

Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique)
Tél.-Fax : 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@umh.ac.be, Web : <http://www.sbpm.be>

Membres d'honneur : H. Levarlet, W. Servais (†)

Conseil d'administration : J. Bair, Ch. Bertrand, J.-P. Cazzaro, M. Denis-Pecheur, B. Desaedeleer, P. Dupont, Cl. Festraets-Hamoir, M. Frémal, R. Gossez-Ketels, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, P. Marlier, Ch. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, J. Navez, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler, Ch. Van Hooste

Président, Math-Jeunes Senior :

Ch. Van Hooste, Chemin de Marbisœul
25, 6120 Marbaix-la-Tour,
Tél. 071-217793

Vice-Président,

Olympiades Internationales :

G. Troessaert, Recogne sur le Chêne 58,
6800 Libramont, Tél. 061-224201

Administrateur délégué :

Ch. Michaux, Rue Brigade Piron 290,
6061 Montignies-sur-Sambre,
Tél. 065-354706

Secrétaire :

M. Frémal, Rue W. Jamar 311/51,
4430 Ans, Tél. 04-2636817

Olympiades nationales et site WEB :

Cl. Festraets-Hamoir, Rue J.B.
Vandercammen 36, 1160 Bruxelles
Tél. 02-6739044

Publicité, Commission Congrès :

M. Denis-Pecheur, Rue de la Ferme 11,
5377 Noiseux (Somme-Leuze),
Tél. 086-323755

Math-Jeunes Junior :

A. Paternotte, Rue du Moulin 78,
7300 Boussu, Tél. 065-785064

SBPM-Infor :

R. Gossez, Albert I Laan 13, 1560
Hoeilaart, Tél. 02-6579892

Trésorier :

P. Marlier, Rue de Plainevaux 185/15,
4100 Seraing, Tél. 04-3374945

Portefeuille de lecture :

S. Bridoux, Rue de Lambrechies 87,
7390 Quaregnon, Tél. 065-667203

Mathématique et Pédagogie :

J. Miewis, Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée, Tél. 04-3431992

Comité de rédaction : J. Miewis, J. Bair, Ch. Bertrand, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, Cl. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, Ch. Michaux, J. Navez, G. Noël, N. Vandenabeele, Ch. Van Hooste, Cl. Villers



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

- Ch. Van Hooste, *Éditorial* 3

Articles

- J. Navez, *Les voies en gare de Liège Guillemins.* 5
- P. Van Praag, *Pourquoi des nombres complexes? Pourquoi des groupes?* 17
- J.-P. Houben, *Macros : nouvelles situations.* 39
- V. Henry, *Les hyperréels en analyse.* 47

Rubriques

- R. Bellœil, *Situation-problème* 59
- Y. Noël, *Dans nos classes* 67
- C. Festraets, *Olympiades* 73
- C. Festraets, *Des problèmes et des jeux* 77
- J. Miewis, *Bibliographie* 84
- P. Marlier, *Le coin du trésorier* 87

NOTE

- * Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
- * Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
- * Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- * Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (L^AT_EX₂ ϵ , Word); les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés. L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
- * La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
Pour les articles :
Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
- * Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- * MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée.

Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Éditorial

CH. VAN HOOSTE

Math-Jeunes a repris du poil de la bête; autrement dit, Math-Jeunes va mieux. Je remercie tous les collègues qui croient qu'une telle revue peut être bénéfique (mathématiquement) pour leurs élèves.

Cependant, le Rallye-Problèmes n'a pas beaucoup de succès. Peu d'élèves envoient leurs solutions à Claudine Festraets, la responsable de cette rubrique. Est-ce à dire que ces problèmes sont trop difficiles? Ou bien sont-ce nos élèves qui ne veulent pas s'investir dans cette activité? À moins que ce soit de notre faute, à nous professeurs : nous considérerions donc la résolution de problèmes comme une activité secondaire? Ou alors, nos élèves ont résolu ces problèmes mais ne savent comment en rédiger la solution et nous ne voulons pas investir du temps à leur montrer comment faire? C'est regrettable!

Je ne voudrais pas aller plus loin dans l'analyse de ce constat. Mais, à propos de la résolution de problèmes, je ne peux m'empêcher de relire ce qu'en disent quelques grands noms des mathématiques.

« Ceci est un problème. Ne me dites pas que c'est difficile. Si ce n'était pas difficile, ce ne serait pas un problème ».

« Les mathématiques ne sont pas une marche tranquille sur une autoroute dégagée, mais un voyage dans un désert étrange, où les explorateurs sont souvent perdus ».

« Un problème est une aventure humaine ».

« L'essentiel de l'activité scientifique consiste à poser des questions, mettre en oeuvre des outils pour les résoudre et évaluer les résultats obtenus en regard des problèmes posés. Les théories mathématiques ne sont donc pas des fins en soi, mais sont au service d'une efficacité accrue dans la résolution des problèmes, que ces problèmes soient issus des mathématiques ou de tout autre domaine ».

« Il y a des problèmes que l'on pose, il y a des problèmes qui se posent ».

« En mathématiques, il n'y a pas de problèmes bien résolus, il n'y a que des problèmes plus ou moins bien résolus ».

« Finalement, nous arrivons au paradis des mathématiciens : ce sont les problèmes qui, à force de réflexion, ont engendré des idées nouvelles qui, souvent, dépassent de façon incommensurable le problème qui leur a donné naissance ».

Terminons avec G. POLYA : « La résolution des problèmes a été l'ossature de l'enseignement de la mathématique depuis l'époque du papyrus de Rhind ... Se-

lon moi, le problème constitue encore aujourd'hui l'ossature de l'enseignement de la mathématique à l'école secondaire. Et je suis gêné de devoir souligner, en insistant, une chose aussi évidente ».

In Memoriam

Jacqueline Vanhamme, notre amie, notre collègue nous a quitté. Sa famille et l'enseignement des mathématiques ont éclairé et comblé toute sa vie. D'abord professeur en Belgique, puis au Congo, elle a partagé avec son mari Willy la même passion pour leur métier. Il y avait entre eux une grande complicité, une grande tenacité pour faire comprendre les mathématiques au plus grand nombre.



Comme membre de la SBPMef, elle a produit un travail important et remarquable : c'est elle qui a dactylographié et expédié les numéros de notre revue pendant près de quinze ans. Elle fut également une cheville ouvrière importante des dix premières années de la revue Math-Jeunes. Elle a rédigé et publié de nombreux articles dans ces deux revues.

Elle a fait partie du groupe de professeurs de la SBPMef qui préparait les étudiants aux Olympiades Internationales lors des stages de Han-sur-Lesse. Elle était très active dans la préparation des Congrès : tant que sa santé le lui a permis, même en chaise roulante, elle resta fidèle au poste.

Son action ne se limitait pas à notre pays, elle a participé au nom de la Belgique à de nombreux Congrès Internationaux : elle fut dans les premières à rejoindre la Commission Internationale pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques (CIEAM); elle y était encore à Toulouse en 1994. Elle représenta la SBPMef à de nombreux Congrès en France et en Espagne.

Membre de notre Conseil d'Administration pendant longtemps, elle animait nos séances par ses interventions fréquentes, sensées, constructives et ... intempestives. Bien des Présidents se souviennent que si elle demandait rarement la parole ... elle la prenait souvent.

Sa bonne humeur, sa bienveillance, son caractère conciliant, contribuaient à créer une atmosphère cordiale et détendue, même lors d'âpres discussions.

Nous nous souviendrons d'elle comme d'une personnalité riche, originale, enthousiaste, toujours prête à donner d'elle-même.

Merci Jacqueline et au revoir.

Les voies en gare de Liège Guillemins.

J. NAVEZ, *Université de Liège*

1. Un peu d'histoire

En 1838, est inaugurée la ligne de chemin de fer de Malines à Ans via Louvain et Tirlemont. Elle s'arrête à l'extrémité du plateau de Hesbaye devant les 110 m qu'elle doit descendre pour atteindre la vallée de la Meuse. Le 1^{er} mai 1842, on inaugure les plans inclinés de Ans à Liège, remarquables par leur machinerie fixe (installée à Liège Haut Pré, à peu près à mi-parcours) qui hisse les trains au sommet de la rampe. De 1842 à 1871, les trains furent donc remorqués par des câbles sur ces plans inclinés. L'installation fut construite par l'ingénieur en Chef, Henri MAUS. L'effort de traction était transmis aux trains montants par l'intermédiaire d'un truck muni d'une pince dont les mâchoires saisissaient le câble moteur; par un déclic, ces mâchoires s'ouvraient d'elles-mêmes et lâchaient le câble quand le train était parvenu au sommet du plan incliné.

Si nous voulons caractériser l'évolution de la voie en Belgique, nous dirons qu'elle se caractérise par les faits suivants :

- on est passé des rails mesurant 4 m 57 de longueur et d'un poids de 20 kg au mètre à de longs rails de 27 m ou 54 m soudés en de longues barres de plus de 300 m; la diminution des joints étant favorable à la conservation du matériel roulant et au confort des voyageurs;
- le traitement thermique des rails pour en réduire l'usure;
- l'augmentation du nombre de traverses;
- l'augmentation de l'épaisseur du ballast et l'emploi pour celui-ci de matériaux de meilleure qualité;
- l'adoption d'aiguilles élastiques pour les changements de voies;
- l'applications aux courbes de raccords paraboliques.

Une évolution récente est intervenue, elle est due à la construction des « lignes nouvelles » ou lignes à grande vitesse qui sont empruntées notamment par les TGV, Thalys et Eurostar. La grande vitesse implique de nouveaux procédés pour les aiguilles et surtout un nouveau type de raccordement pour les courbes, la spirale de CORNU.

La bâtiment « des recettes » de la gare de Liège Guillemins, dont je ne vais pas retracer l'histoire mouvementée va bientôt céder la place à une toute nouvelle construction qui sera reculée par rapport à l'ancienne de 200 m en direction de la Meuse, ce qui permettra l'établissement de quais rectilignes. Il faut dire que l'ancienne gare cumulait beaucoup de difficultés au niveau des voies :

- situation au pied du plan incliné impliquant des raccordements dans le plan vertical;
- voies en courbe en gare à cause des positions respectives du plan incliné et de la colline de Cointe;
- cisaillement du faisceau opéré par les trains venant de Bruxelles et continuant sur Verviers ainsi que par les trains venant de Liège-Palais et continuant vers Namur.

2. Parallèles comme ...

Souvent prises comme modèle de droites parallèles, les voies de chemin de fer le sont plutôt au sens métrique qu'au sens affin; ce dont on est sûr est que leur écartement doit rester constant pour correspondre à l'écartement des roues sur le matériel roulant. En Europe (sauf en Espagne et en Russie), l'écartement standard est de 1 m 435.

- Des problèmes géométriques apparaissent rapidement; si on voit bien comment mesurer l'écartement en ligne droite, comment le fait-on en courbe et lors des raccordements? Surtout qu'il y a des complications.
- La bande de roulement des roues du matériel roulant n'est pas constituée par une surface cylindrique mais par une portion de surface conique dont le sommet serait vers l'extérieur du véhicule; en conséquence, il est nécessaire d'incliner les rails vers l'intérieur pour assurer l'adhérence (on parle par exemple d'inclinaison au $\frac{1}{20}$, soit 20% ou encore 18°); ce procédé est nécessaire pour équilibrer en courbe les longueurs différentes des rails extérieurs et intérieurs.

- En courbe, pour compenser la force centrifuge, le rail extérieur est placé plus haut que le rail intérieur, la différence de niveau s'appelle le « dévers ».

3. Quelques définitions

Voici quelques définitions agréées par la SNCB.

La **voie** est l'ensemble constitué par les deux files de rails, les traverses de fondation et les accessoires divers.

Une **ligne de chemin de fer** est l'ensemble des voies reliant deux endroits déterminés. Le plus généralement, une ligne comporte deux voies. Une ligne ne comportant qu'une seule voie est dite « à voie unique ».

L' **axe d'une simple voie** est la ligne tracée à mi-distance entre les deux rails et située dans le plan de roulement de ceux-ci quand la voie est en alignement et au niveau du sommet du rail bas quand la voie est en courbe.

L' **axe d'une double voie** est la ligne située à égale distance des rails intérieurs parmi les 4 rails qui constituent la double voie et située dans le plan de roulement de ces rails en alignement ou au niveau des sommets des rails bas en courbe. On dit aussi qu'il s'agit de l'axe de l'entrevoie.

L' **entrevoie** est la distance séparant deux voies contiguës. Cette entrevoie est de 2 m minimum entre les sommets des rails intérieurs; sur les lignes à grande vitesse le minimum est porté à 2 m 50.

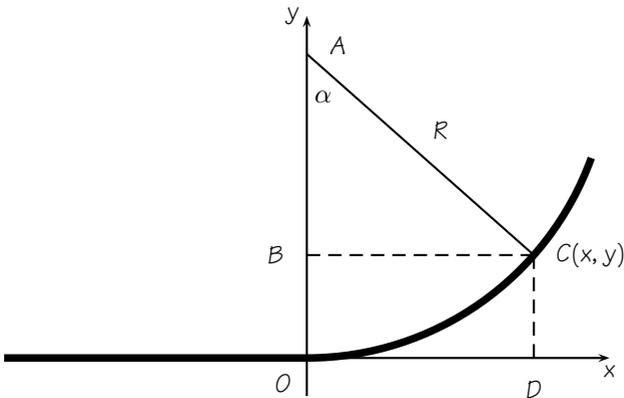
Le **tracé en plan** est la projection dans un plan horizontal, il est constitué par une succession de droites, d'arcs de cercle et de raccords progressifs.

Le **profil en long** est la projection dans un plan de profil, il est constitué par une succession de droites et de courbes de raccordement.

Le **profil en travers** est la section par un plan vertical perpendiculaire à l'axe de la voie ou de l'entrevoie.

4. Quelques cercles

Supposons qu'un rail soit en alignement droit jusqu'à un point O et qu'on le fasse tourner vers la gauche par un arc de cercle passant par O . Le tracé en plan donne à peu près ceci :



L'équation cartésienne de l'arc de cercle en dessous de A est :

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{soit } y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \frac{x^6}{16R^5} \dots$$

En effet si on développe le second membre de la première équation, il vient :

$$\begin{aligned} y' &= x(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} & y'(0) &= 0 \\ y'' &= R^2(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} & y''(0) &= \frac{1}{R} \\ y^{(3)} &= 3R^2x(R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}} & y^{(3)}(0) &= 0 \\ y^{(4)} &= 3R^2(R^2 + 4x^2)(R^2 - x^2)^{-\frac{7}{2}} & y^{(4)}(0) &= \frac{3}{R^3} \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Prenons par exemple un rayon de 1000 m et prenons pour x des valeurs de 10 m, 20 m, 30 m, on obtient les valeurs suivantes :

B de comprendre une catégorie de problèmes, j'ai découvert une structure

Problème de courbure

x	$\frac{x^2}{R}$	$\frac{x^4}{8R^3}$
10 m	0,05 m	0,00000125 m
20 m	0,20 m	0,00002 m
30 m	0,45 m	0,0001 m

On constate que la valeur des termes suivant le premier devient rapidement négligeable. L'équation du cercle peut donc localement s'écrire

$$y = \frac{x^2}{2R}$$

Ce qui est quand même l'équation d'une parabole!

On peut également utiliser l'angle au centre du cercle disons α , les coordonnées cartésiennes d'un point sont :

$$\begin{aligned}x &= R \sin \alpha \\y &= R(1 - \cos \alpha) = 2R \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

5. La courbure

Considérons un arc de cercle, on dit que le rayon (respectivement le centre) de cet arc de cercle est le rayon de courbure (respectivement le centre de courbure); l'inverse du rayon s'appelle la **courbure** de l'arc de cercle. On voit que plus un arc de cercle a un grand rayon, plus sa courbure diminue et à la limite on dit que la courbure d'un segment de droite est nulle.

Si on a un arc de cercle et que l'on voudrait connaître son centre, plusieurs possibilités existent. On peut par exemple tracer deux médiatrices de deux cordes ou deux normales au cercle (si on sait comment s'y prendre).

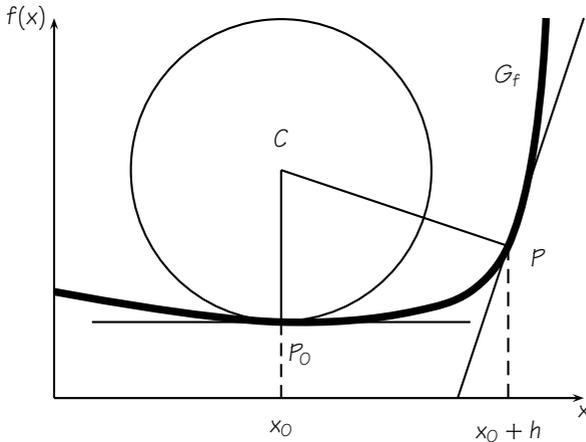
On peut généraliser ces notions à une courbe quelconque $y = f(x)$ à condition qu'elle soit suffisamment agréable (c'est à dire suffisamment dérivable, les dérivées suffisamment continues ...).

Nous allons considérer deux normales (les perpendiculaires aux tangentes) en deux points $P_0(x_0, f(x_0))$ et $P(x_0 + h, f(x_0 + h))$. De leur intersection C , nous traçons un cercle de centre C et de rayon CP_0 ; si on fait tendre P

commune à tous ses éléments : la perception d'un modèle est la "base" 9

Problème de courbure

vers P_0 , le cercle obtenu est appelé **cercle osculateur** (du latin « celui qui embrasse ») relatif au point P_0 de la courbe. Son rayon est appelé **rayon de courbure** en P_0 , son centre est appelé **centre de courbure** relatif au point P_0 et l'inverse du rayon de courbure s'appelle **courbure** au point P_0 . On peut dire que le cercle osculateur est le cercle qui « épouse » le mieux la courbe au point P_0 .



Equation de la tangente en P_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Equation de la normale en P_0 :

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Equation de la tangente en P :

$$y - f(x_0 + h) = f'(x_0 + h)(x - x_0 - h)$$

Equation de la normale en P :

$$y - f(x_0 + h) = \frac{-1}{f'(x_0 + h)}(x - x_0 - h)$$

Abscisse de l'intersection :

$$(x - x_0) \left(\frac{\frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}}{f'(x_0)f'(x_0 + h)} \right) = \frac{1}{f'(x_0 + h)} + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On passe à la limite pour h tendant vers 0,

$f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$ par continuité de f

$f'(x_0 + h) \rightarrow f'(x_0)$ par continuité de f'

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0)$ par existence de f'

$\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} \rightarrow f''(x_0)$ par existence de f''

Et on obtient :

$$x = x_0 + \frac{f'(x_0)(1 + f''(x_0))}{f'^2(x_0)}$$

$$y = f(x_0) - \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$$

$$R = ((x - x_0)^2 + (y - f(x_0))^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$R = \frac{(1 + f'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + f'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}}$$

6. La force centrifuge

Dans le cours de physique, on apprend qu'un mobile se déplaçant sur une trajectoire courbe est soumis à une force dite **centrifuge**, dirigée du centre de courbure vers la courbe et d'intensité égale à

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

En alignement droit, la courbure étant nulle (ou R étant infini), la force centrifuge est nulle. Elle varie donc de manière discontinue lorsqu'un véhicule passe d'un segment de droite à un arc de cercle ou bien au point de contact de deux courbes circulaires différentes.

Pour certaines valeurs de v et de R , l'apparition, la disparition ou la variation subite de cette force horizontale peut produire des effets néfastes et peut même compromettre le maintien des véhicules sur les rails. Parmi les effets néfastes, on peut signaler l'inconfort des voyageurs qui seraient

déportés brusquement sur les banquettes, ainsi que l'usure et la déformation des voies aux abords des extrémités des courbes.

Pour obvier à ces inconvénients, la masse et la vitesse des véhicules étant données, une variation progressive de la force centrifuge F ne peut être obtenue qu'en faisant varier progressivement R . C'est ce qu'on appelle les **raccords progressifs**.

Sur les chemins de fer belges, le type de raccord le plus courant est le **raccord parabolique** sauf sur les lignes à grande vitesse où on utilise la **spirale de CORNU**.

Les raccords progressifs sont utilisés dans le tracé en plan, dans le profil en long et dans les aiguillages. Dans un premier temps, nous allons décrire ces raccords.

