Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique) Tél.-Fax : 32-(0)65-373729, courriel : sbpm@umh.ac.be, Web : http://www.sbpm.be

Membres d'honneur : H. Levarlet, W. Servais (†)

Conseil d'administration: J.-P. Cazzaro, M. Denis-Pecheur, B. Desaedeleer, P. Dupont, Cl. Festraets-Hamoir, M. Frémal, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, P. Marlier, Ch. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler, Ch. Van Hooste

Président : Ch. Van Hooste, Chemin de Marbisœul 25, 6120 Marbaix-la-Tour, Tél. 071-217793	Vice-Président, Olympiades Internationales: G. Troessaert, Recogne sur le Chêne 58, 6800 Libramont, Tél. 061-224201
Administrateur délégué: Ch. Michaux, Rue Brigade Piron 290, 6061 Montignies-sur-Sambre, Tél. 065-354706	Commission Congrès, Publicité: M. Denis-Pecheur, Rue de la Ferme 11, 5377 Noiseux (Somme-Leuze), 1él. 086-323755
Trésorier : P. Marlier, Rue de Plainevaux 185/15, 4100 Seraing, Tél. 04-3374945	Secrétaire : M. Frémal, Rue W. Jamar 311/51, 4430 Ans, Tél. 04-2636817
Olympiades nationales et site WEB: Cl. Festraets-Hamoir, Rue J.B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles Tél. 02-6739044	Contact Presse: N. Miewis-Seronveaux, Avenue de Péville 150, 4030 - Grivegnée Tél. 04-3431992
Math-Jeunes Junior: A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu, Tél. 065-785064	SBPM-Infor: R. Gossez, Albert I Laan 13, 1560 Hoeilaart, Tél. 02-6579892
Math-Jeunes Senior: G. Noël, Rue du 1 ^{er} Chasseur à cheval 16/14, 7000 - Mons, Tél. 065-848621	, ,

Mathématique et Pédagogie :

J. Miewis, Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée, Tél. 04-3431992

Comité de rédaction : J. Miewis, J. Bair, Ch. Bertrand, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, Cl. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, Ch. Michaux, J. Navez, G. Noël, N. Vandenabeele, Ch. Van Hooste, Cl. Villers

Photo de couverture : Spirales (Klimt)



Mathématique et

Pédagogie

Sommaire

● Ch. Van Hooste, Éditorial	3
Articles	
● JL. Ayme, À propos du théorème de Boutin	7
● J. Ooms, Et pourquoi pas l'infiniment petit	15
• J. G. Segers, Les médianes du triangle	21
• R. Hinnion, Les Ensembles : aspects utilitaires, théoriques, philosophiques	25
● JP. Houben, Cabri-géomètre et les ellipses	33
• A. Guillemot, Intégration d'une calculatrice for- melle en classe terminale scientifique.	39
 M. Roelens, La révolution des corps et l'histoire de l'hyperboloïde 	53
Rubriques	
• J. Miewis, Dans nos classes	65
• C. Festraets, Problèmes	67
• C. Festraets, Olympiades	71
• J. Miewis, Bibliographie	77
• P. Marlier, Le coin du trésorier	83

NOTE

- * Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
- * Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique stricto sensu, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
- * Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- * Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant ($\Sigma \times 2_{\mathcal{E}}$, Word); les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.

L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).

* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous. Pour les livres :

Pour les livres :

Dieudonné J., Foundations of Modern Analysis, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.

Pour les articles :

- Gribaumont A., Les structures de programmation, Mathématique et Pédagogie, 1982, 36, 53-56.
- * Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- * MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

@ SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée.

Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Éditorial CH. VAN HOOSTE

Dans le courant du mois de janvier, le Ministre de l'Enseignement secondaire, Pierre Hazette, va procéder à une consultation de tous les professeurs en fonction dans l'enseignement secondaire. La forme exacte du questionnaire à remplir n'est pas encore déterminée (au moment où j'écris ces lignes) mais il y aura sûrement possibilité d'émettre des suggestions. L'occasion est belle de remettre sur le tapis tout ce qui nous préoccupe, tout ce qui pose problème, tout ce qui nous empoisonne la vie, en tant qu'enseignant d'une part, en tant que mathématicien d'autre part.

Ne voulant pas jouer au syndicaliste, je laisse ici de coté les problèmes liés à notre statut d'enseignant. De toute façon, des discussions en salle des professeurs ressortiront toutes les questions qu'il sera bon de renvoyer au ministre. Il ne faut évidemment pas s'en abstenir car le désordre actuel de l'enseignement secondaire (et primaire) influence considérablement notre rôle de professeur de mathématique et crée en partie les difficultés que nous rencontrons dans nos classes.

Concentrons-nous sur les problèmes spécifiquement liés à notre métier et à notre discipline en particulier.

1. Le premier degré

La massification de l'enseignement secondaire attire en première année de l'enseignement secondaire général des élèves qui ont accumulé un grand retard scolaire (lecture déficiente, compréhension lacunaire). Ceci provoque des situations inextricables qui lèsent un peu tout le monde. L'hétérogénéité totale dans les classes c'est beau sur le papier mais très souvent intenable sur le terrain. Régulièrement, le professeur est face au dilemme suivant : soit s'occuper des meilleurs, ceux qui ont les aptitudes voulues pour progresser dans le contexte d'un enseignement scolaire, soit se concentrer sur les moins bien lotis en tentant coûte que coûte de les rendre plus forts. Dans un cas comme dans l'autre, des élèves seront sacrifiés et le professeur n'aura pas la satisfaction

Editorial

du devoir accompli.

Ne vaudrait-il pas mieux procéder à une orientation bien organisée dès la sortie de l'école primaire? Pour cela, il faudrait commencer par revaloriser les enseignements technique et professionnel afin que ceux-ci ne soient plus considérés comme des sanctions négatives résultant d'échecs scolaires répétés mais soient vus comme des choix judicieux basés sur une orientation correcte des élèves. Cette orientation devrait prendre en compte les aptitudes de l'élève face à des matières théoriques, face à des questions techniques et face à des problèmes pratiques.

2. Le second degré

Depuis quelques années, nous revendiquons d'y recréer deux niveaux de mathématique. A la sortie du premier degré, il apparaît clairement que des élèves ont déjà de réelles difficultés à comprendre des mathématiques élémentaires tandis que d'autres s'y sentent à l'aise. Il s'avère donc normal qu'ils puissent choisir de continuer leur parcours scolaire soit en allégeant leur inconfort mathématique, soit en augmentant leur appétit pour cette branche.

Vouloir à tout prix imposer à tous un cours identique à cinq heures hebdomadaires est un non-sens : d'un côté, il amène le décrochage scolaire car il dévalorise les élèves moins motivés, de l'autre côté, il freine considérablement ceux qui ont envie de progresser. De plus, à l'issue du second degré, un élève ayant réussi a souvent bien du mal à situer son niveau réel vis-à-vis des mathématiques et risque de faire un mauvais choix en cinquième année.

Bien entendu, il faut associer à ces deux niveaux de mathématique des programmes nettement différents. Le niveau à quatre heures devra amener petit à petit vers des mathématiques citoyennes, pragmatiques, utilitaires. Le niveau à six heures conduira l'élève vers une plus grande rigueur dans son apprentissage des mathématiques, lui proposera une théorie plus profonde, le mettra face à de vrais problèmes à résoudre. De surcroît, il faudra qu'un élève ait la possibilité de changer de niveau, au moins au début de la troisième année et, au plus tard, lors de son entrée en quatrième année.

3. Le troisième degré

Les niveaux de mathématique actuels (2, 4 et 6 heures) ne sont pas mal en soi, mais ce n'est pas la panacée. Il faudrait institutionnaliser le niveau à 8 heures hebdomadaires ou tout au moins rendre les 2 heures supplémentaires (accordées dans le cadre d'une Préparation aux Études Supérieures) plus contraignantes pour l'élève. Pour l'instant, un élève peut très bien négliger complètement les matières vues pendant ces deux heures; en effet, les notes attribuées pour ce cours n'ont aucune incidence sur la décision que prend le conseil de classe en fin d'année scolaire. Mais, ajoutées au cours à 6 heures, pour en faire un véritable cours à 8 heures, elles permettraient une efficacité plus arande.

4. L'évaluation externe

De plus en plus, une évaluation externe des élèves s'impose dans l'enseignement secondaire. Trop de différences à ce sujet existent entre écoles voisines (d'un même réseau ou non), entre professeurs d'une même discipline au sein d'une même école. Pourquoi devrait-on sur un même programme avoir des exigences aussi inégales que celles qui transpirent à travers les questions d'examens des uns et des autres?

Par ailleurs, est-il bon d'être à la fois celui qui enseigne et celui qui sanctionne? En laissant à des personnes extérieures le soin de contrôler si les compétences explicitées dans les programmes sont atteintes par nos élèves, ne serait-ce pas un véritable moyen de mesurer plus objectivement l'efficacité de notre enseignement? De plus, ne serait-ce aussi une meilleure façon pour un ministre d'évaluer la qualité de l'enseignement dispensé globalement dans les écoles? De manière évidente, cette évaluation externe ne peut pas s'opérer sans garde-fous. En mathématique, il semble naturel que la SBPMef soit consultée dans le processus d'élaboration des questions : il ne conviendrait pas que cette évaluation puisse servir à un nouveau nivellement pas le bas, qu'elle amène à du bachotage en reproduisant d'année en année des questions stéréotypées, qu'elle laisse de coté certains aspects du cours de mathématique en ne privilégiant, par exemple, que le calcul ou la restitution.

Editorial

5. La formation continuée

La formation continuée est certainement un facteur d'amélioration de l'enseignement. Cependant un plus grand choix de formations devrait être proposé aux enseignants. Certaines compétences à faire acquérir par les élèves devraient être proposées comme sujet principal de la formation : comment amener les élèves à la démonstration ou à la rédaction d'un travail, par exemple.

Un peu partout dans le pays, des conférences sont données par des mathématiciens de renom; celles-ci ont pour sujet une analyse épistémologique ou l'histoire des mathématiques, une utilisation de notre discipline dans un contexte technique ou une recherche industrielle, une investigation plus ou moins profonde sur un point particulier de matière, sur une méthode pédagogique ou un moyen didactique.

Annuellement, le congrès de la SBPMef lui-même offre à ses participants des ateliers, des conférences sur de tels sujets; des débats, des échanges de vue y ont lieu. Il est donc nécessaire et logique que notre congrès du mois d'août soit reconnu et comptabilisé comme formation continuée par notre ministre, au même titre d'ailleurs que toutes les conférences dont je viens de parler.

6. Programmes, compétences, ...

De même, il semble tout à fait normal et légitime que notre société soit consultée pour tout ce qui touche aux mathématiques en communauté française dans l'enseignement secondaire, voire l'enseignement primaire. Qu'il s'agisse des programmes, des compétences, des moyens didactiques et pédagogiques à mettre en oeuvre, il semble souhaitable qu'un dialogue s'installe entre le pouvoir politique et des associations comme la nôtre dans les seuls buts sont la promotion des mathématiques et l'amélioration de leur enseignement.

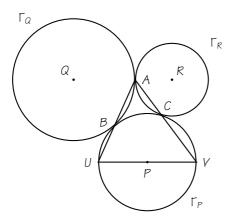
Chers collègues, je vous invite donc à participer de manière active à la consultation organisée par notre ministre pour lui faire connaître tous nos souhaits, nos demandes et nos besoins.

À propos du théorème de Boutin

J.-L. AYME, Lycée Geoffroy, St-Denis-de-la-Réunion

Dans la forêt, vaste et obscure, des théorèmes portant sur la géométrie du triangle, il m'a été permis d'entrevoir une clairière, voir le théorème de BOUTIN (1) dont les différentes versions contribuent dans un souci d'élégance et de clarté, à rendre plus aisées et plus simples certaines démonstrations considérées comme ardues.

Le théorème de Boutin



Hypothèses:

 Γ_P , Γ_Q , Γ_R trois cercles de centre P, Q et R, deux à deux tangents extérieurement.

A, B, C les points de contacts respectivement de Γ_R et Γ_Q , de Γ_Q et Γ_P , de Γ_P et Γ_R .

U, V les points d'intersection respectivement des droites (AB) et (AC) avec Γ_P .

Thèse:

(UV) est parallèle à (QR) passant par P.

Démonstration:

• Notons T_A la tangente commune intérieure à Γ_R et Γ_Q , et T_U , T_V les tangentes à Γ_P en U et V.

Adresse de l'auteur: Jean-Louis AYME, rue Ste-Marie, 37, 97400 St-Denis-de-la-Réunion (1) M. A. Boutin est né à Paris en 1858. Professeur de mathématiques, il entre en 1885 à la Société mathématique de France et publie dans le Journal de mathématiques élémentaires de 1890, un théorème qui aujourd'hui, porte son nom. En 1889, il découvre une propriété caractérisant tous les points de la droite d'Euler.

• Les cercles Γ_P et Γ_Q , Γ_R et Γ_P conduisent au théorème de Reim (2), $T_U//T_A$ et $T_A//T_V$;

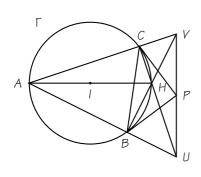
par transitivité de la relation //, $T_U//T_V$; par définition d'une tangente, $T_U \perp (PU)$ et $T_V \perp (PV)$; sachant que la relation // est compatible avec la relation \perp , (PU)//(PV); d'après le postulat d'Euclide, (PU) = (PV), i;e; (UV) passe par P.

- Sachant que PQ+AR=PR+AQ, RP+BQ=RQ+BP et QR+CP=QP+CR, le cercle Γ circonscrit au triangle ABC est inscrit dans le triangle des centres PQR.
- Les cercles Γ_P et Γ conduisent au théorème de R_{EIM} : (UV) est parallèle à QAR i.e. à la tangente de Γ en A.

Scolies :

- 1. (UC) et (VB) sont deux hauteurs du triangle AUV dont l'orthocentre H est sur Γ .
- 2. le triangle de contact ABC est acutangle sinon son triangle tangentiel PQR lui serait extérieur.

Version à partir du triangle de contact



Hypothèses:

ABC est un triangle acutangle, Γ le cercle de centre I, circonscrit à ABC.

H le point de Gamma diamétra-lement opposé à A,

U,V les points d'intersection de (AB) et (CH), de (AC) et (BH),

et P un point de [UV]

Thèse:

P est le milieu de [UV], si et seulement si, les droites (PB) et (PC) sont tangentes à Γ .

⁽²⁾ Cf. appendice 1.

⁸ en pâtissait un peu, cet inconvénient serait largement compensé par des

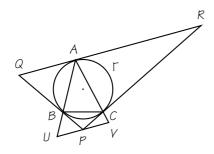
Scolie:

H est l'orthocentre du triangle AUV; la hauteur (AH) étant perpendiculaire à (UV) et à la tangente T_A de Γ en A en tant que diamètre de Γ , T_A est parallèle à (UV).

Démonstration :

- C.N.: d'après le théorème de Möbius (3), le cercle de diamètre [UV] passant par B et C, est orthogonal à Γ ce qui revient à dire que les droites (PB) et (PC) sont tangentes à Γ .
- C.S.: d'après le théorème de Pascal, (UPV) est la pascale (4) de l'hexagone dégénéré ABT_BHCT_CA ; les triangles BUV et CUV étant rectangles en B et C sont inscriptibles dans le demi-cercle de diamètre [UV]; puis, en appliquant le théorèmede Boutin, on conclut.

Version à partir du triangle tangentiel



Hypothèses:

PQR est un triangle, Γ le cercle inscrit dans PQR, ABC le cercle de contact de PQR, et Δ_p une droite passant par P telle que U, V soient les points d'intersection de Δ_P avec (AB) et (AC)

Thèse:

 Δ_P est parallèle à (QR) si, et seulement si, P est le milieu de [UV].

Démonstration:

Le cercle Γ_P de centre P passant par B et C coupe (AB) en U' et (AC) en V'; d'après le théorème de Boutin, (U'V') est la parallèle à (QR) passant par le milieu P de [U'V'].

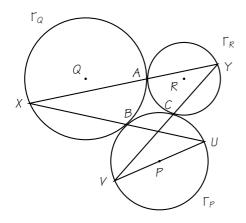
⁽³⁾ Möbius A. F., mathématicien allemand (1790-1868); le théorème : une sécante mobile étant menée par l'un des points d'intersection de deux cercles, les droites qui joignent l'autre point d'intersection aux deux extrémités de la sécante déterminent entre elles un angle constant égal à l'angle déterminé par les droites qui joignenet ce même point d'intersection aux deux centres.

⁽⁴⁾ Cf. appendice 3.

C.N. : d'après le postulat d'Euclide, $\Delta_P=(U'V')$; en conséquence, P est le milieu de $\lceil UV \rceil$.

C.S.: raisonnons par l'absurde en supposant que Δ_P n'est pas parallèle à (QR); le quadrilatère UU'W' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme; en conséquence, (AUU') serait parallèle à (AV'V) ce qui est contradictoire.

