besoin ? (Matériel et connaissances supposées des élèves)
- Comment s'y prendre ? (Questions à poser aux élèves, organisation, ...
- Echos des classes ? (Réaction dans des classes expérimentales)
- Prolongements possibles. (Variantes, exercices, évaluation, élèves mordus)
- Vers où cela va-t-il ? (Rapport à des questions mathématiques plus avancées, avec d'autres disciplines, avec la culture mathématique)
- Commentaires. (Indications historiques, éclaircissements utiles aux profs ou à l'élève)

Trois grandes parties couvrent :

- *de deux ans et demi à 10 ans* : on y aborde le modelage, les ombres, la lecture d'une photo. Chacune de ces activités est illustrée sous forme de situation-problèmes à difficulté croissante et s'adressant à la 1re maternelle, la 2e et 3e maternelle, les 1re et 2e primaire et enfin les 3e et 4e primaire.
- *de 10 à 15 ans* :
  - *Autour des projections orthogonales* : des solides vus de tous côtés, lire les projections orthogonales, construire un solide donné par ses projections et dessiner des projections orthogonales.
  - *Constructions* : modeler un cube, des cylindres et des prismes à base carrée, dessiner les vues du dessus et de face des prismes, développements, comment passer des pyramides aux cônes.
  - *Représentations en perspective* : cache-cache avec les solides, le cube dans diverses positions, les assemblages de cubes, ensemble architectural, vu et caché, vraie grandeur, ...
- *de 15 à 18 ans* :
  - *Vers la géométrie de l'espace* : Ombre au soleil, projection parallèle, propriétés d'incidence, section plane et point de percée, ...
  - *A propos des coniques* : Cercles, ellipses et affinités, sections coniques.
  - *Vers la géométrie projective* : Ombre à la lampe et projection centrale, la perspective du peintre, le birapport, invariant de la projection centrale, le théorème de Desargues.

De nombreux documents sont présentés sous une forme « à photocopier »pour servir de support dans les cours.

Ces deux ouvrages peuvent être commandés au CREM, Rue Emile Vandervelde, 5 à 1400 Nivelles. Ils peuvent aussi être consultés sur le site `http://www.agers.cfwb.be` d'où ils peuvent être téléchargés en tout ou en partie.

Pascal DUPONT, *Introduction à la géométrie - géométrie Linéaire et géométrie différentielle*, De Boeck Université, Bruxelles, 2002, 18×25, 696 pages, ISBN: 2-8041-4072-5.

Destiné aux professeurs et étudiants du premier cycle en sciences mathématiques et physiques, cet ouvrage présente trois importantes structures géométriques :

- espaces affines

- espaces euclidiens
- espaces projectifs

et quatre types d'êtres géométriques fondamentaux

- quadriques
- courbes
- surfaces
- arcs riemanniens

notamment pour les applications.

L'ouvrage très didactique comporte de multiples exemples et contre-exemples ainsi que de nombreuses figures. Plus de 600 excercices et problèmes, la plupart avec solutions, permettent à l'étudiant de se familiariser avec les techniques de calcul et de vérifier la compréhension en profondeur.

L'auteur nous livre dans son introduction les trois idées qui lui ont servi de guide lors de la conception de ce cours :

- éviter l'anecdotique, c'est-à-dire ne parler que de choses qui sont vraies quelle que soit la dimension. Ceci ne veut pas dire qu'il n'a pas insisté particulièrement sur les dimensions 2 et 3 qui restent d'une importance particulière.
- étudier chaque notion dans le contexte le plus approprié, au bon niveau de généralité. Faire l'étude d'une propriété, d'un problème, d'une notion, dans un contexte trop étriqué pousserait insidieusement à utiliser des arguments mal adapté, ce qui nuirait à la compréhension intime du problème, ce qui reste le but.
- suivre plus ou moins le développement historique du sujet. La construction des mathématiques allant par phases successives d'abstraction et chacune de ses branches ayant connu un développement varié, tantôt lisse, tantôt franchissant un seuil qui apparait comme une rupture, il en résulte que le débutant calerait de manière irrémédiable s'il devait surmonter d'une seule foulée des marches trop nombreuses ou trop hautes.

Revue des revues

Cl. Villers

Revue de l'APMEP, n° 436, 11-12-2001.

« Montaigne au secours, la confusion règne » est le titre de l'éditorial du Président Jean-Paul Bardoulat qui après des considérations sur la notion de règle à suivre dans la société scolaire s'interroge sur le rôle de l'école aujourd'hui. Est-il clair ? S'agit-il d'instruire, d'éduquer, de socialiser ou de distribuer des diplômes ?