7. Les raccords paraboliques

On souhaite que le rayon de courbure du raccord réponde à la formule (avec le même repère que dans le dessin de la page 8) :

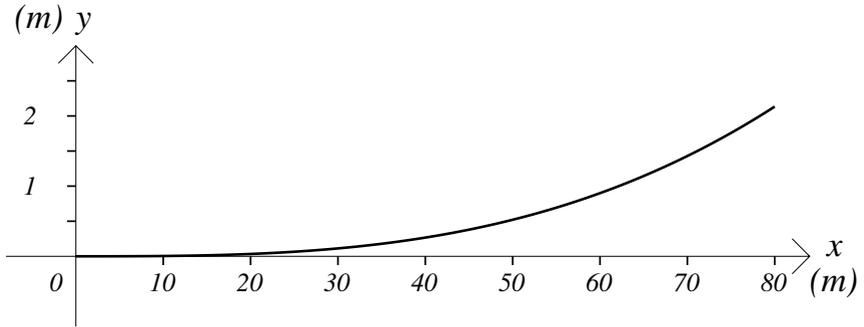
$$\rho = \frac{RL}{x}$$

où ρ est le rayon de courbure au point d'abscisse x , R le rayon de la courbe circulaire et L l'abscisse de l'extrémité du raccord, côté cercle. Ainsi quand x tend vers 0, ρ tend vers l'infini et on est bien du côté du segment de droite et quand x tend vers L , ρ tend vers R et on est bien du côté du cercle.

La courbe la plus utilisée pour les raccords progressifs est la suivante (toujours dans le même repère) :

$$y = \frac{x^3}{6RL}$$

Pour $R = 800$ m et $L = 50$ m, la courbe prend l'allure suivante :



Cette courbe s'appelle une parabole cubique. Le mot « parabole » peut s'expliquer si on admet qu'une parabole est tangente à la droite de l'infini. Un raccordement progressif qui utilise cette courbe s'appelle un *raccordement parabolique*. Calculons sa courbure avec la formule que nous avons établie plus haut :

$$f'(x) = \frac{x^2}{2RL}$$

$$f''(x) = \frac{x}{RL}$$

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{x^4}{4R^2L^2}$$

$$\rho = \frac{RL}{x} \left(1 + \frac{x^4}{4R^2L^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\rho \cong \frac{RL}{x}$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur. Le rayon de courbure tend vers l'infini (celui d'une droite) quand x tend vers 0 et vers R (le rayon du cercle) quand x tend vers L . De plus la courbure varie continûment en fonction de x . Dans la plupart des cas ce raccord parabolique est suffisant pour éliminer les effets indésirables.

Il reste un petit problème, après une abscisse L sur le raccord parabolique nous sommes au point $\left(L, \frac{L^2}{2R}\right)$, tandis que sur le cercle nous sommes à peu près au point (voir approximation du cercle ci-dessus) $\left(L, \frac{L^2}{2R}\right)$ donc nous avons déraillé! Nous allons translater le cercle vers la droite pour que son centre soit en $\left(\frac{L}{2}, R\right)$, ce qui nous donne le point $\left(\frac{L^2}{2R}\right)$ et encore un

déraillement, mais si nous « remontons » le cercle de ce qui faut c'est à dire de $\frac{L^2}{24R}$, alors le raccord touche enfin le cercle (à quelques approximations et soudures près). L'équation approchée du cercle est donc après les translations :

$$y - \frac{L^2}{24R} = \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{2R}$$

Le raccord parabolique empiète donc de $\frac{L}{2}$ sur le cercle et de $\frac{L}{2}$ sur l'alignement tangent. On peut constater aussi qu'il déplace le cercle.

8. La spirale de CORNU

Marie Alfred CORNU est un physicien français né à Orléans en 1841 et mort à Romorantin en 1902. Il est connu pour ses travaux sur la diffraction de la lumière. Il a introduit la courbe qui porte son nom afin de représenter les intégrales de FRESNEL.

Cette courbe avait déjà été étudiée précédemment par Jacques BERNOUILLI en 1705, par EULER en 1743 et par FRESNEL en 1818.

Elle porte aussi le nom de **clothoïde**. La forme de la courbe rappelle celle du fil qui s'enroule sur le métier à tisser. Clotho était celle des trois Parques qui filait la destinée des hommes.

La clothoïde est une courbe qui possède les propriétés remarquables suivantes :

- Elle peut être définie comme la courbe plane dont la courbure est proportionnelle à l'abscisse curviligne. Autrement dit la courbure augmente en même temps que la longueur parcourue sur la courbe. On peut ainsi raccorder des segments de droite et de clothoïde entre eux de telle manière que la courbure varie continûment; la force centrifuge subie par un observateur circulant le long de cette courbe varie de façon continue, ce qui n'est pas le cas dans un raccord cercle droite, ni tout à fait le cas dans le cas d'un raccord parabolique (à cause des termes que l'on a négligé). La clothoïde est donc utilisée pour les raccordements sur les lignes à grande vitesse, car les termes que nous avons précédemment négligés risquent de causer certaines perturbations vu les vitesses atteintes.
- Elle peut être aussi définie de manière cinématique comme la courbe qui, parcourue à vitesse constante v est telle que sa courbure varie

linéairement. L'angle de rotation du volant d'une voiture étant proportionnel à l'angle de braquage des roues, la clothoïde est, au moins dans sa partie centrale, la courbe décrite par une voiture roulant à vitesse constante v dont le conducteur tourne son volant à vitesse constante; d'où son utilisation dans le tracé des courbes des autoroutes.

- Pour des raisons un peu plus compliquées, cette courbe est apparue lors de l'étude des phénomènes de diffraction; c'est pourquoi son nom est associé à ceux de FRESNEL et de CORNU.

Malheureusement, la donnée mathématique de cette courbe ne peut pas se faire facilement; tout d'abord, on ne peut pas lui donner une équation cartésienne bien gentille du style $y = f(x)$, on doit passer par les trajectoires (les équations paramétriques), ensuite pour compliquer encore les choses, des intégrales interviennent dans la représentation paramétrique et pour couronner le tout on ne sait pas calculer ces intégrales sauf pour quelques valeurs particulières.

Tout cela est bien rebutant, mais les moyens modernes de calcul permettent de passer outre à ces difficultés et sont capables de nous donner le tracé de la courbe en un temps record.

Voyons quelles sont les équations paramétriques (peut être pas dans le cas le plus général) mais qu'importe :

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \\ y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \end{cases}$$

Si on cherche des valeurs pour ces intégrales, on trouve que :

- elles s'annulent pour $t = 0$ (donc la courbe passe par l'origine);
- elles tendent vers $\frac{1}{2}$ si t tend vers l'infini et vers $-\frac{1}{2}$ si t tend vers moins l'infini; ce calcul est très difficile, il a été réalisé par GAUSS et par FRESNEL.

Par contre, on peut facilement dériver ces expressions à l'aide du théorème d'existence des primitives (appellation non contrôlée).

$$\begin{cases} x'(t) = \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \\ y'(t) = \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''(t) = -\pi t \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \\ y''(t) = \pi t \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \end{cases}$$

En reprenant l'expression de la courbure que nous avons obtenu plus haut, on peut écrire :

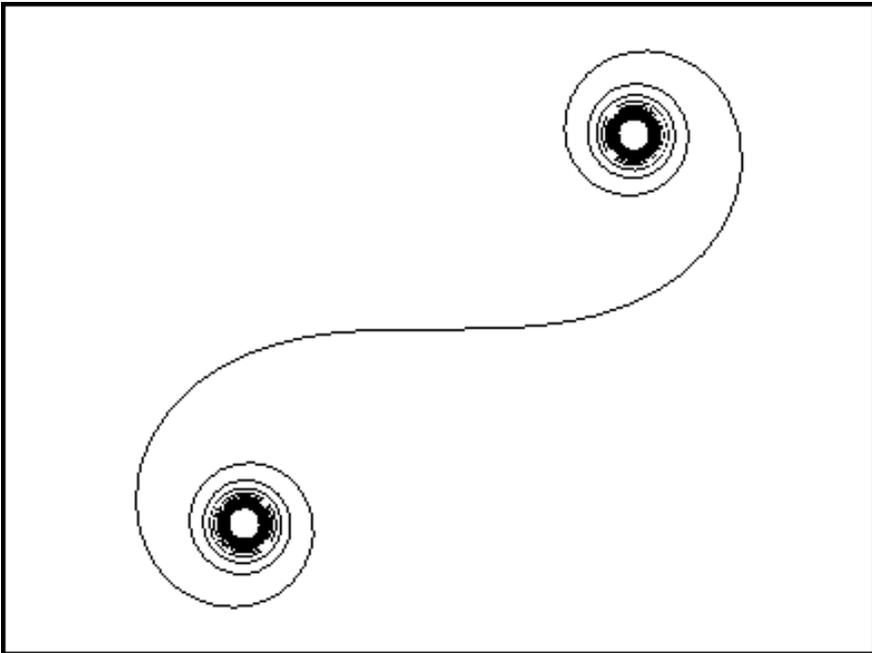
$$\frac{1}{R} = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}} = \pi|t|$$

D'autre part, la longueur de la courbe vaut :

$$L(t) = \int_0^t (x'^2(u) + y'^2(u))^{\frac{1}{2}} du = t \quad \text{pour } t \text{ positif}$$

On voit bien que la courbure est proportionnelle à t .

La clothoïde se présente de la manière suivante :



Pourquoi des nombres complexes ?

Pourquoi des groupes ?

P. VAN PRAAG, *Université de Mons-Hainaut*

1. L'équation du second degré

1.1 Écrivons-la

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (1)$$

sans trop préciser la nature des nombres a et b . On résoud des équations du premier et du second degré depuis des millénaires, en tout cas depuis les Babyloniens du début du deuxième millénaire avant Jésus-Christ, mais ce n'est que depuis les 16^e et 17^e siècles que zéro et les nombres négatifs sont traités de la même façon que les nombres (entiers ou rationnels) positifs. Ainsi il y avait une théorie pour l'équation $x^2 = ax + b$ et une autre pour l'équation $x^2 + ax = b$, a et b tous deux nombres entiers positifs ou fractions positives. Pour des motivations, voir par exemple [2].

Par la théorie d'al Khwarismi (début du 9^e siècle), l'équation (1) peut s'écrire successivement :

$$x^2 + 2 \frac{a}{2} x + b = 0$$

$$x^2 + 2 \frac{a}{2} x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b = 0$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

Pour continuer, on suppose que $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geq b$, puisque $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2$ doit être un nombre positif.

L'équation du 3^e degré

Dès lors,

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}. \quad (2)$$

Il y a deux racines, notons

$$x_1 := -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}) \quad (3)$$

$$\text{et } x_2 := -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}). \quad (4)$$

On en déduit

$$x_1 + x_2 = -a \quad (5)$$

$$\text{et } x_1 x_2 = b. \quad (6)$$

1.2 On a estimé avoir résolu l'équation (1) en écrivant (2), c'est-à-dire en exprimant les solutions de (1) à partir de nombres « connus » et de racines carrées de nombres connus, c'est-à-dire de solutions d'équations

$$x^2 = c. \quad (7)$$

Si tel est le but poursuivi, alors voici une autre façon de procéder : essayons de supprimer le terme en x dans (1) : posons $x = y + d$ et cherchons d pour lequel (1) prenne la forme (7) :

$$(y + d)^2 + a(y + d) + b = 0,$$

$$y^2 + (2d + a)y + (d^2 + ad + b) = 0 \quad (8)$$

On doit donc avoir $2d + a = 0$, $d = -\frac{a}{2}$, et (8) devient

$$y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} + b = 0,$$

$$y^2 = \frac{a^2}{4} - b,$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b,$$

et on retrouve (2).

2. L'équation du troisième degré

Écrivons-la

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (9)$$

En s'inspirant de 1.2, on peut supprimer dans (9) le terme en x^2 : on calcule qu'en posant

$$x = y - \frac{a}{3}, \quad (10)$$

l'équation (9) devient

$$y^3 + py + q = 0. \quad (11)$$

Voici une démarche des pères fondateurs (del Ferro, Tartaglia, Cardan (première moitié du 16^e siècle)) : dans (10), remplaçons y par $u + v$:

$$\begin{aligned} (u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q &= 0, \\ u^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q &= 0. \end{aligned}$$

Si on trouve u et v pour lesquels

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q & (12) \\ \text{et } 3uv + p &= 0, & (13) \end{aligned}$$

alors $u + v$ est solution de (11). Mais (13) implique

$$u^3 v^3 = \left(\frac{-p}{3}\right)^3. \quad (14)$$

Les égalités (12) et (14) impliquent que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \quad (15)$$

(en vertu de (5), (6) et (1)). On peut donc écrire :

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2},$$

d'où

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}}. \quad (16)$$

C'est la formule connue sous le nom de formule de del Ferro-Cardan-Tartaglia.

Ne nous préoccupons pas ici de la légitimité de la démarche, ni du fait que pour beaucoup de lecteurs une équation du troisième degré possède trois racines. Au 16^e siècle, on était content de présenter une solution, la solution, qui était souvent un nombre entier positif, connu à l'avance, comme nous allons le voir sur l'exemple suivant.

Cardan puis Bombelli furent interpellés par l'équation

$$x^3 = 15x + 4, \quad (17)$$

dont ils savaient que 4 est une racine. Mais si l'on veut appliquer la formule (16), alors $p = -15$ et $q = -4$, (16) donne alors

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \quad (18)$$

Au 16^e siècle zéro pose un problème à beaucoup de mathématiciens, certains refusent non seulement le calcul sur les nombres négatifs mais aussi l'existence même de ces nombres. Que dire alors des racines carrées des nombres négatifs? En 1572, Bombelli surmonte sa répulsion, écrit des nombres « a plus b (meno di memo) », aujourd'hui on écrit $a + bi$, et définit un calcul pour ces nombres : on calcule comme pour les nombres usuels, et lorsque l'on rencontre i^2 , on remplace cette expression par -1 .

Dès lors, par exemple,

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i$$

$$(2 - i)^3 = 2 - 11i$$

d'où, en additionnant les racines cubiques,

$$4 = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i},$$

c'est-à-dire

$$4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \quad (19)$$

3. Les nombres complexes

Cette dernière démarche est l'origine des nombres complexes $a + bi$. La formule (16) avait fait ses preuves mais son application à l'équation (17) était paradoxale. Les nombres complexes résolvent le paradoxe. Mais grâce aux nombres complexes l'équation (1) possède toujours des solutions, deux si l'on compte d'une façon adéquate, même si

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 < b. \quad (20)$$

Sans le paradoxe, si on en était resté à l'équation du second degré et aux nombres usuels, on n'aurait probablement pas trouvé nécessaire d'inventer de nouveaux nombres. La vie et les mathématiques sont remplies de problèmes sans solution et il suffirait de dire que sous l'hypothèse (20), l'équation (1) n'a pas de solution.

On constata qu'en acceptant les nombres complexes et en comptant les solutions d'une équation d'une façon adéquate, alors l'équation du 3^e degré possède 3 solutions et l'équation du 4^e degré, 4.

Girard conjectura au début du 17^e siècle qu'une équation du n^e degré possède n solutions. Gauss prouva cette conjecture tout à la fin du 18^e siècle. Dès le 18^e siècle, les nombres complexes s'étaient introduits dans le calcul intégral, et grâce aux développements en séries, Euler montra que ces nombres complexes permettent un lien entre la fonction exponentielle e^x et les fonctions trigonométriques sinus et cosinus : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Il en déduisit la formule $e^{i\pi} = -1$ liant le nombre e (une aire définie par une hyperbole et liée aux logarithmes) et le nombre π (l'aire d'un cercle). À la fin du 18^e siècle et au début du 19^e siècle, ces nombres furent interprétés géométriquement : ainsi la multiplication par i s'interprète comme une rotation d'un quart de tour. Ils ont depuis lors envahi l'analyse mathématique, la géométrie et la théorie des nombres [14]. On définit proprement les nombres complexes, sous l'hypothèse d'avoir les nombres réels : ainsi pour Hamilton les nombres complexes sont les couples (a, b) de nombres réels munis des lois

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \quad \text{et} \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc). \quad (21)$$

On vérifie que les couples $(a, 0)$ se comportent comme les nombres a , et on identifie $(a, 0)$ et a . Par (21) :

$$(0, 1)^2 = -(1, 0),$$

donc en posant $i := (0, 1)$ tout nombre complexe s'écrit $a + bi$, avec $i^2 = -1$.

Cauchy montra qu'en s'intéressant aux restes de la division euclidienne du produit de deux polynômes par $x^2 + 1$, on retrouve les lois définissant les nombres complexes. Ainsi

$$(a + bx)(c + dx) = (x^2 + 1)bd + ((ac - bd) + (ad + bc)x).$$

4. L'équation du second degré résolue dans une ambiance de bavardage

Reprenons le polynôme $x^2 + ax + b$. Sans connaître 1.1, si l'on suppose qu'il possède deux zéros, x_1 et x_2 , on peut prouver que

$$x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2. \quad (22)$$

On en déduit les égalités (5) et (6).

Cette déduction ne nécessite pas la connaissance des formules (3) et (4). En fait, nous aurions pu ignorer qu'il y a des racines. Nous pouvions donc ignorer s'il y a des racines, mais nous établissons que leur somme est $-a$ et leur produit b .

Les expressions $x_1 + x_2$ et x_1x_2 sont très particulières : x_1 et x_2 y jouent exactement le même rôle : elles ne changent pas si l'on y permute x_1 et x_2 . Par contre dans l'expression $x_1 + 2x_2$, x_1 et x_2 ne jouent pas le même rôle. Considérons l'expression

$$x_1 - x_2. \quad (23)$$

Dans cette expression, x_1 et x_2 ne jouent pas le même rôle, mais si on y permute x_1 et x_2 elle se modifie d'une façon particulière : elle change de signe ; donc $(x_1 - x_2)^2$ reste invariante par les permutations de x_1 et x_2 . Remarquons alors que

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = a^2 - 4b \quad (\text{par (5) et (6)}).$$

Donc

$$x_1 - x_2 = \pm\sqrt{a^2 - 4b} \quad (24)$$

Mais par (5) :

$$x_1 + x_2 = -a,$$

(5) et (24) forment donc un système de deux équations du premier degré à deux inconnues dont les solutions redonnent (2). On a donc retrouvé (2) en pensant à $x_1 - x_2$ et en remarquant que si l'on y permute x_1 et x_2 cette expression bouge, mais pas trop.

5. Un procédé unique pour les équations de degré inférieur à 5.

Cherchons, comme Lagrange au 18^e siècle (pour sa démarche originale, voir [11]), si nous pouvons pratiquer d'une façon analogue pour l'équation du troisième degré et envisageons que l'équation $x^3 + px + q = 0$ possède trois racines x_1, x_2 et x_3 . Nous possédons à présent les nombres complexes. Puisque $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, l'équation $x^3 = 1$ possède trois racines : $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) =: \omega, \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) = \omega^2$. Posons

$$L = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3,$$

en nous souvenant que l'expression $x_1 - x_2$ est $x_1 +$ (une racine carrée bien choisie de 1) $\cdot x_2$. Regardons les valeurs que prend L lorsque l'on y permute x_1, x_2 et x_3 . Tout d'abord, quelles sont les permutations sur x_1, x_2 et x_3 ? Il y en a six : d'abord la permutation identique qui fixe chacun des x_i et que nous notons $1 := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$. Puis par exemple $c_1 := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$ qui applique x_1 sur x_2, x_2 sur x_3 et x_3 sur x_1 . Puis

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} =: c_2, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} =: t_1, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} =: t_2, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} =: t_3.$$

On vérifie que par ces six permutations, L prend six valeurs. Mais introduisons

$$\Delta := (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

(qui jouera ici l'un des rôles de $x_1 - x_2$ pour l'équation du 2^eme degré).