Une généralisation de YAGLOM (5)



Hypothèses:

 Γ_P , Γ_Q , Γ_R trois cercles de centre P, Q, R, deux à deux tangents extérieurement,

A, B, C les points de contacts de Γ_R et Γ_Q , de Γ_Q et Γ_P , Γ_P et Γ_R , U un point de Γ_P ,

X, Y, V les seconds points d'intersection de (UB) avec Γ_Q , (XA) avec Γ_R , (YC) avec Γ_P .

Thèse:

la droite (UV) passe par P.

Scolie:

U est distincts de V, sinon les cercles Γ_P , Γ_Q et Γ_R seraient concourants d'après le théorème du pivot $\binom{6}{}$ en considérant le triangle UXY avec A sur (XY), B sur (UX) et C sur (UY).

Démonstration :

Notons T_U , T_X , T_Y et T_V les tangentes à Γ_P , Γ_Q , Γ_R et Γ_P en U, X, Y et Y:

les cercles Γ_P et Γ_Q , Γ_Q et Γ_R , Γ_R et Γ_P conduisent au théorème de Reim; il s'en suit que $T_U//T_X$, $T_X//T_Y$, $T_Y//T_V$ et par transitivité, $T_U//T_V$;

 $^(^5)$ Yaglom I. M., Transformations géométriques II, MAA, p. 31. Isaac Moisevitch Yaglom est né en Ukraine en 1921.

⁽⁶⁾ Cf. appendice 2.

¹⁰ que nous formons, mais un philosophe, mais un homme capable de diriger

puis, comme dans le deuxième point de la démonstration du théorème de Boutin, on conclut.

Scolies:

- 1. Le résultat reste vrai lorsque deux points coïncident en considérant la tangente en ce point.
- Nous retrouvons le théorème de Boutin lorsque X et Y coïncident avec
 A.
- 3. PQR est le triangle tangentiel de ABC.
- 4. Une droite parallèle à (UV);

notons U', V' les seconds points d'intersection de (AB) et (AC) avec Γ_P ; le quadrilatère UU'W' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu P est un parallélogramme; en conséquence, (UU')/(W').

Notons D le second point d'intersection de (CU) avec le cercle Γ circonscrit à ABC; les cercles Γ et Γ_P conduisent au théorème de $R_{EIM}: (AD)//(UU')$; d'où par transitivité, (AD)//(W'). Les cercles Γ et Γ_P , la droite (ACV4) et les parallèles (AD) et les parallèles (AD) et (W'), conduisent à l'alignement des points D, B et V; en conséquence, d'après le théorème de R_{EIM} appliqué aux mêmes cercles, la tangente à Γ en D est parallèle à (UV).

- 5. Position de D:
 - les cercles Γ_P et Γ_Q conduisent au théorème de Reim : (U'U)//(AX) et par transitivité (AD)//(AX); d'après le postulat d'Euclide, D est sur la droite (XY).
- 6. D étant le point d'intersection des droites (UC) et (VB), les céviennes $(^7)$ (UB) et (VC) sont deux hauteurs du triangle DVU dont l'orthocentre H est sur Γ .

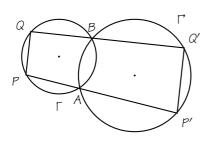
Appendice 1 : le théorème de Reim

Ce théorème de R_{EIM} (8) a été proposé aux Maxi Olympiades belges de 1982.

⁽⁷⁾ Nom donné aux droites passant par un sommet d'un triangle en l'honneur de Jean de Céva (1648-1734).

⁽⁸⁾ Anton Reim (1832-1922), mathématicien allemand.

Si deux cercles (Γ) et (Γ') se coupent en A et B, une droite passant par A recoupe (Γ) et (Γ') en P et P' respectivement, une droite passant par B les recoupe en Q et Q' respectivement, alors (PQ) est parallèle à (P'Q').



Hypothèses:

Γ, Γ' deux cercles sécants,

A, B les deux points d'intersection de Γ et Γ' ,

 D_A une droite passant par A,

Q un point de T,

Q' un point de l',

et D_B la droite brisée (QBQ').

Thèse:

 D_B est une droite si, et seulement si, (PQ) est parallèle à (P'Q').

Une démonstration de cette équivalence peut se faire par la méthode des angles.

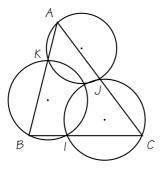
Scolie : ce théorème reste vrai lorsque les cercles sont tangents ou que les poins P et Q sont confondus; dans ce dernier cas, on envisage la tangente.

Appendice 2 : le théorème du pivot

Ce théorème (9) a été découvert par Miquel A. (10);

Si les sommets I, J, K d'un triangle sont situés respectivement sur les droites latérales (BC), (CA), (AB) d'un triangle ABC, alors les cercles circonscrits aux triangles ARJ, BPK et CQI, sont concourants.

⁽⁹⁾ Il doit son nom à Forder H. G. dans Higher Course geometry, Cambridge Presse, 1949. (10) Théorèmes de Géométrie, Journal de mathématiques pures et appliquées de Liouville, 1838.



Hypothèses:

ABC un triangle,

I un point de la droite (BC),

J un point de la droite (CA),

et K un point de la droite (AB).

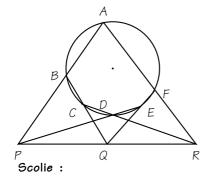
Thèse :

les cercles circonscrits aux triangles AKJ, BIK et CJI sont concourants.

Une démonstration de ce théorème peut se faire par la méthode des angles ou à partir du théorème de Reim.

Appendice 3 : le théorème de Pascal

Les côtés opposés d'un hexagone inscrit à un cercle se rencontrent en trois points alignés. Ce théorème énoncé par Blaise Pascal est aussi appelé l' « Hexagramma mysticum ».



Hypothèses :

Γ un cercle,

ABCDEF un hexagone inscrit dans Γ , et P, Q, R les points d'intersection des droites (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Thèse: les points P, Q et R sont alignés.

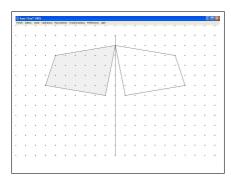
- 1. la droite (PQR) est la pascale de l'hexagone ABCDEF.
- 2. Le résultat reste vrai lorsque les points C et D, E et F sont confondus; dans ce dernier cas, on remplace les côtés [CD] et [EF] par les tangentes à Γ en C et E. Cette situation particulière a été étudiée par MacLaurin ou Mac-Laurin Colin, Traité des Fluxions (1748), Appendice § 36.

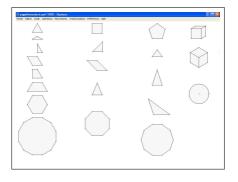
Un nouveau logiciel de mathématiques

Un logiciel d'aide à l'enseignement des mathématiques

Apprenti Géomètre est un nouveau logiciel conçu par le CREM à la demande du Ministère de la Communauté française. D'une appropriation aisée par les élèves, il offre, au départ, deux champs de travail.

Le kit standard permet de faire apparaître à l'écran tout un jeu de figures simples et prédéfinies, que l'on peut assembler, découper (pour les décomposer et les recomposer d'une multitudes de façons), déplacer (translation), tourner et retourner. L'élève peut ainsi aborder, dans un environnement intuitif, des notions mathématiques telles que les pavages, les aires, les fractions, et bien d'autres encore.





Le **kit libre** place l'élève dans un environnement qui s'apparente à la géométrie traditionnelle. En plus des fonctionnalités du kit standard annoncées ci-dessus, il permet de dessiner des figures à partir de leurs caractéristiques géométriques et de leur donner les dimensions souhaitées. L'élève a également accès aux transformations du plan qu'il peut appliquer aux figures dessinées.

Il peut aussi travailler à partir d'une grille triangulée ou carrée. Pour les deux kits, une propriété de magnétisme facilite la juxtaposition des figures ou l'accrochage de points à une grille ou à une figure.

Apprenti Géomètre, déjà diffusé dans près de 4000 implantations de l'enseignement fondamental, est compatible Mac et PC et peut être téléchargé gratuitement sur le site : www.enseignement.be/geometre

Et pourquoi pas l'infiniment petit...

J. OOMS, Athénée Royal de Chimay

Lorsque les deux termes d'une fonction rationnelle s'annulent pour la même valeur de la variable x, nous avons coutume de dire que la forme $\frac{0}{0}$ correspondante est indéterminée; après quoi, nous montrons qu'une limite existe, lorsque x tend vers a et que cette limite peut effectivement être calculée, l'indétermination de départ étant ainsi « levée ».

Cette façon de dire les choses est, à mes yeux, imprécise, voire, incorrecte.

Incorrecte, car si nous interprétons la forme $\frac{0}{0}$ comme représentant le quotient q de la division du nombre 0 par le nombre 0, alors, il est vrai que q est totalement (et définitivement) indéterminé en ce sens qu'on peut lui attribuer n'importe quelle valeur, l'égalité $0=0\cdot q$ étant vérifiée pour toute valeur de q. Dans ces conditions, entreprendre de lever l'indétermination est une démarche insensée.

En fait, il ne s'agit pas de cela, mais de déterminer la limite d'une fonction de type $\frac{A(x)}{B(x)}$, pour x tendant vers a, lorsque les deux termes de la fraction tendent vers O, pour x tendant vers a. (Observons que je ne dis pas limite de la fonction en a, mais limite de la fonction lorsque x tend vers a, soulignant ainsi le caractère dynamique de la démarche.)

Alors, la question s'éclaircit : ce qui est indéterminé a priori, c'est la limite du quotient de ces deux variables, qui tendent, concomitamment vers O, tout en étant différentes de O.

Or, un nombre « voisin » de O est un nombre dont la valeur absolue est « petite », et si le nombre varie, et variant, s'approche infiniment de O, ce qui est le cas, lorsque nous disons qu'il tend vers O, alors nous dirons, par définition, que cette variable est infiniment petite.

_

Adresse de l'auteur: Ooms Jean, Rue de Bourlers, 22, 6460 - Chimay.

Infiniment petit

DÉFINITION : f(x) est infiniment petit lorsque x tend vers a si et seulement si

 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) \neq constante 0$ sur tout voisinage de x = a

Une variable infiniment petite ne peut être confondue avec sa limite O. La représenter par le symbole O est source de malentendu. Il s'impose donc d'inventer un symbole spécifique pour représenter l'infiniment petit $\binom{1}{2}$.

Dans mon enseignement, j'ai délibérément proposé de représenter l'infiniment petit par le symbole \oplus .

Bien entendu, ce symbole ne représente pas un nombre mais un mode de variation : le comportement d'une variable $\neq 0$ dont la limite est 0.

Pourquoi ce symbole précisément? Mais parce que ce symbole évoque une cible et que le point « visé » par la variation en question est le nombre zéro, centre de la cible.

L'inverse d'un infiniment petit positif est un infiniment grand noté $+\infty$ ou simplement ∞ . L'inverse d'un infiniment petit négatif est une variable négative notée $-\infty$ dont la valeur absolue est un infiniment grand.

Si \oplus représente un infiniment petit positif, nous pouvons donc écrire :

 $\frac{1}{\Phi} = \infty$ et, réciproquement d'ailleurs : $\frac{1}{\infty} = \Phi$.

Le cas d'indétermination évoqué au départ de ce texte sera alors correctement représenté par $\frac{\Phi}{\Phi}$, expression dont la limite est indéterminée a priori, mais pourra être déterminée, a postériori, c'est-à-dire après examen de la structure fonctionnelle des termes en présence.

Dans les deux tableaux ci-dessous, les symboles \oplus et ∞ correspondent à des variables positives.

⁽¹⁾ J'ai été conforté, après coup, dans cette prise de position, par la découverte d'une note d'un auteur anglo-saxon EDWIN BIDWELLE WILSON, page 63 de Advanced Calculus, Ed. Dover 1958. Je lis : « It cannot be emphasized too strongly that in the symbol $\frac{0}{0}$, the O's are merely symbolic for a mode of variation just as ∞ is. They are not actual O's and some other notation would be far preferable...».

Infiniment petit

Sont indéterminées a priori les formes :

$$\frac{\Phi}{\Phi}$$
, $\frac{\omega}{\omega}$, $(1+\Phi)^{\omega}$, $\Phi \cdot \omega$, $\Phi - \Phi$, $\omega - \omega$, ω^{Φ} , Φ^{Φ}

Par contre, sont déterminées a priori les formes ci-après où O représente le nombre zéro.

Infiniment petits au voisinage de x = 0

Sont infiniment petits lorsque x tend vers O, par exemple, les fonctions :

$$x^n$$
 ($\forall n \in \mathbb{N}_o$), $\sin x$, $\tan x$, $1 - \cos x$.

Par définition, l'infiniment petit f(x) pour x tendant vers O est dit « d'ordre n » relativement à x

si et seulement si

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = a \in \mathbb{R}_0 \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{ax^n} = 1$$

f(x) étant alors très sensiblement équivalent à ax^n au voisinage de O, on convient de dire que ax^n est la <u>partie principale</u> (p.p.) de f(x) au voisinage de x = O.

Et on peut vérifier que

Infiniment petit

p.p.
$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x) = a_1 x$$
, si $a_1 \neq 0$,

et.

$$p.p.(\sin x) = x$$
,

$$p.p.(tan x) = x$$

p.p.
$$(1 - \cos x) = \frac{x^2}{2}$$
,

au voisinage de x = 0. (x en radians)

Exploitation:

La p.p. d'un infiniment petit f(x) peut être substituée à f(x) quand on recherche la limite d'un produit ou d'un quotient d'infiniment petits.

Exemple:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

Dans le cas d'une somme algébrique, cette démarche est encore valable si le bilan de l'opération (résultat de l'addition algébrique des p.p. substituées) est différent de O. Si le bilan est nul, le résultat de la subsitution peut ne pas représenter la limite cherchée.

Exemple:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin x}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

Par contre:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \neq \lim_{x \to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

En effet, le développement de sin x en série de Mac Laurin :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

montre que la p.p. de x — $\sin x$ est $\frac{x^3}{3!}$ lorsque x tend vers 0; si bien que $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$

Application au calcul des limites de fonctions lorsque $x \rightarrow a \neq 0$

Le changement de variable x-a=u renvoie alors au calcul d'une limite de fonction lorsque u tend vers O.

Exemple : Que vaut $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$?

L'expression est de type $\frac{\Phi}{\Phi}$ au voisinage de $x=\frac{\pi}{6}$. Il y a donc indétermination à priori.

Pour qui ne connaît pas la règle de l'Hospital (qui fait intervenir les dérivées) une première méthode consiste à faire apparaître le facteur responsable de l'annulation des 2 termes de la fraction pour $x=\frac{\pi}{6}$ ce qui demande une certaine habileté dans le maniement des formules de la trigonométrie :

$$cos 3x = cos(2x + x)$$
= $cos 2x cos x - sin 2x sin x$
= $(cos^2 x - sin^2 x) cos x - 2 sin^2 x cos x$
= $cos x(cos^2 x - 3 sin^2 x)$
= $cos x(1 - sin^2 x - 3 sin^2 x)$
= $cos x(1 - 4 sin^2 x)$
= $cos x(1 - 2 sin x)(1 + 2 sin x)$

D'où

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos x (1 - 2 \sin x) (1 + 2 \sin x)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La voie royale consiste à effectuer le changement de variable

$$x - \frac{\pi}{6} = u \iff x = \frac{\pi}{6} + u,$$

ce qui donne :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\sin x}{\cos 3x} = \lim_{u \to 0} \frac{1 - 2\sin\left(u + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos 3\left(u + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1 - 2\left(\sin u \cos\frac{\pi}{6} + \cos u \sin\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(3u + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin u + \frac{1}{2}\cos u\right)}{\sin(-3u)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{(1 - \cos u) - \sqrt{3}\sin u}{\sin(-3u)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\frac{u^2}{2} - u\sqrt{3}}{-3u}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{-u\sqrt{3}}{-3u}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

calcul dont le déroulement est, on le voit, automatique!

Affiliation à la SBPMef

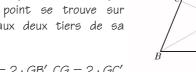
Le numéro de Math et Pédagogie que vous tenez en main termine l'année. Nous vous proposons donc de renouveller sans tarder votre affiliation à la société. Ce serait symphatique si vous pouviez en profiter pour convaincre l'un ou plusieurs de vos collègues de faire de même. Nous comptons sur vous.

Pour les conditions d'affiliation, vous pouvez consulter le Coin du trésorier.

Les médianes du triangle J. G. SEGERS.

Il s'agit d'un petit chapitre de Géométrie dont $G_{\rm UY}$ Robert s'est occupé, et qui reste caché dans son CDRom. Je l'ai rendu un peu mieux accessible pour tout le monde.

