Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression francaise

Secrétariat : *M.-C. Carruana*, Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique)
Tél.-Fax : 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@umh.ac.be, Web : http://www.sbpm.be

Membres d'honneur : *H. Levarlet, W. Servais* (†)

Conseil d'administration : *J. Bair, Ch. Bertrand, J.-P. Cazzaro, M. Denis-Pecheur, B. Desaedeleer, P. Dupont, Cl. Festraets-Hamoir, M. Frémal, R. Gossez-Ketels, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, P. Marlier, Ch. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, J. Navez, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler, Ch. Van Hooste*

Président, Math-Jeunes Senior : *Ch. Van Hooste*, Chemin de Marbisœul 25, 6120 Marbaix-la-Tour, Tél. 071-217793	**Vice-Président, Olympiades Internationales :** *G. Troessaert*, Recogne sur le Chêne 58, 6800 Libramont, Tél. 061-224201
Administrateur délégué : *Ch. Michaux*, Rue Brigade Piron 290, 6061 Montignies-sur-Sambre, Tél. 065-354706	**Secrétaire :** *M. Frémal*, Rue W. Jamar 311/51, 4430 Ans, Tél. 04-2636817
Olympiades nationales et site WEB : *Cl. Festraets-Hamoir*, Rue J.B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles Tél. 02-6739044	**Publicité, Commission Congrès :** *M. Denis-Pecheur*, Rue de la Ferme 11, 5377 Noiseux (Somme-Leuze), Tél. 086-323755
Math-Jeunes Junior : *A. Paternottre*, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu, Tél. 065-785064	**SBPM-Infor :** *R. Gossez*, Albert I Laan 13, 1560 Hoeilaart, Tél. 02-6579892
Trésorier : *P. Marlier*, Rue de Plainevaux 185/15, 4100 Seraing, Tél. 04-3374945	**Portefeuille de lecture :** *S. Bridoux*, Rue de Lambrechies 87, 7390 Quaregnon, Tél. 065-667203

Mathématique et Pédagogie :
J. Miewis, Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée, Tél. 04-3431992
Comité de rédaction : *J. Miewis, J. Bair, Ch. Bertrand, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, Cl. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, Ch. Michaux, J. Navez, G. Noël, N. Vandenabeele, Ch. Van Hooste, Cl. Villers*

Mathématique et Pédagogie

Sommaire

- Éditorial 3

Chroniques

- J. Miewis, Mathematica & Paedagogia ... 1953-1974 5
- J. Miewis, Mathématique et Pédagogie ... 1975-1993 23
- G. Noël, Les nineties 47
- J. Navez, Evénements marquants 1997-2000 52

Souvenirs pédagogiques

- W. Servais, Bon vent ... 53
- E. Dacos & J. Brauns, Conjonction de la Langue maternelle et des Mathématiques 59
- R. Bex, Bilan de quinze annnées de réforme 63
- J. Nachtergaele, Pourquoi la Mathématique dans l'Éducation ? 65
- G. Noël, La réforme des maths modernes en Belgique 69

Articles

- E. Heuchamps, Programmes linéaires 89
- Cl. Villers, Résolution d'équation du second degré 92

- A. Vander Linden, L'arbre, outil pédagogique en calcul des probabilités 93
- G. Delande, Cercles congruents 95
- M. Verle, Construction approchée du n-gone 99
- G. Delande, Mathématique et phénomènes de la vie courante. 105
- Cl. Festraets, Ellipses, hyperboles, paraboles et pliages de papier 115
- N. Rouche, Mises en situation 118
- Cl. Festraets, La double fausse position 122
- Cl. Villers, Des travaux et ... leur suite 124
- M. Parker, Une approche graphique de la dérivation 128
- J. Bair, Calcul de la durée d'un placement en capitalisation mixte 131
- Cl. Culus, M. Ertryckx-Frédérickx, Cube et fonctions 135
- Ch. Félix, A la recherche de la fonction de Strähle 139
- D. Odiet, L'horloge de la gare de Mons 146

Rubriques

- Yolande Noël-Roch, *Dans nos classes* 153
- C. Festraets, *Des problèmes et des jeux* 165
- SBPM(ef), *Archives administratives.* 170
- P. Marlier, *Le coin du trésorier* 174

NOTE

* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
* Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
* Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (LaTeX 2_ε, Word); les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.
  L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
  Pour les livres :
  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
  Pour les articles :
  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée.

Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Éditorial

Cette cent quarante-deuxième livraison de votre revue est le numéro spécial que la rédaction vous a concocté à l'occasion du cinquantième anniversaire de la Société et de ses revues : *Mathematica & Paedagogia* du temps du bilinguisme entre 1953 et 1974 et *Mathématique et Pédagogie* depuis 1975.

La Société ayant été créée le 14 juin 1953, c'est donc naturellement à ce numéro de Mai-Juin 2003 que revenait l'honneur de nous replonger — avec un peu de mélancolie, un soupçon de tendresse et beaucoup de curiosité — dans le passé mathématique de notre Communauté.

Dans une première partie, nous avons revisité la vie de la Société au travers des écrits que ses membres nous ont laissés. Nous avons relu les soixante-sept numéros bilingues et les cent quarante-et-un numéros unilingues pour y rechercher quelques fils rouges qui avaient agité notre lanterneau durant ces cinquante années. Nous avons illustré notre propos d'extraits d'époques, délicieusement surannés ou étonnamment prophétiques.

On y parle de programmes, d'horaires, de congrès, de nouveautés techniques et/ou pédagogiques, du CBPM et des journées d'Arlon, des calculettes, de la création des Olympiades, de l'émergence de la pédagogie des situations-problèmes, des fascicules *Rénové* et de la revue *Math-Jeunes*, des groupes de recherche en pédagogie appliquée, de l'informatique, du « Mémoire », des impacts des grèves de nonante, du rapport « Damblon », du *Livre Blanc*, des « agoras », de la CAPP et de la FEAPM, ...

Nous avons regroupé dans une deuxième partie quelques textes de souvenirs pédagogiques : les « espérances » des fondateurs de la Société, un abrégé d'histoire de la réforme mathématique en Belgique, les bilans lucides qui furent posés par quelques uns de nos anciens présidents.

Dans une troisième partie, nous avons isolé une quinzaine d'extraits d'articles caractéristiques d'une époque, soit quant aux questionnement qu'ils développent, soit quant aux techniques de résolution proposées par les auteurs. Notre choix fut un difficile équilibre entre l'adéquation de ces extraits avec des situations-problèmes demandées par les programmes actuels de l'enseignement secondaire, ... et les exigences économiques de notre trésorier qui voyait s'augmenter le nombre de pages ...

A l'approche des vacances d'été que tout un chacun attend, vous trouverez peut-être dans ces extraits quelques sujets de méditation ... et qui sait, quelques idées de préparations renouvellées.

Nous n'avons pas voulu vous priver de notre rubrique traditionnelle : « Des problèmes et des jeux », qui nous le savons par vos courriers, est attendue de pied ferme par plus d'un. Notre rubrique « Dans nos classes » est dans la ligne de ce numéro spécial et montre son éclectisme habituel au travers de trois thèmes. Nous avons complété ces rubriques de quelques archives administratives.

Nous vous souhaitons une agréable plongée dans le passé ...

Nous espérons vous voir nombreux aux journées de notre Congrès annuel qui se tiendra

du mardi 26 au jeudi 28 août à Forest

dans les locaux de l'Internat de la Communauté Française. Nous vous renvoyons au dernier *SBPM-Infor* ou à notre site pour les détails pratiques. Le thème de ce Congrès est en continuité avec ce numéro spécial : « Cinquante ans de mathématiques en Belgique ».

Visitez le site Internet de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* :
http ://www.sbpm.be
e-mail : sbpm@umh.ac.be

Mathematica & Paedagogia . . . 1953-1974

J. MIEWIS, *CREM*

Raconter l'immense travail effectué par les bénévoles qui font fonctionner notre Société depuis 50 ans est impossible : il faudrait des pages et des pages. Il faudrait tous les nommer, ces centaines de Commissaires qui ont tous donné de leur temps, de leur énergie, de leurs compétences, de leur joie de vivre, de leur fierté de mathématicien pour les remercier un à un. Aux temps héroïques où la Belgique n'était pas encore communautarisée, il allait de soi que la Société des Professeurs de Mathématiques soit Belge et bilingue. Le nom de sa première revue qu'elle publia fut donc en latin, lui donnant une sorte de solennité que son contenu ne démentira pas.

C'est par le petit bout de cette lorgnette (verba volant, scripta manent) que nous avons essayé de dégager les faits marquants qui ont agité le lanterneau mathématique de 1953 à 1974. Certaines publications — préoccupations — de l'époque sont parfois surannées, mais parfois d'une jeunesse et d'une actualité stimulantes.

Une écrasante majorité des textes publiés sont bien évidemment des articles sur des sujets mathématiques : beaucoup de ceux-ci mériteraient d'être revisités car ils n'ont souvent pas pris une ride. D'autres étaient plus liés à des préoccupations (et des programmes) de l'époque et apparaissent aujourd'hui comme un agréable divertissement. Vous le comprendrez, nous avons dû totalement occulter cet aspect des choses dans cet aperçu historique.

Nous avons — un peu artificiellement — regroupé les autres faits marquants de la vie de la Société en quelques grands thèmes qui ont occupé beaucoup de pages de la revue *Mathematica & Paedagogia*.

Un premier thème que nous avons abordé est formé des interrogations sur l'évolution des programmes de mathématiques ainsi que des projets de grilles-horaire.

Chaque année, la Société a organisé un Congrès, moment fort de contact avec ses membres. *Mathematica & Paedagogia* reprend souvent — à voix plus feutrée — les échos de discussions que l'on devine avoir été animées . . . La grande majorité des conférences prononcées à ces occasions ont régulièrement paru dans la revue.

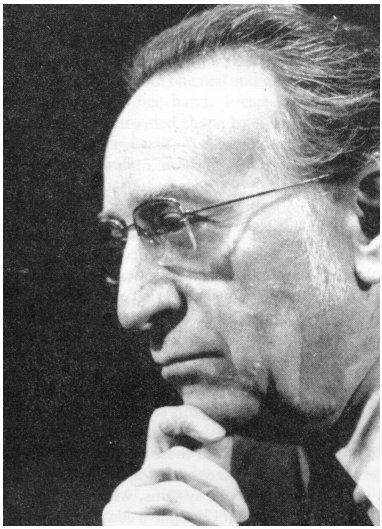
Nous en avons rapporté quelques échos des communications faites lors des Congrès annuels de la Société.

Quelques nouveautés techniques ou pédagogiques furent mises en exergue par la revue : celles-ci constituent notre troisième thème.

Enfin, les « Journées d'Arlon » ont fait l'objet d'un quatrième thème; leur influence ayant été loin d'être négligeable ces années-là, leur valaient bien un chapitre séparé.

1. La création de la société et de la revue

En 1950, Caleb Gattegno de l'Université de Londres, fonde la C.I.E.A.E.M. (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques). Cette Commission se veut « un groupe où épistémologistes, logiciens, psychologues, mathématiciens, pédagogues, devaient apprendre les uns des autres ce qu'ils ne savaient pas ». Dès le début, le belge Willy Servais, professeur à l'Athénée du Centre à Morlanwelz, joue un rôle actif à ses réunions où mûrissent les idées d'une réforme des mathématiques. Il en assurera d'ailleurs le secrétariat de 1961 à 1979. Il est rapidement convaincu de la nécessité d'assurer en Belgique un relais structurel aux travaux de la C.I.E.A.E.M..



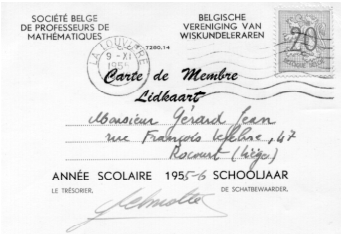
Caleb Gattegno

Soutenu par l'Inspecteur des Enseignements Moyen et Normal Jules Ruchard, Willy Servais s'entoure de quelques amis : ils rédigent des statuts et les discutent dans deux réunions préliminaires tenues à l'École Moyenne de l'État à Laeken les 26 avril et 30 mai 1953. La Société Belge de Professeurs de Mathématiques - Belgische Vereniging van Wiskundeleraren (SBPM-BVW) y est fondée le 14 juin 1953 par une Assemblée Constituante forte de quelque deux cents participants.

Willy Servais avec la française Lucienne Felix au Congrès de la C.I.E.A.E.M. à Melun en 1951.

Un Comité de vingt-deux Commissaires est désigné sous les Présidences d'honneur du professeur Lucien Godeaux de l'Ulg et de Jules Ruchard. Willy Servais est président, poste qu'il occupera jusqu'en 1969. Parmi les Commissaires, il nous faut retenir Louis Jéronnez (préfet de l'Athénée Royal de Binche; secrétaire); Lucien Delmotte (professeur à l'Athénée Royal de Binche; trésorier), Gaspard Bosteels (prefect van het Koninklijk Atheneum te Berchem) et Robert Van Twembeke (leraar aan het Koninklijk Atheneum te Ronse). Ce noyau va prendre en charge l'administration quotidienne de la Société et la production d'une revue bilingue *Mathematica & Paedagogia*.

Frédérique Lenger, Lucien Delmotte et Louis Jéronnez au Congrès de la C.I.E.A.E.M. à Bellano en 1955.


SOCIÉTÉ BELGE DE PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
BELGISCHE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN
Carte de Membre
Lidkaart
Monsieur Gérard Jean
rue François Lefèbre, 47
Raeren (Liège)
ANNÉE SCOLAIRE 1955-56 SCHOOLJAAR
LE TRÉSORIER, DE SCHATBEWAARDER,

À ses débuts, le Comité de la Société ne dispose que de moyens réduits pour mener à bien ses relations avec ses membres (cotisations, tenue à jour de fichier sur carton, etc), éditer une revue, organiser une assemblée générale annuelle et un Congrès. Imagine-t-on le travail fastidieux que nécessitaient les contacts avec les membres : il n'était question ni d'ordinateur, ni d'imprimante, ni d'adressographe. Envoyer une circulaire aux membres demandait la dactylographie du texte à diffuser sur stencil, la reproduction du texte sur ronéo, l'envoi (en établissant chaque fois un jeu d'enveloppes mentionnant l'adresse manuscrite des membres).

La SBPM a été fondée par des personnalités des Enseignements de l'État, des Provinces et des Communes. La « guerre scolaire » qui opposa les partisans de l'enseignement catholique au Gouvernement de 1954 à 1958 ne facilite pas les relations entre tous les professeurs de mathématiques du pays. Une timide ouverture se profile en 1957 avec la publication ([1]) d'un texte du Père Jean Nachtergaele, s.j. ([2]) consacré aux *Ambitions et responsabilités du professeur de mathématiques*.

> « Savoir les mathématiques » signifie, à première vue, calculer convenablement, saisir sans trop de peine la méthode de résolution d'un problème, refaire aisément la démonstration d'un théorème. L'élève moyen de nos classes d'humanités atteint ce niveau et essaie de s'y maintenir, mais, dans la plupart des cas, ces ambitions ne dépassent pas la réussite immédiatement utilitaire d'un examen. La solution du problème est toujours, immédiatement ou par le truchement de la mémoire, empruntée au professeur ou au manuel, l'exposé du théorème à des traits d'une récitation.
>
> ... Il suffit cependant d'avoir goûté à la recherche personnelle pour mesurer l'abîme qui sépare, d'une activité mathématique digne de ce nom, un travail de mémoire ou de reproduction docile. Le vrai mathématicien ne se contente pas de reproduire un geste, un texte ou un procédé, mais il crée son geste, exprime dans son langage un raisonnement dont il prend la responsabilité, ou redécouvre un procédé de calcul.
>
> ... Si claires qu'elles soient, nos explications aboutissent trop souvent au découragement des élèves, ou bien à une atrophie de leurs facultés

([1]) *Mathematica et Paedagogia*, n° 12 — 1956-57.

([2]) professeur au Collège St-Michel de Bruxelles, il deviendra par la suite commissaire de la Société et Vice-Président en 1960 et sera Président de 1979 à 1981.

> d'invention. En Mathématique, une connaissance acquise sans le concours de l'activité et de l'imagination de l'élève est un poids mort, un frein, et finalement une cause de dégoût.
>
> ... L'objectif immédiat de l'enseignement des mathématiques pourrait être défini : provoquer l'activité personnelle de l'élève sur des questions mathématiques.

2. Mathematica & Paedagogia

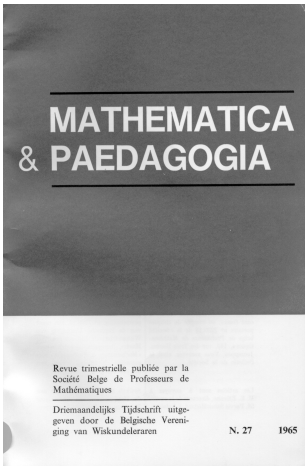
La cotisation annuelle est fixée à 100 francs et donnera droit à recevoir le Bulletin de la Société. Le sommaire du premier numéro de cette publication était le suivant :

- deux éditoriaux, l'un en français de W. Servais ([3]) , l'autre en néerlandais (signé : de redactie) ;
- un article de culture mathématique *Géométrie et la théorie des groupes* de L. Godeaux ;
- deux articles sur la connaissance des élèves : *Une lettre en guise d'introduction* de C. Gattegno et *Enseigner en apprenant* de F. Lenger ;
- cinq articles sur l'enseignement des mathématiques : *Mise en équation* de M. Viot, *Équation d'une conique sous forme de déterminant* de A. Devresse, *De Harmonische perspectiviteit* de R. Van Twembeek, *les premières leçons d'algèbre* de L. Jacques et un propos sur la bosse des mathématiques de H. Lorent ;
- deux articles sur les applications des mathématiques : *Les mathématiques au service des sciences contemporaines* de M. Hoyaux et *le groupe des homographies en optique géométrique* de P. Ronsmans ;
- une rubrique Contacts avec d'autres sociétés de professeurs belges, avec des sociétés étrangères, avec la C.I.E.A.E.M. ;
- une rubrique bibliographique ;
- une rubrique Questions et Problèmes ;
- et quelques données administratives.

Pour des raisons d'économie, l'administration de la revue était faite par des membres du Comité (expédition de la revue, récolte des adhésions...), un directeur de la revue rassemblait les articles, les sélectionnait et les présentait à un imprimeur : Henin à Farciennes. On peut rendre hommage à cet imprimeur qui acceptait une tâche bien lourde pour le matériel disponible

([3]) Voir l'article *Bon vent* dans cette revue.

à l'époque : les textes étaient composés ligne par ligne par juxtaposition des caractères en utilisant au mieux une linotype. En outre, il était souvent confronté à un langage et à des signes typographiques qui étaient loin de lui être familiers. Cela a valu à W. Servais et à L. Delmotte d'aller passer de nombreuses heures aux côtés de l'imprimeur pour obtenir une correction plus rapide des épreuves et maintenir un rythme acceptable de parution de la revue.



En 1965, l'impression de la revue sera confiée à l'imprimerie J. Duculot à Gembloux : la composition de textes comportant des notations ensemblistes devenait un problème insurmontable pour notre premier imprimeur non spécialisé en mathématique. La revue étrenne à cette occasion une nouvelle couverture qu'elle gardera jusqu'au numéro 59. Les derniers numéros seront publiés sans couverture cartonnée : c'est pour la Société une période d'économie rendue nécessaire par le dédoublement de la revue.

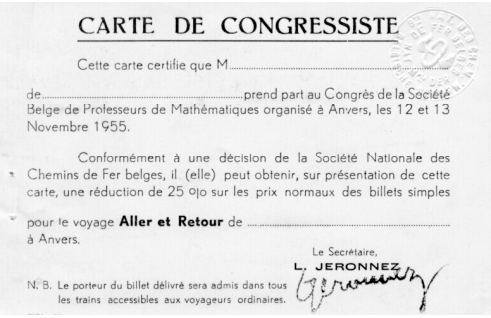
Cinquante-neuf numéros de la revue furent bilingues, même s'il faut reconnaître que la majorité des articles furent publiés en français. Il y eut même quelques articles en allemand (E. Steller, *Einführung der struktur (Z;+,·)* dans *Mathematica & Paedagogia*, n° 47 — 1971)! En 1973, la Société dut s'adapter à la nouvelle réalité linguistique du pays : la revue fut scindée en deux publications, l'une en français numérotée de 60 à 67 et l'autre en néerlandais numérotée de 60 à 63. En décembre 1974, *Mathematica & Paedagogia* s'arrêtait définitivement du fait de la dissolution de la SBPM (remplacée par la SBPMef et la VVWL). La cotisation était passée en vingt ans à 250 francs, ce qui couvrait avec peine les frais d'impression.

La collecte des articles et la mise en page de la revue avaient été assurées conjointement par deux commissaires. Pour les textes francophones et la supervision de l'édition, se sont succédés Fernand Burton (n° 1), Louis Jéronnez (n° 2 à 10), Robert Van Twembeke (n° 11 à 16), Willy Servais (n° 17 à 18), Alfred Warbecq (n° 19 à 24), Emile Etienne (n° 25 à 33) et Guy Noël (n° 34 à 67). Les textes néerlandophones furent supervisés par Gaspard Bosteels (n° 1 à 42 et n° 60 à 63) et Raymond Broeckx (n° 43 à 59).

Le double numéro 48-49 de 1971 découvrira la couleur pour mieux exprimer un article de Frédérique Papy sur la notion de groupe. Mais cette expérience onéreuse restera rare ([4]) dans les annales de la Revue.

3. Une Société au service de ses membres

La période de 1953 à 1974 qui correspond à la publication de *Mathematica & Paedagogia* est dominée par la longue présidence de W. Servais de la fondation en 1953 à 1969, puis par celle de Roger Bex de 1970 à 1973 et enfin les premières années de celle de Adolphe Festraets de 1974 à 1979.



CARTE DE CONGRESSISTE

Cette carte certifie que M.....

de.....prend part au Congrès de la Société Belge de Professeurs de Mathématiques organisé à Anvers, les 12 et 13 Novembre 1955.

Conformément à une décision de la Société Nationale des Chemins de Fer belges, il (elle) peut obtenir, sur présentation de cette carte, une réduction de 25 o/o sur les prix normaux des billets simples pour le voyage **Aller et Retour** de ..... à Anvers.

Le Secrétaire,
L. JERONNEZ

N. B. Le porteur du billet délivré sera admis dans tous les trains accessibles aux voyageurs ordinaires.

Les éditoriaux reflètent assez bien les préoccupations des enseignants de l'époque. Bien vite, un sujet sera dominant : la réforme qu'est la grande aventure des maths modernes qui s'annonce, se concrétise, se réalise et puis s'arrête ... Les éditoriaux rapportent les propos tenus lors des Congrès organisés chaque année : ceux-ci durent généralement une journée et sont au début presqu'exclusivement organisés par l'aile francophone. Pourtant des exposés y sont faits dans les deux langues. Il n'est pas rare que les congressistes se réunissent le dimanche ... et ils peuvent obtenir des billets de chemin de fer donnant droit à une réduction de 25%. Autre époque ...

Quant aux articles mathématiques de fond, ils abordent souvent de manière très classique des points de matière des programmes de l'époque. Grâce à ses relations tissées dans le cadre de la C.I.E.A.E.M., W. Servais permet à de nombreux mathématiciens étrangers de s'exprimer dans la revue. Il y a là un merveilleux brassage d'idées, mais néanmoins beaucoup de classicisme transparaît dans les premiers sujets traités. Dès 1958, les

([4]) La seule autre sera pour L. Jéronnez et I. Lejeune, L'expérience de Waterloo d'un enseignement moderne de la mathématique à l'école primaire, *Mathematica & Paedagogia*, n° 53-54-55 — 1972. Et pour l'anecdote, une unique flèche rouge dans un article de R. Holvoet consacré aux « cayleygraphes » et « papygrammes ».

contenus changent : de nouvelles matières ou de nouvelles manières de les enseigner voient le jour. La revue prend très à cœur son travail de formation et d'information face à la mathématique moderne qui s'annonce.

4. Les programmes et les horaires

Robert Van Twembeke dénonce dès 1956 ([5]) l'imprécision de programmes qui permet aux rédacteurs de manuels d'abuser de la mention « très important ». Il se plaint de ce que la fonction exponentielle est peu développée, alors que l'on étudie en long et en large des fractions rationnelles du second degré dont l'importance n'est pas évidente. Il fulmine sur les discussions d'équations paramétriques du second degré, la simplification de radicaux doubles, les équations réciproques, les équations logarithmiques compliquées,... Il dénonce cet enseignement où aux épreuves d'examen d'admission en Polytechnique, un candidat prié de donner la définition d'une hyperbole répondit : $\delta < 0$. Dans un autre article, il fait remarquer que le technicien et l'ingénieur emploient fort peu, et de moins en moins, les tables logarithmiques. Par contre, ils manient constamment la règle à calcul et ont à lire ou à construire des graphiques où l'un des axes au moins est muni d'une échelle logarithmique ([6]).

Suite à cet article, la SBPM, faisant droit à la demande quasi générale de ses membres, met sur le métier l'étude des programmes et y consacre sa réunion statutaire de mai 1957 ([7]). Elle espère être ainsi en mesure de présenter des remarques et des projets capables d'éclairer les futurs réformateurs : il s'impose, en effet que les nouveaux programmes soient élaborés avec le concours des hommes chargés de les appliquer et responsables au premier chef de leur efficacité.

> Si l'on veut combattre la « peur » des mathématiques si répandue chez les élèves, il faut doser convenablement la quantité de travail imposé et surtout ne pas imposer des tâches dont la motivation est insuffisante. Il faut faire comprendre graduellement la nécessité de la rigueur. Il faut aussi trouver de temps à autre une réponse satisfaisante à la question favorite des élèves : « À quoi cela sert-il ? », en leur montrant que les notions abstraites, dont le développement est le domaine propre des

([5]) *Mathematica & Paedagogia*, n° 10 — 1956-57.
([6]) *Mathematica & Paedagogia*, n° 12 — 1956-57.
([7]) J. Jeronnez, Compte rendu de la réunion statutaire, *Mathematica & Paedagogia*, n° 12 — 1956-57.

> mathématiques, fournissent un outil, des schémas grâce auxquels nous pouvons accroître notre emprise sur le monde réel.
>
> Le programme actuel nous empêche-t-il de faire appel à des notions d'histoire des mathématiques ? Nous interdit-il, par exemple, de souligner, à l'occasion de l'introduction des nombres irrationnels, pourquoi l'apparition d'un nombre tel que $\sqrt{2}$ fut une catastrophe pour les Pythagoriciens, ou de traiter le problème des quadratures dans son contexte historique ?
>
> Mais un programme comme toute œuvre humaine est perfectible et doit s'adapter périodiquement à l'évolution scientifique pour que le décalage entre la science qui se crée et la science qui s'enseigne ne devienne trop grand ([8]).

G. Hirsch, de l'Institut Agronomique de Gand ([9]), défend l'idée de l'introduction de la statistique dans les programmes de l'enseignement moyen. Il y a moyen, dit-il, de traiter des applications, déjà fort intéressantes, de l'analyse statistique sans faire de longs calculs. Il ajoute :

> De plus, quelques notions d'analyse statistique répandues dans un plus grand public permettraient sans doute plus facilement à nos contemporains de dégonfler bon nombre d'affirmations totalement dépourvues de sens, mais dont la publicité fait état, se fondant sur le poids qu'ont auprès de certains esprits les formules ou expressions à caractère vaguement mathématique. Je crois que les mathématiciens ne pourraient que se réjouir de voir empêcher cet emploi véritablement abusif et trompeur du prestige des mathématiques.

G. Boigelot, de l'Athénée Royal d'Uccle, montre qu'il serait naturel d'étudier la loi binomiale comme application directe de l'analyse combinatoire et du binôme de Newton. En première, où l'on enseigne un peu la loi exponentielle, il serait tout indiqué de parler de la loi de Gauß.

Ces quelques exemples montrent qu'il faut longtemps à certaines idées pour s'imposer. Les statistiques et les lois élémentaires de probabilité restent aujourd'hui encore des parents pauvres de notre enseignement souvent sacrifiés sur l'autel du planning trop serré. Au passage, signalons que ce n'est qu'en 1999 que la Commission pédagogique de la SBPM produira un dossier d'explorations didactiques sur la statistique ([10]).

([8]) G. Boigelot, *Mathematica & Paedagogia*, n° 12 — 1956-57.

([9]) Plus tard, professeur à l'ULB, à la VUB et très longtemps secrétaire de la Société Mathématique de Belgique

([10]) Dossier pédagogique n° 6.

Une première liste des matières susceptibles de se retrouver dans *L'enseignement de la mathématique dans le tronc commun* (c'est-à-dire les trois premières années du secondaire) est publiée sous la signature de G. Papy en 1962 dans le n° 23 de *Mathematica & Paedagogia*. Les maths modernes sont en marche !

> Ce projet de programme expose les éléments de la mathématique dans le cadre ensembliste comme devront le faire tôt ou tard ceux qui poursuivront des études mathématiques. Cette méthode développe l'esprit de tous les élèves et leur inculque les éléments de l'Algèbre de Boole et de la théorie des graphes dont l'importance s'affirme chaque jour davantage, dans les domaines les plus divers comme les circuits électriques, les machines à calculer, la mécanographie, la sociométrie, la psychologie, le calcul opérationnel, etc...

En 1965, l'éditorial de la revue annonce la loi d'omnivalence. Cette loi élargissait les conditions d'accès aux études universitaires et créait ce que le public retiendra sous le nom d' « examen de maturité ». Dorénavant, la valeur d'une section d'humanités pourra s'apprécier plus justement par la qualité de la formation qu'elle donne en vue d'études supérieures déterminées. Il n'y aura plus de sections privilégiées a priori sur la base d'une ségrégation imposée légalement ([11]). La mathématique reste une branche « principale » partout : l'universalité de la mathématique appelle à un effort de diffusion dans toutes les classes, que le programme soit réduit ou non. Reste une contradiction interne au système : l'examen d'entrée que les Facultés polytechniques continuent à imposer aux porteurs du diplôme de maturité, doublé d'un certificat d'études moyennes supérieures.

La seconde liste des matières de mathématique nouvelle proposée pour les classes de 6e, 5e et 4e est publiée en 1966 dans le n° 30 de la revue ([12]). Cette fois, la composition des 24 membres du groupe de travail est mentionnée. Dans cette même revue, on s'inquiète de la nécessaire coordination qu'il faudra bien entreprendre au niveau secondaire entre les professeurs de mathématiques et de sciences notamment la physique.

À partir de 1968, la revue va publier successivement tous les programmes pour tous les niveaux, tous les réseaux, toutes les options. Elle étudiera longuement la pépinière de nouveaux manuels (14 auteurs ou groupe

([11]) Avant cette loi, les élèves de scientifique ne pouvaient aborder les études de chimie, lesquelles étaient ouvertes aux élèves de latin-grec !

([12]) la numérotation des classes avant le rénové se faisait pour le secondaire de la 6e à la 1re.

d'auteurs en proposent pour le programme de première année !) La Société aura vraiment joué à cette occasion son rôle de courroie de transmission en relevant brillamment le défi d'informer au maximum les professeurs embarqués dans la réforme.

Le double numéro 48-49 de 1971 publie un rapport remis par la SBPM au Ministre de l'Éducation nationale Dubois : il s'agit d'un projet de répartition des volumes horaires de mathématiques. Au degré d'observation, est proposée une répartition de quatre périodes/semaine accompagnés d'une heure de travaux dirigés en demi-classe. Au degré d'orientation, cinq périodes avec la possibilité d'une option complémentaire de une ou deux périodes. Au degré de détermination, deux formations sont prévues, l'une pour les utilisateurs faibles avec trois périodes et l'autre pour les utilisateurs forts avec sept périodes. Dans chaque cas, les élèves ont la possibilité de choisir zéro, deux ou quatre périodes en options complémentaires.

5. Les Congrès

Le Congrès de 1955 à Berchem a pour thème « Les sources concrètes et intuitives des mathématiques ». La difficulté de la représentation de l'espace est au cœur des débats : les élèves voient mal les relations spatiales à partir des figures planes tracées en fausse perspective. Certains prônent la construction par les élèves de modèles en carton, en baguettes, en plasticine. Un débat s'engage sur l'opportunité d'user de couleurs dans les dessins (sic !). Des schémas de montages électriques servent d'intuition à la découverte des premières représentations ensemblistes et aux tables de vérité logiques. L'algèbre de Boole y est à l'honneur. Les premiers diagrammes de Venn envahissent la revue ([13]) !

En marge de l'Expo 58, La SBPM participe à Bruxelles à un Congrès International sur le thème « Responsabilité humaine du professeur de mathématique ». H. Freudenthal, de l'Université d'Utrecht en parle ([14]) :

> Les mathématiciens ont grandement influencé notre civilisation, et c'étaient les mathématiciens mêmes, inventeurs et professeurs, qui ont exercé cette influence. Mais cette influence ne s'exprime pas seulement et même pas de façon prépondérante par l'application de formules mathématiques préconçues à des instruments, à des situations,

([13]) *Mathematica & Paedagogia*, n° 8 — 1955-56.
([14]) *Mathematica & Paedagogia*, n° 16 — 1958-59.

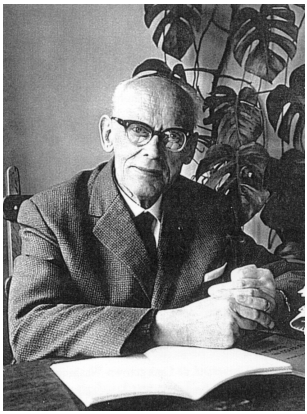
à des événements dans le monde physique. L'esprit mathématique, la façon mathématique de poser et de résoudre les problèmes a pénétré et façonné les esprits de ceux qui travaillent dans les sciences. C'est un progrès qui continue toujours. Les mathématiques influenceront de plus en plus toutes nos activités, scientifiques et autres. les mathématiques ne serviront pas seulement à la construction des machines, mais plus directement à la construction de cette société humaine même, et cette influence se manifestera non seulement par l'application de formules mathématiques, mais par la diffusion de l'esprit mathématique.

Y a-t-il une responsabilité des mathématiciens dans cet état de choses, à cet ordre de grandeur ? Le professeur de mathématiques ne peut pas deviner laquelle parmi ses paroles éveillera l'esprit et le goût des mathématiques dans le cerveau et le cœur de son élève, d'un jeune enfant qui deviendrait mathématicien ou non, qui appliquerait les mathématiques ou qui les oubliera, qui ferait des découvertes fondamentales ou modestes, qui, de sa part, élèverait des génies ou des artisans médiocres.

Une responsabilité humaine, individuelle, interprétée dans ce sens serait irréelle, exagérée, métaphysique. Mais c'est souvent de cette espèce de responsabilité que les philosophes et des hommes de lettres chargent les épaules de ceux qui auraient provoqué la décadence d'une civilisation sacro-sainte par tradition et l'arrivée de l'ère où règne la bombe atomique.

... Il y a un esprit mathématique qui — j'en suis convaincu — déterminera le caractère non seulement de nos relations avec le monde physique et avec les machines qu'on construit, mais aussi celui de nos relations humaines — individuelles, internationales, interraciales. La rationalisation de ces relations est la mission que nous aurons à remplir dans les années qui nous restent du XXe siècle. La rationalisation de quelque chose que ce soit, est une activité qui est propre au mathématicien ou en tout cas à l'esprit mathématique. Il semble illusoire de parler de rationalisation dans un monde où les relations humaines sont dominées par des sentiments et des passions, par l'amour et la haine aveugle plutôt que la raison. La rationalisation des relations humaines ne sera pas le résultat d'une convention diplomatique. Nous n'y parviendrons pas par un coup de force, mais par une évolution graduelle, insensible à l'individu, transformant les générations successives par le moyen le plus puissant qui existe : l'éducation. Par le fait que nous sommes mathématiciens, nous sommes éducateurs de l'humanité, même si nous nous vouons aux mathématiques les plus abstraites. Nous travaillons pour un avenir où la raison est le régulateur des relations humaines et par ce travail nous nous acquittons de notre responsabilité humaine.

6. Les nouveautés techniques ou pédagogiques



Les Nombres en couleurs sont décrit avec beaucoup de lyrisme par C. Gattegno dans *Mathematica & Paedagogia*, n° 4 — 1954-55 et n° 9 — 1955-56. Grâce à une conviction de la meilleure trempe, cet homme lucide et critique abandonnera progressivement ses charges à l'Université de Londres comme mathématicien et psychologue pour faire connaître de par le monde ces fameuses réglettes. Elles étaient sorties de l'imagination féconde de Georges Cuisenaire, un instituteur de Thuin, né en 1891 et décédé en 1975. Il avait déposé le brevet de ses Nombres en couleurs en 1951 : c'était donc à l'époque une invention neuve. La SBPMef lui rendra hommage par la voix de Louis Jéronnez au Congrès de 1976. (voir le texte de cet hommage dans *Mathématique et Pédagogie* n° 6, mars-avril 1976).

> Ces réglettes sont puissantes parce que, mathématiquement, elles portent au premiers rang les relations et les structures et parce que, psychologiquement, elles stimulent l'intuition et facilitent les découvertes.

Ce jeu des réglettes explique l'addition, la soustraction, la multiplication et leurs propriétés, les nombres négatifs, les progressions arithmétiques, permet de découvrir la notion de variable, de calculer des aires et des volumes, d'entrevoir les logarithmes, d'aborder les fractions et leurs opérations ([15]).

Gattegno n'était pas le seul à croire en cette méthode d'apprentissage puisque l'allemand Hopt, qui fut président de l'Union Internationale des Mathématiciens, a déclaré un jour ([16]) :

> Avec Klein, nous avons eu les mathématiques élémentaires considérées d'un point de vue supérieur; avec les réglettes, nous pouvons faire des mathématiques supérieures d'un point de vue élémentaire.

([15]) W. Servais, Les nombres en couleur, *Mathematica & Paedagogia*, n° 17 — 1959.
([16]) ibidem.

Le géoplan est présenté ([17]) par Willy Vanhamme, alors professeur à l'Athénée Royal de Marchin ([18])

> Il sert en classe comme à la maison : prenez une planchette carrée d'environ vingt-cinq centimètres de côté. Qu'elle ait au moins un centimètre d'épaisseur. Divisez-là avec précision en neuf carrés égaux. Au centre de chaque carré enfoncez un clou en ayant soin de laisser la tête dépasser d'environ un demi-centimètre. Le géoplan est achevé. Il vous reste à vous procurer quelques liens élastiques en caoutchouc, de préférence de différentes couleurs. Un élastique tendu formera, en s'accrochant aux clous, une figure géométrique.

En 1958, un des nombreux correspondants étrangers de la SBPM, l'espagnol P. Puig Adam montrera comment utiliser ce géoplan pour démontrer la formule de Pick ([19]). Gattegno publiera également un très long article sur l'emploi du géoplan dans l'enseignement de la géométrie ([20]).

P. Germain de l'ULB, s'intéresse dès 1955 aux Grandes machines mathématiques ([21])

> C'est certainement dans le domaine des machines arithmétiques que les progrès les plus étonnants ont été faits depuis la guerre. Cela leur vaut d'ailleurs le titre envié de « cerveaux électroniques », les parant de toutes les qualités généralement attribuées à la pensée humaine. Actuellement, on peut estimer le nombre de machines construites ou prêtes à entrer en fonctionnement à une centaine. Quelques grandes firmes industrielles se sont d'ailleurs spécialisées dans la fabrication et la vente de telles machines. À titre de curiosité, indiquons qu'en 1954, le prix de vente d'une machine française se situait vers les 5 millions de francs belges.

Avec sa centaine de ligne d'« instructions » un premier programme informatique est publié dans le n° 25 de 1964. Le mathématicien de base découvre sous la plume de C. Grosjean, directeur du Centre de Calcul de l'Université de Gand que quelque chose vient de changer dans le monde des mathématiques : une équation du troisième degré est résolue par la

([17]) *Mathematica & Paedagogia*, n° 6 — 1954-55.

([18]) De 1957 à 1973, il travaillera à l'Université de Lovanium : il y sera un actif représentant de notre Société aux milieux des difficultés et des troubles qui caractérisent cette période de la vie en Afrique. Il reviendra ensuite à Louvain-La-Neuve.

([19]) L'aire des polygones au géoplan, *Mathematica & Paedagogia*, n° 15 — 1957-58.

([20]) *Mathematica & Paedagogia*, n° 19 — 1960.

([21]) *Mathematica & Paedagogia*, n° 7 — 1955-56.

méthode goniométrique par une « IBM 610 auto-point Computer ». Cette machine avait été présentée par son constructeur lors de l'Expo 58 et avait été « récupérée » par l'Université. En trois ans, elle a fonctionné près de 6000 heures. Composée d'une « console » de communication et d'une classique « machine à écrire électrique », elle se fait remarquer par son « armoire de 1,60 m de long, 80 cm de large et 1,10 m de haut où travaille le « cerveau ». Ce gadget n'a aucun intérêt pour l'enseignement ...mais dans quelques années, souligne l'auteur, on devrait trouver des machine à calculer de moindre « envergure ».

En 1971, Guy Halin, du Collège St-Roch de Ferrières, se fait le chantre des cours programmés ([22]).

> Le projet de réforme de l'enseignement met en présence des enfants dont les quotients intellectuels sont plus disparates tout en consacrant les deux premières années à l'observation. D'où la nécessité, à la fois, d'une pédagogie nouvelle et d'une nouvelle méthode d'évaluation.

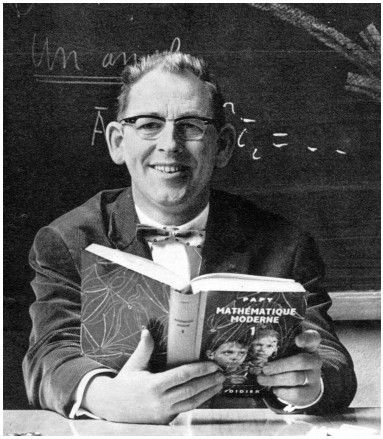
Soixante-neuf cahiers, portant chacun sur une partie du programme et contenant une information distribuée par mailles soigneusement graduées reprend le cours de première année. Un bilan accompagne chaque cahier. Cet instrument de travail fut testé dans neuf établissements où une classe recevait l'enseignement programmé et une autre recevait l'enseignement magistral et servait de classe-témoin. Les résultats des bilans laissèrent apparaître une différence sensible chez les mieux doués, spectaculaires chez les peu doués en faveur chaque fois de l'enseignement programmé.

7. Le CBPM et les journées d'Arlon

Présente comme Commissaire dès le premier Comité de la Société Frédérique Lenger (professeur au Lycée Royal d'Arlon) va avec Willy Servais rédiger dès 1958 le premier programme expérimental de « math. modernes » destinés aux Écoles Normales Gardiennes. Des expériences seront menées dès l'année scolaire 1958-1959 à Liège et à Arlon. Pour garantir la qualité mathématique de ce travail, les promoteurs contactent Georges Papy, professeur à l'ULB.

([22]) Expérience de pédagogie de la mathématique au seuil de l'enseignement rénové, *Mathematica & Paedagogia*, n° 51 — 1971.

Quoique sceptique à l'égard de l'applicabilité des programmes proposés, il deviendra pourtant rapidement l'élément moteur de la réforme en Belgique en assurant lui-même l'enseignement du programme expérimental à l'école Berkendael de Bruxelles. Cette époque verra la mise au point de divers moyens pédagogiques permettant l'enseignement des notions élémentaires concernant les ensembles et les relations. On utilise les diagrammes de Venn, les graphes sagittaux de Cayley; on introduit les convention vert-rouge en topologie.



En 1959, l'Organisation Européenne de Coopération Économique ([23]) prend en charge le problème de la rénovation de l'enseignement des Mathématiques et organise à Royaumont, près de Paris, une session d'études sur le thème des « Mathématiques Nouvelles ». W. Servais y développe la conception belge d'un programme rénové pour l'enseignement secondaire. L'O.E.C.E. constitue un groupe de 16 experts dont Paul Libois de l'ULB et W. Servais qui se réunit du 21 août au 19 septembre 1960 à Dubrovnik pour formuler un programme d'enseignement moderne.

Le 24 mai 1961, est fondé le Centre Belge de Pédagogie Mathématique (CBPM), patronné par des personnalités des trois réseaux d'enseignement belge et des deux régimes linguistiques. A côté de G. Papy, W. Servais et F. Papy-Lenger, on trouve R. Holvoet, J. Nachtergaele, M. Sart, F. Wuytack et les abbés Gilles et Bockstaele. Le CBPM met en place la revue *Nico* pour diffuser ses points de vue et propositions.

En 1959, la SBPM organise les premières « Journées d'Arlon » pour véhiculer un véritable recyclage des enseignants. À partir de 1960, les journées sont prises en charge par le Ministère de l'Éducation Nationale ([24])

([23]) qui deviendra plus tard l'OCDE.

