

Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique)

Tél.-Fax : 32-(0)65-373729, courriel : sbpm@umh.ac.be, Web : <http://www.sbpm.be>

Membres d'honneur : H. Levarlet, W. Servais (†)

Conseil d'administration : J.-P. Cazzaro, M. Denis-Pecheur, B. Desaedeleer, P. Dupont, Cl. Festraets-Hamoir, M. Frémal, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, P. Marlier, Ch. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler, Ch. Van Hooste

Président :

Ch. Van Hooste, Chemin de Marbisœul
25, 6120 Marbaix-la-Tour,
Tél. 071-217793

Vice-Président,

Olympiades Internationales :

G. Troessaert, Recogne sur le Chêne 58,
6800 Libramont, Tél. 061-224201

Administrateur délégué :

Ch. Michaux, Rue Brigade Piron 290,
6061 Montignies-sur-Sambre,
Tél. 065-354706

Commission Congrès, Publicité :

M. Denis-Pecheur, Rue de la Ferme 11,
5377 Noisieux (Somme-Leuze),
Tél. 086-323755

Trésorier :

P. Marlier, Rue de Plainevaux 185/15,
4100 Seraing, Tél. 04-3374945

Secrétaire :

M. Frémal, Rue W. Jamar 311/51,
4430 Ans, Tél. 04-2636817

Olympiades nationales et site WEB :

Cl. Festraets-Hamoir, Rue J.B.
Vandercammen 36, 1160 Bruxelles
Tél. 02-6739044

Contact Presse :

N. Miewis-Seronveaux, Avenue de Péville,
150, 4030 - Grivegnée
Tél. 04-3431992

Math-Jeunes Junior :

A. Paternotte, Rue du Moulin 78,
7300 Boussu, Tél. 065-785064

SBPM-Infor :

R. Gossez, Albert I Laan 13, 1560
Hoeilaart, Tél. 02-6579892

Math-Jeunes Senior :

G. Noël, Rue du 1^{er} Chasseur à cheval,
16/14, 7000 - Mons, Tél. 065-848621

Portefeuille de lecture :

S. Bridoux, Rue de Lambrechies 87,
7390 Quaregnon, Tél. 065-667203

Mathématique et Pédagogie :

J. Miewis, Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée, Tél. 04-3431992

Comité de rédaction : J. Miewis, J. Bair, Ch. Bertrand, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, Cl. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, Ch. Michaux, J. Navet, G. Noël, N. Vandenabeele, Ch. Van Hooste, Cl. Villers



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

- Ch. Van Hooste, *Éditorial* 3

Articles

- W. Van Dooren, D. De Block, L. Verschaffel, *L'illusion de la linéarité parmi les élèves du secondaire : extension au calcul des probabilités* 5
- J.-P. Houben, *Perspective cavalière : le cube, le cercle, le cône* 25
- C. Cerf, P. Castoldi, M. Parker, *La théorie des noeuds, une théorie ... attachante!* 33
- A. Coolen - V. Henry, *Utilisation du tableur Excel pour le remboursement d'un emprunt par une annuité* 59

Rubriques

- Y. Noël-Roch, *Dans nos classes* 69
- C. Festraets, *Des problèmes et des jeux* 75
- C. Festraets, *Olympiades* 81
- G. Noël et J. Miewis, *Bibliographie* 91
- P. Marlier, *Le coin du trésorier* 95

NOTE

- * Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
- * Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
- * Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- * Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant ($\text{\LaTeX}$, Word); les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés. L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
- * La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
Pour les articles :
Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
- * Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- * MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée.

Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Éditorial

CH. VAN HOOSTE

Comme d'habitude, le Congrès de cette année a été une réussite.

À plus d'un titre, nous pouvons être satisfaits : tous les objectifs visés ayant été atteints. D'une part, en fêtant les cinquante ans d'existence de la SBPM, nous avons pu renouer le contact avec nos amis mathématiciens néerlandophones. Ceux-ci ont pleinement usé avec bonheur de l'espace de temps que nous leur avons proposé : quatre conférences en néerlandais s'y sont succédé le deuxième jour. En outre, lors de nos conversations à bâtons rompus, nous nous sommes rendus compte que la frontière linguistique n'est pas un obstacle pour la problématique de l'enseignement.

Par ailleurs, chaque congressiste a grandement apprécié le confort supplémentaire que nous leur avons apporté grâce aux soutiens de la firme Texas et de l'ULB.

La conférence plénière de Monsieur le Professeur Mawhin nous proposait un survol de cinquante ans de mathématiques en Belgique : souvenirs, émotions, humour, (re-)découvertes... Les mathématiciens de notre petit pays furent des acteurs engagés dans les réformes de ces cinquante années.

Cela devient peu à peu une tradition : notre Ministre de l'Enseignement secondaire nous a honoré de sa présence. M. Pierre Hazette est venu se souvenir avec nous d'épisodes chahutés du début des maths modernes dans la salle des profs de sa jeunesse, ... et remercier GAUDI, (cathédrale de la Sagrada Familia à l'appui) de son émerveillement pour les mathématiques ainsi comprises. Ce brin de lyrisme ne nous a pas empêché de lui rappeler nos préoccupations du moment : l'engagement de la SBPMef comme acteur de la formation continuée des professeurs ainsi que la consultation de notre association dans un éventuel processus d'évaluation externe des élèves. Aucun de nos souhaits n'a été repoussé.

Cette écoute est encourageante d'autant que, peu de temps avant, nous avons reçu de sa part, la réponse suivante à une demande faite lors du Congrès de Charleroi.

Au deuxième degré de transition, j'ai décidé de modifier la prochaine circulaire d'organisation de l'enseignement secondaire

(pour 2003-2004) en prévoyant la possibilité d'organiser, dans les activités au choix, tant en 3^e année qu'en 4^e année, des activités mathématiques de renforcement à raison d'une ou deux heures par semaine, renforcement axé sur des activités mathématiques centrées sur certains aspects tels que déduction et démonstration, techniques algébriques plus pointues et sur la résolution de problèmes plus ardues. Des indications figureront dans les programmes sur ces questions, étant entendu que cette mesure, pour rester conforme à la loi, ne peut pas créer deux niveaux de formation en mathématique. Ceci permettra à certains élèves de se frotter à une mathématique plus rigoureuse, ce qui pourra les aider dans leur orientation future quant au choix du cours de mathématique au troisième degré.

Mais, ne nous leurrions pas, ceci n'est qu'un pas dans la bonne direction.

Cerise sur le gâteau : le dernier jour, nous avons eu le grand plaisir d'avoir la visite de Georges et Frédérique Papy.

Le modernisme n'en finit pas d'entrer à la SBPMef malgré qu'elle ait atteint l'âge de raison. De fait, un CD-Rom accompagnera le premier Math-jeunes de cette année. Nous avons voulu vous en faire la primeur et comme vous le constatez, ce CD-Rom est joint à ce numéro de *Mathématique et Pédagogie*; ainsi l'occasion se présente de convaincre l'élève d'acquérir l'un de ces outils qui le rend acteur privilégié de sa formation. Il lui suffit de s'abonner à Math-Jeunes-Junior ou à Math-Jeunes sénior.

Ce CD de la « Mémoire » reprend un grand nombre d'articles parus dans nos revues : vous y retrouverez aussi les rubriques Olympiades, Dans nos classes, Problèmes, Jeux ... quelques logiciels pédagogiques aussi.

Ce travail de compilation dont nous sommes redevables à GUY NOËL et BERNARD HONCLAIRE ne devrait toutefois pas occulter le fait que Math-Jeunes reste avant tout une revue d'une richesse tout-à-fait remarquable qui mérite que vous nous aidiez à défendre son existence en y abonnant vos élèves.

Au rayon des bonnes nouvelles de ce cinquantième anniversaire, ajoutons les excellents résultats de nos représentants à la 44^e Olympiade Mathématique Internationale qui s'est tenue du 7 au 19 juillet à Tokyo : une Mention Honorable pour TIMOTHÉE MARQUIS, élève de 5^e une médaille de bronze pour ANTONY TRINH et une médaille d'Argent pour CÉDRIC TROESSAERT.

L'illusion de la linéarité parmi les élèves du secondaire : extension au calcul des probabilités

W. VAN DOOREN, D. DE BLOCK, L. VERSCHAFFEL,

Mots-clé : linéarité, grandeurs proportionnelles, probabilité.

Les relations linéaires ou proportionnelles constituent un sujet important dans l'enseignement des mathématiques tant au niveau primaire qu'au niveau secondaire. Cette attention pourrait cependant amener certains étudiants à croire que le modèle linéaire peut être appliqué « partout ». Des études réalisées sur cette « illusion de la linéarité » dans le domaine des probabilités font l'objet de la présente conférence. En premier lieu, une diversité d'erreurs probabilistes découlant d'une mauvaise application du modèle linéaire sera décrite. Cette approche éclaire d'un point de vue inédit quelques célèbres erreurs historiques en la matière. Ensuite, une recherche empirique confirmant cette tendance sera présentée. En effet, si les élèves de 16 à 18 ans sont capables de comparer diverses situations probabilistes de façon qualitative, l'immense majorité d'entre eux traduit cette compréhension qualitative d'une manière erronée en utilisant des relations linéaires entre les paramètres qui déterminent ces situations. Par ailleurs, il a été démontré que le fait d'avoir déjà suivi un cours de probabilités n'influencait pratiquement pas les résultats trouvés concernant cette tendance.

Adresses des auteurs : Wim Van Dooren, Aspirant du Fonds voor Wetenschappelijk onderzoek (FWO), Flandre, Dirk De Bock, centrum voor Instructie psychologie en -Technologie (CIP&T, K.U. Leuven, Lieven Verschaffel, Europese Hogeschool Sint-Aloysius (EHSAL), Bruxelles;

K.U.Leuven, Faculteit Psychologie en Pedagogische wetenschappen, Centrum voor Instructiepsychologie en Technologie (CIP&T), Vesaliusstraat, 2, 3000 - Leuven.

Cet article est la traduction d'un manuscrit néerlandais préparé dans le cadre du projet de recherche « L'illusion de la linéarité : analyse et amélioration », subventionné par le Conseil de Recherche de la K.U.Leuven (promoteurs : Lieven Verschaffel et Dirk Janssens). Les auteurs remercient cordialement Michel Roelens qui s'est chargé de la traduction française et Fien Depaepe qui a contribué à l'étude empirique.

1. Introduction

Les relations linéaires ou proportionnelles occupent, dans l'enseignement des mathématiques, une place importante, tant au niveau élémentaire que secondaire, et à juste titre. En effet, les fonctions linéaires constituent un modèle sous-jacent pour de nombreux problèmes appliqués. Néanmoins, à cause de cette attention permanente accordée aux modèles linéaires, beaucoup d'élèves du primaire et du secondaire ont tendance à traiter chaque relation entre des grandeurs comme si elle était linéaire (proportionnelle) [8]. On parle, à cet égard, de l'illusion de la linéarité. De nombreuses situations sont concevables où l'on peut aisément tomber dans le piège linéaire. Ces situations proviennent de différents domaines des mathématiques, comme le calcul élémentaire, la géométrie, l'algèbre ou la probabilité. Beaucoup de jeunes enfants seraient, par exemple, tentés de raisonner de façon linéaire dans le problème suivant.

Il faut 6 minutes pour faire cuire un oeuf. Combien de minutes faut-il pour en faire cuire quatre à la fois?

Le phénomène de l'illusion de la linéarité ne se produit pas seulement auprès de jeunes enfants. Cramer, Post et Currier [1] ont proposé à 33 futurs instituteurs le problème suivant.

Justine et Hélène courent à une même vitesse autour d'une piste. Justine est partie la première. Au moment où elle a couru 9 tours, Hélène en a couru 3. Combien de tours Justine aura-t-elle courus quand Hélène en aura couru 15?

A un seul près, tous les futurs instituteurs ont résolu ce problème en recherchant le terme inconnu dans la proportion $\frac{9}{3} = \frac{x}{15}$, d'où $x = 45$, tandis que la solution exacte est, évidemment, $15 + (9 - 3) = 21$ (Justine garde toujours 6 tours d'avance sur Hélène).

Donnons un exemple dans le domaine de la géométrie. De Bock (voir p.e. [2], [3] et [4]) a démontré que les élèves de 12 à 16 ans présentent une tendance profondément enracinée et persistante à raisonner illégitimement de façon linéaire face à des problèmes d'agrandissement ou de rapetissement (semblable) de figures géométriques, comme dans l'énoncé suivant.

Pour fertiliser une parcelle de terre carrée de 200 mètres de côté, Charles, le fermier, a besoin d'environ 8 heures. Combien

de temps lui prendra, environ, la fumure d'une parcelle carrée de 600 mètres de côté ?

Dans cet article, nous voulons analyser l'existence de l'illusion de la linéarité dans un autre domaine des mathématiques, notamment le calcul des probabilités. Dans une première partie, nous examinerons le concept de probabilité afin de montrer pourquoi le calcul des probabilités constitue, par excellence, un domaine où l'on peut trouver des manifestations du piège linéaire. Dans une deuxième phase de cette investigation, nous rapporterons notre étude de la littérature de recherche sur le calcul des probabilités, où nous avons cerné de façon systématique les malentendus ayant quelque lien avec (et pourraient donc peut-être être attribués à) la généralisation mal fondée du modèle proportionnel. Nous donnerons quelques exemples de confusions connues et moins connues. Dans une troisième partie, nous décrirons brièvement comment la généralisation illicite de relations linéaires peut clarifier grand nombre de malentendus dans des situations aléatoires binomiales. Il s'avère, en effet, que l'on part souvent de l'hypothèse d'un rapport proportionnel entre les variables de la distribution binomiale. Dans la quatrième partie, finalement, nous expliquerons comment nous avons vérifié de manière empirique si ces malentendus sont réellement présents auprès des élèves de l'enseignement secondaire et s'ils sont attribuables à la tendance de ceux-ci à appliquer des relations proportionnelles dans des situations aléatoires binomiales.

2. Le calcul des probabilités, domaine de prédilection de l'illusion linéaire

Le calcul des probabilités est, par excellence, approprié à la recherche de pièges linéaires. Il y a, pour cela, plusieurs raisons.

Tout d'abord, comme nous le montrerons ci-dessous, les phénomènes aléatoires cachent généralement des relations mathématiques assez compliquées, qui rendent le calcul des probabilités souvent bien complexe. Deuxièmement, et lié à cela, il s'agit d'un domaine dans lequel grand nombre d'élèves ont des méprises profondément enracinées et dans lequel n'importe qui peut être tenté de suivre des intuitions mal fondées (voir p.e. [9] et [12]). Il existe dès lors une quantité énorme de littérature de recherche au sujet des méprises en probabilité. La dernière raison, la plus importante, est toutefois le fait que le concept de « probabilité » en soi est fortement

lié à la notion de « rapport » [14], de sorte que l'on utilise peut-être des rapports même là où il ne faudrait pas en utiliser. Il est naturel d'avoir recours à des rapports afin de trancher dans des problèmes aléatoires. La probabilité d'un événement déterminé (p.e. le fait d'obtenir un nombre pair de points en lançant un dé) est évaluée en prenant la fréquence relative du nombre de résultats favorables par rapport au nombre de résultats possibles (dans l'exemple, l'événement est composé de trois résultats : 2, 4 ou 6 points). Cette intuition est à la base du concept de « probabilité ». Fischbein ([5], p. 58) écrit au sujet du lien entre le calcul des probabilités et le raisonnement proportionnel : « at a very basic intuitive level, the two schemata share the same roots, namely an intuition called by us the intuition of relative frequency ».

Le fait que le raisonnement proportionnel amène parfois à des réponses erronées, apparaît clairement dans le fameux « dilemme de Monty » :

Dans un jeu télévisé, un candidat se trouve devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve un prix. Le candidat choisit une des portes. A ce moment, le présentateur ouvre une des deux autres portes (notamment celle des deux derrière laquelle le prix ne se trouve pas) et propose au candidat de changer éventuellement son choix. Que doit faire le candidat afin de maximiser sa chance d'avoir le prix ?

- a. Se tenir à son choix initial
- b. Choisir l'autre porte
- c. C'est égal

De nombreuses recherches (voir p.e. [13]) démontrent que les étudiants adoptent massivement la réponse c. Ces étudiants argumentent que la probabilité de gagner était d' $\frac{1}{3}$ au début du jeu, mais que cette probabilité est montée à $\frac{1}{2}$ après l'intervention du présentateur, indépendamment du choix du candidat. Le rapport entre le nombre de résultats favorables (un) et le nombre de résultats possibles (trois au début, puis deux) est, à leurs yeux, tellement pertinent pour évaluer les probabilités, qu'ils ne perçoivent pas la véritable probabilité des différentes possibilités. Les étudiants — mais aussi bien des adultes — ont grande peine à comprendre que l'option b. procure une plus grande probabilité de gagner ($\frac{2}{3}$) que l'option a. ($\frac{1}{3}$), puisque ce sont les circonstances du choix initial qui sont déterminantes.

3. Analyse littéraire des méprises linéaires

En première instance, nous avons effectué une étude de la littérature en partant de quelques articles donnant une bonne vue d'ensemble des méprises connues en probabilité (p.e. [12]). Dans cet aperçu, nous avons cherché les méprises qui pourraient éventuellement provenir de l'application à tort du modèle proportionnel. Cette analyse nous a fourni un grand nombre de telles méprises. Il s'agit de phénomènes les uns largement connus, les autres plutôt anecdotiques. Il apparaît, par ailleurs, que les chercheurs ne désignent que très rarement le raisonnement proportionnel illicite comme éventuelle cause sous-jacente de l'erreur commise.

Afin de donner une idée de telles méprises connues en probabilité et de la manière dont elles pourraient se baser sur un raisonnement proportionnel à tort, nous citons, dans ce paragraphe, quelques exemples, en présentant à chaque fois le problème concret qui peut susciter la méprise.

3.1. Exemple 1 : La roulette : qui persiste, gagne ?

Il est bien connu que, dans les jeux de hasard, il importe d'arrêter à temps une fois que l'on a gagné une somme considérable. D'autre part, beaucoup de joueurs persistent à continuer lorsque les pertes s'élèvent, en espérant pouvoir encore les compenser. Bien à tort, ils surestiment leur chance de gagner. Prenons l'exemple suivant concernant la roulette.

Didier décide de miser exclusivement sur des nombres individuels, car c'est là que l'on peut obtenir les plus grands gains. A chaque jeu, il mise sur son « numéro porte-bonheur » 0. Hélas, il n'a pas de chance et après 20 jeux il n'a toujours rien gagné. Mais, pense-t-il, je ne peux pas m'arrêter maintenant ! Il faut que je continue jusqu'à 37 jeux, car il y a 37 numéros possibles et j'ai donc, à chaque jeu, une chance sur 37 de gagner. Si je joue 37 fois je suis donc presque sûr à 100% que mon numéro sortira une fois.

Didier se trompe, évidemment, mais bien des gens seraient prêts à suivre son raisonnement. Deux raisonnements intuitifs erronés peuvent surgir ici. Il y a, évidemment, le bien connu « gambler's fallacy » [12] qui consiste à attribuer une sorte de « mémoire » à la petite balle, de sorte que l'on pense qu'après un temps prolongé « sans zéro », la probabilité du zéro lors

du jeu suivant augmente considérablement. Mais il y a également un autre raisonnement erroné qui joue ici. Didier pense qu'il a beaucoup de malchance si après 37 jeux le 0 n'est pas encore sorti. Car, en effet, la probabilité de gagner est de $\frac{1}{37}$ en un jeu. Mais il pense qu'en deux jeux la probabilité est doublée, donc $2 \times \frac{1}{37}$, et en trois jeux $\frac{3}{37}$, et ainsi de suite, de sorte qu'après 37 jeux il est, en fait, sûr de gagner. La supposition implicite est donc que la probabilité augmente de façon linéaire avec le nombre de jeux que l'on joue.

Beaucoup de gens s'étonnent du fait que la probabilité de gagner en 37 jeux est, en fait, toujours inférieure à $\frac{2}{5}$. Il y a donc toujours plus d'une chance sur trois que Didier ne gagne rien du tout ! En effet, la probabilité d'« aucun 0 » en 1 jeu est de $\frac{36}{37}$, donc la probabilité d'« aucun 0 » en 37 jeux est de $(\frac{36}{37})^{37} = 0,36$, et donc la probabilité d'« au moins un 0 » est de $1 - 0,36 = 0,64$.

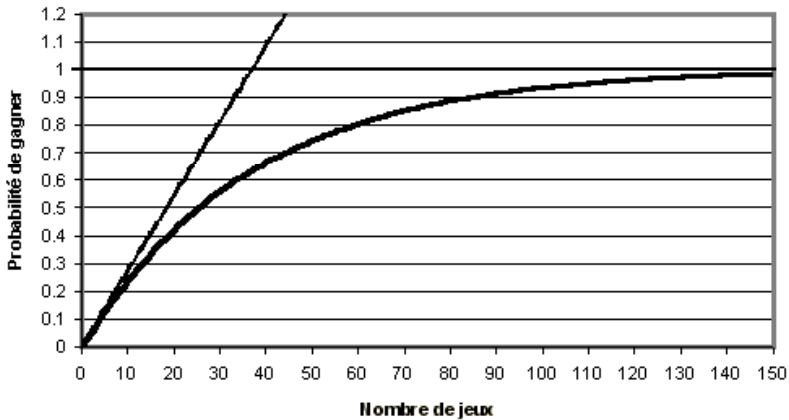


Figure 1 : représentation de la relation correcte et fautive (linéaire) entre le nombre de jeux de roulettes et la probabilité d'obtenir au moins un 0.

Dans la figure 1 on voit comment la probabilité de gagner dans ce jeu de roulette augmente véritablement en fonction du nombre de jeux. Le raisonnement linéaire erroné, décrit plus haut, est également représenté. Dans la figure, on voit clairement que le raisonnement de Didier ne peut pas être juste, car il amène à des probabilités supérieures à 1. Mais on

voit aussi que le raisonnement linéaire concorde plus ou moins pour un petit nombre de tentatives : en deux jeux, on a une chance de $1 - \left(\frac{36}{37}\right)^2 = 0,053$ d'avoir au moins un O, et ce résultat est bien approximé par $2 \times \frac{1}{37} = 0,054$. Le raisonnement intuitif disant qu'en deux jeux on a deux fois autant de chance de gagner est mathématiquement inexact, mais pas si bête. Seulement, il ne faut pas le généraliser à un grand nombre de jeux.