1) Dans tout triangle ABC, les segments reliant chaque sommet au milieu du côté opposé sont appelées les médianes AA', BB', CC'. On sait qu'elles sont concourantes en un point G qu'on appelle le centre de gravité du triangle. On sait que ce point se trouve sur chaque médiane aux deux tiers de sa longueur :



$$AG = 2 \cdot GA', BG = 2 \cdot GB', CG = 2 \cdot GC'$$

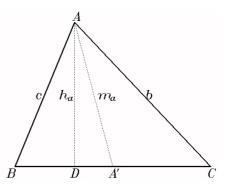
On obtient la propriété métrique fondamentale des médianes en traçant la hauteur $h_a = AD$ et en appliquant le théorème de PYTHAGORE à tous les triangles rectangles, parties du triangle ABC. On obtient

$$h_a^2 = c^2 - \overline{BD}^2 = m_a^2 - \overline{DA'}^2 = b^2 - \overline{DC}^2$$

ďoù

$$c^2=m_a^2+\overline{B}\overline{D}^2-\overline{D}\overline{A'}^2=m_a^2+\overline{B}\overline{A'}(\overline{B}\overline{D}-\overline{D}\overline{A'}),$$

$$b^2 = m_a^2 + \overline{DC}^2 - \overline{DA'}^2 = m_a^2 + \overline{A'C}(\overline{DC} - \overline{DA'}).$$



Comme $\overline{BA'} = \overline{A'C} = \frac{a}{2}$, l'addition membre à membre des deux dernières égalités donne le <u>théorème de la médiane</u>

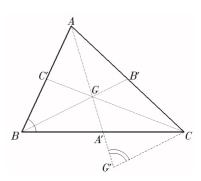
$$b^2 + c^2 = 2 \cdot m_a^2 + \frac{a^2}{2},$$

soit:

Dans tout triangle, la somme des carrés de deux côtés est égale au double du carré de la médiane correspondant au troisième côté auamenté de la moitié du carré de ce dernier côté.

2) **Définition:** Un triangle est appelé <u>automédian</u> si et seulement si le triangle formé par ses médianes est semblable au triangle donné. (Remarque: si les médianes AA', BB', CC' forment un triangle semblable au triangle ABC donné, c'est également vrai pour celui formé par les deux tiers des médianes AG, BG, CG.)

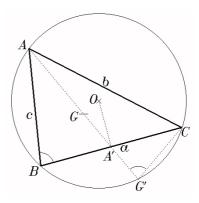
La figure nous montre un triangle ABC quelconque avec ses 3 médianes se coupant en G.



Pour construire le triangle des « deux tiers médianes », on prolonge AA' de A'G' = GA'. En reliant CG', on obtient le triangle GG'C cherché. Pour qu'il soit semblable au triangle donné, il faut par exemple que $\widehat{GG'C} = \widehat{ABC}$. Cette égalité n'aura lieu que si le sommet G' se trouve sur le cercle circonscrit au triangle ABC. A ce stade, rien ne permet de dire que cette condition sera suffisante.

3) Pour construire un triangle automédian, nous partons d'un cercle quelconque de centre O, dans lequel nous traçons une corde AG' quelconque qui nous servira de médiane prolongée d'un tiers. Divisons cette corde en deux parties égales pour placer le point G, et divisons GG' en deux parties égales pour y placer le point A'.

Ce point doit être le milieu du côté BC à construire; le segment OA' est donc un segment de sa médiatrice.



La corde perpendiculaire à OA' et passant par A' est donc le côté BC du triangle. En reliant B et C à A, on trouve un triangle ABC automédian cherché.

Géométrie

Démonstration : en appliquant une propriété de cordes se coupant à l'intérieur d'un cercle, on obtient

$$\overline{AA'} \cdot \overline{A'G'} = \overline{BA'} \cdot \overline{A'C}$$

ou

$$\frac{m_a^2}{3} = \frac{a^2}{4} \qquad \text{ou} \qquad m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Le théorème de la médiane devient alors, en y remplaçant m_a par sa valeur trouvée

$$b^2 + c^2 = \frac{3a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 2a^2.$$

Ce théorème valable pour le cas où $\widehat{\mathcal{B}}=\widehat{\mathcal{G}}'$ permet de calculer les valeurs des deux autres médianes. D'après le théorème des médianes, on a

$$m_b^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = \frac{3c^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{3b^2}{4},$$

ďoù

$$m_b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$
 et $m_c = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

On constate en effet que les médianes m_a , m_b , m_c sont proportionnelles aux côtés a, c, b (attention à l'ordre) ce qui prouve que le triangle des médianes est bien semblable au triangle donné.

Voici quelques exemples de triangles automédians dont les côtés sont des nombres entiers



FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS

ARCHITECTURE

CHIMIE

ELECTRICITE

INFORMATIQUE ET GESTION

MECANIQUE

MINES-GEOLOGIE

SCIENCE DES MATERIAUX

La Polytech, institution universitaire à taille humaine, intégrée dans sa ville et dans sa région. Venez y acquérir la formation polyvalente et irremplaçable d'Ingénieur Civil.

PORTES OUVERTES 2004

mercredi 11 février de 9 à 17 h samedi 20 mars de 9 à 13 h samedi 15 mai de 9 à 13 h

Renseignements : Secrétariat des Etudes 9, rue de Houdain • 7000 MONS Tél.: 065/37 40 30 à 32 • Fax: 065/37 40 34 secretu@fpms.ac.be • http://www.fpms.ac.be

Les Ensembles : aspects utilitaires, théoriques, philosophiques

R. HINNION, U.L.B.

En guise d'introduction, voici la première question de la première éliminatoire de la première Olympiade Mathématique Belge [1, p.28]: Etant donné l'ensemble $E = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, laquelle des affirmations suivantes est fausse?

- 1. $\{1,2\} \in E$
- 2. $\{1,2\} \subset E$
- 3. Ø ⊂ E
- 4. $\{1\} \in E$

D'apparence anodine, cette question touche en fait à des aspects profonds concernant le concept même d' « ensemble », et génère un malaise chez bon nombre d'élèves, de futurs professeurs, voire de professeurs. Ce type de question provoque des hésitations même aux examens écrits de l'AESS Math, hésitations détectables aux ratures, fort heureusement suivies des bonnes réponses!

L'ensemble E ci-dessus est pourtant **fini**, et donné **en extension** (c'est-àdire présenté comme une liste concrète d'objets).

D'où vient alors le sentiment d'étrangeté?

Réponse : de la présence, à gauche du symbole d'appartenance $\ll \in \gg$, d'objets qui sont eux-mêmes des ensembles!

Il semblerait en effet que l'acceptation d'ensembles comme objets pouvant à leur tour être éléments d'autres ensembles constitue un obstacle conceptuel de taille; une analyse très fine de cet obstacle est développée dans [2]. Il faut noter que les ensembles sont pratiquement toujours introduits sur base d'une certaine intuition de l'idée de **collection**, familière à tous : collection de timbres, de coquillages, de pierres, etc ... A vrai dire, une définition précise nécessite une approche axiomatique, dans un langage formel : ce qui est trop abstrait pour le secondaire (et même largement au-delà!).

L'enseignant est donc amené à mentir par omission, à donner des pseudodéfinitions, etc...; ce **problème pédagogique** se retrouve dans les livres

Adresse de l'auteur: Roland Hinnion, Université Libre de Bruxelles, CP 211, Bd. du triomphe, 1050 Bruxelles

courriel: rhinnion@ulb.ac.be

également, à (presque) tous les niveaux; selon les auteurs, il est plus ou moins « révélé » à l'étudiant, ou au contraire « escamoté »...

Voici quelques exemples:

- 1. dans [3, p. 8], qui est la section consacrée à la notion d'ensemble, l'auteur reconnaît : « we mentioned the importance of definitions to mathematics. There is a related structural weakness : it is impossible to define every concept. »
 - Et, pour le concept même d'ensemble, il suggère : « collection », « agrégat ». Puis il passe au « fonctionnement » ensembliste : « gestion » de \in , \subset , \cap , \cup , etc...; ce qui est, au fond, une approche axiomatique, ni trop explicite, ni trop formelle...
- 2. dans [4], le concept d'ensemble est suggéré par les termes (traduits du néerlandais!) : « troupeau », « essaim », « collection », etc... Il est bien précisé que la relation d'appartenance « ∈ » lie les éléments à l'ensemble concerné : p.ex. « 2 ∈ {1,2,3} » signifie que « 2 » est bien dans la « liste » (non ordonnée) « {1,2,3} »; et la relation d'inclusion « ⊂ » lie deux ensembles, le premier étant une partie du second : p.ex. {1,2,3} ⊂ {1,2,3,4} (tout élément de la première « liste » se retrouve dans la seconde),
- 3. dans [5], l'auteur commence par : « L'idée d'ensemble est fort courante. Avec des nuances diverses, elle est évoquée par les mots suivants : classe, ensemble, groupe, groupement, collection, collectivité, troupe, équipe, famille, troupeau, tribu, clan, escadrille, essaim, meute, régiment, foule, association, société, école. »
 - Suit une liste d'exemples, pour laquelle il faut remarquer que les ensembles concernés sont tous finis, et que leurs éléments sont des objets de même « type » plus ou moins « concrets » (il y a des moutons, mais aussi des nombres), avec **un** seul cas où les éléments sont eux-mêmes des ensembles (il s'agit de l'exemple E14 : cet ensemble de bottes de carottes).

L'auteur annonce aussi d'emblée (courageusement) : « cet exemple (E14) montre que nous considérons des ensembles comme des **objets** » (donc susceptibles d'être eux-mêmes **éléments** d'ensembles, c'est-à-dire de se retrouver « à gauche d' \in »).

Et il encadre ce principe:

Tout ensemble est un objet.

Le glissement des ensembles finis à éléments relativement concrets et de même type vers des ensembles plus abstraits (infinis, ensembles d'ensembles, etc...) pose en fait de réelles difficultés.

Même une légère complexification de la question décrite au début de cet exposé nous éloigne déjà de la conception naïve (style : collection de coquillages); à titre d'exemple, voici une question de l'AESS Math (ULB, 2003) :

Vrai ou faux? Jusfifier.

(a)
$$\{0, \{0\}\} \in \{\{0\}, \{\{0\}, 0\}, 0\}$$

(b)
$$\{0, \{0\}\} \subset \{\{0\}, \{\{0\}, 0\}, 0\}$$

Alors que dans l'exemple E14 de [5]: « cet ensemble de bottes de carottes », la présence d'éléments eux-mêmes ensembles est « adoucie » par le caractère « homogène » de ces éléments (tous sont de même type : « botte de carottes »), la question ci-dessus fait intervenir des objets de divers « types » : l'ensemble $\{\{0\}, \{\{0\}, 0\}, 0\}$ a en effet pour éléments :

- le nombre zéro,
- l'ensemble de nombres {0},
- l'ensemble (déjà) hétéroclite {{0},0}.

Ayant (malgré tout) accepté le principe « tout ensemble est un objet », voyons quelles difficultés il entraı̂ne. A ce stade, il est cependant bon de mentionner (au moins) un exemple motivant cette acceptation : on signale à bon escient dans [2] l'importance des « groupes quotiente » en algèbre; il nous suffira ici d'invoquer le cas simple suivant : soit $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (l'ensemble des entiers relatifs), muni de l'opération d'addition. On constate que « $2\mathbb{Z}$ » (l'ensemble des entiers pairs) forme un sous-groupe de \mathbb{Z} (c'est-à-dire si $a,b \in 2\mathbb{Z}$, alors $a-b \in 2\mathbb{Z}$).

D'autre part, si « $2\mathbb{Z}+1$ » désigne l'ensemble des entiers impairs, et si l'on définit l'addition de parties A,B de \mathbb{Z} de la manière « naturelle » : $A+B=\{a+b \mid a\in A \text{ et } b\in B\}$ (l'ensemble des sommes possibles d'un élément de A et d'un élément de B), on constate que :

$$\begin{cases} 2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} + (2\mathbb{Z} + 1) = 2\mathbb{Z} + 1 \\ (2\mathbb{Z} + 1) + (2\mathbb{Z} + 1) = 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

Notons « $2\mathbb{Z}$ » : 0 et « $2\mathbb{Z} + 1$ » : 1.

Nous obtenons la table d'addition particulière suivante :



et donc l'apparition « naturelle » d'un nouveau « groupe » : $\{0,1\}$, muni de +. Bien entendu ce groupe ne fait qu'une seule chose, très simple : traduire le fonctionnement de l'addition lorsque l'on ne retient des entiers que leur caractère « pair/impair », la table étant :

Mais la présentation ensembliste permet précisément de traduire de manière plus formelle ce qui est en jeu dans cette opération un peu « métaphysique » d'oubli de l'individualité du nombre (p.ex. 4) au profit de sa propriété (être pair) : cette opération consiste à passer de l'élément (p.ex. 4) à sa « classe de parité » (2Z).

De l'information 4+8=12 (par exemple) on ne capte plus que

nombre pair + nombre pair = nombre pair

c'est-à-dire sous forme ensembliste :

$$2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$$
.

Remarquez que le nouveau groupe $\{0,1\} = \{2\mathbb{Z},2\mathbb{Z}+1\}$ est un **ensemble d'ensembles**, et que $\mathbb{Z},2\mathbb{Z},2\mathbb{Z}+1$ sont des ensembles infinis, pour lesquels une présentation en extension **effective** est exclue; les descriptions « naïves » utilisent les fameux « trois points » (p.ex. $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$) que l'on ne peut vraiment éliminer que par la présentation **en compréhension**, qui décrit l'ensemble considéré par une **propriété** caractérisant ses éléments.

Exemple:
$$2\mathbb{Z} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

En fait, les propriétés en question devraient être formulées dans un langage formel précis; pédagogiquement cependant cela s'avère trop difficile, et le langage utilisé est généralement le langage courant (agrémenté de quelques symboles logiques et mathématiques).

L'idée générale du principe de compréhension est donc la suivante : pour une propriété « P(x) » (qui « parle » de l'objet « x »; p.ex. « x

est un nombre naturel inférieur ou égal à 4 »), on admet l'existence de « l'ensemble des x ayant la propriété P(x) » :

$$\{x \mid P(x)\}.$$

Dans [5] ce principe est explicitement décrit, et « P(x) » y est appelé le **critère d'appartenance**.

De façon très intéressante, cette description est suivie d'une mise en garde contre les « ensembles mal définis », pour lesquels le critère pose problème, mais seuls les « critères flous » sont mis en cause, alors que les cas de critères tout à fait précis et formalisés menant à des « problèmes » (cf. le paradoxe de Russell, traité ci-dessous) sont passés sous silence (fort heureusement d'ailleurs, vu le niveau scolaire visé).

Les deux principes ci-dessus réunissent (lorsqu'ils sont acceptés en toute généralité) les ingrédients pour l'apparition d'inquiétantes contradictions!

Rappelons-les d'abord clairement :

- 1. Tout ensemble est un objet (traduction : un ensemble peut figurer à gauche du symbole d'appartenance $(\in \mathbb{R})$).
- 2. Toute propriété P(x) définit un ensemble $\{x \mid P(x)\}$, caractérisé par le fait que :

$$\forall y \quad (y \in \{x \mid P(x)\} \leftrightarrow P(y)).$$

Notez que, par le premier principe, les « y » ci-dessus peuvent être des ensembles!

Considérons maintenant la propriété $P(x) \equiv x$ est un ensemble.

Par le principe de compréhension, elle définit un ensemble $V=\{x\mid P(x)\}.$ Et donc $V\in V!$ Ce qui nous éloigne définitivement de l'idée courante de collection, mais n'est pas (encore) une contradiction. Voilà donc un ensemble qui s'auto-appartient. Il est clair qu'il existe aussi des ensembles qui ne s'auto-appartiennent pas (à vrai dire c'est le cas de tous les ensembles utilisés en mathématique générale); un exemple nous suffira : $\phi:\{x\mid x\neq x\}$ (l'ensemble vide).

L'idée (géniale) de Russell (1901) consiste à ce stade à collecter les ensembles qui ne s'auto-appartiennent pas, c'est-à-dire à considérer l'ensemble:

$$R = \{x \mid x \text{ est un ensemble et } x \notin x\}.$$

Le principe de compréhension impose alors : $y \in R \leftrightarrow y \notin y$, pour tout ensemble y; pour le cas où y = R, on obtient donc :

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R$$

ce qui est impossible en logique classique!

Ce type de paradoxes est à l'origine des travaux sur les théories axiomatiques concernant les ensembles (axiome du choix, hypothèse du continu, antifondation, etc...), mais aussi d'autres objets mathématiques; [6] fournit une remarquable étude historique et de fond. La crainte de voir surgir des paradoxes a mené à la clarification des axiomes réellement en jeu dans les divers domaines concernés, et au bout du compte, à la constatation du fait que toute la mathématique peut se formaliser à l'intérieur d'une théorie ensembliste adéquate, fournissant ainsi un cadre conceptuel unifié.

La théorie reconnue généralement comme telle est celle de Zermelo et Fraenkel (théorie ZF); comme « solution » aux paradoxes elle propose de « réglementer » les propriétés P(x) qui peuvent définir un ensemble, c'està-dire de restreindre la classe des propriétés pour lesquelles on admet le principe de compréhension.

