

Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique)
Tél.-Fax : 32-(0)65-373729, courriel : sbpm@umh.ac.be, Web : <http://www.sbpmbelgium.be>

Membres d'honneur : H. Levarlet, W. Servais (†)

Conseil d'administration : J.-P. Cazzaro, M. Denis-Pecheur, B. Desaedeleer, P. Dupont, Cl. Festraets-Hamoir, M. Frémal, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, P. Marlier, Ch. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler, Ch. Van Hooste

Président :

Ch. Van Hooste, Chemin de Marbisæul
25, 6120 Marbaix-la-Tour,
Tél. 071-217793

Vice-Président,

Olympiades Internationales :

G. Troessaert, Recogne sur le Chêne 58,
6800 Libramont, Tél. 061-224201

Administrateur délégué :

Ch. Michaux, Rue Brigade Piron 290,
6061 Montignies-sur-Sambre,
Tél. 065-354706

Commission Congrès, Publicité :

M. Denis-Pecheur, Rue de la Ferme 11,
5377 Noiseux (Somme-Leuze),
Tél. 086-323755

Trésorier :

P. Marlier, Rue de Plainevaux 185/15,
4100 Seraing, Tél. 04-3374945

Secrétaire :

M. Frémal, Rue W. Jamar 311/51,
4430 Ans, Tél. 04-2636817

Olympiades nationales et site WEB :

Cl. Festraets-Hamoir, Rue J.B.
Vandercammen 36, 1160 Bruxelles
Tél. 02-6739044

Contact Presse :

N. Miewis-Seronveaux, Avenue de Péville
150, 4030 - Grivegnée
Tél. 04-3431992

Math-Jeunes Junior :

A. Paternotte, Rue du Moulin 78,
7300 Boussu, Tél. 065-785064

SBPM-Infor :

R. Gossez, Albert I Laan 13, 1560
Hoeilaart, Tél. 02-6579892

Math-Jeunes Senior :

G. Noël, Rue du 1^{er} Chasseur à cheval
16/14, 7000 - Mons, Tél. 065-848621

Portefeuille de lecture :

M. Herman, Rue Rafhay 95, 4630 Sou-
magne, Tél. 087-267023

Mathématique et Pédagogie :

J. Miewis, Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée, Tél. 04-3431992

Comité de rédaction : J. Miewis, J. Bair, Ch. Bertrand, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, Cl. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, Ch. Michaux, J. Navez, G. Noël, N. Vandenabeele, Ch. Van Hooste, Cl. Villers

Photo de couverture : Spirales (Klimt)



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

Articles

- J. Mawhin, *Cinquante ans de mathématiques en Belgique : un survol* 1
- M. Kassab, *Sur les racines hypercomplexes d'une équation* 21
- J.-P. Gosselin, *À la découverte des polynômes* 45
- V. Henry, *Nouvelle approche pour introduire la notion de tangente à une courbe* 63

Rubriques

- D.Morgan, *Dans nos classes* 79
- C. Festraets, *Des problèmes et des jeux* 83
- C. Festraets, *Olympiades* 87
- P. Marlier, *Le coin du trésorier* 94

NOTE

- * Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
- * Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
- * Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- * Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (L^AT_EX 2_ε, Word); les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés. L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
- * La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
Pour les articles :
Gribaumont A., *Les structures de programmation, Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
- * Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- * MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée.

Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Cinquante ans de mathématiques en Belgique : un survol

J. MAWHIN, U.C.L.

1. Introduction

Décrire d'une manière exhaustive, en moins d'une heure ⁽¹⁾, l'activité mathématique en Belgique dans les cinquante dernières années relève de l'utopie, sauf si l'on choisit d'assommer l'assemblée sous un amas de dates, de noms et de termes techniques. Il faut faire un choix et se fixer quelques règles. Parmi les mathématiciens belges ayant exercé leur art en Belgique, je me bornerai aux francophones qui profitent, dans ce monde ou dans l'autre, d'un éméritat bien mérité. Dans cette population restreinte, il a encore fallu faire un choix, et ce choix ne reflète que les goûts et les connaissances de l'orateur. Les mécontents pourront toujours tirer sur le pianiste.

2. Un éméritat bien mérité



Fig. 1 - DE LA VALLÉE
POUSSIN

Le début des années cinquante constitue une date charnière pour l'histoire des mathématiques en Belgique. Un événement considérable s'est déroulé à l'automne 1951. Le plus grand mathématicien belge de l'époque, CHARLES-JEAN DE LA VALLÉE POUSSIN, a décidé de partir à l'éméritat. Cela peut paraître banal, sauf pour l'intéressé, mais, les circonstances le sont moins. Agé de quatre-vingt-cinq ans, DE LA VALLÉE POUSSIN met fin à une carrière de soixante ans d'enseignement à l'Université Catholique de Louvain (UCL), et mérite peut-être, à ce titre, de figurer dans un *Guinness Book of Academic Records*.