3.1.1. Exemple 2 : Le « paradoxe des anniversaires »

Il y a 30 élèves dans une classe. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux aient le même anniversaire ?

A cette question, on donne souvent une réponse intuitive qui revient à la généralisation erronée du modèle proportionnel. Beaucoup d'élèves appliqueront ici, en effet, l'« intuition of relative frequency » [3] et raisonneront ainsi. « Il y a 365 anniversaires possibles dans une année (non-bissextile). Il y a 30 élèves, donc 30 anniversaires susceptibles de coïncider, par rapport aux 365 possibilités qu'il y a au total. Le rapport entre 30 et 365 est 0,08. Il y a donc une probabilité de 8% de trouver parmi ces 30 élèves un élève ayant le même anniversaire qu'un autre. » De façon analogue, les élèves ont tendance à penser que la probabilité de retrouver des anniversaires coïncidents dans un groupe de 60 élèves vaut deux fois celle d'en retrouver dans un groupe de 30 élèves, etc.

Le raisonnement « $\frac{n}{365}$ » de ces élèves est manifestement erroné, mais paraît acceptable parce qu'il fonctionne bien dans le cas maximal (on n'est sûr à 100% d'un double anniversaire que lorsqu'il y a plus de 365 élèves dans la classe), et parce que, de plus, il donne une approximation raisonnable pour de très petites valeurs (dans une classe de deux élèves, la probabilité est de 0,005, tandis que le raisonnement $\frac{n}{365}$ donne une probabilité de 0,003). Mais pour les valeurs intermédiaires le raisonnement ne fonctionne plus. Pas mal de gens ont difficile à trouver le mode de calcul exact, et s'étonnent quand ils apprennent la vraie probabilité théorique, qui est, contre toute intuition, très élevée : 71%! Cette probabilité peut être déterminée à l'aide de la formule suivante, qui exprime la relation entre le nombre d'élèves dans une classe (n) et la probabilité d'avoir deux fois un même anniversaire.

$$P(\text{anniversaire double}) = 1 - \frac{364 \times 363 \times 362 \times \dots \times [365 - (n - 1)]}{365^{n-1}}$$

Dans la figure 2, cette relation est exprimée de manière graphique. On y voit non seulement la relation correcte (non-linéaire) mais également la relation fautive (linéaire) $P = \frac{n}{365}$.

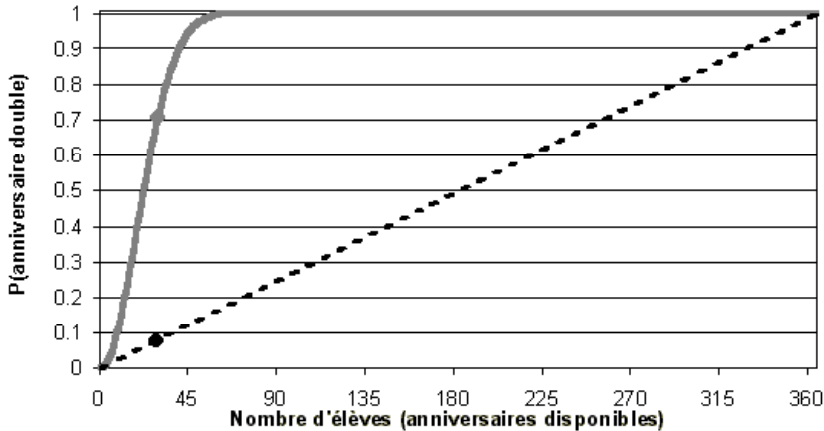


Figure 2 : Le lien correct et fautif entre le nombre d'élèves et la probabilité que deux élèves aient le même anniversaire.

3.2. Exemple 3 : Le problème des hôpitaux

Un problème célèbre qui séduit beaucoup d'élèves à un raisonnement proportionnel, est celui des hôpitaux, étudié entre autres par Fischbein en Schnarch [6] :

Il y a, dans une ville, deux hôpitaux, un petit où l'on compte en moyenne 15 naissances par jour, et un plus grand où le nombre de naissances par jour s'élève, en moyenne, à 45.

La probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est d'environ 50%. (Evidemment, il y a des jours avec plus et des jours avec moins de 50% de garçons.)

Dans le petit hôpital, quelqu'un prend note, pendant toute l'année, des jours où plus de 9 garçons naissent dans cet hôpital, ce qui correspond à plus de 60% du nombre journalier moyen de naissances dans cet hôpital.

Dans le grand hôpital, quelqu'un prend note, pendant toute l'année, des jours où plus de 27 garçons y naissent, ce qui correspond également à plus de 60% du nombre journalier moyen de naissances dans cet hôpital.

Dans lequel des deux hôpitaux aura-t-on le plus grand nombre de jours de ce type ?

De par la loi des grands nombres, la réponse exacte est que ces jours avec plus de 60% de garçons seront plus fréquents dans le petit hôpital. Ces probabilités s'élèvent à 0,1509 et 0,0676 respectivement pour le petit et le grand hôpital. Le nombre de jours par an où l'on peut s'attendre à ce que cet événement se produise, est de 55 jours pour le petit et de 25 jours pour le grand hôpital.

Dans l'étude de Fischbein et Schnarch, on s'aperçoit que beaucoup d'élèves ont raisonné que le nombre de jours avec plus de 60 % de garçons est le même dans les deux hôpitaux. De plus, le nombre de réponses fautives augmentait avec l'âge (respectivement 10%, 30%, 70% et 80% des élèves de 10-11 ans, 12-13 ans, 14-15 ans et 16-17 ans ont donné cette réponse). La réponse était généralement justifiée par une égalité de rapports ($\frac{9}{15} = \frac{27}{45}$), et cette justification erronée apparaissait plus fréquemment chez les élèves plus âgés.

Dans ce raisonnement à l'aide de proportions, l'on admet (consciemment ou non) les suppositions suivantes :

- Dans le grand hôpital il y a trois fois autant de naissances. Par conséquent, la probabilité qu'un nombre particulier de garçons y naissent est également le triple.
- Dans le grand hôpital, il faut 27 garçons pour atteindre les 60%. C'est trois fois plus que dans le petit hôpital, donc la probabilité que ceci se produise est trois fois inférieure.

Ces deux effets s'annulent, de sorte que la probabilité d'avoir 60 % de garçons est pareille dans les deux hôpitaux.

3.3. Exemple 4 : Le problème des dés de de Méré

Revenons au contexte des jeux de hasard, avec le célèbre problème que le Chevalier de Méré proposa à son ami Pascal (voir p.e. [7]). De Méré était un joueur assidu et il savait d'expérience qu'il est avantageux de parier

sur « au moins un six » lorsque l'on lance 4 fois un dé honnête. Il raisonna ensuite qu'il serait aussi avantageux de parier sur « au moins un double six » lorsque l'on lance 24 fois deux dés honnêtes. Un résultat spécifique des 6 possibilités en 4 lancements devrait sortir aussi fréquemment qu'un résultat spécifique des 36 possibilités en 24 lancements, car $\frac{6}{4} = \frac{36}{24}$. Autrement dit : la probabilité d'un succès se réduit à un sixième (puisqu'il y a 6 fois autant de résultats possibles), mais en même temps le nombre de tentatives est 6 fois supérieur, de sorte que — dans le raisonnement de de Méré — la probabilité reste la même.

Après quelque temps, de Méré s'aperçut que, contrairement à son raisonnement, les paris sur un double six en 24 lancements n'apportaient pas les gains espérés. Sa persévérance l'a même presque ruiné. Désespéré, il consulta son ami Pascal. La réponse (correcte) de Pascal fut la suivante : la probabilité d'« aucun six » en un lancement est de $\frac{5}{6}$. En 4 lancements, cette probabilité est de $(\frac{5}{6})^4$ et la probabilité d'« au moins un six » en 4 lancements d'un dé est, par conséquent, de $1 - (\frac{5}{6})^4 = 0,5177$, un peu plus qu'un demi. De façon analogue, la probabilité d'« au moins un double-six » en 24 lancements de deux dés est de $1 - (\frac{35}{36})^{24} = 0,4914$, un peu moins qu'un demi.

4. La distribution binomiale comme cadre d'interprétation

Lors de notre étude de la littérature de recherche, il est apparu que grand nombre de méprises retrouvées peuvent être attribuées à un mécanisme bien précis, notamment la supposition illicite d'un lien proportionnel entre les différentes variables qui déterminent la probabilité dans une situation aléatoire binomiale. Afin de décrire ces variables, partons de la situation suivante.

Les candidats d'un jeu télévisé peuvent lancer un dé 12 fois. Ils gagnent une voiture s'ils obtiennent 4 fois un six. Dans la dernière émission, le présentateur se propose d'être généreux. Il annonce aux participants qu'ils peuvent lancer le dé 24 fois au lieu de 12, de sorte qu'ils ont deux fois autant de chance de gagner la voiture.

La probabilité (P) de gagner la voiture dans la version « normale » du jeu est d'environ 12,5%, et cette probabilité dépend des trois variables suivantes :

- n : le nombre de tentatives permises (dans l'exemple : $n = 12$)
- k : le nombre de succès requis (dans l'exemple $k \geq 4$)
- p : la probabilité de succès de l'événement élémentaire (dans l'exemple $p = \frac{1}{6}$).

Dans la dernière émission, le présentateur du jeu est bien plus généreux qu'il ne le pense. Il s'imagine que la probabilité P de gagner la voiture est doublée lorsque le nombre de tentatives permises est doublé ($n = 24$). Il suppose donc qu'il y a un rapport linéaire entre n et P . En réalité, la probabilité de gagner la voiture dans la dernière émission n'est pas de $2 \times 12,5\% = 25\%$, mais de 58,4%! Dans la figure 3, on voit le vrai lien entre le nombre de lancements permis (n) et la probabilité d'obtenir au moins 4 six (P). Le lien linéaire, fautif, supposé par le présentateur, est également indiqué.

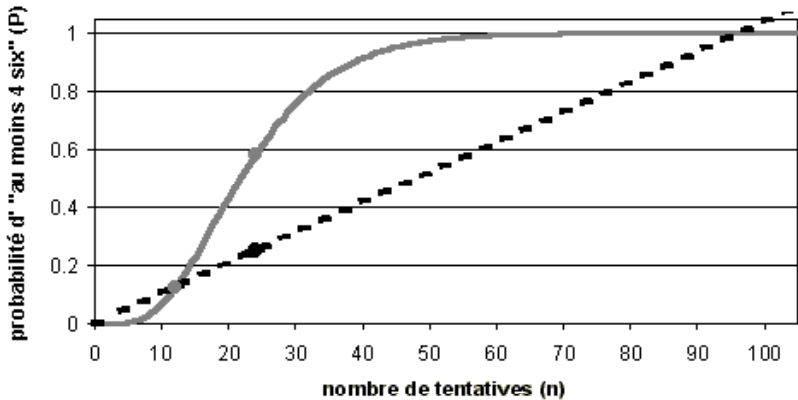


Figure 3 : Représentation du lien correct et fautif entre le nombre de lancements d'un dé et la probabilité d'obtenir au moins 4 six.

De façon analogue, le meneur du jeu peut être pris au piège linéaire lié à la variation des autres variables (k ou p). Il peut, notamment, penser que la probabilité de gagner la voiture est doublée si k est divisé par deux (s'il

ne faut lancer que 2 six) ou que la probabilité est triplée si p est triplé (s'il faut lancer des nombres pairs au lieu des six).

On peut aller un peu plus loin encore et varier deux variables à la fois. Le meneur du jeu pourrait penser que l'on a autant de chance de gagner dans le jeu simple (au moins 4 six en 12 tentatives) que dans un jeu où les participants ont droit à 24 tentatives mais doivent lancer au moins 8 fois un six (n et k sont doublés), ou dans un jeu où l'on n'a droit qu'à 4 tentatives mais où l'on doit lancer 4 nombres pairs (n est 3 fois inférieur mais p est 3 fois supérieur).

Le lecteur aura remarqué que c'est précisément de cette façon que de Méré (exemple 4) fut induit en erreur. Son raisonnement peut être bien compris en considérant les variables de la distribution binomiale : n est 6 fois supérieur donc P est multiplié par 6, mais en même temps p est 6 fois inférieur, de sorte que P reste égal.

Les nombreuses fautes dans le problème des hôpitaux (exemple 3), cité dans la recherche de Fischbein et Schnarch [6], peuvent être comprises de la même façon. Beaucoup d'élèves — et leur nombre augmente avec l'âge — ont raisonné que le nombre de naissances (n) était triplé (de 15 à 45) ainsi que le nombre requis de succès (d'au moins 9 à au moins 27 garçons), de sorte que la probabilité P demeure égale. De façon tout à fait analogue, Tversky et Kahneman [15] et Schrage [11] ont découvert que beaucoup d'élèves croient que la probabilité de lancer au moins 2 fois pile en 3 lancements d'une pièce de monnaie est égale à la probabilité de lancer au moins 200 fois pile en 300 lancements. Eux aussi ont constaté que les élèves plus âgés tombent plus fréquemment dans le piège. Fischbein et Schnarch ([6], p. 103) avancent que les élèves plus âgés ont vraisemblablement plus tendance à raisonner de façon proportionnelle dans ce genre de situations. A propos de la notion de proportion, ils avancent : « It is the evolution of this principle that shapes the evolution of the related misconception and causes it to become stronger as the student ages ».

Le joueur de roulette dans l'exemple 1, finalement, était induit en erreur par une supposition de linéarité très semblable à celle du meneur de jeu décrit ci-dessus : lui aussi croyait qu'il y avait un lien proportionnel entre n (ici le nombre de jeux de roulette) et P (la probabilité d'obtenir un 0).

La distribution binomiale semble donc constituer un cadre d'analyse intéressant pour démontrer que ces deux méprises célèbres sont en fait étroitement liées, et qu'il y a peut-être encore de nombreux raisonnements fautifs pouvant être expliqués de façon analogue.

5. A la recherche d'une évidence empirique

Après l'étude de la littérature de recherche et l'analyse conceptuelle de quelques méprises en probabilité, nous avons prolongé notre investigation en vérifiant si les méprises décrites ci-dessus — en particulier les méprises dans des situations aléatoires binomiales du paragraphe 4 — sont véritablement présentes auprès des élèves de l'enseignement secondaire, et si ces raisonnements erronés sont, de plus, attribuables à la tendance des élèves à trop se fier aux liens proportionnels entre les paramètres variables de la situation aléatoire. Dans cette étude, nous avons fait une distinction entre les élèves ayant déjà eu des cours de probabilité (incluant, entre autres, le modèle binomial) et les autres.

5.1. Question de recherche

Avec cette étude empirique, nous voulions répondre à la double question de recherche suivante :

- Les élèves du secondaire ont-ils une bonne compréhension qualitative de l'effet de la variation d'une des variables de la distribution binomiale (n , k ou p) sur la probabilité d'un événement?
- En quelle mesure les élèves ont-ils tendance à quantifier cette compréhension qualitative comme une relation proportionnelle entre n , k et/ou p d'une part et la probabilité (P) d'autre part?

Au sujet de cette question de recherche, nous énonçons l'hypothèse suivante. Plusieurs chercheurs (p.e. [5]) ont démontré que même les enfants très jeunes ont déjà des notions élémentaires et qualitatives de probabilités. Nous nous attendions, par conséquent, à ce que les élèves de l'école secondaire puissent — avant même qu'ils aient eu un enseignement du calcul des probabilités — se prononcer correctement de façon qualitative dans des situations aléatoires binomiales. Mais, en même temps, nous nous attendions — de par la simplicité intrinsèque du modèle proportionnel et de par la tendance connue des élèves à généraliser indûment ce modèle à d'autres domaines des mathématiques — à ce que ces élèves traduisent leurs notions qualitatives correctes en des relations proportionnelles entre les variables. Nous nous attendions même à ce que cette tendance subsiste après que le modèle binomial leur ait été enseigné.

5.2. Méthode de recherche

225 élèves d'une école secondaire flamande furent soumis à un test écrit. Ces élèves étaient répartis en deux groupes d'âge : 107 élèves de la quatrième année et 118 élèves de la sixième. Seuls les élèves de la sixième avaient déjà eu un cours sur les probabilités et sur le modèle binomial.

Les élèves disposaient d'une heure pour résoudre les 10 problèmes à choix multiples, présentés dans un ordre arbitraire. Sept problèmes faisaient partie de la recherche, les trois autres étaient ajoutés pour détourner l'attention. Dans chaque problème, les élèves devaient comparer la probabilité de deux événements dans le contexte du lancement de dés.

Un aperçu des 7 problèmes de recherche et leur rédaction est donné dans le tableau 1. Pour chacune des variables de la distribution binomiale (n , k et p), deux problèmes étaient prévus : dans l'une d'elles les élèves devaient faire une comparaison qualitative entre deux situations qui diffèrent quant à n , k ou p , l'autre problème concernait une comparaison quantitative de situations de ce genre. En plus de ces 6 problèmes, il y avait un problème où les situations diffèrent en ce qui concerne n et k ⁽¹⁾.

Dans le tableau 2, nous donnons un exemple d'un problème qualitatif en d'un problème quantitatif (en particulier, des problèmes dans lesquels n est réduit à sa moitié) et du problème dans lequel n et k sont réduits à leur moitié.

	n	k	p	$n \times k$
Problèmes qualitatifs	1	1	1	
Problème quantitatifs	1	1	1	1

Tableau 1 : Aperçu des 7 problèmes de recherche.

Les exemples de problèmes montrent ce que les élèves devaient faire :

- Pour les problèmes qualitatifs, les élèves devaient indiquer si le premier événement est plus probable, aussi probable ou moins probable que le deuxième. Puisque les événements diffèrent quant à n , k ou p , la réponse exacte était toujours « plus grand que » ou « plus petit que ».

⁽¹⁾ Il n'était pas possible d'ajouter un problème qualitatif « $n \times k$ ». En effet, lorsque aussi bien la variable n que la variable k sont manipulées de façon proportionnelle (dans le cas décrit, les deux variables étaient réduites à leur moitié), on ne peut que se prononcer de façon quantitative (notamment en affirmant l'égalité des probabilités).

- Les problèmes quantitatifs étaient formulés différemment : elles contenaient une affirmation explicite et quantifiée concernant les probabilités de deux événements, dont les élèves devaient indiquer s'ils sont corrects. Il est important à signaler que la quantification de ces affirmations s'est réalisée de façon proportionnelle (dans le problème quantitatif n du tableau 2, n est trois fois supérieur dans la première situation comparée à la deuxième, et l'on prétend que ce soit également le cas pour P). Par conséquent, la bonne réponse aux problèmes quantitatifs est, à chaque fois : « Cette affirmation est fausse. ».

	n	k	p	$n \times k$
Problèmes qualitatifs	Je lance plusieurs fois un dé honnête. La probabilité que j'obtienne au moins 2 fois un trois en 4 tentatives est ■ supérieur à ■ égale à ■ inférieur à la probabilité que j'obtienne au moins 2 fois un trois en 5 tentatives.	...	...	
Problèmes quantitatifs	Je lance plusieurs fois un dé honnête. La probabilité que j'obtienne au moins 2 fois un six en 12 tentatives égale 3 fois la probabilité que j'obtienne au moins 2 fois un six en 4 tentatives. ■ Cette affirmation est vraie ■ Cette affirmation est fausse	...	...	Je lance plusieurs fois un dé honnête. La probabilité que j'obtienne au moins 2 fois un cinq en 6 tentatives est égale à la probabilité que j'obtienne au moins 1 fois un cinq en 3 tentatives. ■ Cette affirmation est vraie ■ Cette affirmation est fausse

Tableau 2 : Exemple de rédaction de quelques problèmes de recherche.

Comme annoncé plus haut, il y avait aussi trois problèmes qui servaient à détourner l'attention. Il s'agissait de problèmes simples qui étaient formulés

soit de façon qualitative (mais où l'égalité constitue la réponse exacte), soit de façon quantitative (mais où la réponse correcte est que l'affirmation est vraie).

Les élèves devaient non seulement indiquer la réponse correcte, mais aussi écrire pourquoi ils avaient choisi cette réponse.

5.3. Résultats

Les tableaux 3 et 4 donnent un aperçu des réponses que les élèves de la 4^e respectivement la 6^{ème} année ont donné pour les 7 problèmes de recherche. Les problèmes qui servaient à détourner l'attention sont laissés ici hors considération.

	Problèmes qualitatifs			Problèmes quantitatifs		
	Correct	Fautive	Pas répondu	Correct	Fautive	Pas répondu
n	87.9	10.3	1.9	15.9	84.1	0.0
k	93.2	15.9	0.9	17.8	81.3	0.9
p	93.5	6.5	0.0	16.8	82.2	0.9
n × k				22.4	77.6	0.0
Total	88.2	10.9	0.9	18.2	81.3	0.5

Tableau 3 : Pourcentage des réponses correctes et fautives auprès des élèves de 4^e année.

	Problèmes qualitatifs			Problèmes quantitatifs		
	Correct	Fautive	Pas répondu	Correct	Fautive	Pas répondu
n	92.4	6.8	0.8	18.7	76.3	5.1
k	78.8	19.5	1.7	38.1	61.9	0.0
p	97.5	2.5	0.0	16.1	83.1	0.8
n × k				30.5	67.8	1.7
Total	89.5	9.6	0.8	25.8	72.4	1.9

Tableau 4 : Pourcentage des réponses correctes et fautives auprès des élèves de 6^e année.

Dans les tableaux, on voit que — comme prévu — la majorité des élèves ont réalisé de très bons résultats pour les problèmes qualitatifs. Dans environ 90% des cas, la bonne réponse fut indiquée. Ceci signifie que les élèves — même ceux de la quatrième qui n'avaient pas encore eu d'enseignement de probabilités — ont une bonne compréhension qualitative de la variation

de la probabilité d'un événement quand un aspect de la situation change (notamment la variable n , k ou p). Les résultats des élèves de la 6^{ème} année étaient à peine meilleurs que ceux de la 4^{ème}, mais compte tenu des bonnes performances de ces derniers, on peut parler à ce sujet d'un « effet de plafond ». Cette bonne compréhension de la situation aléatoire paraît présente pour les trois problèmes. Les performances sont un peu moins bonnes pour le problème où l'on varie k , mais ceci est peut-être expliqué par le lien « descendant » entre k et P : si l'on demande un plus grand nombre de succès en un même nombre d'essais, il y a moins de chance que ceci se produise.

