Dans nos classes

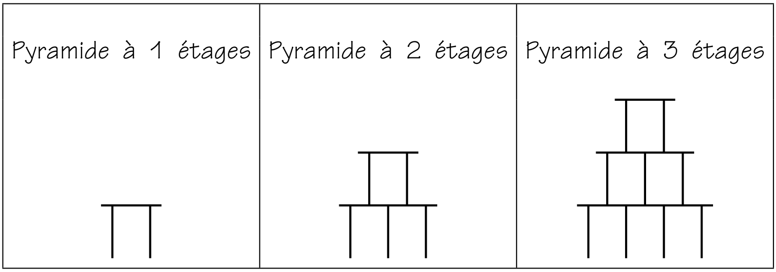
J.-P. Mathieu

Pyramide d'allumettes

1. Mise en situation.

Cette activité peut, au départ, convenir à des élèves de 1re et par la suite à des élèves de 2e et a été réaliséee en classe.

On propose aux élèves de réaliser une pyramide d'allumettes à plusieurs étages de la manière suivante :



Chaque « assemblage » de 3 allumettes repose sur 2 assemblages de la même espèce comme l'indique les dessins ci-dessus.

On propose aux élèves de compter chaque fois le nombre d'allumettes et d'écrire les résultats dans le tableau ci dessous en tenant compte du nombre d'étages. Les élèves ont ainsi réalisé des pyramides à 7 ou 8 étages.

nombre d'étages (n)	1	2	3	4	5	6	7
nombre d'allumettes	3	8	15	24	35	48	63

2. Réactions des élèves

En observant le tableau les élèves ont eu les réactions suivantes :

Adresse de l'auteur: Jean-Pierre Mathieu, rue Marquebreucq, 51, 6220 - Lambusart

- Pour passer de 3 à 8, de 8 à 15, de 15 à 24, de 24 à 35, etc ... il faut ajouter 5, 7, 9, 11, etc ...
- 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, etc ... sont respectivement des multiples de 3, 4, 5, 6 , 7, 8, 9, etc ...

Pour répondre à une question du genre : « Combien compterons-nous d'allumettes pour une pyramide à 50 étages ? », le professeur suggère une relation mathématique qui exprime le nombre d'allumettes en fonction du nombre d'étages.

3. Relations mathématiques

Un tableau semblable à celui ci-dessous est dressé : (la colonne (1) représente le nombre d'étages n ; la colonne (2) représente le nombre d'allumettes.)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	3	$3 = 1 \cdot 3$	$3 = 4 - 1$	$3 = 2 \cdot 2 - 1$	$3 = (1+1) \cdot (1+1) - 1$
2	8	$8 = 2 \cdot 4$	$8 = 9 - 1$	$8 = 3 \cdot 3 - 1$	$8 = (2+1) \cdot (2+1) - 1$
3	15	$15 = 3 \cdot 5$	$15 = 16 - 1$	$15 = 4 \cdot 4 - 1$	$15 = (3+1) \cdot (3+1) - 1$
4	24	$24 = 4 \cdot 6$	$24 = 25 - 1$	$24 = 5 \cdot 5 - 1$	$24 = (4+1) \cdot (4+1) - 1$
5	35	$35 = 5 \cdot 7$	$35 = 36 - 1$	$35 = 6 \cdot 6 - 1$	$35 = (5+1) \cdot (5+1) - 1$
6	48	$48 = 6 \cdot 8$	$48 = 49 - 1$	$48 = 7 \cdot 7 - 1$	$48 = (6+1) \cdot (6+1) - 1$
7	63	$63 = 7 \cdot 9$	$63 = 64 - 1$	$63 = 8 \cdot 8 - 1$	$63 = (7+1) \cdot (7+1) - 1$
$\vdots$					
n		$n \cdot (n+2)$			$(n+1) \cdot (n+1) - 1$

Nous obtenons deux relations mathématiques qui expriment le nombre d'allumettes en fonction du nombre d'étages n :

$$n \cdot (n+2) \qquad \text{et} \qquad (n+1) \cdot (n+1) - 1$$

Ce sont ces relations qu'il s'agit d'exploiter au maximum.