([24]) Le 14 mai 1965, le Ministre H. Janne, en annonçant l'obligation du nouveau programme au 1er septembre 1968, recommandera dans sa circulaire n° 38/65 : *Les professeurs intéressés ont le devoir de se mettre au courant des éléments de la mathématique nouvelle et de la*

et dès l'année suivante, leur organisation pratique est confiée au CBPM. Près de 600 professeurs se réunissaient en un même lieu pendant trois jours ce qui posait d'énormes problèmes d'intendance. Les Journées étaient préparées par un séminaire résidentiel à Knokke, auquel n'étaient invités que les animateurs des groupes de travail de Arlon. Ces Journées seront organisées de 1959 à 1968 : elles auront un impact considérable et pas seulement au niveau mathématique. Elles ont contribué à créer des liens entre les participants, à leur donner le sentiment de participer à une œuvre commune. Les professeurs de mathématiques ont appris à se parler sans plus s'inquiéter de savoir à quel réseau ils appartenaient. Une situation s'est ainsi créée qui n'a peut-être pas d'équivalent dans les autres disciplines.

Du 1er septembre 1969 ([25]) jusqu'en 1978, les programmes des « mathématique moderne » furent partout d'application. Étant enseignées avec les mêmes méthodes que les « maths traditionnelles », par des professeurs dont beaucoup n'avaient pas bien assimilé la philosophie de la réforme ([26]), la généralisation des nouveaux programmes devait fatalement donner lieu à des excès et des erreurs, venant s'ajouter aux défauts des programmes eux-mêmes. Les auteurs des programmes définitifs avaient-ils eux-mêmes assimilé la philosophie de Papy, et la partageaient-ils ([27])?

Parfois, la revue publie ces « humeurs ». On sait que la rénovation a divisé le « corps » des matheux en deux : d'un côté les « papystes », de l'autre les « antipapystes ». Cela avait parfois des relents de guerre sainte. Léon Colot, professeur à l'Athénée Royal de Jambes s'emporte quelque peu sur les causes de cette « virulente » opposition ([28]).

> Elles me paraissent avant tout d'ordre psychologique, voire même philosophique. Le drame de la réforme des mathématiques, c'est l'incompréhension. Certains voient avec effroi se dessiner une évolution qu'ils

pédagogie de son enseignement. Il leur est conseillé à ce propos, de suivre régulièrement les cours du CBPM et de participer aux Congrès et aux stages organisés par le Département et par la SBPM. Ce texte est repris dans le n° 30 (1966) de Mathematica & Paedagogia

([25]) en fait, ils étaient d'application depuis de 1er septembre 1968, mais quelques écoles avaient obtenus des dérogations.

([26]) En 1968, faisant réponse à la question d'un sénateur, le Ministre de l'Éducation Nationale, Abel Dubois refuse d'accorder une biennale aux professeurs recyclés : il faut encourager les professeurs et non les contraindre, mais il croit que les maîtres ont assez de conscience professionnelle pour que les stimulations économiques soient placées dans leur esprit au second plan. (*Mathematica & Paedagogia*, n° 34 — 1968).

([27]) Il faut signaler le fait que Papy n'a pas été associé à la rédaction des programmes définitifs.

([28]) Lettres d'un professeur de mathématique à un collègue, *Mathematica & Paedagogia*, n° 38 — 1969.

> ne dominent pas, qu'ils ne comprennent pas par manque de formation et d'informations. C'est le triomphe de l'esprit casanier sur l'esprit d'ouverture et de renouveau.
>
> Le long conditionnement qu'ils ont subi, qu'ils ont imposé à d'autres, paralyse et empêche toute évolution de leurs schèmes mentaux. Enfoncés dans un dogmatisme, ils ne peuvent se libérer d'un passé qui leur a appris que le savoir est immuable. Prisonniers d'une doctrine surannée, ils n'ont pas l'ouverture d'esprit qui leur permettrait de comprendre que le monde actuel est un monde en pleine mutation et qu'il se métamorphose à une vitesse vertigineuse.
>
> Censé supérieur à ses élèves, il est le Maître qui domine et écrase. Dès lors, il n'admet pas facilement qu'on dise que son savoir est dépassé et qu'il faut le rajeunir, le réajuster. Dépositaire d'une tradition, il veut la transmettre intacte parce qu'on ne lui a pas appris que, même les plus vieilles traditions sont l'aboutissement d'une longue évolution et qu'elles continuent à évoluer.

On avait le verbe haut à cette époque. Nul doute que ce genre de propos faisait beaucoup pour le rapprochement ...

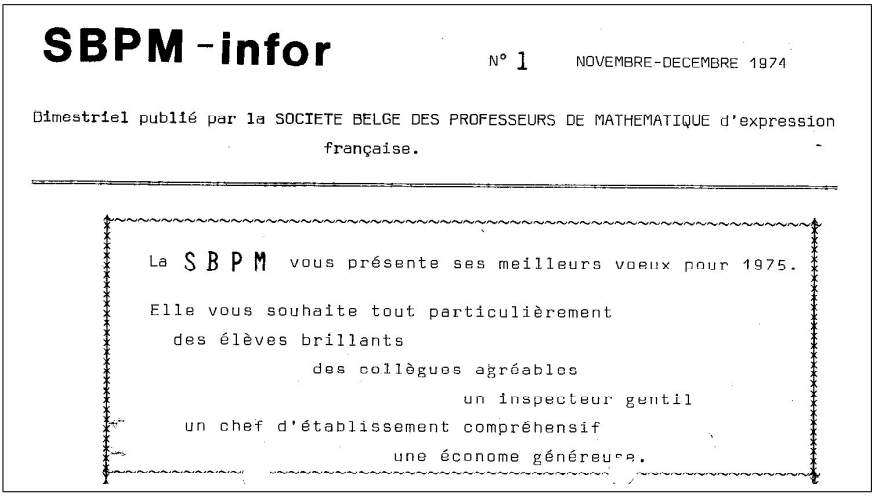
La « réforme de la réforme » viendra d'une initiative d'un groupe animé par W. Servais, J. Nachtergaele et G. Dethier qui conduira aux programmes de 1978.

Je tiens à remercier tout spécialement Messieurs Alfred Warbecq, ancien éditeur de la revue *Mathematica & Paedagogia*, et Lucien Delmotte, ancien trésorier de la Société, qui ont bien voulu me faire part de leurs souvenirs et réflexions quant à la genèse de la Société. Pour la partie concernant les journées d'Arlon, je me suis inspiré du texte *La réforme des Maths Modernes en Belgique*, écrit par Guy Noël, et publié dans *Mathématique et Pédagogie*, 91, Mars-Avril 1993, p. 55 à 73. Je lui dois (et à Yolande) également de nombreuses anecdotes sur la vie de la Société. Qu'ils en soient également remerciés !

Mathématique et Pédagogie . . . 1975-1993

J. MIEWIS, *CREM*

En septembre 1974, la nouvelle Société est créée : elle s'appellera tout naturellement la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'Expression Française et sa revue sera *Mathématique et Pédagogie*. Adolphe Festraets, dernier Président de la Société bilingue en sera le nouveau Président. Guy Noël, dernier directeur francophone de *Mathematica & Paedagogia* prend tout naturellement en charge la direction et l'édition de la nouvelle revue. Il y adjoint une feuille de contact : *SBPM-Infor*, sorte de toutes boîtes de la mathématique. Elle suivra de près l'actualité mathématique prévenant les professeurs des recyclages, des formations, des congrès, des expositions sur les thèmes qui les intéressent. Les délais entre la rédaction définitive d'un *Mathématique et Pédagogie* et sa parution ne lui permettent pas d'être un relais de ce type d'activités.



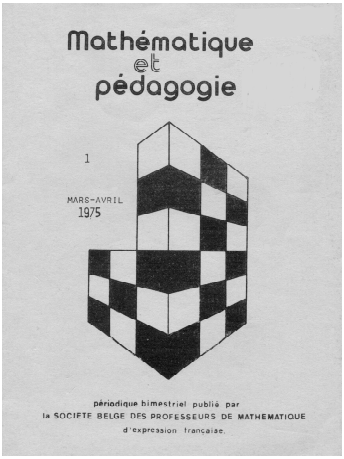
SBPM -infor N° 1 NOVEMBRE-DECEMBRE 1974

Bimestriel publié par la SOCIETE BELGE DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUE d'expression française.

La SBPM vous présente ses meilleurs voeux pour 1975.

Elle vous souhaite tout particulièrement
des élèves brillants
des collègues agréables
un inspecteur gentil
un chef d'établissement compréhensif
une économe généreuse.

> Enfermés dans un cadre de plus en plus rigide à cause de leur nombre, de leur spécialisation, des buts trop déterminés et disparates que la société assigne à leur action, par les réglementations et publications de toutes espèces qui les assaillent, les professeurs de mathématique ont besoin d'un lieu d'expression de leur liberté de pensée, de leurs initiatives, de leurs suggestions, de leurs critiques, de leur imagination créatrice. On ne peut changer de programme tous les six mois : le texte d'un manuel, par la force des choses, reste fixé pendant deux, trois, quatre ans; tandis que l'enseignement vivant provoque à chaque instant découvertes et mises au point. Pour que tous puissent bénéficier du travail de chacun, il faut le diffuser. C'est exactement le sens d'une revue ([1]).



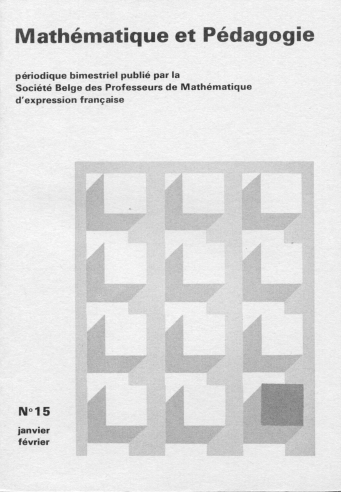
La cotisation est fixée à 300 francs alors qu'il en aurait fallu au moins 375 pour éditer une revue typographiée comme l'était la précédente. De ce constat, le Comité de l'époque décide que la nouvelle revue sera publiée en offset, à partir de documents dactylographiés directement par la rédaction. La présentation des premiers numéros sera assez inégale, avec de nouveaux articles écrits à la machine mêlés à d'anciens déjà mis en forme par le dernier imprimeur de *Mathematica & Paedagogia*. Les radicaux seront tracés à la règle, les symboles farfelus — dont était friand la mathématique moderne — dessinés à la main. Ces premiers numéros ont, vu d'aujourd'hui, un petit côté pionnier, ce qui n'empêcha nullement leur qualité mathématique et prouve l'enthousiasme des « repreneurs ».

Pour l'anecdote, ce numéro contient probablement la seule revendication non sectorielle de l'histoire de nos revues. Cette année-là, la Poste avait décidé d' « apurer » le marché d'un tas de petites revues confidentielles qui utilisaient les tarifs des « vrais » journaux et périodiques. Les critères de tarification qu'elle avait édictés signifiait que nous devions inclure des articles d'informations générales (non mathématiques) pour pouvoir garder un tarif raisonnable. Notre revue publia une bande dessinée de deux pages ironiques intitulées *Le vilain petit canard contre les tarifs postaux*.

([1]) J. Nachtergaele, s.j., dans *Mathématique et Pédagogie* n° 1 — 1975

Le deuxième numéro de la revue publie sous la signature de l'Inspecteur Roger Bex le *Bilan de quinze année de réforme* ([2]). La réforme des « Maths Modernes », ou plutôt la manière de les enseigner pose problème aussi la Société a-t-elle lancé une opération « Bilan » auprès de ses membres via *SBPM-Infor*. Une première synthèse sera publiée dans le n° 3 d'octobre 1975 de *Mathématique et Pédagogie* : elle montre des professeurs très critiques (programmes trop chargés et trop théoriques, grand nombre de définitions, ...). On se plaint des manuels, du manque de références, de la formation initiale; on parle de recyclage obligatoire avec diminution de la plage horaire...

C'est dans ce même numéro que Francis Buekenhout, professeur à l'ULB, crée une nouvelle rubrique appellée à un grand succès : « Dans nos classes » toujours présente aujourd'hui. Cette rubrique de problèmes dits élémentaires est destinée aux élèves et directement utilisable. La rubrique « Nos problèmes » continue à présenter des problèmes dits avancés, destinés aux enseignants.



Willy Vanhamme, professeur à l'UCL, sera en 1978, le deuxième éditeur responsable de *Mathématique et Pédagogie* : désormais, les textes seraient typographiés avec des « machines à boules ». Il fallait changer de boule pour écrire en italique ou pour écrire un caractère grec; dans ce cas, il fallait mémoriser une table de correspondance. Un « ϕ » était obtenu en pressant la touche « j ». Ce système de production de la revue restera en vigueur jusqu'au n° 44 en 1983. En six ans, Willy et surtout son épouse Jacqueline Vanhamme fourniront un énorme travail de composition, d'édition et d'expédition ([3]); toutes ces tâches journalières nécessaires mais fastidieuses, qui sont le lot de toutes les Sociétés fondées sur le bénévolat.

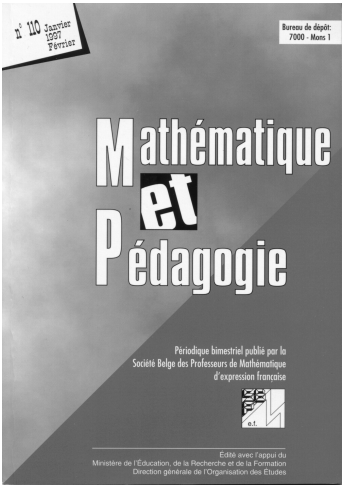
Le développement rapide de la micro-informatique permettra en 1984 à Claudine Festraets-Hamoir, professeur à l'Athénée Royal de Woluwe-St-Pierre,

([2]) Voir des extraits de ce texte dans cette revue.

([3]) C'est l'imprimeur Robert Louis à Bruxelles qui se charge ensuite de la reproduction en offset de la revue.

de composer les articles de la revue en s'aidant des premiers traitements de texte. La cotisation est passée à 450 francs, mais seules les mauvaises langues diront que c'est pour investir dans le matériel. C'est sous la direction de Claudine Festraets-Hamoir et avec l'aide de Francis Michel que vont apparaître assez régulièrement dans la revue des fac-similés d'anciens textes de mathématiques susceptibles d'être utilisés dans les cours.

En 1986, le n° 56 de la revue sera quasi entièrement consacré à l'événement scientifique de l'année : le passage au périhélie le 9 février de la comète de Halley. Histoire de se consoler de ce qu'elle fut surtout visible de l'hémisphère sud ! Prochain retour dans 76 ans.



Jacques Bair, professeur à l'ULg, reprend la revue en 1990 et y introduit la composition de texte en LaTeX, puissant programme de mise en forme de documents contenant des formules mathématiques complexes ([4]). Désormais, notre revue se présente sous une forme professionnelle qui n'a rien a envier aux revues mathématiques internationales. Ce passage était d'autant plus souhaitable que la majorité des publications scientifiques de nos universités, hautes écoles et centres de recherche sont également rédigées avec ce logiciel. Le succès de ce logiciel est d'autant plus réjouissant que sa diffusion se fait dans le domaine public, donc à moindre coût et cela sur tous les modèles d'ordinateurs, de l'ordinateur familial aux stations de travail en passant par le `PC` et le `Macintosh`.

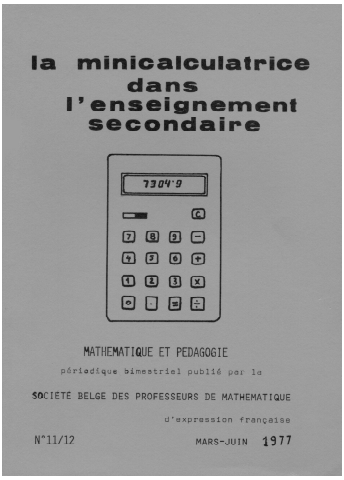
Jacques Bair assurera avec bonheur — et dans la durée — la direction de la revue, des numéros 75 au 128. C'est lui qui proposera le troisième graphisme de couverture de *Mathématique et Pédagogie* avec le numéro 110. Le quatrième et dernier en date a commencé au numéro 130 avec l'actuelle équipe d'édition.

([4]) La première version TeX (prononcez « tèk ») a été mise au point par l'Américain Donald E. Knuth en 1978 pour les besoins de l'Americain Mathematical Society. La version LaTeX est une évolution écrite par Leslie LAmport qui a augmenté la convivialité du logiciel.

Les calculettes

En 1976, Roger Deherder de l'ULB nous apprenait à nous méfier ([5]) des « mini-ordinateurs » et des « calculatrices de poche ».

> Contrairement à ce que l'on pourrait croire, le fait de travailler avec une partie seulement des nombres rationnels ne constitue pas le seul facteur d'imprécision de ces machines. Les résultats des fonctions $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $\log x$, e^x, $\sin x$, ... est obtenu par un calcul approché effectué par la machine, et ceci constitue le second facteur d'imprécision.
>
> Remarquons que tout moyen de calcul, y compris la feuille de papier et le crayon, ne fournissent eux aussi qu'une approximation du résultat « réel » de l'opération. Les calculateurs présentent simplement l'avantage de pousser les calculs plus loin et plus rapidement que les techniques traditionnelles.
>
> Rappelons également ce vieil adage suivant lequel il n'y a pas de mauvais outil, mais seulement de mauvais ouvriers. L'ordinateur, qu'il soit de poche ou qu'il occupe plusieurs dizaines de mètres-carrés, n'est jamais qu'un outil au même titre que les autres. Ainsi, l'excuse que nous entendons de plus en plus souvent et suivant laquelle l'ordinateur s'est trompé cache simplement des erreurs d'origine humaine.



Cet article était le coup d'envoi d'une activité qui allait occuper de nombreuses pages de notre revue pendant de longues années. Comment utiliser au mieux ce nouvel outil dans nos cours ? Dès l'année suivante, un double numéro spécial ([6]) était entièrement consacré à la minicalculatrice dans l'enseignement secondaire : il reprenait les exposés fait lors du Congrès de Namur qui y était entièrement consacré. Les organigrammes, les algorithmes, les instructions, les boucles, les tests entraient à grand fracas dans notre vie d'enseignant. La couverture de ce numéro spécial représentait une calculette élémentaire qui affichait le nombre

([5]) Incertitudes du calcul sur ordinateur, *Mathématique et Pédagogie* n° 7, mai-juin 1976
([6]) *Mathématique et Pédagogie* n° 11/12, mars-juin 1977

73049, dernier clin d'oeil du premier éditeur de nos revues qui terminait ainsi une série de 46 numéros successifs.

Les Olympiades

Revenons en 1976 car un autre grand chantier attendait les Commissaires. Sous l'impulsion de Francis Buekenhout, la SBPMef lance les Olympiades Mathématiques Belges. Cette épreuve voit le 27 mars 1976 s'affronter 760 élèves sur 75 questions à choix multiples (une solution à choisir parmi quatre propositions). Les meilleurs se retrouveront le 30 avril pour la première finale.

Pour l'anecdote, la première question de la première éliminatoire de la première Olympiade était ([7]) :

> Étant donné l'ensemble $E = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, laquelle des affirmations suivantes est fausse ?
>
> ① $\{1, 2\} \subset E$ ② $\{1, 2\} \in E$
>
> ③ $\emptyset \subset E$ ④ $\{1\} \in E$

L'année suivante, l'épreuve sera scindée en deux catégories « mini » pour le cycle inférieur et « maxi » pour le cycle supérieur. En 1982, le succès (plus de six mille participants) est tel qu'il faut procéder à des éliminatoires et des demi-finales régionales. En 1996, pour mieux coller à la réalité de l'enseignement par degrés, sera intercalée une épreuve « midi » pour les élèves de troisième et de quatrième. On est passé cette année-là à vingt et un milles participants, ce qui correspond à la vitesse de croisière actuelle.

L'équipe de bénévole qui gère cette aventure est la plus importante de la Société et a provoqué la « décentralisation » du secrétariat en 10 zones régionales (Arlon, Bruxelles, Charleroi, Liège, Louvain-la-Neuve, Luxembourg, Marche-en-Famenne, Mons, Namur et Tournai). C'est à ces centres

([7]) La liste complète de ces 75 questions de l'éliminatoire a été publiée dans *Mathématique et Pédagogie* n° 8, septembre-octobre 1976 ; la bonne réponse à cette première question est 4. Les questions de la finale ont été publiées dans le numéro suivant.

qu'incombe la lourde responsabilité de la sélection des demi-finalistes, la rédaction des histogrammes, les expéditions des résultats dans les écoles, la convocation des demi-finalistes, l'organisation et la correction de la demi-finale.

C'est ensuite au jury national composé de professeurs de l'enseignement supérieur et universitaire ainsi que d'inspecteurs qu'il appartient de déterminer quels sont les finalistes. Ceux-ci sont généralement réunis à Namur où ils travaillent pendant 3 à 4 heures à la résolution de problèmes ouverts.

Toute cette belle aventure ne serait pas possible si, au départ, des professeurs enthousiastes ne s'occupaient un mercredi après-midi d'organiser dans leur école les éliminatoires. Sans eux, leurs élèves n'auraient pas la chance de se mesurer à cette sympathique épreuve. Les questions ont bien entendu évolué avec les contenus des programmes : elles ont été regroupées dans 5 recueils que beaucoup d'enseignants utilisent dans le cadre de leurs cours.

Depuis la création de l'Olympiade Belge, une équipe de bénévoles s'est aussi consacrée à la préparation de jeunes à l'Olympiade Internationale et ce dès 1977 ([8]). La SBPMef a pu obtenir l'appui financier de la Direction Générale de l'Organisation des Études en vue d'assurer la préparation, la sélection et les frais de déplacement des candidats belges.

Une quarantaine d'élèves, bien classés aux demi-finales maxi, participent également à l'AIME (American Invitational Mathematics Examination) qui consistent en 15 questions à résoudre en 3 heures. *Mathématique et Pédagogie* a régulièrement publié ces tests chaque fois que nos élèves y ont participé.

Les situations-problèmes

Le Congrès de Namur de 1977 se choisit un thème de combat : « la mathématique du problème »! Willy Vanhamme, professeur à l'UCL et nouveau directeur de la Revue, l'explique dans un éditorial ([9]) :

([8]) En fait, une participation belge avait eu lieu en 1969, sans aucune préparation : les résultats n'avaient été guère brillants. Les Olympiades Internationales de Mathématiques existent depuis 1959.

([9]) *Mathématique et Pédagogie* n° 16, mars-avril 1978 : Spécial problèmes.

> En respectant les programmes à la lettre, en suivant de près les manuels nés de ces programmes, on est susceptible d'enseigner de la bonne mathématique. Mais il est évident que cette mathématique, bien structurée, bien assise aussi sur une axiomatique souvent explicitée à défaut d'être justifiée et comprise, présentée dans une forme qui laisse peu de place à l'imagination, ne donne qu'une faible image de la mathématique du chercheur. Celle-ci est faite de beaucoup plus d'imprécisions : des mauvais choix qu'il faut découvrir, des quantités de tentatives inutiles, avant de déboucher sur une idée exploitable.
>
> Cette mathématique est celle du problème dont l'énoncé n'est pas la traduction d'une théorie que l'on vient d'étudier.
>
> Il faut faire admettre à nos élèves que l'on ne résout pas un problème sans peine. La véritable recherche est faite de beaucoup de patience. L'important est de ne pas abandonner. Il n'est pas inutile d'interrompre la recherche d'un problème, de le laisser mûrir, de le reprendre à tête reposée, d'en discuter avec d'autres. On est amené ainsi à redécouvrir un champ assez vaste de résultats rencontrés antérieurement. La résolution d'un problème demandera peut-être des approches nouvelles, des études plus poussées de certaines matières. Bref, la progression dans la matière ne se fait pas avec la même linéarité.

Le Président de la Société, Adolphe Festraets s'engage sur le même chemin ([10]) :

> Le véritable problème met l'élève dans une situation instable où il ne voit pas immédiatement à quoi s'accrocher. Il y a souvent des points obscurs qu'il faudrait discuter et éclaircir. Il faut prendre une décision, il faut « attaquer » quelque part.
>
> Pour trouver un « point d'appui », qui puisse servir de point de départ pour la recherche (et dont il faudra peut-être changer s'il s'avère que la voie ainsi ouverte ne conduit nulle part), il faut exploiter ce que nous pourrions appeler « l'espace idéal » évoqué par le problème. Cela fait penser au comportement d'un insecte en péril qui, de ses pattes agitées, cherche à s'accrocher.
>
> Encore faut-il que l'espace en question ne soit pas vide !
>
> On pourrait concevoir un cours de mathématique qui se déroule d'une manière linéaire, un cours « unidimensionnel ». Un tel cours ne développe guère cet « espace idéal » fait de relations multiples entre les sujets d'étude, et de points de vue variés sur un même sujet. Il ne développerait guère non plus cette souplesse intellectuelle qui permet de varier les points de vue et de percevoir, comme dans un kaléidoscope,

([10]) ibidem

> des arrangements d'idées utilisables. Sans doute faudrait-il réserver un certain temps à une sorte de *vagabondage* mathématique qui permettrait d'explorer des chemins inhabituels et parfois surprenants, et qui encouragerait le professeur à se cultiver.

Dans une brève communication au Congrès, Guy Noël plaide pour ce qu'il appelle des « exposés non linéaires » ([11]) :

> Il n'est pas interdit de rechercher une autre manière d'organiser la matière. Elle pourrait être morcelée en un certain nombre de thèmes relativement autonomes. Les différents thèmes seraient aussi indépendants entre eux qu'il serait possible. Seules les notions vraiment fondamentales rencontrées dans un thème pourraient être utilisées lors de l'étude d'un autre thème. Au sein de chaque thème l'introduction d'une notion nouvelle, et son étude seraient justifiées par la nécessité de résoudre un ou des problèmes posés au départ. Les techniques utilisées, les modes de raisonnement seraient aussi variés que possible. Les résultats obtenus lors de l'étude des différents thèmes seraient ensuite coordonnés et intégrés à l'occasion de la résolution de nouveaux problèmes. Ceux-ci serviraient ainsi tout à la fois de motivation et de synthèse.
>
> Il est un préalable qui doit être réalisé avant qu'une technique d'enseignement non linéaire puisse être appliquée, et ce n'est pas le moins important : il faut que les programmes soient conçus de manière à le permettre. Nous sommes précisément dans une période où les programmes sont remis en chantier. Profitons-en pour attirer l'attention des responsables sur la nécessité de prévoir des textes souples, qui n'imposent pas une structure plutôt qu'une autre. Il ne conviendrait pas actuellement que les directives méthodologiques indiquent explicitement quelle définition doit être adoptée, par quel théorème la matière doit être abordée ou terminée. Si l'on veut permettre à certains professeurs de réaliser des expériences non linéaires, il ne convient pas non plus qu'un timing leur soit imposé.

Les programmes d'aujourd'hui distinguent les situations pour introduire des concepts ou des traitements (activités d'apprentissage), les situations d'exploitation (activité de perfectionnement) et des situations de synthèse et d'élargissement (activités d'intégration). Le Congrès de 1977 avait donc été un précurseur même s'il a fallu quelques années pour que mûrisse ce point de vue. Restait à fournir un « cahier des charges » de la situation-problème ([12]) :

([11]) *Mathématique et Pédagogie* n° 17 : mai-juin 1978.
([12]) François Pluvinage, *Mathématique et Pédagogie* n° 59 : novembre-décembre 1986.

> Les activités choisies doivent développer la capacité de se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution. Elles doivent aussi :
> — permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n'exiger que des connaissances solidement acquises pour tout le monde ;
> — créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;
> — rendre possible la mise en jeu des outils prévus ;
> — fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement. On y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.

Claude Villers défend une « pédagogie des situations ouvertes ([13]) ».

> Une situation peut être naturellement ouverte (au sens passif du terme) lorsque son énoncé ou sa présentation ne comporte que peu de conditions ou même pas de question. Plus une situation est pauvre en contraintes, plus elle est riche de possibilités pour l'élève ou pour la classe de suggérer des directions de recherche. Elle permet ainsi à chacun de pouvoir exprimer une idée, ce qui est très valorisant pour l'enseigné qui n'a plus le sentiment d'être celui qui ne trouve rien.
>
> Une situation peut être ouverte (au sens actif du terme) lorsqu'on y fait évoluer certaines contraintes. Il est important, me semble-t-il, que les élèves soient conscients qu'ils ont à la fois le droit à la curiosité c'est-à-dire d'obtenir les réponses à leurs questions et le devoir de curiosité qui motive la recherche, la réflexion, les comparaisons, les suggestions, la mise en ordre des découvertes, ...

Rénover

Dans *Mathématique et Pédagogie* n° 20 de 1979, Bernard Honclaire et Yolande Noël nous faisaient entrer en « Rénové ». Un nouveau programme expérimental entrait en fonction cette année-là et ces deux précurseurs allaient nous faire partager leurs expériences du terrain. Cette approche très concrète du vécu dans une classe allait se poursuivre jusqu'en 1986 permettant la production de brochures qui proposaient aux enseignants des trois premières années du secondaire des situations et des problèmes pour aborder un thème ou pour renforcer et fixer des notions déjà rencontrées.

([13]) *Mathématique et Pédagogie* n° 69, novembre-décembre 1988.

Quatorze documents ont été produits en deux étapes, fruits d'une collaboration étroite entre des professeurs du Lycée Royal Jean d'Avesnes et de l'Ecole Normale Secondaire de l'Etat à Mons. De 1979 à 1981, onze livrets ont reflété le travail dans les deux classes du cycle d'observation ... et les auteurs croyaient en rester là. En 1985 et 1986, sous l'aimable pression de l'Inspecteur honoraire Roger Bex et avec son efficace collaboration, le travail a repris pour mettre au point les livrets 12, 13 et 14. Les deux premiers sont des synthèses couvrant les travaux antérieurs, le dernier couvre la troisième année du secondaire.

Sur le plan méthodologique, les auteurs voulaient essentiellement

- **décloisonner l'apprentissage** de l'algèbre et de la géométrie.
- **familiariser très progressivement** aux rudiments de l'algèbre.
- amener très progressivement **le besoin et l'exercice** de la démonstration, aussi bien en algèbre qu'en géométrie.
- aborder la matière **en spirale** : parmi les sujets abordés, un classement en « matière abordée » et « matière fixée » distinguait clairement ce qui serait contrôlé après une séquence d'activités, par opposition au reste qui devait faire l'objet d'autres activités avant toute fixation.

Sur le plan pratique, des **activités** (ayant toutes été expérimentées dans des classes) étaient proposées. Les énoncés étaient accompagnés de descriptions de déroulements vécus : les situations **suffisamment ouvertes** amenaient des réactions individuelles et collectives; l'exploitation de ces réactions, les discussions qu'elles entrainaient étaient finalement gérées par le professeur jouant le rôle d'animateur.

Voici, à titre d'exemple une situation proposée en première année (et reproduite dans *Rénover 12*) :

Contrôle les égalités ou complète-les :
$1 + 3 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + = 6^2$
Peux-tu inventer de nouvelles égalités? N'oublie pas de les contrôler.

Toujours à titre d'exemple, une situation proposée en deuxième année (et extraite de *Rénover 13*) :

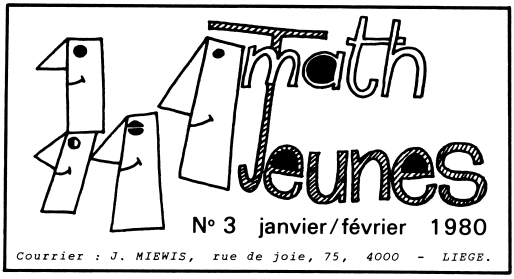
• *a*	Construire un parallélogramme *abrs*. Construire un parallélogramme *abxy*. Proposer. Justifier.
• *b*	

Les livrets contenaient en plus des exercices permettant de fixer la matière et des synthèses élaborées progressivement avec les élèves et utilisées pour structurer peu à peu l'activité de démonstration.

Une nouvelle rubrique de la revue publiera régulièrement des échos de cette expérience : propositions d'enseignements de matières, comptes-rendus d'expérience en classes, modèles de rédaction pour bilan de fin d'année. L'inspecteur Roger Bex élaborera également des programmes par niveau pour l'enseignement professionnel ([14]).

Math-Jeunes

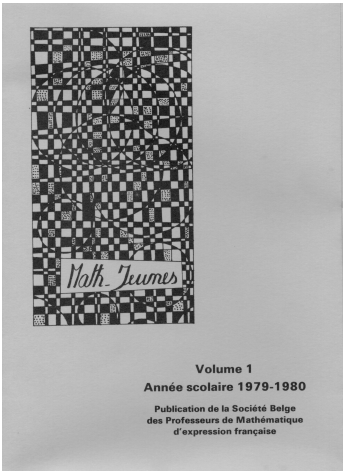
1979 est décidément une année fertile pour la SBPMef : deux mois après le lancement de « Rénover », Willy Vanhamme souhaite associer à *Mathématique et Pédagogie* une seconde revue directement destinée aux élèves. Une nouvelle équipe se met en place et propose un premier numéro de 8 pages de *Math-Jeunes*. Les professeurs le découvrent inséré dans la revue de *Mathématique et Pédagogie* de septembre-octobre.



Après un an et 5 numéros, *Math-Jeunes* sera édité séparément de *Mathématique et Pédagogie* mais continuera à être envoyé à tous les

([14]) *Mathématique et Pédagogie* n° 39, novembre-décembre 1982.

membres de la SBPMef. Un concours de couverture organisé dès ce premier numéro fournira la matière pour quatre années de revues ; les 20 premiers numéros eurent chaque fois une couverture différente avec la référence de son créateur. Le principal objectif est de présenter une mathématique récréative mais instructive, amusante mais rigoureuse, décontractée mais professionnelle en réaction à la froideur et l'austérité des manuels de l'époque.



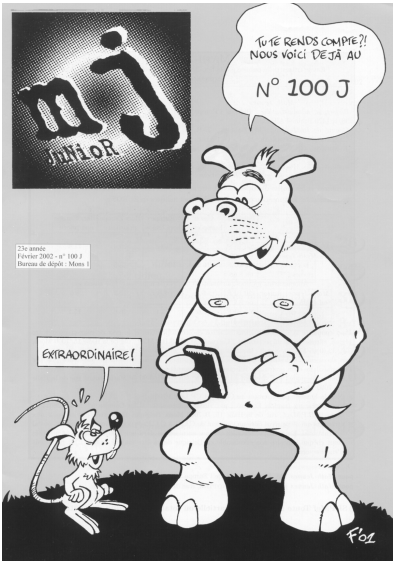
Dactylographié par le même procédé de « machine à boules » que *Mathématique et Pédagogie*, *Math-Jeunes* va se faire sa place dans le paysage scolaire. Vendus par abonnement aux élèves, il en touchera jusqu'à six mille. On y parlera histoire, on y proposera des jeux mathématiques, on découvrira la programmation des petites calculettes qui apparaissent à cette époque sur le marché. Une rubrique de problèmes donnera l'occasion d'un concours entre les élèves. *Math-Jeunes* publiera les solutions des élèves, souvent plusieurs pour le même problème. Comme cela avait été le cas avec les questions des Olympiades, beaucoup de professeurs utiliseront ces problèmes avec leurs élèves. Certains de ceux-ci eurent des prolongements dans *Mathématique et Pédagogie*.

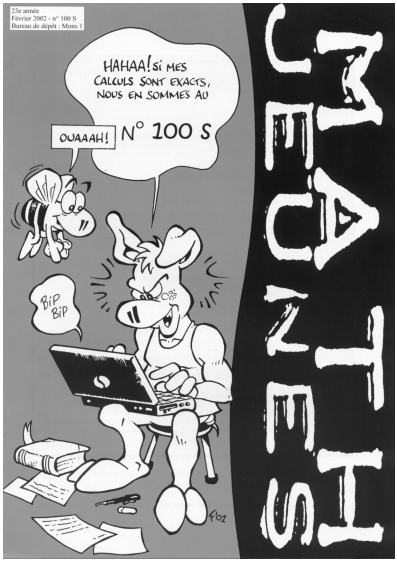
Les rédacteurs-éditeurs successifs de la revue en influencèrent tous peu ou prou le style général car trop peu de membres écrivirent des articles pour cette revue de Jeunes. Jules Miewis pour les 36 premiers numéros, Jacqueline Vanhamme et Claudine Festraets, du 37 au 44, Guy Noël du 45 au 48 assurèrent la parution de la revue en format **A5**. La revue parut ensuite au format **A4**, toujours sous la houlette de Guy Noël jusqu'au 52.

Avec Michel Baillieu, qui produisit les numéros de 53 à 90 ([15]), on vit apparaître la bichromie. Pour essayer de mieux répondre à la demande des élèves, la SBPMef décidera de scinder la revue pour l'année scolaire 1999-

([15]) Jean Humier, dont le nom apparait comme éditeur-responsable des n° 49 à 61 avait été « bombardé » Editeur-Responsable du seul fait qu'il était chargé de l'expédition des numéros en retard. De cette façon lorsqu'un numéro n'était pas distribué par la poste, comme c'était son adresse qui était sur la revue, l'exemplaire en question retournait chez lui.

2000 : Michel Baillieu continua à s'occuper d'un *Math-Jeunes(senior)* destiné aux élèves du degré supérieur jusqu'au numéro 102S, tandis que *Christian Van Hooste* (du 91 au 94) puis *André Paternottre* lançaient un *Math-Jeunes-Junior* destiné comme son nom l'indique aux élèves du cycle inférieur. Depuis le numéro 103, c'est Christian Van Hooste qui s'occupe du *Math-Jeunes(senior)*.





La revue n'a plus aujourd'hui de nombreux lecteurs : les jeunes à qui elle est destinée en priorité sont gavés d'Internet et ressentent moins le besoin de l'écrit. Pourtant des professeurs continuent à utiliser ces revues en classe avec leurs élèves, pour leur apprendre à « lire » un texte mathématique, pour initier des activités de groupe pour résoudre les problèmes ou simplement pour introduire un point de matière. Actuellement, le Conseil d'Administration de la SBPMef n'envisage nullement la disparition de la revue ; on parle même d'un C.D.Rom reprenant notamment bon nombres d'anciens articles devenus introuvables ... (mais chut !)

Les groupes de recherche en pédagogie appliquée

La SBPMef avait depuis longtemps conscience que la formation délivrée par les Universités dans le cadre de l'agrégation de l'enseignement secondaire

supérieur posait problème. De nombreux projets de réforme avaient été proposés et aucun n'avait abouti actuellement. Les Universités, conscientes du problème, souhaitaient prendre des mesures en vue d'améliorer la situation. Mais ces mesures apparaissaient insuffisantes sans une réforme d'ensemble. D'autant que la formation initiale aurait du être conçue comme le début de la formation continuée qui n'existait pas officiellement. À côté de quelques journées pédagogiques organisées par l'inspection, seules se créaient à cette époque des initiatives ponctuelles, généralement basées sur le bénévolat, et dues soit à certains services universitaires, soit à des associations de fait regroupés autour de quelques personnalités « charismatiques ([16]) ».

En 1980, sous la présidence de Jean Nachtergaele, s.j., paraît dans la revue les premiers échos d'un travail de refondation d'une géométrie plus traditionnelle dans l'enseignement. Il faut dire que celle-ci avait été ébranlée par les programmes de mathématique moderne. Le premier groupe qui publie dans cette direction est le GEM, (Groupe d'Enseignement Mathématique) séminaire informel regroupé autour du professeur Nicolas Rouche de l'UCL.

> Les sujets choisis répondent, en gros, aux objectifs pédagogiques suivants :
>
> — placer les élèves dans des situations mathématiques ouvertes, assez riches pour provoquer leur imagination;
> — leur donner l'occasion d'appréhender (se familiariser avec) l'espace, les relations, certaines formes de raisonnement;
> — conduire à une mathématisation lente parfois, mais réelle.
>
> Des membres (enseignants) du séminaire participent à des séances de travail en classe et rédigent des comptes rendus. Lorsque les diverses équipes ont largement exploré la matière proposée, une leçon de synthèse est rédigée. Une solide étude théorique accompagne l'expérimentation dans les classes, en particulier à l'occasion de la rédaction des mémoires de fin d'études des étudiants qui participent aux séminaires. Cet appui théorique permet au groupe de s'écarter, parfois très audacieusement, des manuels scolaires ([17]).

Certaines des thèses de ce groupe de recherche seront soumises à discussion serrée au Congrès de 1980 à Namur :

([16]) Ces carences seront évoquées dans un mémoire remis en 1984 aux membres de l'Exécutif de la Communauté Française, dont le texte a été publié dans *Mathématique et Pédagogie* n° 46 de mars-avril 1984.

([17]) *Mathématique et Pédagogie* n° 25, janvier-février 1980 : GEM, *Expérience d'enseignement de la géométrie dans le secondaire*.

> 1. Un concept (entre autres un concept mathématique) est d'autant plus *disponible* à un individu qu'il a poussé plus de racines dans son imagination (mathématique, physique, sensori-motrice, verbale, ...)
> 2. La rigueur ne consiste pas à élaguer (sans pitié) les racines d'un concept, mais bien à les montrer sous leur vrai jour, à les distinguer du concept.
> 3. L'enseignement de la géométrie n'a pas pour seuls objectifs d'inculquer de la géométrie ou d'apprendre à raisonner. Il peut aussi apprendre à saisir l'espace, à s'y sentir à l'aise. Il peut encore apprendre à communiquer des situations spatiales (la géométrie comme langage).
> 4. Un enseignement de la géométrie touchant tous les registres de la personnalité réconcilie certains élèves avec les mathématiques et par ce biais peut aider à leur progression vers un équilibre adulte ([18]).

D'autres groupes de recherches vont également publier dans notre Revue : ils ont eux aussi des points de vue pertinents et des sujets de recherches qui intéressent beaucoup les enseignants. Ainsi le CDS (Centre de Didactiques des Sciences) réuni autour de Guy Noël de l'UMH se préoccupe dès 1980 de l'enseignement de la probabilité et de la statistique. Présentés également au Congrès de Namur de 1980 ([19]), ses travaux montrent l'hiatus entre les programmes qui introduisent très tard ces matières et le fait que l'élève est confronté très souvent dans le réel avec des situations probabilistes et des phénomènes aléatoires.

> Si l'on veut que le citoyen ne se laisse pas dominer par cet amas de chiffres, il est nécessaire de lui donner une formation minimum dans ce domaine. L'enseignement des statistiques et des probabilités doit donc toucher le plus grand nombre possible d'élèves et par conséquent, il est normal de l'envisager dès le degré d'observation.
>
> L'enseignement actuel, purement déterministe jusqu'à 15 ans polarise l'enfant dans cette direction et rend certaines notions probabilistes plus difficiles à aborder. L'intuition probabiliste est en effet assez différente de l'intuition algébrique ou géométrique. En attendant trop longtemps, on risque de la compromettre définitivement.
>
> Nous sommes partis de l'hypothèse qu'il était exclu de proposer à de jeunes élèves une théorie systématique mais qu'il était par contre possible de mener avec eux des activités probabilistes. Les objectifs visés sont limités : un début de formation à l'intuition probabiliste, un apprentissage de quelques moyens de représentation de situations concrètes

([18]) *Mathématique et Pédagogie* n° 28, septembre-octobre 1980 : GEM, *Groupes de travail sur la Géométrie*.

([19]) *Mathématique et Pédagogie* n° 33, septembre-octobre 1981 : CDS, *Une approche des probabilités dans le degré d'observation*.

> par des diagrammes, l'utilisation effective des graphes non seulement pour présenter des situations mais aussi pour résoudre des problèmes.

Une des principales fonctions du SBPM-INFOR est de publier chaque année l'ensemble des formations proposées par tous ces groupes, universitaires ou non, qui se sont installés depuis les années 80 ([20]) et s'occupent de formation permanente dans notre pays. (AHA, ALTAIR, CDESS, CDS, COJEREM, FOPEM, GEM, GEPEMA, ICAFOC, T^3, UEREM, UREM, ...)

L'informatique

Dès le début des années 80, on trouvera dans la revue de plus en plus d'articles montrant l'utilité d'un micro-ordinateur en classe. Au début, c'est souvent la machine personnelle de l'enseignant qui est utilisée : elle fait alors office de super-tableau ([21]). Rares sont les écoles équipées de « classes d'informatique », mais cela n'empêche pas de rêver qu'un jour elles le seront ... d'autant que l'enseignement rénové vient de créer la possibilité d'une option « Informatique ». Les professeurs de mathématique (et les autres) y voient une occasion à saisir : être pédagogiquement prêt le jour où ...

Pour l'enseignement de la géométrie dans le cycle inférieur, les enseignants découvrent la petite tortue de LOGO. Langage simple d'utilisation par les élèves, il conduit rapidement à des résultats spectaculaires du point de vue graphique, notamment pour l'étude des polygones ([22]) et des transformations du plan ([23]).

Le Congrès de Louvain-la-Neuve en 1983, sous la présidence de CLAUDINE FESTRAETS-HAMOIR consacre l'essentiel de son activité à l'informatique.