Comme prévu, cette bonne compréhension qualitative des situations aléatoires contraste ostensiblement avec les performances aux problèmes quantitatifs. Pour cette catégorie de problèmes, les élèves ont choisi plus souvent la réponse fautive, qui exprime une relation linéaire entre n , k ou p et P . La grande majorité des élèves étaient donc d'accord avec la quantification proportionnelle de leur compréhension qualitative correcte. Egalement en ce qui concerne le problème où n et k étaient variés simultanément, la plupart des élèves étaient d'accord avec l'effet linéaire (compensant) des deux variations. Les élèves de la 6^{ème} année ont répondu un peu mieux (25,8% des réponses correctes) aux problèmes quantitatifs que les élèves de la 4^{ème} année (18,2% des réponses correctes), mais eux aussi présentent une tendance très forte à raisonner de façon linéaire.

A l'avenir, une analyse des notes et des arguments écrits des élèves sera effectuée, afin de vérifier quels raisonnements les élèves font pour arriver à leur réponse exacte ou fautive. Une première analyse globale des réponses linéaires aux problèmes quantitatifs nous apprend que dans 80% des cas des réponses fautives, les élèves se réfèrent explicitement au modèle linéaire. Voici quelques exemples typiques pour le problème quantitatif n du tableau 2 :

Dans la première situation, on peut essayer trois fois autant de fois pour atteindre le même résultat (2 six), donc il est bien logique que l'on a trois fois autant de chance d'y arriver.

La probabilité de lancer 2 six en 12 tentatives est beaucoup plus grande que celle de lancer 2 six si l'on a droit qu'à 4 tentatives. Et 12 est 3 fois plus grand que 4, donc l'affirmation est vraie.

Une analyse plus fine des notes des élèves apportera sans doute des données plus riches au sujet des mécanismes et des causes qui amènent à raisonner illicitement de façon linéaire dans des situations binomiales.

6. En guise de conclusion

Dans certains cas, l'application à tort de la linéarité est à la base de méprises d'élèves dans des situations aléatoires, en particulier dans des situations où la distribution binomiale s'applique. Même après que les élèves aient été introduits aux principes du calcul des probabilités et à la distribution binomiale, les élèves approuvent de façon massive des affirmations dans lesquelles on raisonne à tort de façon linéaire. Il semble très probable qu'au jeu de roulette ils se laisseraient induire en erreur de la même façon que le joueur assidu que nous avons décrit, et qu'ils surestimeraient gravement leurs chances de gagner. Le modèle linéaire possède manifestement un caractère tellement évident et général, qu'il surgit inévitablement dans leur esprit et/ou qu'il est accepté comme valable. Ou, comme l'énonce Rouche [10] : « *Si presque toutes les mathématiques sont linéaires, n'est-ce pas parce que le linéaire est la structure la plus conforme à l'esprit de l'homme? (l'esprit donné congénitalement ou modelé par les pratiques les plus familières)* ».

En tant qu'enseignant, il est important de percevoir la base sous-jacente des méprises des élèves, afin de pouvoir y remédier de façon adéquate. Bien souvent, on peut montrer assez facilement pourquoi un raisonnement proportionnel ne peut être véridique. Alors, la question émerge : quel est ici le raisonnement correct? Pour Pascal, les questions et les raisonnements fautifs (proportionnels) du Chevalier de Méré furent une motivation importante pour avancer à grands pas dans la compréhension des situations probabilistes ... Un exemple inspirant pour la classe?

Bibliographie

- [1] Cramer K., Post T., Currier S., Learning and teaching ratio and proportion : research implications. In D.T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom : middle grades mathematics*, New York, Macmillan, 1993, 159-178.

- [2] De Bock D., L'illusion de la linéarité. Première partie : circonstances et commentaires, *Mathématique et Pédagogie*, 1998, 120, 39-50.
- [3] De Bock D., L'illusion de la linéarité. Deuxième partie : trois études dans l'enseignement secondaire, *Mathématique et Pédagogie*, 1998, 121, 30-45.
- [4] De Bock D., *The illusion of linearity. An empirical analysis of secondary school students'improper proportional reasoning in geometry problems*, Doctoral dissertation, K.U.Leuven, 2002.
- [5] Fischbein E., *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Dordrecht, Reidel, 1975.
- [6] Fischbein E., Schnarch D., The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1997, 28, 96-105.
- [7] Freudenthal H., *Mathematics as an educational task*, Dordrecht, Reidel, 1973.
- [8] Freudenthal H., *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht, Reidel, 1983.
- [9] Hawkins A.S., Kapadia R., Children's conceptions of probability - A psychological and pedagogical review, *Educational Studies in Mathematics*, 1984, 15, 349-377.
- [10] Rouche N., *La linéarité dans l'enseignement des mathématiques*, Exposé et discussion, Mons, 2001.
- [11] Schrage G., (Mis-) Interpretation of stochastic models. In R. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty*, Amsterdam, North-Holland, 1983, 351-361.
- [12] Shaughnessy J.M., Research in probability and statistics : reflections and directions. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics thinking and learning*, New York, Macmillan, 1992, 465-494.
- [13] Shaughnessy J.M., Dick T., Monty's dilemma : Should you stick or switch?, *Mathematics Teacher*, 1991, 84, 252-256.
- [14] Truran J.M., Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. In J. da Ponte en J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4)*, Lisbon, 1994, 337-344.
- [15] Tversky A., Kahneman D., Subjective probability : a judgement of representativeness, *Cognitive Psychology*, 1972, 3, 430-454.

Vers les infiniments petits

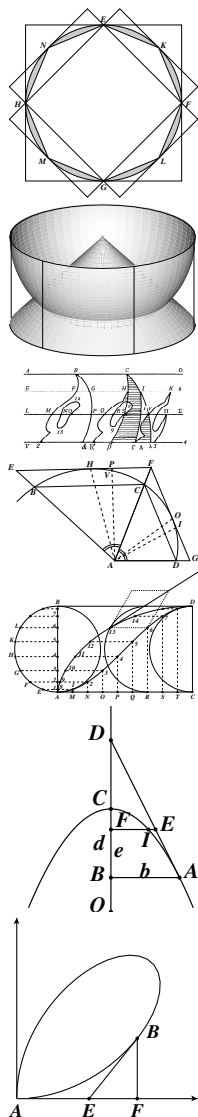
Simone Trompler et Guy Noël

Une publication de la S.B.P.M.e.f

La création du calcul différentiel et intégral par Newton et Leibniz résulte d'un processus s'étendant sur quelque 2000 ans. D'Eudoxe à Wallis, nous rencontrerons quelques-uns des acteurs de cette pièce sans metteur en scène. Ils ont pour noms Eudoxe et Wallis, déjà cités, mais aussi Archimède, Galilée, Cavalieri, Torricelli, Mersenne, Roberval, Fermat, Pascal, Descartes, Huygens...

À travers leurs textes, nous les voyons rivaliser d'ingéniosité pour calculer des longueurs de courbes, des aires de surfaces et des volumes de solides. Ils sont confrontés à l'infiniment petit et à l'infiniment grand, des notions qu'ils comprennent mal, qui les effraient et — peut-être — les séduisent. Ils contournent ces difficultés en inventant des méthodes, parfois rigoureuses, comme la méthode d'exhaustion d'Eudoxe et Archimède, parfois très informelles, comme la méthode des indivisibles, présente sous des formes variées chez Archimède comme chez Cavalieri, Torricelli et Roberval. Avec Fermat, Descartes, et Huygens, les méthodes s'affinent, s'appliquent à des objets de plus en plus généraux, on sent que le dénouement est proche. L'ouvrage s'achève en évoquant Wallis, prédécesseur immédiat de Newton et Leibniz.

Le présent document n'est pas un traité historique. Il se contente de mettre en évidence quelques auteurs et quelques textes. Certains d'entre eux sont difficiles. De courts extraits, commentés par les professeurs, pourraient familiariser les élèves avec les démarches de recherche en mathématiques et leur faire admirer l'intuition et la puissance de raisonnement des mathématiciens des siècles passés, ne disposant pas de nos symboles et de nos moyens techniques et astreints à de longues phrases pour exprimer la plus grande rigueur accessible.



Perspective cavalière : le cube, le cercle, le cône

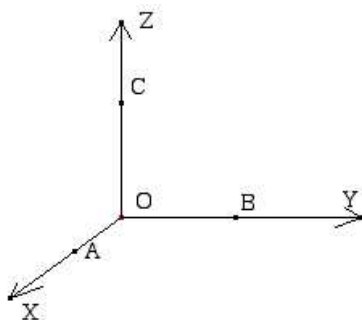
J.-P. HOUBEN, *Université Catholique de Louvain*

Mots-clés : Cabri-Géomètre, perspective, cube, cercle, cône

Avec l'aide de Cabri-Géomètre, nous allons construire une représentation d'un cube, d'un cercle et d'un cône en perspective cavalière. Il nous faudra d'abord fixer les paramètres de cette perspective : la direction de la fuite (en dessin technique, elle est donnée par un angle de 30 ou de 45 degrés) et le rapport de réduction ($\frac{1}{2}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans le dessin technique).

Perspective

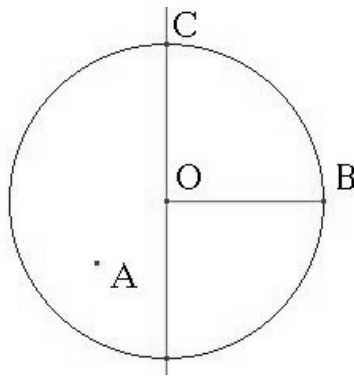
En fait, les paramètres de la perspective sont déterminés lorsque nous cherchons à représenter un trièdre trirectangle orthonormé $OXYZ$ en perspective cavalière où les points A, B et C marquent les unités sur les axes OX, OY et OZ .



Réalisons le dessin avec Cabri-Géomètre.

Prenons comme origine un point noté ⁽¹⁾ O . Puis, fixons le point unité B de l'axe OY de sorte qu'en traçant ⁽²⁾ le segment OB nous ayons une horizontale à l'écran. Pour fixer le point unité C de l'axe OZ , menons en O une perpendiculaire ⁽³⁾ à OB , puis traçons le cercle ⁽⁴⁾ de centre O et passant par B . Ce cercle rencontre ⁽⁵⁾ la perpendiculaire au point C . Traçons le segment OC . Nous avons maintenant OB et OC , deux des axes du repère orthonormé. C'est en fixant le point A de l'axe OX que nous déterminons les paramètres de la perspective : direction et rapport.

Nous obtenons maintenant la figure qui suit où il faudra, plus tard, cacher les éléments indésirables :



Profitions-en pour y faire apparaître les paramètres de la perspective : le rapport des distances OA et OB et l'angle de fuite de OA . Pour obtenir l'angle de fuite, traçons la droite OA et le segment OA et déterminons l'intersection M de la droite OA avec le cercle, puis recherchons la valeur de l'angle BOM . Nous allons afficher cette valeur dans un coin de l'écran en utilisant la calculatrice. Voici en détail les étapes de cet affichage :

1. pour l'angle :
 - Prendre la calculatrice.
 - Désigner avec la souris la valeur de l'angle.
 - Montrer avec la souris le $=$ de la calculatrice ou presser la touche = du clavier.

⁽¹⁾ **Points/** Point

⁽²⁾ **Lignes/** Segment

⁽³⁾ **Constructions/** Perpendiculaire

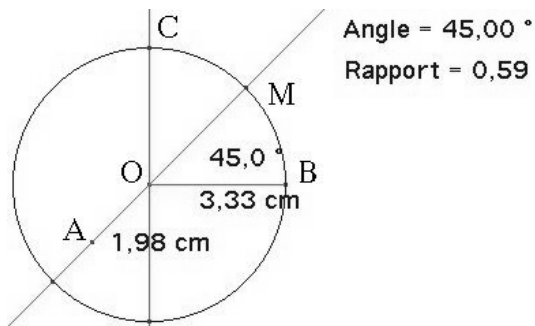
⁽⁴⁾ **Courbes/** Cercle

⁽⁵⁾ **Points/** Points sur deux objets

- Pointer le résultat.
- Transporter le rectangle dans le coin supérieur droit.
- Remplacer le texte " Résultat : " par " Angle = ".
- 2. pour le rapport :
- Afficher la distance entre O et A .
- Afficher la distance entre O et B .
- Avec la calculatrice désigner dans l'ordre : $d(O,A)$, puis $/$, puis $d(O,B)$, enfin $=$.
- Pointer le résultat.
- Transporter le rectangle dans le coin supérieur droit.
- Remplacer le texte " Résultat : " par " Rapport = ".

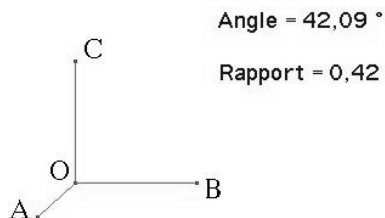
Pour vérifier la pertinence de notre travail, il suffit de modifier la position du point A .

Nous avons maintenant une image du style :

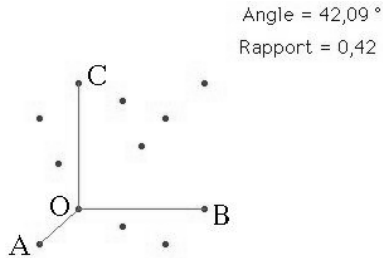


Le Cube

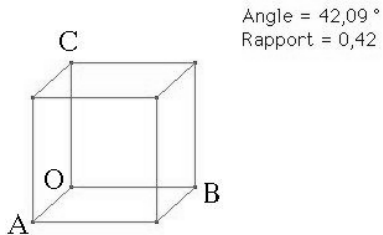
Partons de l'image précédente et cachons les éléments indésirables :



Il nous reste à construire les sommets du cube qui sont chaque fois le quatrième sommet d'un parallélogramme. Nous pouvons construire ce sommet en utilisant le milieu et la symétrie. Par exemple, le milieu de AC, puis le symétrique de O par rapport à ce milieu donne le quatrième sommet du parallélogramme construit sur AOC.



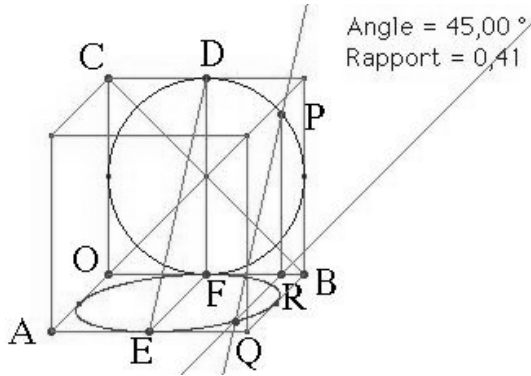
On termine en traçant les arêtes du cube et en cachant tous les points milieux de la construction.



En utilisant cette image et en y changeant le point A de place nous obtenons toutes les perspectives du cube, avec l'affichage simultané des paramètres de la représentation.

Le Cercle

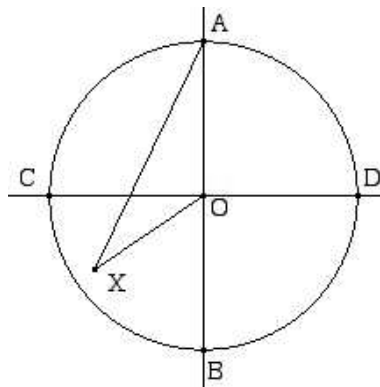
Dans le cube que nous venons de tracer, imaginons un cercle inscrit, soit dans la face avant, soit dans la face arrière. Sa projection sur la base déterminée par AOB sera alors une vue en perspective cavalière d'un cercle.



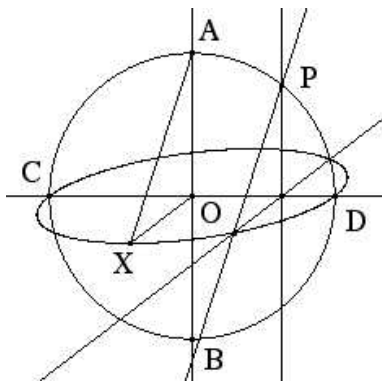
Dans ce dessin, les triangles DEF et PQR sont des triangles rectangles, isocèles et semblables. Leurs hypoténuses donnent la direction de la projection du cercle situé dans le plan vertical sur le plan horizontal. Si P est un point quelconque du cercle, alors Q décrit l'ellipse qui sera obtenue comme lieu ⁽⁶⁾ du point Q lorsque P parcourt le cercle.

On peut cependant obtenir la projection du cercle en se passant de la construction du cube.

Reprenons un cercle de centre O et de rayon quelconque. Construisons deux diamètres perpendiculaires : l'un AB mis verticalement, l'autre CD sera alors horizontal. Choisissons un point X , qui sera l'image du point A , si l'on imagine que le cercle pivote autour du diamètre horizontal CD pour se rabattre dans le plan horizontal déterminé par C, D et X .

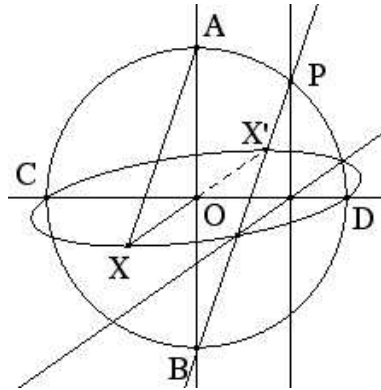


⁽⁶⁾ **Constructions** / Lieu



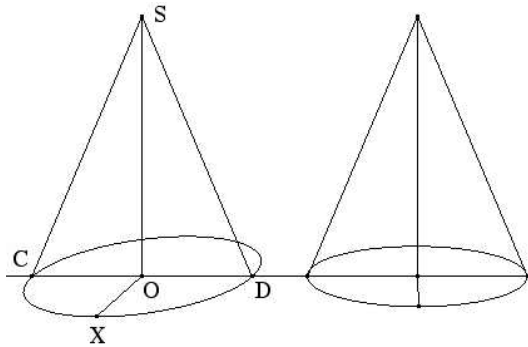
Nous savons par la géométrie que l'image en perspective cavalière d'un

(7) **Courbes / Conique**



Le Cône

Nous allons maintenant construire très rapidement un cône. Cachons toutes les constructions ⁽⁸⁾ de la figure précédente et plaçons le sommet S du cône en un point de OA ⁽⁹⁾.



Voilà deux représentation du cône en perspective cavalière. Celle de gauche est faite avec les mêmes paramètres que ceux de la représentation du cube. Celle de droite, plus habituelle pour un cône, avec une perspective à 90^0 .

Nous utiliserons plus tard des représentations du cône en perspective cavalière pour rechercher les sections dans un cône.

⁽⁸⁾ **Aspect** / Cacher

⁽⁹⁾ **Points** / Point sur objet

place réservée à la publicité

La théorie des noeuds, une théorie ... attachante !

C. CERF, P. CASTOLDI, M. PARKER, *UREM -
Université Libre de Bruxelles*

1. Avant-propos

Par rapport aux programmes de l'enseignement secondaire, la théorie des nœuds est totalement exotique. Alors pourquoi consacrer une publication pédagogique à ce sujet ? On peut citer plusieurs raisons : l'histoire de la théorie des nœuds montre que la mathématique n'est pas figée, même des sujets apparus au siècle passé posent encore chaque jour de nouvelles questions. Les réponses à ces questions sont en général difficiles à expliquer car elles utilisent des constructions mathématiques extrêmement élaborées. De plus, la théorie des nœuds illustre bien une évolution récente des mathématiques et de la physique : des concepts et des formalismes issus de domaines très éloignés interagissent et donnent des résultats inattendus. Mais les motivations principales sont certainement d'ordre ludique et esthétique : la curiosité et le plaisir intellectuel de démêler un problème posé de multiples façons, indépendamment de son utilité immédiate.

Sans doute les enseignants de mathématique, de physique, de chimie ou de biologie ne peuvent-ils consacrer une leçon à ce sujet. Mais peut-être sera-t-il utile lors d'une digression, d'une allusion à l'extraordinaire corrélation entre l'outil mathématique et la description de la nature. Par exemple, les biologistes moléculaires ont établi que la double hélice de l'ADN est nouée et tressée au cours des recombinaisons et des réplifications. Mais il est vraiment étonnant de constater combien les mécanismes mis en œuvre dans les cellules pour dénouer un nœud ressemblent aux méthodes mathématiques utilisées pour construire les invariants polynomiaux associés aux nœuds.

Adresse des auteurs :

C. Cerf, Chercheur Qualifié du FNRS, Avenue d'Italie, 40, 1050 - Bruxelles,
courriel : ccerf@ulb.ac.be

P. Castoldi, Zittekestraat, 2, 3080 - Tervuren, courriel : piero@castoldi.net

M. Parker, Avenue L. Clesse, 16, 1160 - Bruxelles, courriel : monique.parker@online.be

Le présent texte est également disponible au Centre de Documentation Pédagogique de l'Université Libre de Bruxelles.

Le lecteur séduit par les nœuds pourra découvrir bien d'autres facettes du sujet dans le dossier « Pour la Science »[1].

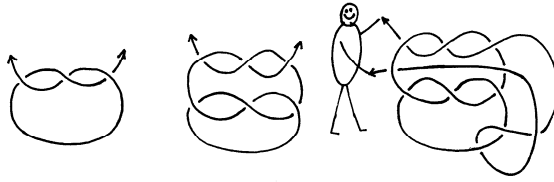
2. Et tout d'abord, un brin d'histoire

Les nœuds ont participé à l'histoire de l'humanité depuis plusieurs millénaires : nœuds de marins, jeux d'adresse de la ficelle enroulée autour des mains, tours de magie des prestidigitateurs, motifs décoratifs et entrelacs des enluminures celtes. Cependant, la théorie mathématique des nœuds est née il y a environ un siècle, d'une volonté d'explication de l'univers.