On renonce donc à l'idée que **toute** propriété définit un ensemble. La « philosophie » de ZF est plutôt pragmatique, et part de l'idée que (par exemple) la collection de Russel n'apparaît pas dans les mathématiques « usuelles », et peut donc être « exclue », sans dommage, de l'horizon conceptuel. Les axiomes de ZF sont en fait tels qu'ils garantissent l'existence de l'ensemble IN des naturels et les constructions mathématiques courantes (p.ex. l'ensemble des parties, la réunion, le produit cartésien, etc...).

Pédagogiquement, il est bien sûr exclu d'étudier ZF (en tant que tel) dans le secondaire (et même au-delà); par contre, on peut initier les élèves aux « opérations ensemblistes permises » : c'est ce qui est fait généralement (entre autres dans [3], [4], [5]), avec explicitation des liens intéressants avec la logique (la **réunion binaire** correspond au **ou non exclusif**, etc...).

La traduction des notions mathématiques (relation, fonction, suite, plan,...) en termes ensemblistes fournit ainsi un cadre clair, commun aux diverses disciplines (algèbre, analyse, géométrie, probabilité, ...) et facilite l'énoncé et la démonstration de nombreux résultats.

Dans cette situation (euphorique?) il reste cependant une question : la théorie ZF est-elle **consistante**, c'est-à-dire exempte de contradictions? La réponse à cette question est l'une des grandes surprises du 20ième siècle; elle n'est venue qu'en 1931, avec le célèbre résultat de Gödel : si ZF est

consistant, alors il est impossible de le démontrer dans ZF! Nous sommes donc condamnés à l'incertitude, sauf découverte (estimée peu probable) d'un paradoxe dans ZF.

Pour terminer, signalons encore que ZF n'est pas la seule « solution » aux paradoxes : on peut sélectionner différemment les propriétés admises dans le principe de compréhension, ou encore modifier la logique utilisée; cette dernière option est moins saugrenue qu'il n'y paraît de prime abord : il ne faut pas oublier que les exigences très fortes de la logique classique (toute proposition correctement formulée est **soit** vraie, **soit** fausse) conviennent peu aux langages naturels (p.ex. « cette phrase est fausse » (paradoxe du menteur)) et aux univers informatiques (les informations peuvent être incomplètes, ce qui ne force pas à leur rejet, mais plutôt à une gestion adaptée, via une logique partielle (p.ex.)).

Enfin, on pourrait imaginer qu'il y a « peu » de collections paradoxales; en fait il n'en est rien : on peut montrer (cf. [7]) que, quel que soit l'univers ensembliste considéré, il y a **toujours au moins** autant de collections paradoxales que d'ensembles! Les collections paradoxales ne constituent donc pas du tout un phénomène marginal...

Références

- [1] Mathématique et pédagogie, N.142, 2003.
- [2] L. Brenton & T.G. Edwards: Sets of sets: a cognitive obstacle, The College Mathematics Journal, vol. **34**, N.**1**, January 2003.
- [3] J.B. Fraleigh: A first course in abstract algebra, Addison-Wesley, 1994.
- [4] Jennekens: Wiskunde 1, 1968.
- [5] Papy: Mathématique Moderne 1, 1963.
- [6] P. Gochet & P. Gribomont: Logique, Vol. 1. (Méthodes pour l'informatique fondamentale, Chapitre 1), Hermès (Paris), 1992.
- [7] R. Hinnion: The number of definable proper classes in a set-theoretical universe, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, Vol. **43**, Série B, fasc.2, p.151-165, 1991.

Université de Mons-Hainaut UMH

- Psychologie et Sciences de l'Education
- Warocqué Economie & Gestion
- Sciences : Mathématique Informatique Physique - Chimie - Biologie
- Médecine Pharmacie Sciences Biomédicales
- Traduction Interprétation
- Institut de Linguistique







Renseignements

Service Accueil & Relations Publiques 20, Place du Parc à 7000 MONS Tél.: 065/37.30.14 - Fax: 065/37.30.54

E-mail: Martine.Vanelslande@umh.ac.be

Internet: http://www.umh.ac.be

Cabri-géomètre et les ellipses J.-P. HOUBEN, *Université Catholique de Louvain*

Mots-clés: Cabri-Géomètre, Ellipse.

Construction de l'ellipse connaissant les foyers

L'ellipse est le lieu des points dont sa somme des distances à deux points fixes (foyers de l'ellipse) est constante. Si F et F' sont les foyers et P un point du lieu, l'ellipse est l'ensemble des points vérifiant la relation :

$$|PF| + |PF'| = 2a$$

où 2a est la constante.

Si nous prenons un segment XY de longueur 2a et que nous y plaçons un point Z variable, nous avons en particulier :

$$|XZ| + |YZ| = 2a$$

|XZ| et |YZ| sont les distances d'un point particulier de l'ellipse. Ce point sera obtenu en traçant le cercle de centre F et de rayon |XZ| et le cercle de centre F' et de rayon |YZ|.

L'intersection des deux cercles donne les positions possibles pour le point particulier de l'ellipse.

Pour tracer une cercle de centre fixe et de rayon donné, on utilise la construction compas (1), qui demande de fixer le centre et le rayon par un segment.

Nous devons donc définir avec le point Z sur le segment XY les segments [XZ] et [YZ] $(^2)$. En suite se servir de l'instruction compas pour obtenir les cercles où P et Q sont les intersections des deux cercles $(^3)$.

On termine en recherchant le lieu de P et le lieu de Q.

Nous avons ainsi construit une ellipse définie par une relation métrique en utilisant la méthode des génératrices. Cependant cette construction ne

Adresse de l'auteur: Jean-Paul Houben, Rue de l'Eglise, 78, 1301 - Bierges

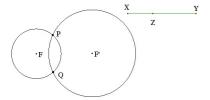
courriel : Houben@anma.ucl.ac.be
(1) Construction / Compas

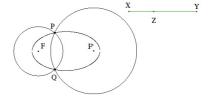
(2) Ligne / Segment

(3) Point / Points sur deux objets

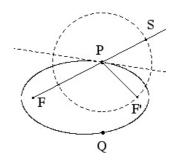
Cabri-Géomètre

donne pas le lieu d'un seul coup. Nous avons d'ailleurs construit deux courbes qui ne se raccordent pas vu l'erreur de définition de l'écran.



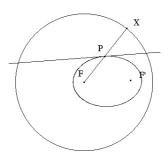


Voici une autre construction de l'ellipse. Si dans la figure précédente nous prolongeons FP d'une longueur égale à F'P, nous obtenons le point S. La distance FS représente le paramètre P est isocèle et P est sur le médiatrice de P est.



Construisons maintenant le cercle de centre F et de rayon 2a (4). Pour un point quelconque X de ce cercle, traçons le rayon FX et la médiatrice (5) de F'X.

Ces deux droites se rencontrent en un point P de l'ellipse. En demandant le lieu de P lorsque X parcourt le cercle, nous obtenons le tracé de l'ellipse en une seule construction et \dots sans « trou ». Remarquons que les médiatrices que nous avons construites sont les tangentes à l'ellipse au point P.



Construction de l'ellipse connaissant les deux axes

Connaissant les deux demi-axes a et b et sachant que les équations paramétriques de l'ellipse sont :

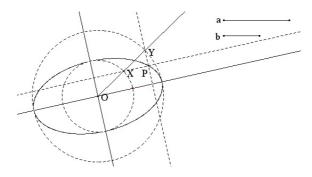
⁽⁴⁾ Constructions / Compas

⁽⁵⁾ Constructions / Médiatrice

$$\begin{cases} x = a \sin \alpha \\ y = b \cos \alpha \end{cases}$$

nous pouvons construire l'ellipse en choisissant deux segments qui représentent les demi-axes a et b. Traçons les deux cercles de rayon a et b et de centre O en utilisant l'outil compas $\binom{6}{2}$.

Choisissons arbitrairement deux diamètres perpendiculaires qui seront les directions des deux axes. Il est de tradition de les prendre horizontal et vertical, mais ce n'est pas indispensable comme le montre la figure.



Plaçons un point X sur l'un des deux cercles et traçons la demi-droite issue du centre O et passant par X. Cette demi-droite rencontre l'autre cercle en Y. Par X et Y construisons les parallèles aux axes. Ces parallèles déterminent le point P. En recherchant le lieu de P lorsque X parcourt le cercle, nous obtenons une ellipse. Nous pouvons à notre guise changer la longueur des axes A et A.

L'outil Conique de Cabri-Géomètre

Les constructions précédentes construisent l'ellipse comme lieu. La courbe ainsi obtenue ne peut malheureusement servir d'objet pour une construction ultérieure. Pour de telles constructions, il nous faut alors utiliser l'outil fourni par Cabri-Géomètre. Celui-ci permet de construire une ellipse lorsqu'on en connaît cinq points. Il suffit donc de déterminer cinq points particuliers par l'une des méthodes précédente.

Si la conique est donnée par ses deux demi-axes, nous avons directement les sommets, ce qui nous donne déjà quatre points. Il nous reste à

 $^(^{6})$ Le grand cercle est appelé cercle principal, le petit est le cercle secondaire.

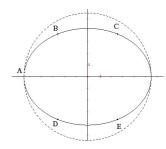
Cabri-Géomètre

construire un seul point supplémentaire de l'ellipse par le choix d'un point particulier sur le cercle principal.

Si l'ellipse est donnée par ses foyers, il suffit dans la première construction de prendre deux points particuliers de subdivision du segment de longueur 2a et de construire à partir de ceux-ci cinq points de l'ellipse sachant que la ligne des foyers et sa médiatrice sont des axes de symétrie.

On peut enfin construire une ellipse en tenant compte des symétries de la courbe. Traçons deux droites perpendiculaires ou pour aller plus vite introduisons les axes $(^7)$. Prenons un premier point A sur l'axe des x: ce sera un des sommets. Choisissons un point quelconque intérieur au cercle de rayon OA: B pour que le point A soit un sommet du grand axe. Construisons le symétrique de B par rapport à l'axe OY: C. Ensuite le symétrique de B par rapport à O: D. Enfin terminons avec le symétrique de B par rapport à l'axe OX: E. Nous avons alors les cinq points A, B, C, D et E pour construire l'ellipse $(^8)$.

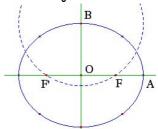
On peut modifier l'aspect de l'ellipse en changeant la position des points A et B. Comme nous avons pris comme axes de symétrie de l'ellipse le système d'axes proposé par Cabri-Géomètre, on peut en demander l'équation (9).



On peut maintenant à, partir de cette ellipse envisager toutes les constructions possible. En voici quelques une :

- Etant donné les deux axes, déterminer les foyers.

En effet, l'abscisse c du foyer est donné par $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Les foyers F et F' sont l'intersection de la droite BB' avec le cercle de centre B et de rayon a.



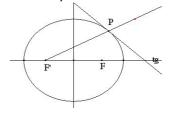
^{(&}lt;sup>7</sup>) **Aspect** / Montrer les axes

⁽⁸⁾ Ligne / Conique

⁽⁹⁾ Mesure / Coord. & Equation

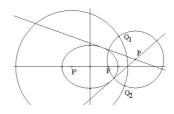
- Construire les tangentes en un point de l'ellipse.

Il suffit de prendre un point quelconque sur FP et la tangente est la bissectrice de l'angle formé par F,P et ce point.



- Construire les tangentes issues d'un point à une ellipse.

En se référent à la seconde construction de l'ellipse, nous pouvons construire le cercle de centre F' et de rayon 2a et le cercle de centre P passant par F. Ces deux cercles se rencontrent en deux points Q_1 et Q_2 . Les tangentes sont les médiatrices de FQ_1 et FQ_2 .

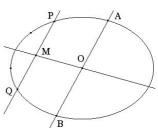


- Construction de deux diamètres conjugués.

Etant donné un diamètre, on appelle diamètre conjugué, le lieu du milieu des cordes parallèles au diamètre.

On peut démontrer analytiquement que ce lieu est un segment de droite.

Si AB est un diamètre passant par O. Par P, un point quelconque de l'ellipse, traçons une parallèle au diamètre. Cette parallèle rencontre l'ellipse en Q. Si M est le milieu de PQ, la droite OM détermine le diamètre conjugué à AB.



37

place réservée

Intégration d'une calculatrice formelle en classe terminale scientifique.

A. GUILLEMOT, Lycée Emile Zola, Rennes

1. Introduction

A l'initiative de Texas Instruments, j'ai eu la possibilité de prêter une TI89 à tous les élèves de TS pendant cinq ans. Les trois premières années j'ai mené cette expérience avec une collègue également équipée. Nous nous sommes lancés dans l'aventure sans moyen supplémentaire mais avec beaucoup d'enthousiasme. Je me propose de montrer comment on s'y est pris pour intégrer au mieux la calculatrice dans nos classes, les problèmes que cela pose, les satisfactions et les déceptions des acteurs.

2. Mise en place et organisation du projet.

Chacune année, après avoir introduit les complexes et les logarithmes et vu les effectifs se stabiliser, nous avons prêté (contre un chèque de caution) les TI89 aux élèves. Lors de la présentation du projet, nous précisons que la calculatrice devait toujours être présente en classe, que de notre côté on aurait toujours une tablette de rétroprojection. Pour rassurer les élèves, nous indiquons que dès qu'il y a un problème, (même en devoir) on intervient. Avant de consacrer deux heures à une présentation rapide des possibilités de la calculatrice, nous tenons le discours suivant : « La TI89 comme les logiciels de calcul formel sont de magnifiques outils, encore faut-il savoir s'en servir, connaître ses limites, interpréter correctement les résultats fournis. Un bon outil ne dispense pas de réfléchir et ne remplace pas une étude approfondie des mathématiques. Cette calculatrice a des particularités qu'on va découvrir tout au long de l'année, des résultats vont nous interpeller, elle ne sait pas tout faire, nous ne connaissons pas non plus toutes ses

Adresse de l'auteur: André Guillemot, La Croix d'Alliance, 35590 St-Gilles,

Calculatrices

possibilités. Souvent des résultats vont vous surprendre, surtout n'effacez pas l'historique, on essaiera tous ensemble de comprendre et de justifier ce qui se passe. Et n'oubliez pas que le plaisir des maths, c'est d'essayer et de conjecturer! »

3. Utilisation du « temps calculatrice ».

A l'usage, on estime que l'on a consacré au moins une heure en moyenne par semaine à la calculatrice

3.1. Corriger des erreurs

Plus de la moitié du temps est consacré à cette partie.

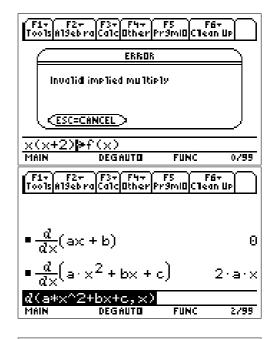
• Erreurs de paramétrage (très fréquent quand on passe de l'environnement « physique » à l'environnement « math »)

Mode Réel ou Mode Complexe.

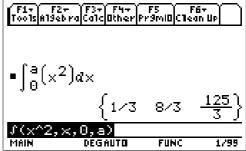
F1+ F2+ Tools #19ebro	F3+ F4+ CalcOther	F5 F6 Pr9mIO C1ear	п ЦР
$=\frac{d}{d\times}(\sin \theta)$	(x))		os(x) .80
■∫sin(×))d×	$\frac{\text{-180} \cdot \cos(x)}{\pi}$	
∫(sin(x) MaiN	,x) Degauto	FUNC	2/99

Degré-Radian.

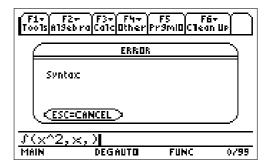
Approx-Exact,



• Erreurs de saisie (pas toujours facile à déceler). Oubli du signe *



• Erreurs de réinitialisation de variable. (on protège une variable pour ne pas la perdre). Penser à faire régulièrement « Clear a z ».



• Erreur de syntaxe. (La T189 les met bien en évidence).

3.2. Les équivalences d'écriture.

Partie très riche car la calculatrice va souvent afficher un résultat sous une forme que l'on attend pas, du coup on est amené à justifier l'équivalence et à revenir systématiquement sur les notions de bases et on s'aperçoit qu'à la fin de l'année celles-ci sont beaucoup mieux assimilées. Deux possibilités pour exploiter ceci. Soit on provoque en posant un exercice où le résultat « calculatrice » ne va pas être le résultat attendu.

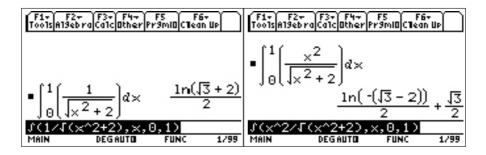
Exemple: Bac 95. On demandait de calculer les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} \qquad J = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

Les questions de l'exercice nous conduisent aux résultats suivants si on le fait à la main :

$$I = \ln\left(1 + \sqrt{3}\right) - \ln\sqrt{2} \qquad J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I.$$

La calculatrice nous donne ceci.



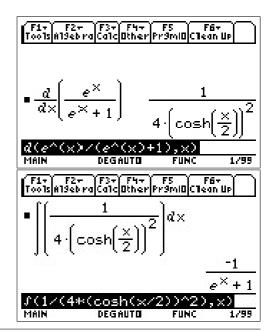
Soit on découvre cela au détour d'un exercice et quand c'est en devoir surveillé, si l'élève n'a pas été habitué à gérer ce type de surprise, cela peut perturber.