On vérifie que par les six permutations, Δ prend deux et seulement deux valeurs : Δ et $-\Delta$. Donc Δ^2 est invariant par les six permutations. On calcule (voir Appendice) que

$$\Delta^2 = -(27q^2 + 4p^3),$$

et dès lors

$$\Delta = \pm \sqrt{-(27q^2 + 4p^3)}.$$

Donc Δ a bougé, mais pas trop, et est alors une racine (carrée) d'une expression « connue » $-(27q^2 + 4p^3)$. Cherchons à présent les valeurs que prend L par les permutations sur x_1, x_2 et x_3 qui conservent Δ . On vérifie qu'il n'y a que trois telles permutations : 1, c_1 et c_2 . Par ces trois permutations, L prend les formes :

$$L, \quad x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1 = \omega^2 L, \quad \text{et} \quad x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 = \omega L.$$

On en déduit que L^3 est fixe par ces trois permutations (puisque $\omega^3 = 1$). On vérifie par un long calcul que L^3 s'exprime comme ceci en fonction de p , q et de Δ :

$$L^3 = -\frac{27}{2}q - \frac{3i}{2}\Delta.$$

Donc

$$L = \sqrt[3]{-\left(\frac{27}{2}q + \frac{3i}{2}\Delta\right)},$$

donc

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = \text{une racine cubique de quelque chose de connu.} \quad (25)$$

On prouve de même que

$$x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = \text{une racine cubique de quelque chose de connu.} \quad (26)$$

Par un procédé analogue à (22), on écrit

$$x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \dots$$

Donc

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \quad (27)$$

Les égalités (25), (26) et (27) forment un système de trois équations à trois inconnues dont la résolution donne (16). Dans cette démarche une remarque capitale est : le polynôme $(X - \Delta)(X + \Delta)$ est invariant par toutes les permutations sur $\{X_1, X_2, X_3\}$, le polynôme $(X - L)(X - \omega L)(X - \omega^2 L)$ est invariant par toutes les permutations de $\{X_1, X_2, X_3\}$ qui laissent fixe Δ .

Résumons ce que l'on a obtenu : par toutes les permutations de $\{X_1, X_2, X_3\}$, Δ prend deux valeurs, Δ est racine d'une équation du second degré. Par toutes les permutations de $\{x_1, x_2, x_3\}$ qui laissent Δ fixe, L prend trois valeurs, L est racine d'une équation du 3^e degré, particulièrement bien choisie : L est racine cubique de quelque chose de « connu ». Avec cela, on résout l'équation. Lagrange prouve alors qu'on peut procéder d'une façon analogue pour l'équation du 4^e degré qui avait été résolue au 16^e siècle par Ferrari.

Il avait trouvé une démarche longue mais unique pour résoudre les équations générales de degré 2, 3 et 4. Mais sa démarche ne fonctionne pas pour l'équation générale du 5^e degré : dans ce cas l'expression analogue à L est solution d'une équation de degré 6 à coefficients connus et plus effrayante que l'équation du 5^e degré. La **résolution par radicaux** (c'est-à-dire la recherche de formules donnant les racines et où n'interviennent que les coefficients de l'équation et les signes +, -, ×, ÷, $\sqrt[n]{\quad}$) de l'équation du 5^e degré avait résisté à tous les efforts. Ce qui ne semblait pas dramatique puisque dès le 17^e siècle étaient apparues des méthodes de résolution numérique qui donnent les solutions réelles avec l'approximation voulue.

6. Les groupes

6.1 Dans la démarche de Lagrange, nous avons vu apparaître les permutations : on étudie les valeurs que prennent certaines fonctions des racines par des permutations de ces racines. Ces permutations étaient un outil accessoire aux racines et aux fonctions sur les racines. On va maintenant étudier l'ensemble de ces permutations comme outil essentiel. Tout d'abord des notations.

Notons S_3 l'ensemble des six permutations sur $\{x_1, x_2, x_3\}$: $\{1, c_1, c_2, t_1, t_2, t_3\}$. On sait composer les permutations : si σ et τ sont des permutations, alors $\tau \circ \sigma$ est la permutation qui applique tout x_i sur $\tau(\sigma(x_i))$. Ainsi

$$c_1 \circ t_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} = t_3.$$

Lagrange s'intéressait aux permutations qui conservent une fonction des x_i , par exemple L^3 . Ici, 1, c_1 et c_2 conservent L^3 ; t_1 , t_2 et t_3 pas.

L'ensemble E_f des permutations qui conservent une fonction f a une propriété bien particulière : si σ et τ appartiennent à E_f , alors $\tau \circ \sigma$ aussi.

En effet :

$$\begin{aligned}\tau \circ \sigma(f) &= \tau(\sigma(f)) \quad \text{par définition du produit de composition des fonctions} \\ &= \tau(f) \quad \text{car } \sigma \in E_f \\ &= f \quad \text{car } \tau \in E_f\end{aligned}$$

Nous dirons momentanément (voir 6.3) qu'une partie E de S_3 est un groupe de permutations si et seulement si pour tous $\sigma, \tau \in E$, on a $\sigma \circ \tau \in E$.

Ainsi $\{1, c_1, c_2\}$, $\{1, t_1\}$, $\{1\}$, S_3 , sont des groupes de permutations. Et $\{c_1, c_2\}$, $\{t_1\}$, $\{t_1, t_2, t_3\}$ ne sont pas des groupes de permutations.

Vers 1830, Galois associe à une équation $F = 0$ un groupe de permutations G et étudie les sous-ensembles de G qui sont des groupes. Ce sont les sous-groupes de G . Il met en évidence une propriété de certains sous-groupes de G , appelés aujourd'hui sous-groupes normaux, distingués, ou sous-groupes invariants de G et que l'on peut définir ainsi : ce sont les sous-groupes N de G pour lesquels si $n \in N$ et si $g \in G$, alors $g \circ n \circ g^{-1} \in N$. Dans les groupes étudiés par Galois, cette notion est liée à des questions très concrètes de résolubilité des équations. Il en déduit une condition sur G (l'existence de certains sous-groupes normaux) pour que l'équation $F = 0$ soit résoluble par radicaux. Lorsque cette condition est satisfaite, on retrouve comme conséquence de la théorie de Galois la démarche de Langrange, et les sous-groupes concernés qui a priori ne sont que des sous-groupes de permutations, deviennent alors les sous-groupes de permutations qui conservent certaines fonctions.

Galois déduit de sa théorie que pour $n > 4$, on ne peut pas « résoudre par radicaux » l'équation $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, lorsque les a_i sont des « lettres ». Ce dernier résultat avait été prouvé par Abel pour $n = 5$, mais la condition de Galois est une condition nécessaire et suffisante sur G , que les a_i sont des « nombres » ou qu'ils soient des « lettres ». Ainsi on prouve par la théorie de Galois que l'équation $x^5 - 6x + 3 = 0$, qui possède bien cinq racines complexes, n'est pas résoluble par radicaux [10].

6.2 Indiscernabilité.

En voulant résoudre une équation, on veut identifier chaque racine. Lorsque l'on a résolu l'équation, toutes ses racines sont discernables. Le

processus de Lagrange donne, par exemple pour l'équation du second degré la séquence suivante :

- Dans l'expression « $x_1 + x_2$ », x_1 et x_2 sont tout à fait indiscernables.
- Dans l'expression « $x_1 - x_2$ », x_1 et x_2 ne sont plus tout à fait indiscernables, mais ne sont pas totalement discernables.
- Dans les expressions « x_1 » et « x_2 » obtenues en fin de route, x_1 et x_2 sont tout à fait discernables.

Par la théorie de Galois, la séquence de Lagrange provient d'une suite de sous-groupes.

6.3 Plus haut, nous avons défini momentanément les groupes de permutations. Aujourd'hui, on appelle **groupe** un ensemble G muni d'une loi que nous noterons par exemple \cdot ,

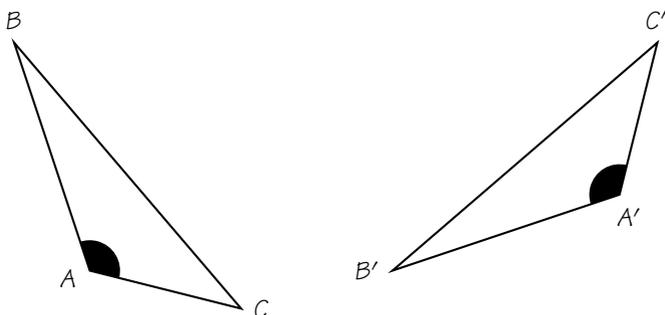
1. qui associe à tout couple (a, b) d'éléments de G un élément $a \cdot b$ de G ,
2. telle que l'égalité $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ soit satisfaite pour tous les $a, b, c \in G$,
3. telle que G comprenne un élément 1 pour lequel $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ pour tout $a \in G$,
4. telle que pour tout $a \in G$, il existe un unique élément $b \in G$ pour lequel $a \cdot b = 1 = b \cdot a$.

On peut prouver que si G est un ensemble de permutations sur un ensemble fini et si la loi sur G est la loi de composition \circ des permutations, alors la condition 1 suffit à ce que G muni de \circ soit un groupe. Mais il existe des groupes infinis de permutations (voir 7) et des groupes qui ne sont pas définis comme des groupes de permutations (mais qui le deviennent par un théorème de Cayley).

Remarque. En 4 et 5 les discussions s'effectuent dans une zone de flou : indiscernabilité des racines dont on ne sait pas très bien si elles existent, permutations sur ces racines conjecturées, expressions algébriques en des objets dont on ignore la nature, lettres et nombres. Aujourd'hui tout cela peut être défini dans un cadre considéré aujourd'hui comme clair.

7. Géométries et symétries

7.1 Changeons apparemment de sujet et plaçons-nous dans la géométrie usuelle du plan. Soient deux triangles



qui possèdent un angle « égal » compris entre deux côtés « égaux chacun à chacun ». Euclide (vers -300 avant J.C.) prouvait qu'ils sont « égaux » en appliquant le premier triangle sur le second. Cette pratique a été menée pendant longtemps avec mauvaise conscience : bouger le triangle, c'est faire de la physique (impure) et pas des mathématiques (pures). Il y avait d'une façon sous-jacente à cette pratique, l'idée que l'on bougeait le triangle de façon à conserver toutes les longueurs. Plus tard, on considèrera une transformation, bien choisie et bien définie mathématiquement, de tout le plan qui applique le premier triangle sur le second. Dans ce contexte, tout ce que l'on pourra dire du premier triangle, on pourra le dire du second, dans ce contexte les deux triangles sont indiscernables. On retrouve une situation où l'on a des objets indiscernables et où, lorsque deux objets sont indiscernables, une certaine permutation applique l'un sur l'autre. Cette remarque se place dans le cadre d'une découverte de Félix Klein qui avait étudié Galois.

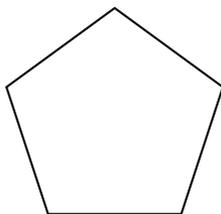
7.2 Le programme d'Erlangen.

Euclide avait codifié ce que l'on demande aux objets : points, droites, plans, circonférences, etc. pour pouvoir établir des énoncés de géométrie. Pendant des siècles des mathématiciens ont cherché à prouver que l'une des conditions demandée par Euclide dépendait des autres ; c'est l'axiome dit « des parallèles » que l'on peut énoncer comme ceci : « par un point hors d'une droite ℓ passe une et une seule droite du plan qui contient le

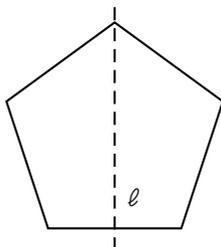
point et ℓ , et qui ne rencontre pas ℓ ». Au 19^e siècle, il fut prouvé (Bolyai, Lobatchevski, Riemann) que cet axiome est indépendant des autres axiomes et qu'il existe des géométries tout aussi légitimes qui ne satisfont pas à l'axiome des parallèles. Ce sont les géométries non euclidiennes [2]. Cayley réunit ces géométries et d'autres grâce à ce que l'on appelle l'espace projectif sur les nombres complexes. Félix Klein montra dans son programme d'Erlangen (1872) que la théorie des groupes pouvait permettre de comprendre autrement ces géométries et être un facteur d'unification. Il montra que toutes les géométries envisagées par Cayley pouvaient se définir par la donnée d'un ensemble E et d'un groupe G de permutations de cet ensemble. Dans la situation de 7.1, E est le plan (qui peut être vu comme l'ensemble des couples de nombres réels) et G est le groupe des déplacements du plan. Les mouvements qui en 7.1 dérangent, apparaissent maintenant comme suffisamment importants que pour pouvoir définir la géométrie.

Par le programme d'Erlangen, au couple (E, G) qui définit une géométrie, on associe des propriétés de parties de E telles que G soit le groupe des permutations de E qui conservent ces propriétés.

7.3 Soit le pentagone représentant (le bâtiment qui contient) l'Institut de Mathématique de l'UMH :

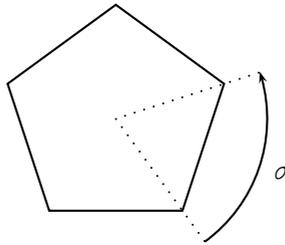


La symétrie orthogonale par rapport à la droite ℓ



applique le pentagone sur lui-même. C'est un cas particulier de ce que l'on appelle aujourd'hui une symétrie.

Pour le pentagone, la rotation σ de $\frac{360^\circ}{5}$ applique le pentagone



sur lui-même et est aussi appelée une symétrie du pentagone. Aujourd'hui, une symétrie est une permutation d'un ensemble qui conserve certaines propriétés. Plus précisément, une symétrie d'un ensemble structuré est une permutation de cet ensemble qui conserve la structure. En d'autres termes, une symétrie est ce que l'on appelle aussi un automorphisme [15, 21]. Dans l'exemple 7.1, les translations et les rotations sont des symétries du plan « usuel ». Les permutations des racines des équations rencontrées en 4 et 5 sont des symétries d'une structure définie par ces équations. Les symétries d'une structure forment un groupe. Galois a prouvé que, pour ce dernier exemple, l'étude du groupe donnait des renseignements sur la structure. Cette démarche est devenue un guide pour la recherche, non seulement en mathématiques, mais aussi en chimie et en physique [20].

8. Conclusion

Il y avait peu de raisons utiles aux hommes pour chercher des formules de résolutions par radicaux aux équations du 3^e degré.

La formule une fois trouvée s'est révélée inutilisable. Il y avait donc encore moins de raisons de chercher une formule pour l'équation du 4^e degré. Dès que des formules efficaces de résolutions numériques furent trouvées il y eut de moins en moins de raisons de chercher une formule pour l'équation du 5^e degré. Les mathématiciens qui se sont fatigués à tirer cette question au

30 vague) en une notion, appelée C. Ainsi, la notion est conçue seulement

clair savaient cela très bien. Mais ils sont ainsi faits que si une question apparemment naturelle résiste aux efforts de gens très forts, alors on se dit que derrière cette question se cache quelque chose d'important qui justifie que l'on se fatigue. Sans cette fatigue sur la résolution par radicaux des équations algébriques, aurait-on trouvé les nombres complexes qui ont envahi la plupart des domaines des mathématiques et de la physique et les groupes qui ont fait de la notion à connotation esthétique de symétrie un outil de compréhension et de prévision?

A. Appendice

A.1 Le Casus Irreducibilis.

C'est, depuis Cardan, l'équation (11) lorsque $(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 < 0$. Un exemple est l'équation (17) qui possède au moins une solution réelle, 4, mais où l'application de la formule (16), impose comme en (18), de considérer des racines carrées de nombres négatifs. En fait, comme nous allons le voir, cette équation (17), comme toutes les équations du Casus Irreducibilis, possède trois racines réelles. On s'est demandé longtemps si pour cette équation à coefficients réels et à racines réelles, il n'existerait pas d'autres formules exprimant les racines à l'aide de radicaux $\sqrt[p]{}$, mais où n'interviendraient que des nombres réels. La réponse est négative (Hölder, 1890), mais sa preuve nécessite des résultats de la Théorie de Galois, contrairement à ce que nous allons prouver ici.

Un autre sujet de préoccupation fut que lorsqu'il devint admis qu'une équation du troisième degré possède trois racines complexes (distinctes ou pas), la formule (16) semblait fournir neuf racines. L'égalité (13) implique qu'il n'en est rien.

A.2 Soient donc p et q des nombres réels, et x_1 , x_2 et x_3 les racines (complexes) de l'équation (11) : $x^3 + px + q = 0$. Par l'égalité

$$x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

on trouve

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{28}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \tag{29}$$

$$x_1x_2x_3 = -q \tag{30}$$

L'équation du 3^e degré

Soit, comme en 4,

$$\Delta := (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \quad (31)$$

Donc

$$\Delta \neq 0 \text{ si et seulement si } x_1, x_2 \text{ et } x_3 \text{ sont distincts.} \quad (32)$$

Lemme 1.

$$\Delta^2 = -(27q^2 + 4p^3) \quad (33)$$

Démonstration.

(1) L'un des $x_i = 0$, soit $x_3 = 0$. Dès lors par (31) : $\Delta = (x_1 - x_2)x_1x_2$.
Or

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \quad (34)$$

Par (27), $x_1 + x_2 = -x_3 = 0$. Par (29), $x_1x_2 = p$, donc

$$(x_1 - x_2)^2 = -4p \text{ par (34)}$$

et $\Delta^2 = (-4p)p^2 = -4p^3$.

(2) Tous les x_i sont non nuls et par (30), $q \neq 0$. Par (34), (27) et (30) :

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= x_3^2 + \frac{4q}{x_3} = \frac{x_3^3 + 4q}{x_3} \\ &= \frac{-px_3 - q + 4q}{x_3} \quad (\text{par (11)}) \\ &= \frac{3q}{x_3} - p \end{aligned}$$

De même

$$(x_1 - x_3)^2 = \frac{3q}{x_2} - p \quad \text{et} \quad (x_2 - x_3)^2 = \frac{3q}{x_1} - q.$$

D'où

$$\Delta^2 = \left(\frac{3q}{x_1} - p\right) \left(\frac{3q}{x_2} - p\right) \left(\frac{3q}{x_3} - p\right).$$

On développe le second membre, on utilise (27) et l'égalité

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{p}{q}$$

obtenue en divisant (29) par $x_1x_2x_3$ et en utilisant (30). On en déduit (33). ■

Proposition 2. Le Casus Irreductibilis

Les énoncés suivants sont équivalents :

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0, \tag{35}$$

$$x_1, x_2 \text{ et } x_3 \text{ sont réels et distincts.} \tag{36}$$

Démonstration. ([9]).

(1) Soit (36). Par (31) Δ est un nombre réel non nul et Δ^2 un nombre réel positif. De (33) on déduit (35).

(2) Soit (35). Dès lors par (33) et (32), les x_i sont distincts. Toujours par (33), Δ^2 est un nombre réel positif, donc Δ est un nombre réel non nul. Par (31) :

$$x_1 - x_2 = \frac{\Delta}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}$$

Mais

$$\begin{aligned} (x_1 - x_3)(x_2 - x_3) &= x_1x_2 + x_3^2 - (x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= x_1x_2 + x_3^2 + (x_1x_2 - p) && \text{(par (29))} \\ &= 2x_1x_2 + x_3^2 - p \\ &= -\frac{2q}{x_3} + x_3^2 - p && \text{(par (30))} \end{aligned}$$

Une équation du troisième degré à coefficients réels possède toujours au moins une racine réelle (théorème des valeurs intermédiaires). Soit $x_3 \in \mathbb{R}$. Donc

$$x_1 - x_2 = \frac{\Delta}{-\frac{2q}{x_3} + x_3^2 - p} \in \mathbb{R} \tag{37}$$

or

$$x_1 + x_2 = -x_3 \quad (\text{par (28)}). \quad (38)$$

De (37) et (38), on déduit que x_1 et x_2 sont des nombres réels. ■

A.3 On peut se donner le droit d'utiliser un peu plus les ressources de l'analyse mathématique. Étudions donc la courbe d'équation $y = x^3 + px + q$ où p et q sont des nombres réels, avec $p < 0$. Cette courbe possède un maximum, de coordonnées $(-\sqrt{\frac{-p}{3}}, q - \frac{4p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}})$, et un minimum, de coordonnées $(\sqrt{\frac{-p}{3}}, q + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}})$. En exprimant que l'ordonnée du maximum est positive et que l'ordonnée du minimum est négative, on retrouve la condition $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 < 0$. Dans ce cas, il y a donc des ordonnées successivement négatives, positives, négatives puis positives, la courbe coupe donc l'axe des x en trois points (théorème des valeurs intermédiaires).

A.4 Les résolutions trigonométriques.