Vers 1860, WILLIAM THOMSON, qui deviendra plus tard LORD KELVIN, propose une synthèse des deux théories de l'époque concernant la structure de la matière (corpusculaire et ondulatoire). D'après lui, la matière serait bien constituée d'atomes appelés « vortex atoms » (atomes-tourbillons) qui ne sont pas des objets ponctuels mais des petits nœuds. Un atome serait donc comme une onde qui, au lieu de se propager dans toutes les directions, se déploierait en un étroit faisceau fortement recourbé et revenant sur lui-même. C'est le type du nœud qui déterminerait les propriétés physico-chimiques de l'atome. La classification des atomes est ainsi ramenée à un problème mathématique, la classification des nœuds, et c'est PETER TAIT qui s'attelle à cette tâche. Avec C. N. LITTLE, il publie à la fin du 19^e siècle une table des nœuds dont les projections présentent au maximum 10 croisements. Cette table contient 249 nœuds différents et ce n'est qu'un siècle plus tard qu'une duplication est détectée. La théorie de THOMPSON sur la structure de la matière est bientôt abandonnée, mais la théorie des nœuds est lancée.

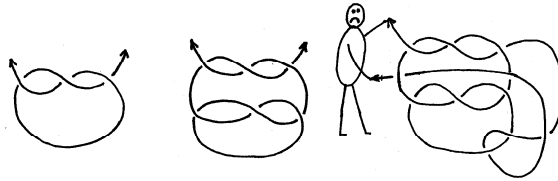
3. Noué ou non noué?

Un tour de magie bien connu consiste à faire plusieurs nœuds dans une ficelle et à ensuite la dénouer en tirant doucement sur les extrémités. Vous pouvez tenter l'expérience en suivant le mode d'emploi décrit dans les trois dessins suivants :



Les deux premières étapes sont claires. Ensuite vous passez le brin de droite dans la boucle du bas par-dessus puis dans la boucle du haut, également par-dessus. Le triple nœud ainsi obtenu semble fort compliqué, mais il disparaît comme par enchantement quand on tire les extrémités de la ficelle.

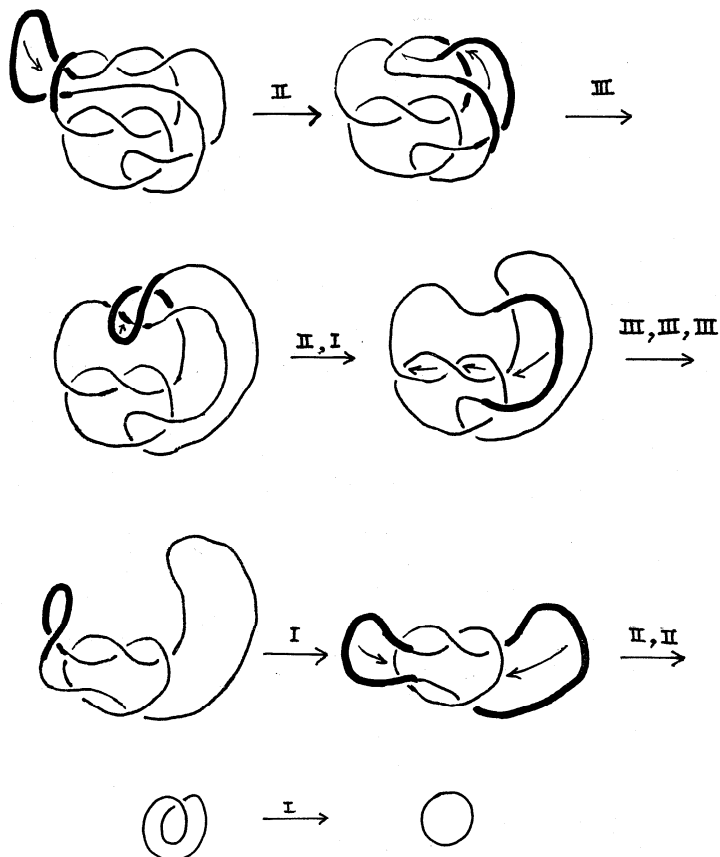
Recommencez à présent le même exercice en modifiant très légèrement la deuxième étape. La première et la troisième étape restent inchangées.



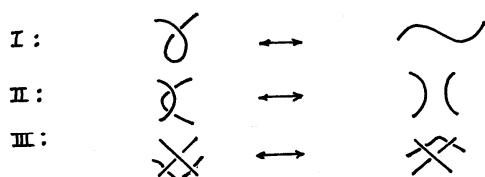
Raté! Les nœuds ne disparaissent plus. Pouvait-on prévoir ceci?

Essayons de préciser ce qui s'est passé. Dans le premier cas, on a déformé la ficelle nouée en une ficelle « droite », sans lâcher les extrémités. Autrement dit, la ficelle dont on tient les extrémités est une courbe fermée dans l'espace, et le problème revient à voir si on peut la déformer en une simple boucle sans la couper. Remarquons que cette question n'a de sens que si les extrémités de la ficelle ont été recollées (courbe fermée) car sinon on peut toujours (avec de la patience) défaire n'importe quel nœud.

Montrer qu'il existe une solution est en général relativement aisé : il « suffit » de l'exhiber. Par contre, prouver qu'il n'en existe aucune est souvent difficile. Ainsi, le triple nœud obtenu par la première manipulation se déforme en la boucle triviale par la suite de mouvements dessinés à la page suivante.



Les chiffres I, II et III au-dessus des flèches indiquent le type de mouvement qui permet chaque fois de simplifier le nœud :



Si ce bricolage permet de montrer que le premier triple nœud est bien déformable en une boucle triviale, il n'explique pas pourquoi le second triple nœud est resté noué. Il existe cependant un théorème qui pourrait être utile. Pour l'énoncer, il nous faut préciser quelques termes :

- Un nœud est une courbe fermée (c'est-à-dire dont les extrémités sont collées) dans l'espace, sans point d'intersection.
- Deux nœuds sont isotopes si l'un peut être déformé en l'autre de façon continue (un brin ne peut ni être coupé ni passer à travers un autre brin).

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de REIDEMEISTER (1932) :

Deux nœuds sont isotopes si et seulement si leurs projections peuvent être reliées par une suite finie de mouvements des types I, II, III ci-dessus, appelés mouvements de REIDEMEISTER.

Pour montrer que le triple nœud récalcitrant n'est pas isotope au nœud trivial il suffirait donc de prouver qu'aucune suite de mouvements de REIDEMEISTER ne transforme l'un en l'autre. Mais comme la succession de mouvements est aussi longue qu'on veut ... il n'y a aucun espoir de ce côté.

4. Invariant d'un nœud

Pour décider si deux nœuds sont isotopes ou non, les mathématiciens s'efforcent de leur associer un objet mathématique (nombre, polynôme, groupe) qui reste inchangé lorsque le nœud subit une déformation continue. Mais il n'existe à ce jour pas d'invariant complet d'un nœud. Cela signifie que :

Invariant(nœud 1) $\neq$ Invariant(nœud 2) si nœud 1 $\neq$ nœud 2

Mais la réciproque est fautive : des nœuds non isotopes peuvent avoir le même invariant.

Par exemple, un invariant du nœud est le nombre minimum de croisements que présente ce nœud dans une représentation plane. Il est clair que plusieurs nœuds non isotopes peuvent avoir le même nombre minimum

avec un double nœud. On a tellement peur que ça ne tienne pas!

de croisements. De plus, cet invariant est difficile à déterminer : comment être sûr qu'il n'existe aucun diagramme du même nœud comportant moins de croisements ?

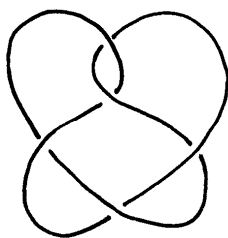
Une autre méthode de classification des nœuds consiste à leur associer un polynôme. Nous allons examiner deux d'entre eux, le polynôme d'ALEXANDER (1928) et le polynôme de JONES (1984).

4.1. Le polynôme d'ALEXANDER

Comment calculer le polynôme d'Alexander d'un nœud ?

4.1.1. Première étape

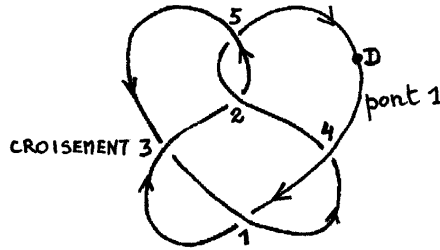
1. Dessinez le nœud en prenant soin de bien distinguer à chaque croisement le brin qui passe en dessous de celui qui passe au-dessus. Voici, par exemple, une représentation d'un nœud comportant $n = 5$ croisements.



On « voit facilement » (après l'avoir réalisé avec un bout de ficelle ?) qu'il s'agit d'un vrai nœud et que le nombre de croisements ne peut pas être réduit par des mouvements de REIDEMEISTER.

2. Interprétez le nœud comme un circuit routier que l'on parcourt en sens unique. Quand on arrive à un croisement, on dit qu'on entre dans un tunnel si l'on passe en dessous et on dit que entre deux tunnels consécutifs on se trouve sur un pont. Donc on passe deux fois par chaque croisement, une fois par le tunnel et une fois par le pont qui le surplombe.

3. Choisissez arbitrairement un sens de circulation et un point de départ D (qui ne soit pas un croisement) et numérotez successivement de 1 à n les tunnels empruntés avant de retrouver le point de départ. Attribuez à chaque croisement le numéro d'ordre de son tunnel et à chaque pont le numéro d'ordre du tunnel auquel il aboutit.



4. Attribuez à chaque croisement un signe (+) si, pour celui qui emprunte le tunnel, la circulation sur le pont qui surplombe va de la gauche vers la droite; lui attribuer le signe (−) dans le cas contraire.
5. On peut donc associer à chaque croisement son numéro d'ordre i , le numéro d'ordre k du pont qui le surplombe et le signe tel que déterminé au point 4. La situation est résumée dans un tableau à n lignes et 3 colonnes qui, dans l'exemple, est :

i	k	signe
1	4	(−)
2	5	(−)
3	2	(−)
4	1	(−)
5	3	(−)

Ce tableau encode le nœud de manière trop fidèle pour qu'il soit un invariant (une simple torsion peut modifier le nombre des croisements et donc des lignes), mais il permet de passer à la

4.1.2. Deuxième étape

1. Construisez une matrice $n \times n$, dite matrice du nœud, dont les éléments (i, j) , $j = 1, 2, \dots, n$, de la ligne i , sont donnés par les règles suivantes :
- 1^{er} cas : si le numéro k du pont qui surplombe le croisement i vaut i ou $i + 1$, poser

$$(i, i) = -1$$

$$(i, i + 1) = +1$$

$$(i, j) = 0 \quad \text{pour les autres valeurs de } j$$

(ce cas ne se présente pas dans notre exemple)

- 2^e cas : si le numéro k du pont qui surplombe le croisement i est tel que $k \neq i$ et $k \neq i + 1$ et si le signe du croisement est (+), poser

$$(i, i) = 1$$

$$(i, i + 1) = -t$$

$$(i, k) = t - 1$$

$$(i, j) = 0 \quad \text{pour les autres valeurs de } j$$

(ce cas ne se présente pas dans notre exemple)

- 3^e cas : si, comme dans le 2^e cas, $k \neq i$ et $k \neq i + 1$, mais si le signe du croisement est (-), poser

$$(i, i) = -t$$

$$(i, i + 1) = 1$$

$$(i, k) = t - 1$$

$$(i, j) = 0 \quad \text{pour les autres valeurs de } j$$

(c'est le cas qui se présente dans notre exemple)

Remarque : quand $i = n$, remplacez l'indice de colonne $j = n + 1$ par $j = 1$. Pour notre exemple, vous obtenez la matrice 5×5 :

$$\begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 & t-1 \\ 0 & t-1 & -t & 1 & 0 \\ t-1 & 0 & 0 & -t & 1 \\ 1 & 0 & t-1 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

Il est clair que cette matrice n'est pas plus invariante que le tableau récapitulatif dont elle provient.

- Supprimez, au choix, une ligne et une colonne de la matrice, c'est-à-dire considérez un mineur $(n-1) \times (n-1)$ arbitraire. Calculez le déterminant de ce mineur : vous obtenez un polynôme en t à coefficients entiers de degré non supérieur à $n-1$.

Dans notre exemple, en supprimant la 5^e ligne et la 5^e colonne, le déterminant du mineur 4×4 ainsi obtenu est le polynôme :

$$2t^3 - 3t^2 + 2t$$

3. Si besoin est, divisez ce polynôme par une puissance de t et/ou changez tous les signes pour obtenir un polynôme $\Delta(t)$ dont le terme de plus bas degré est un entier positif. C'est le polynôme d'ALEXANDER du nœud ! Dans notre exemple :

$$\Delta(t) = 2t^2 - 3t + 2$$

Quelques commentaires

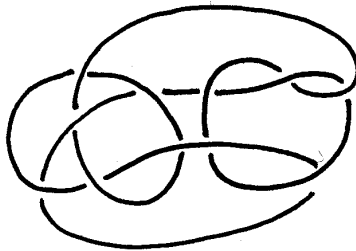
Sans pouvoir fournir ici la moindre justification, nous énonçons le théorème : le polynôme d'ALEXANDER est un invariant du nœud. Par conséquent, si deux nœuds sont isotopes, alors ils ont le même polynôme d'ALEXANDER, ou, si l'on préfère, si deux nœuds n'ont pas le même polynôme, alors ils ne sont pas isotopes.

Ceci permet déjà de vérifier que la ficelle récalcitrante de notre second exemple avait raison de rester nouée. En effet, son polynôme d'ALEXANDER vaut :

$$\Delta(t) = t^8 - 3t^7 + 4t^6 - 5t^5 + 5t^4 - 5t^3 + 4t^2 - 3t + 1$$

Le polynôme d'ALEXANDER du premier exemple est bien égal à 1, comme il se doit pour un nœud trivial.

Hélas, la perfection n'est pas de ce monde : le polynôme d'ALEXANDER ne permet pas de distinguer tous les nœuds. Il ne permet même pas de décider si une courbe fermée est nouée ou non ! Voici par exemple un nœud dont le polynôme d'ALEXANDER vaut 1, et cependant ce nœud n'est pas isotope au nœud trivial :



Pour prouver que ce nœud est non trivial, il faut utiliser un invariant plus puissant, par exemple le polynôme de JONES.

4.2. Le polynôme de JONES

Faites un nœud dans une ficelle (un seul!) et collez les extrémités. Vous obtenez le nœud de trèfle, ou plutôt l'un des deux nœuds de trèfle, images miroirs l'un de l'autre :



Aucune déformation continue ne permet de transformer l'un en l'autre, ces deux nœuds ne sont pas isotopes. Malheureusement, le polynôme d'ALEXANDER ne distingue pas le nœud de trèfle (a) du nœud de trèfle (b) : dans les deux cas, $\Delta(t) = t^2 - t + 1$.

Le premier invariant distinguant un nœud de son image miroir est le polynôme de JONES. Pour ce résultat, datant de 1984, VAUGHAN F. R. JONES a reçu en 1990 la médaille FIELDS ⁽¹⁾.

Beaucoup d'invariants polynomiaux associés à un nœud ne sont pas des polynômes au sens habituel des mathématiciens; ils peuvent contenir des puissances négatives de la variable! De plus, la démarche suivie pour associer un « polynôme » à un nœud est assez sophistiquée. Comme pour le polynôme d'ALEXANDER, nous allons nous contenter de construire le polynôme de JONES sans démontrer qu'il constitue un invariant du nœud. Le lecteur curieux (ou matheux ...) trouvera en Appendice la construction du polynôme de JONES faite par KAUFFMAN (1987) où l'invariance du polynôme est imposée par la construction elle-même.

Comment calculer le polynôme de JONES d'un nœud?

L'idée générale est la suivante. On obtient le polynôme de JONES $V(N)$ d'un nœud N , à une variable t , par récurrence :

On pose $V(0) = 1$ pour le nœud trivial 0 et on « démonte » un nœud quelconque par une utilisation répétée de la relation de JONES qui lie les polynômes de trois nœuds qui ne diffèrent que par un seul croisement. Cette relation, que nous désignons par (J) , est la suivante :

$$t^{-1} \cdot V(\text{diagram with crossing}) - t \cdot V(\text{diagram with crossing}) = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot V(\text{diagram with crossing}) \quad (J)$$

⁽¹⁾ l'équivalent, pour les mathématiciens, du prix NOBEL.

À titre d'exemple, nous allons « démonter » le nœud de trèfle. Nous entourons d'un petit cercle le croisement auquel nous appliquons la relation (J).

4.2.1. Première étape



TREFLE



NŒUD TRIVIAL



CHAÎNE À DEUX ANNEAUX
APPELÉE ENTRELACS DE HOPF

Nous obtenons la relation :

$$t^{-1} \cdot V(\text{nœud trivial}) - t \cdot V(\text{trèfle}) = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot V(\text{Hopf})$$

4.2.2. Deuxième étape

Pour calculer $V(\text{Hopf})$, nous utilisons à nouveau la relation (J) :



HOPF



2 NŒUDS TRIVIAUX



NŒUD TRIVIAL

Ce qui donne :

$$t^{-1} \cdot V(2 \text{ nœuds triviaux}) - t \cdot V(\text{Hopf}) = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot V(\text{nœud trivial})$$

4.2.3. Troisième étape



NŒUD TRIVIAL



NŒUD TRIVIAL



2 NŒUDS TRIVIAUX

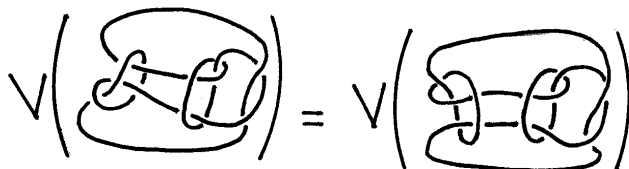
Puisque $V(\text{nœud trivial}) = 1$, on obtient :

$$t^{-1} - t = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot V(2 \text{ nœuds triviaux})$$

Il suffit alors d'un peu d'algèbre élémentaire pour arriver à :

$$V(\text{trèfle}) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

Malheureusement, le polynôme de JONES non plus ne permet pas de distinguer tous les nœuds :



De plus, on espère qu'un nœud dont le polynôme de JONES est égal à 1 est nécessairement isotope au nœud trivial, mais cette conjecture n'est toujours pas démontrée. Cependant, le polynôme de JONES a une propriété fort intéressante : c'est le premier invariant distinguant un nœud de son image miroir. Par exemple, pour l'autre nœud de trèfle, on trouve $V = -t^4 + t^3 + t$.

Mais pourquoi les mathématiciens veulent-ils distinguer un nœud de son image miroir ? Cette notion de *chiralité* ⁽²⁾ des nœuds, c'est-à-dire la propriété qu'ont certains nœuds d'être différents de leur image miroir, comme la main droite est différente de la main gauche, provient en fait d'une incursion de la théorie des nœuds en chimie (ou l'inverse ...).

5. Chiralité chimique et chiralité topologique

On dit qu'une molécule est *chimiquement chirale* si sa structure ne peut être déformée en son image miroir par des mouvements intramoléculaires réalisables. La chiralité chimique est une propriété observable : les images miroirs (appelées *énantiomères*) d'une molécule chirale ont des comportements différents, ce qui est important dans le cas de médicaments, car souvent seul l'un des énantiomères est physiologiquement actif. Un objet est dit

⁽²⁾ le mot *chiralité* vient du grec *χείρ*, main

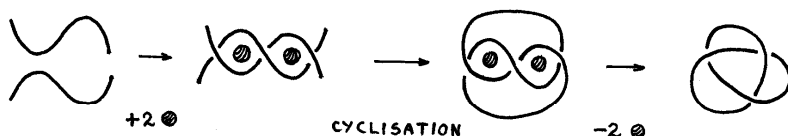
topologiquement chirale s'il ne peut être déformé en son image miroir de façon continue, c'est-à-dire sans se traverser ni être coupé.

Les mathématiques ne peuvent bien sûr pas nous dire quels mouvements intramoléculaires sont réalisables. Mais une molécule totalement flexible, dans laquelle tous les mouvements seraient autorisés, peut être identifiée à un objet topologique. Si cette molécule est topologiquement chirale, sa structure ne peut être déformée en son image miroir par des mouvements continus, quels qu'ils soient, *a fortiori* par des mouvements intramoléculaires réalisables. Elle est donc chimiquement chirale. La chiralité topologique implique la chiralité chimique. Il est à noter que la réciproque est faussée. Pour des détails sur ce sujet voir [4], chapitre 1.

Mais la chiralité n'est pas le seul lien entre la chimie et la théorie des nœuds.

6. Topologie moléculaire

Grâce aux clichés de microscopie électronique, on sait que les molécules d'ADN et les protéines s'entrelacent et se nouent. Mais les chimistes s'appliquent aussi, depuis bien longtemps, à fabriquer des composés de synthèse ayant des propriétés topologiques déterminées. Le nœud de trèfle a par exemple stimulé l'imagination des chimistes de synthèse durant plus de 30 ans. Il a fallu attendre 1989 pour que soit synthétisée la première molécule nouée en nœud de trèfle : deux noyaux métalliques servent à former une double hélice à trois croisements et il suffit alors de relier les extrémités libres.



La synthèse de ce composé noué produit indifféremment des nœuds droits ou gauches. Le signe de chaque énantiomère correspond au sens d'enroulement de la double hélice qui constitue le cœur de la molécule. En 1996, on a réussi à séparer les deux énantiomères d'un nœud de trèfle à deux atomes de cuivre monovalent et il semble bien que leurs propriétés optiques soient prometteuses.

7. ADN

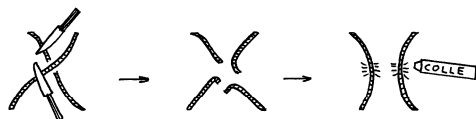
La topologie de l'ADN joue un rôle important dans tous les processus biochimiques que subit la cellule. Pour modifier la topologie de l'ADN, des enzymes appelées *topoisomérases* et *recombinases* entrent en action. Il est fascinant de constater la ressemblance entre les opérations effectuées par ces enzymes sur la molécule d'ADN et les « opérations chirurgicales » effectuées sur les nœuds lors des relations de récurrence utilisées pour calculer un invariant polynomial (par exemple, la relation de JONES (J)).

Les *topoisomérases* coupent un brin de la double hélice d'ADN (ou les deux brins) puis font passer le reste de la molécule à travers la coupure avant de recoller les bouts. Cette manipulation est essentielle par exemple pour relâcher la tension qui naît dans la molécule suite à une réplication.



Comparez ce schéma à $V(\text{X})$ et $V(\text{X})$ dans la relation (J). La ressemblance n'est-elle pas étonnante?