> Après avoir fait face de son mieux au phénomène progressif mais rapide d'invasion par les calculatrices, la SBPMef tente d'aider ses membres à affronter l'envahissement par les micro-ordinateurs.

([20]) Il est vrai que certains de ces groupes existaient déjà auparavant, mais sur un mode que nous qualifierions de confidentiel. Signalons également la création du CREM à Nivelles en 1992 et plus récemment, l'implantation dans notre pays du concept français des IREM avec la création de l'IREM de l'ULg.

([21]) par exemple : JEAN-PAUL HOUBEN et WILLY VANHAMME, *L'intégrale*, *Mathématique et Pédagogie* n° 44, novembre-décembre 1983.

([22]) *Mathématique et Pédagogie* n° 42, mai-juin 1983, BERNARD HONCLAIRE, *Les transformations d'une tortue*.

([23]) *Mathématique et Pédagogie* n° 68, septembre-octobre - 1988, PAULETTE POINT, *Similitude en logo*.

Le Congrès comprend un nombre impressionnant d'heures réservées à l'informatique envisagée sous deux aspects.

— L'enseignement de l'informatique : le plus souvent, c'est le professeur de mathématique qui se trouve dans l'obligation de prendre en charge l'option informatique et dès lors, les deux cours, mathématique et informatique, ne peuvent que s'influencer mutuellement. Ce magnifique outil qu'est le micro-ordinateur ne laisse personne indifférent. Hélas ! Nombreux sont les professeurs qui peu ou mal préparés sont confrontés à une situation bien angoissante : comment enseigner l'informatique à des jeunes qui bien souvent ont déjà pratiqué le micro-ordinateur et croient y connaître quelque chose !
— Utiliser son micro-ordinateur dans sa classe pour illustrer certaines notions mathématiques, pour faciliter l'appréhension ou la compréhension de certains concepts est assurément à la fois facile, intéressant et efficace. Cependant, réaliser soi-même des programmes performants demande pas mal de temps et de réflexion. Là encore, la SBPMef peut être un trait d'union entre professeurs et nous pourrions par l'intermédiaire de la revue créer une bourse d'échange profitable à tous ([24]).

Charles Duchateau, des FNDP de Namur, s'interroge lors du même Congrès ([25]) :

L'informatique n'est pas la « science des ordinateurs », sinon on parlerait plutôt d' « ordinatique ». Confondre « informatique » et « ordinateur », c'est à peu près aussi grossier que d'identifier « composition française » et « machine à écrire ». ... Mais apprendre la « programmation » ne se résume pas à l'acquisition de la syntaxe d'un langage de programmation. Et cette fois, c'est aussi ridicule que de confondre « composition française » et « maîtrise de la grammaire ». L'informatique (et son enseignement) n'est pas réservée aux « forts en maths ». Si l'ordinateur est parfois moyen de calcul, il est bien autre chose et bien plus : c'est un outil polyvalent, une machine à « traiter l'information »qui peut aider aussi bien le latiniste que l'historien.

Quatre objectifs essentiels me paraissent pouvoir être assignés à un enseignement de l'informatique :

— la maîtrise des outils informatiques : il s'agira de faire utiliser l'informatique par la pratique d'outils pensés et crées par d'autres ;
— la démystification de l'ordinateur et la démythification de l'informatique : l'ordinateur doit reprendre la place qui est la sienne, celle

([24]) *Mathématique et Pédagogie* n° 43, septembre-octobre 1983.
([25]) *Mathématique et Pédagogie* n° 43, septembre-octobre 1983.

d'un exécutant, rapide et docile sans doute, mais incapable de créer et de prendre la moindre « décision » ;
- l'apprentissage de la maîtrise du processus de traitement informatique d'un problème : de l'énoncé flou d'un problème à l'énoncé précis (quoi faire ?), de la solution floue à l'analyse (comment faire), puis seulement de l'organisation de la marche à suivre (comment faire faire ?) ;
- la réflexion sur les impacts sociaux et individuels de l'informatique : il n'est pas du tout certain que la « possibilité d'informatiser » n'ait pas créé, de toutes pièces, le « besoin » d'informatiser.

Le « Mémoire »

Le 20 février 1984, la SBPMef adresse aux membres de l'Exécutif de la Communauté Française, et plus particulièrement à Robert Urbain, responsable de l'Enseignement, un « Mémoire sur le rôle de l'enseignement mathématique dans la formation des jeunes ([26]) ».

> La mathématique est un des facteurs de l'essor économique, technique, scientifique et culturel des sociétés. Son implication croissante dans le développement de toutes les activités humaines, la place qu'elle prend par le truchement de l'informatique, en font un outil indispensable à la compréhension du monde et à l'action.
>
> La mathématique n'est pas seulement un outil au service des autres disciplines. Elle est aussi un art qui a sa vie propre et son histoire, avec les problèmes épistémologiques qu'elles suscitent. Par là, elle a une valeur culturelle incontestable.

Les difficultés auxquelles se heurte la mise en place de la pédagogie axée sur la résolution de problème sont d'abord rappelées :

- le manque de temps car le nombre d'heures par semaine a diminué ;
- le manque de disponibilité des élèves du aux nombreuses sollicitations de la vie extérieure à l'école ;
- le manque de documentation adéquate ;
- l'augmentation de la charge horaire du professeur alors que dans d'autres métiers, on diminue la durée du travail hebdomadaire ;
- l'insuffisance de la formation initiale et de la formation continuée ;
- les problèmes administratifs liés notamment aux régimes des mises en disponibilité.

([26]) texte dans *Mathématique et Pédagogie* n° 46, mars-avril 1984

Pour réaliser ses objectifs, la communauté mathématique, par la voix de la SBPMef, demande au Ministre

- d'envisager la création d'une option « Laboratoire de Mathématique », à programme souple, accessible dès la troisième année à toutes les sections de l'enseignement secondaire ;
- de prévoir dans les classes de mathématiques dites faibles des programmes spécialement conçus en fonction de la finalité de ces classes, et notamment de revenir sur une mesure qui rend facultatif le cours de mathématique dans certaines options du deuxième degré de l'enseignement professionnel et dans toutes les sections du troisième degré de cet enseignement ;
- de compléter la formation des maîtres par une année de formation exclusivement pédagogique ;
- de créer des structures chargées d'assurer la formation continuée des maîtres ainsi que la recherche en didactique de la mathématique.

Aujourd'hui, les deux dernières préoccupations ont été rencontrées, en tout cas dans l'esprit des requérants de 1984. La première a disparu avec les restrictions liées aux possibilités de l'enseignement rénové ([27]). Quant à la seconde, elle est malheureusement toujours d'actualité puisqu'il existe toujours des sections du professionnel qui n'ont pas de mathématique au troisième degré alors qu'il existe des passerelles permettant à ces élèves d'accéder à des études supérieures en principe de tout type !

Ciel sombre pour l'enseignement

Dès 1986, le Président Jean Wilmet ([28]) envoyait au nom de la Société une lettre ouverte au Premier Ministre.

> La richesse de notre pays est constituée pour une part de plus en plus importante de richesse humaine. Or que voyons-nous se préparer ? Le retrait de l'emploi à plusieurs milliers d'enseignants ; le refus de l'emploi à la majorité des diplômés des prochaines années. Nous nous rappelons une phrase prononcée par notre souverain à la tribune des Nations-Unies : « Il faut vingt ans pour construire un homme ; une minute suffit

([27]) Ce sujet avait pourtant à nouveau été évoqué et avait fait l'objet d'un colloque commun GEM-SBPMef le 11 novembre 1985. Les conclusions qui avaient été envoyées au Ministre peuvent être consultée dans *Le livre Blanc*, publié par la SBPMef en 1981.

([28]) Président de 1985 à 1993

> à le détruire ». Nous pouvons dire aujourd'hui : « Il faut vingt ans pour former un enseignant; il suffit d'une année pour le décourager ».
>
> Monsieur le Premier Ministre, en ce qui concerne le devenir du pays, les professeurs de mathématique vous le disent tout net : vous faites des fautes de calcul. Croyant réaliser des économies, vous allez vous priver de personnes compétentes et dont la plupart, quoi qu'on en pense, choisissent la carrière de professeur par vocation d'éduquer. Le rendement de l'enseignement n'est pas mesurable objectivement et à court terme. ([29])

Durant l'essentiel du mandat du Président Wilmet, se posa le problème des grilles horaires et de la réduction du nombre de professeurs. La Société a lutté vigoureusement pour maintenir une formation mathématique de qualité. C'est dans ce cadre que fut créée la Commission Pédagogique sous l'impulsion de Claudine Festraets et de Guy Noël.

Nous avons voulu nous ouvrir vers l'extérieur. En effet, bien souvent, nous nous plaignions du fait que notre action n'était pas appréciée suffisamment. C'est pourquoi nous avons décidé d'inviter systématiquement les représentants du monde politique et de la presse à nos manifestations importantes comme l'ouverture de nos congrès ou la proclamation des résultats des Olympiades.

Nous avons voulu donner un plus grand retentissement à nos congrès en y invitant des personnalités internationales de renom : qu'il nous suffise de citer Jacques Tits, membre de l'Institut de France et Jean-Pierre Petit, physicien, auteur de bandes dessinées scientifiques et père d'Anselme Lanturlu.

C'est que l'époque (elle conduira vite à ce que le monde scolaire retiendra sous le nom des « grèves de 90 ») n'était pas à la nuance et les mathématiques semblaient être devenues une bête noire de l'enseignement. En 1987, Vlan titrait : *Faut-il démathématiser l'enseignement ?* ([30])

> Il s'agirait donc, en toute logique, de « démathématiser » l'enseignement, c'est-à-dire de battre en brèche la tyrannie des cours de maths, de les réduire à la portion congrue dans la plupart des classes, au bénéfice des horaires du français, des langues, de l'histoire, de la chimie, etc., et aussi de l'informatique élémentaire dans ses aspects « bureautiques » et de créer de rares classes spéciales pour ceux qui se sentent vraiment attirés par la magie de la mathématique pure.

([29]) Editorial du Président Wilmet dans *Mathématique et Pédagogie* n° 58, septembre-octobre 1986.

([30]) éditorial musclé du Président Wilmet dans *Mathématique et Pédagogie* n° 64, Novembre-Décembre 1987.

> Cette façon de remettre ces super-mathématiques à leur place (petite mais prestigieuse) est en tout cas celle de l'ancien ministre français de l'Éducation Nationale, M. Chevènement, qui a dit en une boutade fort sérieuse : « Les gens croient que l'on fait trop de mathématiques à l'école ; en fait, trop d'élèves font des mathématiques ».

Jean Wilmet répliquait en citant Gérard Fourez :

> Si on considère la formation individuelle des jeunes, il faut constater que leur culture les amène à vibrer profondément aux cours de sciences au moins autant qu'à ceux de français ou de latin. Pour eux, être humain, c'est participer à cette société qui a envoyé des gens sur la lune, qui développe des connaissances sans cesse plus approfondies, et dont l'avenir est fortement conditionné par les pratiques scientifico-techniques. Les sciences et les techniques sont liées, dans leur esprit, au développement de notre monde, et nous sommes liés à elles, pour le meilleur et pour le pire.

et concluait : « Priver une partie de notre jeunesse d'une des clés de notre monde post-industriel, serait recommencer l'erreur déjà faite si souvent : diviser la population en deux classes, celle des initiés et celle des hoplites. On sait à quelles manipulations et à quels excès cela peut mener ! »

Le Rapport « Danblon »

Le Ministre Yvan Ylieff a instauré en mai 1989 une Commission chargée de lui faire rapport sur les *Perspectives de l'enseignement des Mathématiques dans la Communauté Française de Belgique*. Cette Commission avait pour but de rechercher les moyens d'exercer « le pilotage de notre enseignement » vers des formations riches de contenus, humanistes et rentables ; elle avait, dans ce cadre, interrogé la SBPMef. Une assemblée générale extraordinaire a été convoquée en décembre et a approuvé un texte remis au Ministre le 24 janvier 1990.

Le rapport Danblon donnait au Ministre quelques recommandations.

- Le statut moral et matériel des enseignants doit être amélioré d'urgence. A défaut d'un effort substantiel sur ce plan, le risque est grand de voir la profession désertée et la formation des jeunes se dégrader.
- La formation continue devrait être vécue comme un devoir et reconnue comme un droit.

- Il faudrait créer un ou deux groupes assurant la recherche sur l'enseignement des mathématiques et développant une vue coordonnée des enseignements maternel, primaire, secondaire et supérieur en mathématiques.
- La Commission suggère aux Facultés des Sciences de repenser la conception des études d'agrégation de l'Enseignement supérieur en Mathématique.
- La Commission propose de rapprocher la formation initiale des professeurs de mathématique des niveaux inférieur et supérieur. Cela devrait conduire en premier lieu à accroître le niveau de formation mathématique des professeurs du degré inférieur.

Que sont devenues aujourd'hui ces recommandations ? Les finances de la Communauté française n'ont pas permis de répondre significativement à la première recommandation. La formation continuée en tant que devoir devrait prendre effet à la prochaine rentrée scolaire. Les agrégations de l'Enseignement supérieur font depuis trois ans l'objet d'une année supplémentaire ([31]) en attendant une réforme plus importante dans le cadre du processus de Bologne. La formation des régents est actuellement portée à trois ans.

Ce rapport précisait également les conceptions des mathématiques qui devaient inspirer les programmes.

- Insister sur la résolution de problèmes et la capacité de penser mathématiquement.
- Enseigner les concepts et les théories dans des contextes qui leur donnent du sens, qui exhibent leurs tenants et aboutissants dans les mathématiques.
- Apprendre à s'exprimer, à communiquer en mathématiques, en utilisant les ressources bien maîtrisées de la langue commune et les supports de pensée habituels (diagrammes, tableaux, graphiques, formules) constamment mis en relation les unes avec les autres.
- Quand cela peut être éclairant, enseigner les mathématiques en les situant dans leur contexte historique, ce qui ne veut pas dire enseigner l'histoire des mathématiques.

Les programmes actuels répondent parfaitement à ces conceptions, ce qui ne signifie pas qu'ils doivent être considérés comme parfaits ou définitifs. Il faut simplement admettre qu'un pas important a été fait dans cette direction.

([31]) Formellement, il n'est pas interdit de suivre les cours de l'agrégation en parallèle à la seconde licence, mais cela est devenu très difficile.

Le « livre blanc »

La SBPMef maintient en son sein le groupe de travail qui avait été chargé de préparer le texte fourni à l'occasion du Rapport Danblon. Dans cette continuité, la mission du groupe sera de définir les grandes lignes de l'action future de la Société dans les domaines de la formation et des conditions de travail des enseignants, indépendamment des demandes de la Commission Ministérielle. Les résultats des travaux du groupe seront approuvés le 23 mars 1991 par une Assemblée Générale Extraordinaire des membres; ils feront l'objet d'une publication dans un « livre blanc ([32]) ».

Il est difficile d'en résumer les 156 pages aussi nous nous contenterons d'énumérer les grands chapitres abordés par la Commission : ils témoignent d'un réflexion sur tous les aspects de notre profession.

— La formation initiale des enseignants de mathématiques.
— La formation permanente des enseignants.
— La recherche en didactique des mathématiques ([33]).
— Les coordonnateurs pédagogiques.
— Les programmes et les livres scolaires.
— Les activités en classe.

Je tiens à remercier tout spécialement Madame Claudine Festraets, Présidente de 1981 à 1985, et Monsieur Jean Wilmet, Président de 1985 à 1993, qui ont bien voulu partager quelques uns de leurs souvenirs.

Pour terminer cette année 1991, je reprendrai les termes de Jean Wilmet qui se souvient d'un moment fort de ces huit années de présidence : le congrès d'Arlon où la Société a fêté les 70 ans du professeur Georges Papy; nous avions choisi Arlon pour rappeler les congrès du CBPM. La journée d'hommage à Papy se termina par un banquet mémorable qui vit la présence des anciens responsables des activités de recyclage des décennies 60 et 70.

([32]) Son titre officiel était *¿ Enseigner la Mathématique ?*

([33]) On y suggérait de créer sur le modèle français des IREM, des Centres de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (C.R.E.M.) qui rassembleraient des mathématiciens de métier, des enseignants de la formation initiale, des professeurs de méthodologie spéciale des mathématiques, des chercheurs en pédagogie de la mathématique, des licenciés ou docteurs en pédagogie s'intéressant à la pédagogie des mathématiques, des doctorants, des inspecteurs de mathématique, des enseignants du secondaire et du fondamental. Un premier (et actuellement unique) C.R.E.M. (sous la conduite de Nicolas Rouche, membre à cette époque - et de longue date - du Conseil d'Administration) a été installé en 1992 à Nivelles.

Les *nineties*

G. NOËL, *Université de Mons-Hainaut*

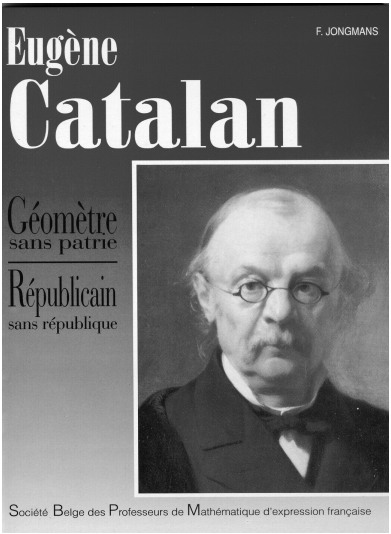
Que faisait-on à la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* de 1993 à 1997 ? Je viens de parcourir nos publications de l'époque, en particulier *Mathématique et Pédagogie* et *SBPM-Infor*. Ce coup d'œil rétrospectif, sur des activités que j'ai vécues de près, me laisse perplexe ! Est-il possible que tout cela se soit passé ? Où les membres du Conseil d'Administration, ceux de la Commission Pédagogique, les directeurs des revues, les responsables des Olympiades ou du Congrès, les collaborateurs à tout niveau ont-ils trouvé la force et le temps nécessaires pour cette masse d'activités ?

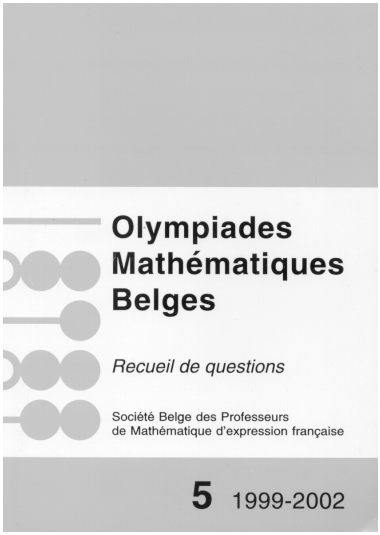
À la réflexion, ce phénomène n'est pas propre à la période 1993–1997. Depuis longtemps, nous savons qu'organiser l'Olympiade Mathématique Belge pour 25000 élèves ne se fait pas « entre la poire et le fromage » et que la préparation aux Olympiades Internationales mobilise de nombreuses personnes durant plusieurs jours. Nous pouvons aussi saluer le travail des directeurs des revues *Mathématique et Pédagogie*, *Math-Jeunes* et *SBPM-Infor*, un travail de tous les instants. La Commission Congrès, quant à elle, porte sur ses épaules une lourde responsabilité : la préparation d'un congrès débute le lendemain même de la clôture du congrès précédent. Et derrière ces activités visibles, il y a celles que l'on ne voit pas. Le secrétaire et le trésorier jouent un rôle essentiel dans la vie d'une ASBL. Ils doivent faire fonctionner la machine administrative. Car il y a aussi des comptes à tenir, des expéditions à réaliser, le téléphone auquel il faut répondre, etc. Heureusement, tout ce monde est soutenu par notre staff administratif, réduit à une seule personne, la seule à être rémunérée. Elle le mérite bien car en plus de son travail quotidien, elle doit faire face aux demandes de tous ceux que je viens de citer, et en plus à celles du président ! La pauvre !

Heureusement, tout cela fonctionne généralement bien à la SBPMef, et a bien fonctionné de 1993 à 1997. D'autres activités sont d'ailleurs venues s'adjoindre aux précédentes. Citons pêle-mêle la publication de « Documents d'explorations didactiques », celle de « Recueils de questions d'Olympiades ([1]) », un ouvrage consacré à Catalan, la création d'un site Internet,

([1]) Le numéro 5 est actuellement disponible : il reprend les questions des années 1999 à 2002

la représentation de la SBPMef à des réunions à l'étranger, la participation aux travaux de la CAPP [2]...





Mais d'autres problèmes, plus graves, ont mobilisé notre attention durant cette période. C'est que, pour l'enseignement des mathématiques, on ne peut certainement pas parler de *golden nineties*. Cette fois ce sont des problèmes pédagogiques qui se posaient, des problèmes qui nécessitaient une réflexion approfondie. Décrivons-en sommairement l'évolution, de 1993 à 1996. (Pour plus de détails, on se rapportera aux numéros de *Mathématique et Pédagogie* et de *SBPM-Infor* de l'époque.)

- Fin 1992 — mon ami Jean Wilmet ne m'en voudra pas trop, j'espère, si j'empiète un peu sur sa tranche d'histoire — nous sommes mis au courant d'un projet de modification des grilles horaires :
  - au second degré, on passe de deux cours à 4 et 6 périodes/semaine à un seul cours de 5 périodes /semaine
  - au troisième degré, les trois niveaux de cours subsistent mais tous trois perdent une période de cours par semaine. (On passe du « système » 7–5–3 au « système » 6–4–2.)

[2] Il s'agit de la Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs dont l'objectif premier est la défense de la qualité de l'enseignement. Elle regroupe 11 sociétés de professeurs (histoire, physique et chimie, cours techniques et pratique professionnelle, sciences économiques, italien, grec et latin, biologie, espagnol, français, géographie et mathématique.

L'émotion est vive parmi les professeurs de mathématique. La SBPMef estime qu'elle ne peut rester sans rien faire.

- Mars 1993 : Le Conseil d'Administration adopte un texte préparé par la Commission Pédagogique et décide de convoquer une assemblée générale extraordinaire.
  En bref : le CA demande que le statu-quo soit maintenu de la 4e à la 6e année. En ce qui concerne la 3e, il constate que deux points de vue existent en son sein : le maintien de deux niveaux de cours ou la cohabitation de tous les élèves.
- L'Assemblée Générale a lieu le 24 avril 1993. Elle entend le Ministre DI RUPO venu défendre son projet. Elle se prononce ensuite sur les propositions du Conseil d'Administration. Une motion est approuvée qui demande — au cas où les grilles horaires seraient modifiées conformément au projet gouvernemental, que deux niveaux de cours soient maintenus au deuxième degré, tant en 3e qu'en 4e. Ces deux niveaux auraient des programmes différents. L'AG s'oppose aussi à une diminution de la qualité de l'enseignement. Elle rappelle son attachement à la pratique de la pédagogie des situations, met en évidence l'effort que cette pratique demande aux enseignants. Elle souligne la nécessité d'organiser des activités de formation permanente.
- Dans les semaines qui suivent, le Gouvernement confirme sa décision relative aux grilles horaires. Sur ce point essentiel la SBPMef n'a pas gain de cause. Le Ministre accepte que des activités de formation permanente portant sur la matière soient organisées en mathématique. Ce n'était le cas pour aucun des autres cours généraux.
- La modification des grilles-horaires rendait impérative l'adaptation des programmes. Dès décembre 1993, le Président de la Commission Inter-réseaux des programmes demande l'avis de la SBPMef sur les projets de programme pour le premier degré. Tout en rappelant quelques options déjà affirmées antérieurement, la SBPMef ne se prononce pas sur le contenu car elle souhaite qu'ait lieu au préalable une réflexion approfondie sur les objectifs globaux et les finalités de l'enseignement des mathématiques. La Commission Pédagogique entame l'élaboration d'un document portant sur ces questions.
- 19 mars 1994. Le document de la Commission Pédagogique, intitulé un peu pompeusement « Quelle philosophie pour l'enseignement des mathématiques », est soumis à une Assemblée Générale. Le document examine les finalités des cours de mathématiques tant en ce qui concerne les comportements attendus que les contenus à enseigner.

- Du côté des comportements, l'accent est mis — pour tous les élèves — sur la résolution de problèmes.
- Du côté des contenus, le document met l'accent sur les théories *terminales* (sous-entendu « dans l'enseignement secondaire » (algèbre linéaire et géométrie, analyse, probabilités et statistique). Ces sujets étant considérés comme importants, les programmes, au moins dans les sections à 4 ou 6 périodes, devraient être organisés — dès le départ — en vue de favoriser leur apprentissage. Après avoir été finalisé, le document sera publié dans *Mathématique et Pédagogie* n° 102, (mai-juin 1995)

- À la même époque (printemps 1994), la question des « Socles de compétence » commence à prendre du corps. De plus il est question d'une réduction de la grille horaire en deuxième année cette fois. Aussi la SBPMef adresse-t-elle une lettre au Ministre, et aux responsables des différents réseaux pour protester. Elle en profite pour réexposer les objectifs qu'elle attribue à l'enseignement du premier degré. Des rencontres ont également lieu avec divers responsables. La grille horaire n'est finalement pas modifiée.
- De nouveaux programmes transitoires continuent d'être publiés par la Commission inter-réseaux. En avril 1994, la SBPMef n'est pas satisfaite par celui qui concerne la sixième année. D'une part, elle regrette la tendance à la suppression de toute démonstration non triviale. D'autre part, elle constate qu'au lieu de repenser l'enseignement du chapitre « Algèbre linéaire », ce qui était certainement nécessaire, la Commission des Programmes l'a purement et simplement supprimé, méconnaissant ainsi le rôle essentiel de l'algèbre linéaire tant dans l'édifice mathématique que dans les applications. Seules subsistent quelques recettes de calcul. La SBPMef écrit au Ministre pour lui demander de ne pas signer le programme. Un contact direct, mais sans lendemain, a alors lieu entre une délégation de la SBPMef et un représentant de l'inspection. La SBPMef publie alors une analyse critique des programmes transitoires du 3e degré (à 6 périodes/semaine) et formule des contre-propositions.
- Août 1994. L'assemblée générale approuve l'action menée par le Conseil d'Administration relativement aux programmes de 5e et 6e. Elle demande que des représentants mandatés par la SBPMef participent à toutes les commissions chargées d'élaborer des programmes de mathématique. Elle estime nécessaire que les programmes de mathématique soient communs aux différents réseaux et donc soient élaborés en concertation.

- Année 1995. La Commission pédagogique continue de préparer une discussion sur les nouveaux programmes définitifs des 2e et 3e degrés. Un texte est élaboré, distribué lors du congrès d'août 1995, puis amendé par le Conseil d'Administration afin de tenir compte des remarques faites lors du congrès. Il est présenté lors d'une réunion avec la Commission Inter-réseaux des programmes en septembre 1995, puis publié dans *Mathématique et Pédagogie* n° 104.
- Mai 1996. Nouvelle réunion de travail entre une délégation de la SBPMef et la Commission Pluraliste des Programmes concernant le programme du 2e degré.
- Printemps 1996. C'est l'époque des « agoras ». La Ministre Onkelinx diffuse un document « Quarante propositions pour l'enseignement obligatoire ». La SBPMef fait connaître ses remarques.
- Octobre 1996. La Ministre annonce son intention de mettre en chantier un certain nombre de réformes pédagogiques. La SBPMef exprime le souhait d'être associée aux discussions à venir et transmet un document de travail. (*SBPM-Infor* n° 103). La Ministre répond qu'elle ne manquera pas de nous solliciter en temps opportun. (Ce temps n'est jamais venu.)

En parcourant cet inventaire, on pourrait réagir en estimant que les membres du Conseil d'Administration et ceux de la Commission Pédagogique ont consacré beaucoup de temps et dépensé beaucoup d'énergie pour n'obtenir que des résultats minimes. Il est vrai que notre influence est faible. Je pense cependant que nous n'avons pas à regretter notre travail durant ces années « troublées ». Rester passif aurait été manquer à nos responsabilités vis-à-vis de nos membres. Pour que l'efficacité de ses actions augmente, il faudrait que la SBPMef soit réellement représentative de la majorité des professeurs de mathématique, ce qui n'est pas le cas, et qu'un plus grand nombre d'entre eux s'impliquent de façon « militante ».

C'est tout ce que je souhaite à la SBPMef pour les 50 prochaines années !

Evénements marquants 1997-2000

J. NAVEZ, *Ulg*

Une réalisation marquante de la Commission pédagogique a été la rédaction par Jacqueline Liesenborghs et Pierre Marlier d'une brochure sur la statistique descriptive, ce qui nous a valu des séances animées mais très riches au sein de la commission. L'enseignement de la statistique, parfois négligé par certains professeurs, méritait bien cette pertinente publication. Le niveau de ventes et de distribution du fascicule a été à la hauteur de nos aspirations.

Sous l'impulsion de l'APMEP et en particulier du président de l'APMEP française, Jean Paul Bardoulat, de nombreuses réunions, à Liège, et à Paris ont été consacrées à la mise sur pied de la Fédération Européenne des Associations de Professeurs de Mathématiques. La confection des statuts n'a pas été facile et il a encore été moins facile de faire du travail en commun. (Cette difficulté est également inhérente aux travaux de la Capp qui essaie de regrouper 11 sensibilités...) Même si je reste convaincu de l'utilité des méta-associations comme la CAPP et la FEAPM, force m'est de constater qu'il est difficile de s'engager sur des projets communs et surtout de les réaliser. Bien sûr, pour des petites associations, une surcouche de réunions et de prestations qui tombent toujours sur les mêmes bénévoles n'est pas facile à gérer.

Le ciel s'assombrit pour *Math-Jeunes* dont le lectorat devient plus restreint et après beaucoup de réflexions et d'hésitations, le projet de scinder en deux revues, une « Junior » et une « Senior » est mis sur pied. Il me semble indéniable que l'information sur papier ne séduit plus les élèves et que la revue ne rencontre du succès que chez les professeurs qui l'utilisent.

Les points forts de la Société sont les Olympiades et le Congrès. Ils sont la partie visible et médiatique de notre société et sont les moments privilégiés où nous pouvons faire passer un message. Les Ministres se déplacent pour nos Congrès : Mme Dupuis, MM Ancion et Hazette.

Bon vent . . .

W. SERVAIS,

Mathematica & Paedagogia n° 1 - 1953

Editorial

Notre temps marque le début de l'ère mathématique.

Au point de vue théorique, les mathématiques classiques font un inventaire sans cesse plus poussé des propriétés de leurs objets : le nombre et l'étendue.

Dans le prolongement de ces études, plus de deux fois millénaires, s'ouvrent les mathématiques nouvelles : celles des espaces abstraits, de la topologie générale et de l'algèbre moderne. Chacune de ces disciplines laisse indéfinis les êtres mathématiques dont elle s'occupe pour porter son effort sur l'étude des relations entre ces êtres et les propriétés opératoires de ces relations.

Sur le plan concret, les mathématiques continuent, dans une proportion accrue, à fournir l'outillage mental de l'astronome, du physicien et de l'ingénieur. Par delà la physique classique, la relativité d'abord, les quanta et la mécanique ondulatoire ensuite, ont ouvert de vastes domaines à l'activité « mathématique ». Le symbolisme mathématique est le seul moyen de compréhension et de prévision qui relie encore l'intelligence humaine aux réalités profondes du monde atomique.

Débordant les sciences de la matière, les mathématiques conquièrent les sciences de la vie et de l'homme.

La statistique et le calcul des probabilités permettent d'introduire en biologie, en sociologie et en psychologie des lois descriptives plus fines et des prévisions mieux fondées. Les sciences économiques, à leur tour, s'organisent en prenant appui sur les mathématiques.

Le sommaire de ce premier numéro de *Mathematica & Paedagogia* comportait sept rubriques : la culture mathématique, la connaissance des élèves, l'enseignement, les applications des mathématiques, les contacts avec d'autres groupes de professeurs, une bibliographie et des questions-problèmes. La volonté des pionniers qui lançaient la revue en même temps qu'ils fondaient la Société, se trouve exposée dans l'éditorial du Président et dans les textes introductifs des rubriques connaissance des élèves et enseignement que nous avons repris ici. Puissions-nous avoir été dignes des fruits que le premier Président de la Société formulait pour l'avenir.

La logique, ce bastion de la raison, hier encore intangible, emprunte aux mathématiques l'outil algébrique et la représentation topologique. De multiples logiques voient le jour qui sont autant d'algèbres particulières.

Bien mieux, les machines à calculer et à penser, robots enfantés par les mathématiques et la technique, exécutent, en les simplifiant, des démarches de l'intelligence humaine.

Du noyau atomique au cosmos, les mathématiques relient ainsi les deux infinis pascaliens et se dressent devant le roseau qui les a pensées.

L'emploi des mathématiques dans l'entreprise rationalisante ira en croissant d'une manière sans cesse accélérée.

De fait, quels que soient les réactions, les opinions et les jugements qu'il provoque, augmente encore la responsabilité du maître qui, à quelque degré que ce soit, enseigne les mathématiques.

Pour ce maître, il s'agit, certes, de transmettre d'une manière suffisante les mathématiques acquises au prix d'une longue histoire. Histoire mouvementée et palpitante, faite d'espoirs intuitifs, de tâtonnements expérimentaux, d'abstractions sommaires et efficaces, d'échecs décevants et féconds, d'organisation logique puissante.

S'il convient d'être digne d'une tradition mathématique, il importe aussi de permettre la « mathématisation » à venir. Tant il est vrai que celui qui consacre sa vie à enseigner accepte une mission d'un monde qui passe, pour aider à construire un monde qui naît. La responsabilité envers l'avenir étant plus grande que la fidélité au passé.

Ces élèves, nos élèves, qui, aujourd'hui, travaillent avec nous dans nos classes, seront demain mathématicien, physicien, officier, technicien ou, simplement, les représentants de cent professions où les mathématiques jouent un rôle plus effacé.

Devant chacun de ses élèves, chacun de nous prend, tacitement, la responsabilité de le rendre plus apte à sa tâche sociale et aussi de lui faire connaître les joies intérieures qui naissent d'une meilleure compréhension, d'une action plus heureuse, d'une découverte ou d'une invention.

A coup sûr, il faut bien enseigner les mathématiques à ceux qui en feront un large usage. Mais il est tout autant nécessaire de bien les enseigner aux autres, à ceux qui, dans leur métier d'homme, devront comprendre le monde qui se fait et ne pas être rejetés hors de lui.

A chacun, il s'agit de révéler l'activité mathématique, forte ou faible, qu'il porte en lui, de l'affermir et de la développer.

Un professeur de mathématique est animé par la conscience de cette mission.

Notre Société est une manifestation de la conscience collective des professeurs de notre pays et la preuve de la manière dont ils acceptent leur mission et leur responsabilité.

Cette revue entend être un témoignage de notre volonté commune d'améliorer notre enseignement.

A cet effet, il faut, tout d'abord, avoir une idée toujours approfondie et plus claire de l'activité mathématique prise en elle-même. Ce sera le rôle de la première de nos rubriques : « Culture mathématique » que de maintenir la lucidité et la ferveur.

La rubrique suivante sera consacrée à une meilleure connaissance de nos élèves, condition de l'efficacité de notre dévouement et de notre affection.

Une compréhension accrue des mathématiques et des élèves sera une garantie de plus pour notre enseignement. A celui-ci s'ouvrira une large rubrique. Elle sera destinée, d'abord, à exposer les résultats acquis. A partir de ceux-ci des essais nouveaux pourront être tentés avec plus d'assurance et, sans doute, avec plus de succès. Ce que nous voulons c'est, à la fois, conserver notre patrimoine pédagogique et accueillir toute tentative de l'enrichir.

Nous voulons une pédagogie qui, prenant appui sur le terrain momentanément conquis, soit suffisamment compréhensive pour accueillir et intégrer l'apport de la pédagogie en formation.

Nous proposons une pédagogie ouverte.

Cette conception nous permettra de dépasser les points de vue personnels pour admettre une pluralité de tendances et nous enrichir mutuellement de leurs actions complémentaires.

Si les mathématiques peuvent être une fin en soi, pour un idéal de beauté abstraite et de formation logique, elles sont aussi servantes de toutes les sciences auxquelles elles peuvent offrir leur ossature formelle. Les applications des mathémtiques feront l'objet d'une rubrique spéciale.

Pour que le souci de promouvoir l'étude et l'enseignement des mathématiques n'ait pas la fâcheuse conséquence de créer un chauvinisme de

plus, nous maintiendrons dans « Contacts » les relations des mathématiques avec les autres parties de l'équipement intellectuel que sont les langues et, singulièrement, la langue maternelle.

L'histoire des mathématiques nous donnera le sens humain, parfois un peu oublié, de notre discipline.

La mathématique, langue vraiment universelle a, par sa nature, une vocation internationale; nous ouvrirons nos colonnes à nos collèges des autres pays.

Une revue des livres et des publications apportera une documentation utile. Une autre documentation toute aussi précieuse sera fournie par la mine aux problèmes.

La liste des rubriques possibles restera ouverte à toutes les suggestions.

Notre revue se clôturera par un aperçu de la vie administrative de la Société, rédigé dans les deux langues nationales. les autres articles seront publiés dans la langue nationale choisie par l'auteur.

En tentant, à la mesure de nos moyens, d'améliorer l'enseignement des mathématiques, nous voulons les servir et servir les élèves. Mais, surtout, et c'est là notre vœu le plus cordial, nous voulons aider les professeurs sur lesquels repose en fait la valeur de l'enseignement. Les aider non seulement dans leurs connaissances de base, non seulement dans la technique de leur métier mais, plus haut, les aider confraternellement dans leur mission humaine.

L'enseignement des mathématiques comporte des servitudes. Nous essaierons d'alléger ces servitudes et de les rendre plus efficaces car elles sont la condition de succès de chacun et le prix de l'oeuvre collective.

Il faut que chaque professeur se sente participer à l'importance de celle-ci quand il corrige des fautes de signe ou trace des circonférences au tableau noir.

Rubrique « Connaissance des élèves »

Le succès de l'enseignement est lié à la connaissance des élèves. Cette connaissance ne peut se réduire à l'enregistrement de leurs réactions à notre pédagogie. Il importe que l'observation et l'expérience s'efforcent de

découvrir les modes de pensée et d'action propres à l'adolescent, d'apprécier sa condition physique et d'étudier son tempérament personnel.

Une question d'importance majeure est la compréhension réelle que l'élève a des mathématiques qu'il étudie. Quel stade d'élaboration a-t-i atteint ? A quel niveau d'abstraction est-il parvenu ? Quelles notions maîtrise-t-il ? Quelles sont celles qui, dans son esprit, restent très différentes des concepts d'adultes ?

Autant de questions, autant de sujets d'enquêtes qui montreront combien nous sommes encore ignorants en ce domaine.

Nous publierons les comptes rendus de leçons d'investigation. S'ils scandalisent ceux qui croient que la récitation correcte d'une leçon est une garantie de compréhension, ils étonneront moins ceux qui savent gratter le vernis des mots. A côté des moyens intellectuels, la condition physique, les dispositions caractérielles ont, sur le travail scolaire, une incidence que nous essaierons de préciser en faisant appel à des études spécialisées.

Il y a beaucoup à faire pour fonder une pédagogie efficace. Aussi demandons-nous instamment à tous nos collègues de nous communiquer leurs observations et leurs expériences en classe. Qu'ils notent les comportements, les goûts, les aversions, les réussites, les erreurs, bref tout ce qui peut éclairer sur la pensée mathématique juvénile tout autant que sur la personnalité de l'adolescent.

Rubrique « Enseignement »

Le travail pédagogique demande que chaque maître établisse des rapports entre des aspects et des tendances complémentaires.

Interviennent dans des proportions variables :

1. le concret et l'abstrait,
2. l'empirique et le rationnel,
3. l'intuition et la logique ;
4. l'analyse et la synthèse,
5. les idées générales et les cas particuliers,
6. les démonstrations naturelles et les artifices élégants ;
7. la méthode active et l'exposé en forme,

8. la redécouverte, l'heuristique et le dogmatisme,
9. l'activité spontanée de l'élève et l'intervention du maître,
10. la recherche individuelle et le travail collectif;
11. le souci des examens et celui des programmes,
12. la formation et l'information,
13. l'idéal de la tête bien faite et celui de la tête bien pleine

Chaque type d'enseignement est caractérisé par le dosage complexe, l'équilibre ou le déséquilibre de multiples facteurs sur lesquels agissent, en sens divers, la personnalité du maître, les exigences sociales, les autorités et les règlements. C'est dire que l'on ne cessera de proposer et de débattre des idées relatives aux méthodes, aux moyens et aux matières de l'enseignement mathématique.

Nous ouvrons ici une tribune pour la libre présentation et la libre discussion de ces sujets.

Nous publierons les questions soulevées et nous tenterons de poser utilement les problèmes.

Nous accueillerons, avec gratitude, les solutions même fragmentaires.

Nous souhaitons la contreverse courtoise sur les opinions et les points de vue.

Pour que le débat soit positif et fructueux, pour qu'il ne dégénère pas en un inutile dialogue de sourds, nous demandons à nos correspondants :

— qu'ils accueillent avec objectivité les opinions opposées, qu'ils se documentent à leur sujet pour ne pas les réduire à des caricatures;
— qu'ils ne se bornent pas à attaquer des positions, mais qu'ils proposent des idées constructives;
— qu'ils soutiennent leurs opinions par des faits constatés plutôt que des affirmations assez gratuites;
— qu'ils prennent, comme il se doit, la responsabilité de leurs jugements.

Aux joutes, nous préférons l'entr'aide et, au brio personnel, le sens de l'oeuvre collective qui nous attend.

Conjonction de la Langue maternelle et des Mathématiques

E. DACOS & J. BRAUNS,

Mathematica & Paedagogia n° 2 - 1953

Le véritable humanisme établit une ordonnance cohérente entre les diverses disciplines qui constituent la culture. Parmi ces disciplines, la langue maternelle et les mathématiques nous paraissent fondamentales et nous croyons qu'il y a entre elles des correspondances essentielles dont, en général, on ne tient pas assez compte dans l'enseignement.

L'opinion commune est de les considérer comme diamétralement opposées : c'est un a priori généralement reçu de croire que quand on a la « bosse » des mathématiques on doit nécessairement être une « bûche » en littérature comme en art et un cœur sec uniquement sensible à l'univers du robot. Le professeur de français et ses élèves de dilection prennent trop souvent le professeur de mathématiques pour un être de formules et de théorèmes, ne s'exprimant qu'en un jargon chiffré, souffrant d'une incapacité quasi-totale à comprendre les subtiles nuances de la pensée ou les divinations poétiques, tandis que le professeur de mathématiques et ses jeunes savants ont une inclinaison secrète à considérer le professeur de français comme un doux rêveur ou un phraseur sans consistance.

Et cependant Descartes ou Pascal n'étaient-ils pas, à la fois, des savants et des littérateurs ?

Les difficultés éprouvées par les élèves dans l'étude des mathématiques sont de différentes catégories, mais nous pensons que les plus fréquentes et les plus rebelles sont des difficultés de langage et d'expression.

Essayons d'abord de préciser les besoins des élèves et les souhaits des professeurs de ces deux disciplines, avant d'aborder quelques points de détail à caractère pratique.

La formation à l'emploi d'une langue claire, du terme propre, l'exigence du raisonnement sans verbiage, d'une élocution correcte et précise, d'une présentation soignée et d'une syntaxe irréprochable constituent à coup sûr une excellente préparation pour un jeune mathématicien.

La rubrique « Contacts » avec les autres sociétés de professeurs va être illustrée dès le n° 2 de *Mathematica & Paedagogia* avec cette belle définition d'humanisme

Inversément, la rigueur de l'esprit mathématique doit être observée en français non seulement pour tous les termes qui, dans le langage mathématique conservent la signification d'usage, mais aussi dans la conception générale du travail intellectuel. Cette rigueur du raisonnement jointe à la concision du langage trouvera une application directe dans tout travail de rédaction en général et dans la dissertation en particulier. Le profit sera d'ailleurs continuellement réciproque car si la précision et la variété du vocabulaire, par exemple, aideront l'élève à mieux saisir et surtout à mieux exprimer les réalités positives des mathématiques, de même la solidité sans fantaisie des calculs et des figures le préparera à mieux goûter l'enchainement exact des idées ou l'architecture d'une période.

Il y a là croyons-nous, de réelles et substantielles interférences qui méritent grandement notre intérêt.

Sans doute le professeur de langue maternelle devra-t-il parfois raidir un peu certaines interprétatons de la langue et du style ; sans doute le professeur de mathématiques devra-t-il enrichir un peu son vocabulaire et traduire littéralement certaines formules un peu sèches ... mais quels progrès, maîtres et élèves ne réaliseraient-ils pas ainsi ?

Combien d'élèves auraient évité l'échec au tableau noir de l'examen oral s'ils avaient acquis un vocabulaire plus étendu et une élocution plus soignée ! Combien seraient meilleurs certaines dissertations si elles s'inspiraient quelque peu de « l'esprit de géométrie » !