On montre en général comme ceci qu'un nombre complexe possède une racine carrée complexe : soit $a + bi \in \mathbb{C}$, on recherche $x + iy \in \mathbb{C}$ pour lequel

$$a + bi = (x + iy)^2.$$

En développant cette dernière expression et en égalant les parties réelles, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \quad (39)$$

Dès lors $4x^2y^2 = b^2$,

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2$$

Puisque $x^2 + y^2 > 0$, on a

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (40)$$

De (39) et (40), on déduit l'existence et le calcul des $x + iy$. Pour les racines n^{e} d'un nombre complexe ($n \geq 3$), on présente la méthode trigonométrique. Une raison de cette présentation exclusive est, comme nous

allons le voir, que nous sommes en plein *Casus Irreducibilis* et dès lors la méthode algébrique ramène la recherche des racines cubiques d'un nombre complexe à la recherche des racines cubiques d'un nombre complexe. Nous allons montrer, à la suite de Viète (fin du 16^e siècle, début du 17^e siècle), que les fonctions trigonométriques permettent des formules de résolution du *Casus Irreducibilis*.

Lemme 3.

Si φ est un angle ou un nombre réel, alors

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi.$$

Démonstration. Connue. ■

Un nombre réel c est le cosinus d'un angle non nul et non plat si et seulement si $|c| < 1$. Par le lemme 3, il est raisonnable d'appeler « **équation de trisection d'un angle non nul et non plat** » une équation de la forme

$$4Z^3 - 3Z - c = 0, \quad \text{où } |c| < 1. \quad (41)$$

Les solutions de (41) sont

$$\cos\left(\frac{\arccos c}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{\arccos c}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\arccos c}{3} + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Lemme 4.

Si $p < 0$ et $Z = \sqrt{\frac{3}{-4p}} x$, alors les équations (11) et

$$4Z^3 - 3Z = \frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3}{-4p}}$$

sont équivalentes.

Démonstration.

On calcule en remplaçant dans (12) X par $\sqrt{\frac{-4p}{3}} Z$. ■

Lemme 5.

Soit $p < 0$. Dès lors $\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3}{-4p}}$ est le cosinus d'un angle non nul et non plat si et seulement si

$$27q^2 + 4p^3 < 0.$$

Démonstration.

$\left(\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3}{-4p}}\right)^2 < 1$ si et seulement si $\frac{9q^2}{p^2} \left(\frac{3}{-4p}\right) < 1$ si et seulement si $27q^2 < -4p^3$. ■

Des lemmes 4 et 5, on déduit la

Proposition 6.

L'énoncé (42) ci-après est équivalent aux énoncés (35) et (36) :

$p < 0$ et les $\sqrt{\frac{3}{-4p}} x_i$ sont les solutions d'une équation de trisection (42) d'un angle non nul et non plat.

On a donc obtenu une formule trigonométrique pour les solutions de l'équation (11) lorsque $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2 < 0$: ces solutions sont les

$$\sqrt{\frac{-4p}{3}} \cos\left(\frac{\arccos \frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3}{-4p}}}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

où $k \in \{0, 1, 2\}$.

Racines cubiques des nombres complexes. Mettons le nombre complexe $z = a + bi$ sous la forme $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, où r est le nombre réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$. Le nombre r possède une et une seule racine cubique réelle $\sqrt[3]{r}$, et les racines cubiques de z sont les nombres complexes $\sqrt[3]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$ où $k \in \{0, 1, 2\}$. Ces derniers cosinus sont solutions d'une équation du type (41).

Conclusion. Trouver dans le cas général le cosinus du tiers d'un angle en fonction du cosinus de cet angle, extraire la racine cubique d'un nombre complexe, et le Casus Irreducibilis, sont des problèmes équivalents.

Merci à Louis Habran qui est responsable d'une première mouture de cet exposé en septembre 2000, à Francis Buekenhout et Jean Doyen par leur aide à ma documentation, à Francis Buekenhout et Martine Oppitz pour leur lecture critique du manuscrit, à Lyane Bouchez pour le soin de sa dactylographie, et à Christophe Troestler pour la mise en page.

Bibliographie

Ouvrages généraux (traitant la plupart des sujets abordés ici)

- [1] W.S. Anglin et J. Lambek, *The Heritage of Thales*, Springer, (Undergraduate Texts in Mathematics), 1998.
- [2] A. Dahan-Dalmedico/J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques*, Seuil 1986.
- [3] Jean Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, 1987.
- [4] Enrico Giusti, *La naissance des objets mathématiques, ellipses*, 2000.
- [5] Félix Klein, *Elementary mathematics from an advanced standpoint, Vol.1 : Arithmetic, Algebra, Analysis; Vol.2 : Geometry*, Dover publications.
- [6] John Stillwell, *Mathematics and Its History*, Springer-Verlag (Undergraduate Texts in Mathematics), 1991.

Équations et Théorie de Galois

- [7] Gilles Godefroy, *Montons les degrés*, prépublication de l'Institut de Mathématique et d'Informatique de l'UMH, 2001, Consultable et téléchargeable sur le site web :
<http://www.umh.ac.be/math/preprints/> Pour des copies « papier », s'adresser à l'Institut de Mathématique, Mons.
- [8] Michel Lartillier, *Les tribulations de l'équation du second degré*, *Mathématique et Pédagogie*, 115, 43–58, 1997.
- [9] Claude Mutaflan, *Équations algébriques et théorie de Galois*, Vuibert, 1980.
- [10] Ian Stewart, *Galois Theory*, Chapman and Hall, 1973.
- [11] J.P. Tignol, *Galois'theory of algebraic equations*, New-York, Longman, 1988.

- [12] B.L. van der Waerden, *A History of Algebra (from al-Khwarizmi to Emmy Noether)*, Springer-Verlag, 1985.
- [13] G. Verriest, *Œuvres mathématiques d'Évariste Galois* — publiées en 1897, suivies d'une notice sur Évariste Galois et la théorie des équations algébriques, Gauthier-Villars, 1951.

Les nombres complexes

- [14] IREM, *Images, Imaginaires, Imaginations, Une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes, ellipses*, 1998.

Symétrie, groupes, géométrie et les sciences de la nature

- [15] Francis Buekenhout et Jean Doyen, *Ensembles structurés et groupes de symétries, cours de candidature*, 1988. (Département de Mathématique de l'ULB, Campus Plaine, CP213, Boulevard du Triomphe, 1050 Bruxelles).
- [16] Francis Buekenhout, *Le Programme d'Erlangen (1872)*, Séminaire de Géométrie Élémentaire CREM-GEPEMA-UREM, 19 novembre 1999, pre-print.
- [17] Alain Connes, *Symétries*, Pour la Science 292, Février 2002.
- [18] Jacques Tits, *Symmetry*, Amer Math. Monthly 107, May 2000.
- [19] *La symétrie aujourd'hui*, Seuil, 1989.
- [20] *Les symétries de la nature*, Pour la Science, dossier, 1998.
- [21] Jacques Tits, *Symétries*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Série générale, La Vie des Sciences, Tome 2, N° 1, Janvier-Février 1985, pp. 13–25.

Galois le fit la nuit d'avant,
Möbius le faisait toujours du même côté,
Markov le faisait avec des chaînes,
Turing avait commencé, mais ne se décidait pas à finir,
et vous, comment le faites-vous?

Macros : nouvelles situations.

J.-P. HOUBEN, *Université Catholique de Louvain*

Mots-clés : Cabri-Géomètre, macro, arc capable, orthocentre, cercle inscrit, trisection.

On trouvera dans cet article les solutions des macros-constructions proposées dans l'article du numéro 137 de mai-juin 2002.

Orthocentre d'un triangle

L'orthocentre est l'intersection des hauteurs d'un triangle. Si donc, on se donne un triangle ABC , nous devons construire deux des hauteurs et rechercher leur intersection pour obtenir l'orthocentre.

On se donne donc un triangle ABC ⁽¹⁾. On trace ensuite les hauteurs issues de A et B et perpendiculaires ⁽²⁾ aux côtés opposés.

On termine en recherchant l'intersection O ⁽³⁾ de ces deux hauteurs.

A partir de la figure qui suit, on construit une macro avec :

Objets initiaux : Le triangle ABC (éventuellement les trois points A, B et C).

Objets finaux : Le point O qui en est l'orthocentre.

Valider une macro :

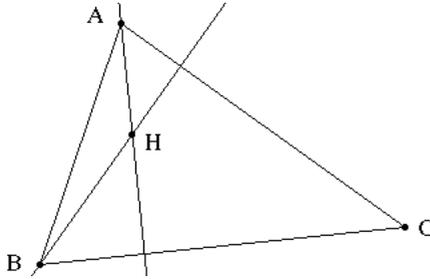
- nom de la macro : Orthocentre
- dessiner l'icône :
- écrire le texte d'aide :
Donner les trois sommets d'un triangle, la macro construit l'orthocentre du triangle.
- nom de l'enregistrement : ortcentr

Adresse de l'auteur: Jean-Paul Houben, Rue de l'Eglise, 78, 1301 - Bierges
 e-mail : Houben@anma.ucl.ac.be

⁽¹⁾ **Lignes** / Triangle

⁽²⁾ **Constructions** / Perpendiculaire

⁽³⁾ **Points** / Point(s) sur deux objets



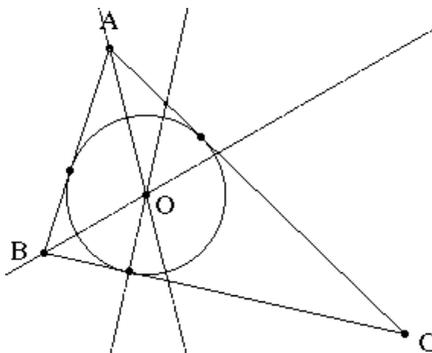
Cercle inscrit à un triangle

Comme dans la situation précédente, reprenons un triangle ABC. Le centre du cercle inscrit est à l'intersection ⁽⁴⁾ de deux des bissectrices ⁽⁵⁾.

Comme nous avons besoin du rayon du cercle inscrit, traçons la perpendiculaire issue du centre à l'un des côtés ⁽⁶⁾.

Déterminons l'intersection de cette perpendiculaire avec l'un des côtés ⁽⁷⁾. Terminons en traçant le cercle avec, comme centre, l'intersection des bissectrices et passant par le point d'intersection de la perpendiculaire avec le côté.

On a la figure finale :



⁽⁴⁾ **Points** / Point(s) sur deux objets

⁽⁵⁾ **Constructions** / Bissectrice

⁽⁶⁾ **Constructions** / Perpendiculaire

⁽⁷⁾ **Points** / Point(s) sur deux objets

Il reste à fixer les éléments de la macro.

Objets initiaux : Le triangle ABC

Objets finaux : Le cercle inscrit, son centre et les points de contacts.

Valider une macro :

- nom de la macro : Cercle inscrit.
- dessiner l'icône :
- écrire le texte d'aide : Donner les trois sommets d'un triangle, la macro construit le cercle inscrit au triangle.
- nom de l'enregistrement : Cercinsc

Trisection d'un segment

Pour diviser un segment $[A,B]$ en trois parties égales, on va faire appel au théorème de Thalès. Mais, pour éviter une macro non cohérente, il ne faut pas tracer une droite auxiliaire quelconque. Aussi choisirons-nous une droite perpendiculaire au segment $[A,B]$ en A ⁽⁸⁾.

Sur cette perpendiculaire, reportons la longueur du segment $[A,B]$ à l'aide d'un cercle centré en A avec comme rayon la longueur du segment $[A,B]$ ⁽⁹⁾. Nous obtenons sur la perpendiculaire un point d'intersection P . Le symétrique ⁽¹⁰⁾ de A par rapport à P donne le point Q . Enfin, le symétrique de P par rapport à Q donne la point R . Eventuellement, si les points sont en dehors de l'écran, on réduit la grandeur du segment $[A,B]$.

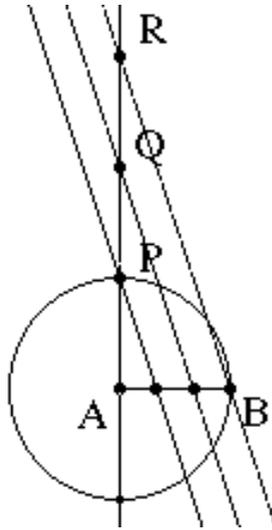
Nous avons maintenant sur notre perpendiculaire une suite de trois segments égaux $[A,P]$, $[P,Q]$, $[Q,R]$. On trace la droite BR , et les deux parallèles par P et Q ⁽¹¹⁾. On termine en recherchant l' intersection de chaque parallèle avec le segment $[A,B]$.

⁽⁸⁾ **Constructions** / Perpendiculaire

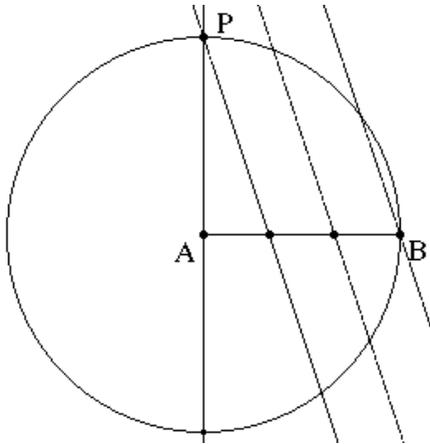
⁽⁹⁾ **Constructions** / Compas

⁽¹⁰⁾ **Transformations** / Symétrie centrale

⁽¹¹⁾ **Constructions** / Parallèle



En agrandissant le segment $[A,B]$ on a la figure finale :



qui va servir à définir les éléments de la macro.

Objets initiaux : Le segment $[A,B]$.

Objets finaux : Les deux points entre A et B.

Valider une macro :

- nom de la macro : Trisection d'un segment.
- dessiner l'icône :
- écrire le texte d'aide : désigner un segment, il sera divisé en trois parties égales.
- nom de l'enregistrement : triseq

Arc capable

Donnons-nous un segment $[A,B]$ et un angle XYZ déterminé par deux segments $[X,Y]$ et $[Y,Z]$.

Marquons cet angle ⁽¹²⁾ en pointant successivement X,Y puis Z . Mesurons cette marque ⁽¹³⁾.

En effet, en approchant de l'angle, on a à l'écran l'information << cette marque >> ⁽¹⁴⁾.

Nous allons reproduire l'angle XYZ sur le segment $[A,B]$, le sommet en B . Nous utiliserons pour cela une macro fournie avec le logiciel. Pointons avec la souris dans le menu Fichier pour Ouvrir successivement les répertoires du disque dur : Cabri-Géomètre

Macros

Base où nous trouverons le fichier <<Copie_an.Mac>> .

Une fois ce fichier ouvert, nous découvrirons dans le menu correspondant aux macros-constructions l'outil Copie d'angle avec le commentaire :

Sélectionner trois points AOB , puis 2 points $A'O'$.

Cette macro construit la demi-droite $O'B'$ telle que angle $(AOB) = \text{angle}(A'O'B')$.

En utilisant cette macro ⁽¹⁵⁾, on obtient la figure

⁽¹²⁾ **Affichage** / Marquer un angle

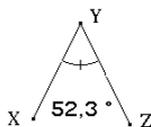
⁽¹³⁾ **Mesures** / Mesure d'un angle

⁽¹⁴⁾ Il y a une différence entre la mesure de la marque et la mesure de l'angle.

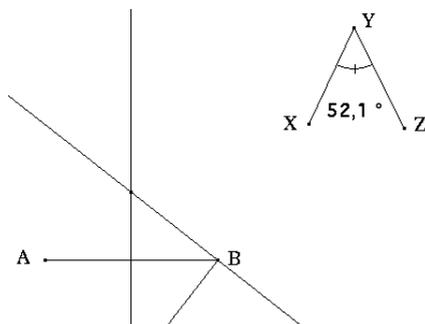
La mesure de la marque donne la mesure positive de l'angle de la rotation qui amène le premier segment sur le second (cette valeur varie de 0° à 360°).

Par contre, la mesure de l'angle sera la mesure du plus petit angle déterminé par les deux segments (cette valeur varie de 0° à 180°)

⁽¹⁵⁾ **Macro** / Copie d'angle



Il nous reste à construire la médiatrice du segment $[A,B]$ ⁽¹⁶⁾ et la perpendiculaire en B ⁽¹⁷⁾ à la demi-droite construite par la macro.



L'intersection ⁽¹⁸⁾ C de ces deux droites est le centre d'un cercle qui contient une partie du lieu de l'arc capable recherché. Traçons le cercle de centre C et passant par A ⁽¹⁹⁾.

Il nous reste pour terminer à tracer l'arc. Comme un arc est défini par trois points, recherchons l'intersection M du cercle avec la médiatrice du segment $[A,B]$. Puis, construisons l'arc passant par A, M et B ⁽²⁰⁾ et cachons ⁽²¹⁾ le cercle et le point diamétralement opposé à M.

⁽¹⁶⁾ **Constructions** / Médiatrice

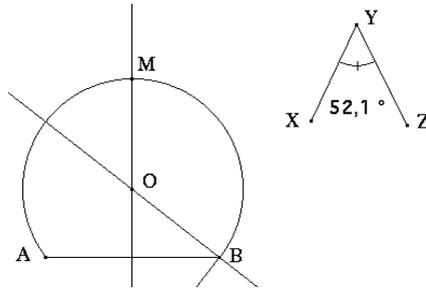
⁽¹⁷⁾ **Constructions** / Perpendiculaire

⁽¹⁸⁾ **Points** / Point(s) sur deux objets

⁽¹⁹⁾ **Ligne** / Cercle

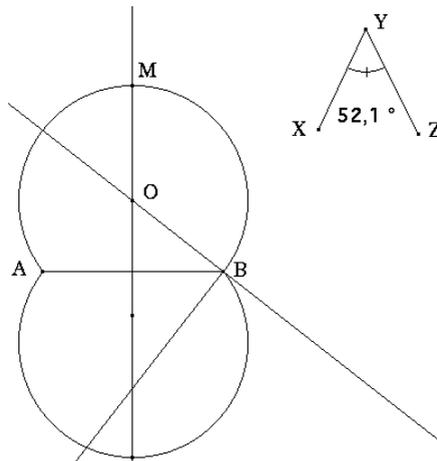
⁽²⁰⁾ **Courbes** / Arc

⁽²¹⁾ **Aspect** / Cacher/Montrer



Le lieu final s'obtient en construisant le symétrique ⁽²²⁾ par rapport au segment $[A,B]$ de l'arc que nous venons de construire. De même pour son centre O : O' .

On a ainsi la figure finale :



qui va servir pour la macro.

Objets initiaux : Le segment $[A,B]$ et les trois points X,Y et Z qui définissent l'angle de sommet Y .

Objets finaux : Les deux arcs construits et leur centre O et O' .

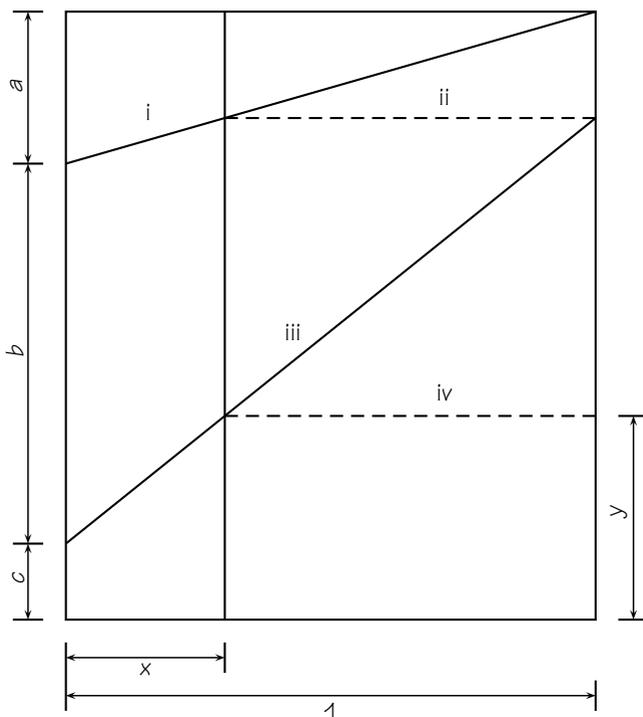
Valider une macro :

⁽²²⁾ **Applications** / Symétrie orthogonale

- nom de la macro : arcs capables
 - dessiner l'icône :
 - écrire le texte d'aide : Désigner un segment $[A,B]$, puis trois points X,Y et Z qui définissent l'angle de sommet Y .
 - nom de l'enregistrement : arcapabl
-

Second degré

L'une des dimensions du rectangle ci-dessous est l'unité, l'autre est $a + b + c$. Sur le côté de longueur unité, on place x . On trace successivement les droites (i), (ii), (iii) et (iv) et on obtient y . Par des considérations élémentaires sur les triangles semblables, on montre que $y = ax^2 + bx + c$! Cette étonnante construction géométrique n'utilisant que la règle est due à Lagrange. Elle peut se généraliser pour trouver des valeurs de polynômes $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \dots$ Que faire lorsqu'un des coefficients est négatif ?