Les *recombinases* sont des enzymes qui coupent deux molécules d'ADN voisines puis recollent les bouts autrement (en joignant un bout d'une molécule à un bout de l'autre et vice-versa). Ce phénomène se passe notamment lors de la méiose. C'est le célèbre « crossing-over » qui explique que chaque individu nouvellement créé hérite d'une partie des gènes maternels et d'une partie des gènes paternels.



Cette fois, on retrouve une analogie parfaite avec $V(\text{X})$ et $V(\text{X})$ dans la relation (J).

8. Et maintenant? Les invariants de VASSILIEV

L'histoire des invariants associés à un nœud ne s'arrête pas là. Plusieurs mathématiciens ont tenté d'améliorer le polynôme de JONES, mais le premier à avoir proposé une approche vraiment nouvelle et prometteuse est VICTOR VASSILIEV (Moscou 1990). Au lieu d'essayer de définir un « meilleur » polynôme, il a eu l'idée d'adapter aux nœuds la théorie des catastrophes, créée il y a plus de 30 ans et célèbre par ses multiples applications à des domaines aussi variés que la météorologie, la biologie, la finance, l'économie, etc. Nous allons tenter une petite incursion au cœur des invariants de VASSILIEV.

Parlons d'abord d'autre chose

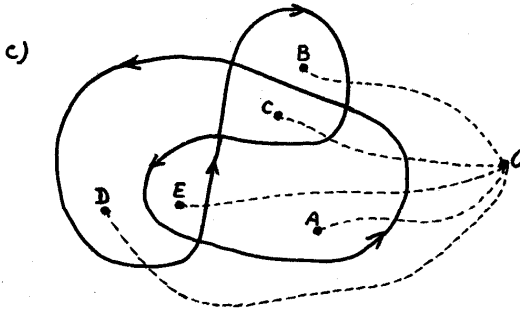
Une courbe plane fermée qui ne se coupe pas est une frontière qui partage le plan en deux régions : celle à l'intérieur de la courbe et celle à l'extérieur.



Autorisons maintenant la courbe à se couper et de plus, munissons-la d'une orientation, d'un sens de parcours (ne pas s'intéresser pour l'instant aux chemins qui relient le point O aux autres points).



Le plan cette fois semble partagé en une région extérieure, celle qui contient le point O , et une ou deux régions intérieures. On peut hésiter : si nous suivons la courbe a) dans le sens indiqué, la région qui contient le point A est à notre droite, tandis que celle qui contient le point B est à notre gauche. Si nous suivons la courbe b), l'intérieur est toujours à notre droite, mais la région qui contient le point B semble être elle-même à l'intérieur de la région qui contient le point A . Si maintenant nous examinons la courbe c), la situation devient inquiétante et nous pouvons nous demander s'il n'y a pas une procédure permettant de caractériser les différentes régions du plan.



Procédure permettant de clarifier la situation

- i) Prenons un point O situé dans la région extérieure comme point de référence et traçons des chemins qui joignent O aux points dans les différentes régions délimitées par la courbe. Ces chemins coupent une ou plusieurs fois la frontière constituée par la courbe.
- ii) Attribuons au point O de départ une valeur numérique arbitraire, disons 0 ; attribuons aux points de la courbe (c'est-à-dire aux points frontières) une valeur arbitraire non nulle, disons 1 .
- iii) En partant du point O et de sa valeur 0 , à chaque fois que le chemin coupe la courbe, nous ajoutons $(+1)$ si la courbe va vers la droite et (-1) si la courbe va vers la gauche.
- iv) Attribuons au point d'arrivée la valeur finale ainsi obtenue.

Dans le cas de la courbe c) :

- les points de la région A valent $+1$;
- les points de la région B valent -1 ;
- les points de la région C valent 0 ;
- les points de la région D valent $+1$;
- les points de la région E valent $+2$;
- les points de la région O valent 0 .

Nous avons admis que les points d'une même région, pouvant être reliés par un chemin qui ne rencontre aucune frontière, ont tous la même valeur. Il faudrait le démontrer, mais quelques exemples nous convaincront que la procédure est cohérente : la valeur d'un point ne dépend pas du chemin suivi, elle est donc un invariant du point.

Bien sûr, un changement de la valeur du point de référence, de l'orientation de la courbe ou de la valeur de ses points, n'apporte qu'une modification

inessentielle à la valeur des points de l'espace. Nous pouvons aussi nous contenter de calculer la différence entre les valeurs de deux points. Nous pourrions alors examiner le chemin qui les relie, sans passer par le point de référence.

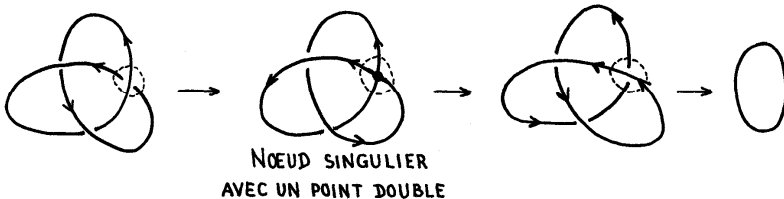
Moralité

Dans un espace partagé en régions par des frontières, nous pouvons attribuer aux points des différentes régions des valeurs déterminées par la nature des chemins qui les relie, par les frontières à traverser, par la manière de les traverser, et par la valeur des points frontières.

Revenons à nos nœuds

L'espace que nous allons considérer est celui qui contient tous les nœuds, le nœud trivial, le nœud de trèfle, etc ... Nous devons décider ce que nous appelons chemin, nœud de référence, région, frontière, ... Nous pouvons relier deux nœuds isotopes par des mouvements de REIDEMEISTER, c'est-à-dire par un chemin qui ne rencontre aucun obstacle : un nœud et tous ses isotopes constitueront une région. Le nœud trivial peut être pris comme nœud de référence, mais comment définir la frontière qui sépare sa région de celle du nœud de trèfle ? et comment la traverser ?

Idée géniale : prenons un nœud de trèfle et, comme s'il était fait d'une matière malléable, écrasons un de ses croisements (celui indiqué par un petit cercle dans la figure ci-dessous, par exemple) et obligeons le brin qui passait au-dessus à passer en dessous, changeons donc le signe du croisement. Nous obtenons le nœud trivial, mais nous avons transité par une phase où l'objet dans nos mains n'était plus un nœud au sens strict, puisqu'il présentait un point double. Appelons cet objet *nœud de trèfle singulier*, c'est lui qui constitue la frontière entre le (vrai) nœud de trèfle et le nœud trivial.



Donnons une valeur au nœud trivial ; que faut-il ajouter ou retrancher à la valeur d'un nœud lors du passage d'une frontière ? Autrement dit, que vaut la différence entre les valeurs de deux nœuds qui ne diffèrent que par le signe d'un croisement ? La démarche est analogue au point (ii) de

la procédure décrite plus haut. On utilise la règle suivante (dite *règle de résolution*) :

$$Val(\text{X}) = Val(\text{X}) - Val(\text{X})$$

Les trois nœuds sont identiques partout sauf au croisement indiqué. Comme cas particulier, nous avons le nœud singulier le plus simple à un point double, qui vaut 0 puisqu'il se résout en deux fois le même nœud trivial :

$$\text{Figure-eight knot} = \text{Figure-eight knot} - \text{Figure-eight knot} = 0$$

Dans le cas du nœud de trèfle :

$$\text{Trefoil knot} = \text{Resolved trefoil knot} - \text{Trivial knot}$$

Nous venons d'effectuer un (tout) petit pas dans la bonne direction : la différence entre la valeur du nœud du trèfle et celle du nœud trivial est la valeur attribuée au nœud singulier à un point double qui constitue la frontière entre les deux. Si cette valeur n'est pas nulle, le nœud de trèfle est bien différent du nœud trivial.

N'oublions pas l'autre nœud de trèfle !

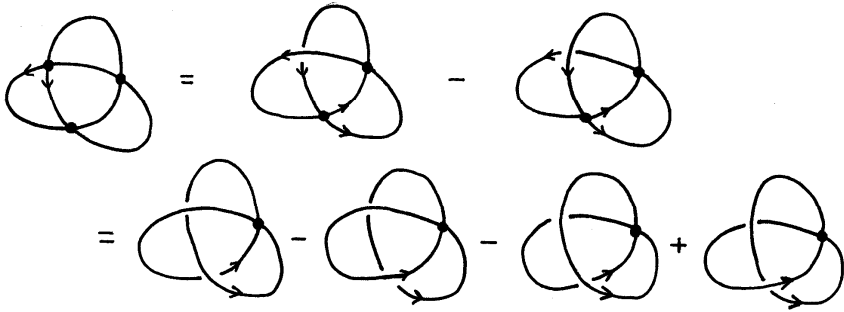
En utilisant la règle de résolution, nous obtenons :

$$\text{Mirror trefoil knot} = - \text{Resolved mirror trefoil knot} + \text{Trivial knot}$$

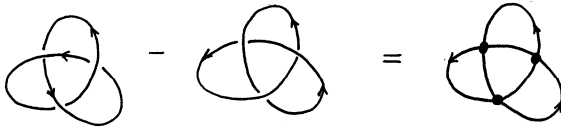
Nous pouvons combiner les deux dernières lignes et obtenir la différence entre les nœuds de trèfles :

$$\text{Trefoil knot} - \text{Mirror trefoil knot} = \text{Resolved trefoil knot} - \text{Resolved mirror trefoil knot}$$

Un problème, toutefois, se pose : les deux nœuds singuliers à un point double, appelons-les *nœuds singuliers d'ordre 1*, diffèrent par le signe de deux croisements. Pouvons-nous attribuer à chacun de ces nœuds singuliers une valeur arbitraire, ou, au contraire, y a-t-il une corrélation entre les deux valeurs ? Solution du problème : pour passer d'un nœud singulier d'ordre 1 à l'autre, il faut d'abord changer le signe d'un premier croisement, et transiter par des nœuds singuliers d'ordre 2 (avec 2 points doubles), changer ensuite le signe du dernier croisement en transitant par un nœud singulier d'ordre 3 (avec 3 points doubles). Partons de celui-ci et appliquons deux fois la règle de résolution :



Et finalement :



En conclusion, la différence de valeur entre les deux nœuds de trèfle est égale à la valeur du nœud singulier d'ordre 3. Si cette valeur n'est pas nulle, les deux nœuds de trèfle sont bien différents. Si elle est nulle, les deux nœuds singuliers d'ordre 1 considérés plus haut ont des valeurs opposées, et les deux nœuds de trèfles ne sont pas différenciés.

Nous pouvons à présent dire (enfin!) ce que sont ces invariants de VASSILIEV

Un invariant de VASSILIEV d'ordre n est une fonction qui attribue une valeur numérique à chacun des nœuds (vrai nœud ou nœud singulier), en respectant la règle de résolution, et qui est nulle sur les nœuds singuliers d'ordre $n+1$. Pour définir de telles fonctions, il faut attribuer des valeurs bien choisies à certains nœuds singuliers.

Plus modestement, en essayant de généraliser au grand espace de tous les nœuds ce que nous avons appris dans un mini-espace ne contenant que le nœud trivial et les deux nœuds de trèfle, nous pouvons entrevoir certaines des propriétés de ces fonctions.

- A) Les nœuds singuliers permettent le passage d'un nœud à un autre. Le chemin qui relie deux nœuds singuliers d'un ordre donné transite par des nœuds singuliers d'ordre supérieur : les frontières sont à leur tour partagées par des frontières.
- B) Si les nœuds singuliers d'ordre n sont tous de valeur nulle, alors les nœuds singuliers d'ordre $n+1$ (et donc d'ordre $n+2$, ...) sont aussi de valeur nulle : il suffit de résoudre un point double d'un nœud singulier d'ordre $n+1$ pour aboutir à deux nœuds singuliers d'ordre n .
- C) L'invariant d'ordre 0 n'est pas intéressant, puisqu'il ne différencie aucun nœud. En effet tout (vrai) nœud peut être ramené au nœud trivial en changeant le signe d'un ou plusieurs croisements et en passant par des nœuds singuliers d'ordre 1, 2, ... de valeur nulle. On dira que cet invariant est trivial.
- D) L'invariant de VASSILIEV d'ordre 1 est aussi sans intérêt puisqu'il attribue une valeur nulle, non seulement aux nœuds singuliers d'ordre 2, 3, ... (ce qu'il doit faire), mais aussi aux nœuds singuliers d'ordre 1. En effet, tout nœud singulier comportant un seul point double et d'autres croisements « normaux » peut être ramené, en passant par des nœuds singuliers d'ordre 2, 3, ... de valeur nulle, au nœud singulier d'ordre 1 sans croisement (notre « cas particulier » plus haut). Mais nous avons vu que la valeur de ce dernier est nécessairement nulle.
- E) Par contre, un invariant de VASSILIEV d'ordre 2 n'est pas trivial. Comme nous l'avons vu, certains nœuds commencent à se différencier (les deux nœuds de trèfle ne sont pas équivalents au nœud trivial, bien que équivalents entre eux).
- F) Un invariant d'ordre 3 permet, par exemple, de différencier les deux nœuds de trèfle.
- G) Les invariants de VASSILIEV deviennent de plus en plus perspicaces quand leur ordre augmente. L'espoir est que deux nœuds quelconques (non isotopes) puissent toujours être différenciés par un invariant d'ordre assez élevé. Jusqu'à présent, cela n'est pas démontré, mais on n'a trouvé aucun contre-exemple.

9. Appendice : Le polynôme de JONES (approche de KAUFFMAN)

Première étape

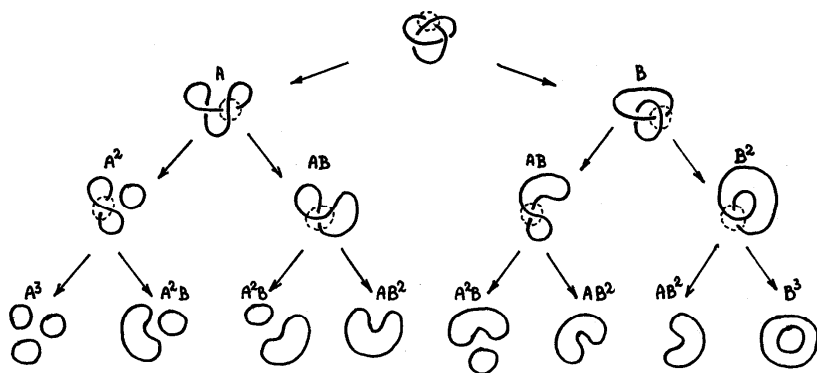
On associe au nœud N un polynôme appelé *polynôme crochet*, noté $\langle N \rangle$, à trois variables A, B, C , défini de façon axiomatique par les trois règles :

- (1) $\langle O \rangle = 1$
- (2) $\langle \text{X} \rangle = A \cdot \langle \text{X}_A \rangle + B \cdot \langle \text{X}_B \rangle$
- (3) $\langle N \ O \rangle = C \cdot \langle N \rangle$

Dans la règle (3), la notation $N \ O$ désigne la réunion disjointe du nœud N et du nœud trivial O . Ainsi,

$$\langle O \ O \rangle = C \cdot \langle O \rangle = C \cdot 1 = C$$

A titre d'exemple, calculons le polynôme $\langle N \rangle$ lorsque N est l'un des deux nœuds de trèfle (appelons-le nœud de trèfle *gauche*). A chaque stade, nous entourons d'un petit cercle le croisement auquel nous appliquons l'une des règles de la définition axiomatique.



On obtient ainsi le polynôme crochet à trois variables :

$$\langle N \rangle = A^3 C^2 + 3A^2 B C + 3A B^2 + B^3 C$$

Deuxième étape

Il faut à présent imposer des conditions sur A, B, C pour que le polynôme $\langle N \rangle$ soit un invariant du nœud. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que le polynôme soit inchangé par les trois mouvements de REIDEMEISTER.

Imposons l'invariance par les mouvements de type II :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{II} \rangle &= A \langle \text{II}_1 \rangle + B \langle \text{II}_2 \rangle \\
 &= A^2 \langle \text{II}_1 \rangle + AB \langle \text{II}_2 \rangle + AB \langle \text{II}_3 \rangle + B^2 \langle \text{II}_4 \rangle \\
 &= A^2 \langle \text{II}_1 \rangle + ABC \langle \text{II}_2 \rangle + AB \langle \text{II}_3 \rangle + B^2 \langle \text{II}_4 \rangle \\
 &= (A^2 + ABC + B^2) \langle \text{II}_1 \rangle + AB \langle \text{II}_2 \rangle
 \end{aligned}$$

On veut avoir

$$\langle \text{II} \rangle = \langle \text{II}_1 \rangle.$$

On impose donc

$$AB = 1 \quad \text{et} \quad A^2 + ABC + B^2 = 0,$$

ou encore,

$$B = A^{-1} \quad \text{et} \quad C = -A^2 - A^{-2}.$$

On obtient ainsi un nouveau polynôme crochet, à une variable A . Par exemple, pour le nœud de trèfle gauche,

$$\langle N \rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}.$$

La règle (2) s'écrit maintenant :

$$(2) \quad \langle \text{II} \rangle = A \cdot \langle \text{II}_1 \rangle + A^{-1} \cdot \langle \text{II}_2 \rangle$$

Examinons à présent les mouvements de type III :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{III} \rangle &= A \langle \text{III}_1 \rangle + A^{-1} \langle \text{III}_2 \rangle \\
 &\quad \downarrow \text{II, II} \quad \quad \quad \downarrow \\
 \langle \text{III} \rangle &= A \langle \text{III}_1 \rangle + A^{-1} \langle \text{III}_2 \rangle
 \end{aligned}$$

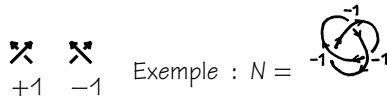
Ils n'imposent aucune nouvelle condition. Malheureusement les mouvements de type I nous réservent une mauvaise surprise :

$$\begin{aligned}
 \langle \textcircled{\text{I}} \rangle &= A \langle \textcircled{\text{II}} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{\text{III}} \rangle \\
 &= A(-A^2 - A^{-2}) \langle \sim \rangle + A^{-1} \langle \sim \rangle \\
 &= (-A^3 - A^{-1} + A^{-1}) \langle \sim \rangle \\
 &= -A^3 \langle \sim \rangle \\
 &\neq \langle \sim \rangle \quad !
 \end{aligned}$$

Hélas, le polynôme crochet à une variable n'est pas un invariant du nœud ... mais on va s'en sortir en le normalisant.

Troisième étape

Cette normalisation consiste à multiplier le polynôme crochet $\langle N \rangle$ par $(-A^3)^{-w(N)}$ où $w(N)$ est le « writhe » (vrillage) du nœud N . Cette expression barbare recouvre une notion fort simple. On choisit une orientation sur la courbe et une convention de signe pour chaque croisement :



Le vrillage est la somme des +1 et des -1 quand on parcourt le nœud. Ainsi, pour le nœud de trèfle gauche, on trouve $w(N) = -3$. Et le miracle se produit :

$$P(N) = (-A^3)^{-w(N)}. \langle N \rangle \text{ est un invariant du nœud!}$$

Et pour terminer...

Pour terminer (en beauté), nous allons montrer que ce polynôme $P(N)$ vérifie la relation de JONES (J).

Reprenons la règle (2) ayant servi à définir le polynôme crochet à une variable A :

$$\langle \textcircled{\text{X}} \rangle = A \cdot \langle \textcircled{\text{Y}} \rangle + A^{-1} \cdot \langle \textcircled{\text{Z}} \rangle$$

En tournant l'angle de vue d'un quart de tour, cette relation devient

$$\langle \text{X} \rangle = A \cdot \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \cdot \langle \text{X} \rangle$$

En additionnant la première relation multipliée par $(-A)$ et la seconde multipliée par A^{-1} , on obtient

$$\begin{aligned} -A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \cdot \langle \text{X} \rangle &= -A^2 \cdot \langle \text{X} \rangle - \langle \text{X} \rangle + \langle \text{X} \rangle + A^{-2} \cdot \langle \text{X} \rangle \\ &= (A^{-2} - A^2) \cdot \langle \text{X} \rangle \end{aligned}$$

Pour obtenir le polynôme normalisé $P(N)$ d'un nœud N , il faut multiplier le polynôme crochet par $(-A^3)^{-w(N)}$ où $w(N)$ est le vrillage du nœud N . Comme $w(\text{X}) = +1$, $w(\text{X}) = -1$, $w(\text{X}) = 0$, on a :

$$A^4 P(\text{X}) - A^{-4} P(\text{X}) = (A^{-2} - A^2) P(\text{X})$$

Enfin, en remplaçant A par $t^{-\frac{1}{4}}$, on retrouve bien la relation (J) ayant servi à construire le polynôme de JONES. Ainsi, pour le nœud de trèfle gauche :

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= A^7 - A^3 - A^{-5} \\ P(N) &= -A^{16} + A^{12} + A^4 \\ V(N) &= -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1} \end{aligned}$$

10. Quelques références

[1] *La Science des Nœuds*, Dossier Pour la Science, Avril 1997.

Notre avis : Dossier magnifique. Réédité sous forme de livre par Belin en 2001.

[2] *The Knot Book : An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, Colin C. Adams, W. H. Freeman and Company, 1^{re} édition en 1994, nouvelle édition couverture souple en 2001.

Notre avis : Le meilleur livre sur la théorie mathématique des nœuds pour non spécialistes. Contient les références des principaux articles originaux.

[3] *Nœuds : Genèse d'une Théorie Mathématique*, Alexei Sossinsky, Editions du Seuil, 1999.

Notre avis : A l'avantage d'être écrit en français. Très lisible pour comprendre les grandes idées du sujet, mais comporte malheureusement de nombreuses petites erreurs typographiques qui empêchent de prendre ce livre comme référence.

[4] *Chemical Topology : Applications and Techniques*, Mathematical Chemistry Series Vol. 6, édité par D. Bonchev et D. H. Rouvray, Gordon and Breach Science Publishers, 2000.

Notre avis : Pour approfondir les rapports entre la théorie des nœuds d'une part, et la chimie et biochimie (ADN, protéines) d'autre part. Destiné à un public plus averti.

La démonstration en géométrie plane
dans les premières années de l'enseignement secondaire.