C'est pourquoi nous voudrions préconiser certains essais qui donneraient sans doute des résultats encourageants.

Et tout d'abord, pratiquons l'art de la définition claire et solide. Si un même mot peut avoir plusieurs sens suivant le texte littéraire où il est inclus, il n'en est pas de même en mathématiques, ce qui présente souvent pour l'élève une sérieuse difficulté. Il y remédie par de l'à-peu-près, inacceptable au point de vue scientifique. Un élève, surtout s'il est jeune, ne peut utiliser de manière fructueuse une définition que s'il connaît *d'abord* la signification exacte des termes employés et s'il a une connaissance claire des idées exprimées. L'ignorance des définitions est souvent due à leur incompréhension et cette ignorance est immédiatement un handicap au départ d'une théorie mathématique. De même, il est bien certain que si les termes de l'énoncé d'une propriété ou d'un théorème sont bien connus, la compréhension et la mémorisation en seront facilitées. Ainsi, pas d'étude facile des mathématiques sans une bonne connaissance de la langue et sans des définitions précises.

Autre exercice essentiel : une bonne formation à l'analyse des mots et des propositions, absolument nécessaire pour la compréhension de la langue l'est tout autant pour la compréhension et l'assimilation d'une règle mathématique ou d'un théorème. Des conjonctions comme *donc, car, par conséquent, si, etc, ...*, les pronoms relatifs comme *dont, d'où* méritent une étude approfondie quant à leurs sens et emplois divers. La clarté d'un texte est à ce prix. Par ailleurs, il faut que l'élève de 5e ou de 4e (1) sache reconnaître tout de suite et à coup sûr le sujet, l'attribut, le complément d'objet, le complément circonstanciel sous peine d'ignorer complètement le sens réel d'une phrase ...ou d'un théorème, ou d'une démonstration.

Au lieu de faire analyser les mots et les propositions d'une phrase tirée d'un texte quelconque, pourquoi ne pourrait-on le faire occasionnellement sur l'énoncé d'un théorème ou d'une propriété de géométrie ? Pourquoi, comme exercice de phraséologie ne pourrait-on faire énoncer une même propriété de différentes façons ? Evidemment, ceci impliquerait que le professeur de mathématiques connaisse encore suffisament la terminologie grammaticale et que le professeur de français possède encore quelques connaissances mathématiques. Mais est-ce si difficile ?

Un exercice excellent dans les classes supérieures consisterait à faire énoncer en français des expressions algébriques, à exprimer le sens d'une équation, puis à se livrer à l'opération inverse. Par exemple, l'équation :

$$2x^2 - 3\left(\frac{y}{2}\right)^2 = (x-y)^2 + 5$$

se traduirait : « le double du carré de x, diminué du triple carré de la moitié de y surpasse de cinq unités le carré de la différence de x et de y. »

Voici deux énoncés tout à fait rigoureux, dont on ne peut simplifier les termes sous peine d'erreur et où les débutants rencontrent toujours de grandes difficultés d'expression et de compréhension :

> Si, d'un point extérieur à une droite, on mène la perpendiculaire et diverses obliques, deux obliques dont les pieds sont inégalement distants du pied de la perpendiculaire sont inégales et celle dont le pied s'en éloigne le plus est la plus grande.
>
> La mesure de l'aire d'un rectangle est égale au produit des mesures de ses dimensions, à condition de prendre comme unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur.

(1) 2e ou 3e actuelle

Il saute aux yeux qu'une bonne analyse de certains mots de ces énoncés et qu'une définition de mots comme : perpendiculaire, divers, mesure, aire, dimension, faciliteraient grandement la compréhension de l' élève tout en constituant un excellent exercice d'analyse et de vocabulaire.

Au point de vue du sens propre des mots, il y aurait lieu de dresser une liste aussi complète que possible des principaux termes d'usage courant en mathématiques et de les diviser en deux catégories : d'abord ceux qui conservent exactement le même sens dans les langages courant et mathématique (milieu, moitié, perpendiculaire, parallèle, etc ...) et ensuite ceux dont le sens n'est pas le même en langage courant ou qui sont fréquemment employés de manière abusive. Nous pensons ici à des mots comme : cercle et circonférence, égal et équivalent, inverse et opposé, etc ... Et puis il y a les termes propres au langage scientifique dont l'étymologie devrait être donnée et justifiée, dont le sens exact devrait être précisé : équiangle, équilatère, orthique, orthogonal, concycliques, collinéaires (ou colinéaires).

Au professeur de français d'expliquer à l'élève les termes d'usage courant et de montrer les interprétations possibles des termes à sens divers et surtout à lui donner le goût de « ne pas se payer de mots », le goût du précis, du soigné. Au professeur de mathématiques d'expliquer clairement les termes mystérieux propres à la discipline qu'il enseigne.

A eux de faire ensemble, de temps à autre, une mise au point au niveau d'une même classe pour réaliser, nous n'en doutons pas, des choses surprenantes et combien profitables. Il suffirait que chacun dise clairement à son collègue, dans une atmosphère de confiance mutuelle, ce qu'il attend de lui et l'effort nécessaire ne devrait être produit qu'une fois.

Nous ne parlons pas de l'intérêt que présente une bonne orthographe, une ponctuation intelligente et rigoureuse, une écriture soignée, une élocution riche et un sens éprouvé de la présentatin d'un travail où même de sa personne, mais on pense bien qu'il y a là matière très vaste à collaboration dans le cadre d'une culture sainement humaniste.

Il nous paraît que c'est dans un tel esprit, se manisfestant chaque fois qu'il est possible, que se trouve la vraie coordination.

Bilan de quinze annnées de réforme

R. BEX,

Mathematique et Pédagogie n° 2 - 1975

Si nous examinons l'organisation d'un cours de mathématique, nous constatons que les sujets s'y déroulent successivement, reliés les uns aux autres dans un ordre logique, selon une structure qualifiées de linéaire, et cela en raison de la forte dominance de la démarche déductive. Cette tendance est accentuée par le recours plus explicite à des axiomes, dans un souci accru d'ordonnance logique et d'un retour à une plus grande rigueur. (...) On obtient ainsi une meilleure coordination interne. C'est probablement un élément positif. Ce qui l'est moins, c'est que la recherche de la pureté nous éloigne de l'application. On peut aussi se demander comment l'élève ressent cette construction. On peut aussi se demander comment l'élève ressent cette construction, belle mais préfabriquée. Certains y sont peut-être sensibles, mais ce n'est pas la majorité, il faut bien le reconnaître. On peut d'ailleurs se demnder si, psychologiquement, on ne fait pas fausse route. Ce qui est naturel, non seulement pour l'élève, mais pour tout le monde, c'est que l'activité mentale ne naît pas dans l'ordre et dans la clarté, mais plutôt dans la confusion, dans l'approximation, dans la superficialité.

Nous n'oserions pas faire étalage du brouillon de nos cogitations dans un domaine mal connu, où même de nos recherches autour d'une démonstration dans un domaine plus familier. La vérité, c'est que, peu à peu la compréhension s'affirme, le problème se clarifie, la situation s'organise. La synthèse vient beaucoup plus tard, après décantation suffisante. Que peut-on dès lors proposer en vue d'une organisation du travail scolaire plus proche de cette réalité ?

Dans les deux premières années du secondaire et peut-être encore par endroit dans les autres années, on pourrait procéder à partir d'un choix judicieux de situations, de problèmes pris dans divers domaines. Il faudrait se livrer à une attaque expérimentale, par essais et erreurs, rechercher progressivement une issue, solution ou axiome ; se dégager ensuite de la ten-

Dans ce texte de 1975, l'inspecteur Bex s'interroge d'abord sur les aspects positifs et négatifs des nouveaux programmes dans les trois premières années du secondaire. Après avoir examiné le contenu, il s'interroge ici sur la manière d'enseigner. Roger Bex a été le second président de la SBPM de 1969 à 1973.

dance expérimentale pour accéder à une phase déductive dont les résultats pourraient être soumis à une vérification par un retour à l'expérimentation. L'acquis se trouverait ainsi confirmé et, surtout, la confiance de l'élève dans le raisonnement serait fortifiée.

Le cours comporterait ainsi une série d'îlots déductifs qu'il faudrait ensuite assembler en un tout structuré. Rien n'empêche que, dans cette phase de synthétisation, la construction soit complétée par des apports plus directs.

On peut fournir des arguments en faveur de cette technique d'apprentissage. Il y a d'abord une meilleure compréhension des rapports de la mathématique et du réel, l'acquisition d'une aptitude à découvrir des modèles mathématiques convenables pour décrire une situation et, par conséquent, une meilleure préparation pour s'attaquer aux problèmes que posent la science et la technique. Mais il y a aussi la formation de l'élève. L'objectif d'un apprentissage doit importer à l'apprenti. Pour que l'apprentissage réussisse, l'élève doit avoir la volonté de s'y livrer. Il nous faut donc mobiliser cette volonté. Ce n'est pas par la répétition routinière et une assimilation passive qu'on y parvient. Un processus où le sujet est participant, dans le sens de « prendre part », semble mieux convenir à cette fin.

Cependant, il faut reconnaître que bien des obstacles s'opposent à l'adoption d'une telle stratégie. Il y a d'abord, la force de l'habitude. Il y a le manque de préparation à une technique d'enseignement de ce genre. Il y a aussi la nécessité d'une certaine interdisciplinarité. Il y a aussi le manque de temps et la lourdeur des programmes. Il y a la crainte de ne prodiguer qu'un enseignement fragmentaire, se prêtant mal à une bonne édification mathématique. Il y a tout cela, et pourtant, j'ai la conviction que nos efforts devraient tendre à promouvoir une telle stratégie et à la rendre possible. Comment ?

Il faut d'abord procéder à une révision des programmes, pas nécessairement dans un sens d'allègement, mais plus en vue de préciser les objectifs à atteindre, tant pour la matière que pour la formation des élèves. Il faut ensuite créer des outils, par exemple, une documentation large et circonstanciée proposant aux professeurs un choix de situations ni simplistes, ni sophistiquées, mais riches en contenu mathématisable. C'est un travail de longue haleine auquel des équipes devraient s'atteler. C'est sur cette proposition constructive que je souhaitais terminer.

Pourquoi la Mathématique dans l'Éducation ?

J. NACHTERGAELE,

Mathematique et Pédagogie n° 2 - 1976

Mon propos est ici d'indiquer les principales orientations des échanges. Elles sont révélatrices des préoccupations actuelles des professeurs de mathématiques.

1. Il faut « démythifier » les mathématiques

« Pourquoi les mathématiques dans l'éducation ? » Mais parce qu'elles sont omniprésentes, elles se sont glissées partout dans l'activité humaine. Cette réponse, devenue slogan, a été soumise à une critique serrée. Quand on dit, par exemple, que les études linguistiques font appel à la statistique et aux ordinateurs, on ne précise pas que la grande majorité des études de textes ne recourent pas à ces instruments, et ne le doivent pas. De plus, la mathématique dont il s'agit est très spécialisée. Ce qui est vrai de la linguistique l'est aussi des autres sciences, même de celles qui, depuis toujours, utilisent l'instrument mathématique. De cette « omniprésence » des mathématiques, on ne peut conclure à la nécessité pour tous de connaître quelque chose de chacune de leurs parties. Le slogan est inefficace, et trompeur.

On réclame plutôt une « démythification » des mathématiques. Plutôt que d'en exagérer l'importance, qu'on s'attache à construire des modèles mathématiques qui permettent de résoudre des problèmes pendants !

On souhaite, par ailleurs, une plus grande ouverture des mathématiciens à ce qui n'est pas immédiatement leur domaine.

Il s'agit du rapport du représentant de notre société à la XXVIIe Rencontre internationale de professeurs de Mathématique organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, tenu à Tunis du 7 au 13 août 1975. Le RP Jean Nachtergaele, s.j. a été le quatrième Président de notre Société de 1979 à 1981.

2. Le rôle du maître

On ne soulignera jamais assez l'importance, dans l'étude des mathématiques à l'école, de la relation maître-élève. Un sommet de la Rencontre fut le dialogue avec de jeunes élèves tunisiens de 10 à 15 ans, invités à dire les satisfactions et les déceptions que leur apporte leur travail scolaire en mathématiques.

Dans ce dialogue, des questions sophistiquées sur l'importance des mathématiques dans la vie amenèrent des réponses « conformistes », reflets des opinions reçues à l'école ou en famille. Mais le cri du cœur, ce fut : *tout va bien, tout réussit, quand le professeur est sympathique*. Avec un professeur expérimenté qui aide à comprendre, il n'y a jamais de problèmes. Si le professeur est maladroit ou distant, les difficultés naissent tout de suite.

Poussant dans cette ligne la réflexion, on remarque que l'enseignement des mathématiques est un terrain, hélas trop propice, où s'exerce l'autoritarisme du maître, surtout s'il se contente d'enseigner une mathématique toute faite. Une bonne pédagogie évite cet écueil si elle s'attache à « mathématiser des situations » en provoquant la réflexion et l'imagination des élèves, de manière que, loin de la subir, ils construisent leur mathématique.

Comme exemple, on a présenté une initiation aux propriétés affines, métriques et projectives, à partir de l'observation du jeu des ombres et de la lumière, soit dans des tableaux de grands maîtres, soit dans le concret de la vie.

Qu'on ne rêve cependant pas de manuels, de dossiers, de fiches imprimées, de dépliants pour rétroprojecteurs, etc., qui fourniraient aux professeurs un matériel tout prêt pour la « mathématisation » des situations. C'est l'imagination pédagogique du professeur qui, constamment en éveil, trouvera dans le concret quotidien, et parfois dans les données des autres sciences, les situations d'où puissent se dégager les modèles mathématiques.

3. Des mathématiques « utiles »

Il est urgent d'adapter, aux exigences concrètes d'un enseignement de masse, programmes et pédagogie. On doit fournir aux utilisateurs l'instrument dont ils ont besoin. Et la première condition pour en être capable est

de créer des contacts entre professeurs de mathématique et professeurs des autres branches. Il semblerait que les premiers cités éprouvent plus de peine que leurs collègues à établir le dialogue. Raison de plus pour s'y atteler.

Notons-le en passant : cette requête urgente d'un enseignement de mathématiques « utilisables » n'a pas pris figure de contestation de l'enseignement des notions dites « modernes » au bénéfice des « anciennes ». C'est, en vérité, une mise en garde contre l'éternelle tentation des mathématiciens de pousser plus loin le développement autonome de leur science, dans des théories élégantes et des applications subtiles, et d'oublier que la mathématique, enracinée, pour son apprentissage, dans l'expérience concrète, est appelée à rendre service pour la résolution de problèmes réels.

4. Mathématique et Société

L'éducation à l'école — et l'enseignement des mathématiques comme celui de n'importe quelle branche, — transmet une certaine conception de la société et contribue à dessiner son visage. C'est clair. Certains sont convaincus que, dans nos pays, l'école favorise les classes privilégiées et élargit le fossé entre riches et pauvres. Hantés par ce problème, ils jugent vain de s'interroger sur les motivations et les objectfs de l'enseignement des mathématiques avant d'avoir résolu les problèmes de fond et pris position sur les structures sociales et politiques sur lesquelles cet enseignement repose.

Beaucoup d'autres cependant estiment que les enseignants font plus pour le progrès de la société en améliorant la qualité de leur action auprès des élèves qu'en discutant longuement sur les structures socio-politiques. D'ailleurs, promouvoir l'activité de l'élève, l'aider à prendre ses responsabilités quand il propose une solution, à la critiquer, à l'améliorer, à la présenter honnêtement et clairement, à mesurer exactement l'importance du travail qu'il fait, n'est ce pas déjà le préparer efficacement à ses responsabilités d'adulte et de citoyen ?

Journées portes ouvertes, samedi 21 juin 2003,
de 9h00 à 12h30, à Mons.
Inscriptions du 21 juin au 3 octobre 2003.

La réforme des maths modernes en Belgique

G. NOËL,

Mathematique et Pédagogie n° 91 - 1993

1. La chronologie

En Belgique comme dans les autres pays, la réforme dite des « maths modernes » est l'aboutissement d'une longue réflexion dont les débuts sont difficiles à préciser.

On peut certainement citer les réunions de la *Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, fondée en 1950 par Caleb Gattegno et animée dans les débuts notamment par Gattegno, et G. Choquet. L'histoire de la C.I.E.A.E.M. a été contée par Lucienne Félix,[3]. La Commission devait être « un groupe où épistémologistes, logiciens, psychologues, mathématiciens, pédagogues, devaient apprendre les uns des autres ce qu'ils ne savaient pas ». Dès le début, plusieurs belges participent aux réunions et y jouent un rôle actif. Nous ne pouvons pas ne pas mentionner en tête le nom de Willy Servais, Président de la Société Belge de Professeurs de Mathématique (SBPM), qui assure le secrétariat de la C.I.E.A.E.M. de 1961 à 1979. Au fil des années, d'autres noms apparaissent. Dans le désordre : Louis Jéronnez, Alfred et Denise Warbecq, Frédérique Lenger, Lucien Delmotte, Jean Nachtergaele, Willy et Jacqueline Vanhamme, puis Georges Papy...Tous figureront parmi les animateurs principaux du mouvement de réforme des années 60.

Dès 1958, les idées ont suffisamment évolué pour que certains jugent le moment venu pour tenter une première expérience. En marge de la rencontre de la C.I.E.A.E.M. à St-Andrews (août 1958), Frédérique Lenger et Willy Servais rédigent un programme expérimental (voir [11]), destiné aux Ecoles Normales Gardiennes, c'est-à-dire les écoles où sont formées les futures institutrices maternelles. Compte tenu de ce que les élèves de ces écoles

(°) L'auteur remercie vivement Mme J. Vanhamme et MM. R. Bex, S. Courtois et A. Warbecq qui ont relu la première version de ce texte et ont suggéré diverses améliorations.

ont généralement un mauvais contact avec les mathématiques, le programme expérimental leur propose un ensemble de situations mathématiques nouvelles, plus proches de leur expérience perceptive, active et mentale, et étudiées dynamiquement. Le programme aborde ainsi en première année les notions d'ensemble, de relation, les opérations sur les entiers, le système décimal, les caractères de divisibilité, des notions topologiques intuitives, ainsi qu'une étude dynamique des figures planes élémentaires. Un des objectifs poursuivis est aussi d'amener les institutrices maternelles à découvrir des relations mathématiques dans des situations simples, ce qui devrait leur permettre d'aider leurs élèves à acquérir les structures mathématiques les plus primitives et les plus importantes.

L'expérience est réalisée en 1958–59 dans deux classes d'école normale gardienne de Liège et Arlon. Très vite, les promoteurs éprouvent le besoin de s'assurer la collaboration d'un mathématicien universitaire susceptible de garantir la qualité mathématique de leur travail. Ils contactent à cet effet Georges Papy, professeur à l'Université Libre de Bruxelles. Celui-ci, dans un premier temps, exprime son scepticisme à l'égard de l'applicabilité des programmes proposés. Mais il accepte de jouer le jeu. Il le jouera tellement bien qu'en 1959–60 il assurera lui-même l'enseignement du programme expérimental dans une classe normale gardienne de l'école « Berkendael » à Bruxelles et qu'il deviendra l'élément moteur de la réforme en Belgique. Au passage, il épousera Frédérique Lenger. Bien qu'il s'agisse là d'un fait d'ordre privé, il n'est pas inintéressant de le citer car il a eu pour conséquence de constituer une équipe animée d'une même pensée et d'une même volonté qui dirigera le mouvement durant plus de 10 ans. Une longue période durant laquelle Papy non seulement consacrera toute son intelligence et son énergie à « reconstruire la mathématique du secondaire » et mettre au point des procédés pédagogiques parfois tout à fait remarquables, mais aussi combattra durement tous ceux qui s'écarteront si peu que ce soit de sa doctrine. Il n'y a pas de rose sans épines...

Entretemps, en 1959, l'Organisation Européenne de Coopération Economique (qui plus tard deviendra l'OCDE) prend en charge le problème de la rénovation de l'enseignement des mathématiques et organise à Royaumont, près de Paris, une session d'études sur le thème « Mathématiques Nouvelles ». On y discute dans le détail de l'orientation que peut donner une présentation moderne des mathématiques à l'enseignement de cette matière, particulièrement au niveau du secondaire. Willy Servais y développe la conception belge d'un programme rénové pour l'enseignement secondaire.

Après Royaumont, l'O.E.C.E. constitue un groupe de 16 experts qui se réunit à Dubrovnik (Yougoslavie) du 21 août au 19 septembre 1960. Deux belges font partie du groupe : Willy Servais et Paul Libois, professeur à l'Université Libre de Bruxelles. Le groupe décide de concentrer son attention sur les sujets qui, à son sens, revêtent un caractère de priorité : algèbre, géométrie et statistiques. Sans le considérer comme définitif, il formule un programme adapté *à la moitié la mieux douée des élèves fréquentant les lycées et gymnases*, tout en précisant que les propositions faites pour le premier cycle devraient pouvoir facilement être adaptées à l'intention des élèves moyens. Il estime qu'un programme d'enseignement moderne doit mettre l'accent sur l'unité fondamentale des mathématiques. Il considère aussi comme important le rôle des mathématiques dans d'autres domaines et espère que sera entreprise une étude sérieuse de la coordination de l'enseignement des mathématiques et des sciences.

Le rapport du groupe d'experts de l'O.E.C.E est publié en 1961, [6]. Sans détailler ici la liste des matières proposées, nous ne pouvons pas ne pas signaler la différence de présentation entre l'algèbre, et la géométrie, surtout la géométrie du premier cycle. En algèbre la liste des matières est très structurée. Elle invite à un exposé de type déductif, allant du simple au complexe, du général au particulier. Au premier cycle, la liste des matières proposées pour la géométrie est beaucoup moins structurée. Elle laisse plus de place à l'imagination, à l'observation, à l'expérimentation. Au second cycle, la structure se renforce, en prévoyant notamment de distinguer la géométrie affine et la géométrie métrique. Les différences de structuration apparaissant au niveau du premier cycle pourraient être attribuées partiellement au fait que ces parties du rapport sont vraisemblablement dues à des rédacteurs différents. On peut y voir aussi un indice de la difficulté de bâtir pour le premier cycle du secondaire un exposé de géométrie qui simultanément soit rigoureux, permette l'apprentissage de la démonstration et soit en harmonie avec la perception géométrique de l'élève et son intuition. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce problème.

Notons aussi l'importance des transformations et de leurs invariants dans tous les sujets d'algèbre et de géométrie abordés dans le rapport.

Revenons en Belgique, où nous avons laissé Papy dans sa classe de futures institutrices maternelles de l'école Berkendael. Pendant deux ans, il y met au point divers moyens pédagogiques permettant l'enseignement des notions élémentaires concernant les ensembles et les relations. En particulier, il utilise systématiquement des diagrammes de Venn, et des graphes sagittaux. Il codifie plus ou moins l'emploi de ces graphismes, les transformant

en un moyen d'expression non verbal. D'autres conventions graphiques sont introduites, notamment la convention vert-rouge en topologie.

Sur la base de ces expériences, et d'autres essais fragmentaires réalisés ici et là, Papy et toute une équipe de collaborateurs décident de lancer la réforme dans l'enseignement secondaire.

Le mois de mai 1961 représente un tournant dans le processus. Le 24 mai 1961 est fondé le *Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique* (CBPM). Dans le contexte belge de 1960, il était important, pour que la réforme ait une quelconque chance de réussir, qu'elle soit patronnée par des personnalités des trois principaux réseaux d'enseignement (Etat, catholique et communal–provincial) ainsi que des deux régimes linguistiques. Les fondateurs du CBPM seront donc au nombre de 9 et représenteront tous ces courants. On y retrouve naturellement G. Papy, W. Servais et F. Papy-Lenger. A leurs côtés, R. Holvoet, J. Nachtergaele, M. Sart, F. Wuytack, et les abbés Gille et Bockstaele. Un panorama des activités du CBPM a été dressé dans [10]. Nous lui avons emprunté pas mal d'éléments.

Le CBPM n'était pas créé pour ne rien faire. Immédiatement, Papy publie des *Suggestions pour un nouveau programme de mathématique dans la classe de sixième* ([1]) [7] et obtient des autorités scolaires que ce nouveau programme soit expérimenté dans plusieurs classes dès l'année scolaire 1961–62. Le CBPM met en place une organisation de formation permanente, basée sur des *Groupes de Travail dans lesquels les professeurs pourront s'informer et étudier les moyens d'enseigner les éléments de la mathématique d'aujourd'hui*. Les groupes de travail du CBPM fonctionneront pendant une dizaine d'années. Ils constituent la seule tentative qui ait jamais été réalisée en Belgique pour organiser, de façon systématique et à grande échelle, la formation permanente des professeurs de mathématique. Nous y reviendrons dans le paragraphe consacré au recyclage.

Les premières classes secondaires expérimentales sont donc mises en place en 1961-62. Le programme initialement prévu pour la classe de 12 ans (la sixième) se révèle vite beaucoup trop ambitieux. Il est donc revisé. Certains sujets sont renvoyés en cinquième, voire même en quatrième. A l'issue des trois premières années, le programme expérimental se présente comme suit :

([1]) A l'époque, les années secondaires étaient numérotées de 6 à 1. La sixième est donc la classe de 12 ans.

- Classe de sixième (12 ans) : Ensembles, relations, entiers rationnels, numération binaire et décimale, Débuts de la géométrie affine.
- Classe de cinquième : Géométrie affine plane, nombres réels. Les deux sujets sont intimement liés, la construction du corps des réels s'appuyant sur le support géométrique. L'exposé de géométrie repose explicitement sur une axiomatique, dont l'ossature est celle de l'ouvrage de E. Artin, [1]. Une fois la notion de vecteur mise en place, et le théorème de Thalès rencontré, il est possible d'introduire la structure d'espace vectoriel plan.
- Classe de quatrième : Polynômes, équations algébriques de degré 1, mais surtout géométrie métrique plane. L'exposé de géométrie est très structuré, basé sur les isométries planes, définies comme composées de symétries orthogonales. Les compositions et décompositions d'isométries sont étudiées systématiquement. Le produit scalaire est introduit dans le vectoriel plan, ce qui fournit aisément les résultats métriques fondamentaux, notamment le théorème de Pythagore.

Durant les deux années suivantes, les classes expérimentales s'étendent en cinquième puis en quatrième. De nouveaux professeurs se joignent à l'expérience qui est encouragée officiellement. Dès juin 1962, le Ministre de l'Education Nationale, Victor Larock, invite tous les professeurs à *parfaire leur information, réfléchir aux problèmes pédagogiques que pose l'enseignement de la mathématique contemporaine, se pénétrer de leur importance extrême et apporter leur collaboration à la recherche des solutions*. De plus, il incite même les professeurs qui ne participent pas à l'expérience à introduire des éléments nouveaux dans le programme traditionnel.

En 1965, son successeur Henri Janne rend optionnel le programme expérimental qui est désormais sur le même pied que le programme traditionnel. De plus, il annonce que le programme moderne éventuellement aménagé sera rendu obligatoire au 1er septembre 1968.

Pendant les années scolaires 1964–65 à 1966–67, le CBPM propose des programmes modernes pour le second cycle. Ils comportent trois grands thèmes : algèbre linéaire, analyse, arithmétique. On reparle du vectoriel euclidien plan ; on introduit la géométrie spatiale à partir de l'étude d'un espace vectoriel de dimension 3 ; on étudie les transformations linéaires, le calcul matriciel, les coniques. Le chapitre d'analyse repose sur des éléments de topologie.

Si les programmes pour le premier cycle (12 à 15 ans) avaient été largement expérimentés, il n'en sera malheureusement pas de même pour ceux

du second cycle. Une seule des classes engagées dans l'expérience en 1961 aura reçu, sous la direction de Frédérique Papy, un programme moderne expérimental tout au long des 6 années du secondaire. C'est peu pour tirer des conclusions. Cependant Papy et Frédérique, tout en veillant à la reproduction de l'expérience dans d'autres classes les années suivantes, semblent considérer la réforme du secondaire comme achevée pour l'essentiel. Ils s'embarquent dans une nouvelle aventure : porter la réforme dans l'enseignement primaire. Nous y reviendrons bientôt.

Comme on l'a dit ci-dessus, la généralisation des programmes modernes avait, dès 1965, été annoncée pour 1968. Pour préparer les programmes définitifs, le Ministre de l'Education Nationale met en place une Commission Universitaire, chargée de remettre un avis. La Commission n'est pas chargée de rédiger des programmes, mais d'élaborer une liste de matières pouvant servir de base aux travaux d'une Commission du secondaire qui, elle, rédigera les programmes définitifs. Le rapport de la Commission est remis en 1967 aux ministres de l'époque, MM. Grootjans et Toussaint.

La liste de matières proposée par la Commission Universitaire est parfaitement compatible avec les programmes modernes expérimentaux. La Commission insiste sur plusieurs points : l'unité de la mathématique, la nécessité de n'introduire les structures mathématiques fondamentales que progressivement et à partir d'exemples, la nécessité d'apprendre à l'élève à mathématiser une situation, la maîtrise des techniques de calcul, l'aptitude à bâtir des démonstrations, la familiarisation avec les notions logiques. La Commission demande aussi aux Ministres de *mettre en œuvre les moyens propres à intensifier la formation continue des enseignants*. Elle souhaite enfin être consultée lorsque la Commission du secondaire aura élaboré les programmes définitifs. Cette consultation n'aura cependant lieu qu'après leur mise en application !

La Commission du secondaire, à laquelle Papy ne participe pas, rédige sous la présidence des Inspecteurs Généraux Dethier et Verstraete, le programme définitif de la classe de 12 ans, fortement inspiré du programme expérimental. Et en avril 1968, une décision ministérielle confirme la généralisation de ce programme moderne à partir du 1er septembre 1968. Les programmes des années suivantes seront publiés année après année jusqu'en 1973. La Fédération de l'Enseignement Catholique procède de même et met en vigueur simultanément dans ses écoles des programmes modernes présentant cependant quelques différences sensibles par rapport aux programmes en vigueur dans les écoles de l'Etat.

La réforme du secondaire n'était pas tout à fait terminée pour autant. Il y eut la « guerre des maths modernes » qui en 1968 et 1969 opposa « papystes » et « anti-papystes ». Nous pourrions y consacrer quelques pages dont l'intérêt serait limité. Certains enseignants n'étaient pas convaincus de la validité de la réforme « maths modernes » ou étaient même convaincus de sa nocivité. Ils accusaient les réformateurs de faire du formalisme stérile, de l'abstraction prématurée, de négliger le calcul, d'abandonner la géométrie. Partisans et adversaires de la réforme s'opposèrent sans faire de la dentelle. La grande presse s'emparant du sujet ne fit qu'embrouiller les choses et alarmer le public.

Devant ce remue-ménage, certains enseignants purent penser que rien ne se produirait, qu'ils n'auraient jamais à modifier leurs cours. Ces enseignants-là n'étaient pas prêts à appliquer les nouveaux programmes. D'autres essayaient de retarder le plus possible cette mise en application. Certaines écoles obtinrent donc des dérogations d'un an. Mais dès le 1er septembre 1969, il n'y eut plus aucune exception. La guerre des maths s'éteignit d'elle-même.

Les programmes modernes restèrent en application jusqu'en 1978. A la fin de ce texte nous indiquerons pourquoi une « réforme de la réforme » apparut alors nécessaire à certains responsables de l'enseignement.

Pour être complet relativement à la modernisation des programmes du secondaire, signalons, à côté de la réforme proposée par le CBPM, d'autres tentatives plus isolées. Ainsi, en 1961, la ville de Bruxelles crée un bureau permanent chargé de préparer la modernisation des cours de mathématique. En fait partie, notamment, Paul Libois qui était le second belge présent à la conférence de Dubrovnik. Un article de X. Hubaut, [5], rend compte des idées de Libois concernant l'enseignement en classe de troisième année (la première année du second cycle, 15 ans). Il y est question notamment d'étudier des groupes finis de déplacements, dans le plan et dans l'espace, d'introduire des éléments de géométrie affine basés sur l'observation beaucoup plus que dans les programmes du CBPM. Les idées de P. Libois furent également largement appliquées à l'Ecole Decroly. Toutefois, cette tentative n'eut pas d'influence sur la réforme qui eut lieu au niveau national.

A signaler aussi, la création sous la direction de C.F. Becquet, inspecteur de l'enseignement technique, d'une association, MATEC, ayant pour vocation de regrouper les professeurs de mathématique de cet enseignement. MATEC aussi veut rénover l'enseignement des mathématiques mais s'oppose à l'introduction de notions ensemblistes qui ne sont considérées que comme

une ouverture vers la logique et les mathématiques non numériques. Elles ne concerneraient donc pas l'enseignement technique. MATEC considère en fait la mathématique comme *un outil technique plutôt que comme un gymnastique de l'esprit*. Dans les manuels de MATEC, les chapitres difficiles *ont été coupés en deux de façon à séparer la signification de l'opération de la pratique du calcul*. L'opposition de MATEC aux programmes conçus par le CBPM était donc irréductible, et progressivement ce mouvement devint surtout le point de rassemblement des opposants à la réforme. MATEC disparaîtra rapidement après 1969.

Après 1967, Papy et Frédérique s'intéressent surtout à l'enseignement primaire. Frédérique se charge des cours de mathématique dans une classe de première année et accompagne ses élèves jusqu'en sixième. Elle introduit l'usage des graphes sagittaux, les utilise comme supports de raisonnements. Le calcul numérique est abordé via les réglettes Cuisenaire et un abaque appelé Minicomputer, inventé par Papy et inspiré de l'écriture des nombres due à Monseigneur Lemaître. Frédérique obtient d'incontestables résultats. Ses enseignements sont relatés dans plusieurs ouvrages (voir notamment [4]). L'auteur de ces lignes ne se sent guère qualifié pour en parler en détails.

2. Le recyclage

Une réforme de l'enseignement mathématique de l'ampleur de celle qui était préconisée n'avait aucune chance de réussir si on ne donnait pas aux enseignants en fonction l'occasion de mettre leurs connaissances à jour. Les enseignants du premier cycle du secondaire (12–15 ans) n'avaient pour la plupart jamais entendu parler de théorie des ensembles, de relations, d'algèbre moderne, encore moins de topologie. Quant aux licenciés qui enseignent dans le second cycle, les plus jeunes d'entre eux avaient pu être en contact avec l'algèbre moderne, dont l'introduction dans les programmes universitaires était récente. Mais pour les plus âgés, ce n'était pas le cas.

Ce sont donc plusieurs milliers d'enseignants qu'il fallait former. Tant du point de vue de la matière que de sa méthodologie. L'entreprise nécessitait des moyens énormes qui n'ont jamais existé.

Le premier organisme à se préoccuper de formation permanente à l'échelle du pays fut la *Société Belge des Professeurs de Mathématique*, présidée depuis sa création en 1953 par Willy Servais. Par sa revue, *Mathematica*

& *Paedagogia* ([2]), par ses congrès, elle donnait l'occasion aux enseignants de s'exprimer, de faire part de leurs expériences, de leurs réalisations. À partir de 1968, pour diffuser ses points de vue et propositions, le C.B.P.M. publiera sa propre revue, *Nico* ([3]).

Mais ces moyens ne sont pas adéquats pour véhiculer un véritable recyclage. Aussi, en 1959, la SBPM organise les premières « Journées d'Arlon », consacrées aux ensembles et à la topologie. A partir de 1960, les journées d'Arlon sont prises en charge par le Ministère de l'Education Nationale, et dès 1961, leur organisation pratique est confiée au CBPM. Elles constituent l'occasion pour Papy et ses collaborateurs de donner pendant trois jours une première version des cours qui auront lieu l'année suivante dans les Groupes de Travail du CBPM. Les Journées d'Arlon étaient généralement précédées quelques semaines auparavant d'un Séminaire résidentiel, se tenant à Knocke, auquel n'étaient invités que les animateurs des groupes de travail.

Les Journées d'Arlon furent organisées de 1959 à 1968. Les thèmes en furent successivement : Ensembles et topologie, Relations et fonctions, Groupes, Espaces vectoriels, Algèbre extérieure et déterminants, Le premier enseignement de l'analyse, Le vectoriel euclidien plan, L'analyse au niveau secondaire, L'intégrale au niveau secondaire, La place du calcul dans un enseignement moderne de la mathématique.

Ces journées ont eu un impact considérable, et pas seulement au niveau mathématique. Elles ont également contribué à créer des liens entre les participants, à leur donner le sentiment de participer à une œuvre commune. C'était d'autant plus important que la Belgique avait connu en 1954–58 une période de guerre scolaire opposant les partisans de l'enseignement catholique au Gouvernement et, suscitant des affrontements entre réseaux. Dans le cadre des activités de la SBPM d'abord, mais plus encore dans le cadre des Journées d'Arlon et des Groupes de Travail du CBPM, les professeurs de mathématique ont appris à se parler sans plus s'inquiéter de savoir à quel réseau ils appartenaient. Une situation a ainsi été créée qui n'a peut-être pas d'équivalent dans les autres disciplines.

Les Journées d'Arlon ont réuni jusqu'à 600 professeurs en un même lieu pendant trois jours. Cela posait des problèmes d'intendance énorme. Mais c'était insuffisant pour assurer le recyclage de l'ensemble du corps enseignant.

([2]) Devenue en 1975 « Mathématique et Pédagogie »
([3]) 29 numéros de *Nico* paraîtront de 1968 à 1979

Aussi, le CBPM mit en place une organisation impressionnante. Dès 1961, des groupes de travail fonctionnaient chaque semaine dans une quinzaine de centres urbains. En novembre 1961, le CBPM pouvait annoncer avec satisfaction que les activités des groupes étaient suivies par environ 1300 enseignants. Sans doute avait-on pour atteindre ce total additionné les effectifs des différents groupes lors de la première séance et le nombre de participants allait-il se tasser. Mais même à la fin de l'année, la participation aux groupes restait très importante. Cette année-là, les sujets étudiés étaient « Ensembles, relations, groupes ».

Les groupes fonctionnèrent jusqu'en 1968. Ils étudièrent successivement les sujets correspondant aux matières des nouveaux programmes, notamment dès 1962 les nouveaux cours de géométrie, affine puis métrique. Certains groupes proposaient aux participants deux cycles de formation dont un à l'intention des débutants. Pour l'ensemble des activités des Groupes de Travail du CBPM, on a cité le chiffre de 12000 heures de cours. Et environ 3000 enseignants auraient été impliqués. Ces chiffres sont d'autant plus impressionnants que les participants aux cours étaient bénévoles, les animateurs aussi. Même leurs frais de déplacement n'étaient pas remboursés. On a assisté dans les Groupes de Travail du CBPM à un extraordinaire élan collectif en vue d'augmenter le savoir mathématique des participants et d'en faire bénéficier les élèves du secondaire.

De quelle documentation disposaient les professeurs qui assuraient l'enseignement expérimental dans les écoles ? Pour l'essentiel, outre les deux revues *Mathematica & Paedagogia* et *Nico*, ils recevaient de l'information dans les groupes de travail du CBPM et lors des Journées d'Arlon. De plus, Papy publia énormément. En 1963 paraît le premier volume de la série des « MM » : Mathématique Moderne 1 (MM1) est conçu comme manuel pour la classe de 12 ans, MM2 contient la géométrie affine plane et les nombres réels, MM3 est intitulé « Voici Euclide ». Ces ouvrages ont eu à l'époque un grand retentissement. MM1 en particulier représentait à sa parution en 1963 une révolution dans le monde de l'édition scolaire. L'emploi à profusion de couleurs, la mise en page faisaient de ce manuel un outil nouveau, utile tant aux professeurs qu'aux élèves. Des textes ayant cette qualité de présentation n'ont plus jamais été publiés depuis. Question de coût sans doute...

De 1959 à 1968 on assiste donc en matière de formation permanente à des activités importantes, sur base du bénévolat, et qui ne touchent que les enseignants qui le souhaitent. A partir du moment où les nouveaux programmes étaient généralisés, il convenait que TOUS les enseignants, volon-

taires ou non fussent impliqués. L'Etat tenta alors d'organiser en 1968–69 des activités obligatoires de formation permanente destinée aux professeurs de mathématique des écoles de l'Etat, soit une minorité. La technique retenue fut celle des cours par correspondance, accompagnés de quelques séances organisées régionalement. Le succès fut à tout le moins mitigé. Les enseignants qui avaient pris part volontairement aux Groupes de Travail du CBPM avaient déjà une formation non négligeable et pouvaient être choqués d'être mis sur le même pied que les autres. Et ceux qui n'avaient pas pris la peine de se mettre au courant dans les années antérieures figuraient souvent parmi les opposants irréductibles à la réforme. Au surplus, à partir du moment où la formation permanente était obligatoire, les syndicats revendiquèrent — très logiquement — qu'elle soit intégrée à la charge de cours. En mars 1969, les recyclages obligatoires officiels étaient suspendus. Certains inspecteurs continuèrent néanmoins d'organiser des recyclages (5 à 6 journées par an) jusqu'en 1978.

3. L'esprit de la réforme et sa mise en pratique

Quel était l'esprit de la réforme ? Les modifications à apporter aux cours de mathématique étaient de deux ordres : elles portaient sur le contenu et sur la méthodologie.

Les citations suivantes, extraites pour la plupart de [10], vont nous éclairer :

- Petit à petit, la recherche mathématique a mis en évidence des concepts unitaires et simplificateurs qui permettent de passer sous silence des résultats antérieurs fragmentaires et compliqués.
- Pour la plupart des mathématiciens professionnels vivants, les structures ont été dégagées, a posteriori, à partir d'une mathématique antérieure qu'elles illustraient. Dans la pédagogie moderne, on évite de les faire apparaître comme des sortes de luxes a posteriori, qui éclairent sans être indispensables.
- Si l'espace d'Euclide ([4]) a pu pendant longtemps servir de cadre à un exposé unifié de la mathématique de base, il n'en est plus ainsi aujourd'hui, et ce rôle peut être rempli maintenant par l'univers ensembliste. [7]

([4]) Dans [10], Papy utilise l'expression « l'espace physique idéalisé »

- La mathématique d'aujourd'hui est ensembliste et relationnelle, elle étudie plutôt les relations entre les objets que les objets eux-mêmes.
- La linéarisation des théories, c'est-à-dire la mise en évidence systématique des espaces vectoriels partout où ils se cachaient, est l'un des traits les plus caractéristiques de l'attachant visage de la mathématique d'aujourd'hui.
- Les concepts fondamentaux de la mathématique d'aujourd'hui se trouvent dans la connaissance commune des enfants, sous forme vague et imprécise.
- Le problème à résoudre consistait à présenter la mathématique de base élémentaire en une construction unitaire, par un exposé progressif, et accessible aux élèves auxquels il est destiné.
- La géométrie reste fondamentale dans la mathématique nouvelle mais l'enseignant peut aujourd'hui mathématiser valablement une gamme beaucoup plus variée de situations qui ont ainsi infiniment plus de chances d'intéresser les enfants.
- L'expérience a confirmé le rôle fondamental de la géométrie euclidienne plane, éclairée de manière nouvelle et reconstruite en mettant en évidence des structures fondamentales de la mathématique actuelle. Supports de la géométrie, plus fondamentales que la géométrie elle-même, ces structures resteront importantes dans toute la suite des études et cette genèse géométrique leur conservera un caractère intuitif, familier, inspirant.
- La structure vectorielle est beaucoup plus importante dans la mathématique d'aujourd'hui que la géométrie. Dans l'optique de notre enseignement, la géométrie plane sert de support et de motivation pour arriver à la structure de vectoriel. [9]
- Pour bien raisonner, il faut commencer par dire clairement ce qui est accepté, démarche qui se trouve dans la phase mathématisante de tout problème de mathématique appliquée. La méthode axiomatique utilisée est celle du physicien : dire ce que l'on accepte dans une situation réelle idéalisée et le dire peu à peu.
- On a suffisamment d'exemples pour esquisser une toute petite théorie du calcul dans un groupe quelconque. Des exercices choisis doivent convaincre les élèves que la possession de ce concept les rend plus puissants et leur permet de résoudre des problèmes qui les décourageaient auparavant.
- L'introduction du vectoriel ne peut pas être un point final. La machine acquise, il faut l'utiliser, la faire fonctionner, convaincre les élèves que grâce à elle, ils sont plus forts qu'auparavant.

- Similitudes directes, nombres complexes et trigonométrie font l'objet d'une seule théorie unifiée qui évite les redites sous-jacentes aux exposés traditionnels.
- Notre enseignement de l'arithmétique est considérablement simplifié par l'utilisation des grandes structures, notamment celle du groupe additif des entiers rationnels. Inversement, le développement de cet enseignement a permis de dégager certaines structures : treillis, anneaux et champs résiduels.
- La combinatoire est une matière fertile en **problèmes** aux réponses souvent si surprenantes aux yeux des élèves.
- On s'inspire de la pédagogie des situations de Caleb Gattegno. Elle consiste à présenter aux élèves des situations choisies de manière telle que par leurs réactions spontanées, ils évoluent naturellement vers tel ou tel concept important.
- On habitue d'emblée les élèves à une démarche essentielle dans les applications : la mathématisation des situations.