Exemple : Lors d'un devoir surveillé, les élèves avaient à étudier la fonction :

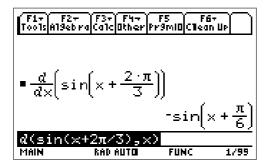
$$\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$
.

Voici le dialogue avec un élève qui me fait appel :

- « çà ne va pas, regardez ce que je trouve comme dérivée, on ne connaît pas cette fonction. »
- « Pas d'affolement, sur ta copie tu trouves une dérivée positive, là tu as un carré, cela devrait te rassurer. »
- « Oui, mais avec les complexes, un carré peut être négatif et comme je ne sais rien sur cette fonction, je ne peux rien dire, et de toutes façons ça ne va pas, regardez ce que donne la primitive, on ne trouve pas le résultat de départ ».

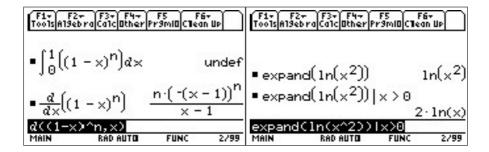


Un autre exemple classique, la dérivée de sin $(x + 2\frac{\pi}{3})$.



3.3. Les imprécisions d'hypothèse.

Nous avons des implicites que la calculatrice ne connaît pas! Du coup nous sommes souvent amenés à être plus précis, ce qui permet une meilleure maîtrise de certaines choses.



3.4. L'utilisation dans le cadre du cours.

La calculatrice permet de présenter certaines notions du cours d'une autre manière, par exemple :

- Notion d'aire.
- Calcul de primitives et de dérivées.
- Equations dans les complexes avec les conjugués.
- Transformations géométriques et complexes.
- Elle s'avère indispensable en arithmétique aussi bien au niveau de ses puissantes fonctions (factor, Isprime) que de la facilité avec laquelle

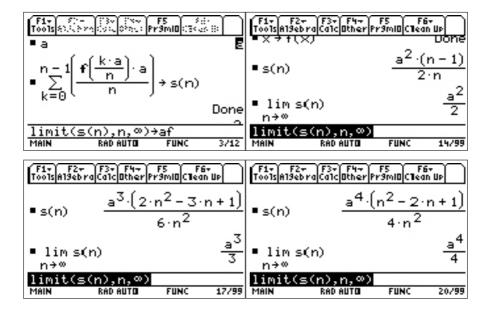
Calculatrices

on peut programmer ce qui permet de faire des choses intéressantes en cryptographie.

Un exemple : Calcul d'aire et primitive.

Considérons une fonction f définie sur [0;a]; on va calculer l'aire habituelle par la méthode des rectangles.

On a saisi d'abord la formule générale de calcul d'aire par la méthode des rectangles ensuite on remplace f(x) par x, x^2 , x^3 . On calcule l'aire des rectangles et on passe à la limite.



Qu'en pensent les élèves?

- Enthousiasme au début.
- Au bout d'un mois on commence à s'apercevoir qu'il faut beaucoup travailler pour bien exploiter sa calculatrice et certains décrochent un peu.
- A la fin de l'année tous sont satisfaits d'avoir participé à une telle expérience et trouvent que la calculatrice les a avantagés pour le bac.

Pour le colloque INRP de Rennes, nous avons demandé aux élèves de nous donner un exemple où la calculatrice leur avait été utile et un exemple

Calculatrices

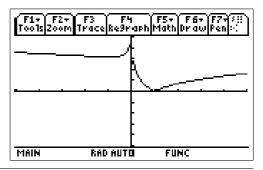
où la calculatrice les avait perturbés, voici quelques exemples qui méritent attention.

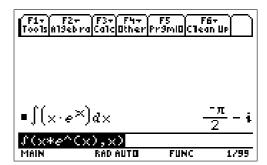
3.5. Des exemples perturbants.

(on en a tous les jours!)

La calculatrice fait une différence entre les décimaux et les réels. Les logarithmes et les complexes.

Représentation de la fonction $|\ln(x)|$ La calculatrice interprète la valeur absolue comme le module.





Il y a quelque chose dans la variable x.

3.6. Exemples où la calculatrice a été utile.

CÉCILE

Lors du cours sur les intégrales, vous avez dit que la fonction f devait être définie et dérivable sur [a;b], je n'ai pas prêté attention à cette hypothèse (vous ne donnez que des fonctions qui marchent bien!). Un jour j'ai voulu calculer à la calculatrice l'intégrale entre -2 et 3 de $\frac{1}{x}$, j'ai eu la surprise de voir apparaître « undef », c'est à partir de ce moment que j'ai compris que votre hypothèse n'était pas inutile!

NADÈGE

ENONCE

On appelle A_n le nombre 800... 009 qui écrit avec n chiffres 0 entre un 8 et un 9. (par exemple $A_3 = 80009$). Montrer que dans l'ensemble $\{A_0, A_1, \ldots, A_{19}\}$ il y a au moins deux éléments dont la différence est un multiple de 19.

« Avec la calculatrice, j'ai cherché tous les restes dans la division par 19 des nombres A_0,\ldots,A_{19}

 $A_{\rm O}$ et $A_{\rm 18}$ ont même reste.

On a 80000000000000000009-89=799999999999999999

Donc $A_{18} - A_0$ est un multiple de 19.

Mais je n'avais pas besoin de la calculatrice, maintenant que j'ai vu qu'on n'avait pas plus de 19 restes possibles.

Soit
$$A_0, A_1, ..., A_{19}$$

Si on divise par 19, il ne peut y avoir que 19 restes possibles qui vont de O à 18.

Donc il y a 2 nombres (au moins) qui ont même reste car on a 20 nombres.

lci, on a trouvé que A_0 et A_{18} ont même reste. Donc la différence de ces deux nombres est multiple de 19 ».

CATHERINE

Exercice : Calculer une primitive de $\ln(x+1)$ à l'aide d'une primitivisation par parties.

Je pose
$$U'=1$$
 donc $U=x$ et $V=\ln(x+1)$ donc $V'=\frac{1}{x+1}$ d'où $\Pr(\ln(x+1))=x\times\ln(x+1)-\Pr(x/(x+1)).$

Mais cette dernière primitive me pose problème. En regardant ce que la calculatrice me donne, j'obtiens $(x+1)\ln(x+1)-x$ d'où l'idée de prendre U=x+1 à la place de x car une primitive est définie à une constante près, et après, c'est facile et j'obtiens comme la calculatrice ».

ISABELLE

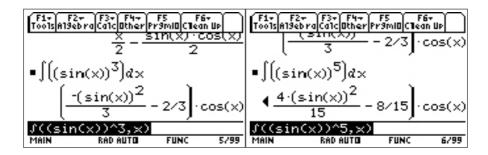
« Pour calculer une primitive d'une fonction rationnelle, je la calcule avec la TI89, je dérive le résultat et je vois comment modifier l'écriture pour pouvoir rédiger correctement ».

Donc on commence par montrer que $\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2}{x-1} + x + 1$ ».

RAMYN

Calculatrices

« Pour trouver une primitive d'une puissance de $\cos x$ ou de $\sin x$, il suffit de regarder ce que fait la calculatrice pour obtenir une méthode beaucoup plus simple que la votre! La primitive est un polynome qui ressemble à la dérivée. »

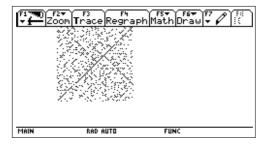


Pour chercher une primitive de $\sin^5(x)$, on en cherche une de la forme :

$$cos(x) \times (a \times sin^4(x) + b \times sin^2(x) + c).$$

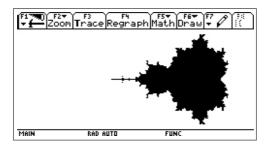
On dérive cette forme et par identification, on trouve $a=-\frac{1}{5},\ b=-\frac{4}{15}$ et $c=-\frac{8}{15}$. »

Certains se sont bien amusés à programmer et obtenir des jolis dessins. La spirale d'Ulam (en commençant à 41).



L'ensemble de Mandelbrot : (Pierre dans le cadre d'un TPE sur les fractales)

49



4. Et les professeurs.

C'est une expérience très enrichissante dans laquelle on a appris beaucoup de choses. Les rapports entre enseignants et élèves ont été modifié — on ne sait pas tout et parfois devant une interpellation de la machine c'est un élève qui trouve la réponse avant le prof — Les élèves sont en général beaucoup plus actifs. Prétendre qu'avec une telle calculatrice « on gagne du temps » est certainement irréaliste. (Plus tard peut-être mais pas dans l'immédiat).

Le temps consacré à la calculatrice n'est pas du temps perdu, certes on fait moins de math « traditionnel » mais ce que l'on fait est beaucoup mieux assimilé car on est constamment à faire des retours sur des notions vues précédemment, ce qui impose de placer les complexes et les ln très tôt dans l'année. La formation de base sur les calculatrices et le calcul formel est indispensable avant de se lancer dans une telle aventure, mais il faut savoir que celle-ci ne représente pas beaucoup de choses par rapport à tout ce que vont apporter nos 35 ou 70 expérimentateurs!

On valorise la notion d'erreur. Obtenir un message d'erreur sur sa calculatrice n'est pas un drame au contraire, on va chercher pourquoi cela ne marche pas. En fin d'année, la plupart des élèves savent bien s'en servir et s'en passer. Pour les autres, (ceux qui se contentent de faire du « copier-coller ») c'est un outil dangereux!

5. Et pour terminer, une petite friandise!

Pour conclure, j'aimerais vous parler d'une de mes plus grandes satisfactions dans l'utilisation d'une calculatrice. Quand les élèves me rendent les

Calculatrices

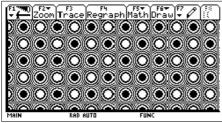
calculatrices, je demande de ne rien effacer, j'aime bien voir ce qu'ils ont mis dans les mémoires (cours, formules, exercices tout faits, la physique ...). Un jour je trouve une grande quantité d'images qui n'avaient rien à voir avec le cours.

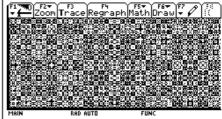
Intrigué par ces jolis dessins, je me renseigne auprès d' Eloïse (une de mes brillantes élèves!) pour en savoir plus : « J'ai fait cela pour m'amuser à partir d'un article de la Revue du Palais de la Découverte. C'est très simple à faire.

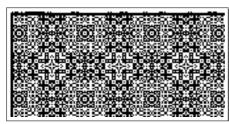
On utilise pour cela la fonction $f_k(x,y) = \text{partie entière}(k(x^2 + y^2))$. k représente un paramètre réel, (x,y) sont les coordonnées du pixel. Si ce nombre est pair, on éclaire le pixel. Pour avoir d'autres images il suffit de changer k ».

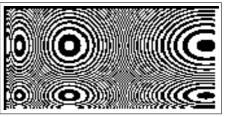
Voulant connaître le « k » qui donnait une des images que j'avais sous les yeux, Eloïse me fit la réponse suivante : « Mr Guillemot, c'est bien vous qui m'avez dit que le plaisir des maths, c'est d'essayer et de conjecturer! Avec une calculatrice, c'est très facile. Je vous ai tout dit, à vous de jouer maintenant! ».

Et c'est ainsi que j'ai consacré beaucoup de temps à faire des « courbes d'Eloïse »!









Les publications de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

- Les brochures signalées par * sont de publication récente.
- Le prix « adhérent » concerne l'A.P.M.E.P. et la S.B.P.M.ef.



N°	Titres des brochures		Prix en €	
	[PORT : cf. bas du tableau]	san	sans port	
	Collège	public	adhérent	
*503	La jubilation en mathématiques			
	Fichiers Evariste : 480 problèmes tirés de différents tour- nois et rallyes mathématiques	4.90	3.80	
98/132	2 tomes:	21,35	15,25	
502	EXCEL-Classe, CD-Rom (Version individuelle)	16.75	16.75	
55	Géométrie expérimentale avec CABRI	13.40	12.65	
119	Jeux 5 (Des activités mathématiques au collège)			
	Série EVAPM : Evaluation 6 ^e (première chez nous!)	11	7.60	
112/118	2 fascicules : Analyses et résultats & Dossier professeur	17.50	12.15	
352	Tableur et mathématiques au Collège	12,20	9,90	
451	Concours Australien de mathématiques	15,85	11	
250/	Panoramas de compétitions mathématiques			
*251	Panoramath 96 & Panoramath 2	25,90	12,50	
	Lycée			
*138	Statistiques en classe de seconde	8.70	6	
*120	Classeur informatisé de documents math 12 disquettes			
	Version 10 installations, port compris	45,95	30,50	
	Version 26 installations, port compris	91,45	61	
	CD-Rom de mise à jour	10,65	7,60	
90/	Série EVAPM : Evaluation 1 ^{re} (cinquième chez nous!)			
107/108	3 fascicules	21.35	14.50	
*305	GALION-Thèmes Seconde : 10 thèmes programme 2000	11,45	9,90	
*450	MathÉvasion : 46 activités en bandes dessinées	7,60	5,35	
	Avec CABRI, faire de la géométrie en jouant			
	2 tomes déjà paru	17,55	10,65	
*129	Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaires	9.90	6.85	
121	Maths en scène : Commentaires des 22 thèmes de l'expo « Mathématiques 2000 » utilisable indépendamment	11,00	7,60	
402	Jeux du Scientific American	20.60	14.50	

<code>PORT</code> (prix indicatif) : 1 brochure : 2,50 €; 2 ou 3 brochures : 4,00 € et au-dessus de 3 : 6,50 €

La révolution des corps et l'histoire de l'hyperboloïde

M. ROELENS,

Lerarenopleiding secundair onderwijs groep 1, Katholieke Hogeschool Limburg, Diepenbeek; Maria Boodschaplyceum, Brussel.

Les corps de révolution sont des objets bien connus dans notre enseignement des mathématiques. Bien souvent, il ne s'agit que de la révolution d'une figure plane ou d'une courbe plane autour d'un axe du même plan. La situation devient bien plus palpitante lorsque nous considérons la révolution de tout un corps. Qu'obtient-on, par exemple, en faisant tourner une pyramide autour d'une de ses arêtes (en imaginant qu'en tournant elle laisse une « trace » dans l'espace)? Ces « révolutions corporelles » nous amèneront à un bel épisode de l'histoire des mathématiques, avec comme cerise sur le gâteau une démonstration belge, datant de 1826, d'une propriété des sections coniques.

1. La révolution d'un cube

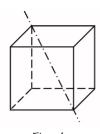


Fig. 1

Un cube tourne autour d'une de ses diagonales spatiales (figure 1) en laissant une trace dans l'espace. Décrire de façon précise le corps de révolution engendré. C'est un problème que j'ai posé plusieurs fois à des élèves (de 17-18 ans) ou à de futurs professeurs.

Chaque groupe d'élèves ou d'étudiants dispose d'un cube. Certains d'entre eux procèdent spontanément de façon expérimentale, en faisant tourner le cube comme une toupie sur un de ses sommets. D'autres

n'utilisent le cube que comme support pour un raisonnement géométrique. Tous découvrent bien vite que le solide de révolution comporte deux cônes.

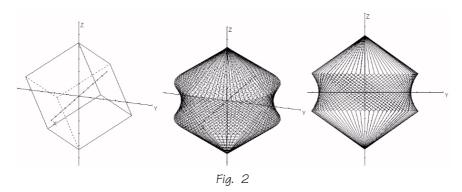
Adresse de l'auteur: Michel Roelens, Blijde Inkomststraat 49, 3000 - Leuven.

courriel: Michel.Roelens@ler.khlim.be

Géométre

Ces cônes sont engendrés par la révolution des arêtes qui sont sécantes avec l'axe. Après quelques tâtonnements, ils se rendent compte qu'il y a encore « quelque chose » entre ces deux cônes. Il s'agit d'un morceau d'hyperboloïde de révolution à une nappe, engendré par la révolution des arêtes qui sont gauches par rapport à l'axe. Imaginons que les élèves aient déjà, dans un cours antérieur, rencontré cette surface, dont la forme est celle d'une tour de refroidissement de centrale nucléaire.

La figure 2 montre quelques phases d'une simulation à l'aide du logiciel « Doorzien $(^1)$ » à gauche le cube avant la révolution, l'axe étant placé verticalement, au centre le corps de révolution et à droite la vue de face de celui-ci. Dans cette simulation, la révolution a eu lieu par étapes de 5° et non de façon continue.



Dans l'énoncé, on demande de décrire « de façon précise » le corps engendré. Certains élèves ne s'arrêtent pas ici et décident de chercher les dimensions du corps de révolution : le rayon et la hauteur des deux cônes, la hauteur de la partie hyperboloïdale et le rayon de la « taille » (le plus petit cercle de révolution de l'hyperboloïde).

Prenons comme unité de longueur l'arête du cube. Le rayon r et la hauteur h du cône peuvent être calculés, entre autres, en utilisant des proportionnalités dans le triangle rectangle de la figure 3 page 55 :

$$r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0.82$$
 et $h = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.58$.