La découverte donc la pratique d'une démonstration apparaît comme touchant à la fois tant au domaine de la technique qu'à celui de l'inspiration. C'est cette dernière composante, pas nécessairement mobilisable en tout temps et en toutes circonstances, qui la rend difficile aux yeux des débutants ... et des autres. La démonstration en gestation constitue, en fin de compte, un exercice non routinier et non systématique, mobilisant aussi bien des éléments de la connaissance acquise que des résultats d'investigations provoquées par « l'idée » du moment. Dans cette optique, la démonstration constitue un élément fondamental de la formation non seulement mathématique mais aussi générale.

Les auteurs ont souhaité que le document s'inscrive dans la perspective d'une exploration didactique. Ils vous soumettent ici leurs réflexions à propos des difficultés de l'apprentissage et de l'enseignement de la démonstration ainsi que de nombreuses suggestions pour la pratique dans la classe. Plus de 150 exercices — résolus pour la moitié — illustrent leur propos.

Document de 144 pages, rectos seulement, format A4, broché. A consommer sans modération!!!

Commission pédagogique de la
Société Belge des Professeurs de Mathématiques
d'expression française

Exploration didactique

Claude Villers

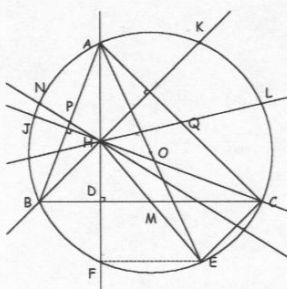
avec la collaboration de

Mady Fremal, Renée Gossez et Robert Haine

La démonstration en géométrie plane

dans les premières années de l'enseignement secondaire

Réflexions à propos des difficultés de son apprentissage
et de son enseignement. Quelques suggestions!



Dépôt légal: Bibliothèque Royale Albert Ier , Bruxelles : D/2003/7075/2.
Imprimé en Belgique - Août 2003

Utilisation du tableur Excel pour le remboursement d'un emprunt par une annuité

A. COOLEN - V. HENRY, Université de Liège

On appelle *annuité* une suite de versements (appelés « termes ») effectués à intervalles de temps constants dans le but de constituer un capital ou de rembourser une dette.

Lorsque ces versements sont effectués en début de chaque période, cela correspond à une épargne alors que, lorsqu'ils sont effectués en fin de chaque période, cela correspond au remboursement d'une dette. De plus, lorsque les versements sont constants, on parle d'annuité à termes constants.

1. Remboursement d'un emprunt par une annuité à termes constants

Considérons un emprunt E remboursé par une annuité de n termes égaux à a , le taux annuel de l'intérêt composé étant i et le premier versement ayant lieu à la fin de la première année. Représentons le remboursement de cet emprunt sur une ligne du temps :

0	1	2	3	4	...	$n-2$	$n-1$	n
	a	a	a	a	...	a	a	a
E								$A(n)$

La valeur de l'annuité au moment du dernier versement est égale à

$$A(n) = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + \dots + a(1+i)^2 + a(1+i) + a$$

Adresse des auteurs : Annette Coolen, Courriel : A.Coolen@ulg.ac.be, Valérie Henry, courriel : V.Henry@ulg.ac.be, Ulg, Faculté E.G.S.S., Bat B31, Boulevard du Rectorat, 7, 4000 - Liège. La publication IREM dont est issue cette application est intitulée « Utilisation du tableur en mathématiques financières ».

ou encore

$$A(n) = a(1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1})$$

La parenthèse qui multiplie « a » représente la somme des termes d'une progression géométrique de raison $1 + i$. D'où,

$$A(n) = a \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

La valeur de cette annuité au moment où la dette a été contractée, c'est-à-dire à l'époque 0, correspond évidemment à la somme empruntée. Donc en actualisant $A(n)$, on obtient

$$E = \frac{A(n)}{(1 + i)^n},$$

ou encore, après transformation de la formule,

$$E = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

Une personne qui emprunte est généralement confrontée à la question suivante : « Si j'emprunte une somme E , que je souhaite la rembourser en n années, et que le taux de l'intérêt annuel proposé par ma banque est i , quel sera le montant du versement annuel à payer? ». Autrement dit, connaissant E , n et i , comment déterminer la valeur des termes constants « a » de l'annuité? La transformation de la dernière formule permet évidemment de répondre à la question puisque

$$a = \frac{E \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}.$$

Mais regardons d'un peu plus près ce qui se cache dans le terme de l'annuité. Nous nous doutons bien qu'il est composé d'une partie « intérêt » et d'une partie « amortissement du capital emprunté »; mais quelle est la part de chacune de ces parties? Pour le voir, réalisons un tableau d'amortissement en considérant l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} E &= 5.000.000 \\ n &= 10 \\ i &= 0,0625. \end{aligned}$$

Tableur Excel

En utilisant la formule mise en évidence ci-dessus, calculons la valeur du terme constant de l'annuité :

$$a = 687.408,93$$

Complétons maintenant le tableau suivant :

Période	Dette restante en début de période	Intérêt de la période	Amortissement du capital	Terme de l'annuité
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

La dette restante en début de première période coïncide avec le montant emprunté, c'est-à-dire 5.000.000. L'intérêt relatif à la première période est égal à 6,25% de la somme empruntée, autrement dit

$$0,0625 \times 5.000.000 = 312.500.$$

Il est alors facile de calculer l'amortissement du capital relatif à cette première période par différence entre le terme de l'annuité et l'intérêt : l'amortissement est donc égal à

$$687.408,93 - 312.500 = 374.908,93.$$

Nous pouvons ainsi compléter la première ligne de notre tableau :

Tableur Excel

Période	Dette restante en début de période	Intérêt de la période	Amortissement du capital	Terme del'annuité
1	5.000.000,00	312.500,00	374.908,93	687.408,93
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Passons maintenant à la deuxième période.

En début de deuxième période, la dette restante correspond à la dette restante en début d'année précédente diminuée de la partie de la dette qui a été amortie lors de cette période précédente, c'est-à-dire

$$5.000.000 - 374.908,93 = 4.625.091,07.$$

L'intérêt à payer en fin de deuxième période sera donc égal à 6,25% de cette somme, c'est-à-dire 289.068,19 et l'amortissement du capital sera

$$687.408,93 - 289.068,19 = 398.340,72.$$

On obtient ainsi

Période	Dette restante en début de période	Intérêt de la période	Amortissement du capital	Terme del'annuité
1	5.000.000,00	312.500,00	374.908,93	687.408,93
2	4.625.091,07	289.068,19	398.340,72	687.408,93
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

En poursuivant le même raisonnement, on peut remplir l'entièreté de ce tableau. Il est toutefois fastidieux de compléter ainsi toutes les lignes.

Tableur Excel

L'utilisation d'un tableur peut nous faciliter le travail. Entrons les données dans la feuille de calculs, en particulier les valeurs numériques de E , n et i respectivement dans les cellules C3, C4 et C5.

En C6, indiquons $=C3 * C5 / (1 - (1 + C5) ^ (-C4))$ pour obtenir la valeur du terme a .

En B10, indiquons $=C3$.

En C10, indiquons $=C5 * B10$ et recopions vers le bas jusqu'en C19.

En E10, indiquons $=C6$ et recopions vers le bas jusqu'en E19.

En D10, indiquons $=E10 - C10$ et recopions vers le bas jusqu'en D19.

En B11, indiquons $=B10 - D10$ et recopions vers le bas jusqu'en B19.

Voilà le tableau d'amortissement terminé.

	A	B	C	D	E
1	Tableau d'amortissement d'un emprunt remboursé par une annuité à termes constants.				
2					
3		Somme empruntée (E) :	5 000.000		
4		Nb de périodes (n) :	10		
5		Taux annuel (i) :	6,25%		
6		Terme de l'annuité (a) :	687.408,93		
7					
8	Période	Dette restante en début de période	Intérêt de la période	Amortissement du capital	Terme de l'annuité
9					
10	1	5.000.000,00	312.500,00	374.908,93	687.408,93
11	2	4.625.091,07	289.068,19	398.340,73	687.408,93
12	3	4.226.750,34	264.171,90	423.237,03	687.408,93
13	4	3.803.513,31	237.719,58	449.689,34	687.408,93
14	5	3.353.823,97	209.614,00	477.794,93	687.408,93
15	6	2.876.029,04	179.751,82	507.657,11	687.408,93
16	7	2.368.371,93	148.023,25	539.385,68	687.408,93
17	8	1.828.986,25	114.311,64	573.097,28	687.408,93
18	9	1.255.888,97	78.493,06	608.915,86	687.408,93
19	10	646.973,11	40.435,82	646.973,11	687.408,93

Tab. 1 : Tableau d'amortissement pour une annuité à termes constants.

Remarque : Les valeurs des amortissements du capital sont en progression géométrique de raison $1 + i$.

L'interprétation de ces données est plus facile à observer à partir d'une représentation graphique. Réalisons d'abord un graphique de type « his-

togramme groupé » c'est-à-dire un histogramme pour lequel les barres représentant l'intérêt, l'amortissement du capital et le terme de l'annuité relatifs à chaque période viendront se placer les uns à côté des autres. Il suffit pour cela de sélectionner le champ (C8 : E19) et de créer un histogramme de sous-type « groupé » tel que représenté à la figure 1 de la page 64.

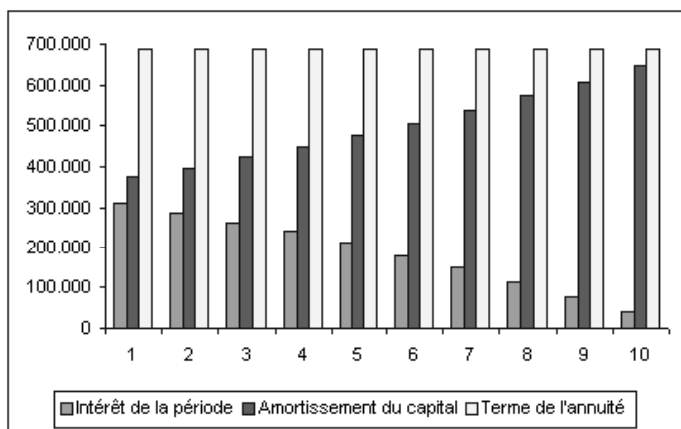


Fig. 1 : Histogramme groupé pour une annuité à termes constants.

Une autre manière de représenter ces données est de cumuler, pour chaque période, dans une même barre l'intérêt et l'amortissement du capital. Pour cela, sélectionnons le champ (C8 : D19) et créons un histogramme de sous-type « empilé » comme illustré à la figure 2 de la page 65.

Ces graphiques montrent clairement que le terme est composé d'une partie « intérêt » qui diminue au fur et à mesure que l'on avance dans le remboursement de l'emprunt et d'une partie « amortissement du capital » qui, elle, augmente avec le temps.

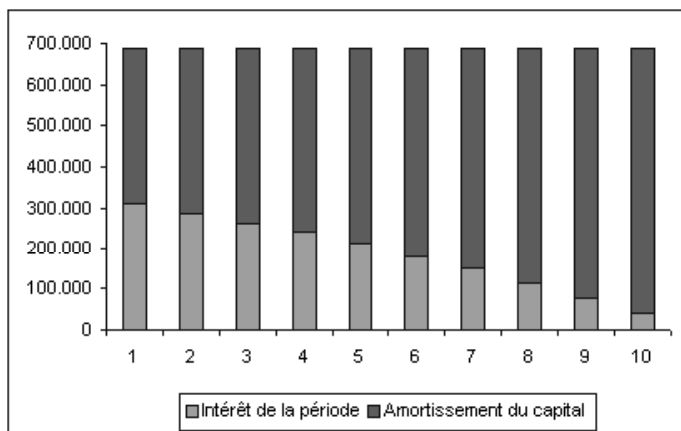


Fig. 2 : Histogramme empilé pour une annuité à termes constants.

2. Remboursement d'un emprunt par une annuité à amortissements constants

Considérons un emprunt E remboursé par une annuité de n termes dont la partie « amortissement du capital » reste constante, le taux annuel de l'intérêt composé étant i et le premier versement ayant lieu à la fin de la première année.

Dans ces conditions, l'amortissement du capital relatif à chaque période vaut évidemment $\frac{E}{n}$. Reprenons le même exemple que dans le paragraphe précédent :

$$E = 5.000.000$$

$$n = 10$$

$$i = 0,0625.$$

La fraction $\frac{E}{n} = 500.000$ donne la partie « amortissement du capital » de chacun des termes de l'annuité. Le tableau d'amortissement est facile à réaliser. En effet, l'intérêt relatif à chaque période s'obtient en calculant

Tableur Excel

6,25% de la dette restante au début de la période et le terme de l'annuité est la somme de cet intérêt et de l'amortissement du capital.

Avec le tableur, nous pouvons recopier la feuille relative au cas précédent et en changer le titre. En B6, écrivons « amortissement constant ». En C6, indiquons = C3/C4. En D10, indiquons = C\$6 et recopions vers le bas jusqu'en D19. En E10, indiquons = C10 + D10 et recopions vers le bas jusqu'en E19. Notre tableau d'amortissement est déjà réalisé. (Voir le tableau 2 page 66)

	A	B	C	D	E
1	Tableau d'amortissement d'un emprunt remboursé par une annuité à amortissements constants.				
2					
3		Somme empruntée (E) :	5.000.000		
4		Nb de périodes (n) :	10		
5		Taux annuel (i) :	6,25%		
6		Amortissement constant :	500.000,00		
7					
8	Période	Dette restante en	Intérêt de	Amortissement	Terme de
9		début de période	la période	du capital	l'annuité
10	1	5.000.000,00	312.500,00	500.000,00	812.500,00
11	2	4.500.000,00	281.250,00	500.000,00	781.250,00
12	3	4.000.000,00	250.000,00	500.000,00	750.000,00
13	4	3.500.000,00	218.750,00	500.000,00	718.750,00
14	5	3.000.000,00	187.500,00	500.000,00	687.500,00
15	6	2.500.000,00	156.250,00	500.000,00	656.250,00
16	7	2.000.000,00	125.000,00	500.000,00	625.000,00
17	8	1.500.000,00	93.750,00	500.000,00	593.750,00
18	9	1.000.000,00	62.500,00	500.000,00	562.500,00
19	10	500.000,00	31.250,00	500.000,00	531.250,00

Tab. 2 : Tableau d'amortissement pour une annuité à amortissements constants.

Remarque : Les valeurs des termes de l'annuité sont en progression arithmétique de raison égale au produit du taux d'intérêt et de l'opposé de l'amortissement.

Remarquons aussi que les deux graphiques se sont adaptés.

L'interprétation sera rendue plus facile par la permutation des deux séries dans le second graphique. Pour réaliser cela, sélectionnons une des deux séries en cliquant dans la partie inférieure ou supérieure d'une des barres de l'histogramme, cliquons avec le bouton droit de la souris pour appeler le menu contextuel, choisissons « Format de la série de données », ensuite cliquons sur l'onglet « Ordre des séries » et permutons l'ordre. Cette nouvelle

présentation permet de mieux mettre en évidence la valeur constante de l'amortissement. Nous obtenons ainsi les graphiques 3 et 4 ci-dessous.

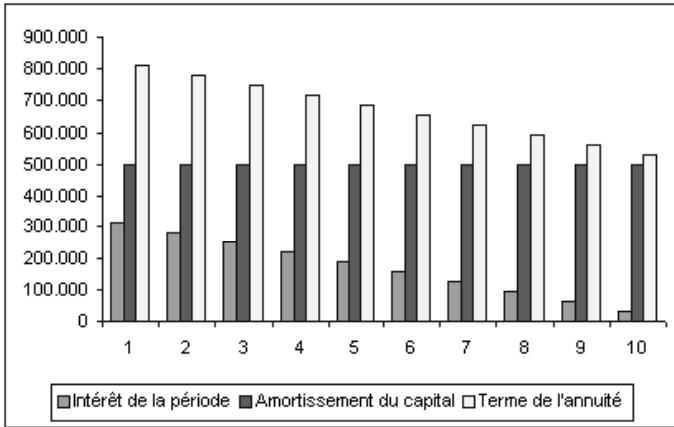


Fig. 3 : Histogramme groupé pour une annuité à amortissements constants.

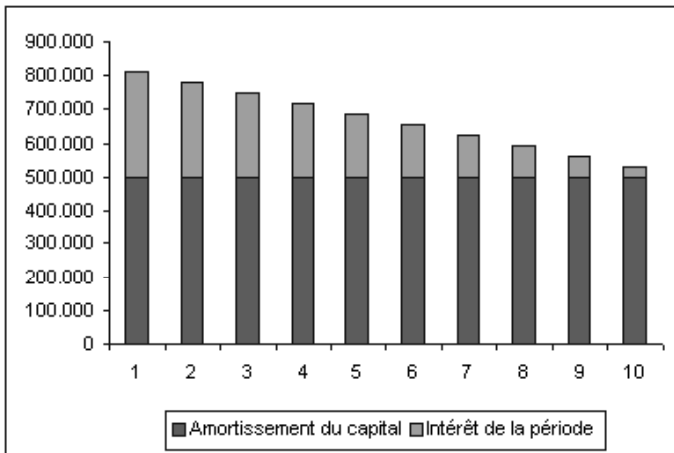


Fig. 4 : Histogramme empilé pour une annuité à amortissements constants

Il ressort de ces représentations que le terme de l'annuité est variable. Il se décompose en une partie « amortissement du capital » qui reste constante et une partie « intérêt » qui diminue au fur et à mesure que l'on avance dans le remboursement de l'emprunt.

3. Comparaison de ces deux modèles de remboursement.

Dans le cas du remboursement de l'emprunt par une annuité à termes constants, étant donné le caractère constant du versement périodique, la partie amortissement du capital est faible pendant les premières périodes et donc la dette restante décroît moins vite que lorsqu'on rembourse par une annuité à amortissements constants. Cela a pour conséquence que les intérêts payés sont plus importants dans le cas du remboursement à termes constants. Par contre, dans le modèle de remboursement à amortissements constants, les premiers termes à payer sont plus élevés que le terme constant de l'autre modèle : ce qui est souvent plus difficile à assumer d'autant que, lorsqu'on vient d'acheter ou de construire une maison, d'autres frais viennent généralement s'ajouter au remboursement de l'emprunt.

Brève de comptoir.

Pour déterminer la plus courte distance entre le point $(0,5)$ et la parabole d'équation $16y = x^2$, nous devons chercher le minimum de la fonction

$$f(y) = x^2 + (y - 5)^2 = 16y + (y - 5)^2 = y^2 + 6y - 25.$$

Puisque $f'(y) = 2y + 6$, la seule valeur qui annule la fonction dérivée est $y = -3$ qui conduit à des valeurs imaginaires de x . Ce qui signifie que la distance minimale entre ce point et cette parabole n'existe pas!

Dans nos classes

Yolande Noël-Roch

Des fractions autrement ⁽¹⁾

1. En première année

Les égalités données sont-elles correctes ou non? Lorsque l'égalité est incorrecte, changer un seul nombre ou une seule opération pour obtenir une égalité correcte.

$$1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$4 + \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Contrôler les premières égalités données, compléter la troisième, écrire une quatrième égalité construite « sur le même moule. »

A.

$$1 + \frac{2}{3} = 2 - \frac{1}{3}$$

$$2 + \frac{3}{4} = 3 - \frac{1}{4}$$

$$3 + \frac{4}{5} = \dots$$

$$\dots = \dots$$

B.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{1} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \dots$$

$$\dots = \dots$$

C.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{3}{2} - \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \dots$$

$$\dots = \dots$$

D.

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \dots$$

$$\dots = \dots$$

⁽¹⁾ Voir « Puissance et économie » dans un prochain numéro de Math-Jeunes Junior.

2. Au premier degré : algébrisation

Les égalités analysées ci-dessus permettent d'établir des conjectures :

A. $n + \frac{n+1}{n+2} = n + 1 - \frac{1}{n+2}$

B. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$

C. $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$

D. $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$

La vérification de l'égalité obtenue en A relève du début du calcul littéral. Celle des autres égalités motive des investissements supplémentaires.

3. Au deuxième degré

Les égalités élaborées en B et C peuvent ne pas être suffisamment éclairantes pour passer à la généralisation pour tout naturel $a > 1$. Dans ce cas, l'approche peut être prolongée :

E.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{4} &= \frac{4}{3} - \frac{1}{12} \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} &= \frac{4}{3} - \frac{1}{48} \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} &= \dots \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

F.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{5} &= \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \times 5} \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} &= \frac{5}{4} - \frac{1}{\dots} \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Enfin, la généralisation attendue peut venir sous la forme suivante

Quel que soit le naturel $a > 1$,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^n} = \frac{a}{a-1} - \frac{1}{(a-1) \times a^n} \quad (1)$$

Sans doute y aura-t-il des variantes dans l'écriture

– du premier terme : $\frac{1}{1} = 1 = \frac{1}{a^0}$,

– du deuxième terme : $\frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$.

Tout le monde sait que les notations particulières faisant intervenir 0 ou 1 mettent les élèves particulièrement mal à l'aise...

Après la **découverte** de l'égalité se pose le problème de sa **validité**. Celle-ci sera reconnue sous diverses formes équivalentes selon les notions déjà familières.

Après réduction au même dénominateur, nous obtenons

$$\frac{a^n + a^{n-1} + \dots + 1}{a^n} = \frac{a \cdot a^n - 1}{(a - 1)a^n} \quad (2)$$

ou encore l'égalité équivalente plus simple

$$a^n + a^{n-1} + \dots + 1 = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}. \quad (3)$$

Les élèves peuvent cette fois reconnaître un « quotient remarquable » sinon une dernière transformation les amènera à contrôler la validité du produit

$$(a - 1)(a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1) = a^{n+1} - 1. \quad (4)$$

4. Au troisième degré

Nous pouvons cette fois

- étendre les égalités B, C, E, F et leur généralisation au calcul des **sommes d'une infinité de termes**
- poser le problème de la validité de l'égalité établie dans un **référentiel plus étendu**.

4.1. Sommes d'une infinité de termes

Est-il possible de calculer

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^n} + \dots$$

Cela revient donc à calculer la somme de toutes les puissances naturelles des inverses d'un naturel $a > 1$.

En fin du secondaire, un passage à la limite à partir de l'égalité (2) peut donner le résultat :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} - 1}{(a - 1)a^n} = \frac{a}{a - 1}.$$

Sans le cheminement précédent, une simple mise en évidence et la perception de ce qu'est une somme d'une infinité de termes permet d'écrire

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n} + \cdots = 1 + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n} + \cdots \right)$$

Ou encore, en désignant par x la somme cherchée, nous obtenons l'équation

$$x = 1 + \frac{1}{a}x$$

dont la solution est $\frac{a}{a - 1}$.