Adresse de l'auteur: Jean Mawhin, U.C.L., dép. de Mathématique, Chemin du Cyclotron, 2, 1348 Louvain-la-Neuve. Courriel : mawhin@math.ucl.ac.be

⁽¹⁾ Conférence plénière prononcée au Congrès de la SBPMef à Forest en Août 2003.

Né en 1866, à l'aube du règne de LÉOPOLD II, DE LA VALLÉE POUSSIN est nommé chargé de cours à l'UCL en 1891, pour suppléer son maître PHILIPPE GILBERT dans l'enseignement de l'analyse. Déjà connu pour des contributions au calcul intégral et aux équations différentielles, DE LA VALLÉE POUSSIN devient célèbre en prouvant en 1896, indépendamment et quelques mois avant le Français JACQUES HADAMARD, la conjecture de GAUSS, vieille de cent ans, sur la répartition asymptotique des nombres premiers. Cette conjecture affirme que si $\pi(n)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à n , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\log n}} = 1.$$

Au début du XX^e siècle, DE LA VALLÉE POUSSIN saisit immédiatement l'importance de l'intégrale de LEBESGUE. Il la développe et l'inclut en 1909 dans la deuxième édition de son célèbre *Cours d'analyse infinitésimale*, qui a vu douze éditions entre 1903 et 1959, a été traduit en russe et réédité aux Etats-Unis. Nombreux sont les mathématiciens d'Europe et d'Amérique qui reconnaissent y avoir appris l'analyse. La suite de la carrière mathématique de LA VALLÉE POUSSIN est jalonnée par des découvertes importantes sur les séries de FOURIER, l'approximation et l'interpolation des fonctions, la représentation conforme et la théorie du potentiel. Ses trente-cinq ans de professorat sont célébrés en 1928, sous ALBERT I^{er}, avec un titre de baron à la clef, en présence d'un impressionnant parterre de mathématiciens venus du monde entier. Ses cinquante ans d'enseignement sont fêtés plus simplement, en 1943, sous LÉOPOLD III, pour cause de guerre. Lorsque l'UCL instaure finalement, en 1948, sous le Régent, l'éméritat de ses professeurs à septante ans, DE LA VALLÉE POUSSIN en a quatre-vingt-deux, et obtient à titre unique la pérennité, droit d'enseigner aussi longtemps qu'il le désire. Il en fait usage jusqu'en 1951. La Providence lui accorde encore onze ans d'un éméritat bien mérité, puisque le Nestor des mathématiques belges s'éteint paisiblement le 2 mars 1962, sous BAUDOUIN I^{er}. Il a nonante-six ans et son dernier article de mathématique date de 1959.

3. Géométrie à l'italienne

Bien entendu, DE LA VALLÉE POUSSIN a été longtemps l'ambassadeur des mathématiques belges à l'étranger. Il fut même le premier président de l'Union Internationale des Mathématiciens. Au début des années cinquante, ce rôle d'ambassadeur est brillamment repris par LUCIEN GODEAUX (1887-1875), un

solide hennuyer professeur à l'Université de Liège (ULg). GODEAUX est autant géomètre que DE LA VALLÉE POUSSIN est analyste. Son domaine de prédilection est la géométrie algébrique, étude des courbes, surfaces ou variétés définies par l'ensemble des zéros d'un ou de plusieurs polynômes réels ou complexes. Il s'est initié à cette discipline au contact de grands maîtres italiens comme FEDERIGO ENRIQUES, GUIDO CASTELNUOVO et FRANCESCO SEVERI et du Français EMILE PICARD. Pas étonnant que ce Wallon convaincu préside, entre 1962 et 1966, le Groupement des Mathématiciens d'Expression Latine.



Fig. 2 - LUCIEN GODEAUX

L'ampleur de son œuvre scientifique est presque unique dans l'histoire des mathématiques et peut lui mériter aussi une place dans notre *Guinness Book of Academic Records*. Au cours de sa très longue carrière, DE LA VALLÉE POUSSIN a publié quelque cent dix notes et mémoires, et une dizaine d'ouvrages, ce qui est tout à fait dans la norme d'un mathématicien productif. GODEAUX est l'auteur de quelque douze cents titres, allant des notes et mémoires originaux dans les journaux scientifiques aux monographies spécialisées, en passant par des ouvrages didactiques et de vulgarisation et des articles d'histoire des sciences.