Ces citations sont longues. Elles nous permettent de nous limiter à une synthèse en quelques mots de la philosophie de la réforme inspirée par Papy.

Sur le plan du contenu, il s'agit de reconstruire un exposé rigoureux de mathématique élémentaire mettant en évidence les grandes structures. Les élèves auraient ainsi à leur disposition les outils permettant l'accès à n'importe quelle théorie mathématique existante ou à venir.

En examinant de près les programmes du CBPM, on constate immédiatement que la structure qui reçoit le plus d'attention est celle d'espace vectoriel. L'enseignement de la géométrie est conçu pour permettre d'une part sa mise en place rapide et d'autre part son exploitation.

En classe de cinquième, la géométrie affine est séparée de la géométrie métrique. Elle permet tout à la fois de construire le corps des nombres réels et d'accéder à la structure d'espace vectoriel, le premier exemple rencontré étant l'espace vectoriel des translations du plan affine.

En quatrième, la distance et le produit scalaire sont définis de façon géométrique. Mais une fois établies les propriétés algébriques du produit scalaire, la géométrie métrique des figures n'est plus qu'une suite d'exercices simples d'algèbre. Quant aux isométries du plan, c'est surtout la structure de leur groupe qui est étudiée.

Il convient de dire ici que le cours de géométrie mis au point par Papy, s'inspirant de Artin, Choquet, Bouligand,...était sans conteste du point de

vue mathématique une remarquable construction, tout à fait rigoureuse, très élégante, très économique, mettant en évidence les résultats essentiels. Encore maintenant, nous en recommandons vivement l'étude à tout professeur de géométrie plane. Mais nous pensons, *a posteriori*, que ce cours s'éloignait par trop de la perception géométrique intuitive des enfants.

D'une part, le cours était structuré très linéairement. Peu de spirales dans cet enseignement. Peu de retours à une notion déjà rencontrée permettant tout à la fois de rafraîchir la mémoire et de profiter de la maturation de l'élève pour projeter un éclairage nouveau sur le sujet. Les résultats énoncés sont supposés d'emblée assimilés définitivement. L'axiomatisation est globale. L'apprentissage de la démonstration n'en est pas nécessairement facilité.

D'autre part, la séparation entre géométrie affine et géométrie métrique a pour but de faciliter la mise en place du vectoriel. Mais elle ne correspond pour l'élève à aucune nécessité. Devoir attendre la classe de quatrième pour pouvoir mesurer une longueur ou un angle est anormal. Pour Papy, les axiomes de la géométrie plane ne sont que des mathématisations d'observations de nature physique. Il n'y aurait eu aucune difficulté à incorporer la distance et certaines de ses propriétés dans le système de notions primitives et d'axiomes, au lieu de la définir à l'aide d'isométries. Quant à la démonstration de certaines propriétés métriques à partir du produit scalaire, elle ne provoque plus aucun raisonnement géométrique. Par exemple, où est la géométrie, quand on ramène le théorème de Pythagore à la constatation que $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$ si $\vec{u} \perp \vec{v}$?

D'après une des citations ci-dessus, la genèse géométrique devait conserver aux structures un caractère familier, intuitif et inspirant. Nous pensons actuellement que les programmes « modernes » de géométrie du premier cycle ne permettaient pas à l'élève de se forger une intuition géométrique suffisante. De sorte que non seulement la géométrie n'était pas fermement établie, mais de plus l'assimilation de la structure d'espace vectoriel elle-même se trouvait compromise.

Par ailleurs, la construction du corps des nombres réels dans la foulée de la géométrie affine, s'est vite révélée difficile à faire comprendre aux élèves. C'est tellement vrai que dès 1969, le programme en vigueur dans les écoles catholiques ne la prévoyait plus en cinquième année, ce qui valut aux auteurs de ce programme une volée de bois vert de la part de Papy dans sa revue *Nico*. C'était une pièce essentielle de l'édifice qui était mise en question. Après quelques années, cette construction était abandonnée dans

la plupart des classes. Comme elle utilisait la numération binaire, une des principales motivations de l'étude de celle-ci disparaissait également.

Il est bien connu que les expériences pédagogiques ont plutôt tendance à réussir. Elles sont menées par des enseignants choisis souvent parmi les meilleurs, animés du feu sacré, convaincus de la valeur de leurs idées. En toute honnêteté, ils peuvent arriver à des résultats impressionnants, justifiant que l'on entreprenne de généraliser les nouveaux enseignements. A ce moment, les choses risquent de se gâter. Lorsqu'elles sont reprises par des enseignants moyens, qui n'ont pas nécessairement bien assimilé les principes nouveaux, et dont certains ne sont pas a priori convaincus de l'intérêt de ce qu'on leur demande de faire, ou qui sont convaincus du contraire, les meilleures idées risquent de subir une dégradation qui leur enlève beaucoup de leur efficacité. L'esprit de la réforme peut être complètement biaisé. L'importance d'un recyclage efficace ne pourra donc jamais être surestimée.

Dans le cas de la réforme des « maths modernes » le recyclage avait porté essentiellement sur le contenu. C'était normal. Pour discuter de méthodologie, il faut d'abord être à l'aise sur le fond. Les citations ci-dessus montrent que Papy était conscient de la nécessité de modifier également la pédagogie appliquée. Il préconisait de placer les élèves devant des situations à mathématiser, cette mathématisation les amenant à introduire les structures importantes. En même temps, les élèves comprendraient que la considération de ces structures leur permettait de résoudre des problèmes qu'ils ne dominaient pas auparavant, que ces structures étaient donc utiles.

Cette partie du message de Papy est sans doute celle qui est la moins bien passée auprès des enseignants. Papy lui-même a-t-il apporté autant d'ardeur à populariser ses idées sur la pédagogie des situations qu'il en a apporté à diffuser les nouveaux contenus ? Peut-être la tâche était-elle trop lourde pour un seul homme, même assisté d'une équipe solide de collaborateurs ! Et les circonstances ont fait qu'en Belgique la réforme des « maths modernes » s'est polarisée sur les propos et actes d'un seul homme.

Ce sont de nombreux exemples de situations permettant de nourrir de sens les nouvelles matières qu'il aurait fallu produire et mettre à la disposition de tous, y compris des auteurs de manuels. De ce point de vue, le travail de préparation de la réforme n'a peut-être pas été suffisant.

Nous pensons aussi que les meilleures situations sont à rechercher non du côté des structures elles-mêmes, mais plutôt du côté des *morphismes de ces structures*. Les espaces vectoriels constituent un cadre adéquat

pour l'étude de la linéarité, c'est-à-dire d'abord des applications lineaires. Et les espaces topologiques servent principalement à étudier la continuité. Papy écrivait aussi que *la mathématique étudie plutôt les relations entre les objets que les objets eux-mêmes*. D'un point de vue historique, il est d'ailleurs à noter que les morphismes des structures fondamentales ont le plus souvent été définis avant les structures elles-mêmes.

Enfin, certains sujets ont donné l'impression d'être étudiés pour eux-mêmes. C'était (malheureusement) le cas des isométries. Parmi les traditionnelles « applications » de géométrie, beaucoup pouvaient être résolues à l'aide d'isométries. On aurait ainsi pu mesurer la puissance des outils nouveaux. On s'est « contenté » de composer et décomposer des isométries. A l'heure actuelle, bien des professeurs ne sont (malheureusement) pas encore convaincus de l'intérêt des transformations géométriques.

Les « maths modernes » étant enseignées avec les mêmes méthodes que les « maths traditionnelles », par des professeurs dont beaucoup n'avaient pas bien assimilé la philosophie de la réforme, la généralisation des nouveaux programmes devait fatalement donner lieu à des excès et des erreurs, venant s'ajouter aux défauts des programmes eux-mêmes. Les auteurs des programmes définitifs avaient-ils eux-mêmes assimilé la philosophie de Papy, et la partageaient-ils ? Nous avons signalé le fait que Papy n'a pas été associé à la rédaction des programmes définitifs.

Dans le premier cycle, il n'y eut sans doute pas trop d'excès de formalisme car les moyens graphiques préconisés dès le départ s'opposaient à ce genre de perversion. Au second cycle, il y eut parfois un excès d'algébrisation. Ainsi un manuel pour la classe de deuxième, définissait un point du plan comme un triple de réels donné à un facteur près et écrit sous forme d'une colonne, cependant qu'une droite était un triple de réels définis à un facteur près et écrit sous forme d'une ligne. Mais il y eut surtout des classes où l'on mettait tous les sujets sur le même pied, où l'on accordait donc trop d'importance à des sujets sans intérêt, où on ne montrait ni l'utilité, ni la beauté des mathématiques.

Certains défauts des programmes devinrent évidents, surtout au premier cycle. Alors que, paradoxalement, c'étaient les programmes de ce cycle qui avaient été le plus expérimentés. Progressivement apparut donc la nécessité de « réformer la réforme ». Un groupe animé notamment par Willy Servais, Jean Nachtergaele, Gaston Dethier se réunit d'abord informellement. Puis une nouvelle Commission des Programmes fut officiellement constituée et

une nouvelle réforme mise en chantier. L'inspecteur Roger Bex présente cette nouvelle réforme comme suit dans [2]

> *Une rapide lecture de l'énoncé des matières figurant dans ces nouveaux programmes pour le premier degré laisse penser que peu de choses ont changé.*
>
> *Une analyse plus attentive décèle des prises de position très nettes en ce qui concerne les intentions pédagogiques.*
>
> *Il importe que la prise de conscience des notions et des propriétés résulte d'une véritable activité de l'élève.*
>
> *C'est à partir de la réflexion sur ces activités qu'on élaborera des définitions et énoncera des propriétés.*
>
> *...résolution de problèmes, calcul, transformations d'expressions, observations d'objets géométriques, analyse de situations concrètes et de situations mathématiques...*
>
> *On veut donc que l'élève soit mis en présence de situations à débrouiller, à organiser, et qu'il réagisse à propos des problèmes qu'elles suscitent.*
>
> *Une telle conception ne s'accommode guère d'une construction linéaire, où notions et propriétés s'agencent en une chaîne déductive, selon une rigueur à laquelle bien peu d'enfants de 12 ou 13 ans sont sensibles.*
>
> *La modélisation constitue un aspect essentiel du travail sur les situations ...Vient le moment où l'on découvre par déduction des propriétés dont la vérification sur l'objet peut être difficile et peu convaincante. Le modèle s'est substitué à la situation.*
>
> *La plupart des options prises vont dans le sens d'une sérieuse réduction des développements théoriques en faveur d'une mise en œuvre plus fréquente et plus profonde des notions et des propriétés dans des applications.*
>
> *C'est en géométrie qu'on peut constater un changement d'orientation plus marqué. Une première option est d'introduire une approche intuitive de l'espace à trois dimensions dès la première année. On vise ainsi à fournir un vocabulaire précis et à assurer une connaissance expérimentale et peut-être déjà conceptuelle des principaux ob-*

jets géométriques et des positions relatives qu'ils peuvent occuper les uns par rapport aux autres.

Il n'est plus demandé d'étudier les transformations pour elles-mêmes, de les composer, de les organiser en vue de construire une théorie des groupes de transformations. La volonté est plutôt de mettre en évidence les invariants, et de les utiliser à la découverte et à la démonstration de propriétés de figures.

On le voit, cette réforme de 1978 met l'accent sur la méthodologie, et présente certaines modifications de contenu, principalement en géométrie, comme résultant de contraintes méthodologiques.

Cette nouvelle réforme a-t-elle corrigé les erreurs de la première ? Les résultats sont-ils à présent satisfaisants ? Reconnaissons que ni les programmes « modernes » de 1968, ni ceux issus de la nouvelle réforme de 1978 n'ont fait l'objet d'une évaluation scientifique. Nous serions donc bien hardis de répondre positivement ! Reconnaissons aussi que personne ne peut prétendre disposer d'une méthode miracle rendant la mathématique facile pour tous ! Nos connaissances en didactique mathématique sont tellement fragmentaires que bien du temps s'écoulera encore avant que nous ayons compris comment les enfants s'approprient la mathématique. Faut-il en attendant refuser toute adaptation des méthodes et moyens d'enseignement ? Et dès lors, ne sommes-nous pas souvent condamnés à tâtonner ?

De la réforme des « maths modernes », nous retiendrons d'abord qu'elle a fait prendre conscience à beaucoup de ce que les mathématiques constituent une science vivante. Qu'il n'est désormais plus possible d'enseigner la mathématique en ronronnant dans son petit coin, sans se poser de questions. Ensuite, nous ne pouvons plus ignorer que la mathématique est unitaire, que les structures et leurs symétries sont importantes, même si nous ne pouvons transposer systématiquement cette philosophie en un principe d'enseignement, sans tenir compte de la maturité mathématique des élèves à qui nous nous adressons. Non seulement une phase « math moderne » était inévitable dans l'enseignement des mathématiques, elle était même nécessaire, ne fût-ce que pour pouvoir la dépasser ! A nous de veiller à ce que ce dépassement ne se transforme pas en régression.

Bibliographie

[1] E. Artin, *Geometric algebra*, Interscience publishers, New York, (1957).

[2] R. Bex, *Pour une autre pédagogie de la mathématique au premier degré de l'enseignement secondaire*, Mathématique et Pédagogie, N°25, 5–10, (1980).

[3] L. Félix, *Essai sur l'histoire de la C.I.E.A.E.M.*, in Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur, Compte-rendus de la 37^{e}rencontre internationale de la C.I.E.A.E.M., Ed. State University of Utrecht, Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Centre, (OW & OC), (1985).

[4] Frédérique et Papy, avec la collaboration de D. Incolle, *L'enfant et les graphes*, Editions Didier (Bruxelles, Montréal, Paris), (1968).

[5] X. Hubaut, *Adaptation du programme de 3e latin-math. et moderne scientifique suivant les idées de Dubrovnik*, Mathematica & Paedagogia, N°21, 82–84, (1961).

[6] O.E.C.E, *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*, Bureau du personnel scientifique et technique de l'O.E.C.E.

[7] G. Papy, *Suggestions pour un nouveau programme de mathématique dans la classe de sixième*, Mathematica & Paedagogia, N°20, 20–29, (1961).

[8] G. Papy, *Mathématique moderne 1, 2, 3, 5, 6*, Editions Didier (Paris, Bruxelles, Montréal).

[9] G. Capiaux, A. Dearman, I. Dumrauf, F. Papy, B. Provencher, E. Van Vreckom et A. Vermandel, sous la direction de Papy, *Documentation pour l'enseignement du vectoriel euclidien plan*, (ARLON 7), C.B.P.M. et Ministère de l'Education Nationale et de la Culture, 1965.

[10] G. Papy, avec la collaboration de P. Burgraeve, R. Holvoet, F. Papy, A. Terfve, *ARLON 10*, C.B.P.M., 1968.

[11] *Le programme B des écoles normales gardiennes*, Mathematica & Paedagogia, N°16, 70–75, (1958–1959)

Actimath

- Un souffle nouveau en mathématique pour l'enseignement de transition
- Une idée-maîtresse : rendre l'élève **actif** tout au long de ses apprentissages mathématiques
- Une formule dynamique pour un cours structuré

Actimath 4 **: un manuel relié accompagné d'un cahier d'activités facultatif parfaitement adaptés au second degré.**

VAN IN
EDITIONS

Éditions **VAN IN** - Avenue Gustave Eiffel 8 1300 Wavre
Tél. : 010 45 55 30 - Fax : 010 45 23 51 - editions@vanin.be - www.vanin.be

Programmes linéaires

E. HEUCHAMPS,

Mathematica & Paedagogia n° 60 - 1973

La méthode graphique de résolution de problèmes de programmation linéaire n'est appliquable que si le nombre des variables ne dépasse pas 3 et si l'on suppose connues certaines notions élémentaires de géométrie analytique. Tout particulièrement, il importe de savoir que chaque contrainte définit un demi-espace et que l'ensemble des points satisfaisant à toutes les contraintes est l'intersection de tous les demi-espaces fermés déterminés par les inéquations non-strictes définissant le programme étudié.

> On fabrique deux produits pharmaceutiques A et B sur deux machines I et II. Pour fabriquer une livre du produit A, la machine I doit fonctionner pendant une heure et la machine II pendant deux heures un quart. Pour fabriquer une livre de B, I doit fonctionner pendant trois heures et II pendant trois quarts d'heure. les machines ne peuvent pas être utilisées pendant plus de douze heures par jour. Sur une livre de A, on gagne 100 F. et sur une livre de B, 150 F. Combien de livres de chaque espèce faut-il fabriquer par jour pour obtenir un bénéfice maximum ? Quel sera ce bénéfice ?

Soient x_1 le nombre de livres du produit A et x_2 le nombre de livres du produit B.

Contraintes vraies :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{9}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Contraintes de non-négativité :

$$x_1 \geqslant 0, \tag{2}$$

$$x_2 \geqslant 0. \tag{3}$$

Ce problème de « Programmation linéaire » fait partie d'un ensemble de deux articles publiés dans les n° 59 et 60 de *Mathematica & Paedagogia*. Il répondait à l'introduction de cette matière dans les programmes de l'époque.

Objectif (à maximaliser) :

$$f = \begin{pmatrix} 100 & 150 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Dans un plan rapporté à des axes Ox_1, Ox_2, on trace les droites

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 12 \\ \frac{9}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 &= 12 \end{aligned}$$

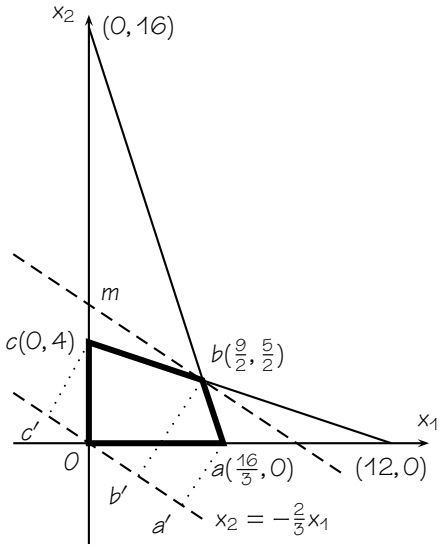
On détermine les régions du plan satisfaisant aux relations (1) à (3). Le domaine des solutions est le quadrangle $Oabc$, frontières comprises.

1re méthode.

On sait que l'optimum a lieu pour les coordonnées de l'un des sommets du quadrangle. Ces coordonnées sont pour $O(0,0)$, pour $a(\frac{16}{3},0)$, pour $b(\frac{9}{2},\frac{5}{2})$, pour $c(0,4)$.

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f\left(\frac{16}{3},0\right) &= 533\frac{1}{3} \\ f\left(\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right) &= 825 \\ f(0,4) &= 600. \end{aligned}$$

Il faut donc fabriquer $\frac{9}{2}$ livres du produit A et $\frac{5}{2}$ livres du produit B. Le bénéfice maximum est de 825 F.



2e méthode.

Si l'on considère f comme un paramètre variable, l'équation (4) est celle d'un faisceau de droites parallèles à

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1.$$

L'ordonnée à l'origine étant $\frac{1}{150}f$, le maximum en sera atteint en même temps que celui de f.

Chercher le maximum de f revient donc graphiquement à trouver l'ordonnée à l'origine la plus grande possible pour les droites de coefficient angulaire $-\frac{2}{3}$ passant par un point au moins du quadrangle convexe $Oabc$, frontières comprises. On « voit » sur le graphe que le maximum est atteint pour la droite du faisceau qui passe par b. L'équation de cette droite est

$$4x_1 + 6x_2 - 33 = 0$$

et son ordonnée à l'origine $\frac{1}{150}f = \frac{11}{2}$; f vaut donc 825.

3e méthode.

On vient de voir que les droites du faisceau des parallèles à $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$ ont une ordonnée à l'origine variable et que l'ordonnée à l'origine maximale est Om : elle correspond à la droite du faisceau passant par b.

D'autre part, si $|b'b|$ représente la distance de b à $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$, $|b'b|$ est lié à Om par la relation

$$|b'b| = |Om| \cdot \cos(Ob', Ox_1)$$

dans laquelle l'angle (Ob', Ox_1) est constant.

Dès lors, $|Om|$ est maximum en même temps que $|b'b|$ et l'optimum cherché est atteint pour le point du domaine des solutions le plus éloigné de $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$.

Il suffit donc de considérer les distances $|a'a|$, $|b'b|$ et $|c'c|$, celle de O à la droite étant évidemment nulle.

$$\begin{aligned} |a'a| &= \frac{32}{3} \cdot \sqrt{13}, \\ |b'b| &= \frac{32}{3} \cdot \sqrt{13}, \\ |c'c| &= \sqrt{\frac{12}{13}} \end{aligned}$$

Les coordonnées de b fournissent la solution optimale.

Résolution d'équation du second degré

CL. VILLERS,

Mathematique et Pédagogie n° 11-12 - 1977

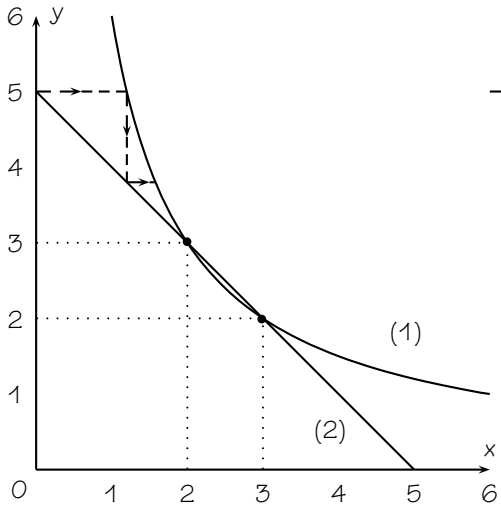
Soit à résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$. Il faut donc trouver x et y tels que

$$\begin{cases} xy = 6 & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

Or (1) caractérise une courbe (hyperbole) et (2) caractérise une droite.

Les solutions de l'équation sont les coordonnées des points éventuellement communs à la courbe et à la droite. On va approcher ces valeurs en tirant y de (2) et x de (1), c'est-à-dire en utilisant les relations

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ x = \frac{6}{y} \end{cases}$$



$x = \frac{6}{y}$	$y = 5 - x$
$x_0 = 0$	5
1,2	3,8
1,57	

Cette méthode s'applique facilement avec une calculatrice programmable à toute équation du second degré à termes indépendants non nuls.

Cet extrait vient d'un des nombreux articles qui composaient un double numéro spécial consacré à la découverte des M.C. (minicalculatrices).

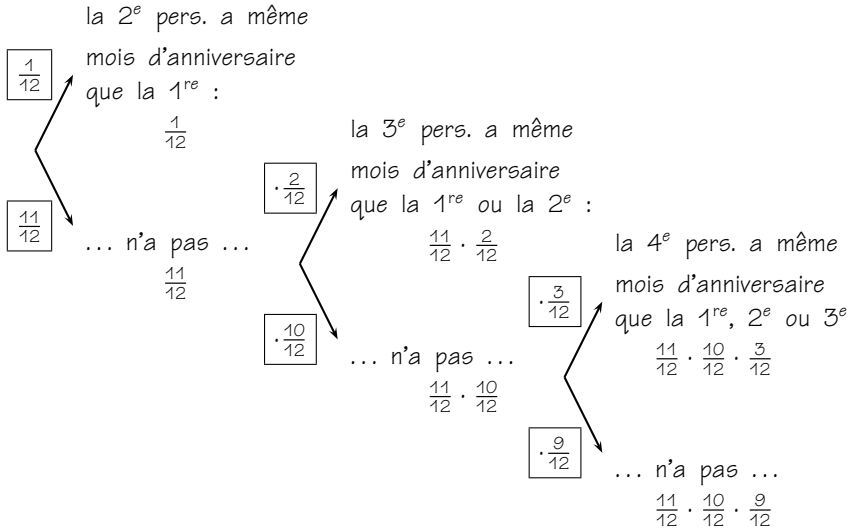
L'arbre, outil pédagogique en calcul des probabilités

A. VANDER LINDEN,

Mathematique et Pédagogie n° 95 - 1980

> Quelle est la probabilité pour que parmi quatre personnes prises au hasard il y en ait deux (au moins) ayant le même mois d'anniversaire ? On suppose en première approximation que la probabilité d'être né tel ou tel mois vaut $\frac{1}{12}$).

On peut imaginer un arbre ayant 12^4 terminaisons (d'ailleurs toutes équiprobables d'après notre hyothèse) et faire le compte des terminaisons qui conviennent. Il est plus astucieux de penser à déterminer la probabilité de l'événement complémentaire. Si l'on remarque que le mois de naissance de la première personne n'a pas d'importance, on peut plutôt construire l'arbre

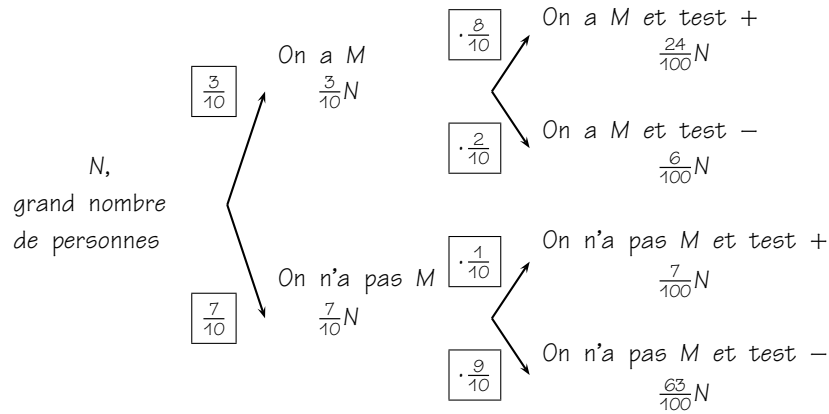


L'objectif de cet article était de montrer que l'usage de diagrammes en arbre permet de clarifier, de comprendre et de résoudre beaucoup de questions de calcul de probabilités et d'analyse combinatoire.

La probabilité cherchée est $1 - \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} = 0,4271$

> Supposons que la probabilité pour qu'une personne venant en consultation dans une clinique soit atteinte d'une maladie M donnée soit $\frac{3}{10}$. D'autre part, un certain test a une probabilité valant $\frac{8}{10}$ d'être positif lorsqu'on sait qu'une personne est atteinte de cette maladie, et $\frac{1}{10}$ lorsqu'on sait qu'elle n'est pas atteinte. Supposons qu'une personne prise au hasard se soumette à la consultation et fournisse un résultat positif au test. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit atteinte de la maladie M ?

Représentons les différents cas possibles sous forme d'arbre.



Bien comprendre la question ne peut conduire qu'à la réponse suivante : *si on se limite aux personnes ayant un teste positif et si tout se passe suivant les probabilités,* alors

$$\text{sur } \frac{24}{100}N + \frac{7}{100}N \text{ personnes, il y en aura } \frac{24}{100}N \text{ ayant la maladie } M$$

et le rapport de ce nombre-ci à celui-là fournit la probabilité demandée. L'arbre conduit aisément à la réponse et la connaissance préalable de la formule de Bayes n'est pas indispensable.

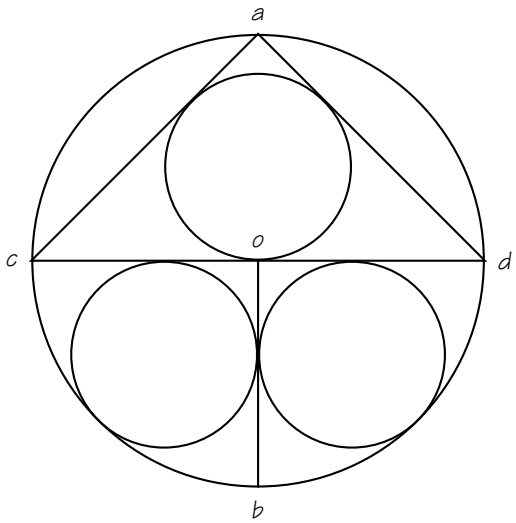
Cercles congruents

G. DELANDE,

Mathematique et Pédagogie n° 32 - 1981

Dans un cercle C de centre o, soient $[a,b]$ et $[cd]$ deux diamètres perpendiculaires. Prouver que les trois cercles suivants ont le même rayon :

- le cercle inscrit dans le triangle acd ;
- le cercle tangent à $[ob]$, à $[oc]$ et au cercle C ;
- le cercle tangent à $[ob]$, à $[od]$ et au cercle C.

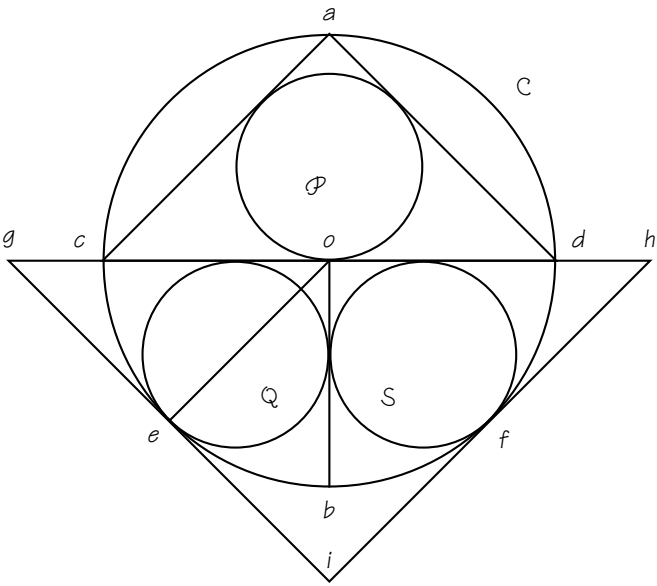


Remarques préliminaires.

- Les trois cercles sont notés respectivement $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$.
- Il suffit de démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont congruents, en raison du fait que $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques par rapport à la droite ob.

Cet article est un commentaire sur une question de la finale de la mini-olympiade mathématique de 1981. Seulement deux candidats sur trente-et-un avaient fourni une réponse correcte.

1. Usage de triangles congruents



Le triangle *acd* est rectangle et isocèle (la hauteur [*oa*] étant une médiane).

Tracer les tangentes au cercle C aux points *e* et *f*. Le triangle rectangle *iog* est isocèle car [*oe*] est bissectrice et hauteur; résultat analogue pour le triangle *ioh*.

Les trois triangles condidérés sont congruents car rectangles, isocèles et de hauteurs égales au rayon de C. Les cercles qui leur sont inscrits sont donc congruents.

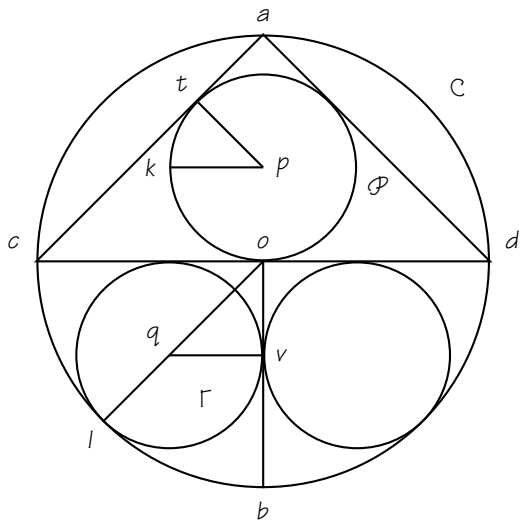
Remarque : Voici une variante qui conduit également à la congruence des triangles *acd* et *iog*.

Notons *r* le rayon du cercle C. Le triangle *ioe* est isocèle car ses angles à la base sont égaux à 45°. D'où

$$||ei|| = ||oe|| = r \qquad \text{et} \qquad ||ad|| = ||oi|| = \sqrt{2r^2}$$

Dès lors les triangles *aod* et *ioe* sont congruents comme formés de côtés congruents deux à deux. La congruence des triangles *aod* et *iog* s'en déduit directement.

2. Emploi de translations



Tracer le rayon $[pk]$ parallèle à cd ; noter p et ρ le centre et le rayon du cercle $\mathcal{P}$. Faire subir à $\mathcal{P}$ deux translations successives, soit la composée

$$t_{\overrightarrow{pk}} \circ t_{\overrightarrow{po}}.$$

On obtient un cercle Γ de centre q, de rayon ρ, tangent aux droites ob et oc.

Il reste à démontrer que Γ n'est autre que le cercle Q, c'est-à-dire qu'il est également tangent à C au point e.

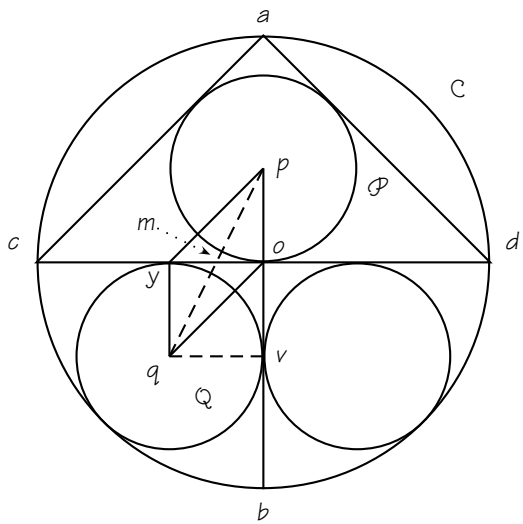
Il suffit pour cela de montrer que $||qe|| = \rho$. Cela découle de la congruence des triangles apt et ovq, car alors

$$||oe|| = ||oa|| = r \qquad \text{et} \qquad ||oq|| = ||pa||$$

entraînent $||qe|| = ||op|| = \rho$.

Remarque : Ce procédé est relativement simple et il met peu d'éléments en jeu.

3. Essai de symétries centrales



On démontre que $opyq$ est un parallélogramme.

Dès lors, la symétrie centrale de centre m applique $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{Q}$ (où $\{m\} = pq \cap oy$).

La démonstration s'achève en considérant la symétrie centrale de centre v.

Remarque : À première vue, ce procédé paraît séduisant. Et cependant, le recours aux symétries centrales est superflu. Car si $oypq$ est un parallélogramme, alors tout est démontré puisque

$$||qy|| = ||op||.$$

D'autre part, la stratégie déployée pour découvrir que $opyq$ est un parallélogramme est assez laborieuse.

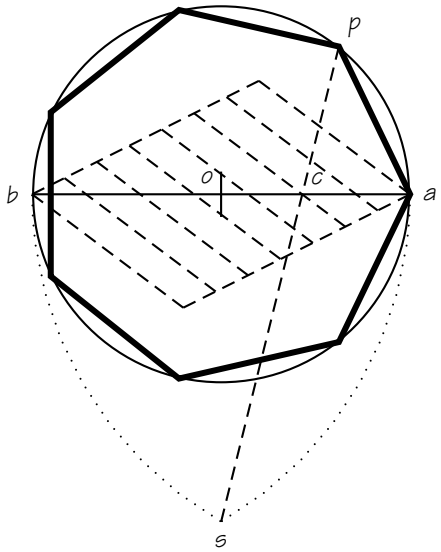
C'est dire qu'en fin de compte, le recours aux symétries centrales ne facilite pas les choses. Mais il permet de découvrir une propriété remarquable qu'il est agréable de mettre en évidence.

Construction approchée du n-gone

M. VERLE,

Mathematique et Pédagogie n° 36 - 1982

Prenons comme exemple introductif le problème de la division d'un cercle de centre o en 7 parties égales. Commençons par tracer un diamètre, soit ab. Divisons le segment $[ab]$ en 7 parties égales et notons c le deuxième point de subdivision compté à partir de a. Déterminons ensuite le troisième sommet s d'un triangle équilatéral dont les deux autres sommets sont a et b. La droite sc rencontre le cercle en un point p situé au delà du diamètre. Le segment $[ap]$ ainsi construit est un des côtés de l'heptagone.



1. Un peu de calcul

Nous savons que la construction décrite n'est qu'approximative ([1]). Mais alors, quel angle venons-nous de construire ? C'est ce que nous allons maintenant déterminer.

De toute évidence le choix d'un cercle de rayon unité ne nuit pas à la généralité. Si nous prenons alors les diamètres ab et so comme axes coordonnés, nous obtenons la figure de la page 100.

([1]) Nous savons depuis les travaux de Gauss que la condition nécessaire et suffisante pour que la construction exacte d'un polygone régulier à n côtés soit possible avec la règle et le compas est que $n = 2^r p_1 p_2 \dots p_s$ où r, s sont des naturels et $p_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ sont des nombres premiers distincts de Fermat. L'article s'intéressait à une « construction universelle » et à la précision de celle-ci.

La droite sc a pour équation

$$y = \sqrt{3}\left(\frac{n}{n-4}x - 1\right) \tag{1}$$

Les abscisses des points d'intersection de sc avec le cercle s'obtiennent en résolvant le système formé de l'équation (1) et de l'équation

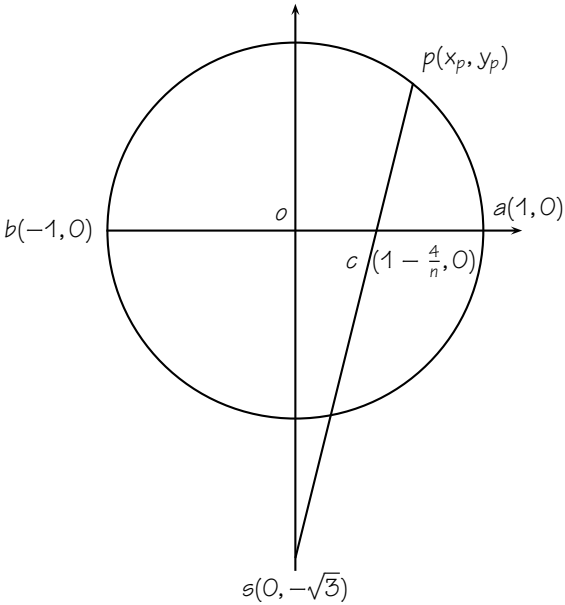
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

En substituant (1) dans (2), il vient

$$4(n^2 - 2n + 4)x^2 - 6n(n-4)x + 2(n-4)^2 = 0$$

dont les solutions sont

$$x_{1,2} = \frac{n-4}{4(n^2 - 2n + 4)}\left(3n \pm \sqrt{n^2 + 16n - 32}\right) \tag{3}$$



Ainsi que le montre la figure, l'abscisse x_p du point p correspond à la plus grande des solutions. On retiendra donc celle qui possède une signe + devant le radical.

$$x_{1,2} = \frac{n-4}{4(n^2 - 2n + 4)}(3n \pm \sqrt{\Delta}) \tag{4}$$

avec

$$\Delta = n^2 + 16n - 32$$

Si on porte cette valeur dans (1), on obtient l'ordonnée du point p

$$y_p = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{n^2 - n(8+\sqrt{\Delta}) + 16}{n^2 - 2n + 4}\right] \tag{5}$$

Appelons $\tilde{\alpha}$ l'angle $\widehat{aop}$. Il vient après simplifications

$$\tan\tilde{\alpha} = \frac{y_p}{x_p} = -\sqrt{3}\left[\frac{n^2 - n(8+\sqrt{\Delta}) + 16}{(n-4)(3n+\sqrt{\Delta})}\right]$$

Si on rend le dénominateur rationnel, l'expression se réduit à :

$$\tan\tilde{\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{n - \sqrt{n^2 + 16n - 32}}{n-4}\right] \tag{6}$$

2. Précision de la méthode

La formule (6), jointe à la condition $0 \leqslant \tilde{\alpha} \leqslant 180°$, permet de déterminer facilement $\tilde{\alpha}$, qui apparaît comme une approximation de la valeur exacte

$$\alpha = \frac{360°}{n}.$$

On a calculé ces deux valeurs pour $3 \leqslant n \leqslant 20$

n	$\tilde{\alpha}$	α
3	120°	120°
4	90°	90°
5	71°57'12"	72°
6	60°	60°
7	51°31'06"	51°25'43"
8	45°11'15"	45°
9	40°16'40"	40°
10	36°21'22"	36°
11	33°08'53"	32°43'38"

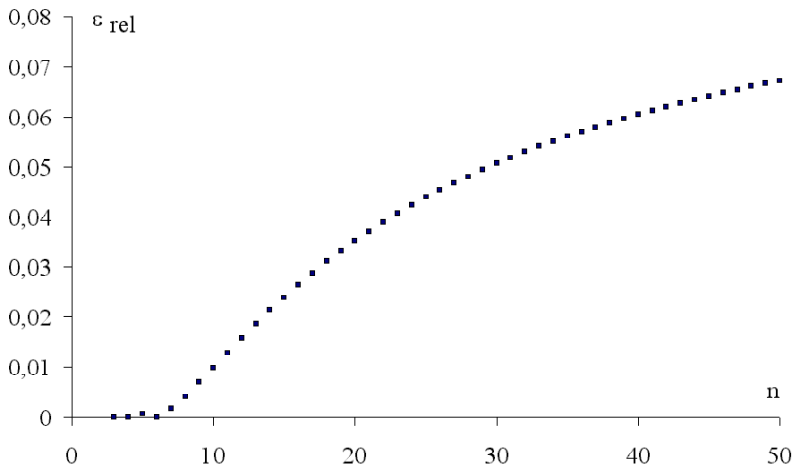
n	$\tilde{\alpha}$	α
12	30°28' 24"	30°
13	28°12'29"	27°41'32"
14	26°15'48"	25°42'51"
15	24°34'31"	24°
16	23°05'43"	22°30'
17	21°47'12"	21°10'35"
18	20°37'17"	20°
19	19°34'35"	18°56'51"
20	18°38'02"	18°

On remarque que la construction est exacte pour $n = 3, 4$ et 6. Sinon l'erreur commise est inférieure à $\frac{1}{2}$ degré pour $n \leqslant 12$ et ne dépasse pas les $\frac{2}{3}$ de degré pour $n \leqslant 20$.

Mais il est plus intéressant de calculer l'erreur relative

$$\epsilon_{\text{rel}} = \left|\frac{\widetilde{\alpha} - \alpha}{\alpha}\right| = \left|\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha} - 1\right|$$

qui est également l'erreur relative sur la longueur de l'arc intercepté par les demi-droites définissant α.



Le graphe de ϵ_{rel} laisse apparaître une croissance de plus en plus lente de l'erreur relative. On peut donc espérer qu'elle soit bornée supérieurement. Afin de déterminer une telle borne, calculons

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \epsilon_{\text{rel}}$$

Par définition,

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\arctan\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 16n - 32}}{n - 4}\right)\right]}{\frac{2\pi}{n}} - 1 \right| \tag{7}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n-\sqrt{n^2+16n-32}}{n-4}}{\frac{1}{n}}\right)=-8,$$

l'argument de l'arc tangente se comporte comme $\frac{1}{n}$.

D'autre part, nous avons

$$\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \cdots$$

de sorte que seul le premier terme du développement de l'arc tangente dans (7) n'est pas négligeable devant $\frac{1}{n}$.

Par conséquent

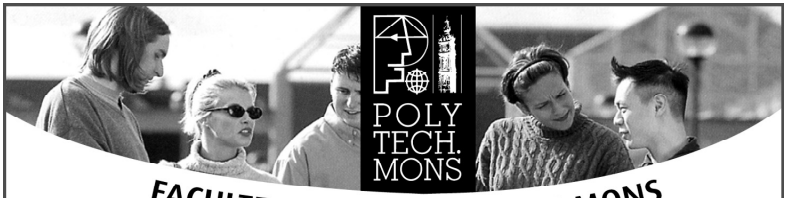
$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2\pi}\times\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{n-\sqrt{n^2+16n-32}}{n-4}\right)\right]-1\right]\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi}-1\\ &< 0.103\end{aligned}$$

et donc

$$\epsilon_{\text{rel}} < 10,3\%$$

Au delà de l'intérêt graphique de la question, l'étude de la construction permet d'illustrer plusieurs rubriques des programmes du secondaire : géométrie analytique, calcul d'erreur, calcul de limite.

> Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer.
>
> Francis Bacon



FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS

- ARCHITECTURE
- CHIMIE
- ELECTRICITE
- INFORMATIQUE ET GESTION
- MECANIQUE
- MINES-GEOLOGIE
- SCIENCE DES MATERIAUX

*La Polytech, institution universitaire à taille humaine, intégrée dans sa ville et dans sa région. Venez y acquérir la formation polyvalente et irremplaçable d'**Ingénieur Civil**.*

Inscriptions

1ère session :
jusqu'au 26/06

2ème session :
- **le 11/07** de 14 à 16h
- **du 14/07 au 28/08**

du lundi au vendredi
de 8 à 12h

Inscriptions au
Secrétariat des Etudes
9, rue de Houdain • 7000 MONS
Tél.: 065/37 40 30 à 32
Fax: 065/37 40 34
secretu@fpms.ac.be
http://www.fpms.ac.be

Mathématique et phénomènes de la vie courante.