Les hyperréels en analyse.

V. HENRY, *Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales, Université de Liège*

1. Introduction

Leibniz, du fond de son bureau, s'interroge sur la vitesse et sur la succession des temps :

« La distance entre les temps est infiniment petite, mais pourtant elle n'est pas rien cette distance. Et si elle n'est pas rien, elle doit être représentée par un nombre (...) qui doit être plus petit que tout autre nombre (...) mais pas 0. » [2]

Plus tard, les mathématiciens de l'époque : Leibniz, Newton, D'Alembert, ... tiennent ce discours face au public qui leur demande de décrire ces infinitésimaux :

- Mathématiciens : *« Ils se comportent comme des nombres mais naturellement ils sont plus petits que tout autre nombre. »*
- Public : *« Zéro, alors. »*
- Mathématiciens : *« Non, pas tout à fait 0, plus grands que ça. » [2]*

Bien en mal d'être plus précis, condamnés par l'évêque et philosophe Berkeley, les mathématiciens mirent de côté ces nombres infiniment petits que pourtant ils considéraient comme des « fictions utiles » mais dont, rigoureusement, ils ne pouvaient prouver l'existence.

Et pourtant, ces nombres n'ont pas disparu; nous en avons pour preuve plusieurs textes d'économistes qui ont ressenti clairement le besoin d'utiliser ces notions d'infiniment petit sans pouvoir le justifier :

« Rien n'indique (...) qu'une augmentation infiniment petite de p_a y produise une diminution infiniment petite de d_a . » [8]

« Cette dérivée mesure la réaction moyenne de y à une variation très petite, infinitésimale, de x . Le mathématicien déplore le manque de rigueur de cette définition, mais l'économiste passe outre. Homme pratique, il avoue sans complexe confondre « très petite variation » et « variation égale à l'unité », cette variation étant choisie la plus faible possible. » [5]

ou encore, actuellement, de mathématiciens soucieux de développer l'intuition du lecteur :

« (...) des phénomènes qui attirent l'esprit vers l'infiniment grand ou vers l'infiniment petit. » [1]

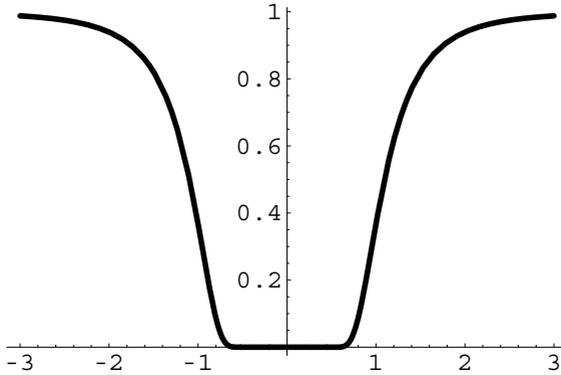
Ce n'est qu'en 1961, que Robinson, muni des méthodes modernes de logique mathématique, a enfin pu donner les fondements rigoureux à la théorie des infiniment petits et grands qui porte aujourd'hui le nom d'« Analyse Non Standard ». Par la suite, aux alentours de 1977, Nelson donna une version axiomatique de cette théorie permettant de contourner les obstacles liés au formalisme de la logique mathématique.

Nous nous contenterons ici de présenter une introduction pédagogique à cette théorie, introduction inspirée de [6] et que nous voulons à la portée de tout lecteur disposant d'un bagage mathématique élémentaire.

2. Exemples introductifs

- Considérons un espace (une table ou un bureau, par exemple) que nous aurions vidé de tout objet. A priori, sur cet espace, il n'y a rien. Et pourtant, si nous apportons un microscope suffisamment puissant, nous voyons alors apparaître quantité d'entités invisibles à l'oeil nu, plus petites que tout ce que nous pouvons observer mais qui ne sont pas rien.
- Considérons à présent la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout réel x non-nul. Le logiciel Mathematica nous fournit la représentation graphique illustrée sur la figure 1. On constate que lorsque x s'approche de 0, $f(x)$ se confond avec l'axe des abscisses ce qui semble suggérer que $f(x)$ est nul; de plus, un zoom autour de 0 n'apporte rien, $f(x)$ est toujours confondu avec l'axe des abscisses. Or, nous savons qu'une exponentielle est toujours positive ... Mathematica se trompe-t-il?

FIG. 1: Représentation graphique de $f(x) = e^{-\frac{1}{x^4}}$



Non, mais $f(x)$ devient tellement proche de 0 que, à l'oeil nu, il est impossible de voir la différence entre $f(x)$ et 0. Par contre, comme dans l'exemple précédent, nous pourrions imaginer un microscope suffisamment puissant pour nous permettre de voir cette différence.

3. L'ensemble des hyperréels

Toutes ces considérations suggèrent l'existence de nombres plus petits que tout réel positif mais qui ne sont pas nuls. Ainsi, de façon un peu parallèle à l'introduction du corps des complexes qui étend les réels, on crée une autre extension des réels : l'ensemble des hyperréels que nous notons ${}^*\mathbb{R}$; les éléments de ${}^*\mathbb{R}$ qui ne sont pas réels étant appelés nombres non standards. Pour construire cet ensemble, nous supposons ⁽¹⁾ simplement au départ, qu'il existe au moins un élément infiniment petit positif (ipp) c'est-à-dire plus petit que tout réel positif et non-nul.

- Si nous appelons ce nombre ε , nous obtenons immédiatement que 2ε , $\frac{\varepsilon}{4}$ ou ε^3 sont également ipp et que $-\varepsilon$, $-\varepsilon^2$ ou -3ε sont infiniment petits négatifs (ipn). Pour « observer » ces nombres, on pourrait imaginer disposer d'un microscope infiniment puissant qui, pointé sur

⁽¹⁾ L'existence de ce nombre peut être prouvée rigoureusement mais la construction est trop technique pour être expliquée dans cet article

O , nous montrerait en plus du réel O , ces nombres *infiniment petits* (*ip*) que, à l'oeil nu, nous ne distinguons pas.

- Puisque nous avons supposé que ε était strictement positif mais plus petit que tout réel positif, on peut écrire, en particulier, que

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{r}, \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{\varepsilon} > r, \quad \forall r \in \mathbb{R}^+.$$

On obtient ainsi l'existence d'un nombre qui est plus grand que tout réel positif, qui fait lui aussi partie de notre ensemble des hyperréels et que nous qualifierons d'*infiniment grand positif* (*igp*). Appelons ce nombre ω ; de même que pour les *infiniment petits*, nous pouvons dire que $2\omega, \omega + 1$ et ω^3 sont également *infiniment grands positifs* et que $-\omega, -3\omega$ et $-\omega^2$ sont *infiniment grands négatifs* (*ign*).

- Reprenons notre microscope et déplaçons-le pour le pointer sur un réel quelconque r . Nous observons, non plus des nombres *infiniment petits* mais bien *infiniment proches* de r c'est-à-dire qui sont plus proches de r que n'importe quel réel. Tous ces nombres font encore partie de l'ensemble des hyperréels.

La représentation de la figure 2 permet de visualiser tous les nouveaux nombres créés ainsi à partir d'un seul.

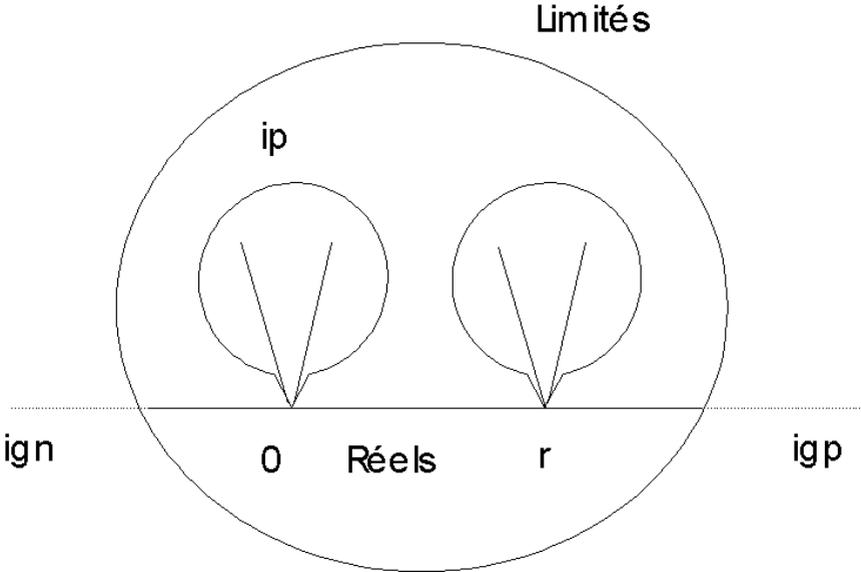
4. Définitions

- Un hyperréel *x est dit *infiniment proche de 0* (*iprz*) si ${}^*x = O$ ou *x *ip*; O est donc le seul réel *iprz*
- Tous les nombres situés dans la « bulle » pointée sur un réel r sont dits *infiniment proches de r*; r est le seul réel *infiniment proche* de lui-même. Cette « bulle » est appelée *halo de r* et est notée ${}^*H(r)$.
- Deux nombres hyperréels *x et *y sont dits *infiniment proches*, ce qui se note ${}^*x \approx {}^*y$, si ${}^*x - {}^*y$ est *iprz* ou encore s'il existe α *iprz* tel que

$${}^*x - {}^*y = \alpha \Leftrightarrow {}^*x = {}^*y + \alpha.$$

- Un hyperréel *x est *limité* s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que ${}^*x \approx r$.
Un hyperréel *x est *appréciable* s'il est *limité* et non *iprz*.

Fig. 2: Les réels et leurs halos



5. Règles de Leibniz

Les présentations étant faites, examinons les règles naturelles qui régissent les comportements de ces nouveaux nombres. Ces règles, parfaitement conformes à l'intuition, sont appelées « règles de Leibniz » et sont présentées sous la forme des tableaux ci-dessous ⁽²⁾.

x	ign	appr < 0	ipn	0	ipp	appr > 0	igp
-x	igp	appr > 0	ipp	0	ipn	appr < 0	ign
$\frac{1}{x}$	ipn	appr < 0	ign	-	igp	appr > 0	ipp

x + y	ign	appr	iprz	igp
ign	ign	ign	ign	?
appr	ign	lmt	appr	igp
iprz	ign	appr	iprz	igp
igp	?	igp	igp	igp

⁽²⁾ Les démonstrations de ces règles sont présentées dans [7]

$x \times y$	ig	appr	ip	O
ig	ig	ig	?	O
appr	ig	appr	ip	O
ip	?	ip	ip	O
O	O	O	O	O

Remarque. Le ? signifie qu'il s'agit d'une indétermination. En effet, par exemple, le produit d'un infiniment grand par un infiniment petit dépend entièrement des nombres concernés. Il suffit de considérer les différents exemples de produit entre un infiniment petit et un infiniment grand suivants pour s'en persuader :

$$\varepsilon \cdot \frac{1}{2\varepsilon}, \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}$$

6. Partie standard d'un hyperréel limité

6.1. Définition

Nous admettrons que, pour tout hyperréel limité *x , il existe un et un seul $r \in \mathbb{R}$ tel que ${}^*x \approx r$. Ce réel r est appelé *partie standard* de *x et est noté $st({}^*x)$. Donnons quelques exemples.

- $st(\varepsilon) = 0, \forall \varepsilon \text{ ip}$
- ${}^*x \text{ appr} \Rightarrow st({}^*x) \neq 0$
- $(\varepsilon \text{ ip}, r \in \mathbb{R}) \Rightarrow st(r + \varepsilon) = r$

6.2. Propriétés algébriques

Examinons le comportement de la partie standard d'un hyperréel vis-à-vis de la somme, de la différence, du produit, du quotient et de l'ordre ⁽³⁾.

- $st({}^*x + {}^*y) = st({}^*x) + st({}^*y)$
- $st({}^*x - {}^*y) = st({}^*x) - st({}^*y)$
- $st({}^*x \times {}^*y) = st({}^*x) \times st({}^*y)$
- $st\left(\frac{{}^*x}{{}^*y}\right) = \frac{st({}^*x)}{st({}^*y)}$ si $st({}^*y) \neq 0$
- $st({}^*x) < st({}^*y) \Rightarrow {}^*x < {}^*y$

⁽³⁾ Les démonstrations de ces propriétés s'obtiennent sans difficulté et peuvent être consultées dans [7]

- $*x < *y \Rightarrow \text{st}(*x) \leq \text{st}(*y)$
- $*x = *y \Rightarrow \text{st}(*x) = \text{st}(*y)$

7. Principes de l'analyse non-standard

- Extension des intervalles de \mathbb{R} à $*\mathbb{R}$

Tout intervalle I de \mathbb{R} s'étend en un intervalle $*I$ de $*\mathbb{R}$ défini de la même façon que I . Si a et b sont des réels tels que $a < b$,

$$\begin{aligned} *]a, b[&:= \{ *x \in *\mathbb{R} : a \leq *x < b \} & ; & *]a, b[&:= \{ *x \in *\mathbb{R} : a < *x < b \} \\ *]a, b[&:= \{ *x \in *\mathbb{R} : a \leq *x < b \} & ; & *]a, b[&:= \{ *x \in *\mathbb{R} : a < *x \leq b \} \\ *]a, +\infty[&:= \{ *x \in *\mathbb{R} : a \leq *x \} & ; & *]a, +\infty[&:= \{ *x \in *\mathbb{R} : a < *x \} \\ *]-\infty, b] &:= \{ *x \in *\mathbb{R} : *x \leq b \} & ; & *]-\infty, b] &:= \{ *x \in *\mathbb{R} : *x < b \} \end{aligned}$$

- Principe d'extension :

Toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ s'étend naturellement en une fonction $*f : *I \rightarrow *\mathbb{R}$ telle que $*f(r) = f(r)$, $\forall r \text{ réel} \in \text{dom } f$. Cette nouvelle fonction $*f$ est appelée l'extension naturelle de f

Toutes les fonctions élémentaires de l'analyse classique peuvent ainsi être étendues en des fonctions définies et à valeurs dans $*\mathbb{R}$.

Un exemple important est celui de la fonction « partie entière », que l'on note $E(x)$ et qui, pour rappel, à x fait correspondre le plus grand entier inférieur ou égal à x . L'ensemble de variation de $*E(x)$, l'extension naturelle de $E(x)$, forme l'ensemble de ce que nous appellerons les hyperentiers. Parmi ceux-ci, les hyperentiers limités coïncident avec les éléments de \mathbb{Z} tandis que les hyperentiers non limités sont des nombres non-standard infiniment grands (positifs ou négatifs).

- Principe de transfert :

Il importe à présent d'étendre non plus les fonctions mais les propriétés classiques des fonctions à leurs extensions naturelles sur $*\mathbb{R}$. Le principe de transfert règle ce problème en affirmant, intuitivement, que toute propriété standard, c'est-à-dire tout égalité ou inégalité vérifiée par une ou plusieurs fonctions sur un intervalle I est aussi vérifiée par les extensions naturelles de ces fonctions sur $*I$. Ce principe peut être énoncé de manière plus formelle mais nous contenterons de cette approche intuitive dans cette introduction. Notons cependant que ce principe permet entre autres de déterminer les domaines de définition des fonctions hyperréelles, d'étendre les propriétés relatives aux extrema ou à la croissance ou décroissance des

fonctions ou encore les propriétés propres à certaines fonctions. Par suite, nous déciderons de ne plus faire de distinction entre une fonction réelle et son extension naturelle et nous adopterons dès lors la même notation f .

8. Continuité

8.1. Définition

Une fonction f est continue en a point intérieur au domaine de f si

$$\forall \text{ } {}^*x \approx a \text{ et } {}^*x \in \text{dom}f, f(x) \approx f(a)$$

ou encore si

$$\text{st}({}^*x) = a \Rightarrow \text{st}(f({}^*x)) = f(a).$$

8.2. Exemples

Proposition 1 :

Les fonctions x^n , $\sin x$, $\cos x$ et e^x sont continues en $a \in \mathbb{R}$; \sqrt{x} et $\ln x$ sont continues en b , réel strictement positif.

Démontrons, par exemple, la propriété relative à la fonction puissance. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit ${}^*x \approx a$. Il existe α iprz tel que ${}^*x = a + \alpha$. Dès lors,

$$f({}^*x) = f(a + \alpha) = (a + \alpha)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} \alpha^k$$

et on a $\text{st}((a + \alpha)^n) = a^n$ puisque tous les autres termes de la somme contiennent un facteur α et sont donc iprz par les règles de Leibniz.

8.3. Règles de continuité

Des propriétés de la partie standard, on déduit immédiatement que

Proposition 2 :

Si f et g sont deux fonctions continues dans I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$ et $|f|$ sont continues dans I ; si, de plus, $g(x) \neq 0$ dans I , alors $\frac{f}{g}$ est continue dans I .

9. Limites des valeurs d'une fonction

9.1. Définitions

Soit f définie sur $D \subset \mathbb{R}$, et soient a et $l \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ si (${}^*x \approx a, {}^*x \neq a$) $\Rightarrow f({}^*x) \approx l$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ si (${}^*x \approx a, {}^*x < a$) $\Rightarrow f({}^*x) \approx l$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ si (${}^*x \approx a, {}^*x > a$) $\Rightarrow f({}^*x) \approx l$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ si (${}^*x \text{ igp}$) $\Rightarrow f({}^*x) \approx l$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ si (${}^*x \text{ ign}$) $\Rightarrow f({}^*x) \approx l$

Nous pouvons définir de manière similaire les limites infinies.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si (${}^*x \approx a, {}^*x \neq a$) $\Rightarrow f({}^*x) \text{ igp}$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ si (${}^*x \approx a, {}^*x < a$) $\Rightarrow f({}^*x) \text{ igp}$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ si (${}^*x \approx a, {}^*x > a$) $\Rightarrow f({}^*x) \text{ igp}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si (${}^*x \text{ igp}$) $\Rightarrow f({}^*x) \text{ igp}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si (${}^*x \text{ ign}$) $\Rightarrow f({}^*x) \text{ igp}$

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si (${}^*x \approx a, {}^*x \neq a$) $\Rightarrow f({}^*x) \text{ ign}$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ si (${}^*x \approx a, {}^*x < a$) $\Rightarrow f({}^*x) \text{ ign}$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ si (${}^*x \approx a, {}^*x > a$) $\Rightarrow f({}^*x) \text{ ign}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si (${}^*x \text{ igp}$) $\Rightarrow f({}^*x) \text{ ign}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ si (${}^*x \text{ ign}$) $\Rightarrow f({}^*x) \text{ ign}$

9.2. Propriétés

1. Il découle des définitions qu'une fonction f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

2. Unicité de la limite

Vu l'unicité de la partie standard, il est immédiat de conclure que lorsque la limite d'une fonction existe, elle est unique.