Chaque tome du *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*, entre 1921 et 1975 contient au moins une note du prolifique géomètre et, parmi les quarante-quatre premiers volumes du *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, de 1932 à 1975, il n'y en a que trois auxquels Godeaux n'a pas contribué, infidélité largement compensée par les cinq ou six articles que contiennent, en moyenne, les autres volumes. Même si les progrès de l'algèbre abstraite, de la topologie et de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes ont profondément transformé le visage de la géométrie algébrique, par rapport à la tradition italienne à laquelle GODEAUX est resté fidèle, les travaux de notre compatriote, et en particulier LES SURFACES DE GODEAUX, sont encore cités dans des publications récentes.

Deux petits ouvrages de haute vulgarisation sur la géométrie de GODEAUX, *La géométrie* et *Les géométries*, malheureusement difficiles à trouver aujourd'hui, ont certainement fait naître plus d'une vocation de mathématicien.

L'avant-propos du second s'achève par les mots : « Nous avons tâché d'écrire le livre que nous eussions voulu lire quand nous avons vingt ans ».

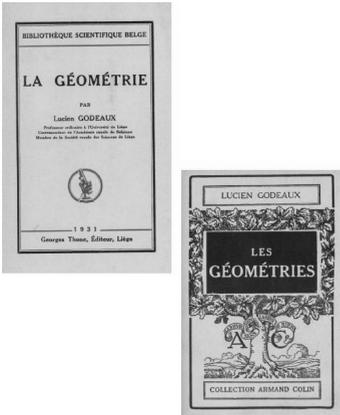


Fig. 3

On ne s'étonnera donc pas de voir GODEAUX choisi comme président d'honneur de la naissante Société Belge des Professeurs de Mathématiques en 1953. Le géomètre de l'ULg a également rédigé de nombreux articles d'histoire des mathématiques, souvent motivés par sa participation active aux travaux de l'Académie Royale de Belgique et de la Biographie Nationale. *L'Esquisse d'une histoire des sciences mathématiques en Belgique*, paru pendant la seconde guerre mondiale, est le premier travail d'ensemble sur le sujet publié depuis ADOLPHE QUETELET.

Cette imposante oeuvre de chercheur n'a pas empêché une carrière bien remplie d'enseignant, à l'Ecole Royale Militaire d'abord, à l'ULg ensuite. GODEAUX y a enseigné l'algèbre, les géométries analytique, projective, infinitésimale et algébrique, et, ce qui est plus surprenant, le calcul différentiel et intégral. Il a encore trouvé le temps et l'énergie de fonder en 1921, avec THÉOPHILE DE DONDER (1873-1957) et ALFRED ERREERA (1886-1960), professeurs à l'Université Libre de Bruxelles (ULB), la Société Mathématique de Belgique, et de créer, en 1948, le Centre Belge de Recherches Mathématiques (CBRM), qu'il préside jusqu'en 1966. Facteur essentiel du développement des mathématiques dans notre pays, le CBRM a organisé, entre la fin des années quarante et le début des années septante, des congrès internationaux de très haut niveau, les comptes rendus publiés en témoignent encore aujourd'hui.

4. Le riche héritage de Théophile

En 1957, l'ULB pleure le décès, à quatre-vingt-quatre ans, de THÉOPHILE DE DONDER. Elle lui doit la création d'une tradition de recherches de haute qualité en mathématiques, en physique mathématique et en chimie théorique. DE DONDER a fait œuvre de pionnier en calcul des variations, en physique mathématique et en thermodynamique chimique.



Fig. 4 - THÉOPHILE DE DONDER

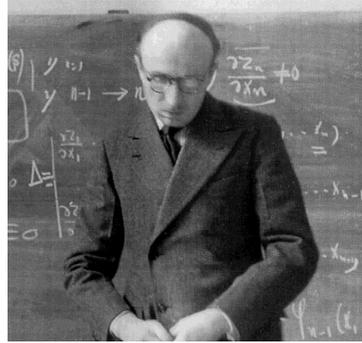


Fig. 5 - THÉOPHILE LEPAGE

Dans les mains de son élève THÉOPHILE LEPAGE (1901-1991), le calcul différentiel extérieur, l'un des plus féconds outils introduits en mathématiques au XX^e siècle et dont DE DONDER fut l'un des pionniers, trouve des applications nouvelles dans l'étude d'équations aux dérivées partielles et dans le calcul des variations des intégrales multiples. Les résultats de LEPAGE font partie des traités classiques, et les mathématiciens contemporains utilisent encore les congruences de Lepage, les formes lepagiennes et les équivalents de Lepage, dans les problèmes variationnels sur des espaces fibrés, sans parler de la décomposition de Lepage d'une puissance extérieure du produit d'un nombre pair de copies du plan complexe. Lepage a assuré, à l'ULB, les cours de calcul différentiel et intégral de 1931 à 1956, et ceux d'analyse supérieure de 1956 à 1971.