G. DELANDE,

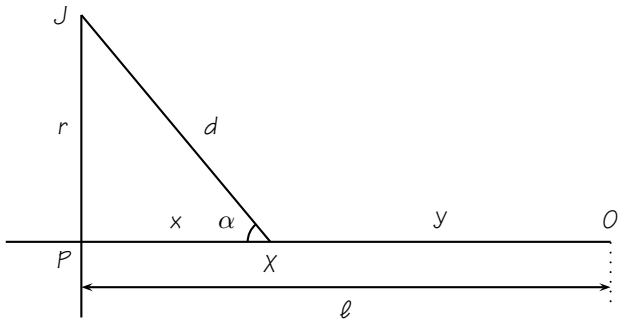
Mathematique et Pédagogie n° 50 - 1985

1. D'une randonnée dans le désert à la minimalisation d'une fonction

J est la position d'une jeep dans un désert de sable; la droite *PO* est une piste; le point *O* représente une oasis. *J* doit rejoindre cette oasis en réduisant au maximum sa consommation d'essence. On suppose que lorsqu'elle roule sur la piste *PO*, la jeep consomme (en moyenne par km) deux fois moins d'essence qu'en tout autre endroit du désert.

On sait que $JP \perp PO$ et on connaît les distances de *J* à la piste et de *P* à l'oasis, soit (en km) $\|JP\| = r$ et $\|PO\| = \ell$.

Le conducteur de la voiture doit donc établir son *plan de route* en tenant compte des données précédentes.



Ce problème fait intervenir de la géométrie, de la trigonométrie et des calculs de dérivées.

L'auteur se proposait de montrer comment on peut tirer parti de supports empruntés à l'environnement et aux sciences en vue d'élaborer et de développer une théorie mathématique. Nous n'avons repris ici que quelques uns des modèles choisis.

Nous résumons les opérations en notant respectivement γ_1 et γ_2 la consommation d'essence (litres par km) dans les sables et sur la piste; par hypothèse : $\gamma_2 = 2\gamma_1$.

Désignons par X le point où la jeep abordera la piste; posons $||PX|| = x$ et $||XO|| = y$.

Tous ces éléments sont à déterminer; mais il est sans doute plus commode de choisir comme inconnue la mesure de l'angle $\widehat{JXP}$, soit α.

$$||JX|| = d = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

Consomation totale de carburant :

$$C = \gamma_2 d + \gamma_1 y = 2\gamma_1 d + \gamma_1(\ell - x).$$

Sachant que $x = d\cos\alpha$,

$$C = \gamma_1\ell + \gamma_1\frac{r}{\sin\alpha}(2 - \cos\alpha). \qquad (1)$$

Telle est la loi mathématique traduisant la consommation d'essence.

Il convient de *minimiser* la fonction C :

$$\frac{dC}{d\alpha} = \gamma_1 r\frac{1 - 2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

$$\frac{dC}{d\alpha} = 0 \qquad \text{pour} \qquad \alpha = 60^\circ.$$

$$\frac{d^2C}{d\alpha^2} = \gamma_1\frac{2 - 2\cos\alpha(1 - \cos\alpha)}{\sin^2\alpha} > 0.$$

C est donc minimum pour $\alpha = 60^\circ$.

Remarque : certains étudiants sont tentés de gagner la piste le plus rapidement possible, croyant ainsi réduire la consommation; ils effectuent donc le parcours JPO et consomment

$$C^* = 2\gamma_1 r + \gamma_1\ell.$$

Or, en calculant (1) pour $\alpha = 60^\circ$, on trouve

$$C_{\min} = \gamma_1\ell + \gamma_1 r\sqrt{3}.$$

D'où $C^* > C_{\min}$ ... heureusement pour nos calculs!

2. De l'équilibrage d'une réaction chimique à la création d'un espace vectoriel

Les espaces *vectoriels* jouent un rôle fondamental en Mathématique Moderne.

Malheureusement, ils ne sont pas toujours bien perçus par les étudiants car leur introduction, voire leur manipulation, garde généralement un caractère fort abstrait. Je me propose de montrer que les espaces vectoriels ne sont pas un jeu artificiel de l'algèbre linéaire.

Voyons comment de tels espaces peuvent servir de cadre original à la représentation d'une *réaction chimique* et comment le calcul vectoriel peut donner la solution à un problème d'équilibrage lié à une telle réaction.

Nous verrons également que le modèle vectoriel proposé met aussi en jeu la résolution d'un système d'équations linéaires.

Considérons par exemple la réaction chimique qui consiste à faire agir de l'acide sulfurique et de l'acide nitrique sur du sulfate ferreux en vue d'obtenir du sulfate ferrique, du nitrosyle et de l'eau :

$$x\ FeSO_4 + y\ H_2SO_4 + z\ HNO_3 \longrightarrow \alpha\ Fe(SO_4)_3 + \beta\ NO + \gamma\ H_2O.$$

Calculons les inconnues x, y, z, α, β et γ en vue *d'équilibrer la réaction.*

A cet effet, nous créons un *espace vectoriel* E_5 *à 5 dimensions* où les vecteurs de base représentent les atomes :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_1} &= (1,0,0,0,0) = Fe \\
\overrightarrow{e_2} &= (0,1,0,0,0) = S \\
\overrightarrow{e_3} &= (0,0,1,0,0) = O \\
\overrightarrow{e_4} &= (0,0,0,1,0) = H \\
\overrightarrow{e_5} &= (0,0,0,0,1) = N
\end{aligned}$$

Chaque produit considéré dans la réaction est combinaison linéaire des vecteurs de base; c'est donc un vecteur de E_5.

<u>Exemple</u> :

$$\begin{aligned}
Fe_2(SO_4)_3 &= 2\ Fe + 3\ S + 12\ O \\
&= (2,0,0,0,0) + (0,3,0,0,0) + (0,0,12,0,0) \\
&= (2,3,12,0,0)
\end{aligned}$$

Dès lors, en utilisant quelques propriétés fondamentales (mais très simples) des espaces vectoriels, la réaction chimique se traduit dans un langage de vecteurs :

$$(x, x, 4x, 0, 0) + (0, y, 4y, 2y, 0) + (0, 0, 3z, z, z) =$$

$$(2\alpha, 3\alpha, 12\alpha, 0, 0) + (0, 0, \beta, 0, \beta) + (0, 0, \gamma, 2\gamma, 0)$$

Grâce aux ressources de notre structure, la réaction chimique s'écrit finalement sous la forme d'une égalité de deux vecteurs :

$$(x, x + y, 4x + 4y + 3z, 2y + z, z) = (2\alpha, 3\alpha, 12\alpha + \beta + \gamma, 2\gamma, \beta)$$

Le problème se mue ensuite en une résolution d'un système de 5 équations linéaires à 6 inconnues :

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ x + y = 3\alpha \\ 4x + 4y + 3z = 12\alpha + \beta + \gamma \\ 2y + z = 2\gamma \\ z = \beta. \end{cases}$$

Ce système étant simplement indéterminé, choisissons $\alpha = 3$.

La solution est dans ce cas :

$$x = 6 \qquad y = 3 \qquad z = 2 \qquad \alpha = 3 \qquad \beta = 2 \qquad \gamma = 4$$

Grâce à cette méthode, l'étudiant évite les tâtonnements et les difficultés arithmétiques; l'espace vectoriel le sécurise ... et le séduit.

3. De la dynamique d'une population aux équations différentielles du premier ordre

On considère une population dont l'effectif N est une fonction du temps t; on connaît la valeur N_0 de N à l'instant initial (soit pour $t = 0$). On suppose que la population est *isolée*, c'est-à-dire qu'elle ne connaît ni immigration, ni émigration.

Il est plausible de penser que le taux instantané de variation de N dépend de l'effectif de la population considérée. On peut donc imaginer qu'il existe une fonction différentiable de N, soit $f(N)$ tel que

$$\frac{dN}{dt} = f(N) \qquad \text{avec} \qquad f(0) = 0$$

Appliquons la formule de MAC-LAURIN à la fonction f :

$$f(N) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}N + \frac{f''(0)}{2!}N^2 + \frac{f'''(0)}{3!}N^3 + \cdots$$

ce qui revient à dire qu'il existe des nombres réels a, b, c, ... tels que

$$\frac{dN}{dt} = aN + bN^2 + cN^3 + \cdots \qquad (1)$$

- *En première approximation :*

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \qquad (2),$$

équation différentielle linéaire du premier ordre à variables séparables. (λ est un facteur constant positif, spécifique de la population considérée).

- *En seconde approximation :*

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N + bN^2 \qquad (3)$$

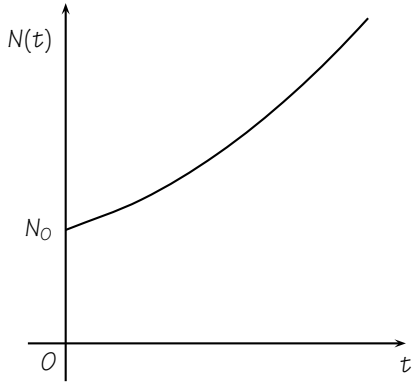
équation différentielle non linéaire du premier ordre; c'est aussi *une équation de* BERNOULLI.

1. La situation traduite par l'équation (1) est fort théorique; elle correspond au cas où le taux instantané de croissance de la population est directement proportionnel au nombre d'individus de celle-ci.

   La résolution de (1) est cependant intéressante; elle conduit à une fonction exponentielle

   $$N(t) = N_0 e^{\lambda t}.$$

   La courbe représentative de N traduit bien le caractère très particulier de la situation considérée, puisque dans ce cas la croissance de la population est illimitée.



2. En réalité, les accidents, les maladies, les épidémies, les troubles internes, la concurrence en vue d'améliorer le confort, ... freinent la vitesse d'accroissement de la population ; c'est pourquoi il convient de corriger l'équation (2) par un terme négatif qui traduit cet effet de freinage. Cette condition est réalisée par l'équation (3) où l'on substitue à b le facteur $(-\mu)$, sachant que μ est un nombre constant positif qui caractérise la compétition interne de la population ainsi que les calamités qui lui sont funestes :

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N - \mu N^2.$$

Cette équation exprime la *loi d'évolution* de la population.

On la transforme en une *équation linéaire du premier ordre avec second membre*.

Sa résolution met en jeu un outilage mathématique très instructif : intégration d'une équation différentielle par le recours aux variables séparées, par le biais du changement de variable, par le procédé de variation de la constante, par la méthode de Bernoulli. Toutes ces manipulations exigent des recours aux fonctions logarithme et exponentielle, au calcul intégral, à la résolution d'équations algébiques, ... avec l'hypothèse que

$$\forall t : N < k = \frac{\lambda}{\mu}.$$

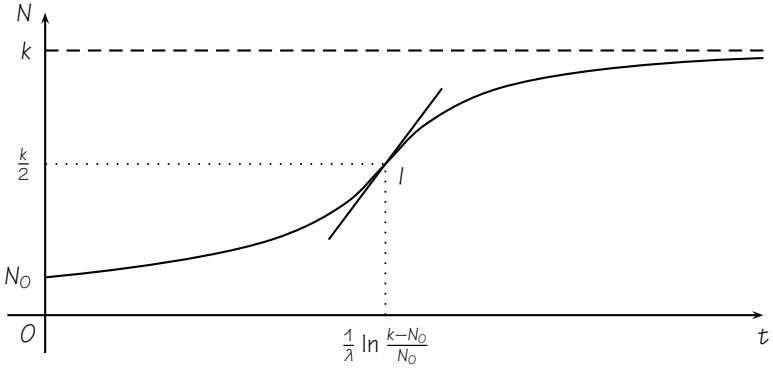
On trouve que

$$N(t) = \frac{kN_O e^{\lambda t}}{k + N_O\left(e^{\lambda t} - 1\right)}.$$

L'étude classique des variations de N (recherche de l'asymptote, des concavités de la courbe représentative, des points d'inflexion) aboutit au graphe de la page 111.

Nous avons du même coup donné une signification géométrique et un sens biologique aux constantes du problème.

Nous constatons notamment que :



a) la population croît incessament, mais $k = \frac{\lambda}{\mu}$ en constitue une limite supérieure qui n'est jamais atteinte ;

b) lorsque l'effectif de la population atteint la moitié de cette valeur, le taux de croissance qui allait crescendo se met brusquement à décroître progressivement.

Ainsi donc, grâce aux ressources de la mathématique, la modélisation du phénomène considéré nous permet de mieux le comprendre, mais aussi d'en prévoir l'évolution.

3. Remarquons qu'à partir d'une seule situation (celle envisagée ci-dessus), nous pouvons introduire *tous* les types fondamentaux d'équations différentielles linéaires du premier ordre (sauf celles qui sont homogènes).

   J'aimerai attirer l'attention sur la puissance et l'efficacité de la formule de Mac Laurin ; elle se prête en effet à des analyses de plus en plus fines concernant les phénomènes étudiés puisqu'elle nous laisse le choix dans le degré d'approximation que nous souhaitons.

4. Où le vert voit rouge

... ou quand l'écologiste n'apprécie guère le « nez à nez » avec une équation différentielle.

Nous envisageons un problème relatif à la pollution des eaux. Il nécessite notamment la recherche d'une loi exponentielle, la résolution d'une équation linéaire du premier ordre avec second membre, l'emploi de la dérivation et

de l'intégration, la représentation graphique d'une fonction exponentielle, l'interprétation biologique d'un modèle mathématique.

1. Exposé du problème.

   Un étang artificiel contenant 30 000 litres d'eau pure est destinée à la pisciculture. A un moment donné, une eau polluée à 4% par du purin se déverse dans l'étang de façon continue à la vitesse moyenne de 150 litres à l'heure. On suppose qu'à partir de ce même moment l'étang laisse échapper son liquide à la même vitesse.
   L'écologiste désire connaître à tout moment le pourcentage de purin présent dans l'eau de l'étang.

2. Recherche d'une loi traduisant le phénomène étudié.

   Le pourcentage se calcule aisément si l'on connaît à chaque instant le volume de purin se trouvant dans l'étang.

   - Plaçons-nous à l'instant t (exprimé en heures).
     On suppose que $t = 0$ correspond à l'instant initial, c'est-à-dire celui où le phénomène commence.
     Soit $y(t)$ litres, le volume de purin présent dans l'étang à l'instant t.

   - Plaçons-nous maintenant à l'instant $(t + \triangle t)$:
     1°) l'étang reçoit un apport de purin venant de l'extérieur, égal à

     $$0,04 \cdot 150 \cdot \triangle t = 6 \cdot \triangle t;$$

     2°) l'étang laisse échapper un volume de purin égal à

     $$\frac{y(t)}{30000} \cdot 150 \cdot \triangle t = 0,005 \cdot y(t) \cdot \triangle t.$$

     En conclusion, dans l'intervalle de temps $[t\ ,\ t+\triangle t]$, l'accroissement de volume de purin dans l'étang est

     $$y(t + \triangle t) - y(t) = 6 \cdot \triangle t - 0,005 \cdot y(t) \cdot \triangle t$$

     d'où l'on déduit la *loi différentielle* du phénomène :

     $$y'(t) + 0,005 \cdot y(t) = 6. \qquad (1)$$

3. Solution du problème.

   Première étape : résoudre (1) sans second membre.

   Deuxième étape : appliquer la méthode de la variation de la constante à la solution trouvée.

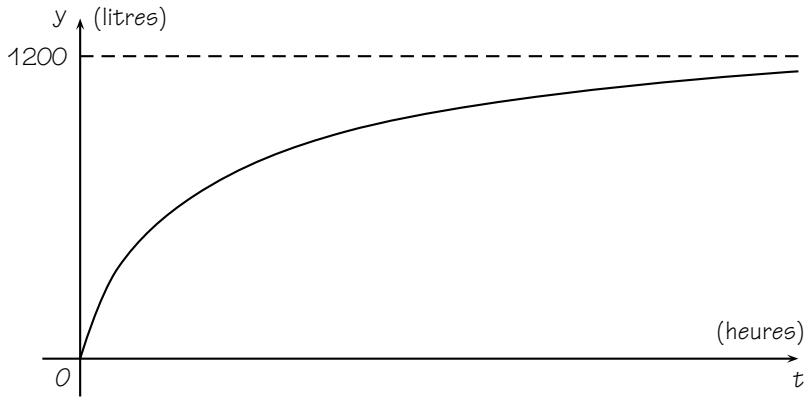
   Troisième étape : tenir compte des conditions initiales (l'eau de l'étang n'étant pas polluée au moment $t = 0$).

   On trouve
$$y(t) = 1200\left(1 - e^{-0,005t}\right) \qquad (2)$$
   d'où l'on déduit le pourcentage de purin présent dans l'eau de l'étang à l'instant t, soit
$$\frac{y(t)}{300} = 4\left(1 - e^{-0,005t}\right) \qquad (3)$$

4. Représentation graphique.

$$y'(t) = 6e^{-0.005t} > 0$$
$$y''(t) = -0,03e^{-0.005t} < 0$$
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1200$$

   La courbe représentative de la fonction y admet donc une asymptote horizontale d'équation $t = 1200$.



5. Interprétation de l'écologique.

   La pollution de l'étang croît avec le temps, mais son taux de croissance va en diminuant.

À l'instant initial, cette pollution est nulle ; au cours du temps elle tend à se rapprocher d'une valeur correspondant à 1 200 litres de purin dans l'étang ; elle tend donc vers une limite de $\frac{1200}{30000} = 4\%$, limite qu'elle ne dépassera jamais (ce qui correspond bien à la réalité).

Supposons que l'écologiste veuille savoir à quel moment la pollution de l'étang sera de 2% (cela peut signifier le moment où il faudra prendre des précautions envers les poissons de l'étang).

Une pollution de 2 % équivaut à 600 litres de purin dans l'étang.

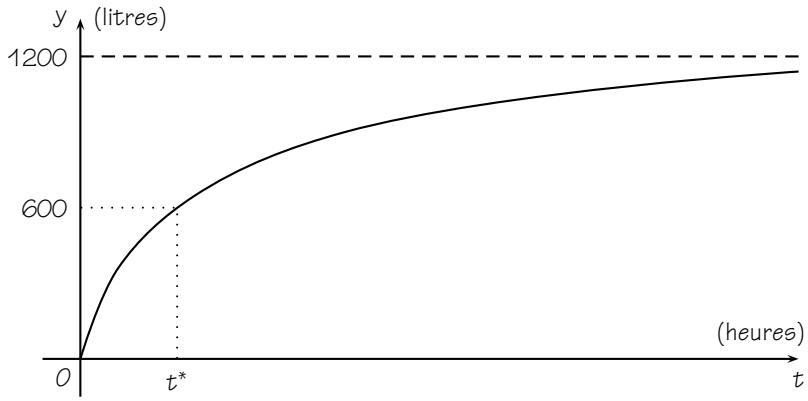
Cela se passera au temps t^* tel que $y(t^*) = 600$, ou en vertu de (2) :

$$600 = 1200\left(1 - e^{-0{,}005t^*}\right)$$

d'où l'on tire

$$t^* = 200 \ln 2 \approx 138{,}62 \quad \text{(heures)}$$

La vie des poissons sera donc mise en danger environ 5 jours et 18 heures (à une près) après le moment initial du phénomène de pollution.



Les mathématiques sont faites de 50% de formules, de 50% de démonstration et de 50 % d'imagination.

Un mathématicien est une machine qui transforme le café en théorèmes.

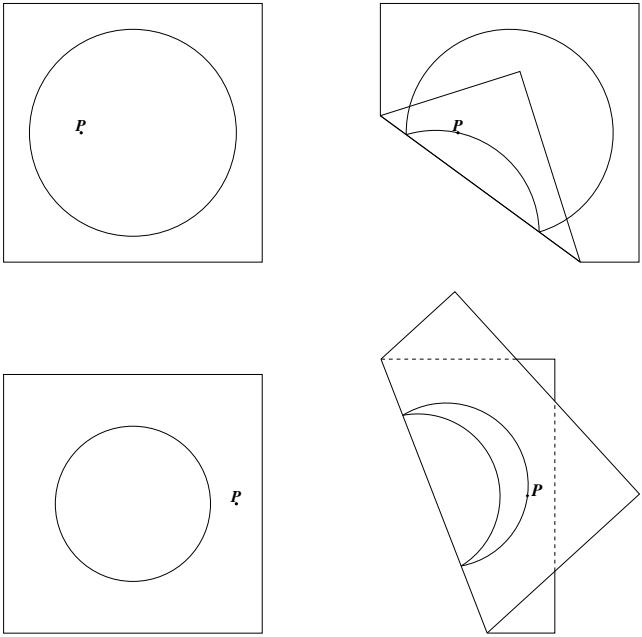
Ellipses, hyperboles, paraboles et pliages de papier

CL. FESTRAETS,

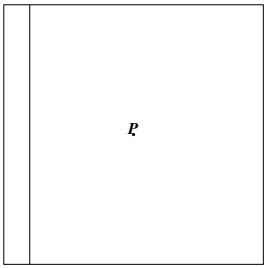
Mathematique et Pédagogie n° 68 - 1988

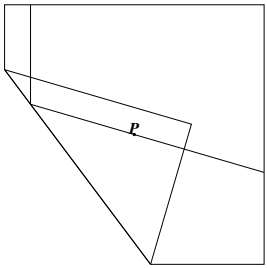
Les méthodes plus ou moins simples de construction des coniques ne manquent pas, mais celle qui consiste à les obtenir comme enveloppe de leurs tangentes par simple pliage de papier est sans doute la plus attrayante pour les élèves. Sans doute parce qu'inattendue et un peu mystérieuse.

Chaque élève reçoit une feuille de papier calque sur laquelle est dessiné un cercle et un point soit intérieur, soit extérieur à ce cercle, ou bien une droite et un point non situé sur cette droite. Il s'agit de plier le papier de manière à ce que le cercle, ou la droite, passe par le point.

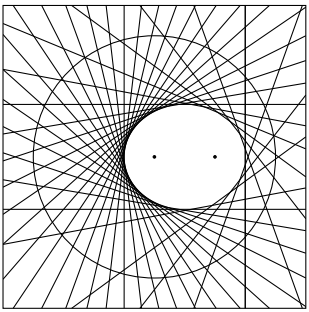


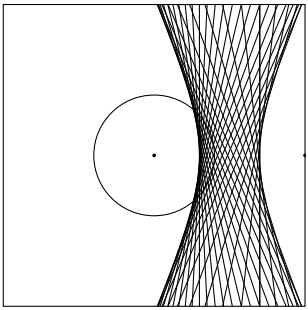
Cet article fait partie de la rubrique *Dans nos classes*

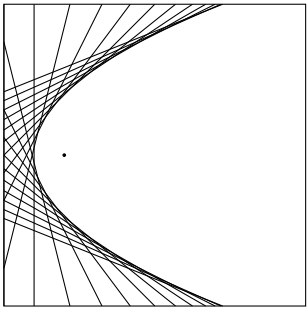




Puis on recommence ce pliage jusqu'à ce que la feuille soit pliée dans toutes les directions. Les traces de pli forment un ensemble de tangentes qui dessinent une ellipse, une hyperbole ou une parabole.





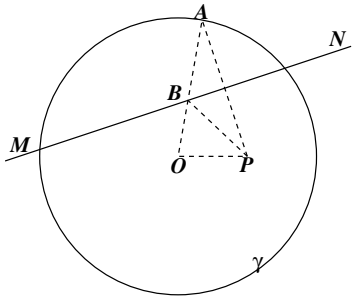


Une fois les pliages terminés, les élèves comparent leurs résultats et analysent leurs dessins. Il semble bien, pour l'ellipse et l'hyperbole que le centre du cercle et le point donné soient les foyers et que l'excentricité soit d'autant plus grande que le point donné est éloigné du centre du cercle. Pour la parabole, il apparaît clairement que la droite et le point donné en sont la directrice et le foyer. Quant aux plis du papier, ils sont dans tous les cas des tangentes.

Encore faut-il le démontrer !

Je vous livre ici une démonstration fort courte qui concerne l'ellipse, mais qui s'adapte sans peine aux cas de l'hyperbole ou de la parabole.

Soit γ le cercle de centre O et de rayon r et P un point intérieur donné.



Considérons le pli MN du papier qui amène le point A sur le point P.
MN est la médiatrice du segment $[AP]$ donc $BA = BP$. Dès lors $OB + BP = OB + BA = r$.
La somme des distances de B à O et à P est donc constante et quand A parcourt le cercle γ, B parcourt une ellipse de foyers O et P.

De plus, $\widehat{OBM} = \widehat{ABN}$ et $\widehat{ABN} = \widehat{PBN}$. La droite MN fait des angles égaux avec les droites joignant B aux foyers, donc MN est tangente à l'ellipse en B.

Ce qui achève la démonstration.

Pourquoi e est-il meilleur que π ?

e est plus facile à épeler que π.
On peut trouver e sur un clavier, ce n'est pas certain pour π.
$\ln(\pi^1)$ est très compliqué alors que $\ln(e^1)$ est tout simple.
e est utilisé en analyse alors que π s'utilise dans la géométrie des enfants.
Il existe une série toute simple qui converge vers e, alors que celles qui convergent vers π sont plus ardues.
Vous n'êtes pas obligé de connaître le grec pour utiliser e.

Mises en situation

N. ROUCHE,

Mathematique et Pédagogie n° 70 - 1989

1. Un problème de robinet

Donnons-nous un exemple de **mise en calcul** qui porte sur une situation familière ou physique.

L'eau qui coule d'un robinet cylindrique, quand elle n'est pas turbulente, a souvent la forme d'une surface de révolution qui s'amincit au fur et à mesure que l'eau s'écarte du robinet. Quelle est cette surface ? Supposons que le robinet ait un diamètre intérieur égal à $2r_0$ et que l'eau en sorte à la vitesse v_0. Le débit à la sortie du robinet vaut donc $\pi r_0^2 v_0$. Ce que l'on voudrait connaître, c'est la fonction $r(z)$ qui donne le rayon du jet à la distance z de l'embouchure du robinet. Or qu'est-ce qu'on connaît dans ce problème ? L'eau tombe dans le champ de la pesanteur, et on se souvient de la loi de la chute des corps. L'eau accélère en tombant. Donc, plus elle s'éloigne du robinet, plus elle va vite. N'est-il pas normal alors que le jet s'amincisse vers le bas, puisque, clairement, le débit est le même à toutes les hauteurs : l'eau ne s'accumule pas, ne forme bourrelet nulle part ? Pour un même débit, si sa vitesse augmente, il faut qu'elle passe par une section de jet plus petite. Alors, pour obtenir $r(z)$, ne serait-il pas possible de calculer la vitesse, puis le débit à la distance z, puis d'exprimer que le débit est le même à la distance z qu'à l'embouchure du robinet ? Voilà un programme de calcul raisonnable. C'est un exemple de calcul qui vient de quelque part et va quelque part. Il reste à l'exécuter, par moments en aveugle. Supposons qu'on ne se souvienne pas de la vitesse en fonction de z (peut-être même n'a-t-on jamais vu une telle formule). Mais on se souvient

Cet assez long article intitulé *Ils doivent savoir calculer* vitupérait en fait le *drill* : celui-ci n'améliore en rien la compréhension des relations, jugées par la capacité de restituer des faits oubliés à partir de souvenirs d'autres faits, ni la capacité de transférer l'apprentissage. Le calcul est objet de contradiction : il n'est rien en lui-même, ce qui compte c'est ce qu'il permet de faire, à savoir répondre à des questions, résoudre des problèmes. Le calcul en soi est toujours inintéressant. Mais il arrive que les résultats soient significatifs. Là est son unique enjeu. L'auteur déduisait de ces observations que la priorité absolue était « la mise en calcul » : tout calcul qui a du sens vient de quelque part et y retourne ; cette mise en calcul devrait dans les classes de mathématique devenir aussi, sinon plus importante que l'exécution du calcul.

des équations plus familières qui donnent la vitesse et l'espace parcouru en fonction du temps, à savoir

$$v(t) = v_0 + gt$$

et

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t,$$

où g est l'accélération de la pesanteur. Pour avoir v en fonction de z, il faudra éliminer t entre ces deux équations. C'est un calcul (aveugle) qui donne

$$v = \left(2gz + v_0^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

avec un choix, non aveugle, du signe de la racine. On exprime alors l'égalité des débits, à savoir

$$\pi r^2 \left(2gz + v_0^2\right)^{\frac{1}{2}} = \pi r_0^2 v_0$$

et on résout (en aveugle) pour obtenir

$$r(z) = r_0 v_0^{\frac{1}{2}} \left(2gz + v_0^2\right)^{-\frac{1}{4}}, \tag{1}$$

avec un choix, non aveugle, du signe de la racine. Après, on revient à l'eau qui coule. D'abord $r(0) = r_0$, ce qui est rassurant (à défaut de ce résultat, il aurait fallu revoir les calculs). Ensuite, on se dit qu'une racine quatrième croît lentement, bien plus lentement qu'une racine carrée ou même troisième, et donc que l'inverse d'une racine quatrième décroît lentement. N'est-ce pas ce qu'on observe ? Le diamètre du jet décroît lentement. Ensuite, on pourra vérifier numériquement le résultat. Mais pour cela, il faudrait connaître v_0. C'est un autre problème, l'objet d'une autre curiosité. Mais à supposer que la formule trouvée soit juste (et on a quand même des raisons de le penser), puisqu'on peut mesurer r_0 sur le robinet, qu'on connaît g, qu'on peut se donner un z et mesurer $r(z)$, alors on connaît tout dans la formule sauf v_0 et on pourra calculer v_0. D'où un calcul (aveugle) : tirer v_0 de la formule obtenue pour $r(z)$, ce qui donne

$$v_0 = \frac{\sqrt{2} r^2 g^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}}{\left(r_0^4 - r^4\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Une condition nécessaire de validité de cette formule, c'est que son second membre ait bien les mêmes dimensions physiques que le premier, à savoir celles d'une vitesse. Il est rassurant de voir que c'est bien le cas.

Par ailleurs, n'est-il pas inquiétant que lorsque z tend vers 0, alors que r tend vers r_0, on obtienne pour v_0 l'horreur familière $\boxed{\frac{0}{0}}$? Cela implique que si on veut déterminer pratiquement v_0, on a intérêt à choisir z assez grand, de manière à éviter d'avoir à faire, numériquement, le quotient de deux quantités très petites (ce qui serait malsain, et c'est l'occasion d'en discuter).

Remarquons enfin que la fonction au second membre de l'équation (1) a un domaine plus grand que celui de sa validité en tant que modèle mathématique. Elle représente correctement le phénomène étudié pour $z \geqslant 0$, alors que son domaine au sens mathématique, en tant que fonction réelle d'une variable réelle, est l'intervalle $\left[-\frac{v_0^2}{2g}, \infty\right[$. La considération du domaine de validité d'une fonction en tant que modèle d'un phénomène est une question importante, mais qui ne se pose jamais à des élèves en train de faire des calculs venus de nulle part et conduisant à des solutions que personne n'attend.

2. Dessine-moi un rectangle

Voici à présent un exemple de mise en calcul d'une situation appartenant dès le départ au champ des mathématiques.

Soit à dessiner un rectangle qui admet pour périmètre un nombre p et pour aire un nombre a.

Une première remarque : le problème n'a de sens que si $p > 0$ et $a > 0$. Soient alors x et y les deux côtés du rectangle cherché. On a

$$x + y = \frac{p}{2} \qquad \text{et} \qquad xy = a \tag{2}$$

Ce système à deux inconnues fournit par élimination de y

$$x^2 - \frac{p}{2}x + a = 0.$$

D'où

$$x = \frac{\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4a}}{2} \tag{3}$$

Il se peut que le problème n'ait pas de solution, puisque les racines complexes ne peuvent pas être interprétées comme côté d'un rectangle. C'est le cas si

$$\frac{p^2}{4} - 4a < 0 \qquad \text{ou encore } p < 4\sqrt{a}.$$

(Il faut évidemment choisir le signe + pour la racine.)

Si maintenant

$$\frac{p^2}{4} - 4a \geqslant 0 \qquad \text{ou encore } p \geqslant 4\sqrt{a} \tag{4}$$

on aura une ou deux solutions. Le cas de l'égalité est intéressant. Il lui correspond

$$x = \frac{p}{4} \qquad \text{et donc} \qquad y = \frac{p}{4}$$

grâce à la première équation (2). La solution est un carré. Il est bien normal que $p = 4\sqrt{a}$, puisque le côté d'un carré d'aire a vaut $\sqrt{a}$.

Quand on a en (4) une inégalité stricte, on obtient en (3) deux racines réelles. Comment choisir entre elles ? Et d'abord, faut-il choisir ? Toutes deux sont positives, et donc a priori acceptables. Ainsi, on trouve deux solutions, deux rectangles ayant p pour périmètre et a pour aire. C'est curieux, on peut explorer le problème en traitant un cas numérique, juste pour voir. On peut aussi observer que, x étant donné par (3), y sera grâce à (2) donné par

$$y = \frac{p}{2} - x = \frac{\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4a}}{2}$$

Ce qui veut dire que si l'on choisit pour x une des deux racines (3), on obtient l'autre pour y.

Ainsi, le problème a deux solutions algébriques, mais, substantiellement, une seule solution géométrique, puisqu'il était implicitement tout à fait clair que la question posée portait sur les rectangles considérés à isométrie près.

Voilà donc un exemple de problème situé d'emblée dans le champ des mathématiques, mais qui vient de quelque part, et donc exige une mise en calcul, et qui va quelque part, et donc exige une interprétation. On laisse au lecteur le soin d'en comparer la richesse avec le problème nu qui s'énonce :

> Etudiez, selon les règles apprises, l'équation du deuxième degré paramétrique
>
> $$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

La double fausse position

CL. FESTRAETS,

Mathematique et Pédagogie n° 71 - 1989

Trouvez la solution comme le hasard vous conduit,
Par bonheur à la vérité vous pouvez accéder,
D'abord procédez à la question,
Bien qu'aucune vérité n'y soit contenue.
Une telle fausseté est une si bonne base,
Que la vérité sera vite trouvée.
De beaucoup, enlevez beaucoup,
De trop peu, prenez aussi trop peu.
À l'excédent, joignez encore le trop peu,
Et à trop peu, ajoutez trop simplement.
En croix, multipliez les types contraires,
Pour que toute la vérité, à partir de la fausseté, soit trouvée.

Ce texte est dû au mathématicien anglais Recorde (1re moitié du 16e siècle) : il décrit (!!) la méthode de double fausse position.

Je me rappelle avoir résolu de petits problèmes d'arithmétique par cette méthode lorsque j'étais élève à l'école primaire, mais je doute fort qu'elle soit encore enseignée ou utilisée de nos jours. Sous le nom de « méthode des hypothèses », elle était encore décrite dans la plupart des traités d'arithmétique utilisés dans l'enseignement secondaire et normal avant la réforme des programmes; comme elle n'est pas dénuée d'un certain intérêt historique, je l'illustrerai par un exemple tiré de *Neuf chapitres sur l'art du calcul*, ouvrage chinois datant du premier siècle de notre ère ([1]).

> *Soit du grain décortiqué dans un baquet de dix dous ; on en ignore la quantité. On remplit à ras bord ce baquet en y ajoutant du grain, que l'on décortique ensuite ; on a en tout sept dous de grain décortiqué. On demande combien de grain décortiqué il y avait à l'origine, sachant que le dou est une mesure de capacité qui vaut dix shengs et qu'un dou de grain représente six shengs de grain décortiqué.*

Rubrique « Des problèmes et des jeux ».

([1]) extrait de *Mathématiques au fil des âges*, J. Dhombres et alii, Gauthier-Villars.

Première hypothèse : le baquet contient 5 dous de grain décortiqué. On le complète avec 5 dous de grain non décortiqué qui font 5×6 shengs de grain décortiqué. La quantité totale de grain décortiqué est de 8 dous, donc il y a un excès de 1 dou.

Seconde hypothèse : le baquet contient 1 dou de grain décortiqué. On le complète avec 9 dous de grain non décortiqué qui font 9×6 shengs de grain décortiqué. La quantité totale de grain décortiqué est de 6 dous 4 shengs, donc il y a un déficit de 6 shengs.

L'hypothèse « 5 dous de grain » est trop forte et conduit à un excédent de 10 shengs. L'hypothèse « 1 dou de grain » est trop faible et conduit à un déficit de 6 shengs.

« En croix, on multiplie les contraires » : $5 \times 6 + 1 \times 10$

« À l'excédent, on ajoute le trop peu » : $10 + 6$

Et la vérité s'obtient par $\frac{5\times6+1\times10}{10+6} = \frac{40}{16} = 2,5$

Il y avait donc à l'origine 2 dous 5 shengs de grain décortiqué dans le baquet.

Voilà bien une curieuse méthode; elle laisse l'impression d'une recette, une bonne recette sans doute, mais cependant plutôt mystérieuse. En fait, il est assez facile de voir qu'il s'agit de résoudre une équation du premier degré du type $ax + b = c$. On y attribue à x deux valeurs arbitraires x_1 et x_2 et on obtient

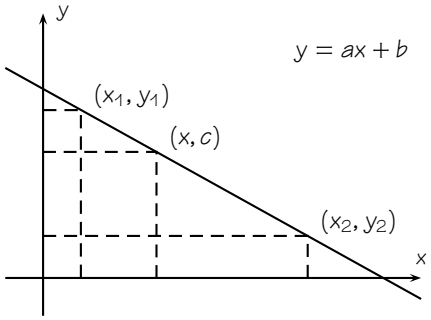
$$\begin{array}{lll} ax_1 + b = y_1 & \text{avec} & y_1 > c \\ ax_2 + b = y_2 & \text{avec} & y_2 < c \end{array}$$

$y_1 - c = e$ est l'excédent,
$c - y_2 = d$ est le déficit.
De la relation

$$\frac{x_1 - x}{x - x_2} = \frac{y_1 - c}{c - y_2} = \frac{e}{d},$$

il est facile de passer à

$$\frac{x_1 d + x_2 e}{d + e} = x.$$

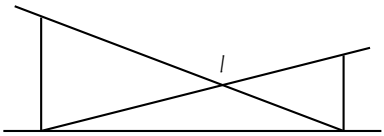


Des travaux et . . . leur suite

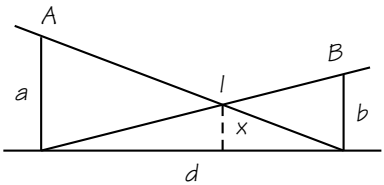
CL. VILLERS,

Mathematique et Pédagogie n° 80 - 1991

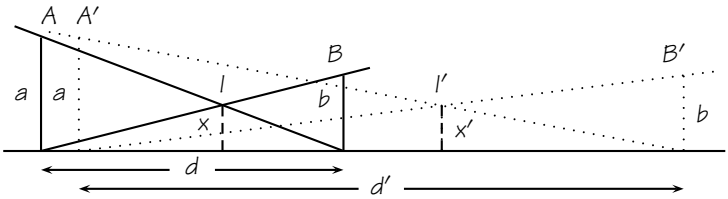
Après quelques travaux au revêtement de sol, les ouvriers de l'école ont voulu marquer l'interdiction de passage par la pose de madriers, comme l'indique le croquis ci-dessous.



La question fut de savoir s'il était possible de déterminer l'altitude du point *I* et, surtout, quels paramètres initiaux étaient nécessaires et suffisants.



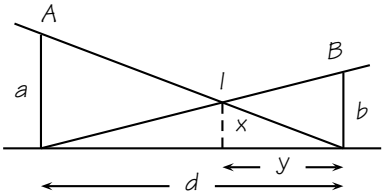
Les hauteurs *a* et *b* sont unanimement citées. La grande majorité des élèves pense que la distance *d* est aussi nécessaire. Quelques croquis ajoutent à la perplexité.



Cet activité est extraite d'un article Du quotidien banal aux situations exploitables mathématiquement.

Ils justifient qu'on se mette à calculer. Voici quelques démarches.

Classique :



$$\frac{x}{a} = \frac{y}{d} \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{b} = \frac{d-y}{d} = 1 - \frac{y}{d}$$

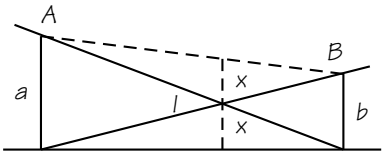
$$\text{donc} \qquad \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1 \qquad \text{et} \qquad x(a+b) = ab$$

et enfin

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

x ne dépend donc que de a et b.

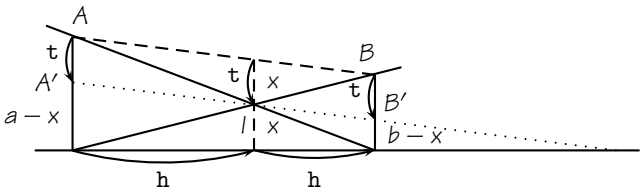
Culturelle :



2x est la moyenne harmonique entre a et b, donc $2x = \frac{2ab}{a+b}$, donc

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Dynamique :



En exploitant la translation **t** et l'homothétie **h** représentée sur la figure, il vient :

$$\frac{x}{a-x} = \frac{b-x}{x} \qquad \text{(rapport de } \mathbf{h}\text{)}$$

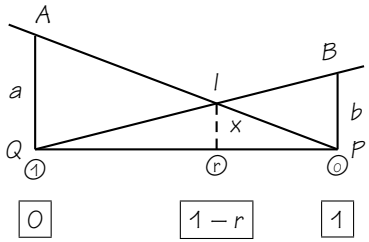
donc

$$xx = (a-x)(b-x) \qquad \text{ou} \qquad xx = ab - ax - bx + xx \qquad \text{ou} \qquad (a+b)x = ab$$

et, enfin,

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Audacieuse :



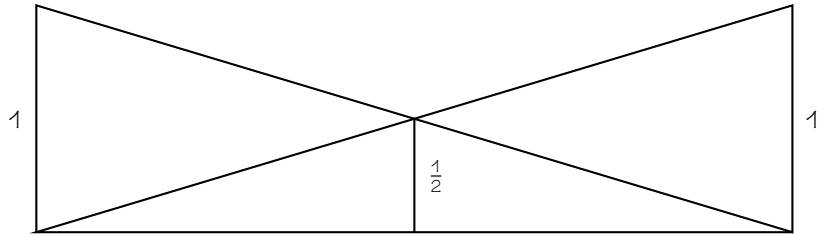
$$\frac{x}{a} = r \quad \text{(rapport de l'homothétie } h(P, A \longleftrightarrow I)\text{)}$$
$$\frac{x}{b} = 1 - r \quad \text{(rapport de l'homothétie } h'(Q, B \longleftrightarrow I)\text{)}$$

donc

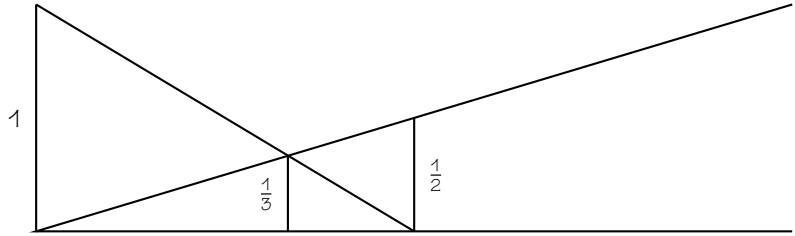
$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1 \qquad \text{etc} \ \ldots$$

L'application de la formule $x = \frac{ab}{a+b}$ pour diverses valeurs non nulles de a et b donne l'occasion de manipuler les fractions.

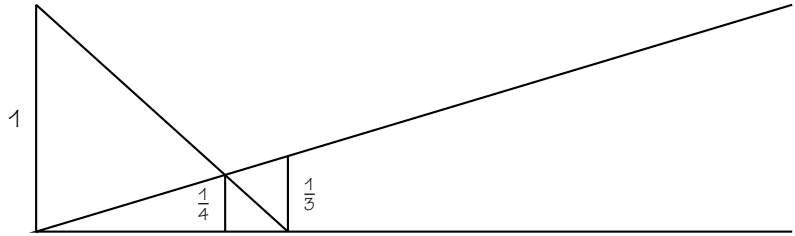
En particulier, on peut itérer le calcul en utilisant 1 pour valeur initiale de a et b. On obtient ainsi ...



$$x_1 = \frac{1 \times 1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

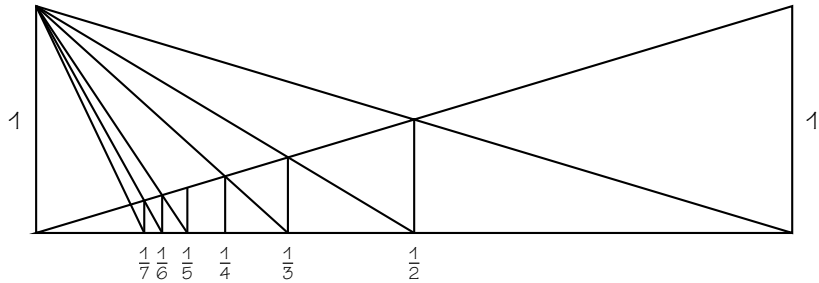


$$x_2 = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$



$$x_3 = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \qquad \textit{etc} \ \ldots$$

D'où la très jolie figure ...



qui illustre la suite harmonique (on comprend peut-être mieux pourquoi elle porte ce nom).