4. Exploitations possibles

4.1. Pour les élèves de 1ère

On exploitera les colonnes (1), (2), (3) et la relation $n \cdot (n+2)$

1. Faire découvrir la relation $n \cdot (n+2)$ n'est pas évident. En effet, les élèves se contenteront de $n \cdot n + 2$. C'est l'occasion de parler ou de reparler des règles de priorité.

   Si $n = 6$ alors

   $$\begin{aligned} n \cdot n + 2 &= 6 \cdot 6 + 2 \\ &= 36 + 2 \quad \text{(le produit a priorité sur la somme)} \\ &= 38 \qquad \text{(qui n'est pas le résultat attendu)} \end{aligned}$$

   $n \cdot n + 2$ doit être modifié pour donner priorité à la somme sur le produit. On y parviendra en plaçant des parenthèses.

2. On peut alors proposer des exercices du genre :

   « Combien d'allumettes aura-t-on pour une pyramide à 18 étages ? »

   $$\begin{aligned} \text{On a } n \cdot (n+2) &= 18 \cdot (18+2) \\ &= 18 \cdot 20 \\ &= 360 \end{aligned}$$

   La pyramide a 360 allumettes.

3. Plus intéressant est l'exercice inverse du 2.

   « Combien d'étages comportera une pyramide à 255 allumettes ? »

   On écrit $n \cdot (n+2) = 255$ et l'on cherche 2 naturels tels que l'un surpasse l'autre de 2 et dont le produit est 255. Ces nombres sont dans la liste des diviseurs de 255.

   Cherchons-les ; c'est l'occasion de réactiver la notion de divisibilité, les règles de divisibilité vues à l'école primaire, d'en découvrir d'autres, d'aborder intuitivement la propriété suivante : « Tout nombre qui divise deux autres nombres divise leur somme et leur différence. »

   div 255 = 1, 3 , 5, 15, 17, 51, 85, 255

   On trouve 15 et 17 et le nombre d'étages est 15.

4.2. Pour les élèves de 2ème

On exploitera tout le tableau et les 2 relations.

1. D'abord arriver à la relation $(n+1)\cdot(n+1)-1$ prend du temps; un passage qui semble intéressant est d'exploiter la relation $n+1\cdot n+1-1$ qui est très souvent donnée par les élèves.

   Si $n = 7$

   $$\begin{aligned} n+1\cdot n+1-1 &= 7+1\cdot 7-1 \\ &= 7+7 \\ &= 14 \qquad \text{(qui n'est pas le résultat attendu)} \end{aligned}$$

2. On peut proposer des exercices du genre :

   « Combien d'allumettes aura-t-on pour une pyramide à 30 étages? » (utilisation obligatoire des relations vues)

   On a :

$n\cdot(n+2) = 30\cdot(30+2)$ $= 30\cdot 32$ $= 960$	$(n+1)\cdot(n+1)-1 = (30+1)(30+1)\text{-}1$ $= 31\cdot 31-1$ $= 961\text{-}1$ $= 960$

   La pyramide compte 960 allumettes.

   A noter que l'exercice est intéressant pour notamment :

   (a) persuader l'élève que $31\cdot 31 \neq 30\cdot 30+1\cdot 1$

   (b) amener l'élève à prouver que $n\cdot(n+2) = (n+1)\cdot(n+1)-1$

3. On peut, par distributivité, démontrer que $n\cdot(n+2) = (n+1)\cdot(n+1)-1$

   En effet,

   $n\cdot(n+2) = n^2+2n$ et $(n+1)\cdot(n+1)-1 = n^2+n+n+1-1 = n^2+2n$

4. On peut découvrir l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

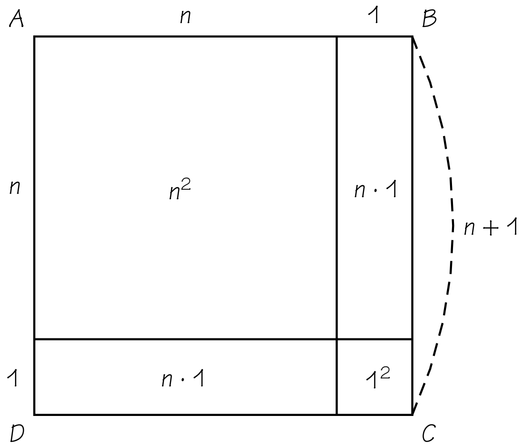
   En effet,

   $(n+1)\cdot(n+1)-1 = n\cdot(n+2)$

   $(n+1)^2-1 = n^2+2n$

   $(n+1)^2 = n^2+2n+1$

   A noter, qu'arrivé à ce stade et surtout en première étude, l'illustration géométrique est indispensable.