Un de ses élèves, PAUL P. GILLIS (1912-2001) reprend, de 1956 à 1982, son cours de calcul différentiel et intégral. Il a résolu en 1943 un problème posé par ELIE CARTAN, en donnant un sens, à partir de la célèbre formule de STOKES-CARTAN, à la notion de différentielle extérieure d'une forme non nécessairement dérivable. La solution de GILLIS est aujourd'hui intégrée à la théorie des courants de GEORGES DE RHAM, qui synthétise le calcul différentiel extérieur et les distributions de LAURENT SCHWARTZ. Dans la suite, GILLIS s'intéresse aux équations elliptiques non linéaires, avant de se consacrer à des questions de contrôle optimal et de statistique.

Un autre élève de LEPAGE, ROBERT DEBEVER (1915-1998), professeur de mécanique à l'ULB, s'est surtout occupé de géométrie différentielle et de relativité générale. On mentionnera des résultats remarquables sur les espaces de l'électromagnétisme, obtenus en collaboration avec ses collègues JULES GÉHÉNIAT et PAUL LIBOIS. On doit aussi à ce passionné de littérature belge et

d'histoire la publication de l'intéressante correspondance entre ALBERT EINSTEIN et ELIE CARTAN.

5. L'analyse à la liégeoise

SI DE LA VALLÉE POUSSIN a brillamment illustré la théorie des fonctions de variables réelles dans la première moitié du XX^e siècle, ce sont les travaux de FLORENT BUREAU (1906-1999) qui ont retenu, au début des années trente, l'attention des spécialistes des fonctions de variables complexes. Dans les années cinquante, ce professeur d'analyse et de mécanique à l'ULg poursuit ses travaux sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques (qui généralisent l'équation des ondes), fondés sur les concepts de partie finie et logarithmique d'intégrale. Ces notions, introduites par HADAMARD, donnent un sens à certaines intégrales divergentes, et trouveront leur habitacle naturel dans la théorie des distributions. BUREAU applique ses méthodes à la propagation des ondes lumineuses dans les milieux cristallins, la mécanique ondulatoire de l'électron et à la théorie linéaire des fluides visqueux faiblement compressibles.



Fig. 6 - FLORENT BUREAU

Dans les années soixante, BUREAU apporte des contributions originales et nombreuses aux équations différentielles non linéaires dans le champ complexe. Les singularités des solutions d'équations linéaires se trouvent toujours parmi celles des coefficients de l'équation (singularités fixes). Les solutions d'équations différentielles non linéaires peuvent développer des singularités dépendant des conditions initiales (singularités mobiles).

Pour classifier les équations différentielles non linéaires, il convient de commencer par les plus simples, en isolant d'abord celles dont les solutions n'ont que des pôles comme singularités mobiles (équations stables ou à points critiques fixes). Cela avait été fait au XIX^e siècle pour les équations du premier ordre. A l'aube du XX^e, le mathématicien français PAUL PAINLEVÉ, un futur premier ministre de la Troisième République, avait surpris le monde mathématique, en ramenant les équations stables du second ordre qui ne s'intègrent pas en termes de fonctions classiques, à six formes canoniques (équations de Painlevé). BUREAU a obtenu d'importants résultats pour les équations du troisième ordre et pour des systèmes d'équations. Longtemps

considérée comme une question d'analyse pure un peu démodée, l'étude des équations différentielles stables joue actuellement un rôle de premier plan dans l'étude des ondes solitaires ou solitons, et dans d'autres questions de physique théorique.

Premier savant belge à recevoir, en 1952, le Prix Francqui pour des contributions mathématiques (il faut attendre 1988 et 2003 pour lui trouver des émules), BUREAU fait partie du Jury des Médailles Fields au Congrès International des Mathématiciens d'Amsterdam de 1954. Imitant DE LA VALLÉE POUSSIN pour sa longévité scientifique, BUREAU a conservé jusqu'à la fin une passion juvénile pour les mathématiques. Il est nonagénaire lorsque paraît son dernier mémoire! Il a marqué de sa forte personnalité, à l'ULg, des générations de futurs mathématiciens, physiciens et ingénieurs, qui furent sans doute peu nombreux à deviner la passion qui se cachait derrière un enseignement plutôt austère.