3. Limites et opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions réelles, l et $k \in \mathbb{R}$. On utilisera θ pour représenter indifféremment $a, a^+, a^-, +\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow \theta} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow \theta} g(x) = k$, alors

- $\lim_{x \rightarrow \theta} (f(x) + g(x)) = l + k$
- $\lim_{x \rightarrow \theta} (f(x) - g(x)) = l - k$
- $\lim_{x \rightarrow \theta} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot k$

- si, de plus, $k \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow \theta} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{k}$

Démontrons la propriété relative au quotient pour $\theta = a$ réel. Soit ${}^*x \approx a$, ${}^*x \neq a$, $f({}^*x) \approx l$ et $g({}^*x) \approx k$. On a successivement

$$\begin{aligned} \frac{f({}^*x)}{g({}^*x)} - \frac{l}{k} &= \frac{f({}^*x)k - lg({}^*x)}{kg({}^*x)} \\ &= \frac{f({}^*x)k - lk + lk - lg({}^*x)}{kg({}^*x)} \\ &= \frac{(f({}^*x) - l)k - l(g({}^*x) - k)}{kg({}^*x)} \end{aligned}$$

Le dénominateur est appréciable, les deux parenthèses du numérateur sont iprz, l et k sont réels; dès lors, par les règles de Leibniz, on obtient que le quotient est bien iprz et on a

$$\frac{f({}^*x)}{g({}^*x)} \approx \frac{l}{k}.$$

4. Théorème de l'étau

Théorème 1 :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ et si $g(x)$ est telle que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

Preuve :

Soit ${}^*x \approx a$, ${}^*x \neq a$, si $f({}^*x) \approx l$, $h({}^*x) \approx l$ et $f({}^*x) \leq g({}^*x) \leq h({}^*x)$ alors,

$$f({}^*x) - l \leq g({}^*x) - l \leq h({}^*x) - l.$$

Dès lors, $g({}^*x) - l$ est iprz puisqu'il est compris entre deux nombres iprz.

10. Définition de la dérivée

Une fonction f est dérivable en $a \in \text{dom } f$ si $\forall {}^*x \approx a$, le quotient différentiel

$$\frac{f({}^*x) - f(a)}{{}^*x - a}$$

est un limité dont la partie standard ne dépend pas de *x . Dans ce cas,

$$\text{st} \left(\frac{f({}^*x) - f(a)}{{}^*x - a} \right) = f'(a)$$

est le nombre dérivé de f en a .

11. Conclusion

Comme précisé dans l'introduction, les développements ci-dessus ne constituent qu'une introduction à l'« Analyse non standard ». Les développements ultérieurs sont enseignés par le service de mathématiques en première candidature en Ingénieur de Gestion où le cours se poursuit jusqu'au calcul intégral. Le choix de cet enseignement fût consécutif aux nombreux obstacles rencontrés par les étudiants lors de l'abord du calcul différentiel, obstacles notamment liés au formalisme des définitions et démonstrations utilisant les classiques « ε , η ». Cette approche n'élimine certes pas toutes les difficultés de l'analyse mais permet une vision intuitive des notions enseignées.

Bibliographie

- [1] Groupe AHA, "Vers l'infini pas à pas", manuel pour l'élève, De Boeck & Larcier, Bruxelles, 1999
- [2] BERLINSKI D., "La vie rêvée des maths", Editions Saint-Simon, pour la traduction française, 2001
- [3] DELEDICQ A. - CASIRO F., "Apprivoiser l'infini", ACL Editions, avril 1997
- [4] DELEDICQ A. - DIENER M., "Leçons de calcul infinitésimal", ACL Editions/ Armand Colin, Paris, 1989
- [5] DUPONT B. - RYS A., "Introduction à la microéconomie", Armand Colin Editeur, Paris, 1993
- [6] KEISLER H.J., "Elementary Calculus", Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976
- [7] PETRY A., "Analyse infinitésimale", Cours de première candidature en ingénieur industriel, Imprisis, septembre 2001
- [8] WALRAS L., "Eléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale", Paris, 1952

Actimath

- ♥ Pour construire du sens en mathématique
- ♣ Pour rendre l'élève actif tout le long de son apprentissage
- ♦ Pour un enseignement en spirale expérimenté sur le terrain



Actimath 4 : 1 manuel relié et un cahier d'activités facultatif.

Actimath 5 - 4h : Printemps 2003 - 2 manuels reliés et un fascicule de l'élève facultatif contenant une boîte à outils.

Venez nombreux aux **séances d'information** en présence des auteurs !



VAN IN

Éditions **VAN IN** - Avenue Eiffel 8 - 1300 Wavre
Tél. : 010 45 55 30 - Fax : 010 45 23 51 - editions@vanin.be - www.vanin.be

Situation-problème

R. Belloeil

Pourquoi la dérivée de $(3x + 1)^2$ n'est-elle pas $2(3x + 1)$?

La dérivation des fonctions composées semble transgresser le principe de substitution.

Cet article veut montrer qu'en insistant sur le changement de variable, on peut redonner du sens à la formule usuelle et utiliser des schémas pour rendre naturel le calcul de la dérivée d'une fonction composée.

L'activité proposée ici a été réalisée pour des élèves de la filière économique et sociale mais peut être adaptée pour d'autres séries.

Le problème de la substitution

Les élèves sont tentés d'écrire que la dérivée de $(3x+1)^2$ est $2(3x+1)$, puisque celle de X^2 est $2X$. Il s'agit d'une utilisation incorrecte du principe de substitution, qui veut que si une relation $R(X)$ est vraie pour $X = 3x + 1$ alors la relation $R(3x+1)$ est vraie aussi. En général, la relation $R(X)$ reste vraie dans un certain domaine de validité de X , et il suffit alors de s'assurer que $3x + 1$ est bien dans ce domaine. Mais, ici, la variable X par rapport à laquelle on dérive est sous-entendue dans la relation R ; c'est pourquoi on ne peut remplacer seulement X par $3x + 1$ si on veut dériver par rapport à x .

Adresse de l'auteur: Rémi Belloeil, Rue de la Warta, 1, 35200 - Rennes - France
e-mail : belloeilre@aol.com

Cet article est paru dans la rubrique « Dans nos classes » du numéro 433 (Mars-Avril 2001) du Bulletin de l'APMEP et est reproduit ici grâce à un accord de réciprocité entre nos deux sociétés.

Notez bien que développer l'expression à dériver n'explique pas pourquoi on ne peut pas seulement substituer $3x + 1$ à X , mais au contraire met le problème en évidence.

Il serait très ennuyeux que l'élève garde une impression de malaise vis à vis du principe de substitution car il sert à résoudre des systèmes d'équations et à calculer des images de fonctions. Comment aborder les systèmes d'équations différentielles si cette question n'est pas résolue?

Le coût marginal et la dérivation

C'est en enseignant dans la filière Économique et Sociale (ES) que j'ai eu l'idée de l'activité suivante. Précisons que le coût marginal est le coût de fabrication d'un objet supplémentaire lorsqu'on en a fabriqué n , autrement dit si le coût de fabrication de n objets est $f(n)$, le coût marginal pour n objets est $f(n+1) - f(n)$. Lorsque n est grand, le coût marginal est proche du nombre dérivé en n , c'est pourquoi en économie, on remplace souvent le coût marginal par la fonction dérivée du coût. Les élèves de la filière ES sont habitués à ce type d'exercice, il est donc normal de s'appuyer sur l'intuition qui peut en découler. Par contre, pour les élèves de la filière Scientifique (S) ⁽¹⁾, il est plus logique de s'appuyer sur la notion de vitesse.

L'activité

Le texte ci-dessous ne doit pas être distribué aux élèves, c'est l'enseignant qui pose les questions au fur et à mesure de l'activité en respectant le temps de réflexion de la classe. Il est préférable qu'il les note au tableau.

Une entreprise fabrique des bouteilles de 2 litres de jus de fruit. La fabrication et la mise en bouteille de n litres de jus de fruit en une seule journée coûte $g(n)$ € avec :	NB. On considère que g est continue et dérivable alors que dans la situation n est un entier.
---	---

⁽¹⁾ correspondant au volume horaire de 6 périodes/semaine en Belgique.

Situation-problème

$$g(n) = 1000 + 0,6n - 0,0001n^2$$

(où $n \in [0, 4000]$)

a) Calculer le coût marginal pour n litres de jus de fruit, c'est-à-dire $g'(n)$.

Le coût marginal pour n litres de jus de fruit est $g'(n) = 0,6 - 0,0002n$.

b) Combien de litres de jus de fruit vend l'entreprise lorsqu'elle fabrique 1000 bouteilles?

Fabriquer 1000 bouteilles correspond à fabriquer 2000 litres de jus de fruit.

Quel est le coût de fabrication de 1000 bouteilles?

Le coût est $g(2000) = 1800$ €.

Combien de litre de jus de fruit vend l'entreprise lorsqu'elle fabrique x bouteilles?

Le coût de fabrication de x bouteilles, c'est-à-dire $2x$ litres de jus de fruit, est :

$$g(2x) = 1000 + 0,6(2x) - 0,0001(2x)^2$$

$$g(2x) = 1000 + 1,2x - 0,0004x^2$$

$$f(x) = 1000 + 1,2x - 0,0004x^2$$

c) On note f la fonction qui au nombre x de bouteilles de jus de fruit associe le coût de fabrication de ces x bouteilles.

$$f'(x) = 1,2 - 0,0008x$$

Calculer le coût marginal pour 1000 bouteilles, $f'(1000)$.

$$f'(1000) = 1,2 - 0,0008 \cdot 1000 = 0,4$$

d) Comparer le coût marginal pour 1000 bouteilles avec le coût marginal pour 2000 litres, $g'(2000)$. Expliquer.

$$g'(2000) = 0,6 - 0,0002 \cdot 2000 = 0,2$$

NB. Laisser le temps aux élèves de trouver leur propre réponse. Ne pas donner la parole aux plus rapides.

On remarque que $f'(1000) = 2 \times g'(2000)$. Le coût de fabrication de la 1001^e bouteille est le double du prix de fabrication du 2001^e litre puisqu'il y a 2 litres par bouteilles.

Décomposer la fonction f qui au nombre x de bouteilles de jus de fruit associe le coût $f(x)$.

$$\begin{array}{ccc} x \text{ (bout.)} & \xrightarrow{f} & f(x) \\ x \text{ (bout.)} & \xrightarrow{u} 2x = n \text{ (litres)} & \xrightarrow{g} g(n) \end{array}$$

Situation-problème

Écrire une relation entre $f'(x)$ et $g'(n)$.

Ainsi $f(x) = g[u(x)]$ ou encore $f = gou$.
 $f'(x) = 2g'(n)$.

Remarque.

$f'(x) = 2g'(2x)$ puisque $n = 2x$.

$f'(x) = 1,2 - 0,0008x$

et

$2g'(2x) = 2 \times [0,6 - 0,0002(2x)]$

$2g'(2x) = 1,2 - 0,0008x$

La relation trouvée est bien vérifiée pour tout x .

Quelques remarques sur l'activité

Cette activité introduit la formule; la réaliser après que les élèves aient appris cette formule ou à titre d'exercice d'application peut entraîner d'autres difficultés. En particulier l'intervention de l'enseignant est nécessaire pour contrôler le bon résultat à la question b). On peut cependant donner les questions a) et b) en préparation, puis faire la suite en classe.

Il pourrait paraître plus normal de partir du coût de fabrication de n bouteilles, mais lorsque je l'ai fait, les élèves ont eu beaucoup plus de difficultés à trouver la relation entre x et n , puis à faire la substitution. La question b) ne doit pas être modifiée, ni supprimée sans précaution. Le schéma peut être donné et utilisé dès la question c).

À la question d) il faut laisser le temps à chaque élève de trouver l'explication, par exemple demander à chacun d'écrire sa phrase personnelle avant de donner une réponse collective. C'est le but même de l'activité.

Résolution du paradoxe de la substitution

La dérivée de $x \rightarrow g(2x)$ n'est pas $g'(2x)$!

En effet, g' est la dérivée de $n \rightarrow g(n)$ par rapport à n et non par rapport à x .

Changer de variable change la dérivée plus qu'une simple substitution.

En fait c'est la notation f' qui fait obstacle à la compréhension car elle fait disparaître la variable.

Il peut être utile d'employer la notation des physiciens (entre autres) :

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

Théorème général

Soit f une fonction définie par $f(x) = g[u(x)]$ sur un intervalle contenant un réel x_0 .

• Si u est dérivable en x_0 , s'il existe un intervalle $]a, b[$ contenant x_0 sur lequel u ne prend la valeur $u(x_0) = n_0$ que pour x_0 , et si g est dérivable en n_0 alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = u'(x_0) \times g'(n_0)$.

• Si u est constante sur un intervalle $]a, b[$ contenant x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$.

Démonstration

Pour tout réel x de $]a, b[$ distinct de x_0 :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g[u(x)] - g[u(x_0)]}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

(car $u(x) - u(x_0)$ ne s'annule pas sur $]a, b[\setminus\{x_0\}$)

Or

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = n_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow n_0} \frac{g(n) - g(n_0)}{n - n_0} = g'(n_0),$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g[u(x)] - g[u(x_0)]}{u(x) - u(x_0)} = g'(n_0)$$

d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée (qui ne pose aucun problème).

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) \times g'(n_0).$$

Si u est constante sur un intervalle $]a, b[$ contenant x_0 , f est constante sur $]a, b[$: la conclusion est évidente.

En fait la condition « il existe un intervalle $]a, b[$ contenant x_0 sur lequel u ne prend la valeur $u(x_0) = n_0$ que pour x_0 » est vérifiée pour les fonctions polynômes ou rationnelles non constantes, la fonction racine carrée, etc.

Pour citer un exemple, on peut prendre $u(x) = (x - 3)^2 \sin\left(\frac{1}{x-3}\right)$ avec $u(3) = 0$. La composée de cette fonction avec une fonction g dérivable en 0, est une fonction dérivable en 3, mais la démonstration proposée ci-dessus ne convient pas.

Comme on sait faire la démonstration autrement, on peut accepter d'admettre que cette condition n'est pas indispensable.

Application pratique

Pour dériver, par exemple f définie par $f(x) = (x^2 - 5x + 3)^{-7}$, on pourra disposer ainsi :

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) \\ x & \xrightarrow{u} x^2 - 5x + 3 = X & \xrightarrow{g} X^{-7} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [2x - 5] [-7X^{-8}] \\ &= [2x - 5] [-7(x^2 - 5x + 3)^{-8}] \end{aligned}$$

g est dérivable pour tout X non nul, et u en tout réel x , donc f est dérivable en tout réel x tel que $x^2 - 5x + 3 \neq 0$, et dans ce cas, $f'(x) = -7(x^2 - 5x + 3)^{-8}$.

L'avantage d'utiliser la lettre X pour désigner la variable de g est simplement que les formules sont données avec une variable notée x . Le transfert est immédiat.

Cette technique met en évidence la décomposition de f et le changement de variable.

À l'usage, les élèves réussissent mieux qu'avec la formule $(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$ que l'on trouve dans les formulaires. En effet cette formule est ambiguë, car on y écrit de la même façon des dérivées par rapport à des variables différentes. On pourrait aussi écrire : $(v \circ u)'_{(x)} = u'_{(x)}v'_{(u)}$. On devrait préciser d'une façon ou d'une autre que l'on dérive u par rapport à x et v par rapport à u (ou X). Dans ce cas, le schéma ci-dessus dit cela, et c'est aussi efficace et intelligent que de ressortir la formule $(u^n)' = nu^{n-1}$.

Cependant, il faut établir ce genre de formules, les rendre familières aux élèves et mettre en évidence leur structure pour qu'ils puissent trouver les primitives usuelles.

Bien entendu, l'habitude doit permettre d'écrire directement l'expression de la fonction dérivée sans refaire le schéma, notamment pour les fonctions simples comme $x \rightarrow \sqrt{3x+5}$.

Quelques difficultés d'application

Il arrive qu'à un certain moment, l'élève mélange les deux méthodes : utilisation du schéma et de la formule. Dans l'exemple de la page précédente, il écrira directement la deuxième ligne sous la forme suivante :

$$f'(x) = [2x - 5] [-7(2x - 5)(x^2 - 5x + 3)^{-8}]$$

En général, refaire le schéma et remettre la première ligne permet de se rappeler l'origine des formules et de dépasser cette erreur.

Une autre difficulté est la confusion entre produit ou quotient et fonction composée.

Les élèves cherchent à décomposer des expressions telles que : $(3x - 7)(2x + 1)$ ou $\frac{3x-7}{2x+1}$. Aussi, il est souhaitable de les confronter à ces expressions après avoir fait l'activité ci-dessus, mais avant le devoir surveillé qui suivra. Savoir quand la méthode s'applique ou non fait partie de l'apprentissage de cette méthode.

Pour les élèves scientifiques

La référence au coût marginal n'est pas habituelle. Par contre, la vitesse est a priori le modèle de référence de la dérivée. Ainsi l'activité peut être

Situation-problème

construite autour de la question : la vitesse a-t-elle la même expression lorsqu'elle est exprimée en km/min ou en km/h ?

Par exemple :

A l'instant t (en minutes), la distance parcourue par un mobile depuis l'instant 0 est $g(t) = 0,1t^2 + 2t$ (en kilomètres).

- Calculer la vitesse du mobile 15 minutes après son départ en km/min.
 - Déterminer la fonction f qui à l'instant x (en heures) associe la distance parcourue par le mobile (en kilomètres). (Les élèves devront remarquer que $t = 60x$)
 - En déduire la vitesse du mobile 0,25 heure après son départ en km/h.
 - Comparer les réponses aux questions a) et c). Expliquez.
 - Décomposer la fonction f qui à l'instant x (en heures) associe la distance parcourue par le mobile (en kilomètres).
 - Écrire une relation entre $f'(x)$ et $g'(t)$.
-

Internet Corner.

Nous avons vraiment été séduit par le site d'un professeur d'agrégation d'Alençon. Ce site qui a reçu le « Net d'Or National (français) » dans la catégorie « Loisirs et Art de vivre » propose une centaine d'animations mathématiques sur des thèmes extrêmement variés. Nous avons apprécié entre autres dans la rubrique « Maths et Magie » les nombreux puzzles d'animation de la démonstration de Pythagore et l'illustration de l'usage de la corde à 13 noeuds dans la rubrique « Trucs Maths ». Les notices historiques sur l'histoire du thermomètre, des calendriers, des mesures sont d'une vraie richesse. Deux autres rubriques regroupent les « Délices des Maths » et les « Paradoxes ».

À découvrir lorsque vous aurez beaucoup de temps devant vous !

<http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/>

Dans nos classes

Y. Noël

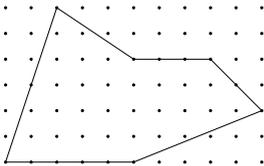
Le théorème de Pick

Georg Alexander Pick est né à Vienne en 1859. Nous ne savons pas quand il est mort : il a disparu au sinistre camp de Theresienstadt, probablement en 1943. C'est en 1899 qu'il a publié le théorème qui a inspiré cette rubrique (voir [4]).

1. Introduction

Dans *Mathématique et Pédagogie* n° 93 (sept.–oct. 1993), M. Frédérickx signalait avoir eu un « coup de foudre » pour le théorème de Pick. Il offre la possibilité de calculer l'aire d'un polygone non croisé dont les sommets appartiennent à un réseau quadrillé. Nos élèves auront-ils aussi le coup de foudre? Dans tout ce qui va suivre, l'unité d'aire est toujours l'aire d'un élément de base du réseau.

Voici un polygone dans un réseau carré.



Son aire peut être évaluée de différentes façons. Voici son calcul en appliquant le théorème de Pick :

$$S = \frac{14}{2} + 28 - 1 = 34$$

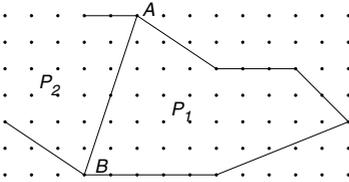
Le théorème de Pick donne l'aire en fonction du nombre de points du quadrillage sur le contour du polygone (soit C) et du nombre de points du quadrillage intérieurs au polygone (soit I) :

$$S = \frac{C}{2} + I - 1$$

Sans aborder une démonstration complète de ce théorème, reprenons l'idée clef donnée dans *Mathématique et Pédagogie* n° 93 :

Si le théorème fournit l'aire pour deux polygones P_1 et P_2 « accolables » en un polygone P , alors il fournit l'aire du polygone P .

Soit $S_1 = \frac{C_1}{2} + l_1 - 1$ et $S_2 = \frac{C_2}{2} + l_2 - 1$ et soit n le nombre de points du quadrillage sur le côté $[AB]$ commun.