La rubrique « dans nos classes » comporte cinq textes :

- Expérience en classe sur le Tableur par Véronique et Alain Juillac. C'est une description d'une séquence d'enseignement dont l'objectif est de mettre en application les notions d'effectifs cumulés, fréquences cumulées et moyenne pondérée d'une série par le biais de l'utilisation d'un tableur (Excel ou Works). Trois activités sont présentées ici.
- Du temps pour le sport « mathématique » par Pierre Rey qui, à travers cet article, essaye de montrer comment le « sport » mathématique contribue réellement à la formation de l'individu à la condition de lui consacrer assez de temps.
- Faut-il mettre les unités dans les calculs ? de Rémi Duvert. L'article ne prétend pas trancher entre les « oui, il faut » et les « non, il ne faut pas ». L'auteur développe quelques avantages et quelques inconvénients en se plaçant du point de vue de la pédagogie.
- Dans « Vingt ans après ...(ou presque) », Christian Roux traite de la forme que prennent les exercices proposés au « bac ». Ceux-ci sont très stéréotypés, avec beaucoup de questions intermédiaires qui inhibent le choix de la méthode de résolution. Des exemples sont donnés.
- De l'influence des calculatrices sur la pédagogie des mathématiques par Christian Hakenholz. Si elles simplifient le travail elles amènent surtout à se poser des questions notamment sur les écritures mathématiques.

Cette livraison comporte un important dossier intitulé « Musée et expositions ». Il comporte huit textes qui sont des relations du travail de préparation, en classe, de visites d'un musée scientifique ou pour la réalisation d'une exposition.

Dans la rubrique « Pour chercher et approfondir », on trouve encore

- Les mathématiques du petit extra-terrestre par Gérard Kuntz. Il s'agit de l'étude et d'une critique du didacticiel ADI.
- Dans « harmonie et semi-harmonie », Henri Bareil décrit une exploitation possible d'un problème proposé dans notre revue Maths-Jeunes d'avril 2001. En un peu plus de 10 pages A5, l'auteur montre de façon éclatante comment il est possible d'exploiter la revue. C'est bien cela que nous souhaitons voir se propager.
- « Arts et mathématiques » de Richard Denner est la relation d'un colloque qui s'est tenu à Maubeuge en septembre 2000. Noeuds, pavages, art islamique, architecture, ... etc illustrent le propos.
- Du nouveau chez nos voisins britanniques par Bernard Parsysz qui signale un rapport paru en Grande Bretagne sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométre de 11 à 19 ans. Le rapport signale notamment que le manque de géométrie dans l'enseignement des mathématiques fait que celles-ci ne fournissent plus une base convenable pour la plupart des études scientifiques à l'université. A méditer.

Cette livraison se termine par les rubriques : « Olympiades » qui propose des solutions à des problèmes posés lors des OMI 2000, « Matériau pour une documentation » où nos revues Maths-Jeunes et Maths-Jeunes Junior de l'année 200-2001 reçoivent une flatteuse appréciation, « Courrier des lecteurs » et « Vie de l'association ».

Cl. Villers

Revue de l'APMEP, n° 437, 11-12-2001.

Cette livraison de la publication de l'APMEP porte la même date que le n° 436 car il s'agit d'un numéro spécialement consacré aux journées nationales qui se sont déroulées à Nice en octobre 2000. Elle comporte essentiellement des résumés des conférences (plénières) ainsi que ceux de quelques uns des très nombreux ateliers.

Les conférences :

- Le mouvement dans la géométrie grecque par Bernard Parsysz
- Pratique de l'arithmétique dans un document cadastral de la fin du XV^{e} siècle de la région d'Ajaccio par rené Lozi
- Mathématiques et voiles de bateaux par Denise Chesnais et Frédéric Muttin
- Vision biologique et artificielle : Maths à appliquer par Thierry Vieville
- Poésie et Mathématique par Jean-Max Texier

Les ateliers :

- Sources arabes de l'astronomie calendaire et de l'art analytique de l'Occident au XVI^e siècle par Jacques Borowczyk
- Le mystérieux mécanisme d'Anticythère par Anne-Michel-Pajus
- Géométrie du nombre d'or : un cheminement pédagogique par Robert Vincent
- Les ateliers de recherche en mathématique par Pierre Eysseric

Cette livraison se termine par les rubriques : « Courrier des lecteurs » et « Vie de l'association ».

Cl. Villers

Pour effectuer une commande, il vous suffit de verser le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique :
Effectuer vos paiements au compte 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons.

Si vous habitez en France :
Nous vous demandons d'effectuer votre versement en Euros uniquement sur le compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef 15 rue de la Halle à B-7000 Mons, Belgique.

Si vous habitez ailleurs :
Effectuez de préférence un virement international au compte
CCP « giro » 000-0728014-29 de SBPMef, rue de la Halle 15 à B-7000 Mons, Belgique.
Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement « giro »), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Janvier 2002)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent Mathématique et Pédagogie, SBPM-Infor et Math-Jeunes.