Fig. 7 - HENRI-GEORGES
GARNIR

Muni d'une double formation en physique et en mathématiques, son élève HENRI-GEORGES GARNIR (1921-1985) commence, à l'ULg, une carrière scientifique par des recherches sur la représentation des groupes motivées par la physique théorique. Il se tourne alors vers l'emploi des méthodes hilbertiennes dans l'étude des problèmes aux limites de la physique mathématique, qu'il synthétise dans une monographie en 1958.

Garnir porte alors son attention sur l'analyse fonctionnelle, et en particulier sur l'étude constructive, au moyen de semi-normes, des espaces vectoriels topologiques localement convexes, généralisation des espaces vectoriels normés. Il en résulte une fois encore un traité, trois volumes publiés entre 1968 et 1973, écrits en collaboration avec deux de ses élèves et collaborateurs, MARC DE WILDE et JEAN SCHMETS. Particularité rare en cette époque de Bourbakisme triomphant, l'ouvrage n'utilise que l'axiome du choix dénombrable. GARNIR retourne ensuite à la théorie des équations aux dérivées partielles, en étudiant plus particulièrement la propagation des singularités dans les équations d'évolution. Il organise sur ce sujet plusieurs conférences internationales, et en édite les comptes rendus. Il meurt inopinément un an avant l'année de sa retraite, laissant inachevés un grand nombre de projets. Le flambeau en théorie des équations aux dérivées partielles sera brillamment

repris à Liège par PASCAL LAUBIN (1959-2001), dont la carrière déjà brillante et encore prometteuse est interrompue par une mort prématurée. À côté de ses travaux et de l'animation d'un important groupe de chercheurs (Centre d'Analyse Fonctionnelle de Liège), GARNIER laisse, en Belgique et à l'étranger, le souvenir d'un pédagogue extraordinaire et d'un conférencier hors pair, dont la clarté n'avait d'égale que l'humour. Ses qualités pédagogiques se retrouvent intactes dans les ouvrages didactiques, en particulier ses *Fonctions de variables réelles*, qui reprennent la matière du cours de calcul différentiel et intégral donné à l'ULg entre 1958 et 1976, augmentée d'une extraordinaire collection d'exercices glanés par l'auteur au fil de ses recherches.

6. Un secrétaire perpétuel

La topologie algébrique, essentiellement créée à la fin du XIX^e siècle par HENRI POINCARÉ, connaît au cours du XX^e siècle un essor extraordinaire, auquel les mathématiciens belges n'ont pas été étrangers. La technique consiste à traduire les propriétés géométriques des figures invariantes pour des déformations continues par des propriétés de structures algébriques. D'une manière plus précise, la topologie algébrique associe à certains espaces topologiques des suites de groupes, modules ou espaces vectoriels (dit d'homologie ou de cohomologie) qui traduisent certaines propriétés géométriques de l'espace invariantes par déformations continues (être d'un seul tenant, avoir des trous ou des anses,...). Les physiciens théoriciens en font aujourd'hui un usage gourmand.



Fig. 8 - GUY HIRSCH

Elève d'Errera à l'ULB, GUY HIRSCH (1915-1993) va longtemps incarner les recherches de topologie algébrique en Belgique. Ce parfait bilingue est professeur à la Rijkslandbouwhoogschool de Gent de 1949 à 1962 et à l'ULB-VUB à partir de 1957. Ses premiers travaux de topologie algébrique portent sur la théorie des points fixes d'une application d'un espace topologique en lui-même, en présence de symétries. HIRSCH se tourne ensuite vers l'étude des espaces fibrés, qui sont, localement, le produit topologique d'un espace topologique, la base, et d'un autre espace, la fibre.

Des exemples classiques sont le fibré tangent à une surface (la base est la surface et les fibres sont les plans tangents) et le ruban de MÖBIUS. On parle encore aujourd'hui d'un *théorème de Leray-Hirsch*, et une récente histoire de la topologie algébrique par JEAN DIEUDONNÉ, qui contient une douzaine de citations aux travaux de HIRSCH, insiste sur le rôle joué par son approche dans les recherches ultérieures de RENÉ THOM, JEAN-LOUIS KOSZUL, JEAN-PIERRE SERRE et ARMAND BOREL. On doit aussi à HIRSCH une étude topologique du plan projectif des octaves, variété de dimension 16 vérifiant les axiomes d'incidence des droites d'un plan projectif, qui inspirera ARMAND BOREL.