Pour P , nous avons

- $S = S_1 + S_2$
- $C = C_1 + C_2 - 2n + 2$
- $l = l_1 + l_2 + n - 2$

Par conséquent

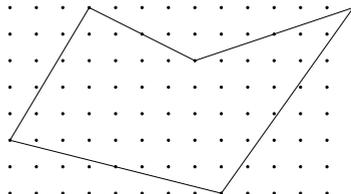
$$\begin{aligned} \frac{C}{2} + l - 1 &= \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2} - n + 1 + l_1 + l_2 + n - 2 - 1 \\ &= \frac{C_1}{2} + l_1 - 1 + \frac{C_2}{2} + l_2 - 1 \\ &= S_1 + S_2 = S \end{aligned}$$

2. Dans nos classes

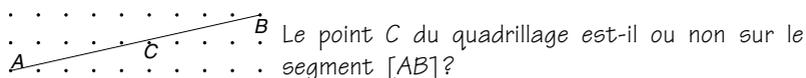
2.1. Pour les « Petits ».

Nous vous avons déjà proposé beaucoup d'évaluations d'aires dans *Mathématique et Pédagogie* n° 140. Les fiches proposées pouvaient être exploitées très différemment selon que les élèves connaissaient ou non le théorème de Pythagore. Cette fois, c'est la notion de pente d'un segment qui sera soit abordée, soit mise à l'épreuve si elle est connue. En effet, il n'est pas toujours évident de décider si un point du quadrillage est ou n'est pas sur le tracé d'un segment.

Faisons par exemple reproduire par les élèves le polygone ci-contre sur papier quadrillé usuel. Trouveront-ils tous le même nombre de points du quadrillage sur le tracé du polygone?



Autre exemple :

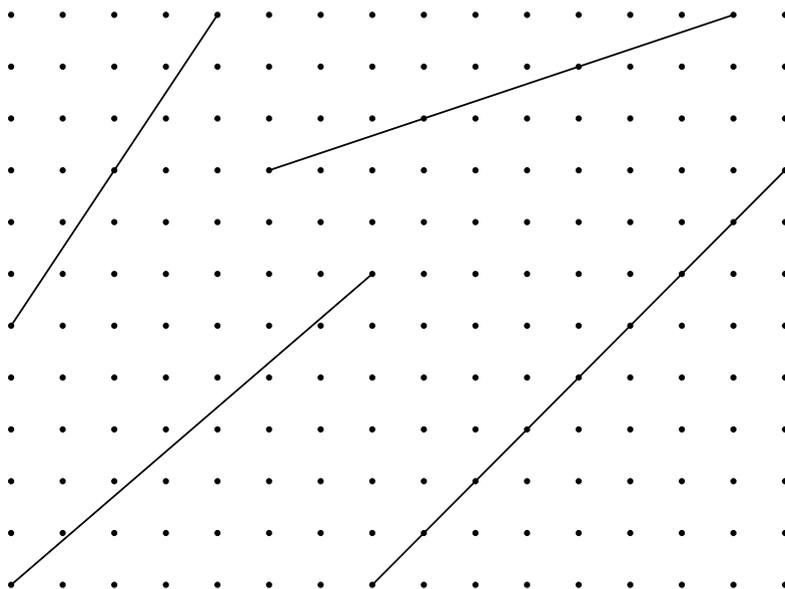


S'il y est,

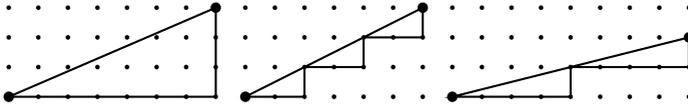
- de A à C , on pose une échelle pour monter de 1 et on écarte le pied de 5.
- de C à B , on pose une échelle pour monter de 1 et on écarte le pied de 4.

Les élèves reconnaîtront probablement que la première échelle est moins inclinée que la première. Donc passer par C « casserait » le segment $[AB]$. Un problème analogue peut se poser pour le voisin gauche de C .

Une fiche de travail peut être utile pour enfoncer le clou.



S'il s'agit d'une première approche, le travail peut conduire à la recherche de « découpage(s) régulier(s) d'une grimpe ». S'il n'existe aucun découpage régulier, aucun point du réseau ne se situe entre les extrémités du segment. Dans le cas contraire, nous en trouvons.



La recherche lie l'existence de points du réseau entre les extrémités du segment au fait que les mesures des déplacements horizontal et vertical ou non des diviseurs communs (autres que 1). En considérant les trois cas ci-dessus, nous avons

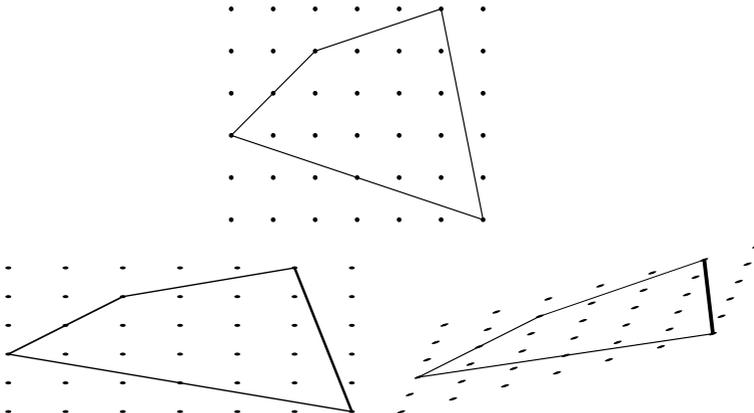
- un déplacement $(7,3)$ qui ne se décompose pas en « petites grimpettes » dans le réseau,
- un déplacement $(6,3)$ qui se décompose en trois petites grimpettes $(2,1)$,
- un déplacement $(8,2)$ qui se décompose en deux fois $(4,1)$.

Rappelons que des feuilles A_4 munies de réseaux variés peuvent être téléchargées à partir du site www.sbpn.be/mp/mp140.htm

2.2. Pour les « Grands ».

Que se passe-t-il si le réseau n'est plus un quadrillage?

Réseau formé de rectangles ou de parallélogrammes

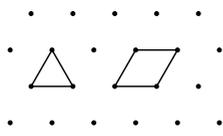


Nous pouvons imaginer le dessin initial sur une feuille élastique. Les déformations du caoutchouc ne modifient pas l'appartenance d'un point à un segment, ni le fait d'être intérieur au polygone. Ainsi, si l'unité d'aire est celle du rectangle de base ou celle du parallélogramme de base, l'évaluation de

l'aire par le théorème de Pick reste parfaitement valable! C'est dans ce cadre général que le théorème était présenté dans *Mathématique et Pédagogie* n° 93.

Pour faire plus savant, nous pourrions dire que le théorème résiste à une transformation affine du plan. Mais nous débordons ici du cadre du secondaire.

Que se passe-t-il dans un réseau triangulaire?


 Il est clair que « ça ne va plus ». Prenons par exemple un triangle de base. Son aire vaut 1 par définition tandis que $C = 3, I = 0$. Donc $\frac{C}{2} + I - 1 = \frac{1}{2}$, ce qui n'est pas l'aire attendue.

En fait, c'est normal : nous avons appliqué à un réseau triangulaire un théorème valable pour les réseaux de parallélogrammes. Changeons de lunettes : le réseau de triangles équilatéraux peut être regardé comme un réseau de losanges (c'est-à-dire de parallélogrammes!). Le résultat 0,5 trouvé est bien l'aire de ce triangle dans ce réseau de losanges.

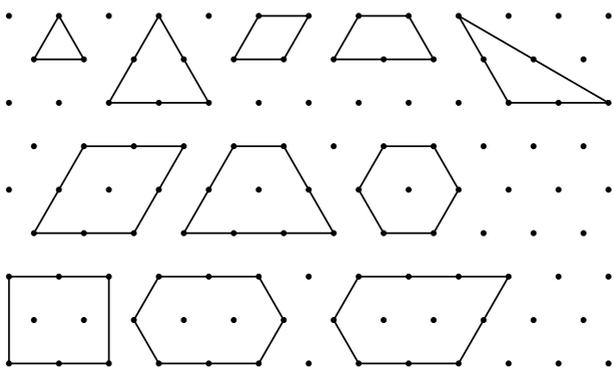
Dans le réseau triangulaire, l'unité est deux fois plus petite, de sorte que toutes les aires sont multipliées par 2.

Ainsi, dans un réseau triangulaire, le théorème de Pick devient le théorème de « Tri-Pick » :

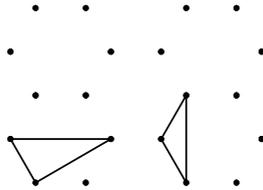
Théorème de Tri-Pick :

$$S = C + 2I - 2$$

Si vous n'êtes pas convaincu(e), si vous voulez poser le problème à vos élèves, voici une fiche de travail qui facilite l'induction de la formule.



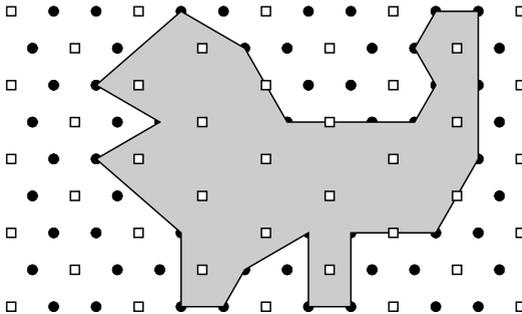
Et que se passe-t-il dans un réseau d'hexagones? Cette fois, la situation est désespérée! En effet,



Les deux triangles ci-dessus n'ont pas même aire alors qu'ils ont les mêmes valeurs pour C et I . Dommage ... mais cela provient de ce que le réseau d'hexagones ne présente pas la même régularité que les autres. Il n'est pas engendré par les combinaisons linéaires de deux points. Si nous voulons récupérer cette régularité, nous devons ajouter les centres des hexagones... Cela nous ramènerait au réseau des triangles équilatéraux. La boucle serait bouclée en comptant des « points » et des « trous ». Arrêtons-nous pour ne pas y tomber!

Références

- [1] H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, Wiley, New York, (1969).
- [2] M. Frédérickx-Ertryckx, Le théorème de Pick, *Mathématique et Pédagogie*, n° 93, 39–44, (1993).
- [3] B. Grünbaum and G.C. Shephard, Pick's Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 100, n° 2, 150–161, (1993).
- [4] G. Pick, *Geometrisches sur Zahlenlehre, Sitzungber. Lotos* (Prague), Vol. 19, 311–319, (1899).



Olympiades

C. Festraets

Voici les solutions des trois premiers problèmes posés à l'Olympiade Mathématique Internationale 2002 et dont les énoncés vous ont été proposés dans le n° 139 de Mathématique et Pédagogie.

Problème 1

Soit n un entier strictement positif. Soit T l'ensemble des points (x, y) du plan pour lesquels x et y sont des entiers positifs ou nuls et $x + y < n$. Chaque point de T est colorié soit en rouge, soit en bleu. Si un point (x, y) est rouge, alors tous les points (x', y') de T avec $x' \leq x$ et $y' \leq y$ sont rouges. On appelle ensemble de type X un ensemble de n points bleus ayant des abscisses x toutes distinctes, et ensemble de type Y un ensemble de n points bleus ayant des ordonnées y toutes distinctes. Montrer que le nombre d'ensembles de type X est égal au nombre d'ensembles de type Y .

Solution

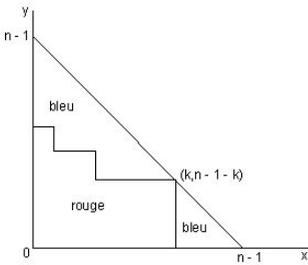
Soient $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ le nombre de points bleus respectivement d'abscisses $0, 1, 2, \dots, n-1$ et soient $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ le nombre de points bleus respectivement d'ordonnées $0, 1, 2, \dots, n-1$. On a $X = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$ et $Y = b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{n-1}$.

S'il existe un point rouge de coordonnée $(k, n-1-k)$, alors tous les points d'abscisse k sont rouges et tous les points d'ordonnée $n-1-k$ sont rouges, d'où $a_k = 0$, $b_{n-1-k} = 0$ et $X = Y = 0$.

S'il n'existe aucun point rouge de coordonnée (x, y) tel que $x + y = n-1$, alors tous les points de la droite d'équation $x + y = n-1$ sont bleus. Démontrons par récurrence sur n que dans ce cas $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ est une permutation de $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$.

La propriété est évidente pour $n = 1$.

Supposons la propriété vraie pour $n-2$.

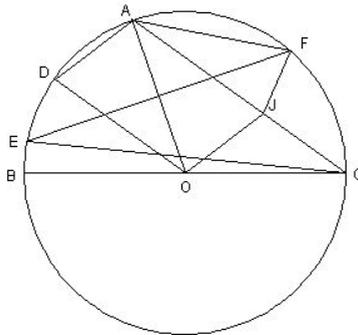


Éliminons les points bleus de la droite d'équation $x + y = n - 1$. Le nombre de points bleus sur les différentes colonnes est $a_0 - 1, a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_{n-2} - 1$ et le nombre de points bleus sur les différentes lignes est $b_0 - 1, b_1 - 1, b_2 - 1, \dots, b_{n-2} - 1$. Par récurrence, $a_0 - 1, a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_{n-2} - 1$ est une permutation de $b_0 - 1, b_1 - 1, b_2 - 1, \dots, b_{n-2} - 1$ et comme en outre $a_{n-1} = b_{n-1} = 1$, la propriété est vraie pour $n - 1$.

Problème 2

Soit BC un diamètre du cercle Γ de centre O . Soit A un point de Γ tel que $0^\circ < \widehat{AOB} < 120^\circ$. Soit D le milieu de l'arc AB ne contenant pas le point C . La droite passant par O parallèle à la droite DA rencontre la droite AC en J . La médiatrice du segment OA rencontre Γ en E et F . Montrer que J est le centre du cercle inscrit au triangle CEF .

Solution



A est le milieu de l'arc EAF , donc CA est la bissectrice de l'angle \widehat{ECF} .

Dans le triangle isocèle AOC , $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$, d'où $\widehat{AOD} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}(\widehat{OAC} + \widehat{OCA}) = \widehat{OAC}$.

OD est donc parallèle à AC et puisque par hypothèse OJ est parallèle à DA , $ODAJ$ est un parallélogramme et $AJ = OD$.

Comme EF est la médiatrice du segment OA , $OEAF$ est un losange, d'où $AJ = OD = OE = AF$. Le triangle FJA est donc isocèle.

$$\text{Dès lors, } \widehat{JFE} = \widehat{JFA} - \widehat{EFA} = \widehat{AJF} - \widehat{ECA} = \widehat{AJF} - \widehat{JCF} = \widehat{JFC}.$$

JF est donc la bissectrice de l'angle \widehat{EFC} et J est le centre du cercle inscrit au triangle CEF .

Remarquons que la condition $\widehat{AOB} < 120^\circ$ est nécessaire pour que le point J soit intérieur au triangle CEF .

Problème 3

Trouver tous les couples d'entiers (m, n) avec $m, n \geq 3$ tels qu'il existe une infinité d'entiers a strictement positifs tels que $\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ soit entier.

Solution

Posons $f(x) = x^m + x - 1$ et $g(x) = x^n + x^2 - 1$.

On a $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ avec $\text{degré } r(x) < \text{degré } g(x)$; or $f(a) = g(a)$ pour une infinité de valeurs entières de a , donc $r(x)$ s'annule pour une infinité de valeurs de a , ce qui signifie que $r(x)$ est identiquement nul et que $g(x) \mid f(x)$.

Posons $m = n + k$.

$$x^{n+k} + x - 1 = x^k(x^n + x^2 - 1) - x^{k+2} + x^k + x - 1$$

$$x^n + x^2 - 1 \mid x^{n+k} + x - 1 \Rightarrow x^n + x^2 - 1 \mid -x^{k+2} + x^k + x - 1$$

Or $-x^{k+2} + x^k + x - 1 = (1 - x)(x^{k+1} + x^k - 1)$ et $x^n + x^2 - 1$ est premier avec $1 - x$, d'où $x^n + x^2 - 1 \mid x^{k+1} + x^k - 1$ (car $n \geq 3$)

$g(x)$ est une fonction croissante dans l'intervalle $[0, 1]$, $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$, donc $g(x)$ s'annule dans $]0, 1[$. Soit α la racine de $g(x)$ dans $]0, 1[$. Comme $g(x)$ divise $x^{k+1} + x^k - 1$, α est aussi racine de $x^{k+1} + x^k - 1$.

D'où $\alpha^n + \alpha^2 - 1 = 0$ et $\alpha^{k+1} + \alpha^k - 1 = 0$, ce qui nous donne $\alpha^n + \alpha^2 = \alpha^{k+1} + \alpha^k$.

Or $k + 1 \geq n$ et $k \geq 2$, d'où $\alpha^n + \alpha^2 \geq \alpha^{k+1} + \alpha^k$ car $\alpha \in]0, 1[$.

Et pour avoir l'égalité, il faut que $n = k + 1$ et $k = 2$. Ce qui nous donne l'unique solution : $m = 5$ et $n = 3$.

Viens,
nous allons
à l'université
At

à Mons :

Psychologie et Sciences de l'Education
Warocqué - Sciences de Gestion
Sciences : Mathématique - Informatique - Physique - Chimie - Biologie
Médecine - Pharmacie - Sciences Biomédicales
Institut de Linguistique
Ecole d'Interprètes Internationaux

à Charleroi :

Formations à horaire décalé :
Informatique, Psychologie et Sciences de l'Education, Sciences de Gestion
Formations en cours du jour :
Médecine - Pharmacie - Sciences Biomédicales

Renseignements :

Mons - 17, Place Warocqué

Tél. : 065 - 37 30 14 - Fax : 065 - 37 30 54

Charleroi - 38-40, Bld Joseph II

Tél. : 071 - 32 17 90 - Fax : 071 - 70 06 69

E-mail : Martine.Vanelslande@umh.ac.be

Internet : <http://www.umh.ac.be>

UMH
UNIVERSITE DE MONS-HAINAUT

**Journées portes ouvertes, samedi 21 juin 2003,
de 9h00 à 12h30, à Mons.**

Inscriptions du 21 juin au 3 octobre 2003.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets

Losanges

Problème n° 268 de *Mathématique et Pédagogie* n° 138.

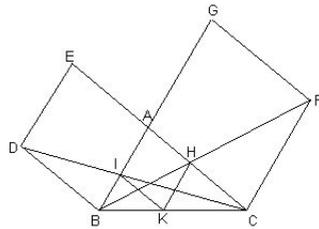
Sur le côté AB du triangle ABC , et vers l'extérieur, on construit le losange $ABDE$ tel que E est situé sur la droite AC . Sur le côté AC , et vers l'extérieur, on construit le losange $ACFG$ tel que G est situé sur la droite AB . BF coupe AC en H et CD coupe AB en I . On construit le parallélogramme $AHKI$. Démontrer que ce parallélogramme est un losange et que K est situé sur BC .

Solution de A. PATERNOTTRE de Boussu

1) $AIKH$ est un losange.

En effet, $AIKH$ est un parallélogramme par hypothèse. Il sera donc losange si deux côtés consécutifs ont même longueur. Prouvons par exemple que $|AI| = |AH|$.

Les longueurs des côtés du triangle ABC sont désignées par a , b , c comme il est d'usage.



Dans le triangle CDE , on a $AI \parallel DE$ (losange). Dès lors, $\frac{|AI|}{|DE|} = \frac{|CA|}{|CE|} \Rightarrow |AI| = \frac{b \cdot c}{b+c}$.

Dans le triangle BGF , on a $AH \parallel GF$ (losange). Dès lors, $\frac{|AH|}{|GF|} = \frac{|BA|}{|BG|} \Rightarrow |AH| = \frac{c \cdot b}{c+b}$. D'où $|AI| = |AH|$.

2) Le losange $AIKH$ est semblable au losange $EDBA$.

En effet, ces deux losanges ont leurs angles de même amplitude chacune à chacun : $\widehat{IAH} = \widehat{DEA}$ (angles alternes-internes) et $\widehat{AIK} = \widehat{EDB}$ (angles à côtés parallèles).

3) Etant semblables, les deux losanges $AIKH$ et $EDBA$ sont l'image l'un de l'autre par une homothétie. Considérons l'homothétie de centre C qui

Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTAETS, 36, rue J. B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse e-mail festraetscl@bruttele.be.

applique le point E sur le point A . Par cette même homothétie, l'image du point B sera le point K . Dès lors, B , K et C sont alignés.