Aire de $ABCD = (n+1)^2$

mais aire de $ABCD = n^2 + n \cdot 1 + n \cdot 1 + 1^2 = n^2 + 2n \cdot 1 + 1^2$

donc $(n+1)^2 = n^2 + 2n \cdot 1 + 1^2$ et on visualise plus facilement l'identité.

5. On peut découvrir, à partir de l'égalité des 2 relations, l'identité remarquable $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

   En effet : calculer de 2 manières différentes le nombre d'allumettes pour une pyramide à 19 étages ?

   On a :

$\begin{aligned} n \cdot (n+2) &= 19 \cdot (19+2) \\ &= 19 \cdot 21 \\ &= 399 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (n+1) \cdot (n+1) - 1 &= (19+1)^2 - 1 \\ &= 20^2 - 1 \\ &= 400\text{-}1 \\ &= 399 \end{aligned}$

   La pyramide a 399 allumettes.

   On peut donc écrire que $19 \cdot 21 = 20^2 - 1$ ou que $(20-1) \cdot (20+1) = 20^2 - 1^2$ ce qui induit l'identité cherchée.

6. On peut, par factorisation, démontrer que $(n+1)^2 - 1 = n \cdot (n+2)$

   En effet, on a : $(n+1)^2 - 1 = (n+1-1) \cdot (n+1+1) = n \cdot (n+2)$

7. On peut, à partir de la colonne (3) du tableau, suggérer que le produit de 2 nombres naturels pairs consécutifs est un multiple de 8. Démontrons-le :

   En effet, considérons $2n$ et $2n+2$ deux de ces nombres avec n nombre naturel

On a : $2n \cdot (2n+2) = 2n \cdot 2 \cdot (n+1) = 2 \cdot 2 \cdot n \cdot (n+1) = 4 \cdot n \cdot (n+1)$
Le nombre $4 \cdot n \cdot (n+1)$ contient le facteur 4 et est donc un multiple de 4; de plus n et $n+1$ sont deux naturels consécutifs, l'un d'entre est pair et donc multiple de 2. Finalement $4 \cdot n \cdot (n+1)$ contient les facteurs 2 et 4 et est un multiple de 8.

8. On peut, à l'aide de la colonne (5) du tableau, suggérer que le carré d'un impair diminué de 1 est un multiple de 8. Démontrons-le :
   En effet, considérons $2n+1$ un nombre impair avec n nombre naturel.
   On a, de 2 manières différentes, que :

$$\boxed{\begin{aligned}(2n+1)^2-1 &= (2n+1-1)\cdot(2n+1-1)\\ &= 2n\cdot(2n+2)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(2n+1)^2-1 &= (2n)^2+2\cdot 2n\cdot 1+1^2-1\\ &= 4n^2+4n+1-1\\ &= 4n^2+4n\\ &= 4\cdot n\cdot(n+1)\end{aligned}}$$

   Les résultats trouvés ont été obtenus au 7° ce qui achève la démonstration.

9. Pour terminer, on peut revenir à un problème posé précédemment :
   « Calculer le nombre d'étages pour une pyramide à 255 allumettes? »

$$\begin{aligned}\text{On a : } (n+1)^2-1 &= 255\\ (n+1)^2 &= 255+1\\ (n+1)^2 &= 256\\ \text{n+1} &= 16\\ \text{n} &= 16\text{-}1\\ \text{n} &= 15\end{aligned}$$

   La pyramide a 15 étages.

5. Conclusions

- Cette situation permet de rencontrer beaucoup de points du programme.
- Tout, sauf la dernière exploitation, a été expérimenté.
- Si certains lecteurs découvrent d'autres pistes à exploiter à partir de la situation proposée, je serais heureux de les connaître.