Les intérêts de HIRSCH pour les mathématiques ont largement dépassé le seul domaine de la topologie algébrique. Il s'est penché sur les fondements et la philosophie des mathématiques (en particulier celle du calcul des probabilités), et sur l'histoire des sciences, rédigeant celle de la topologie algébrique pour l'ouvrage collectif *Les mathématiques entre 1700 et 1900* édité par DIEUDONNÉ. HIRSCH a été pendant de nombreuses années non seulement le secrétaire, mais l'âme et la cheville ouvrière de la Société Mathématique de Belgique. Il a rédigé, pour son *Bulletin*, de nombreuses et copieuses analyses d'ouvrages, qui dépassent la simple critique ou description pour constituer de brèves monographies sur le sujet du livre analysé.

7. La face cachée du père du Big-Bang

Si GEORGES LEMÂÎTRE (1894-1966) est surtout connu comme père de la théorie de l'expansion de l'univers et du Big-Bang, il serait injuste de passer sous silence les contributions mathématiques du savant louvaniste, qui vont de la théorie des intégrales elliptiques à la mécanique théorique, en passant par l'analyse numérique et le calcul élémentaire. Le mémoire de fin d'études de LEMÂÎTRE, rédigé sous la direction de LA VALLÉE POUSSIN, porte sur l'approximation des fonctions de plusieurs variables par des polynômes.



Fig. 9 - GEORGES LEMÂÎTRE

La légende (mais en est-ce une?) rapporte que LEMÂÎTRE se serait tourné vers la relativité et la cosmologie, après que DE LA VALLÉE POUSSIN lui ait

ne s'y trompe en réalité.

proposé, comme sujet de thèse de doctorat, la démonstration de l'hypothèse de Riemann, une conjecture qui attend toujours sa solution, et dont la confirmation améliorerait de manière significative l'estimation asymptotique du nombre de nombres premiers. L'impatient abbé a sûrement eu raison de ne pas insister.

L'étude du mouvement de trois masses ponctuelles soumises à la loi de gravitation de NEWTON (le fameux problème des trois corps) conduit à un système d'équations différentielles présentant des singularités qui correspondent à des chocs entre les corps. Régulariser ce problème consiste à introduire des coordonnées nouvelles qui font disparaître les chocs doubles. Un tel système de coordonnées, découvert par LEMÂÎTRE entre 1952 et 1954, porte aujourd'hui son nom.

Il faut aussi signaler la passion de LEMÂÎTRE pour les machines à calculer, qu'il introduit à l'UCL dès le début des années cinquante. LEMÂÎTRE s'est aussi intéressé, avec son enthousiasme habituel, à l'enseignement du calcul élémentaire, en proposant l'emploi de nouveaux chiffres. Mais ce sont les calculettes électroniques, et non les nouveaux chiffres, qui ont changé les habitudes de calcul des générations suivantes.

Les honneurs se sont accumulés sur l'auteur de l'hypothèse de l'atome primitif : premier lauréat du Prix Francqui (1934) pour sa théorie de l'expansion de l'Univers, il est élu membre (1940) et président (1960) de l'Académie Pontificale des Sciences. Il y résiste obstinément à PIE XII, qui veut faire du big-bang une preuve scientifique de la création divine. À l'UCL, les méthodes d'enseignement de LEMÂÎTRE furent loin de répondre aux canons de cette pédagogie « fast-food » que d'aucuns prônent aujourd'hui pour nos universités, et son dédain pour l'administration est resté proverbial. La pensée unique n'aurait sûrement pas soulevé l'enthousiasme du truculent chanoine!

8. Et maintenant

Les mathématiciens dont nous venons de parler appartiennent aux trois grandes universités francophones de Belgique, ULB, ULg et UCL. La Loi d'expansion universitaire a conduit, dans les années soixante, à la création de facultés universitaires francophones à Mons et à Namur, comprenant toutes deux des départements de mathématiques.

Les mathématiciens montois se sont principalement distingués dans le domaine des mathématiques pures, et il convient de signaler l'heureuse influence de MAURICE BOFFA (1939-2001), prématurément disparu, dont les travaux en logique mathématique et en théorie des ensembles inspirent encore des recherches actuelles. En analyse, GUNTHER LUMER, aujourd'hui retraité hyperactif, a prêché et prêche encore aux quatre coins du monde la théorie des semi-groupes et ses applications aux équations d'évolution.

Aux Facultés Universitaires Notre-Dame de La Paix de Namur, l'accent fut mis d'emblée sur les mathématiques appliquées et la recherche opérationnelle, qui restent les chevaux de bataille de cette institution.