J. ANSEEUW de Roeselare, P. BORNSZTEIN de Pontoise, L. COLOT de Bouge, P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek, P. LE GALL de Metz, B. LOISEAU de Mouscron, J. RASSE de Méan, J. G. SEGERS de Liège, M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles et C. VILLERS de Hyon m'ont envoyé aussi de **bonnes solutions**.

Minimum

Problème n° 269 de *Mathématique et Pédagogie* n° 138.

Déterminer le minimum de $E = \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right)$ où a, b, c sont des réels positifs tels que $a + b + c = 1$.

Solution de P. DASSY de Liège

$$\begin{aligned} E &= \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1-c}{c} \\ &= \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \\ &= \frac{ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 + 2abc}{abc} \\ &= \frac{a(b^2 + c^2 - 2bc) + b(c^2 + a^2 - 2ca) + c(a^2 + b^2 - 2ab) + 8abc}{abc} \\ &= \frac{a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2}{abc} + 8 \end{aligned}$$

Donc $E \geq 8$. La valeur minimum de E est 8 et est obtenue si et seulement si $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Solution de C. VILLERS de Hyon et de P. BORNSZTEIN de Pontoise

On sait que $a + b + c = 1$, donc $1 - a = b + c$ et $\frac{1}{a} - 1 = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$

$$\text{Or } \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{a^2}}$$

$$\text{Dès lors, } \frac{1}{a} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{bc}{a^2}}, \frac{1}{b} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{ac}{b^2}} \text{ et } \frac{1}{c} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c^2}}$$

Tous les membres de ces inégalités sont positifs, donc

$$E = \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}} = 8$$

La plus petite valeur de E est 8 et survient lorsque $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bonnes solutions de M. COYETTE de Rixensart, J. FINOULST de Diepenbeek, P. LE GALL de Metz, B. LOISEAU de Mouscron, A. PATERNOTTRE de Boussu et J. RASSE de Méan.

Divisibilité par 65

Problème n° 270 de *Mathématique et Pédagogie* n° 138.

N étant un entier plus grand que 1, montrer que, parmi les termes de la suite $2^n - 3$, il en existe une infinité multiples de 5, une infinité multiples de 13, mais aucun n'est divisible par 65.

Solution de B. LOISEAU de Mouscron

Observons que la suite $s_n = 2^n - 3$ peut être définie par récurrence : $s_1 = -1$ et $s_{n+1} = 2(s_n + 3) - 3 = 2s_n + 3$.

En calculant les s_n modulo 5, on obtient : $s_1 \equiv 4$, $s_2 \equiv 1$, $s_3 \equiv 0$, $s_4 \equiv 3$, $s_5 \equiv 4$.

Il est inutile d'aller plus loin, puisqu'il y a relation de récurrence, on retrouvera cycliquement les quatre mêmes nombres, et en particulier s_n est un multiple de 5 ssi $n \equiv 3 \pmod{4}$. Il y a bien une infinité de tels entiers n . On remarque que ceux-ci sont tous impairs.

De même, modulo 13 : $s_1 \equiv 12$, $s_2 \equiv 1$, $s_3 \equiv 5$, $s_4 \equiv 0$, $s_5 \equiv 3$, $s_6 \equiv 9$, $s_7 \equiv 8$, $s_8 \equiv 6$, $s_9 \equiv 2$, $s_{10} \equiv 7$, $s_{11} \equiv 4$, $s_{12} \equiv 11$, $s_{13} \equiv 12$.

Il y a une infinité d'entiers n tels que s_n est un multiple de 13, ce sont les entiers n tels que $n \equiv 4 \pmod{13}$. On remarque qu'ils sont tous pairs.

Dès lors, il est impossible qu'il y ait des entiers n tels que s_n est multiple de 65, ou ce qui revient au même de 5 et de 13, puisqu'un tel entier n devrait être à la fois pair et impair.

J'ai aussi reçu de **bonnes solutions** de J. ANSEEUW de Roeselare, P. BORNSTZEIN de Pontoise, M. COYETTE de Rixensart, P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek, P. LE GALL de Metz, A. PATERNOTTRE de Boussu, J. RASSE de Méan, J.G. SEGERS de Liège et C. VILLERS de Hyon.

Des problèmes et des jeux

Voici les **solutions** de « Soir de raid » texte publié dans le n° 138 de *Mathématique et Pédagogie*; ces solutions sont dues à B. BAUDELET et B. LOISEAU :

Cardan - Bourbaki - Lévi - Appel - Neveu - Euler - Pascal - Lucas - Pell - Liouville - Peano - Dieudonné - Stevin - Banach - Raabe - Fermat - Abel - Gauss - Lamé - Ménélaüs - Artin - Dupin - Monge - Rolle - Meray - Cartan - Neper - Borel - Steiner - Clairaut - Poisson - Jordan - Lagrange - Viète - Venn.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir au plus tard pour le 1er septembre 2003.

277. Aires orientées.

Soit ABC un triangle dans le plan et P un point quelconque. On note A' la projection de P sur BC parallèlement à la médiane issue de A , et de même pour B' et C' . Soit A_1 (resp. B_1, C_1) l'aire orientée du triangle PBA' (resp. PCB', PAC') et A_2 (resp. B_2, C_2) celle de $PA'C$ (resp. $PB'A, PC'B$). Démontrer que $A_1 + B_1 + C_1 = A_2 + B_2 + C_2$.

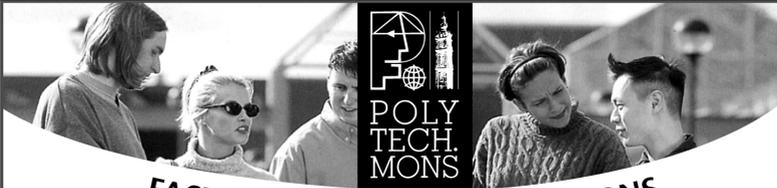
278. Suite et fonction.

Déterminer une fonction $f(n)$ telle que le n^{e} terme de la suite 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, ... soit donné par $[f(n)]$.

279. Triangle équilatéral.

Un point P est situé à l'intérieur d'un triangle équilatéral et les distances de P aux trois sommets sont 3, 4 et 5. Déterminer l'aire du triangle.





FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS

ARCHITECTURE

CHIMIE

ELECTRICITE

INFORMATIQUE ET GESTION

MECANIQUE

MINES-GEOLOGIE

SCIENCE DES MATERIAUX

*La Polytech,
institution
universitaire
à taille
humaine,
intégrée
dans sa ville et
dans sa région.
Venez y acquérir
la formation
polyvalente
et irremplaçable
d'Ingénieur
Civil.*

**PORTES
OUVERTES**
samedi 29 mars
de 9 à 13 h
samedi 10 mai
de 9 à 13 h

Inscriptions au
Secrétariat des Etudes
9, rue de Houdain • 7000 MONS
Tél.: 065/37 40 30 à 32
Fax: 065/37 40 34
secretu@fpms.ac.be
<http://www.fpms.ac.be>

UNE NOUVELLE PUBLICATION DE L'APMEP



APMEP - 26 rue Duméril - 75013 PARIS
Tél. 01 43 31 34 05
<http://www.apmep.asso.fr>

Notre consœur française l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) est heureuse de vous faire part de la naissance d'une nouvelle publication trimestrielle qui reprend les initiales de :

- Partager
- Lire
- Ouvrir
- Transmettre

Aujourd'hui plus qu'hier, face à un public hétérogène et pas toujours soucieux de l'effort, notre métier demande adaptation, renouvellement, pédagogies variées et trésors d'ingéniosité pour éveiller les élèves bien souvent passifs.

Cette publication, ses concepteurs la souhaitent proche du terrain, s'appuyant sur des comptes rendus et analyses d'activités, réussies ou ratées, mais également capable d'inciter à une réflexion de fond permettant de prendre du recul par rapport à la pratique quotidienne de professeurs de mathématiques.

Nos deux sociétés ont depuis de nombreuses années lié des liens confraternels : c'est donc avec joie que nous vous annonçons cette nouvelle revue. D'autant plus volontiers d'ailleurs que la rédaction de PLOT compte en son sein un représentant de la rédaction des MATH-JEUNES. Chacun forme des vœux que cette collaboration éditoriale nouvelle permettra à PLOT et aux MATH-JEUNES de s'enrichir réciproquement.

Les conditions d'adhésion à l'APMEP sont reprises dans les pages du Trésorier. Vous pouvez aussi consulter le serveur de l'APMEP : <http://www.apmep.asso.fr>

J. Miewis

Bibliographie

J. Miewis

Des grandeurs aux espaces vectoriels

La linéarité comme fil conducteur.

CREM, sous la coordination de N. Rouche.

Collection *Mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte.*

ISBN : 2-930161-04-3, novembre 2002, 614 pages A4.

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques,
5, rue Émile Vandervelde, 1400 - Nivelles.

Les divisions traditionnelles des mathématiques sont héritées de l'histoire ancienne. Il s'agit en gros de l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, l'analyse et les probabilités. Ces divisions de la matière mathématique ont un sens, elles étudient chacune une certaine classe d'objets et conduisent à un mode de pensée spécifique. Mais ces chapitres ont tendance à se refermer chacun sur eux-mêmes, compartimentant de manière plus ou moins étanche l'enseignement des mathématiques. Les mathématiques modernes avaient bien proposé un fil conducteur clair par l'étude des structures et de leur enchaînement déductif, mais les programmes actuels ont pour l'essentiel délaissé ce fil car on a compris aujourd'hui que les structures ne peuvent être au début de l'enseignement.

Partant de ce constat, l'équipe du Crem a cherché un de ces fils conducteurs, un lien de parenté qui favoriserait pour l'élève la mobilité de la pensée, le transfert de méthodes et d'intuitions d'une matière à l'autre. Leur attention s'est portée sur le pouvoir éclairant de la structure linéaire qui sous-tend les grandeurs et les mesures, les rapports et les proportions, la similitude, l'algèbre du premier degré, les combinaisons linéaires et les espaces vectoriels. Cette idée de structure linéaire n'est pas donnée au départ, mais élaborée en même temps que s'approfondit l'expérience mathématique des élèves.

L'introduction reprend et détaille l'intérêt de dégager un fil conducteur pour l'enseignement des mathématiques.

La première partie concerne les élèves de deux ans et demi à douze ans.

- Situations-problèmes sur les balances et les poids à l'école maternelle.

- Les polygones superposables, polygones de même forme : le tangram à l'école primaire.
- Comparaisons et mesures de capacité (de 6 à 10 ans),
- Les grandeurs, pourcentages et représentations graphiques en fin du primaire.

La seconde partie vise les élèves de douze à quinze ans.

- On y étudie le thème général de la proportionnalité dans ses expressions numériques (les tableaux de proportionnalité), graphiques et algébriques (les formules). Le chapitre se termine par une question de patterns de cube et par une introduction des nombres entiers liée à des questions d'alignement de points dans un système d'axes.
- La proportionnalité et non-proportionnalité en géométrie, avec des questions de périmètres et d'aires ainsi qu'une introduction au théorème de Thalès conjointement avec des notions de perspective cavalière.

La troisième partie s'occupe d'aspects de la linéarité pour les élèves de 15 à 18 ans.

- Une introduction historique consacrée à la linéarité chez les égyptiens (la fausse position) et chez les arabes (la double fausse position) puis aux combinaisons linéaires chez Léonard de Pise, permet de montrer aux élèves que les pratiques aujourd'hui communes sont apparues au terme d'une difficile maturation.
- Une introduction progressive au calcul vectoriel partant de la notion de changement de position, suivi d'un aperçu de la géométrie analytique.
- Une initiation au produit scalaire et à l'idée de bilinéarité.
- Les nombres complexes considérés comme des vecteurs munis d'un produit particulier permettent d'aborder efficacement des questions de géométrie euclidienne.
- Les dessins en PostScript et la géométrie analytique.
- Les problèmes d'équilibre de solides dans un champ de pesanteur uniforme (le levier, le barycentre dans le plan) rattachent la grandeur vectorielle de la physique à l'idée de vecteur mathématique. Les conditions de l'équilibre d'un point soumis à des forces introduisent la règle du parallélogramme.
- Les mouvements uniformes et uniformément accélérés sont étudiés dans le contexte de composition des vitesses.

La quatrième partie est orientée vers l'histoire et l'épistémologie des vecteurs.

Bibliographie

- *Genèse des vecteurs dans le contexte des nombres complexes.*
- *Construction de l'idée de vecteur en partant de la géométrie analytique ordinaire et en cherchant à dégager les expressions algébriques qui ont un sens géométrique indépendant du repère choisi.*

La cinquième partie propose une sorte de synthèse de tout l'ouvrage : on y dégage les divers avatars de la notion de structure linéaire.

Comme pour les autres publications du CREM, de nombreuses annexes donnent des documents directement utilisables par les enseignants en classe. L'ouvrage peut être consulté sur le site <http://www.agers.cfwb.be> d'où il peut être téléchargé en tout ou en partie.

Les contemplations (18 mai 1835) - Victor HUGO

Le monologue avait le temps de varier.
Et je m'exaspérais, faisant la faute énorme
Ayant raison au fond, d'avoir tort dans la forme.
Après l'abbé Tuet, je maudissais Bezout;
Car, outre les pensums où l'esprit se dissout,
J'étais alors en proie à la mathématique.
Temps sombre! enfant ému du frisson poétique,
Pauvre oiseau qui heurtait du crâne mes barreaux
On me livrait tout vif aux chiffres, noirs bourreaux;
On me faisait de force ingurgiter l'algèbre;
On me liait au fond d'un Boisbertrand funèbre;
On me tordait depuis les ailes jusqu'au bec,
Sur l'affreux chevalet des X et des Y;
Hélas on me fourrait sous les os maxillaires
Le théorème orné de tous ses corollaires;
Et je me débattais, lugubre patient
Du diviseur portant main-forte au quotient.

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Janvier 2003)

Les nouveaux tarifs tiennent compte exclusivement des importants changements de tarifs postaux intervenus en 2002.

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, SBPM-Info et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :

- Cotisation ordinaire : 20 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitants. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 28,50 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 40 € (non PRIOR), 53 € (PRIOR)

Autres pays : 47 € (non PRIOR), 70 € (PRIOR)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 26 €, Union Européenne : 32 €.

Europe 37 € (non PRIOR), 43 € (PRIOR).

Autres pays : 39 € (non PRIOR), 52 € (PRIOR).

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

- Abonnements groupés à une des deux revues : (3 numéros)

Belgique : 3,80 €.

Europe : 6 € (non PRIOR), 7,80 € (PRIOR).

Autres pays : 6,60 € (non PRIOR), 10 € (PRIOR).

- Abonnements groupés aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 6,60 €.

Europe : 12,20 € (non PRIOR), 15,80 € (PRIOR).

Autres pays : 15,10 € (non PRIOR), 22,60 € (PRIOR).

Abonnements individuels.

- Abonnements à une des deux revues : (3 numéros)

Belgique : 5 €. Europe : 11,50 € (non PRIOR), 15,80 € (PRIOR).
Autres pays : 12,75 € (non PRIOR), 20,40 € (PRIOR).

- Abonnements aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 10 €. Europe : 16,50 € (non PRIOR), 20,50 € (PRIOR).
Autres pays : 20 € (non PRIOR), 25 € (PRIOR).

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 43 €. Ils recevront le Bulletin de l'APMEP, le BGV (Bulletin à Grande Vitesse) et PLOT. Ils peuvent aussi par la même voie commander des publications de l'APMEP.

Anciens numéros de *Mathématique et Pédagogie*

Avant 2000 : 0,74 €/N° + frais d'expédition.

Années 2001 et 2002 : 2,48 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Anciens numéros de *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Avant 2000-2001 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.

Année 2001-2002 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 6 de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international au compte CCP « giro » 000-0728014-29 de SBPMef. Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement « giro »), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.

Le coin du trésorier

Brochures	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (reste n° 12)	1,24 €	/	T1
Série 2 (n° 7 au n° 11 et n° 13)	5,45 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5,45 €	/	T2
Les 3 séries (n° 7 au n° 14)	7,44 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,86 €	1,24 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,86 €	1,24 €	T1
Dossier 6 (Statistiques)			
Jusqu'à 10 exemplaires	7,44 €	6,18 €	voir
A partir du onzième exemplaire	6 €	5 €	ci-dessous
Jacques Bair			
Mathématique et Sport	4,96 €	3,72 €	T1
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12,39 €	9,92 €	T2
CD-Rom			
G. Robert			
Logiciels mathématiques	4,96 €	/	T1
Recueils de questions des OMB			
	par exemplaire		
De 1 à 4 exemplaires	5,50 €	6 €	
De 5 à 9 exemplaires	5 €	5,50 €	voir
De 10 à 19 exemplaires	4,50 €	5 €	ci-dessous
A partir de 20 exemplaires	4 €	4,50 €	

Frais d'expédition en non PRIOR			
	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,60 €	2,70 €	3,00 €
Tarif 2	2,30 €	4,70 €	5,80 €
Tarif 3	3,50 €	4,70 €	5,80 €
Tarif 4	4,00 €	11,50 €	16,50 €
Tarif 5	5,60 €	15,50 €	26,50 €
Tarif 6	6,20 €	15,50 €	26,50 €
Tarif 7	6,95 €	15,50 €	26,50 €

Pour les expéditions en PRIOR, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.

Exemples de tarification pour commandes groupées															
Tomes 4 ou 5 des questions OMB						Dossier 6 (Statistiques)									
1 ex.	T1	7 à 10 ex.	T5	1 ex.	T1	10 à 13 ex.	T5	2 à 3 ex.	T3	11 à 14 ex.	T6	2 à 4 ex.	T2	14 à 18 ex.	T6
4 à 6 ex.	T4	15 à 17 ex.	T7	5 à 9 ex.	T4	19 ou 20 ex.	T7								

INFORMATION CONCERNANT LES PRIX ICMI

Le Comité Exécutif de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (ICMI) a décidé de créer deux prix pour la recherche en éducation mathématique :

- le prix Hans Freudenthal, pour récompenser un programme de recherche majeur dans ce domaine, mené au cours des dix dernières années,
- le prix Felix Klein, pour récompenser l'ensemble d'une carrière dans ce domaine.

Ces prix consisteront en un certificat et une médaille. Ils auront un caractère similaire à un titre universitaire honorifique et seront attribués chaque année impaire. A chaque congrès ICME, les médailles et certificats des prix décernés depuis le congrès précédent seront officiellement présentés au cours de la cérémonie d'ouverture.

Les premiers lauréats de ces deux prix seront connus à la fin de l'année 2003 et les prix leur seront formellement remis à la cérémonie d'ouverture d'ICME 10, à Copenhague, en juillet 2004.

Un Comité des prix ICMI de six personnes choisira les lauréats. Les membres de ce comité sont nommés par le président d'ICMI, après consultation du comité exécutif d'ICMI et de personnalités du domaine. Leur mandat est de huit ans, non renouvelable, trois des membres étant remplacés tous les quatre ans, au moment du congrès ICME. Un des trois membres restants est alors nommé responsable du comité pour les quatre années suivantes. Pour initier le processus, un comité de six personnes a été désigné en 2002, trois d'entre eux avec un mandat de huit ans, et les trois autres avec un mandat de quatre ans. Michèle Artigue, professeur à l'université Paris 7 en France, et vice-présidente d'ICMI, a accepté la responsabilité de ce premier comité, avec un mandat de quatre ans. Les membres actifs du comité, à l'exception du responsable, ne seront pas connus du public. Leurs noms seront cependant rendus publics à l'expiration de leur mandat.

Le comité, une fois nommé, est complètement autonome. Ses travaux et archives sont internes et confidentiels, à l'exception bien sûr du processus consistant à solliciter des avis et des informations de la communauté de recherche en éducation mathématique, pour sélectionner les lauréats, processus qui sera conduit par le ou la responsable du comité. Les décisions du comité sont sans appel. Une fois prises, elles sont communiquées au président d'ICMI, puis confidentiellement aux membres du bureau exécutif d'ICMI par le président.

Le comité des prix ICMI est ouvert à toute suggestion concernant les futurs lauréats. Ces suggestions, dûment argumentées, doivent être envoyées par courrier ordinaire à la responsable du comité, avant le 30 juin 2003 (cf. adresse ci-dessous).

Michèle Artigue, Responsable du Comité des prix ICMI

Adresse : IREM, Université Paris 7, Case 7018, 2 place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05 France