Belgique :
- Cotisation ordinaire : 20 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications) : 28,50 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Union Européenne : 36 €,
Europe hors Union Européenne : 38 €,
Hors Europe : envoi prioritaire, 72 €, envoi non prioritaire, 42 €.

Abonnement à Mathématique et Pédagogie

Belgique : 26 €, Union Européenne : 32 €,
Europe hors Union Européenne : 33 €,
Hors Europe : envoi prioritaire, 46 €, envoi non prioritaire, 34 €.

Abonnement à Math-Jeunes Junior et Math-Jeunes

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, inférieur et supérieur, sont idéalement pris par l'intermédiaire d'un professeur.
Abonnement isolé à une des deux revues (4 numéros) :
- Belgique : 4,96 €,
- Union Européenne : 9,20 €,
- Europe hors Union Européenne : 10,20 €,
- Hors Europe : Envoi prioritaire, 20,40 €, envoi non prioritaire : 11,40 €.

Abonnement isolé aux deux revues (7 numéros) :
- Belgique : 8,68 €,
- Union Européenne : 16,50 €,
- Europe hors Union Européenne : 17,17 €,
- Hors Europe : envoi prioritaire, 35,60 €, envoi non prioritaire, 20 €.

Abonnements groupés (au moins 5) à *Math-Jeunes* et *Math-Jeunes Junior*.

Abonnements groupés à une des deux revues : (4 numéros)
- Belgique : 3,72 €,
- Union Européenne : 6 €,
- Europe hors Union Européenne : 7,60 €,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 15,20 €,
  - Envoi non prioritaire : 8,60 €.

Abonnements groupés aux deux revues : (7 numéros)
- Belgique : 6,57 €,
- Union Européenne : 10,60 €,
- Europe hors Union Européenne : 13,40 €,
- Hors Europe :
  - Envoi prioritaire : 26,60 €,
  - Envoi non prioritaire : 15,10 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement au compte de la SBPMef, s'abonner au bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France), le prix de l'abonnement est : 40 €. Ils peuvent également, par la même voie, commander des publications de l'APMEP (voir la page APMEP dans ce numéro).

Vente d'anciens numéros de Mathématique et Pédagogie

Avant 1999 : 0,74 €/N° + frais de port (Cat. 1),
Années 2000 et 2001 : 2,48 €/N° + frais de port (Cat. 1).

Vente d'anciens numéros de Math-Jeunes

Avant 1999/2000 : 0,25 €/N° + frais de port (Cat. 1),
Années 2000/2001 : 0,50 €/N° + frais de port (Cat. 1).

Brochures

Le prix d'une brochure ou d'un cd-rom mentionnés aux tableaux 1 et 2 s'obtient en additionnant le prix de base mentionné dans le tableau 1 ou 2 aux frais de port mentionnés dans le tableau 3 en fonction de la catégorie postale à laquelle appartient la brochure ou le cd-rom. Lorsqu'un prix réduit est mentionné, ce prix est réservé aux membres de la SBPMef et aux étudiants.

Tableau 1 : Prix de base Brochures	Prix plein	Prix réduit	Cat. post.
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 1 au n° 6 épuisés, reste n° 12)	1,24 €	/	2
Série 2 (n° 7 au n° 11 et n° 13)	5,45 €	/	5
Série 3 (n° 14)	5,45 €	/	3
Les 3 séries (n° 7 au n° 14)	7,44 €	/	6
Dossiers d'explorations didactiques			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,86 €	1,24 €	4
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,86 €	1,24 €	4
Dossier 6 (Statistiques)			
Moins de 11 ex.	7,44 €/ex.	6,18 €/ex.	7
Par groupes de 11 ex.	74,44 €	61,8 €	8
Olympiades Mathématiques Belges			
Tome 4 (1 ex.)	5.50 €		1
De 2 à 3 ex.	5,50 €/ex.	/	6
De 4 à 6 ex.	5 €/ex.	/	7
De 7 à 13 ex.	4,50 €/ex.	/	8
Plus de 14 ex.	4 €/ex.	/	8
Jacques Bair			
Mathématique et Sport	4,96 €	3,72 €	3
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie,...	12,39 €	9,92 €	5
Tableau 2 : Prix de base CD-Rom			
G. Robert			
Programmes mathématiques	4,96 €	/	3

Tableau 3 : Frais de port

Catégorie	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe,
1	0,25 €	1,61 €	1,74 €	4,09 €
2	0,67 €	0,99 €	1,12 €	1,98 €
3	1,07 €	1,61 €	1,74 €	4,21 €
4	1,44 €	2,48 €	3,22 €	7,93 €
5	1,98 €	2,97 €	3,22 €	7,93 €
6	2,48 €	3,72 €	5,70 €	14,87 €
7	2,97 €	2,73 €	3,22 €	4,09 €
8	Consulter le secrétariat			