A l'ULB, les héritiers spirituels de FRANCIS BUCKENHOUT, MICHEL CAHEN et LUCIEN WAELBROECK animent des équipes performantes en théorie des groupes, en géométrie différentielle, et en équations aux dérivées partielles, auxquelles s'ajoute un groupe renommé en statistique mathématique.

A l'ULg, à côté de la géométrie différentielle ressuscitée par MARC DE WILDE, un analyste fameux pour son théorème du graphe fermé, qui reprit la chaire de géométrie, l'analyse reste un sujet de prédilection : espaces fonctionnels, équations aux dérivées partielles et ondelettes (une nouvelle technique d'analyse harmonique à laquelle une mathématicienne d'origine belge actuellement aux U.S.A., INGRID DAUBECHIES, a apporté des contributions décisives) se partagent les intérêts des chercheurs. La programmation mathématique et la statistique y sont également cultivées avec succès.

A l'UCL, les points forts actuels sont l'algèbre et les catégories, la topologie algébrique, les systèmes intégrables, la théorie des jeux et l'analyse non linéaire.

9. La Belgique, terre d'exportation

Nul n'étant prophète en son pays, et surtout dans le nôtre, il serait dommage de ne pas mentionner quelques mathématiciens belges qui ont acquis, hors de nos frontières, une renommée indiscutable.

Comme on l'a vu avec LEMÂÎTRE, on peut étudier les mathématiques et se faire un nom en physique. LÉON VAN HOVE (1924-1990) est surtout connu comme physicien théoricien. Il a pourtant conquis un titre de docteur en sciences mathématiques à l'ULB, sous la direction de DE DONDER et LEFAGE, avant d'aller enseigner la physique théorique à Utrecht. Lauréat du Prix

Françui en 1958, il entre au Centre Européen de la Recherche Nucléaire (CERN) à Genève en 1960, où il devient co-directeur général en 1975.



Fig. 10 - LÉON VAN HOVE

Ses travaux mathématiques portent sur le calcul des variations, où il généralise la condition de LEGENDRE, la représentation des groupes (théorème de Groenwald-van Hove) et les fondements mathématiques de la théorie quantique. C'est VAN HOVE qui est chargé de décrire les contributions de VON NEUMANN à la théorie quantique, dans le *Bulletin of the American Mathematical Society* consacré au père de l'informatique. En physique mathématique, VAN HOVE a contribué aux mécaniques statistiques classique et quantique. En particulier, on lui doit la première dérivation satisfaisante de l'équation de transport à partir de l'équation de Liouville quantique.

JACQUES TITS (né en 1930) est actuellement professeur honoraire au Collège de France. Reçu premier à l'examen d'entrée à l'ULB en décembre 1944, il entame la première candidature en sciences mathématiques en janvier 1945, à quatorze ans! Licencié à dix-huit ans et docteur à dix-neuf, TITS séjourne plusieurs années à l'*Institute of Advanced Studies* de Princeton et à l'ETH de Zürich. Là, il s'initie à la théorie des groupes de LIE, qui occupent, dans les mathématiques actuelles, une position centrale.



Fig. 11 - JACQUES TITS

Nommé chargé de cours (1957) et professeur (1962) à l'ULB, TITS accepte en 1964 une chaire à l'Université de Bonn et y séjourne dix ans, avant d'occuper celle de Théorie des Groupes au Collège de France. Membre de l'Institut et de l'Académie Royale de Belgique, JACQUES TITS partage avec MICHEL GROMOV, en 1993, le prestigieux Prix Wolf, pour ses contributions fondamentales à la théorie des groupes et à leur interaction avec la géométrie. Sa théorie des immeubles fournit un principe organisateur central et un outil puissant pour un spectre étonnamment large de problèmes en théorie des groupes et en géométrie. Ces immeubles sont à l'origine de spéculations mathématiques dont le succès ferait rêver bien des promoteurs.

Les méthodes de TITS ont joué un grand rôle dans l'une des réalisations les plus spectaculaires de l'algèbre moderne, la classification complète des groupes simples finis, achevée en 1981.

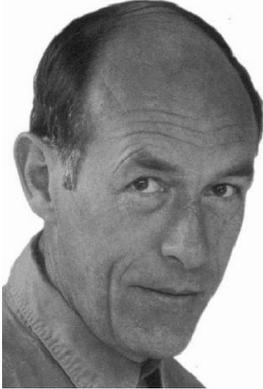


Fig. 12 - DAVID RUELLE

DAVID RUELLE (né en 1935) a fait ses études à la Faculté Polytechnique de Mons et à l'ULB, où il a obtenu son doctorat en sciences en 1959. Assistant de recherche et Privat-dozent à l'ETH de Zürich, puis membre de l'IAS, il est, depuis 1964, professeur à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES) de Bures-sur-Yvette en France. Ses travaux portent sur la physique mathématique et la théorie des systèmes dynamiques. Pour avoir montré, avec FLORIS TAKENS, le rôle des attracteurs étranges pour expliquer la turbulence, il est l'un des créateurs de cette théorie du chaos, dont la science contemporaine a fait un nouveau paradigme.