⁽¹⁾ Disponible sur http://www.fi.uu.nl/wisweb/lesmateriaal/overig/doorzien/

Remarquons que la hauteur du cône est exactement un tiers de la diagonale spatiale entière. Autrement dit, les trois parties du corps de révolution ont la même hauteur. Ceci était prévisible : si l'on met la diagonale spatiale du cube en position verticale sur une table, toutes les arêtes ont la même pente par rapport à la table ...

Le rayon t de la taille de l'hyperboloïde est la distance minimale entre l'axe de révolution et une des arêtes gauches, ou encore : la distance entre l'axe de révolution et le milieu d'une de ces arêtes gauches.

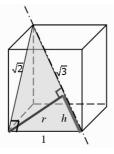


Fig. 3

Dans la figure 4, on voit clairement que t est la demi-longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, donc :

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71.$$

Avec ces données, des élèves initiés au calcul intégral pourraient établir une équation pour la section de l'hyperboloïde avec un plan passant par l'axe (c.à.d. l'hyperbole de la « vue de face »), afin de calculer le volume du corps de révolution. Ils trouveraient :

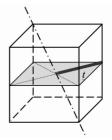


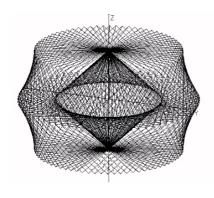
Fig. 4

$$V = 2 \cdot V_{c\hat{o}ne} + V_{hyp.} = 2 \cdot \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{5\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1,81.$$

2. Quelques autres révolutions de corps

Rien ne nous empêche de faire tourner le cube autour d'autres axes ou de faire tourner d'autres corps. La figure 5 page 56 montre le corps de révolution obtenu en faisant tourner un cube autour d'une diagonale d'une face. Les « tailles » des hyperboloïdes coïncident avec les faces circulaires qui délimitent le corps de révolution. (Le lecteur découvrira aisément que ceci est évident.) La figure 5 est obtenue en faisant tourner un cube composé d'arêtes (et non, par exemple, un cube en bois), c'est pourquoi on voit, en outre, deux cônes à l'intérieur du corps.

55



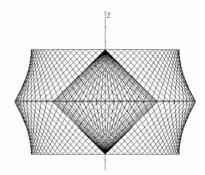
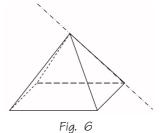


Fig. 5

Je lance un défi au lecteur : décrivez le corps de révolution obtenu en faisant tourner une pyramide de base carrée et de faces équilatérales autour d'une des arêtes qui relient la base au sommet (figure 6). La détermination de l'emplacement et du rayon de la « taille » n'est pas évidente...



3. Projections orthogonales de l'hyperboloïde

Ces révolutions de corps ont suscité en moi des questions sur le lien entre la droite qui tourne et l'hyperbole vue de face. Y a-t-il une relation simple entre, d'une part, la pente de la droite qui tourne et, d'autre part, la forme de l'hyperbole (qui est déterminée par l'excentricité ou par la pente des asymptotes)?

Afin d'y voir plus clair, j'ai dessiné en Cabri les trois projections orthogonales coordonnées d'un segment qui tourne autour d'un axe vertical (figure 7 page 57). Le petit cercle représente la « taille ». En vue de dessus, le segment est tangent à la taille. En déplaçant le point de contact sur la taille, on peut faire tourner le segment (à la main ou à l'aide d'une animation). Si le segment qui tourne laisse une trace, on voit apparaître les projections de l'hyperboloïde $(^2)$.

 $^(^2)$ Cette figure Cabri est disponible sur www.uitwiskeling.be.

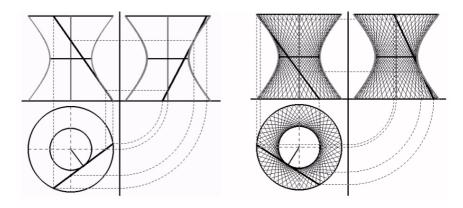


Fig. 7

L'hyperbole que l'on voit en vue de face est l'enveloppe des vues de face de la droite qui tourne. Autrement dit, la vue de face de la droite qui tourne est toujours tangente à l'hyperbole. La pente de la vue de face de la droite qui tourne est minimale lorsque cette droite est « frontale ». Il s'ensuit que la vue de face d'une position frontale de cette droite est une asymptote de l'hyperbole et que le contact se fait, dans ce cas, à l'infini (figure 8 page 57).

(En effet, imaginons que la vue de face de la droite frontale touche vraiment l'hyperbole; alors il y aurait, en vue de face, des droites qui toucheraient l'hyperbole plus loin du centre et ces droites auraient une pente inférieure.) La pente des asymptotes est donc égale à la pente (par rapport à un plan horizontal) de la droite qui tourne.

Ces projections coordonnées nous permettent aussi de voir que par chaque point de l'hyperboloïde passent deux droites qui sont

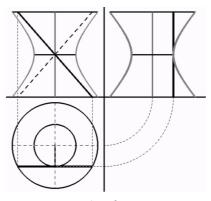


Fig. 8

situées sur l'hyperboloïde (deux « génératrices »). En effet, prenons (les trois projections d')un point arbitraire situé sur le segment dans une de ses positions. En vue de dessus, c'est un point hors de la « taille » et à l'intérieur

du grand cercle. Par ce point, on peut dessiner, outre le segment sur lequel nous avons pris le point, une autre tangente à la taille. Par chaque point de l'hyperboloïde passent donc deux génératrices : l'une des deux est « notre » droite qui est « de passage » en tournant, l'autre est une des positions de l'autre droite tournante qui engendre le même hyperboloïde.

4. Abrégé d'histoire de l'hyperboloïde

ARCHIMÈDE (3e siècle avant J.C.) calcula déjà le volume d'un segment d'hyperboloïde. L'hyperboloïde (à une ou à deux nappes) était obtenu par la révolution d'une hyperbole autour d'un de ses axes.

Au 17º siècle, Sir Christopher Wren, l'architecte de la Saint Paul's Cathedral à Londres, démontra que l'hyperboloïde est une surface doublement réglée, c.-à.-d. contenant, par chaque point, deux droites génératrices.



Fig. 9

L'officier belge PIERRE GER-MINAL DANDELIN (19e siècle) est bien connu, au même titre qu' ADOLPHE QUÉTELET, pour ses boules : si on coupe un cône par un plan, il y a, à l'intérieur du cône, deux boules qui touchent aussi bien le cône que le plan. Les points de contact de ces boules avec le plan sont les foyers de la section conique.

La figure 9 illustre ce théorème belge pour le cas d'une ellipse : en s'appuyant sur le fait que deux segments tangents à une boule et partant d'un même point sont égaux, on démontre que la somme des distances d'un point quelconque de la conique aux deux points de contact

est égale à la distance entre les deux cercles de contact des boules dans le cône, mesurée le long d'une génératrice du cône.

Quelques années plus tard, en 1826, il généralisa ce résultat pour un hyperboloïde au lieu d'un cône. Une section plane d'un hyperboloïde est toujours une conique! Et la démonstration avec les boules se généralise facilement!

De plus, il découvrit une démonstration « spatiale », à l'aide de l'hyperboloïde, des théorèmes de Pascal et de Brianchon (figure 10 et 11).

• Théorème de Pascal : si l'on rejoint six points A,B,C,D,E et F d'une conique pour en faire un hexagone (pas nécessairement convexe), les points d'intersection S,T et U (voir la figure 10) sont toujours colinéaires.

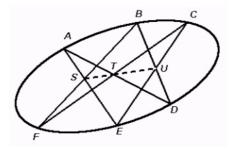


Fig. 10

• Le théorème de Brianchon n'est autre que le théorème dual de celui de Pascal.

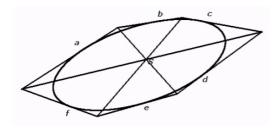


Fig. 11

On l'obtient donc en remplaçant dans l'énoncé du théorème de PASCAL les points A, B, ... de la conique par des tangentes a, b, ...; les droites

rejoignant les points A,B,\ldots par les points d'intersection des tangentes correspondantes; les points d'intersection S,T,U par les droites s,t,u qui rejoignent ces points d'intersection et finalement la colinéarité des points S,T,U par l'affirmation que les droites s,t,u sont concourantes. Ceci nous donne comme énoncé : si l'on forme un hexagone (pas nécessairement convexe) avec six tangentes à une conique, les droites s,t et u rejoignant les sommets opposés sont concourantes (voir la figure 11).

Ces deux théorèmes sont des propriétés projectives : ils se vérifient également dans le cas où certains points (d'intersection) partent à l'infini.

5. La démonstration du théorème de Pascal par Dandelin

Dandelin (1826) démontre les théorèmes plans de Pascal et de Brianchon par le biais d'un raisonnement spatial. Quoiqu'il s'agisse d'un raisonnement géométrique plutôt « visuel », Dandelin n'illustre son texte d'aucun dessin. Pendant la lecture de ce texte du dix-neuvième siècle, dont l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres m'avait envoyé une copie, j'étais bien obligé de faire des croquis afin de ne pas perdre le fil des idées. Parcourons la démonstration du théorème de Pascal, accompagné de dessins cette fois-ci.

Dandelin part de six points sur une conique (prenons le cas d'une ellipse), qu'il appelle D, I, D', I', D'' et I'' (figure 12). Il veut démontrer que les points d'intersection de DI et D''I', de D'I et D''I'' et de DI'' et D'I' sont colinéaires.

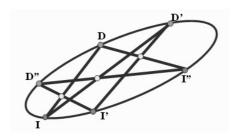


Fig. 12

D'abord, il démontre qu'il existe un hyperboloïde de révolution dont l'ellipse donnée est une section plane. Ensuite, il prend par les points D, D' et D''

une génératrice d'une des deux familles qu'il appelle « directe » et par les points l,l' et l'' une génératrice de l'autre famille qu'il appelle « indirecte » (figure 13). Il nomme ces génératrices d,d',d'',i,i' et i''.

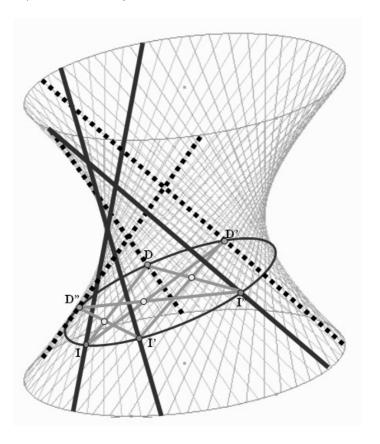


Fig. 13

Chaque génératrice de la famille directe coupe chaque génératrice de la famille indirecte (éventuellement à l'infini). En effet, on peut vérifier facilement qu'il y a, pour toute paire de génératrices de familles différentes, un plan par rapport auquel l'une des génératrice est symétrique à l'autre. Ces deux génératrices se rencontrent donc dans ce plan de symétrie (sauf si elles y sont parallèles; dans ce cas les deux génératrices symétriques sont également parallèles entre elles et se rencontrent donc à l'infini).

De plus, on peut vérifier que deux génératrices d'une même famille ne se coupent jamais.

La génératrice d passant par D coupe donc la génératrice i passant par I de sorte que d et i déterminent un plan. De même, d'' et i' déterminent un plan. La droite d'intersection des plans (di) et (d''i') contient les points U (intersection de d et i') et V (intersection de d'' et i), voir la figure 14.

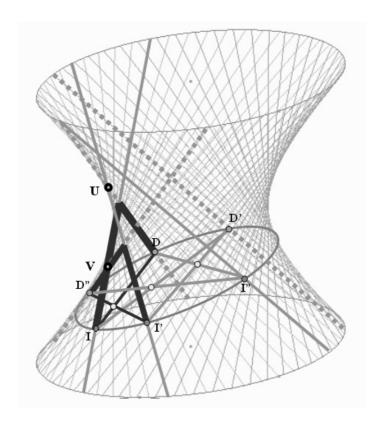


Fig. 14

De la même façon la droite d'intersection des plans d'i et d''i'' contient les points V et W (figure 15 page 63).

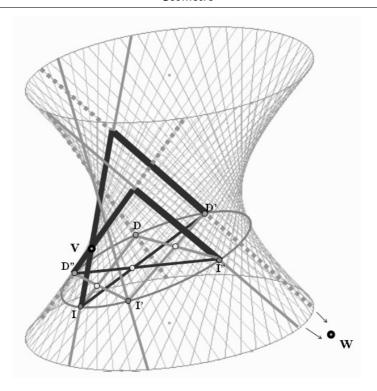


Fig. 15

Et la droite d'intersection de di'' et d'i' contient les points U et W (figure 16 page 64). Toutes ces droites d'intersection se trouvent par conséquent dans un même plan, le plan UWV!

Les trois points dont il s'agit dans le théorème de Pascal se trouvent également dans ce plan UVW. De plus, ils se trouvent dans le plan de l'ellipse! Ils font donc partie de l'intersection de ces deux plans et ainsi ils sont colinéaires! Ceci démontre le théorème de Pascal. On comprend maintenant pourquoi Dandelin utilise un hyperboloïde et non un cône : les trois points U,V et W seraient confondus au sommet et il n'y aurait pas de deuxième plan...

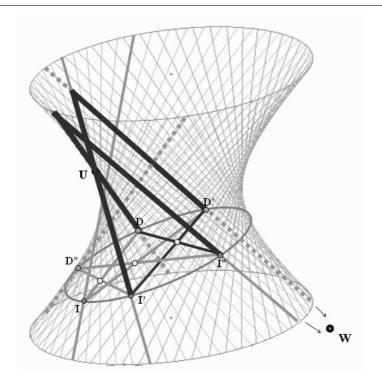


Fig. 16

Bibliographie

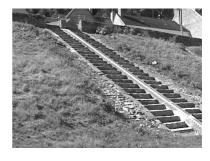
- [1] Dandelin, P. G., Mémoire sur l'hyperboloïde de révolution et sur les hexagones de Pascal et de M. Brianchon, Bruxelles, Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres, 1826, 14 pages.
- [2] Roelens, M., Wentelende lichamen en de hyperboloïde, Uitwiskeling, 2002, 19(1), 9-14.
- [3] Wernicke, B., Ein Ausflug in die räumiche Geometrie. Mathematiklehren, 1993, 60, 38-41.
- [4] http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00182/toepassing.xml? style=wisweb&language=nl (un 'applet' pour les corps de révolutions de courbes planes)

Dans nos classes

Jules Miewis

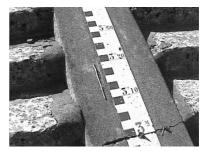
Les berges de la Loire

Non loin de l'abbaye de St- Martin de Tours — où Alcuin se retira après avoir inventé l'école pour ce sacré Charlemagne — le dernier fleuve sauvage d'Europe s'étire l'été entre gravières et grèves de sables. Quelques unes sont accessibles par des escaliers qui dévalent les « levées ».

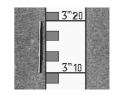


Au centre des marches, une échelle de crue a été installée. Comme celleci suit la pente de l'escalier, mais qu'elle souhaite indiquer directement la hauteur du fleuve, les graduations ont été adaptées en conséquence. Une bonne vingtaine de centimètres sépare par exemple la graduation de 3m10 de celle de 3m20.

Si nous pouvions « mesurer » avec une bonne précision cette distance, nous pourrions trouver la pente de l'escalier. Seulement notre équipement de vacancier n'a pas prévu de règle graduée dans la poche du maillot! Trouvons un petit fétu de paille facile à couper, et ajustons-le aux graduations.



Avec un peu de patience — et plusieurs fétus — nous arrivons à prendre la « vraie grandeur » de ce qui sur notre terrain pentu est renseigné comme valant 10 cm. Le plus difficile reste à faire : préserver le fétu jusqu'à ce que nous accédions à une règle graduée.

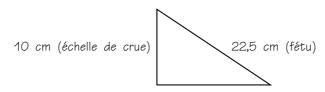


Le fétu de paille a survécu aux vacances et a été mesuré : sa longueur est de 22,5 cm. Quelle est donc la pente des berges de la Loire?

Dans nos classes



Voici donc une situation issue de la vie réelle des petits tourangeaux. Notre fétu de 22,5 cm mesure l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit vaut 10 cm.



Si l'on veut utiliser la définition classique de la pente d'une droite, nous devrons d'abord faire appel au théorème de Pythagore pour calculer la « base » de notre triangle.

base =
$$\sqrt{22,5^2 - 10^2}$$
 = 20,156 cm

La pente de la berge vaut alors

$$\frac{10}{20,156} = 0,496,$$

ce qui correspond à la tangente trigonométrique de l'angle à la base de l'escalier. Cet angle vaut

arctg 0,496
$$\approx$$
 26°23′

Si par contre, on utilise la trigonométrie, on sait que le sinus de l'angle à la base de l'escalier vaut le rapport de la distance sur l'échelle de crue à la longueur du fétu :

$$\sin \alpha = \frac{10}{22.5} = 0,444$$

$$\alpha = \arcsin 0,444 \approx 26^{\circ}23'$$

Et la pente vaut dans ce cas :

tg
$$26^{\circ}23' \approx 0,496$$
.