4.2. Extension du domaine de validité

Les groupes d'égalités B, C, E, F ont amené la proposition

Quel que soit le naturel $a > 1$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{a^k} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^k} = \frac{a}{a - 1}$$

Que se passe-t-il pour des valeurs non entières de a ? (En particulier, le cas $a = 0,5$ est le point de départ de deux articles prévus dans *Math-Jeunes Junior* qui exploitent l'histoire bien connue des grains de riz (1, 2, 4, 8, ...) qui recouvrent un échiquier.) Plus généralement, les résultats sont-ils valables pour tout réel? Selon les notions familières aux élèves, on débouchera plus ou moins rapidement sur une conclusion du genre

Pour tout réel r différent de 1,

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Pour tout réel r strictement compris entre -1 et 1 ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r}$$

5. Une piste oubliée?

La piste ouverte par la quatrième égalité donnée en début d'article et par le groupe d'égalités donné en D peut mettre en valeur une approche plus subtile que celle du calcul systématique.

En effet, dès la première année, les élèves peuvent découvrir que la validité de

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

ne nécessite pas le calcul des deux membres! Ils seront contents de s'en tirer à meilleur compte et motivés pour utiliser des transformations d'égalité ... sans le savoir. L'égalité suivante peut renforcer la motivation : est-il vrai que

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}?$$

Des tâtonnements pour grouper judicieusement des termes de manière à « équilibrer » progressivement les deux membres des égalités du groupe D mettent en lumière les rôles différents des termes du second membre :

- des termes à dénominateur impair et communs aux deux membres,
- des termes dont le dénominateur est une puissance de 2,
- des termes dont le dénominateur est pair sans être une puissance de 2.

Les fractions du second membre à dénominateur impair se neutralisent immédiatement avec les fractions identiques du premier membre. Quant aux fractions du second membre à dénominateur pair, la longueur de la chaîne

des termes à regrouper dépend de la puissance de 2 qui intervient dans ce dénominateur. Schématisons le phénomène.

$$\begin{aligned}
 & \boxed{\frac{1}{1}} - \boxed{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - \boxed{\frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{5}} - \frac{1}{6} + \boxed{\frac{1}{7}} - \boxed{\frac{1}{8}} + \boxed{\frac{1}{9}} - \boxed{\frac{1}{10}} + \boxed{\frac{1}{11}} - \frac{1}{12} \\
 &= \boxed{\frac{1}{7}} + \boxed{\frac{1}{8}} + \boxed{\frac{1}{9}} + \boxed{\frac{1}{10}} + \boxed{\frac{1}{11}} + \boxed{\frac{1}{12}}
 \end{aligned}$$

Voilà une occasion de sensibiliser des élèves au besoin de « regarder malin » plutôt que de « calculer idiot »! (Remarquons les groupements liés à $\boxed{8 = 2^3}$, $\boxed{12 = 3 \times 2^2}$, $\boxed{10 = 5 \times 2}$).

Enfin, la série D peut amener, pour les élèves des dernières années, une démonstration par récurrence :

Il est vrai que $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. En supposant vraie la propriété pour n :

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n},$$

il reste à prouver que l'égalité obtenue en remplaçant n par $n+1$ est encore vraie. Il faut donc démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

On a en effet

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \\
 &= \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right] + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \\
 &= \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right] + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \\
 &= \frac{1}{n+1} + \left[\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \right] - \frac{1}{2(n+1)} \\
 &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}
 \end{aligned}$$

Des problèmes et des jeux

C. Festraets

Longueurs entières

Problème n° 274 de Mathématique et Pédagogie n° 140.

Trouver tous les entiers positifs a , b , c , m tels que a , b , c sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre est m fois plus grand que l'aire.

Solution de J. DILLES de Philadelphie, USA

Nous cherchons toutes les solutions entières de

$$a + b + c = m \frac{a \cdot b}{2}$$

où a , b et c sont les côtés d'un triangle rectangle — c étant l'hypoténuse.

Nous savons que les triplets pythagoriciens sont de la forme

$$(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2).$$

Nous devons donc résoudre

$$(p^2 - q^2) + (2pq) + (p^2 + q^2) = \frac{m}{2}(p^2 - q^2)2pq.$$

Ce qui après simplification donne

$$2 = m(p - q)q.$$

Il faut que l'un des trois facteurs du membre de droite soit égal à 2 et les autres à 1. Les solutions sont donc (3, 4, 5), (8, 6, 10) et (5, 12, 13) avec m respectivement égal à 2, 1 et 1.

Bonnes **solutions** de P. BORNSZTEIN de Pontoise, M. COYETTE de Rixensart, P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek, B. LOISEAU de Mouscron, A. PATERNOTTE de Boussu, J. RASSE de Méan et J.-G. SEGERS de Liège.

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou par courriel à festraetscl@brutele.be.

Deux fonctions

Problème n° 275 de Mathématique et Pédagogie n° 140.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$. Sachant que $|f(0)| \leq 1$, $|f(1)| \leq 1$ et $|f(-1)| \leq 1$, démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1 \implies |f(x)| \leq \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq 2.$$

Solution de P. BORNSZTEIN de Pontoise.

Si l'on décompose le polynôme f dans la base

$$\{x(x-1), x(x+1), (x-1)(x+1)\}$$

des polynômes de degré ne dépassant pas 2, il vient :

$$f(x) = \frac{1}{2}f(-1)x(x-1) + \frac{1}{2}f(1)x(x+1) - f(0)(x-1)(x+1) \quad (*)$$

D'où, pour $x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \frac{1}{2}|f(-1)|x(x-1) + \frac{1}{2}|f(1)|x(x+1) - |f(0)|(x-1)(x+1) \\ &\leq \frac{1}{2}x(1-x) + \frac{1}{2}x(x+1) + (x+1)(1-x) \\ &= -x^2 + x + 1 \\ &= \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &\leq \frac{5}{4} \end{aligned}$$

On peut noter que le polynôme $f(x) = -x^2 + x + 1$ vérifie les conditions de l'énoncé et que $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$, ce qui montre que la constante $\frac{5}{4}$ est optimale.

Pour $x \neq 0$, on a $g(x) = x^2 f(\frac{1}{x})$. Donc, d'après (*) :

$$g(x) = \frac{1}{2}f(-1)(1-x) + \frac{1}{2}f(1)(x+1) - f(0)(1-x)(x+1),$$

cette relation restant vraie pour $x = 0$ par continuité.

Par suite, pour $x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned}|g(x)| &\leq \frac{1}{2}|f(-1)|(1-x) + \frac{1}{2}|f(1)|(x+1) - |f(0)|(1-x)(x+1) \\ &\leq \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(x+1) + (x+1)(1-x) \\ &= 2 - x^2 \\ &\leq 2\end{aligned}$$

On peut noter que le polynôme $f(x) = 2x^2 - 1$ vérifie les conditions de l'énoncé et que $g(0) = 2$, ce qui montre que la constante 2 est optimale.

Une seule autre **solution** entièrement correcte, celle de M. COYETTE de Rixensart.

Suite et nombres premiers

Problème n° 276 de *Mathématique et Pédagogie* n° 140.

Une suite u_n d'entiers est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_n - 2u_{n-1} + (1-c)u_{n-2} = 0 \end{cases}$$

où c est un entier fixé, indépendant de n .

Soit P un entier fixé. Trouver la plus petite valeur de c pour laquelle les deux propositions suivantes sont vraies :

- (a) si p est un nombre premier inférieur ou égal à P , alors p divise u_p ;
- (b) si p est un nombre premier strictement supérieur à P , alors p ne divise pas u_p .

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek

L'équation caractéristique de la relation donnée est $x^2 - 2x + 1 - c = 0$ et a comme racines $1 + \sqrt{c}$, $1 - \sqrt{c}$.

La théorie du calcul des différences nous permet de poser

$$u_k = \alpha(1 + \sqrt{c})^k + \beta(1 - \sqrt{c})^k.$$

Les valeurs initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ fournissent le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha(1 + \sqrt{c}) + \beta(1 - \sqrt{c}) = 1 \end{cases}$$

on en déduit $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ et $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{c}}$.

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2\sqrt{c}} [(1 + \sqrt{c})^k - (1 - \sqrt{c})^k] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{c}} \left[\sum_{\lambda=0}^k C_k^\lambda \sqrt{c}^\lambda - \sum_{\lambda=0}^k (-1)^\lambda C_k^\lambda \sqrt{c}^\lambda \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{c}} 2 \sum_{\lambda \text{ impair}} C_k^\lambda \sqrt{c}^\lambda \\ &= \sum_{\lambda \text{ impair}} C_k^\lambda c^{\frac{\lambda-1}{2}} \end{aligned}$$

Si $k = 2$, alors $u_2 = 2$ et est toujours divisible par 2 quel que soit c .

Si k est un nombre premier impair, k divise tous les termes du second membre sauf éventuellement le dernier qui est $c^{\frac{k-1}{2}}$.

Pour que les deux conditions (a) et (b) soient satisfaites, il suffit que c soit le produit de tous les nombres premiers impairs inférieurs ou égaux à P . C'est la plus petite valeur possible.

P. BORNSZTEIN de Pontoise et J. RASSE de Méan ont aussi envoyé des **solutions** analogues.

Les solutions des problèmes suivants devront me parvenir pour le 1^{er} janvier 2004 au plus tard. Les solutions sous forme de fichiers $\text{\LaTeX}$ sont les bienvenues.

283. Quadrilatère inscriptible

Les côtés AB , BC et CA d'un triangle ABC sont coupés par une transversale aux points Q , R et S respectivement. P est le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et SRC . Prouver que le quadrilatère $APSQ$ est inscriptible.

284. Presqu'un entier

Démontrer que, parmi les nombres réels positifs $a, 2a, 3a, \dots, (n-1)a$, il y en a au moins un qui diffère d'un entier d'au plus $\frac{1}{n}$.

285. Multiples de 10

Soit $S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ et $S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$. Démontrer que pour tout naturel n , non multiple de 4, S_n est toujours multiple de S_1 .

Les 7 opérations arithmétiques.

Il est commun de prétendre que pour se débrouiller dans les problèmes de la vie courante, il suffit de connaître « les quatre opérations ». De nos jours encore, on rencontre une majorité d'adultes pour qui les souvenirs mathématiques de leur scolarité obligatoire sont exclusivement liés aux nombreuses heures passées à apprendre l'addition et la soustraction, la multiplication et la division.

Et pourtant ces quatre piliers de l'arithmétique ont trois complices prestigieux, trop souvent méconnus. Si l'on dispose de deux nombres entiers a et b , il est possible de les combiner à l'aide de trois opérations fondamentales différentes, qui sont : l'addition $a+b$, la multiplication $a \cdot b$, l'exponentiation a^b . Cette dernière opération s'appelle également « élévation à la puissance ».

Considérons l'addition. Il existe une opération inverse, appelée *soustraction*. Celle-ci permet, dans une expression telle que $a+b=c$, de calculer a connaissant b et c ou de calculer b connaissant a et c .

À la multiplication correspond également une opération inverse, appelée *division*. Cette dernière permet, dans une expression telle que $a \cdot b = c$ de calculer a connaissant b et c ou de calculer b connaissant a et c .

Qu'en est-il de l'exponentiation ? Dans une expression de type a^b on appelle a la *base* et b l'*exposant*. On ne peut intervertir a et b ; il suffit de comparer $3^5 = 243$ et $5^3 = 125$. Il s'ensuit qu'à l'exponentiation sont associées **deux** opérations inverses et non une seule. Dans le cas d'une expression telle que $a^b = c$, il s'agit dans un premier cas de rechercher la base a : ceci se fait par une première opération inverse, l'extraction de la racine qui s'écrit $a = {}^b\sqrt{c}$. Dans un second cas où il s'agit de rechercher l'exposant, on a à faire à une seconde opération inverse appelée *calcul du logarithme* qui s'écrit $b = \log_a c$ et on lit *logarithme de base a de c* .

Il existe donc bel et bien **7** opérations arithmétiques ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Gérard Charrière, *L'algèbre mode d'emploi*, 1995, Ed. Loisirs et Pédagogie S.A., Lausanne.

place réservée à la publicité

Olympiades

C. Festraets

Voici d'abord les solutions des trois derniers problèmes de l'Olympiade Mathématique Internationale de 2002. Ces solutions m'ont été envoyées par P. BORNSZTEIN de Pontoise. Ses solutions aux trois problèmes précédents me sont parvenues trop tard pour être utilisées dans le n° 141 de *Mathématique et Pédagogie*.

Vous trouverez ensuite les 15 problèmes du test américain (AIME).

Problème 4

Soit n un entier strictement plus grand que 1. On note $d_1, d_2, \dots, d_k$ les diviseurs positifs de n avec $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$.

On pose $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_{k-1} d_k$.

- Montrer que : $D < n^2$.
- Trouver tous les entiers n pour lesquels D est un diviseur de n^2 .

Solution

On a immédiatement $d_{k-1} \leq \frac{n}{2}, d_{k-2} \leq \frac{n}{3}, \dots$ et, de façon générale, pour tout $i \geq 0$: $d_{k-i} \leq \frac{n}{i+1}$.

$$\text{Par suite : } D \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n^2}{(i+1)(i+2)} = n^2 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) = n^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right),$$

d'où $D < n^2$.

- Si n est premier, on a $1 = d_1, n = d_2$, et $D = d_1 d_2 = n$ divise n^2 .
- Si n est composé :

Alors $k \geq 3$.

Soit p le plus petit diviseur premier de n . Alors $d_2 = p$.

Supposons que D divise n^2 .

Alors $D = \frac{n^2}{q}$ pour un certain entier $q > 1$ (puisque $D < n^2$).

En particulier, puisque q divise n^2 , cet entier q est au moins égal au plus petit diviseur premier de n . Et ainsi, $D \leq \frac{n^2}{p}$. (1)

D'autre part, du fait de l'ordonnancement des diviseurs, pour tout i , on a : $d_{k-i+1}d_i = n^2$, et donc $d_{k-i} = \frac{n}{d_i}$.

Mais alors : $D \geq d_1d_2 + d_{k-1}d_k = p + \frac{n^2}{p} > \frac{n^2}{p}$, ce qui contredit (1).

Et finalement, D divise n^2 si et seulement si n est premier.

Problème 5

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, vérifiant

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

pour tous x, y, z, t dans $\mathbb{R}$.

Solution

Soit f une fonction réelle vérifiant (sous réserve d'existence) :

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz), \quad (1)$$

pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

a) Pour $x = z$ et $y = t = 0$, il vient : $4f(x)f(0) = 2f(0)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $4f^2(0) = 2f(0)$. Et donc, $f(0) = 0$ ou $f(0) = \frac{1}{2}$.

Si $f(0) = \frac{1}{2}$, la relation précédente conduit à $f(x) = \frac{1}{2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, la fonction $f : (x \rightarrow \frac{1}{2})$ est bien solution du problème.

On suppose maintenant que $f(0) = 0$.

b) Pour $z = t = 0$, la relation (1) s'écrit alors :

$$f(x)f(y) = f(xy), \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x^2) = f^2(x)$.

Comme tout réel positif ou nul est un carré, cela assure que f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}^+$.

c) Le membre de droite de la relation (1) est invariant par la transformation $(x, y, z, t) \mapsto (z, x, y, -t)$.

Il doit donc en être de même du membre de gauche. Et donc, pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$:

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = (f(z) + f(x))(f(y) + f(-t))$$

ou encore

$$(f(x) + f(z))(f(t) - f(-t)) = 0. \quad (3)$$

Supposons que, pour tous $x, z \in \mathbb{R}$ on ait $f(x) + f(z) = 0$.

En particulier, pour $x = z$, il vient $f(x) = 0$. Réciproquement, la fonction nulle est bien solution du problème.

On suppose maintenant que f n'est pas la fonction nulle. D'après ce qui précède, il existe donc $x, z \in \mathbb{R}$, pour lesquels $f(x) + f(z) \neq f(0)$.

Mais alors, la relation (3) prouve que $f(t) = f(-t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc paire. Notons qu'alors, d'après b), on a $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

d) De (2), il vient

$$f(x) = f(x)f(1), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Et, comme f n'est pas la fonction nulle, c'est donc que $f(1) = 1$.

D'autre part, pour $y = z = t = 1$, la relation (1) conduit à :

$$2(f(x) + f(1)) = f(x - 1) + f(x + 1), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Et ainsi

$$f(x + 1) = 2f(x) + 2 - f(x - 1).$$

Or, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Il est alors facile de vérifier par récurrence que $f(x) = x^2$, pour tout $x \in \mathbb{N}$. Et donc, par parité, on a $f(x) = x^2$, pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

Soient p, q deux entiers, avec $q \neq 0$.

D'après (2), on a alors $p^2 = f(p) = f(q)f(\frac{p}{q}) = q^2 f(\frac{p}{q})$, d'où $f(\frac{p}{q}) = \frac{p^2}{q^2}$, ce qui assure que $f(x) = x^2$, pour tout $x \in \mathbb{Q}$. (4)

e) Soient $x, z \in \mathbb{R}$.

— Pour $x = y$ et $z = t$, la relation (1) conduit à :

$$(f(x) + f(z))^2 = f(x^2 - z^2) + f(2zx).$$

— Pour $x = y$ et $z = -t$, et en utilisant la parité de f , la relation (1) conduit à :

$$(f(x) + f(z))^2 = f(x^2 + z^2).$$

Ainsi, $f(x^2 + z^2) = f(x^2 - z^2) + f(2zx)$, pour tous $x, z \in \mathbb{R}$. (5)

Soient $a, h \in \mathbb{R}^+$.

En choisissant $x, z \in \mathbb{R}^+$ tels que $x^2 = a + \frac{h}{2}$ et $z^2 = \frac{h}{2}$, on a

$$a + h = x^2 + z^2 \quad \text{et} \quad a = x^2 - z^2.$$

Et, d'après (5) et c), il vient alors

$$f(a + h) - f(a) = f(2zx) \geq 0.$$

On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On sait qu'il existe deux suites (r_n) et (r'_n) de rationnels positifs ou nuls telles que, pour tout $n \geq 0$, on ait $r_n \leq x \leq r'_n$, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} r'_n.$$

Pour tout $n \geq 0$, puisque f est croissante et d'après (4), on a :

$$r_n^2 = f(r_n) \leq f(x) \leq f(r'_n) = (r'_n)^2.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $f(x) = x^2$.

Ainsi, $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Et par parité : $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, la fonction $f : (x \mapsto x^2)$ est bien solution du problème.

Finalement, les solutions du problème sont : $f : (x \mapsto x^2)$, $f : (x \mapsto 0)$ et $f : (x \mapsto \frac{1}{2})$.

Problème 6

Dans le plan, soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ des cercles de rayons 1 avec $n \geq 3$. On note respectivement par $O_1, O_2, \dots, O_n$ leurs centres. On suppose qu'aucune droite ne rencontre plus de deux de ces cercles. Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Solution

Pour tout i , on pose $S_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{O_i O_j}$.

Soit $k > 1$.

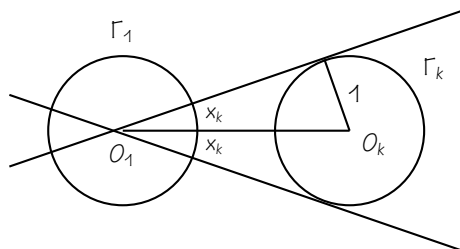


fig. 1

Les deux tangentes à Γ_k en O_1 font entre elles un angle égal à $2x_k$ (pour le secteur contenant O_k).

Or, on a facilement $x_k \geq \sin(x_k) = \frac{1}{O_1O_2}$.

Puisqu'une droite ne rencontre pas trois des disques, c'est donc que, pour tout $j \neq k$ et $j > 1$, le point O_j ne peut appartenir au (double) cône contenant O_k , de sommet O_1 et de génératrices les parallèles aux deux tangentes ci-dessus passant par O_1 (cf. fig. ci-dessus). On en déduit que Γ_k « bloque » un double secteur angulaire autour de O_1 , dont la mesure totale est égale à $4x_k$.

Lorsque k varie, ces secteurs angulaires sont deux à deux sans point intérieur commun, donc :

$$\sum_{k=2}^n 4x_k \leq 2\pi,$$

ce qui permet d'affirmer que :

$$S_1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{O_1O_2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dans le raisonnement ci-dessus, on a choisi de travailler avec O_1 pour éviter les lourdeurs de notations, mais on prouve de la même façon que, pour tout i , on a : $S_i \leq \frac{\pi}{2}$. (1)

Considérons maintenant l'enveloppe convexe C des points $O_1, O_2, \dots, O_n$. On sait alors que C est un m -gone convexe, où $m \leq n$, et donc que la somme de ses angles intérieurs est égale à $(m-2)\pi$.

Supposons que, par exemple, le point O_1 soit un des sommets de C .

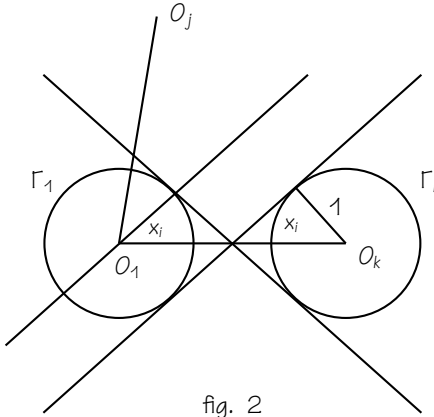
Soient $1 < i < j$, et considérons le triangle $O_1O_iO_j$.

Les cercles Γ_1 et Γ_i ont deux tangentes communes qui se rencontrent au milieu M_i de $[O_1O_i]$.

Soit x_i la mesure de l'angle entre l'une de ces tangentes et la droite (O_1O_i) (cf. fig. ci-dessous).

On a facilement :

$$x_i \geq \sin(x_i) = \frac{1}{O_iM_i} = \frac{2}{O_1O_i}.$$



Or, puisqu'une droite ne rencontre pas trois des disques, c'est donc que O_j ne peut appartenir au cône contenant O_i , de sommet O_1 et de génératrices les parallèles aux deux tangentes ci-dessus passant par O_1 (cf. fig. ci-dessus).

On en déduit que $\widehat{O_1O_1O_j} \geq x_i \geq \frac{2}{O_1O_i}$.

On prouve de même que $\widehat{O_iO_1O_j} \geq \frac{2}{O_1O_j}$.