Une approche graphique de la dérivation

M. PARKER,

Mathematique et Pédagogie n° 90 - 1993

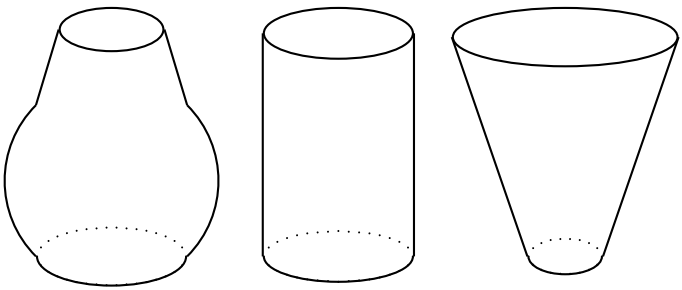
On reproche souvent aux étudiants qui entrent en première candidature de préférer les calculs, fussent-ils longs, à un raisonnement graphique, fût-il court. Cette tendance est particulièrement flagrante dans le domaine de la dérivation et de l'étude des fonctions.

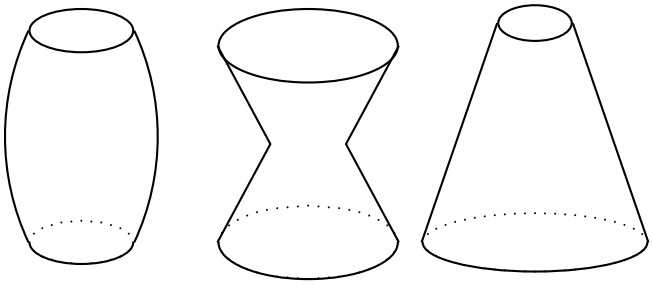
La notion de variation d'une fonction (croissance ou décroissance) est généralement subordonnée à une étude « calculatoire » du signe de la dérivée. Peu d'étudiants sont capables de décrire, à l'aide de mots et par un graphique, le comportement d'une fonction f, connaissant le signe des dérivées f' et f'' :

accélération de la croissance	si $f' > 0$ et $f'' > 0$
ralentissement de la croissance	si $f' > 0$ et $f'' < 0$
accélération de la décroissance	si $f' < 0$ et $f'' < 0$
ralentissement de la décroissance	si $f' < 0$ et $f'' > 0$

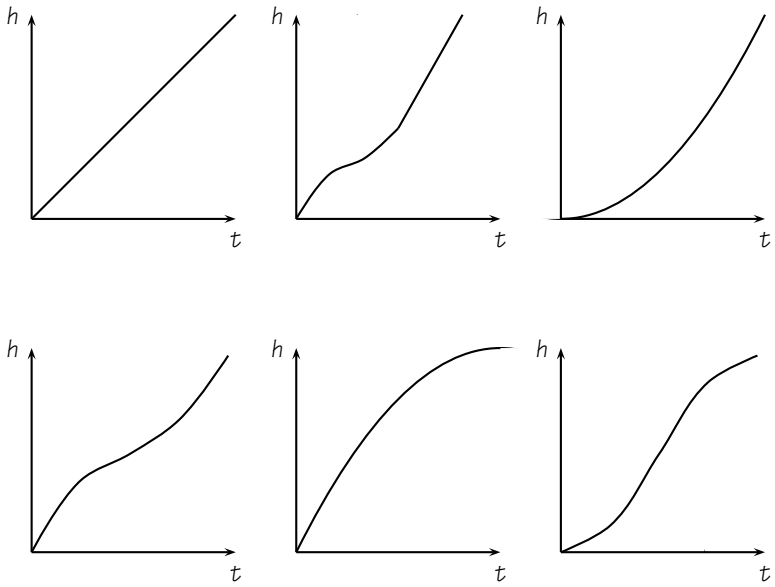
Les deux exercies présentés ci-après peuvent peut-être habituer les élèves à raisonner graphiquement, sans passer par l'application d'une formule ou d'une technique calculatoire.

Premier exercice : Six récipients de même volume et de même hauteur sont remplis à l'aide de six robinets qui ont tous le même débit. Ces six récipients sont des surfaces de révolution, dessinées ci-dessous :





La hauteur h de l'eau dans chacun des récipients varie en fonction du temps t, suivant les six graphiques que voici :



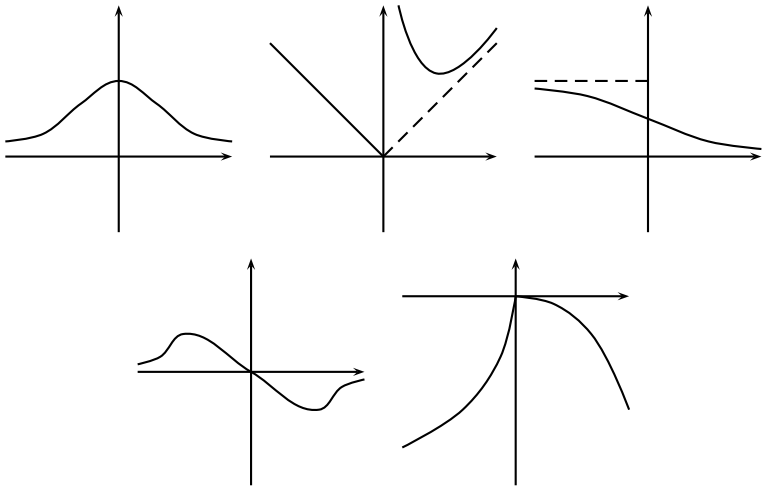
On demande d'établir une bijection entre les récipients et les graphiques.

Sans doute est-il difficile, dans l'enseignement secondaire de justifier ou même de faire comprendre la formule

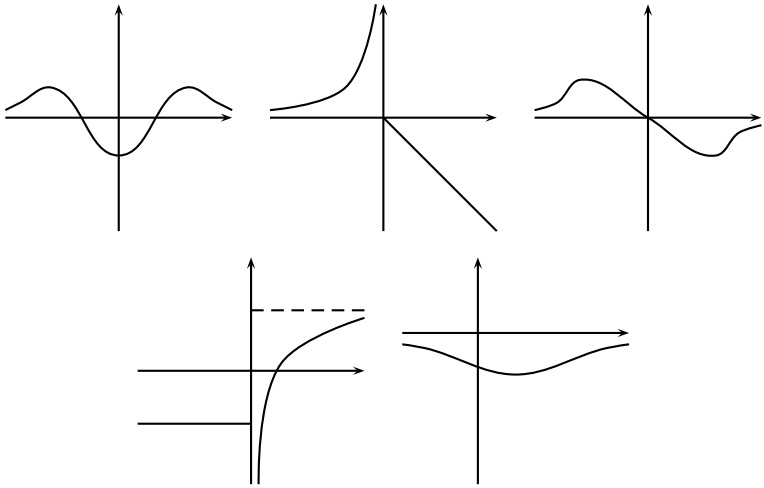
$$\text{débit} = \frac{dV}{dt} = \pi(r(h))^2 \frac{dh}{dt}$$

mais le lien « qualitatif » entre le rayon du récipient et la vitesse à laquelle le niveau monte devrait être accessible à tous les élèves.

Second exercice : Il s'agit à nouveau d'établir une bijection plausible, cette fois entre les graphes (très approximatifs) de quelques fonctions et les graphes (tout aussi approximatifs) de leurs fonctions dérivées. Voici les graphes de 5 fonctions :



et voici, dans le désordre, les graphes de leurs fonctions dérivées :



Calcul de la durée d'un placement en capitalisation mixte

J. BAIR,

Mathematique et Pédagogie n° 94 - 1993

Quand une personne prête à autrui un bien qui lui appartient, elle réclame en compensation une redevance périodique : le *loyer*. Lorsque le bien transféré est un capital, le loyer prend le nom *d'intérêt*. Ce transfert est un *placement* pour celui qui cède le capital, un *emprunt* pour celui qui en reçoit la jouissance; les contractants s'appellent respectivement le *créancier* (ou prêteur) et le *débiteur* (ou emprunteur).

Pour éteindre sa dette à un moment déterminé, le débiteur doit verser à son créancier le capital c emprunté (qui est appelé le *capital initial* ou le *principal*), à quoi il lui faut ajouter le total des intérêts relatifs à la durée écoulée depuis le moment du prêt; ce montant global représente la *valeur acquise* C par le principal c au moment du remboursement de la dette.

Lorsque la durée du prêt est la période de référence convenue entre les contractants (le plus souvent l'année), l'intérêt I_1 est généralement pris proportionnel au principal c, soit $I_1 = ic$; le facteur de proportionnalité i est appelé le *taux d'intérêt* (sur la période) et représente l'intérêt produit en une période par un capital unitaire (car $I_1 = i$ lorsque $c = 1$).

Lorsque la durée du prêt est un nombre entier n (de périodes), l'intérêt I_n peut être calculé de deux manières.

Selon la première conception, l'intérêt se paie régulièrement au créancier à la fin de chaque période. Le capital laissé par celui-ci à la disposition de l'emprunteur est invariablement c pour toutes les périodes, et le montant de l'intérêt reste le même d'une période à l'autre, à savoir ci; on a donc $I_n = nci$, d'où

$$C = c + I_n = c(1 + in). \tag{1}$$

Ce mode de placement est dit à *intérêt simple*, et est pratiqué surtout dans des emprunts de courte durée.

Une autre façon de procéder consiste à stipuler que l'intérêt exigible à la fin de chaque période est laissé à la disposition de l'emprunteur au lieu

d'être versé au prêteur, et qu'à son tour il deviendra productif d'intérêt au même taux. Ce second mode de placement est dit à *intérêt composé*. À la fin de la première période, l'intérêt ci s'ajoute au principal c pour former le capital $c + ci = c(1 + i)$; celui-ci produit l'intérêt $c(1 + i)i$, qui, ajouté à la somme précédente au terme de la deuxième période, fournit la valeur acquise $c(1 + i) + c(1 + i)i = c(1 + i)^2$. Par récurrence, on voit aisément que la valeur acquise par c après n périodes est, à intérêt composé :

$$C = c(1 + i)^n. \tag{2}$$

C'est réellement la somme que le débiteur restituera en une fois au réancier au terme des n périodes.

Quand la durée d du placement n'est plus un multiple de la période, sa mesure d peut s'écrire $d = n + h$, où n désigne sa partie entière et h sa partie décimale : on a donc $n \in \mathbb{N}$ et $h \in [0, 1[$.

Pour la durée h qui reste à courir après n périodes, on sert en pratique un intérêt calculé en réduisant l'intérêt d'une période complète au prorata de la fraction de période h.

Dans le cas de l'intérêt simple, pour lequel chaque période produit le même intérêt ci, on prévoit donc un intérêt cih pour la fraction de période h, et la valeur acquise s'écrit alors $C = c+cin+cih = c[1+i(n+h)] = c(1+id)$: la formule (1) s'étend donc naturellement au cas d'un placement de durée quelconque $d = n + h$.

Sous le régime de l'intérêt composé, la valeur acquise par c à l'issue de la n^e période vaut $c(1 + i)^n$; l'intérêt pour la durée h ultérieure étant pris égal à $c(1 + i)^n ih$, la valeur acquise C après le temps $d = n + h$ est donnée par

$$C = c(1 + i)^n + c(1 + i)^n ih = c(1 + i)^n(1 + ih). \tag{3}$$

Cette formule (3) revient à utiliser la théorie de l'intérêt composé (resp. simple) pour la partie entière (resp. décimale) de la durée. Ce procédé de calcul, qui porte le nom de *capitalisation mixte*, est très souvent utilisé en pratique, bien que la formule (3) soit peu maniable dans la théorie des opérations à long terme, à cause de son aspect composite.

Nous nous proposons de calculer la durée d'un placement dans la théorie de la capitalisation mixte. Il s'agit de trouver $d = n + h$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $h \in [0, 1[$, lorsque les nombres c, C et i sont connus et sachant que la formule (3) est vérifiée.

Nous allons résoudre ce problème en interprétant graphiquement la formule (3) dans laquelle c et i sont des constantes données.

Construisons tout d'abord le graphique G de la fonction $f(d) = c(1+i)^d$. La fonction C, en la variable d et définie par (3), prend les mêmes valeurs que f pour les valeurs entières de la variable d : le graphique de C passe donc par les points $M_0, M_1, M_2, \ldots$ situés sur G, aux abscisses entières (figure 1).

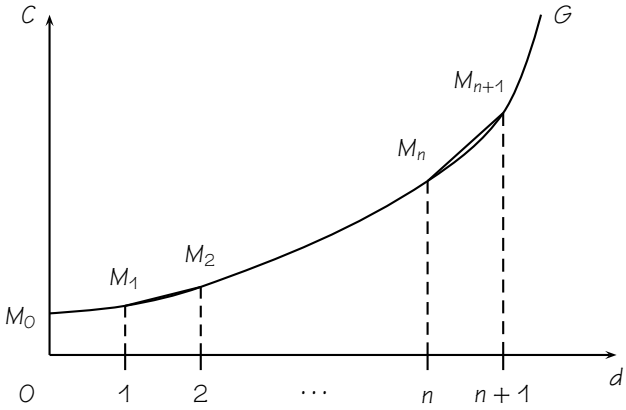


Fig. 1

Quand d varie entre deux entiers successifs n et $n+1$, C est une fonction linéaire de $h = d - n$ et se représente graphiquement par la corde M_nM_{n+1}. La représentation graphique de C se fait donc à l'aide du contour polygonal $M_0M_1M_2 \ldots M_nM_{n+1} \ldots$

Le problème traité revient à chercher l'abscisse d^* du point situé à l'intersection du contour polygonal en question avec la droite horizontale comprenant les points d'ordonnée égale à la valeur connue C. (voir figure 2 page 134)

Il convient dès lors de procéder en deux phases.

1. On cherche tout d'abord quelle corde du contour polygonal l'horizontale va couper. Analytiquement, cela revient à trouver le plus grand entier n^* tel que $c(1+i)^{n^*}$ est inférieur ou égal à C ; visiblement

$$n^* = E\left[\log_{1+i}\left(\frac{C}{c}\right)\right] \tag{4}$$

où $E(X)$ désigne la partie entière de X.

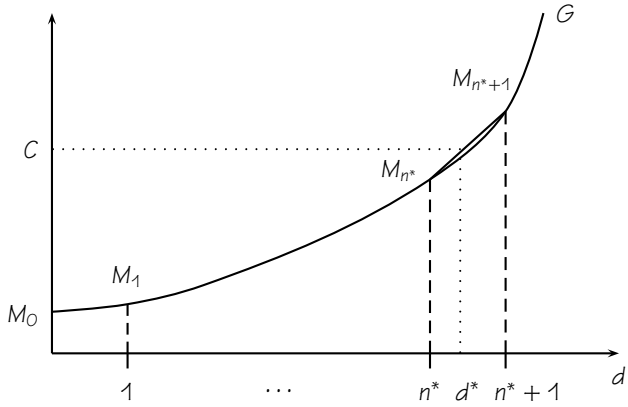


Fig. 2

2. On calcule l'abscisse d^* du point situé sur la corde $M_{n^*}M_{n^*+1}$ et d'ordonnée C ; en utilisant l'équation de cette corde, on obtient

$$\frac{C - c(1+i)^{n^*}}{c(1+i)^{n^*+1} - c(1+i)^{n^*}} = \frac{d^* - n^*}{(n^*+1) - n^*},$$

d'où

$$d^* = n^* + \frac{C - c(1+i)^{n^*}}{c(1+i)^{n^*+1} - c(1+i)^{n^*}},$$

formule équivalente à

$$d^* = n^* + \frac{1}{i}\left[\frac{C}{c}(1+i)^{-n^*} - 1\right]. \tag{5}$$

En guise d'illustration, calculons après combien de temps va doubler un capital placé à un taux annuel de 10 %. Remarquons tout d'abord que la réponse est indépendante du capital initial c, puisque les formules (4) et (5) à exploiter n'utilisent que le rapport $\frac{C}{c}$, égal ici à 2. Comme $\log_{1,1} 2 = 7,2725\ldots$, on a $n^* = 7$. Partant, la durée d^* cherchée est égale à

$$7 + \frac{1}{0,10}\left[2.1,1^{-7} - 1\right] = 7,26316\ldots,$$

soit, environ, 7 ans et 96 jours.

Cube et fonctions

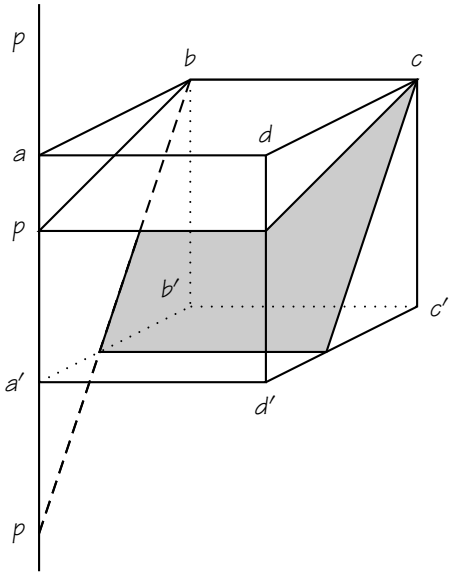
CL. CULUS, M. ERTRYCKX-FRÉDÉRICKX,

Mathematique et Pédagogie n° 95 - 1994

1. Comment naît un problème ?

> On considère un cube *abcda'b'c'd'* et un point *p* mobile sur la droite *aa'*. Pour chaque position du point *p*, quelle figure obtient-on comme intersection du cube et du plan *pbc*

Après quelques manipulations, les élèves ont découvert que si *p* est en *a*, l'intersection est un carré et que si *p* est « en-dessous » de *a*, elle devient un rectangle. Une discussion s'établit sur le cas où *p* est « au-dessus de *a* ». Quelle est alors l'intersection du cube et du plan *pbc* ?
Certains élèves disent « rien », d'autres « le bord du cube »... Après quelques palabres, ils sont d'accord, l'intersection est le segment [*bc*] d'aire égale à 0. L'idée d'aire est apparue pour faire comprendre aux défenseurs de la thèse « rien » qu'ils ne répondaient pas à la question posée mais que leur réponse n'était pas aussi incongrue qu'on pourrait le croire.

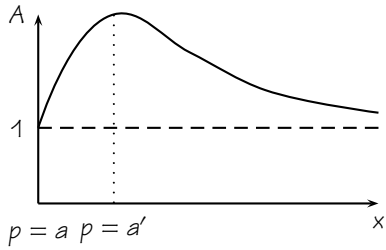


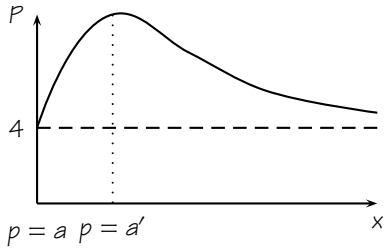
Oui, mais alors, les rectangles trouvés précédemment ... Ils ont une aire non nulle, eux, et même un périmètre ! Et voilà les élèves lancés dans l'étude

Cet article raconte les réactions d'une classe de première à un problème de cube ; ensuite le même problème a été analysé et résolu complètement par une classe de 6e.

de la variation de l'aire (A) et du périmètre (P) de l'intersection du cube et du plan pbc ...

Ils parviennent facilement à déterminer que ceux-ci sont fonction de la position du point p et établissent les graphiques ci-dessous après avoir choisi 1 comme longueur de l'arête du cube.





Ils trouvent « oui, oui ! » que si p est à l'infini, l'intersection est le carré $cbb'c'$ d'aire égale à 1 et de périmètre égal à 4. Les élèves et le professeur sont sortis ravis de cette étude.

Les graphiques ci-dessus peuvent bien sûr être considérés comme corrects s'ils sont établis par des élèves de première. Voyons comment des élèves de 6e vont terminer le problème légèrement « retouché » ? Ils auront pour tâche particulière de répondre à la question troublante qui se pose à la vision des graphiques ci-dessus : quelle est la position du point p qui correspond au point d'inflexion ?

2. Résolution du problème

> On considère un cube $abcda'b'c'd'$ et un point p mobile sur la droite aa'. Pour chaque position de p, que valent l'aire et le périmètre de la surface obtenue en coupant le cube par le plan pbc ?

Quelques manipulations et considérations géométriques nous livrent les conclusions suivantes :

- Si p est extérieur au segment $[aa']$ avec $|pa| < |pa'|$, l'intersection du cube et du plan pbc est le segment $[bc]$.

- Si p est confondu avec le point a, l'intersection est le carré $abcd$ d'aire égale à 1 et de périmètre 4.

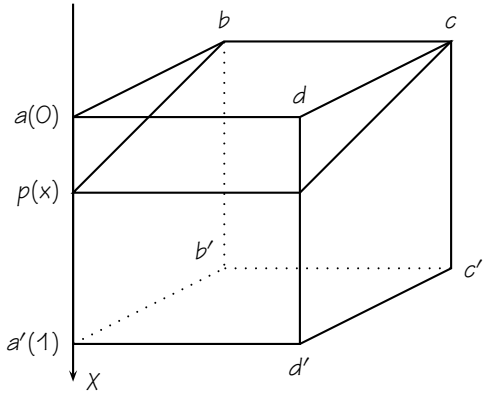
Dans le cas général, l'intersection du plan pbc et du cube est un rectangle d'aire A et de périmètre P. On se propose de calculer ces deux grandeurs en fonction de la position du point p sur la droite aa'. A cet effet, on munit la droite aa' d'un repère en attribuant l'abscisse 0 au point a et l'abscisse 1 au point a' ; on appelle x l'abscisse du point p. Deux cas sont traités séparément :

Premier cas : p est intérieur au segment $[aa']$.

On a $|pa| = x$ et $|ab| = 1$.
Il s'en suit que

$$\begin{aligned} |pb| &= \sqrt{1+x^2} \\ A &= \sqrt{1+x^2} \\ \text{et } P &= 2+2\sqrt{1+x^2}. \end{aligned}$$

Ces deux expressions sont toujours valables pour les cas limites.



1. si p est confondu avec $a(x=0)$: $A = 1$ et $P = 4$,
2. si p est confondu avec $a'(x=1)$: $A = \sqrt{2}$ et $P = 2+2\sqrt{2}$.

Second cas : p est extérieur au segment $[aa']$ et $|pa'| < |pa|$.

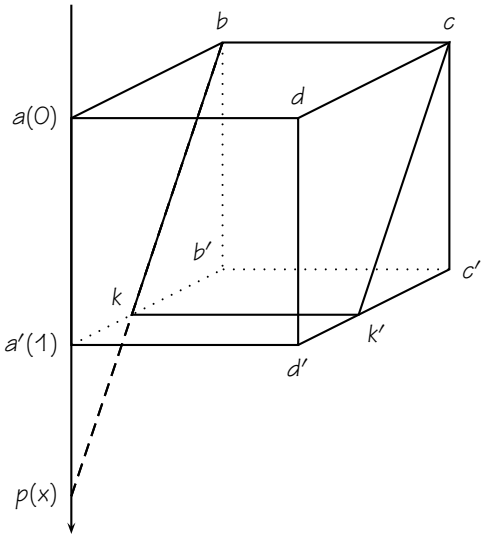
Le triangle abp étant semblable au triangle $b'kb$, on a $|kb'| = \frac{1}{x}$; il s'en suit que

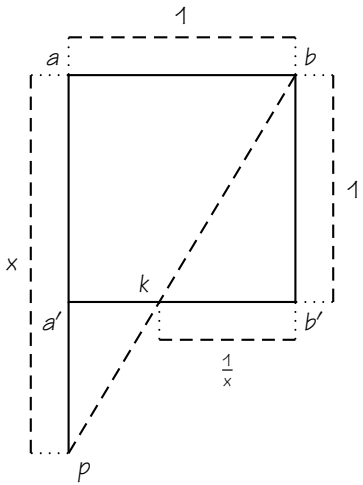
$$|kb| = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

$$A = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \quad \text{et} \quad P = 2+\frac{2\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

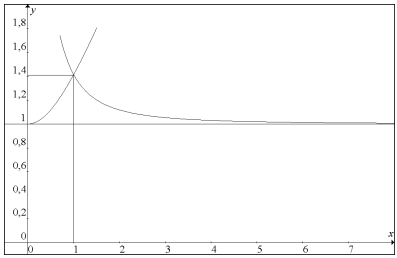
Ces deux expressions sont toujours valables pour le cas limite où p est confondu avec a'

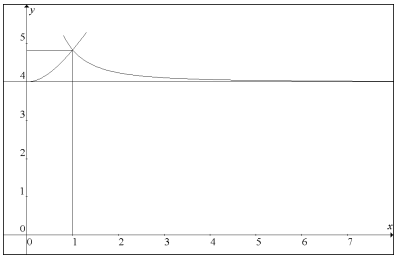
$$A = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad P = 2+2\sqrt{2}$$





Représentation graphique des fonctions $A(x)$ **et** $P(x)$





À gauche, le graphe de $A(x)$, à droite celui de $P(x)$; il est à remarquer qu'on obtient facilement le second à partir du premier ! Les pentes des tangentes aux points d'inflexion se calculent aisément.

Quant au problème de la signification géométrique du point d'inflexion des courbes étudiées, il est résolu puisqu'un tel point n'existe pas.

Cette étude peut se prolonger par le calcul du volume des sections du cube. Dans ce cas également, les résultats sont intéressants.

A la recherche de la fonction de Strähle

CH. FÉLIX,

Mathematique et Pédagogie n° 118 - 1998

1. La gamme tempérée

Il s'agit d'une gamme musicale telle que le rapport entre deux notes séparées d'un demi-ton soit constant ($= r$). Cette condition conduit à poser :

$$r^{12} = 2$$

ou

$$r = \sqrt[12]{2} = 1,05946.$$

Les pianos et les guitares (notes fixées) utilisent la gamme tempérée. La table des rapports s'établit donc comme suit :

do	1	1
ré♭	$\sqrt[12]{2}$	1,059
ré	$(\sqrt[12]{2})^2$	1,122
mi♭	$(\sqrt[12]{2})^3$	1,189
mi	$(\sqrt[12]{2})^4$	1,260
fa	$(\sqrt[12]{2})^5$	1,335
fa♯	$(\sqrt[12]{2})^6$	1,414

sol♭	$(\sqrt[12]{2})^6$	1,414
sol	$(\sqrt[12]{2})^7$	1,498
la♭	$(\sqrt[12]{2})^8$	1,587
la	$(\sqrt[12]{2})^9$	1,682
si♭	$(\sqrt[12]{2})^{10}$	1,782
si	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	1,888
do	2	2

Un premier article « Pourquoi les frettes sont-elles plus serrées, dans les aigus, sur une guitare ? » du même auteur est paru dans le n° 107 de mai-juin 1996. Il y montrait les différences entre les gammes chromatique (de PYTHAGORE) et tempérée, puis il examinait différentes méthodes historiques de placement des frettes lors de la construction de guitare, de viole, de luth, ... C'est de ce premier article que sont extraits ici les premier et deuxième paragraphes. L'auteur était revenu en 1998 sur l'une des constructions proposées et avait montré que la position des frettes était intimement liée à une fonction homographique. C'est cet aspect qui a été repris ici au troisième paragraphe.

2. Pourquoi les frettes sont-elles plus serrées, dans les aigus, sur une guitare ?

Si a_1, a_2, a_3, ... sont des termes d'une progression géométrique de raison q, alors $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, ... sont aussi les termes d'une progression géométrique de raison q. En effet,

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{a_k - a_{k-1}} = \frac{a_1 q^k - a_1 q^{k-1}}{a_1 q^{k-1} - a_1 q^{k-2}} = \frac{a_1 q^{k-1}(q-1)}{a_1 q^{k-2}(q-1)} = q.$$

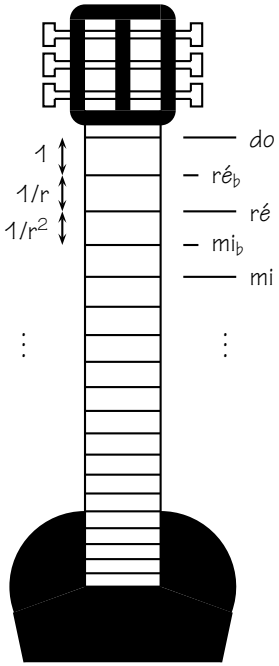
Dans une gamme tempérée, les rapports correspondant aux notes de cette gamme sont en progression géométrique de raison $r = \sqrt[12]{2}$.
Ainsi donc les longueurs des cordes sont en progression géométrique de raison

$$q = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} = 0,94387.$$

Par la propriété précédente, les différences de longueurs de cordes de 2 notes consécutives sont en progression géométrique de raison

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}} \qquad (< 1).$$

Donc, plus on va vers les aigus, plus la différence des longueurs est petite, ce qui explique que les frettes d'une guitare soient de plus en plus rapprochées vers le centre.



Si la longueur de la note *do* de base est 100, alors la longueur de corde du *do* supérieur devrait être égale à $100 \times \left(\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right)^{12} = 50$. Pour les autres notes, on a les longueurs de corde :

do	100.00
ré♭	94.387
ré	89.090
mi♭	84.090
mi	79.370

fa	74.905
sol♭	70.711
sol	66.742
la♭	62.996

la	59.460
si♭	56.123
si	52.973
do	50.000

3. Construction de Strähle

En 1743, Daniel Strähle, un artisan sans aucune connaissance mathématique, proposa une construction aussi simple qu'ingénieuse dans les Comptes Rendus de l'Académie de Suède. La voici :

> On trace un segment BC de longueur 12 divisé en 12 intervalles égaux. On trace ensuite des segments AB et AC égaux à 24. On joint A aux 11 points de partage de BC. On place L sur AB de sorte que BL soit égal à 7. Puis on trace la droite CL et le point O tels que LO soit égal à CL. Si CO est la corde de la note de base, alors LO correspond à l'octave. Strähle propose de considérer les 11 points d'intersection de CL avec les 11 rayons issus de A, comme les positions des frettes donnant les demi-tons.

Effectuons quelques calculs (voir la figure page 142) :

pour β :

$$\cos\beta = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \qquad \text{d'où} \qquad \underline{\beta = 75,52^\circ}$$

pour ϵ :

$$LC^2 = 7^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 7 \cdot \cos\beta \qquad \text{d'où} \qquad \underline{LC = \sqrt{151} = 12,288}$$

puis

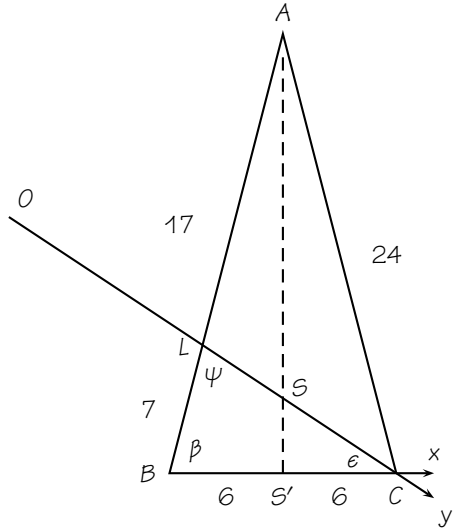
$$\frac{\sin\epsilon}{7} = \frac{\sin 75,52^\circ}{\sqrt{151}} \qquad \text{d'où} \qquad \underline{\epsilon = 33,47^\circ}$$

par conséquent :

$$SC = \frac{6}{\cos\epsilon} = 7,193$$

et

$$LS = 12,288 - 7,193 = 5,095.$$



Plaçons sur BC un axe x de manière que les graduations 0 et 1 coïncident respectivement avec B et C et sur LC un axe y de manière que les graduations 1 et 2 coïncident respectivement avec L et C.

Déterminons la coordonnée de S sur y

$$\frac{LS}{LC} = \frac{5,095}{12.288} = 0,4146.$$

D'où la coordonnée de $S = 1,4146$.

Un premier ajustement

Essayons de déterminer la courbe C qui contient les points (0,1), (1,2) et (0,5;1,4146).

Considérons une droite quelconque AD où D est sur l'axe x. Soit D' le point d'intersection de cette droite et de l'axe y. Appelons x la coordonnée de D et y la coordonnée de D' sur chacun des axes. Par la conservation du rapport anharmonique ([1]), nous obtenons :

([1]) Etant donné 4 points A, B, C, D sur un axe, dans un ordre quelconque, on appelle le rapport anharmonique (ou birapport) le nombre r :

$$r = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}, \qquad \text{noté } (ABCD)$$

ici $r = \frac{5}{1,5} : \frac{9}{5,5} \simeq 2,04$.
Propriété : le rapport anharmonique est conservé par projection centrale.

$$\frac{DS'}{DB} : \frac{CS'}{CB} = \frac{D'S}{D'L} : \frac{CS}{CL}$$

ou encore

$$\frac{0,5-x}{0-x} : \frac{0,5-1}{0-1} = \frac{1,4146-y}{1-y} : \frac{1,4146-2}{1-2}.$$

Explicitons y comme fonction de x :

$$\begin{aligned}
2(0,5-x)(1-y) &= -x(1,4146-y)\frac{1}{0,5854} \\
1-2x-y+2xy &= -\frac{1,4146x}{0,5854} + \frac{xy}{0,5854} \\
\left(2-\frac{1}{0,5854}\right)xy - y &= \left(2-\frac{1,4146}{0,5854}\right)x - 1 \\
[(1,1708-1)x-0,5854]y &= (1,1708-1,4146)x-0,5854 \\
y &= \frac{0,2438x+0,5854}{-0,1708x+0,5854}
\end{aligned}$$

ou, en multipliant les deux termes de la fraction par 40,9976 ([2]) :

$$y = \frac{9,9952x+24}{-7,0024x+24} \tag{1}$$

et finalement (en arrondissant) :

$$\boxed{y = \frac{10x+24}{-7x+24}}$$

Il s'agit de la fonction homographique, dite de « Strähle ».

Un autre ajustement

Ajustons maintenant la courbe en tenant compte de la valeur exacte, au sens de la gamme tempérée, pour sol♭ ; les trois points utilisés sont alors : (0,1), (1,2) et $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$.

Soit $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ la fonction homographique. Pour $x = 0$, nous avons $\frac{b}{d} = 1$, d'où $b = d$.

([2]) Savoir comment Strähle a eu l'idée de cette construction est une tout autre question ... on ne peut que constater que ce coefficient correspond au quotient de 24 par 0,5854.

Les autres conditions sont

$$\begin{cases} \frac{0{,}5a+b}{0{,}5c+b} = \sqrt{2} \\ \frac{a+b}{c+b} = 2 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} \frac{a+2b}{c+2b} = \sqrt{2} \\ \frac{a+b}{c+b} = 2 \end{cases}$$

Posons $\frac{b}{a} = b'$ et $\frac{c}{a} = c'$, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{1+2b'}{c'+2b'} = \sqrt{2} \\ \frac{1+b'}{c'+b'} = 2 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} 1+2b' = \sqrt{2}(c'+2b') \\ 1+b' = 2(c'+b') \end{cases}$$

De la deuxième équation, nous tirons $b' = 1 - 2c'$. En remplaçant dans la première équation, nous obtenons

$$1 + 2(1-2c') = \sqrt{2}\,(c' + 2(1-2c'))$$

$$c' = \frac{3-2\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

et

$$b' = 1 + \sqrt{2}.$$

Pour $a = 2 - \sqrt{2}$, on obtient $b = \sqrt{2}$ et $c = 1 - \sqrt{2}$ et

$$\boxed{y = \frac{(2-\sqrt{2})x+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})x+\sqrt{2}}}$$

En remplaçant $\sqrt{2}$ par la valeur approchée $\frac{17}{12}$, on obtient ([3])

$$\boxed{y = \frac{7x+17}{-5x+17}}$$

([3]) Si l'on reprend la fonction (1) de la page 143, et que l'on multiplie les deux termes de la fraction par 29,03997, on obtient

$$y = \frac{7{,}07799x + 17}{-4.96003x + 17},$$

définition extrêmement proche de celle trouvée lors de ce second ajustement.

Comme le montre le tableau ci-dessous, cette construction de Strähle se révèle être une très bonne construction ([4]).

		Strähle $y = \frac{10x+24}{-7x+24}$	Gamme tempérée $y = 2^x$	$10^5 x$ log erreur
do	$x = \frac{12}{12}$	2	2	0
ré♭	$x = \frac{11}{12}$	1,88626	1,88775	-34
ré	$x = \frac{10}{12}$	1,77981	1,78180	-48
mi♭	$x = \frac{9}{12}$	1,68000	1,68179	-47
mi	$x = \frac{8}{12}$	1,58621	1,58740	-33
fa	$x = \frac{7}{12}$	1,49791	1,49831	-12
sol♭	$x = \frac{6}{12}$	1,41463	1,41421($\sqrt{2}$)	13
sol	$x = \frac{5}{12}$	1,33597	1,33484	36
la♭	$x = \frac{4}{12}$	1,26154	1,25992	56
la	$x = \frac{3}{12}$	1,19101	1,18921	66
si♭	$x = \frac{2}{12}$	1,12409	1,12246	63
si	$x = \frac{1}{12}$	1,06050	1,05946	43
do	$x = 0$	1	1	0

La dernière colonne est calculée en utilisant la formule :

$$10^5 \times \log \left[\frac{\text{Strähle}}{\text{tempérée}} \right].$$

([4]) Pour pouvoir comparer la longueur de la corde calculée par la fonction de Strähle avec celle de la gamme tempérée donnée page 141, nous avons ramené la longueur de la note *do* de base de 100 à 2 et celle du *do* supérieur de 50 à 1

L'horloge de la gare de Mons

D. ODIET,

Mathematique et Pédagogie n° 122 - 1999

« Une grande part du temps scolaire est consacré à apprendre de nouvelles connaissances et à s'exercer à leur utilisation. Reste-t-il du temps pour développer le plaisir de chercher, pour lancer aux élèves des sortes de défis intellectuels dont l'objectif se trouve dans l'activité plus que dans le résultat ? Du temps aussi pour développer les attitudes et les connaissances nécessaires à cette activité, du temps pour essayer, pour se tromper, pour discuter une solution avec d'autres, pour tenter de convaincre, pour mettre en doute une méthode ou une réponse ? » ([1])

Dans le numéro 79 de *Math-Jeunes*, Claude Villers propose, sous le joli titre de « Quelle heure est-elle ? », un problème présentant les aspects essentiels cités plus haut. Le voici :

> Au moment de pénétrer dans le vaste bâtiment de la gare, Maxime jeta rapidement un regard interrogatif sur la grande façade vitrée. C'est qu'elle était dotée d'une grande horloge au design très simplifié. Douze gros points marquaient les emplacements des heures et deux aiguilles lumineuses se chargeaient de renseigner les voyageurs. Bien que grossière, la lecture de l'heure du moment pouvait se faire à la minute près. Maxime constata ainsi qu'il disposait encore de six minutes avant le départ de son train. Tout de suite, il se retrouva instantanément ([2]) dans le hall d'attente où il jeta un coup d'oeil vers l'horloge visible par transparence. « Tiens, se dit-il, si je n'y prenais garde, je croirais disposer maintenant de trois heures et demie d'attente ». Quelle heure est-il à l'horloge de la gare ? Quelle est l'heure de départ du train que Maxime veut emprunter ?

Tout problème mathématique lié à une montre, notamment aux positions des aiguilles sur son cadran, plus précisément à l'angle formé entre celles-ci, me ramène inexorablement à ma période scolaire lycéenne. Mon professeur de mathématique d'alors, fervent adepte d'un enseignement de type purement transmissif, en était particulièrement friand, tellement d'ailleurs qu'il

([1]) *Pourquoi des mathématiques à l'école ?*, Roland Charnay, ESF Editeur, 1996.
([2]) *derechef* dans le texte original

avait réussi à installer parmi plusieurs de ses élèves un véritable sentiment de dégoût. Il avait beau s'évertuer à asséner son schéma de résolution, sa méthode infaillible, son « Il suffit de faire comme ça ! », peine perdue, chaque nouveau problème d'horloge suscitait systématiquement pour beaucoup d'entre nous angoisse, impossibilité de mobiliser la recette du prof, donc invitation à passer directement au problème suivant.

Bientôt vingt ans ont passé ... Trouvé lors de quelques paisibles lectures de vacances, un extrait de Marc Legrand ([3]) résume à lui seul ce pittoresque professeur :

> Dans le Supérieur plus encore que dans le Secondaire, on rencontre de telles personnes parfois passionnées par leur discipline ; des élèves ou des étudiants, ou plus exactement des auditeurs, sont nécessaires à leurs discours, mais au fond ce sont plus des conférenciers que des professeurs, car ils n'ont aucun souci de ce qui se passe réellement dans la tête de leurs interlocuteurs. Certains d'entre eux d'ailleurs déclarent sans ambages ne pas vouloir le savoir ; ils sont là, disent-ils, pour enseigner leur discipline ...

Grâce à l'horloge de la gare de Mons, l'heure à la réconciliation avec de tels énoncés a enfin sonné, si j'ose dire ... Entendons-nous : il me paraît absolument évident que ce type de problème bien spécifique invite à la mise en oeuvre d'outils de résolution bien personnels, reflets de la compréhension, de la perception et de la conceptualisation ô combien différentes que chacun d'entre nous s'en fait. Il est donc illusoire de vouloir imposer un type de méthode à ses élèves. L'enseignant doit en être conscient. Les différentes productions d'élèves, n'ayant pas les mêmes compétences mathématiques, en sont une illustration tangible.

Au fait, avez-vous trouvé l'heure de départ du train ?

Nul doute que la précision de l'énoncé du problème — c'est là aussi un de ses côtés remarquables — n'est pas étrangère à votre réussite. Une seule petite ambiguïté réside éventuellement dans « l'expression » et la notation de l'heure : est-ce exact de dire que si l'on retranche trois heures à 1h de l'après-midi (13h), il est 10h du matin ? Ceci n'a en tous les cas aucunement perturbé les élèves, bien désireux de ne pas ériger un obstacle supplémentaire. Pour eux, la condition d'infériorité d'une heure par rapport à

([3]) *La crise de l'enseignement : un problème de qualité*, Marc Legrand, ALEAS Editeur, 1989.

une autre rime avec le recul des aiguilles. Vous allez probablement retrouver votre démarche parmi celles proposées ci-dessous ([4]).

Julien et Sébastien

On s'est dit qu'il fallait utiliser du papier calque. C'est plus facile pour s'imaginer l'heure depuis l'intérieur du hall. On est parti dans le côté droit en haut de l'horloge. Après quelques essais, on s'est aperçu que l'heure soit se situer entre 13h00 et 14h00.

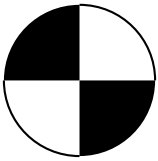
Heure devant la gare	Départ du train	Heure hall	Différence
13h40	13h46	10h20	3h26
13h41	13h47	10h19	3h28
13h42	13h48	10h18	3h30

Réponse : il est 13h42; le train part à 13h48.

L'emploi du papier calque prend ici une dimension non dépourvue de sens : n'est-ce pas le support inévitable de l'introduction de la symétrie axiale?

Yohann et Luc

1) Nous avons cherché les zones impossibles pour la petite aiguille pour l'heure actuelle et extérieure. Nous avons découvert deux zones impossibles : ■



2) Nous avons cherché les zones possibles pour la grande aiguille. Nous avons remarqué qu'elle doit être près du quart (15) ou du trois-quart (45).

La moitié de six minutes : 3 minutes.

$15 - 3 = 12$ ...	$45 - 3 = 42$ ...
symétrie axiale ... 48	symétrie axiale ... 18
$48 + 30 = 1$h18	$18 + 30 = 48$
$12 + 6 = 18$	$42 + 6 = 48$

([4]) Les travaux présentés ont été « relookés », mais sont l'exact reflet des productions des élèves.

Cela prouve que l'aiguille des minutes peut se trouver sur 12 (heure actuelle)	Cela prouve que la grande aiguille peut se trouver sur 42 (heure actuelle)

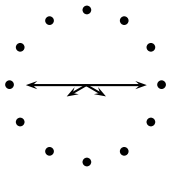
3)

heure actuelle (1)	heure par symétrie (2)	(2) + 3h30	(1) + 6 min
1h12	10h48	2h18	1h18
1h42	10h18	1h48	1h48
2h12	9h48	1h16	2h18
2h42	9h18	0h48	2h48
7h12	4h48	6h16	7h18
7h42	4h18	7h48	7h48
8h12	3h48	7h18	8h18
8h42	3h18	6h48	8h48

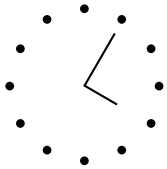
Cette démarche était nettement plus détaillée ...

Dominik et Nicolas

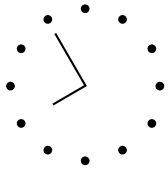
Nous avons fait un axe de symétrie d'axe 12h – 6h.
Ensuite, nous avons tracé un écart de 1h45 de chaque côté.
En enlevant 3 minutes, nous obtenons l'heure de la gare : 7h42. le train part à 7h48.
De l'autre côté, il est 4h18.