Problèmes

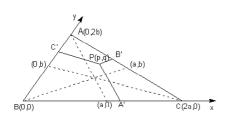
C. Festraets

Aires orientées

Problème nº 277 de Mathématique et Pédagogie nº 141.

Soit ABC un triangle dans le plan et P un point quelconque. On note A' la projection de P sur BC parallèlement à la médiane issue de A, et de même pour B' et C'. Soit A_1 (respectivement B_1 et C_1) l'aire orientée du triangle PBA' (resp. PCB' et PAC') et A_2 (resp. B_2 et C_2) celle de PA'C (resp. PB'A et PC'B). Démontrer que $A_1 + B_1 + C_1 = A_2 + B_2 + C_2$.

Solution de J. ANSEEUW de Roeselare



Avec le système d'axes représenté sur la figure, soit $\widehat{ABC} = \theta$, A(0,2b), B(0,0), C(2a,0) et P(p,q). Orientons le plan dans le sens trigonométrique.

Aire $ABC = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b \cdot \sin \theta = 2ab \sin \theta$.

Les coefficients angulaires des médianes issues de A, B et C sont respectivement $m_A=-\frac{2b}{a},\ m_B=\frac{b}{a}$ et $m_C=-\frac{b}{2a},$

d'où
$$PA' \equiv y - q = -\frac{2b}{a}(x - p)$$
 et de là $A'\left(\frac{aq}{2b} + p, O\right)$.

$$\begin{split} \mathcal{P}B' &\equiv y - q = \frac{b}{a}(x - p) \\ AC &\equiv \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1 \end{split} \Rightarrow B'\left(a + \frac{bp - aq}{2b}, b - \frac{bp - aq}{2a}\right) \\ \mathcal{P}C' &\equiv y - q = -\frac{b}{2a}(x - p) \text{ et de là } C'\left(0, \frac{bp}{2a} + q\right) \end{split}$$

D'où

$$A_{1} = \frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} p & q & 1\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{aq}{2b} + p & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^{2}q^{2} + 2abpq}{4ab}\sin\theta$$

$$\begin{vmatrix} p & q & 1\\ p & q & 1 \end{vmatrix}$$

$$B_{1} = \frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} p & q & 1\\ 2a & 0 & 1\\ a + \frac{bp - aq}{2b} & b - \frac{bp - aq}{2a} & 1 \end{vmatrix} = \frac{4a^{2}b^{2} - 4ab^{2}p - a^{2}q^{2} + b^{2}p^{2}}{4ab}\sin\theta$$

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C.Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse courriel festraetscl@brutele.be.

$$C_{1} = \frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} p & q & 1\\ 0 & 2b & 1\\ 0 & \frac{bp}{2a} + q & 1 \end{vmatrix} = \frac{4ab^{2}p - b^{2}p^{2} - 2abpq}{4ab}\sin\theta$$

Et on obtient $A_1 + B_1 + C_1 = ab \sin \theta$, c'est-à-dire la moitié de l'aire du triangle ABC. Donc, $A_1 + B_1 + C_1 = A_2 + B_2 + C_2$.

Bonnes solutions de J. FINOULST de Diepenbeek et J. RASSE de Méan.

Suite et fonction

Problème nº 278 de Mathématique et Pédagogie nº 141.

Déterminer une fonction f(n) telle que le n^e terme de la suite 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, ... soit donné par [f(n)].

Solution de P. BORNSZTEIN de Maison-Lafitte (France)

On note $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite décrite dans l'énoncé.

$$\underbrace{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\cdots,k-1,\cdots,k-1}_{\frac{k(k-1)}{2}}|k,k,\cdots,k|,k+1,\cdots$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = k$ si et seulement si

$$\frac{k(k-1)}{2} + 1 \le n < \frac{k(k+1)}{2} + 1$$

$$k^2 - k \le 2(n-1) < k^2 + k$$

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \le 2n - \frac{7}{4} < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$(2k-1)^2 \le 8n - 7 < (2k+1)^2$$

ou encore, puisque $k \geqslant 1$:

$$k \leqslant \frac{1 + \sqrt{8n - 7}}{2} < k + 1$$

c'est-à-dire

$$k = \left[\frac{1 + \sqrt{8n - 7}}{2} \right]$$

Problèmes

Ainsi la fonction f définie par $f(n) = \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, convient.

Remarque: Certains lecteurs ont traité leurs inégalités d'une autre manière et aboutissent à des fonctions qui me semblent tout aussi correctes, par exemple, $\sqrt{2n} + \frac{1}{2}$, ou encore $\frac{\sqrt{6n+1}+1}{2}$.

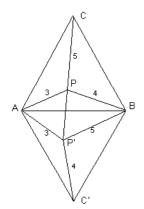
Il y a donc beaucoup de **bonnes solutions**, celles de J. ANSEEUW de Roeselare, R. CUCULIERE de Clichy le Garenne, J. FINOULST de Diepenbeek, P. LE GALL de Metz, J. LIEVENS de Liège, A. PATERNOTTRE de Boussu et J. RASSE de Méan.

Triangle équilatéral

Problème nº 279 de Mathématique et Pédagogie nº 1241.

Un point P est situé à l'intérieur d'un triangle équilatéral et les distances de P aux trois sommets sont 3, 4 et 5. Déterminer l'aire du triangle.

Solution de J. ANSEEUW de Roeselare



Considérons la rotation de 60° , de centre A et qui applique C sur B, B sur C' et P sur P'.

Le triangle APP' est équilatéral car |AP| = |AP'| = 3 et $\widehat{PAP'} = 60^\circ$, d'où |PP'| = 3. Dès lors, le triangle PP'B, de côtés 3, 4, 5, est rectangle en P et il s'ensuit que $\widehat{APB} = 150^\circ$. Ce qui permet de calculer la longueur de [AB]:

$$|AB|^{2} = |AP|^{2} + |PB|^{2} - 2|AP| \cdot |BP| \cdot \cos \widehat{APB}$$

$$= 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 25 + 12\sqrt{3}$$

Et aire $ABC = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}(25 + 12\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3} + 36}{4}$.

Problèmes

P. BORNSZTEIN de Maisons-Lafitte, P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek, A. PATERNOTTRE de Boussu et J. RASSE de Méan ont aussi envoyé de **bonnes solutions**, mais en général plus compliquées.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir pour le 1er mars 2004 au plus tard. Ces solutions peuvent être rédigées comme d'habitude sur papier (feuilles séparées pour chaque problème), mais elles peuvent aussi m'être envoyées par courrier électronique en format Word ou LEX.

286. Facile

Résoudre l'équation suivante

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(x - z)$$

où x, y et z sont des entiers.

287. Un, deux, trois

Soient a, b, c et d des réels strictement positifs. Démontrer que

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}$$

(proposé à l'OMI en 1993)

288. Cordes

Dans un cercle de centre O, on trace une corde [AB] de milieu M. Par M, on mène deux autres cordes [CD] et [EF]. DF coupe AB en P et CE coupe AB en Q. Démontrer que |MP| = |MQ|.

(Ce problème est connu sous le nom de « Problème du papillon »).

Olympiades

C. Festraets

Les Olympiades Internationales de Mathématiques se sont terminées fin juillet à Tokyo. 457 étudiants provenant de 82 pays y ont participé. Comme d'habitude, six problèmes, notés chacun sur 7, leur ont été proposés; vous en trouverez les énoncés ci-dessous. Trois étudiants seulement ont obtenu le maximum 42 : un Chinois et deux Vietnamiens. Le top 3 du classement inter-pays est : Bulgarie (avec 227 points), Chine (avec 211 points) et USA (avec 188 points). La Belgique se classe 37^e avec 70 points.

Les étudiants francophones se sont bien défendus. Cédric Troessaert de l'Institut Centre Ardenne à Libramont obtient une médaille d'argent, Antony Trinh de l'Athénée Robert Catteau à Bruxelles obtient une médaille de bronze et Timothy Marquis, élèves de 5^e de l'Institut de Dames de Marie à Woluwé-St-Lambert obtient une mention honorable.

Le problème 1 est très facile, les problèmes 2, 4 et 5 sont d'un niveau moyen de difficulté et les problèmes 3 et 6 sont vraiment très difficiles et n'ont d'ailleurs été résolus que par une vingtaine d'étudiants.

Problème 1

Soit A un sous-ensemble de l'ensemble $S=\{1,2,\cdots,1\,000\,000\}$ ayant exactement 101 éléments. Montrer qu'il existe des nombres t_1,t_2,\cdots,t_{100} dans S, tels que les ensembles :

$$A_i = \{x + t_i | x \in A\}$$
 pour $j = 1, 2, ..., 100$

soient deux à deux disjoints.

Problème 2

Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (a,b) tels que :

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

soit un entier strictement positif.

Problème 3

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C.Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse courriel festraetscl@brutele.be.

Olympiades

On se donne un hexagone convexe dans lesquel deux côtés opposés quelconques ont la propriété suivante : la distance entre leurs milieux est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ fois la somme de leurs longueurs. Montrer que tous les angles de cet hexagone sont égaux. (Un hexagone convexe ABCDEF a trois paires de côtés opposés : AB et DE, BC et EF, CD et FA.)

Problème 4

ABCD est un quadrilatère convexe, inscriptible. Soient P, Q et R les pieds des perpendiculaires issues de D, respectivement, sur les côtés BC, CA et AB. Montrer que PQ = QR si et seulement si les bissectrices des angles \widehat{ABC} et \widehat{ADC} se coupent sur AC.

Problème 5

Soit n un entier strictement positif et x_1, x_2, \dots, x_n des nombres réels tels que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$.

(a) Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|\right)^2 \leqslant \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2$$

(b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si x_1, x_2, \cdots, x_n est une suite arithmétique.

Problème 6

Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe un nombre premier q tel que pour tout entier n, le nombre n^p-p n'est pas divisible par q.

Voici ensuite les problèmes posés lors de la 28^e Olympiade Mathématique Belge. Les solutions des trois premiers problèmes sont celles d'élèves participant à cette épreuve.

Problème 1

Est-il possible de disposer les nombres entiers 1, 2, 3, \dots , 16 sur

- (a) une droite
- (b) un cercle

de façon que la somme de deux nombres voisins soit un carré parfait? Si oui, donner un exemple.

Solution de Yves DEBONGNIE, élève de 2^e année au Collège du Christ Roi à Ottignies

Olympiades

Commençons par noter, pour chaque nombre, les nombres compris entre 1 et 16 inclus qui peuvent lui être ajouté pour que le résultat soit un carré parfait.

Je le noterai comme ceci « n:(x;y) », n étant le nombre considéré et x, y les nombres auxquels il peut s'additionner.

1: (3; 8; 15)	5: (4;11)	9: (7;16)	13 : (3;12)
2: (7;14)	6 : (3; 10)	10 : (6; 15)	14 : (2;11)
3 : (6; 13)	7:(2;9)	11 : (5; 14)	15 : (1;10)
4 : (5;12)	8:(1)	12 : (4; 13)	16 : (9)

- (b) Nous remarquons que 8 et 16 ne peuvent s'additionner qu'avec un nombre; il sera donc impossible de réaliser un tel cercle car sur un cercle, chaque nombre a deux voisins.
- (a) Nous remarquons également que tous les nombres, exceptés 1, 8 et 16, ont deux nombres auxquels ils peuvent s'additionner. Puisque 8 et 16 ne peuvent avoir qu'un seul voisin, ils seront placés aux extrémités sur la droite.

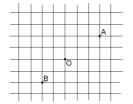
Nous avons donc : 8 1 \cdots 9 16Puisque 9 ne peut avoir que deux voisins 7 et 16, nous pouvons affirmer que : 8 1 \cdots 7 9 16

En continuant ainsi, on trouve:

8 1 15 10 6 3 13 12 4 5 11 14 2 7 9 16 qui est la seule solution, car 8 et 16 ne peuvent pas bouger aux extrémités, donc 1 et 9 non plus, ni 7, et ainsi de suite pour tous les nombres compris entre le 8 et le 16.

Problème 2

Dans un réseau illimité à mailles carrées de côté 1, on définit la distance entre deux sommets du réseau comme la longueur du plus court chemin qui les sépare en suivant les lignes du réseau. Ainsi, sur la figure ci-dessous, la distance de O à A est 5 et celle de O à B est 4.



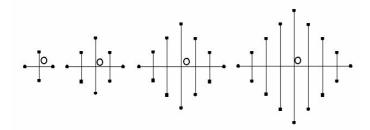
Combien y a-t-il de sommets du réseau situés à

- (a) la distance 1 de 0?
- (b) la distance 10 de 0?
- (c) la distance n de O? (où n est un nombre naturel)

Solution de Yves DEBONGNIE, élève de 2^e année au Collège du Christ Roi à Ottignies

Un chemin pour aller de O à un point ne peut prendre que deux directions non opposées (s'il y en a trois ou plus, on revient sur son chemin et il y a donc plus court), et deux chemins pour aller à un point comptent le même nombre d'arêtes parcourues dans le même sens.

En considérant cela, on peut affirmer que les figures suivantes :



montrent tous les points respectivement situés à 1, 2, 3 et 4 de distance de 0, car tous les chemins possibles ont d'abord été construits soit vers la gauche, soit vers la droite et ensuite soit vers le haut, soit vers le bas.

A chaque fois que l'on augmente la distance de 1, le nombre de points augmente de 4. En effet, les points représentés sur les verticales montent ou descendent d'une unité et leur nombre ne change pas, tandis que les deux points représentés à gauche et à droite sur l'horizontale ont trois directions possibles, leur nombre augmente donc de 4.

Il y a 4 points à la distance 1 de 0 et à chaque augmentation de 1 de la distance, le nombre de points augmente de 4, d'où la règle : soit n la distance qui sépare les points de 0, avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$, alors le nombre de points situés à cette distance sera 4.n. Avec cette régle, on trouve facilement le nombre de points situés

à la distance 1:4,

à la distance 10: 40.

Problème 3

L'ensemble $E = \{1, 2, 3, ..., 2002, 2003\}$ est décomposé en deux parties A et B :

 $-\ \mbox{A}$ comprend les nombres de E dont la somme des chiffres est impaire;

Olympiades

- B comprend les nombres de E dont la somme des chiffres est paire. Si a est la somme des nombres appartenant à A et si b est la somme des nombres appartenant à B, quelle est la valeur de a-b?

Solution de François SANCHEZ ZARZA, élève de 2º au C.S. Sacré-Coeur de Linthout à Woluwé-St-Lambert

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 23, 25, 27, 29, \ldots\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 24, 26, 28, \ldots\}$$

Appelons « nombres P » ceux dont la somme des chiffres est paire et « nombre I » ceux dont la somme des chiffres est impaire. Il y a 5 nombres I et 4 nombres P dans [1,9]. Ensuite, dans [10,19], [20,29], [30,39], ... il y aura toujours 5 nombre I et 5 nombres P.

$$a = 25 + 120 + 225 + 320 + 425 + 520 + \cdots$$

 $b = 20 + 125 + 220 + 325 + 420 + 525 + \cdots$

Jusqu'à 2000 non compris, a et b comportent 200 termes. Comme les deux sommes comprennent les mêmes termes à l'exception des unités, on peut conclure que, jusqu'à 2000 non compris, leur différence sera égale à $(100\times25+100\times20)-(100\times20-100\times25)=0$, car il y a dans A (jusqu'à 2000) 100 paquets de nombres dont la somme des chiffres des unités est 25 et 100 paquets de nombres dont la somme des chiffres des unités est 20, et de même dans B.

Donc,
$$a - b = (2001 + 2003) - (2000 + 2002) = 4004 - 4002 = 2$$

Problème 4

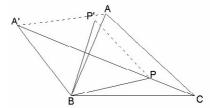
ABC est un triangle dont tous les angles sont aigus. La rotation de centre B et d'angle + 60° (dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) applique A sur A'. Par cette rotation un point P de CA' est appliqué sur le point P'.

- (a) Prouver que la somme des distances de P aux sommets du triangle ABC est égale à |P'A'| + |P'P| + |PC|.
- (b) Expliquer comment construire P sur CA' de manière que cette somme soit la plus petite possible.

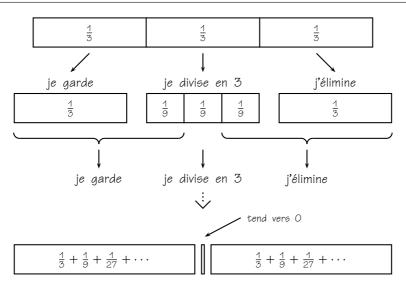
Solution

(a) Le triangle ABC est orienté dans le même sens que la rotation.

Remarquons que, comme l'angle de la rotation vaut 60° , les triangles BAA' et BPP' sont équilatéraux. La rotation applique PA sur P'A', donc |PA| = |P'A'|. Le triangle BPP' est équilatéral, donc |PB| = |P'P|. D'où |PA| + |PB| + |PC| = |P'A'| + |P'P| + |PC|.