Ainsi, pour chaque i , on peut donc choisir de minorer $\widehat{O_iO_1O_j}$ par $\frac{2}{O_1O_i}$ ou $\frac{2}{O_1O_j}$.

Pour simplifier les notations, on suppose que les demi-droites $[O_1O_i)$ sont dans l'ordre des indices autour de O_1 . Pour $i < n$, la somme des angles $\widehat{O_1O_iO_{i+1}}$ est alors égale à θ_1 , mesure de l'angle intérieur au sommet O_1 dans le polygone C .

Soit k celui (ou l'un) des autres centres qui est le plus éloigné de O_1 .

D'après ci-dessus, pour tout $i < k$, on utilise $\widehat{O_1O_iO_{i+1}} \geq \frac{2}{O_1O_i}$ et, pour $i \geq k$, on utilise $\widehat{O_1O_iO_{i+1}} \geq \frac{2}{O_1O_{i+1}}$. En sommant, il vient alors :

$$S'_1 = \sum_{i \notin \{1:k\}} \frac{1}{O_1O_i} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \widehat{O_1O_iO_{i+1}} = \frac{1}{2} \theta_1.$$

Mais, d'après le choix de k ,

$$S'_1 = \sum_{i \notin \{1:k\}} \frac{1}{O_1O_i} \geq (n-2) \frac{1}{O_1O_k},$$

d'où $\frac{1}{O_1O_k} \leq \frac{1}{n-2} S'_1$, et donc

$$S_1 = S'_1 + \frac{1}{O_1O_k} \leq \frac{n-1}{n-2} S'_1 \leq \frac{n-1}{2(n-2)} \theta_1.$$

Là encore, le raisonnement ci-dessus reste valable pour chacun des sommets de C . Pour tout i pour lequel O_i appartient à l'ensemble E des sommets de C , on a donc $S_i \leq \frac{n-1}{2(n-2)} \theta_i$.

En sommant les relations obtenues, il vient :

$$\sum_{i \in E} S_i \leq \frac{n-1}{2(n-2)} \sum_{i \in E} \theta_i = \frac{n-1}{2(n-2)} (m-2)\pi \quad (2).$$

D'autre part, d'après (1), on a

$$\sum_{i \notin E} S_i \leq (n-m) \frac{\pi}{2} \quad (3).$$

Puisque, pour tous $i \neq j$, le terme $\frac{1}{O_iO_j}$ apparaît dans S_i et dans S_j , on a donc :

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} &= \frac{1}{2} \sum_i S_i = \frac{1}{2} \left(\sum_{i \in E} S_i + \sum_{i \notin E} S_i \right) \\
 &\leq \frac{\pi}{4} (n - m + \frac{n-1}{n-2} (m-2)), \text{ d'après (2) et (3)} \\
 &= \frac{\pi n^2 - 4n + m + 2}{4(n-2)}, \text{ car } m \leq n \\
 &= \frac{\pi(n-1)}{4}.
 \end{aligned}$$

La SBPMef a organisé le 27 mars à Namur l'American Invitational Mathematics Examination. 55 élèves ayant obtenu plus de 100 à la demi-finale de l'OMB étaient invités à y participer et 45 d'entre eux se sont frottés aux 15 problèmes ci-dessous. Le meilleur résultat (9/15) a été obtenu par ANTHONY TRINH de l'Athénée Robert Catteau à Bruxelles.

21th Annual American Invitational Mathematics Examination 2003

1. Etant donné que $\frac{((3!)!)!}{3!} = k \cdot n!$, où k et n sont des entiers positifs et n est aussi grand que possible, trouver $k + n$.
2. Dans un plan, on dessine cent cercles concentriques de rayons respectifs $1, 2, 3, \dots, 100$. On colorie en rouge l'intérieur du cercle de rayon 1 et on colorie ou bien en rouge ou bien en vert chaque zone ayant pour frontières des cercles consécutifs, sans que jamais deux zones adjacentes ne soient de la même couleur. Le rapport de l'aire totale des zones vertes à l'aire du cercle de rayon 100 peut s'écrire $\frac{m}{n}$ où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m + n$.
3. Soit l'ensemble $S = \{8, 5, 1, 13, 34, 3, 21, 2\}$. Susan dresse une liste comme suit : pour chaque sous-ensemble de S à deux éléments, elle écrit sur sa liste le plus grand des deux éléments de l'ensemble. Trouver la somme des nombres de la liste.
4. Etant donné que $\log_{10} \sin x + \log_{10} \cos x = -1$ et que $\log_{10}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2}(\log_{10} n - 1)$, trouver n .

5. Considérons l'ensemble des points situés à l'intérieur ou à au plus une unité d'un parallélépipède rectangle (boîte) mesurant 3 sur 4 sur 5 unités. Etant donné que le volume de cet ensemble est $\frac{m+n\pi}{p}$, où m, n et p sont des entiers positifs et n et p sont premiers entre eux, trouver $m+n+p$.
6. La somme des aires de tous les triangles dont les sommets sont aussi des sommets d'un cube 1 sur 1 sur 1 est $m + \sqrt{n} + \sqrt{p}$ où m, n et p sont des entiers. Trouver $m+n+p$.
7. Le point B est sur $\overline{AC}$ avec $AB = 9$ et $BC = 21$. Le point D n'est pas sur $\overline{AC}$ mais tel que $AD = CD$ et que AD et BD sont des entiers. Soit s la somme de tous les périmètres possibles du triangle ACD , trouver s .
8. Dans une suite croissante de quatre entiers positifs, les trois premiers termes forment une progression arithmétique, les trois derniers termes forment une progression géométrique, et la différence entre le premier terme et le quatrième terme est 30. Déterminer la somme des quatre termes.
9. Un entier compris entre 1000 et 9999 inclusivement est dit *équilibré* si la somme de ses deux chiffres de gauche égale la somme de ses deux chiffres de droite. Combien d'entiers équilibrés existe-t-il?
10. Le triangle ABC est isocèle avec $AC = BC$ et $\widehat{ACB} = 106^\circ$. Le point M est à l'intérieur du triangle de sorte que $\widehat{MAC} = 7^\circ$ et $\widehat{MCA} = 23^\circ$. Déterminer, en degrés, la grandeur de $\widehat{CMB}$.
11. On choisit au hasard un angle x dans l'intervalle $0^\circ < x < 90^\circ$. Soit p la probabilité que les nombres $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ et $\sin x \cos x$ ne soient **pas** les longueurs des côtés d'un triangle. Etant donné que $p = \frac{d}{n}$, où $d = \arctan m$ exprimé en degrés et m et n sont des entiers positifs avec $m+n < 1000$, déterminer $m+n$.
12. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$, les angles en A et en C sont égaux, $AB = CD = 180$, et $AD \neq BC$. Le périmètre de $ABCD$ est 640. Déterminer $\lfloor 1000 \cos A \rfloor$ (la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x).
13. Soit N le nombre d'entiers positifs inférieurs ou égaux à 2003 et dont la représentation en base 2 contient plus de 1 que de 0. Trouver le reste de la division de N par 1000.

14. La représentation décimale de $\frac{m}{n}$, où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux et $m < n$, contient les chiffres 2, 5 et 1, consécutivement et dans cet ordre. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle cela est possible.
15. Dans le triangle ABC , $AB = 360$, $BC = 507$ et $CA = 780$. Soit M le point milieu de $\overline{CA}$ et soit D le point situé sur $\overline{CA}$ tel que $\overline{BD}$ bissecte l'angle ABC . Soit F le point situé sur $\overline{BC}$ tel que $\overline{DF} \perp \overline{BD}$. Supposons que $\overline{DF}$ rencontre $\overline{BM}$ en E . Le rapport $\frac{DE}{EF}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{m}{n}$, où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m + n$.
-

Arithmétique appliquée et impertinente

Peut-être ne connaissez-vous pas ce petit livre ... impertinent écrit par JEAN-LOUIS FOURNIER dans la série des Documents Payot, (Editions Payot & Rivages, Paris). Outre l'arithmétique, sont également passés à la moulinette de l'impertinence une grammaire française et les sciences naturelles. L'exemple du problème ci-dessous vous montrera comment cet auteur dépoussière notre pédagogie.

Le vétérinaire qui a pratiqué l'autopsie de la biche a écarté l'hypothèse du suicide. Il s'agissait d'un crime et quatre-vingt chasseurs sont actuellement entendus. Un quart des chasseurs a un alibi irréfutable, le tiers du reste est relâché après un interrogatoire.

On demande quelle fraction du reste des chasseurs il faut relâcher après un deuxième interrogatoire pour ne conserver que deux suspects.

Bibliographie

G. Noël

Christian Houzel, *La Géométrie Algébrique, Recherches historiques*, Albert Blanchard, 365 pages, Paris, 2002, ISBN: 2-85367-222-0, Broché : 52€, Relié : 68€.

Ce gros ouvrage de 365 pages est pour l'essentiel un recueil de monographies consacrées — comme le titre l'indique — à l'histoire de la géométrie algébrique et publiées par l'auteur tout au long de sa carrière. Il faut comprendre ici « géométrie algébrique » dans un sens assez large, car les premiers travaux cités sont bien antérieurs au développement autonome de la théorie qui porte actuellement ce nom. Les premiers chapitres remontent ainsi à la création de l'algèbre par les mathématiciens arabes, notamment AL-KHWĀRIZMĪ (9^e siècle), AL-KHAYYĀM (11^e siècle) et Sharaf AL-DĪN AL-TŪST (12^e siècle). Ceux-ci utilisent l'algèbre pour résoudre des problèmes géométriques, mais utilisent aussi la géométrie pour résoudre des équations algébriques.

Les énormes progrès effectués par les mathématiciens européens à partir du 16^e siècle sont ensuite rencontrés de façon approfondie. Défilent successivement des chapitres consacrés à D'ALEMBERT et au théorème fondamental de l'algèbre, à la résolution algébrique de équations et à la théorie de ces équations (principaux acteurs : EULER, BÉZOUT, LAGRANGE, VANDERMONDE, MALFATTI, CONDORCET, RUFFINI, GALOIS, ABEL).

Un gros chapitre (109 pages) est consacré aux fonctions elliptiques et intégrales abéliennes. Impossible de citer tous les noms. Cela va de NEWTON à POINCARÉ en passant par JACOBI, RIEMANN, WEIERSTRASS etc. Viennent ensuite les fonctions de plusieurs variables complexes et — finalement — la géométrie algébrique au sens strict initiée par les travaux de PICARD (fin du 19^e siècle). En passant par ceux des géomètres italiens (ENRIQUES, CASTELNUOVO), elle débouche au milieu du 20^e siècle sur ceux de WEIL, ARTIN, LERAY (qui développe la théorie des faisceaux) puis GROTHENDIECK et DELIGNE.

Il ne nous est évidemment pas possible d'entrer dans plus de détails dans le cadre de ce compte-rendu. Mais la seule énumération qui précède montre la richesse du contenu de cet ouvrage et le souci de l'auteur de situer chaque théorie dans la continuité. C'est une vision longitudinale du développement de la mathématique qu'il nous propose. Ceci se marque notamment par les rapprochements qu'il effectue entre les démarches d'auteurs parfois très anciens avec celles de mathématiciens beaucoup plus récents.

Il faut aussi signaler une bibliographie très complète qui en elle-même peut déjà rendre de grands services. Pour terminer exprimons néanmoins deux regrets : d'abord l'absence d'un chapitre qui relaterait l'histoire des nombreuses courbes transcendantes qui ont fleuri dès l'antiquité et ont connu ensuite des développements importants à partir du 17^e siècle. Sur un plan plus technique, il est vraiment dommage pour le lecteur que cet ouvrage ne soit pas muni d'un index des matières, en plus de l'index des auteurs cités. Toutefois, aucune de ces deux lacunes n'amoindrit l'intérêt du contenu.

G. Noël

Maurice Lethielleux, *Statistique descriptive*, Dunod, collection « Express », 154 pages, Paris, 2003, ISBN: 2-10-005446-5.

Conçue pour faciliter aussi bien l'apprentissage que la révision, cette collection de 29 titres propose une présentation simple et concise de matières telles que la comptabilité, la gestion financière, les mathématiques, statistiques et informatique, l'économie, le droit et l'action commerciale. Maurice Lethielleux (Maître de conférences à l'université Paris II-Panthéon-Assas) nous propose ici 27 fiches pédagogiques sur la statistique descriptive :

- 4 fiches de généralités;
- 5 fiches sur les caractéristiques de tendance centrale ou de position
 - moyenne arithmétique,
 - mode, médiane, quartiles, déciles, centiles,
 - moyenne géométrique,
 - moyenne harmonique et moyenne quadratique,
 - moments.
- 3 fiches sur les caractéristiques de dispersion
 - la variance et l'écart-type,
 - l'étendue, l'écart absolu moyen, les intervalles interquartiles
 - la courbe de concentration, l'indice de GINI, la médiale.
- 4 fiches sur les indices
 - les indices de prix,
 - les indices de quantités ou de volume,
 - les indices en valeur,
 - les indices boursiers.
- 6 fiches sur les séries statistiques à deux caractères
 - les distributions marginales
 - les moyennes et variances marginales
 - les distributions conditionnelles, leurs moyennes et leurs variances
 - l'indépendance des variables, la covariance,

- L'ajustement linéaire, les moindres carrés,
- la corrélation.
- 3 fiches sur les séries chronologiques.
- 2 fiches sur les enquêtes et les simulations.

Chaque fiche est articulée en quatre rubriques :

- **Objectifs**, les principales utilisations de chaque concept;
- **L'essentiel à savoir**, notions théoriques fondamentales;
- **Compléments**, pour aborder des cas particuliers;
- **Application**, un exercice et son corrigé.

De nombreuses applications utilisent le tableur EXCEL[®] et ses représentations graphiques.

Mon attention a été particulièrement attirée par le chapitre présentant la *courbe de concentration*. Celle-ci s'applique à des unités statistiques distribuées selon la taille afin de mesurer les inégalités dans la répartition, par exemple pour mesurer la distribution des revenus et des fortunes, ou encore la distribution des exploitations agricoles selon la surface. En voici un exemple simple :

Salaires en € par mois	Pourcentage de salariés p	Pourcentage de la masse totale des salaires perçus q
< 1200	10% = 0,10	5% = 0,050
< 1600	30% = 0,30	17,5% = 0,175
< 1900	55% = 0,55	35% = 0,350
< 2600	78% = 0,78	58% = 0,580
< 3100	90% = 0,90	76,5% = 0,765
< 4600	95% = 0,95	87% = 0,870

Les données du tableau se lisent ainsi : les 10 % des salariés qui perçoivent un salaire inférieur à 1 200 € se partagent 5 % de la masse salariale. Ceux qui perçoivent moins de 1 600 € représentent 30 % de l'effectif et ils se partagent 17,5 % de la masse salariale totale, etc.

La *courbe de concentration* est une courbe paramétrée telle que : $M(p(x), q(x))$ où

- $p(x)$ est la fréquence relative de salariés dont le salaire est $< x$,
- $q(x)$ est la masse salariale relative des salariés qui ont un salaire $< x$.

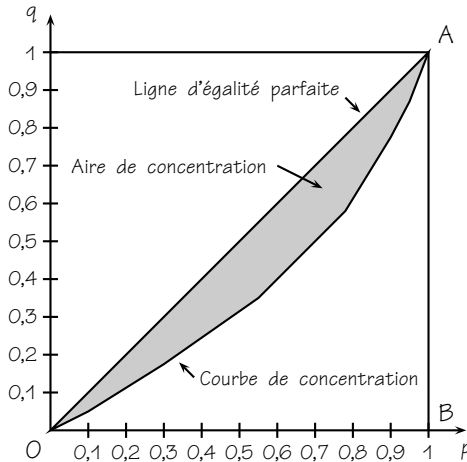
Bibliographie

Le caractère statistique étant continu; la courbe est continue. D'après le tableau on peut en déterminer quelques points qui permettent d'ajuster au mieux la courbe. ⁽¹⁾

Si tous les individus percevaient le même salaire, on obtiendrait la première bissectrice (ligne d'égalité parfaite).

La surface entre la courbe et la première bissectrice est l'aire de concentration. L'indice de GINI est le rapport de l'aire de concentration à l'aire du triangle OAB. C'est donc le double de l'aire de concentration. Cet indice compris entre 0 et 1 est utile pour faire des comparaisons dans le temps sur l'inégalité dans la répartition des salaires. Lorsqu'il augmente, la concentration augmente et la répartition devient plus inégalitaire.

Chercher cet indice est donc une excellente situation-problème pour introduire le calcul d'intégrale numérique par la méthode des trapèzes! Il suffit de rechercher l'aire S « sous » la courbe de concentration : cette aire se décompose en une somme finie d'aire de trapèze. L'indice de GINI vaut $2 \times (\frac{1}{2} - S)$.



J. Miewis

⁽¹⁾ dans le livre, l'auteur présente à cet endroit une courbe continue, puis lorsqu'il aborde la recherche de l'indice de GINI, il revient sur une représentation de type polygone des effectifs. C'est celle-ci que nous avons représenté ici.

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Septembre 2003)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :

- Cotisation ordinaire : 20 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 28,50 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 40 € (non PRIOR), 53 € (PRIOR)

Autres pays : 47 € (non PRIOR), 70 € (PRIOR)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 26 €.

Europe : 37 € (non PRIOR), 43 € (PRIOR).

Autres pays : 39 € (non PRIOR), 52 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2001 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.

Années 2002 ou 2003 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

- Abonnements groupés à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 3,80 €.

Europe : 6 € (non PRIOR), 7,80 € (PRIOR).

Autres pays : 6,60 € (non PRIOR), 10 € (PRIOR).

- Abonnements groupés aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 6,60 €.

Europe : 11 € (non PRIOR), 14 € (PRIOR).

Autres pays : 12 € (non PRIOR), 18 € (PRIOR).

Abonnements individuels.

- Abonnements à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 5 €. Europe ⁽¹⁾ : 11,50 € (non PRIOR), 15,80 € (PRIOR).
Autres pays : 12,75 € (non PRIOR), 20,40 € (PRIOR).

- Abonnements aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 10 €. Europe : 16,50 € (non PRIOR), 20,50 € (PRIOR).
Autres pays : 20 € (non PRIOR), 25 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2001-2002 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.

Année 2002 ou 2003 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe ⁽¹⁾ : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 43 €. Ils recevront le Bulletin de l'APMEP, le BGV (Bulletin à Grande Vitesse) et PLOT.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP; ils bénéficient du prix « adhérents »..

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 5 de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international au compte CCP « giro » 000-0728014-29 de SBPMef. Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement « giro »), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.

Le coin du trésorier

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n° 7 à n° 11 et n° 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 6 (Statistiques)	7,40 €	6 €	voir ci-dessous
►►► NOUVEAUX DOSSIERS ◀◀◀			
Dossier 7 (Vers les infinement petits)			
Simone Trompler et Guy Noël	6 €		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire)			
Claude Villers et alli	9 €		T3
Jacques Bair , Mathématique et Sport	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12 €	9,50 €	T2
G. Robert , CD-Rom, logiciels mathématiques	5 €	/	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 4	5 €		voir ci-dessous
Tome 5	6 €		voir ci-dessous
Tome 4 et 5	10 €		voir ci-dessous

Frais d'expédition en non PRIOR

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,60 €	2,70 €	3,00 €
Tarif 2	2,30 €	4,70 €	5,80 €
Tarif 3	3,50 €	4,70 €	5,80 €
Tarif 4	4,00 €	11,50 €	16,50 €
Tarif 5	5,60 €	15,50 €	26,50 €
Tarif 6	6,20 €	15,50 €	26,50 €
Tarif 7	6,95 €	15,50 €	26,50 €

Pour les expéditions en **PRIOR**, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.

Exemples de tarification pour commandes groupées

Tomes 4 ou 5 des questions OMB

1 ex.	T1	7 à 10 ex.	T5
2 ou 3 ex.	T3	11 à 14 ex.	T6
4 à 6 ex.	T4	15 à 17 ex.	T7

Dossier 6 (Statistiques)

1 ex.	T1	10 à 13 ex.	T5
2 à 4 ex.	T2	14 à 18 ex.	T6
5 à 9 ex.	T4	19 ou 20 ex.	T7

Les publications de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

— Les brochures signalées par * sont de publication récente.

— Le prix « adhérent » concerne l'A.P.M.E.P. et la S.B.P.M.ef.



N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix, en €, sans port	
		public	adhérent
	<u>Collège</u>		
*503	La jubilation en mathématiques		
	Fichiers Evariste : 480 problèmes tirés de différents tournois et rallyes mathématiques	4.90	3,80
98/132	2 tomes :	21,35	15,25
502	EXCEL-Classe, CD-Rom (Version individuelle)	16.75	16.75
55	Géométrie expérimentale avec CABRI	13.40	12.65
119	Jeux 5 (Des activités mathématiques au collège)		
	Série EVAPM : Evaluation 6 ^e (première chez nous!)	11	7,60
112/118	2 fascicules : Analyses et résultats & Dossier professeur	17.50	12.15
352	Tableur et mathématiques au Collège	12,20	9,90
451	Concours Australien de mathématiques	15,85	11
250/	Panoramas de compétitions mathématiques		
*251	Panoramath 96 & Panoramath 2	25,90	12,50
	<u>Lycée</u>		
*138	Statistiques en classe de seconde	8.70	6
*120	Classeur informatisé de documents math. - 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	45,95	30,50
	Version 26 installations, port compris	91,45	61
	CD-Rom de mise à jour	10,65	7,60
90/	Série EVAPM : Evaluation 1 ^{re} (cinquième chez nous!)		
107/108	3 fascicules	21.35	14.50
*305	GALION-Thèmes Seconde : 10 thèmes programme 2000	11,45	9,90
*450	MathÉvasion : 46 activités en bandes dessinées	7,60	5,35
	Avec CABRI, faire de la géométrie en jouant		
124/125	2 tomes déjà paru	17,55	10,65
*129	Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaires	9.90	6.85
121	Maths en scène : Commentaires des 22 thèmes de l'expo « Mathématiques 2000 » utilisable indépendamment	11,00	7,60
402	Jeux du Scientific American	20.60	14.50

PORT (prix indicatif) : 1 brochure : 2,50 € ; 2 ou 3 brochures : 4,00 € et au-dessus de 3 : 6,50 €

Serveur de l'APMEP : <http://www.apmep.asso.fr>