Quand il est
4h05, après midi,
devant la gare



Quand il est
4h05, avant midi,
dans le hall

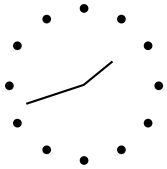


L'écart horaire est de **4h05 + 4h05 = 8h10**,

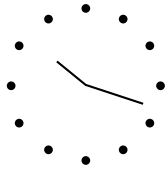
inversément

si l'écart considéré est de **3h24 = 1h42 + 1h42**

Il est donc
1h42, après midi,
devant la gare.



et il « est »
1h42, avant midi,
dans le hall.



Brice et Raphaël

L'emploi de l'outil équation était évidemment attendu ([5]). Ici l'équation à une variable.

Heure lue depuis l'extérieur	Heure lue depuis l'intérieur
1	11
2	10
3	9
...	...
x	$-1(x-12)$

Nous avons trouvé une équation.

	unité heure	unité minute
heure lue depuis l'extérieur	x	x
heure lue depuis l'intérieur	$-1(x-12)$	$-1(x-720)$
heure de départ du train	$x+0,1$ $x+0,1=-1(x-12)+3,5$ $x+0,1=-x+12+3,5$ $2x=15,4$ $x=7,7$	$x+6$ $x+6=-1(x-720)+210$ $x+6=-x+720+210$ $2x=924$ $x=462$

7,7h = 7h42min = 462min

([5]) C'est cette solution qui avait été largement commentée dans l'article de *Math-Jeunes* dont parle l'auteur.

Il est 7h42min et le train part à 7h48min.

Tarik et Ignace

... ici, l'équation à deux variables.

Quand on regarde l'horloge par transparence, c'est en fait une symétrie axiale. Si l'aiguille des heures est placée sur « h », elle sera par transparence sur « $11 - h$ ». L'aiguille des minutes « m » sera placée sur « $60 - m$ ».

$$h; m \longrightarrow 11 - h; 60 - m.$$

Ensuite, l'heure indiquée sur la première montre doit donner la même heure moins 3h24 par transparence.

$$h; m \longrightarrow h - 3; m - 24.$$

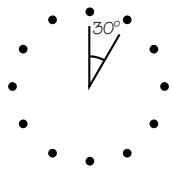
On peut en déduire les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 11 - h = h - 3 \\ 60 - m = m - 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 7 \\ m = 42 \end{cases}$$

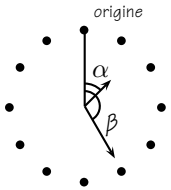
Il est 7h42, le train part à 7h48. De l'autre côté, il semble être 4h18.

Pauline et Lorraine



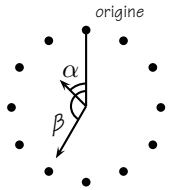
En 1h, la petite aiguille avance de 30° ; en 1min, la petite aiguille avance de 0,5° (30 : 60).
En 1h, la grande aiguille avance de 360° ; en 1 min, la grande aiguille avance de 6°.

A l'extérieur de la gare



Heure lue : (α, β)

A l'intérieur de la gare



Heure lue : $(360° - \alpha, 360° - \beta)$

Heure de départ du train : $(\alpha, \beta) + 6\text{min}$
$(\alpha + 6 \cdot 0,5°; \beta + 6 \cdot 6°)$
$(\alpha + 3°; \beta + 36°)$

Heure lue de l'intérieur + 3h30 = heure de départ.

1) Petite aiguille :

$$\begin{aligned}(360° - \alpha) + 3,5 \cdot 30° &= \alpha + 3° \\ 360° - \alpha + 105° &= \alpha + 3° \\ \alpha &= 231°\end{aligned}$$

2) Grand aiguille :

$$\begin{aligned}(360° - \beta) + 180° &= \beta + 36° \\ \beta &= 252°\end{aligned}$$

(en 3h30, la grande aiguille parcourt 1260°, elle se « déplace » donc de 180°).

Petite aiguille (231°) : il est entre 7h et 8h.

Grande aiguille (252°) : en 1 min $\longrightarrow$ 6°
en ? min $\longrightarrow$ 252°

262 : 6 = 42

Vérification : en 42 min, la petite aiguille parcourt 21°

$7 \cdot 30° + 21° = 231°$

Conclusion : il est 7h42, Maxime doit prendre son train à 7h48.

Dans nos classes

Yolande Noël-Roch

ORGANISER, CALCULER, VISUALISER.
Mathématique et Pédagogie n° 43 - 1989

1. UN « PETIT DESSIN » VAUT MIEUX QU'UN « LONG SYSTEME »!

			7				x				8		

Chacune des 14 cases contient un nombre. Déterminer la valeur de x sachant que l'on obtient 18 chaque fois qu'on calcule la somme des contenus de 3 cases consécutives.

2. NE CALCULER QUE CE QU'IL FAUT!

Quel est le chiffre des dizaines de la somme suivante :

$$1! + 2! + 3! + \cdots + 1989!$$

Que se passe-t-il en 2003?

3. TROUVER UNE SCHEMATISATION ADEQUATE!

Combien existe-t-il de nombres naturels de n chiffres écrits uniquement avec les chiffres 1, 2 et/ou 3?

Combien parmi eux s'écrivent en utilisant chacun des trois chiffres au moins une fois?

4. BIEN CONNAÎTRE « LE CARRE »!

En ne dessinant que deux droites, découper un carré en quatre parties isométriques.

Et si chacune des parties doit être un quadrilatère non carré?

Quelques indications

1. La réponse (3) importe peu mais il sera sans doute instructif de voir quel support de raisonnement les élèves utiliseront.

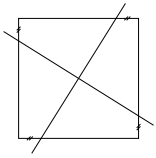
2. A partir de 10!, tous les termes se terminent à droite par ... 00 et il suffit donc de calculer ... dans tous les cas ... la somme

$$1! + 2! + 3! + ... + 9!$$

ou mieux : il suffit de calculer les deux premiers chiffres à droite de cette somme. (La réponse attendue est 1)

3. La première réponse est 3^n. Pour la seconde, il faut décompter les trois nombres qui s'écrivent respectivement en n'utilisant que le chiffre l, que le chiffre 2, que le chiffre 3 ainsi que les nombres qui s'écrivent en utilisant exactement deux chiffres parmi les trois : il y en a $3(2^n - 2)$.

4. Sans doute la première partie de l'énoncé fait-elle penser aux médianes et aux diagonales du carré. Mais avez-vous pensé aussi vite à l'infinité de solutions exploitant l'invariance du carré par rotation autour de son centre ?

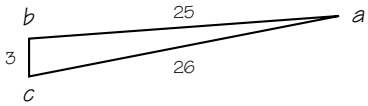


Autour du théorème de Pythagore. *Mathématique et Pédagogie* n° 82 - 1991

Voici en vrac des énoncés qui « touchent » au théorème de Pythagore. Mon souhait : qu'un grain de cette moisson vous soit utile !

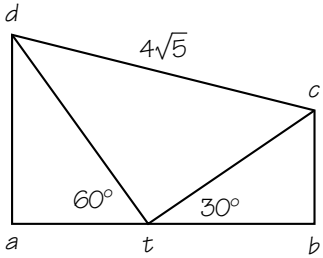
1.

Quelle est la mesure de la « hauteur relative au sommet a du triangle » ?



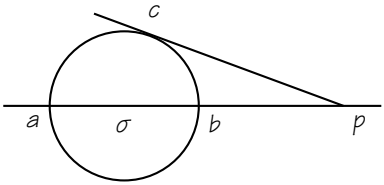
2.

Calculer la longueur de $[a, b]$ sachant que le périmètre de dat est double de celui de tbc.



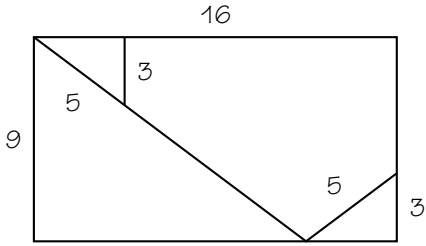
3.

σ est le centre du cercle et cp est la tangente au cercle en c. Calculer le diamètre du cercle sachant que $|ap| = 8$ et $|cp| = 4$.



4.

On découpe le rectangle de 16 cm sur 9 cm en respectant le patron.
Assembler les quatre pièces pour former un carré. Quel est son périmètre ?



5.

Dans une feuille carrée, on veut découper un octogone régulier, le plus grand possible, en coupant les quatre coins. Où faut-il effectuer les coupures ?

6.

À un hexagone régulier, on inscrit un disque D_1 et on circonscrit le disque D_2. Que vaut $\frac{\text{Aire } D_1}{\text{Aire } D_2}$?

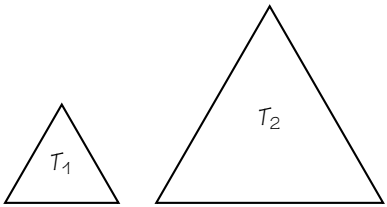
7.

Quelle longueur de fil de fer faut-il prévoir pour réaliser un parallélipipède rectangle dont les arêtes mesurent 6, 8 et 24 cm, sachant qu'on veut aussi souder les quatre diagonales intérieures du solide ?

8.

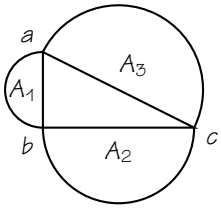
On donne deux triangles équilatéraux T_1 et T_2. Construire un triangle équilatéral T tel que

$$\text{aire } T = \text{aire } T_1 + \text{aire } T_2.$$



9.

Le triangle abc est rectangle en b et A_1, A_2, A_3 sont des demi-cercles.
Comparer l'aire de A_3 à la somme de A_1 et A_2.



10.

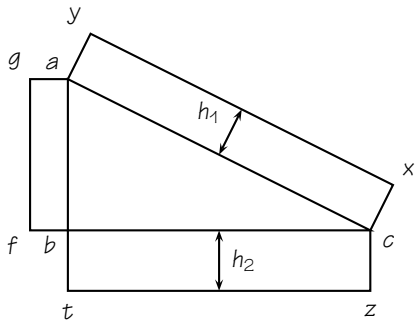
Sur une feuille quadrillée, en n'utilisant comme sommets que les intersections

du quadrillage, peut-on construire des segments de longueur $\sqrt{n}$ pour tout n entier entre 1 et 100 ?

11.

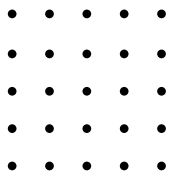
Le triangle abc est rectangle et ses côtés mesurent 3cm, 4cm et 5cm. On a construit le rectangle $abfg$ avec $|ag| = 1$. Quelles hauteurs h_1 et h_2 peut-on donner à des rectangles $acxy$ et $bczt$ pour obtenir l'égalité

$$\text{aire } acxy = \text{aire } abfg + \text{aire } bczt?$$



12.

Seuls les sommets de ce « géoplan carré 5×5 » peuvent être choisis comme sommets de triangle. Combien de triangles rectangles non isométriques peut-on trouver ?



Solutions

1. 24
2. $4 + 2\sqrt{3}$
3. 6
4. 48
5. On coupe en chaque coin un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent $\frac{2c-c\sqrt{2}}{2}$ où c désigne la longueur du côté du carré donné.
6. $\frac{3}{4}$
7. 256
8. Le triangle équilatéral cherché a comme côté l'hypothénuse du triangle rectangle construit avec un côté de T_1 et un coté de T_2 comme côtés de l'angle droit.
9. Aire $A_3 =$ aire $A_1 +$ aire A_2
10. Cette fois, je serai tout à fait avare de commentaire !

11. $h_1 = \frac{5}{3}$ et $h_2 = \frac{4}{3}$
12. 17

Arithmétique et apprentissage de la démonstration.
***Mathématique et Pédagogie* n° 112 - 1997**

A.
$1+2=3$
$2+3=5$
$3+4=7$
$4+5=9$

$42+43=\cdots$

B.
$1+2+3=\cdots$
$2+3+4=\cdots$
$3+4+5=\cdots$
$4+5+6=\cdots$

$42+43+44=\cdots$

C.
$1+2+3+4=\cdots$
$2+3+4+5=\cdots$
$3+4+5+6=\cdots$

$42+43+44+45=\cdots$

D.
$1+2+3+4+5=\cdots$
$2+3+4+5+6=\cdots$

$42+43+44+45+46=\cdots$

E.
$1+2+3+4+5+6=\cdots$
$2+3+4+5+6+7=\cdots$

$42+43+44+45+46+47=\cdots$

F.
$1+2+3+4+5+6+7=\cdots$
$2+3+4+5+6+7+8=\cdots$

$21+22+23+24+25+26+27=\cdots$

G.
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=\cdots$
$301+302+303+304+305+306+307+308+309+310+311=\cdots$

Que remarques-tu ?

A condition de laisser la parole aux élèves, je pense que la page de calcul qui précède peut conduire ceux-ci à formuler des conjectures, à avoir besoin d'un minimum de vocabulaire de base pour s'exprimer oralement (nombre pair, nombres consécutifs, ...), à avoir besoin d'un minimum d'expressions pratiques pour s'exprimer par écrit (comment expliciter qu'un naturel est pair, que deux naturels sont consécutifs, ...).

La situation permet aussi de démontrer des conjectures, en respectant une progression dans les énoncés comme dans la présentation de la démonstration, selon que les élèves sont plus ou moins jeunes et selon le niveau de rédaction auxquels ils peuvent être amenés.

1. A tout niveau

Confrontés à la page de calcul qui précède, il est probable que les élèves parleront de

- somme de plusieurs nombres (naturels)
- nombres qui se suivent
- nombres pairs, nombres impairs
- multiples de 3, multiples de 5
- ...

Selon que les élèves continueront à calculer les sommes comme si chaque calcul était donné seul ou qu'ils s'organiseront peu à peu pour obtenir les nouveaux résultats « économiquement » à partir d'autres sommes déjà effectuées, ils disposeront d'éléments plus ou moins forts pour établir des conjectures, mais surtout pour élaborer des justifications plus ou moins claires de ces conjectures.

Il est donc essentiel de laisser calculer librement, en observant si possible d'éventuelles stratégies, mais sans les influencer.

Le vocabulaire peut être un peu plus codé si les élèves sont plus agés, les stratégies peuvent évoluer plus rapidement et des notations plus élaborées peuvent être disponibles si les élèves sont plus agés (au deuxième degré par exemple) mais il faut que la matière soit créée par la classe puisqu'on y puisera des démonstrations sans avoir recours au parachutage magistral.

2. Au premier degré

Parmi des conjectures possibles,

- Toutes les sommes obtenues en A sont impaires.
- Toutes les sommes obtenues en E sont impaires.
- En B, D et F, les sommes sont alternativement paires et impaires.
- Pour obtenir les sommes en B, on peut utiliser les résultats donnés en A et calculer $3+3$, $5+4$, $7+5$, ...
- Pour calculer la deuxième ligne en G, on peut ajouter 11×300 à la somme obtenue à la première ligne.
- Pour chaque lettre (en D par exemple), toutes les sommes s'obtiennent facilement à partir des sommes obtenues sous la lettre précédente (ici C).
- Pour chaque lettre, après avoir calculé la somme de la première ligne, on ajoute toujours le même nombre pour obtenir la somme suivante (3 dans la colonne B, 4 dans la colonne D, ...)
- Toutes les sommes en B sont multiples de 3.
- Toutes les sommes en D sont multiples de 5
- ...

Bien d'autres possibilités existent et nous serons heureux d'alimenter cette rubrique grâce à l'imagination de vos élèves. Nous ne nous sommes pas amusés à proposer des conjectures incorrectes. Elles seront cependant inévitables et pain bénit didactique dans les classes puisqu'elles provoqueront des discussions et motiveront la recherche de justifications et/ou réfutations dans la partie collective du travail.

Nous avons accumulé ci-dessus des conjectures dans le désordre.

- Certaines ressemblent à des énoncés de « théorèmes » :
  La somme de deux naturels consécutifs est toujous un naturel impair
- D'autres sont des « démonstrations » de tels théorèmes : Ainsi, en A par exemple, si les élèves ont remarqué la chaîne de résultats

$$3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+2} 9 \xrightarrow{+2} \dots$$

  c'est-à-dire l'application répétitive de **l'opérateur** +2 à partir du nombre **impair** 3, il s'agit bien d'une première démonstration de l'imparité de toutes les sommes de ce groupe de calcul.

De manière analogue, le schéma fléché

$$6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15 \xrightarrow{+3} \cdots$$

justifie que toutes les sommes de trois naturels consécutifs sont multiples de 3.

En C, partant de 10 et ajoutant toujours 4, nous obtenons toujours des nombres pairs, mais aucun n'est multiple de 4.

En D, partant de 15 et appliquant répétitivement l'opérateur +5, toutes les sommes sont multiples de 5.

Peut-être les élèves remarqueront-ils que les sommes obtenues en B sont alternativement multiples de 6 et de 3 ? Cette constatation est évidemment correcte et les élèves risquent d'en amener d'autres encore. Si la situation devient trop touffue, la disposition en colonne des cas B, D et F peut aider à focaliser l'attention sur les **sommes d'un nombre impair de naturels consécutifs** :

- **Toute somme de trois naturels consécutifs est multiple de 3**
- **Toute somme de cinq naturels consécutifs est multiple de 5**
- **Toute somme de sept naturels consécutifs est multiple de 7**

Si les élèves n'y voient pas clair, on s'en rendra compte en leur demandant ce qui se passe en G, s'ils peuvent proposer un autre groupe de calculs intéressants, deviner une propriété et la justifier. Un autre support, utilisant une lettre peut modifier la rédaction d'une démonstration. Prenons par exemple le cas de sommes de 17 naturels consécutifs :

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17 = 153$ est multiple de 17. Les sommes suivantes sont

$$2+3+4+\cdots+18$$

$$3+4+5+\cdots+19$$

Chaque somme vaut 17 de plus que la précédente et apparaît donc dans le schéma

$$153 \xrightarrow{+17} \cdots \xrightarrow{+17} \cdots \xrightarrow{+17} \cdots \xrightarrow{+17} \cdots$$

qui donnent successivement des multiples de 17.

En utilisant une lettre, une « somme générale » peut s'écrire

$$(n+1)+(n+2)+(n+3)+\cdots+(n+17)$$

Sachant que $1+2+3+4+\cdots+17=153$ est un multiple de 17, et que

$$(n+1)+(n+2)+\cdots(n+17)=(n+n+\cdots+n)+(1+2+\cdots+17)=(17\times n)+153$$

on peut en déduire que 17 peut être mis en évidence, ce qui amène une écriture générale d'un multiple de 17.

3. Au deuxième degré

Les considérations sur les nombres naturels peuvent être étendues aux nombres entiers. C'est dans le cadre des entiers que 0 acquierra son statut de multiple de tous les nombres. L'existence des nombres et de leurs opposés permettra de simplifier des démonstrations. Nous détaillons un peu ces points dans la suite.

La formulation écrite est facilitée par l'usage de lettres, faisant le lien avec la notation algébrique. La rédaction des démonstrations évolue grâce à ces nouveaux moyens. La situation permet aussi une importante évolution dans la structuration logique de certaines conjectures énoncées plus haut :

- Les énoncés séparés donnés pour les sommes de trois naturels consécutifs, de cinq nombres naturels, etc, peuvent être rassemblés et généralisés :
- La rédaction d'une démonstration dans les **entiers** permet de « voir » que la condition suffisante (le nombre de termes de la somme est impair) est aussi une condition nécessaire. Ainsi, une infinité d'implications vues dans un premier temps sont finalement reprises avec leurs réciproques dans une belle équivalence en synthèse finale de l' activité.

3.1. Zéro, partition, multiples de ...

- Nous avons rencontré, au paragraphe 1.2, des schémas fléchés du type

$$6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15 \xrightarrow{+3} \cdots$$

Leur extension aux nombres entiers conduit à

$$\cdots \xleftarrow{-3} -6 \xleftarrow{-3} -3 \xleftarrow{-3} 0 \xleftarrow{-3} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} \cdots$$

et 0 prend, dans cette chaî ne, son rôle de multiple de 3 à part entière !

– En utilisant l'opérateur « +3 » et différentes origines dans $\mathbb{Z}$, trois familles apparaissent : les multiples de 3, les (multiples de 3)+1, les (multiples de 3)+2 ...à moins que ce ne soient les (multiples de 3)−1 ? Les notations $3k$, $3k+1$, $3k+2$ et $3k-1$ pour désigner un élément général des trois familles respectives peuvent s'appuyer sur ce support.

3.2. Nombres consécutifs

Une nouvelle fiche de travail peut être proposée pour orienter un peu la suite du travail.

Voici quelques nombres entiers consécutifs :

$$-6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

Choisis parmi ceux-ci quelques nombres consécutifs et calcule leur somme.
Recommence plusieurs fois.
Y a-t-il des choix qui rendent le calcul plus facile ?
Un défi : donne une suite de mille entiers consécutifs et leur somme.

Revenons au point G de la feuille de calcul :

$$(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5$$

est une somme de onze entiers qui vaut 0.

Pour calculer

$$301+302+303+304+305+306+307+308+309+310+311$$

comparons les termes des deux sommes :

$$\begin{array}{ccccccccccc} (-5) & (-4) & (-3) & (-2) & (-1) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 301 & 302 & 303 & 304 & 305 & 306 & 307 & 308 & 309 & 310 & 311 \end{array}$$

Chaque terme de la deuxième somme vaut 306 de plus que le terme correspondant de la première. Ainsi la deuxième vaut $0+(11\times 306)=3366$.

3.3. Evolution d'une notation

Comment exprimer une suite de trois nombres consécutifs de manière générale ? Nous pouvons utiliser des notations variées comme :

$$n \qquad n+1 \qquad n+2 \tag{1}$$

$$n+1 \qquad n+2 \qquad n+3 \tag{2}$$

$$n-1 \qquad n \qquad n+1 \tag{3}$$

C'est évidemment la forme (1) qui vient spontanément. Nous avons déjà exploité subrepticement l'intérêt de (2) en fin de première partie pour démontrer que toute somme de dix-sept naturels consécutifs est multiple de 17. Enfin, (3) marque une étape décisive

- pour simplifier encore la démonstration donnée en fin du paragraphe 1.2. En effet, la somme de dix-sept entiers consécutifs peut s'écrire

$$(n-8)+(n-7)+\cdots+(n-1)+n+(n+1)+\cdots+(n+8)=17n$$

- pour percevoir le passage à la réciproque, comme nous l'expliciterons plus loin.

3.4. Une implication, une équivalence

Toute somme d'un nombre impair ($2k+1$) d'entiers est multiple de ce nombre.

Si les élèves écrivent

$$a=n+(n+1)+(n+2)+\cdots(n+2k-2)+(n+2k-1)+(n+2k)$$

nous pouvons généraliser une démonstration prévue au premier degré :

$$a=(n+n+n+\cdots+n)+(1+2+3+\cdots(2k-2)+(2k-1)+2k)$$

Comme « les premières parenthèses » contiennent le nombre $17n$, il suffit de voir si $1+2+3+\cdots(2k-2)+(2k-1)+2k$ est multiple de 17 pour pouvoir le mettre en évidence et savoir que a est multiple de 17.

La situation motive ainsi le calcul de $1+2+3+\cdots(2k-2)+(2k-1)+2k$, ...c'est-à-dire le calcul classique de

$$1+2+3+4+\cdots+n$$

Le calcul de a exécuté ci-dessus donne l'occasion de montrer l'intérêt de noter autrement une suite de $2k+1$ entiers consécutifs. En effet, en utilisant la notation (3) ci-dessus, la somme à évaluer est

$$a = (n-k) + (n-k+1) + \cdots + n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+k-1) + (n+k)$$

...et a vaut « presque évidemment ? » $(2k+1) \times n$. La somme est donc multiple de $2k+1$.

De plus, dans cette dernière recherche de justification, le jeu des « compensations » entre les termes symétriques de part et d'autre du terme n de la somme fait « sentir » l'importance de disposer d'un nombre **impair** de termes puisque les « compensations » se font symétriquement autour de n.

Si nous avions une somme d'un nombre pair (soit $2k$) de termes, soit

$$t = (n-k) + (n-k+1) + \cdots + (n-1) + n + (n+1) + \cdots (n+k-2) + (n+k-1)$$

Après compensations, il reste

$$t = (n+n+n+\cdots+n) - k$$

avec $2k$ termes entre les parenthèses. Ainsi, $t = (n \times 2k) - k$ est multiple de k mais pas de $2k$.

Pour qu'une somme de x entiers soit multiple de x, il **faut** donc que x soit **impair**.

Nous avons donc démontré l'équivalence suivante :

La somme de x nombres entiers consécutifs est multiple de x si et seulement si x est impair.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets

En musique.

Problème n° 271 de *Mathématique et Pédagogie* n° 139.

Des musiciens sont disposés suivant un réseau rectangulaire de m lignes et n colonnes. Le chef aligne d'abord ses musiciens par ordre de taille croissante sur chaque ligne de gauche à droite, puis fait de même sur chaque colonne d'avant vers l'arrière. Monter que ce deuxième arrangement ne perturbe pas l'ordre croissant dans les lignes.

Solution de P. Bornsztein de Pontoise

On identifiera chaque musicien avec sa taille.

On appelle étape 1 (resp. étape 2) la fin de l'ordonnancement par lignes (resp. colonnes).

Notons $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \dots & \dots \\ a_m & b_m \end{vmatrix}$ deux colonnes consécutives de musiciens après l'étape 2.

Avec donc : $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_m$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_m$. (1)

De plus, comme l'étape 2 vient après l'étape 1, pour tout $j \in 1, 2, \dots, m$, il existe un $i \in 1, 2, \dots, m$ tel que a_i et b_j étaient sur la même ligne juste après l'étape 1. On dira alors que a_i et b_j étaient des compagnons.

L'ordonnancement par ligne de l'étape 1 assure que si a_i et b_j étaient des compagnons, alors $a_i \leqslant b_j$.(2)

De plus , si $b_j \neq b_k$ leurs compagnons respectifs sont forcément différents.

L'objectif du problème est de prouver que, pour tout $i \in 1, 2, \dots, m$, on a $a_i \leqslant b_i$.

<u>Par l'absurde</u> : Supposons qu'il existe $i \in 1, 2, \dots, m$, tel que $a_i > b_i$. (3)

Soit k le plus petit indice vérifiant (3).

De (1) on déduit que, pour tous $i \geqslant k$ et $j \leqslant k$, on a $b_j \leqslant b_k < a_k \leqslant a_i$.

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C.Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse e-mail festraetscl@brutele.be.

Par suite, d'après (2), les compagnons de $b_1, \ldots, b_k$ sont à choisir parmi $a_1, \ldots, a_{k-1}$ et parmi eux seuls (si $k = 1$, il n'y a carrément personne pour jouer le rôle de compagnon).

Manifestement, il y a un des b_j's qui ne pourra pas trouver de compagnon. D'où contradiction.

Bonnes solutions de J. Anseeuw de Roeselare et de J. Rasse de Méan.

Lieu géométrique.

Problème n° 272 de *Mathématique et Pédagogie* n° 139.

Soit D un point quelconque sur le côté $[AB]$ d'un triangle ABC donné et soit E le point où CD coupe la tangente extérieure commune aux cercles inscrits dans les triangle ACD et BCD. Si D prend toutes les positions entre A et B, montrer que E décrit un arc de cercle.

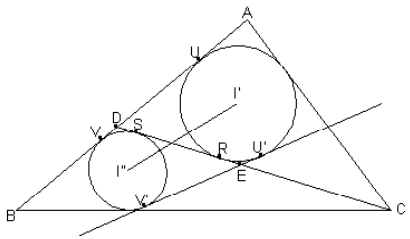
Solution de J. Finoulst de Diepenbeek

Rappelons deux propriétés que nous appliquerons :

1) les parties des tangentes à un cercle issues d'un point quelconque et limitées aux points de contact sont égales;

2) si P et Q sont les points de contact des côtés CA et CB avec le cercle inscrit au triangle ABC, on a $CP = CQ = \frac{1}{2}(CA + CB - AB)$.

Les notations utilisées ci-dessous sont celles de la figure.
La droite $I'I''$ est un axe de symétrie de la figure formée par les deux tangentes UV et $U'V'$, par conséquent $|UV| = |U'V'|$, ce que nous écrirons simplement $UV = U'V'$.



On a

$$UV = UD + DV = DR + DS = (DS + SR) + DS = SR + 2DS$$

$$U'V' = U'E + EV' = ER + ES = ER + (ER + SR) = SR + 2ER$$

On peut conclure que $DS = ER$.

Maintenant prouvons que CE a une longueur invariable.

En effet,

$$\begin{aligned} CE &= CD - DE \\ &= CD - (DR + RE) \\ &= CD - \frac{1}{2}(CD + AD - AC) - \frac{1}{2}(DC + DB - BC) \\ &= \frac{1}{2}(AC - AD + BC - DB) \\ &= \frac{1}{2}(AC + BC - AB) \end{aligned}$$

Conclusion : le lieu géométrique de E est un arc de cercle intérieur au triangle ABC, de centre C et de rayon $\frac{1}{2}(AC + BC - AB)$; les extrémités de cet arc sont les points de contact du cercle inscrit au triangle ABC et des côtés CA et CB.

J. Anseeuw de Roeselare, P. Bornsztein de Pontoise et J. Rasse de Méan ont aussi envoyé de **bonnes solutions**.

Carrés parfaits.

Problème n° 273 de *Mathématique et Pédagogie* n° 139.

On donne la suite (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ définie par $\begin{cases} a_1 = 1 = a_2 \\ a_{n+1} = 18a_n - a_{n-1} \end{cases}$.

Démontrer que tous les nombres de la forme $5a_n^2 - 1$ sont des carrés parfaits.

Solution de M. Coyette de Rixensart

1) Pour chaque $n > 1$, $a_{n+1} = 18a_n - a_{n-1}$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$, posons $b_n = \frac{1}{4}(a_{n+1} - 9a_n$.

Donc,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{4}(a_{n+1} - 9a_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4}(18a_{n+1} - a_n - 9a_{n+1} \\ &= \frac{1}{4}(9a_{n+1} - a_n) \end{aligned}$$

et $b_{n+1} - 20a_n = \frac{1}{4}(9a_{n+1} - 81a_n) = 9b_n$

Les deux suites vérifient donc, pour chaque $n \in \mathbf{N}_0$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = -2 \\ a_{n+1} = 9a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 20a_n + 9b_n \end{cases}$$

2) Démontrons : pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$, si $b_n^2 = 5a_n^2 - 1$, alors $b_{n+1}^2 = 5a_{n+1}^2 - 1$.

Comme $a_1 = 1$ et $b_1 = -2$, nous avons $b_1^2 = 5a_1^2 - 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}_0$, posons $b_n^2 = 5a_n^2 - 1$.

$400a_n^2 + 81b_n^2 + 360a_nb_n = 405a_n^2 + 80b_n^2 + 360a_nb_n - 1$

$(20a_n + 9b_n)^2 = 5(9a_n + 4b_n)^2 - 1$

Donc,$b_{n+1}^2 = 5a_{n+1}^2 - 1$.

Nous avons démontré que $5a_n^2 - 1$ est un carré parfait pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$.

Bonnes solutions de J. Anseeuw de Roeselare, P. Bornsztein de Pontoise, J. Finoulst de Diepenbeek, J. Rasse de Méan et J. Segers de Liège.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir pour le 1er novembre 2003 au plus tard. Beaucoup d'entre vous m'envoient leurs solutions dactylographiées, cela me faciliterait la tâche si ces solutions me parvenaient par e-mail, en fichier attaché de format LaTeX, Word (.doc) ou simplement texte (.txt).

280. Condition nécessaire et suffisante

n et p sont des entiers positifs donnés. trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système d'équations

$$\begin{cases} x + py = n \\ x + y = p^z \end{cases}$$

admette une solution (x, y, z) où x, y et z sont des entiers positifs. Cette solution est-elle unique ?

281. Minimum

a_1, a_2,...,a_n sont des réels positifs ou nuls tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Démontrer que

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}$$

admet un minimum et déterminer ce minimum.

282. Coloriage

On considère un damier rectangulaire comportant $2m$ lignes et $2n$ colonnes. Dans chaque case du damier se trouve un point rouge ou un point vert. Chaque ligne contient autant de points rouges que de verts, et de même dans chaque colonne. Deux points rouges adjacents d'une même ligne ou d'une même colonne sont joints par un segment rouge. De même les points verts par des segements verts. Démontrer que le nombre de segments rouges est égal au nombre de segments verts.

Tartaglia replia le coin supérieur droit de l'enveloppe et aperçut l'énoncé du premier problème de Fior : « Un homme prête à un autre pour un quart de sou par lire et par mois la somme de ... ».

Sa respiration s'arrêta. Son corps se figea. Il sentit le sang marteler ses tempes. Derrière le minutieux habillage des mots, il avait immédiatement reconnu la mathématique du premier problème : *Un cube et quelques-uns de ses côtés sont égaux à un nombre. Quelle est la longueur d'un côté du cube ?*

Cet Antoniomaria Fior était un malade ! Pappus, Bhaskara, al-Biruni, al-Khayyam, Regiomontanus, Francesca, tous l'avaient dit et Luca Pacioli l'avait fait imprimer dans sa *Summa* pour les siècles des siècles : *Un cube et quelques-uns de ses côtés sont égaux à un nombre* est aussi insoluble que la quadrature du cercle. Jusqu'à l'aube du Jugement dernier, personne ne pourrait jamais calculer la longueur du côté du cube. Tartaglia voyait la *Summa* grande ouverte devant lui, sous la lumière du Soleil. Folio 216, à droite, sur le tiers inférieur de la page. *Impossible*. Luca Pacioli avait fait imprimer le mot *Impossible* dans la *Summa*. *Impossible*.

Il sentit la colère monter en lui. Et celle-ci réduisait toujours les obstacles qui se dressaient devant sa langue. Cette fois-ci, une véritable fureur s'empara de lui, bouillonnante, irrépressible.

- Où est votre maître Antoniomaria Fior ? Que je lui frotte les oreilles avec ses trente problèmes !

Dieter Jörgensen, *Le maître des nombres*, Ed. Phebus, Paris, 2002

Archives administratives.

Présidents d'honneur

14 juin 1953	Lucien GODEAUX et Jules RUCHARD.
1958	Henri LEVARLET.
1970	Willy SERVAIS.

Présidents

14 juin 1953 à 1969	Willy SERVAIS.
1969 à 1974	Roger BEX.
1974 à 1979	Adolphe FESTRAETS.
1979 à 1981	R.P. Jean NACHTERGAELE, s.j.
1981 à 1985	Claudine FESTRAETS-HAMOIR.
1985 à 1993	Jean WILMET.
1993 à 1997	Guy NOËL.
1997 à 2000	Jacques NAVEZ.
Depuis 2000	Christian VAN HOOSTE.

Vice-Présidents

1957 à 1959	G. BOSTEELS, R. BOURMORCK, F. LENGER et A. YERNA
1960	R.P. Jean NACHTERGAELE s.j.
1961	Georges PAPY.
1962	G. BOSTEELS, DUPONT, F. LENGER, R.P. Jean NACHTERGAELE s.j.
1963 à 1964	Georges PAPY.
1970	Roger HOLVOET.
1971	Roger HOLVOET et Paul VAN PRAAG.
1972 à 1974	Kris DEMUNTER et Yolande NOËL.
1974 à 1975	Kris DEMUNTER et Jean WILMET.
1977 à 1981	Claudine FESTRAETS.
1981 à 1993	Guy NOËL.
1993 à 1997	Simone TROMPLER et Claude VILLERS.
1997 à 2000	Guy NOËL et Claude VILLERS
2000 à 2001	Jacques NAVEZ et Claude VILLERS
2001 à 2002	Claude VILLERS
Depuis 2002	Gérald TROESSAERT

Secrétaires

1953 à 1957	Louis JÉRONNEZ.
1957 à 1959	Robert VAN TWEMBEKE.
1960 à 1969	Alfred WARBECQ (adjointe : G. Boigelot).
1969 à 1970	Yolande NOËL.
1970 à 1971	Yolande NOËL (Secrétaire générale) Viviane BALIGAND et J. NIJS (Secrétaires)
1971 à 1972	Yolande NOËL (Secrétaire générale) Viviane BALIGAND et Reinhilde JACOBS-CLAESSENS (Secrétaires)
1972 à 1974	Viviane BALIGAND et Reinhilde JACOBS-CLAESSENS
1974 à 1975	Roger BEX (Secrétaire général) Yolande NOËL (Secrétaire)
1975 à 1979	Raymond SMETS.
1979 à 1993	Simone TROMPLER.
depuis 1993	Mady FRÉMAL.

Trésoriers

1953 à 1970	Lucien DELMOTTE. Jean CARLOT.
1971 à 1975	Michel BIEFNOT.
1975 à 1979	Denise HUART.
1979 à 1989	Yolande NOËL.
1989 à 1995	Rita LESPLINGART.
1995 à 1997	René SCREVE.
1997 à 2000	Christian VAN HOOSTE.
depuis Sept. 2000	Pierre MARLIER.

Mathematica & Paedagogia

n° 1 (1953)	Fernand BURTON.
n° 2 à 10	Louis JÉRONNEZ.
n° 11 à 16	Robert Van TWEMBEKE.
n° 17 à 18	Willy SERVAIS.
n° 19 à 24	Alfred WARBECQ.
n° 25 à 33	Emile ETIENNE.
n° 34 à 67	Guy NOËL.
et n° 1 à 42	Gaspard BOSTEELS.
n° 43 à 59	Raymond BROECKX.
n° 60 à 63	Gaspard BOSTEELS.

Mathématique et Pédagogie

n° 1 (Mars 1975) à 12	Guy NOËL.
n° 13 à 44	Willy VANHAMME.
n° 45 à 74	Claudine FESTRAETS.
n° 75 à 128	Jacques BAIR.
Depuis le n° 129	Jules MIEWIS.

SBPM-Infor

1977 à 1983	Guy NOËL.
1984 à 1986	Katia MARTROYE.
1986 à 1993	Monique WILMET et Claude VILLERS.
1993 à 1995	Monique WILMET.
1995 à 2002	Claude VILLERS.
Depuis 2002	Renée GOSSEZ-KETELS.

Math-Jeunes

1 (Sept. 1979) à 26	Willy VANHAMME et Jules MIEWIS.
27 à 36	Jules MIEWIS.
37 à 38	Jacqueline VANHAMME.
39 à 40	Jacqueline VANHAMME et Claudine FESTRAETS.
41 à 44	Jacqueline VANHAMME.
45 à 52	Guy NOËL.
53 à 90	Michel BALLIEU.
	(Math-Jeunes et Math-Jeunes-Junior)
91 à 94	Michel BALLIEU et Christian VAN HOOSTE.
95 à 102	Michel BALLIEU et André PATERNOTTRE.
Depuis le n° 103	Christian VAN HOOSTE et André PATERNOTTRE.

Congrès

Nous reprenons ci-dessous la liste des Congrès organisés par la SBPM (1er encadré) puis par la SBPMef (2e encadré). Signalons aussi la participation active de nombreux membres de la SBPM à la mise sur pied, en Belgique ou à l'étranger, de manifestations diverses organisées par d'autres groupes et annoncées dans *Mathematica & Paedagogia* ou, depuis 1975, dans *SBPM-Infor*.

24 janvier 1954	Namur
28 novembre 1954	Liège
12 et 13 novembre 1955	Berchem-lez-Anvers
17 et 18 novembre 1956	Mons
23 et 24 novembre 1957	Gand
3 juillet 1958	Congrès de l'Exposition, Bruxelles
novembre 1958	Bruxelles
juillet 1959	Journées d'Arlon
novembre 1959	Bruxelles
De 1960 à 1974	Un congrès d'une journée se tient chaque année, généralement à Bruxelles.

(1) - 1975	FUNDP - Namur
(2) - 1976	ULg - Liège
(3) - 1977	FUNDP - Namur
(4) - 1978	FUNDP - Namur
(5) - 1979	ULB - Bruxelles
(6) - 1980	FUNDP - Namur
(7) - 1981	FUNDP - Namur
(8) - 1982	FUA - Gembloux
(9) - 1983	UCL - Louvain-la-Neuve
(10) - 1984	UMH - Mons
(11) - 1985	FUNDP - Namur
(12) - 1986	ULB - Bruxelles
(13) - 1987	IPES - Verviers
(14) - 1988	ENE - Nivelles
(15) - 1989	ISICH - Charleroi
(16) - 1990	AR - Tournai
(17) - 1991	AR - Arlon
(18) - 1992	CEPES - Jodoigne
(19) - 1993	Petit Séminaire de St-Roch - Ferrières
(20) - 1994	AR - Binche
(21) - 1995	UMH - Mons
(22) - 1996	Collège Notre-Dame de Bellevue - Dinant
(23) - 1997	AR - Ciney
(24) - 1998	Séminaire de Floreffe
(25) - 1999	AP - Morlanwelz
(26) - 2000	AR - Seraing
(27) - 2001	AR - Charleroi
(28) - 2002	Collège St-Vincent - Soignies

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Janvier 2003)

Les nouveaux tarifs tiennent compte exclusivement des importants changements de tarifs postaux intervenus en 2002.

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :
- Cotisation ordinaire : 20 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 28,50 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 40 € (non PRIOR), 53 € (PRIOR)
Autres pays : 47 € (non PRIOR), 70 € (PRIOR)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 26 €, Union Européenne : 32 €.
Europe 37 € (non PRIOR), 43 € (PRIOR).
Autres pays : 39 € (non PRIOR), 52 € (PRIOR).

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

- Abonnements groupés à une des deux revues : (3 numéros)

Belgique : 3,80 €.
Europe : 6 € (non PRIOR), 7,80 € (PRIOR).
Autres pays : 6,60 € (non PRIOR), 10 € (PRIOR).

- Abonnements groupés aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 6,60 €.
Europe : 12,20 € (non PRIOR), 15,80 € (PRIOR).
Autres pays : 15,10 € (non PRIOR), 22,60 € (PRIOR).

Abonnements individuels.

- Abonnements à une des deux revues : (3 numéros)

Belgique : 5 €. Europe : 11.50 € (non **PRIOR**), 15,80 € (**PRIOR**).
Autres pays : 12.75 € (non **PRIOR**), 20.40 € (**PRIOR**).

- Abonnements aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 10 €. Europe : 16,50 € (non **PRIOR**), 20,50 € (**PRIOR**).
Autres pays : 20 € (non **PRIOR**), 25 € (**PRIOR**).

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 43 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et PLOT. Ils peuvent aussi par la même voie commander des publications de l'APMEP.

Anciens numéros de Mathématique et Pédagogie

Avant 2000 : 0,74 €/N° + frais d'expédition.
Années 2001 et 2002 : 2,48 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Anciens numéros de Math-Jeunes ou Math-Jeunes Junior

Avant 2000-2001 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.
Année 2001-2002 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international au compte CCP « giro » 000-0728014-29 de SBPMef. Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement « giro »), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.

Brochures	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (reste n° 12)	1,24 €	/	T1
Série 2 (n° 7 au n° 11 et n° 13)	5,45 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5,45 €	/	T2
Les 3 séries (n° 7 au n° 14)	7,44 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,86 €	1,24 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,86 €	1,24 €	T1
Dossier 6 (Statistiques)			
Jusqu'à 10 exemplaires	7,44 €	6,18 €	voir
A partir du onzième exemplaire	6 €	5 €	ci-dessous
Jacques Bair			
Mathématique et Sport	4,96 €	3,72 €	T1
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12,39 €	9,92 €	T2
CD-Rom			
G. Robert			
Logiciels mathématiques	4,96 €	/	T1
Recueils de questions des OMB	Tome 4	Tome 5	
De 1 à 4 exemplaires	5,50 €	6 €	
De 5 à 9 exemplaires	5 €	5,50 €	voir
De 10 à 19 exemplaires	4,50 €	5 €	ci-dessous
A partir de 20 exemplaires	4 €	4,50 €	

Frais d'expédition en non PRIOR

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,60 €	2,70 €	3,00 €
Tarif 2	2,30 €	4,70 €	5,80 €
Tarif 3	3,50 €	4,70 €	5,80 €
Tarif 4	4,00 €	11,50 €	16,50 €
Tarif 5	5,60 €	15,50 €	26,50 €
Tarif 6	6,20 €	15,50 €	26,50 €
Tarif 7	6,95 €	15,50 €	26,50 €

Pour les expéditions en **PRIOR**, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.

Exemples de tarification pour commandes groupées

Tomes 4 ou 5 des questions OMB

1 ex.	T1	7 à 10 ex.	T5
2 à 3 ex.	T3	11 à 14 ex.	T6
4 à 6 ex.	T4	15 à 17 ex.	T7

Dossier 6 (Statistiques)

1 ex.	T1	10 à 13 ex.	T5
2 à 4 ex.	T2	14 à 18 ex.	T6
5 à 9 ex.	T4	19 ou 20 ex.	T7