(b) |P'A'| + |P'P| + |PC| est minimum quand A', P', P et C sont alignés. Il faut donc construire un triangle équilatéral dont un sommet est B et les deux autres situés sur A'C. Ce qui peut se faire de nombreuses façons. Par exemple, de B on abaisse la perpendiculaire sur A'C et avec B comme sommet, on trace de part et d'autre de cette perpendiculaire un angle de 30° ; les côtés de ces angles coupent A'C en P et P'



donc
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{2}$$

J. Miewis

A. Chevalier, D. Degen, Ch. Docq, M. Krysinska, G. Cuisinier, Ch. Hauchart, Référentiel de mathématiques, De Boeck et Larcier, s.a., 448 pages, Bruxelles, 2002, ISBN: 2-8041-4052-0.

Les six auteurs de ce livre sont membres du GEM. Ils mettent ici en commun le fruit de nombreuses années de recherche dans ce groupe.



Ce « référentiel » présente une <u>théorie</u> des mathématiques enseignées aux élèves de douze à seize ans. Il est conçu pour accompagner les élèves du secondaire, les enseignants en fonction ou en formation ainsi que les personnes désireuses de disposer d'un exposé général de mathématiques (parents, étudiants du supérieur,...). La conception didactique à la base de l'ouvrage est celle de la construction du savoir : les concepts et leurs propriétés sont présentés en s'appuyant sur des intuitions premières, des images mentales, des exemples et

de nombreuses figures. De l'aveu des auteurs, l'accès au sens a été privilégié plutôt que la rigueur de définitions formelles ou le recours trop fréquent au symbolisme mathématique très (trop) chargé.

Les concepts rencontrés année après année sont reliés entre eux et structurés au travers de 14 chapitres, suivis d'une bibliographie, d'un index et d'une table des matières.

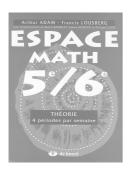
1. Nombres. La perception première des nombres est l'outil de comptage et de mesure symbolisé par des abaques et des règles graduées. Les naturels, les entiers, les rationnels, les irrationnels et les réels sont construits pour conduire à un concept unifié de nombre. Les différentes opérations associées sont examinées avec beaucoup de soin dans chacune des familles de nombres. Ce chapitre utilise volontiers des illustrations géométriques (les aires pour les diviseurs, les treillis pour la décomposition en facteurs premiers, les aires encore pour les fractions équivalentes, le théorème de Thales implicite pour graduer des segments). Dans l'étude des rationnels, une grande attention a été

- portée aux conversions d'écriture (passage entre l'écriture fractionnaire et l'écriture décimale, notation scientifique, pourcentages).
- 2. Objets de base de la géométrie plane. On y présente la droite et les angles, support des isométries et des figures planes, ainsi que les outils qui permettent de les construire et les manipuler. Équerre dans la construction de la droite perpendiculaire, équerre et règle dans la construction de la droite parallèle, règle graduée et compas pour le disque et le cercle, rapporteur pour la mesure des angles. On y découvre une convention d'écriture (de tout l'ouvrage) des mesures d'amplitude d'angles en degré décimaux (une simple note précise l'existence du grade; le radian est abordé au chapitre des fonctions trigonométriques).
- 3. <u>Isométries</u>. Les frises et les papiers peints dégagent les mouvements élémentaires tels que glisser, tourner et retourner. La construction, l'image, la réciproque et les figures invariantes sont examinées pour la translation, la symétrie orthogonale, la symétrie centrale, la rotation puis d'une manière générale pour les isométries du plan.
- 4. Figures géométriques planes. Ce chapitre étudie les définitions et les propriétés élémentaires des polygones, des triangles et des quadrilatères. La construction des polygones réguliers convexes est expliquée par la technique « Logo » certes intéressante, mais les méthodes de constructions plus traditionnelles notamment dans le cas du pentagone auraient pu être signalées. On aborde longuement la constructibilité d'un triangle à partir de certaines données (le « cas indéterminé » n'a pas été oublié!), ce qui introduit très naturellement les critères d'isométrie. Les droites particulières du triangle et les triangles particuliers sont développés.
 - Mention est faite du cerf-volant, bien utile au classement des quadrilatères ce qui montre un réel souci du détail. Un paragraphe intitulé « Familles d'angles » aborde les angles entre deux parallèles et une sécante, la somme des amplitudes des angles d'un polygone. Les pavages du plan et les angles inscrits dans un cercle terminent ce chapitre.
- 5. Algèbre. Excellente synthèse des « objets » de l'algèbre dans des contextes de nombres, de géométrie et de physique. Les expressions algébriques de base et les identités sont reliés à leur interprétation géométrique. L'équivalence d'expressions algébriques, les opérations autorisées ou non, les produits remarquables et les opérations sur les fractions algébriques viennent ensuite. Les équations à une inconnue

- (premier et second degré), les équations du premier degré à deux inconnues, les inéquations à une inconnue font l'objet de paragraphes séparés.
- 6. Projections parallèles Figures semblables. Ce chapitre repose sur l'observation de l'ombre au soleil d'un bâton planté de clous à distance régulière pour modéliser les projections parallèles. On y établit le théorème de THALÈS. Viennent ensuite les similitudes des rectangles (formats d'écran de télévision, de photos, de papier), des triangles et des polygones.
- 7. Théorème de Pythagore. Énoncé en termes d'aires et de longueurs. Quelques puzzles ou démonstrations par de subtils découpages.
- 8. <u>Géométrie des coordonnées.</u> Base de la géométrie analytique, ce chapitre se partage entre repérage d'un point et calcul de distances. Les coordonnées permettent d'établir les équations de lieux de points dans le plan : la droite, le cercle et la parabole.
- 9. Fonctions. La fonction apparaît comme un moyen (un tableau, un graphique, une formule) qui permet d'exprimer la dépendance d'une grandeur par rapport à une autre. On rappelle une des plus simples des dépendances : le tableau de proportionnalité. Quelques fonctions sont étudiées dans des contextes : fonction du premier degré (loi de Hooke, du second degré (aire de carrés), ..., puis on s'intéresse à des « outils » pour décrire des fonctions : racine, signe, parité, maximum, ... Les fonctions de référence sont passées en revue : fonction identique, fonction puissance, fonction valeur absolue, fonction racine carrée, la famille des fonctions du premier degré, du second degré, les fonctions sinus et cosinus.
- 10. Statistique descriptive. Notions de bases et vocabulaire spécifique utilisé par les statisticiens.
- 11. <u>Trigonométrie</u>. Rapports trigonométriques dans un triangle rectangle, extension aux triangles quelconques (formule des sinus et généralisation du théorème de Pythagore), angles orientés et cercle trigonométrique.
- 12. <u>Vecteurs.</u> Étude des grandeurs orientées, somme de deux vecteurs, produit d'un vecteur par un nombre, composantes d'un vecteur. Quelques expressions vectorielles de propriétés (milieu de segment, alignement de trois points, parallélisme de deux droites, théorème de THALES et réciproque, théorème du milieu, figures homothétiques).

- 13. La géométrie de l'espace. Définition et développement des objets de l'espace : polyèdres, cube, prisme, pyramide, cylindre, cône. Détermination de plans et droites de l'espace sur des cubes ou des prismes. Différentes représentations planes de l'espace sont signalées : perspective à point de fuite, perspective cavalière ou axonométrique, perspective avec trois vues coordonnées. Le chapitre se termine par des sections planes de cubes et de pyramides.
- 14. Longueurs, aires et volumes. Installation de l'idée que « mesurer, c'est comparer ». Périmètres et aires de figures planes, aires et volumes de solides.

A. Adam, Fr. Lousberg, avec la participation de B. Baudelet, S. Bouzette et Ph. Close, Espace Math 5^e , 6^e - 4 périodes par semaine, De Boeck et Larcier, s.a., 250+137 pages, Bruxelles, 2003, ISBN: 2-8041-4289-2.



Cette nouvelle collection remplace les « Espace Math 54 et 64 » qui ont été allégés et revus en fonction des nouveaux programmes. Elle se compose d'un manuel regroupant la théorie pour les 5e et 6e - 4 périodes; et d'un coffre à outils qui propose une synthèse des principales connaissances des deux premiers degrés, des activités pour découvrir, des exercices pour appliquer, des exercices pour s'autocontrôler (avec leurs solutions) et des exercices pour chercher. Ce dernier peut se décomposer en feuilles préperforées.

Les professeurs des réseaux de la Communauté française et de l'Enseignement libre catholique pourront facilement repérer dans la table des matières les chapitres qui les concernent en fonction de l'année dans laquelle ils enseignent.

En début de chaque chapitre sont énumérées les compétences terminales relatives à la matière. Au niveau caculatoire, de nombreuses rubriques « Comment faire » guident l'élève; elles sont suivies par les numéros de référence de la boîte à outil où l'élève trouvera les exercices d'applications, ceux pour s'autocontrôler et ceux pour chercher.

Ch. Depotte, Y. Djegham, G. Noël, J.-Cl. Verhaeghe, Mathématique et Biologie: une expérience pluridisciplinaire, De Boeck et Larcier, s.a., 208 pages + 1 CD Rom, Bruxelles, 2003, ISBN: 2-8041-4314-7.



Il s'agit de l'élaboration d'une série de séquences d'enseignement où la réalité, c'est-à-dire l'ensemble des mesures effectuées au cours d'une observation ou d'une expérimentation, a été formalisée mathématiquement. Cette approche de compétences transversales rencontre deux fins : d'une part montrer que les outils mathématiques aident à poser un problème rigoureusement et mettre ainsi les élèves en situation de cerner les limites d'un modèle mathématique; d'autre part de faciliter l'assimilation des concepts mathématiques puisque construits à partir de

données recueillies par les élèves eux-mêmes.

La biologie a été choisie par les auteurs car elle semble être le règne du qualitatif et de toutes les disciplines scientifiques, la moins susceptible d'être mathématisée.

Le travail comporte quatre parties.

- La dynamique des populations, étude des fonctions exponentielle et logistique. Le texte décrit et propose de réaliser une culture assez simple, celle d'une population de levures de boulangerie. Toutes les trente minutes, un échantillon est prélevé et le nombre de cellules qu'il contient est compté. L'analyse du tableau de données ainsi collectées montre que le rapport des nombres de cellules lors de deux comptages est approximativement constant. Autrement dit, le nombre de cellules augmente selon une progression géométrique. Les auteurs introduisent le taux de croissance moyen, puis en imaginant que les comptages se font à des moments de plus en plus rapprochés, la notion de taux instantané. On rencontre ainsi le phénomène de croissance exponentielle. Le travail pourrait s'arrêter là, sur la découverte de la croissance exponentielle. Le document poursuit en constatant qu'après un certain temps, la croissance de la levure cesse d'être exponentielle carle milieu se sature. La croissance se transforme en un plateau : on accepte généralement que l'équation logistique rend compte du phénomène.

- La parade nuptiale, étude des matrices et du calcul matriciel. La parade nuptiale du bourdon mâle comporte sept phases dont l'ordre de succession peut varier. Certaines transitions d'une phase à une autre se réalisent effectivement, d'autres jamais. La parade nuptiale se représente donc par une matrice 7×7 . Le produit matriciel indique dans une situation qui lui confère du sens quels états peuvent être joints par deux transitions successives. Comme les fréquences relatives des différentes transitions sont connues, on peut construire un modèle probabiliste de la situation.
- Les probabilités et une méthode d'estimation des populations. Cette partie débute par des activités de tirage dans des sacs effectivement réalisées par les élèves pour faire apparaître le phénomène de régularité statistique. on utilise une méthode « capture marquage recapture » le tout avec des haricots!
 - Une situation biologique est alors introduite : la même méthode (C-M-R) est utilisée avec des carabidae.
- L'espèce et la variation, introduction à la biométrie et aux statistiques. Les deux populations étudiées sont celles des feuilles du chêne sessile et du chêne pédonculé. Il s'agit de distinguer ces deux feuilles par la longueur relative de leur pétiole.

 Les élèves sont chargés de récolter et de mesurer 500 feuilles de chaque espèce. Pour chaque échantillon, les résultats sont groupés en classes et un histogramme est constitué. On introduit la moyenne et l'écart-type, on explique leur signification et on les calcule. La courbe gaussienne est proche des graphiques expérimentaux. On parachute cette courbe et on ajuste ses deux paramètres pour coller aux obser-



vations.

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Décembre 2003)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent Mathématique et Pédagogie, SBPM-Infor et les deux Math-Jeunes.

Belgique:

Cotisation ordinaire : 20 €

 Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 28,50 €

Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : $40 \in (\text{non PRIOR}), 53 \in (\text{PRIOR})$ Autres pays : $47 \in (\text{non PRIOR}), 70 \in (\text{PRIOR})$

Abonnement à Mathématique et Pédagogie

Belgique: 26 €.

Europe : $37 \in (\text{non PRIOR})$, $43 \in (\text{PRIOR})$. Autres pays : $39 \in (\text{non PRIOR})$, $52 \in (\text{PRIOR})$.

Anciens numéros:

Avant 2001 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.

Années 2002 ou 2003 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Abonnement à Math-Jeunes ou Math-Jeunes Junior

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

• Abonnements groupés à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 3,80 €. Europe : 6 € (non PRIOR), 7,80 € (PRIOR).

Autres pays : $6,60 \in (\text{non PRIOR}), 10 \in (\text{PRIOR}).$

• Abonnements groupés <u>aux deux</u> revues : (6 numéros)

Belgique : 6,60 €. Europe : 11 € (non PRIOR), 14 € (PRIOR).

Autres pays : $12 \in (\text{non PRIOR})$, $18 \in (\text{PRIOR})$.

Le coin du trésorier

Abonnements individuels.

• Abonnements à <u>une</u> des revues : (3 numéros)

Belgique : $5 \in \mathbb{N}$ Europe (1) : 11,50 $\in \mathbb{N}$ (non PRIOR), 15,80 $\in \mathbb{N}$ (PRIOR).

Autres pays : $12,75 \in (\text{non PRIOR}), 20,40 \in (\text{PRIOR}).$

• Abonnements aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 10 €. Europe : 16,50 € (non PRIOR), 20,50 € (PRIOR).

Autres pays : $20 \in (\text{non PRIOR})$, $25 \in (\text{PRIOR})$.

Anciens numéros:

Avant 2001-2002 : 0,25 \in /N° + frais d'expédition. Année 2002 ou 2003 : 0,50 \in /N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 \in , Europe (1) : 2,50 \in , Autres pays : 3 \in .

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de $43 \in \mathbb{N}$. Ils recevront le Bulletin de l'APMEP, le BGV (Bulletin à Grande Vitesse) et PLOT.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP; ils bénéficient du prix « adhérents »..

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique: Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France: Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international au compte CCP « giro » 000-0728014-29 de SBPMef. Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement « giro »), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.

Le coin du trésorier

	Prix	<	Prix	Frais
	pleir	1	réduit	d'expédition
Séries RENOVER				
Série 1 (nº 12)	1	€	/	T1
Série 2 (nº 7 à nº 11 et nº 13)	5	€	/	T2
Série 3 (nº 14)	5	€	/	T2
Les 3 séries	7,50	€	/	T2
Dossiers d'exploration didactique				
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80	€	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80	€	1,20 €	T1
Dossier 6 (Statistiques)	7,40	€	6 €	voir ci-dessous
►►► NOUVEAUX DOSSIERS ◀◀◀				
Dossier 7 (Vers les infiniment petits)				
Simone Trompler et Guy Noël	6	€		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie				
plane dans les premières années de				
l'enseignement secondaire)				
Claude Villers et alii	9	€		T3
Jacques Bair, Mathématique et Sport	5	€	3,70 €	T1
François Jongmans				
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie,	12	€	9,50 €	T2
G. Robert, CD-Rom, logiciels mathématiques	5	€	/	T1
Recueils de questions des OMB				
Tome 4	5	€		voir ci-dessous
Tome 5	6	€		voir ci-dessous
Tome 4 et 5	10	€		voir ci-dessous

Frais d'expédition en non PRIOR							
	Belgique	Europe	Autres pays				
Tarif 1	1,60 €	2,70 €	3,00 €				
Tarif 2	2,30 €	4,70 €	5,80 €				
Tarif 3	3,50 €	4,70 €	5,80 €				
Tarif 4	4,00 €	11,50 €	16,50 €				
Tarif 5	5,60 €	15,50 €	26,50 €				
Tarif 6	6,20 €	15,50 €	26,50 €				
Tarif 7	6,95 €	15,50 €	26,50 €				

Pour les expéditions en PRIOR, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.

Exemples de tarification pour commandes groupées

Tomes 4 ou 5 des questions OMB Dossier 6 (Statistiques)

1 ex. T1 2 ou 3 ex. T3 4 à 6 ex. T4

7 à 10 ex.	T5
11 à 14 ex.	T6
15 à 17 <i>e</i> x.	17

)98	וטונ	U	(000
	1	e×	ί.		T1
ĺ	2	à	4	ex.	T2
	5	à	9	ex.	T4

on on one of the one o						
	10	à	13	ex.	T5	
	14	à	18	ex.	T6	
	19	ou	20	<i>e</i> x.	T7	