A côté de traités renommés, DAVID RUELLE a écrit un remarquable et attachant ouvrage de haute vulgarisation intitulé *Hasard et chaos*. Comme savant et comme randonneur, ce membre de l'Institut n'hésite jamais à sortir des sentiers battus.

La carrière de PIERRE DELIGNE (né en 1944) présente quelques similitudes avec celle de TITS. Il n'a que vingt et un ans lorsqu'il revient, en 1966, passer les examens de sa licence en sciences mathématiques à l'ULB, après y avoir étudié deux ans et séjourné à Paris sur le conseil de TITS. Sa thèse de doctorat, rédigée à Paris, est soutenue à Bruxelles en 1968, et malgré une nomination de chargé de cours à l'ULB, Deligne ne résiste pas aux sirènes de l'IHES.

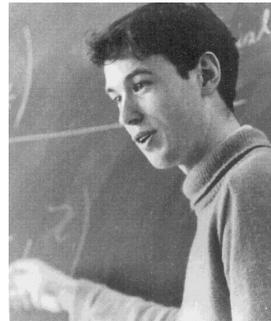


Fig. 13 - PIERRE DELIGNE

Il y travaille avec ALEXANDRE GROTHENDIECK (un mathématicien hors normes devenu berger après avoir milité pour le pacifisme), mais quitte la France en 1986 pour une chaire à l'IAS. Les contributions de DELIGNE portent principalement sur la géométrie algébrique, en particulier sur des corps finis, et ses liens avec la théorie des nombres. En 1971, DELIGNE démontre une

conjecture, énoncée en 1949 par ANDRÉ WEIL, sur les propriétés d'une fonction zeta (analogue à celle utilisée par DE LA VALLÉE POUSSIN et HADAMARD pour prouver le théorème des nombres premiers), qui encode l'information de type arithmétique des variétés algébriques sur un corps fini. Ce résultat lui vaut la médaille Fields en 1978. Une autre distinction prestigieuse, le Prix Crafoord, lui est décernée en 1988, conjointement avec GROTHENDIECK, qui la refuse et, passablement aigri, se répand en réclamations de priorité. Pour les mathématiciens aussi, vieillir n'est pas toujours facile.

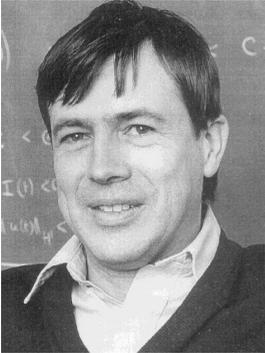


Fig. 14 - JEAN BOURGAIN

L'exportation de mathématiciens brillants n'est pas l'apanage de notre Communauté française. La Communauté flamande n'y a pas échappé. C'est en effet à la VUB que JEAN BOURGAIN (né en 1954) étudie les mathématiques et conquiert en 1977 le doctorat en sciences, sous la direction de FREDDY DELBAEN. Après avoir été chercheur au FNRS et professeur visiteur aux universités de Paris VI, d'Orsay et de Chicago, Bourgain est nommé en 1985 professeur à la VUB et titulaire de la Chaire Doob à l'University of Illinois à Urbana.

Il succède en 1986 à DELIGNE à l'IHES, avant de le rejoindre, en 1993, à l'IAS et, en 1994, au palmarès de la médaille Fields. L'oeuvre mathématique de BOURGAIN porte sur la géométrie des espaces de BANACH, l'analyse harmonique, la théorie ergodique et les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ses travaux témoignent d'une extraordinaire puissance analytique, et sont loin d'avoir produit tous leurs fruits.

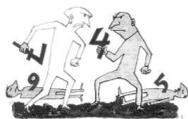
Si tous ces mathématiciens d'origine belge portent haut à l'étranger le renom de notre pays, on doit amèrement regretter qu'ils n'aient pu trouver, dans leur terre natale, un Institut des Hautes Etudes Scientifiques ou un *Institute of Advanced Studies*. Dans nos structures actuelles, il en faudrait d'ailleurs au moins deux. Pour les nations comme pour les individus, l'enfer est pavé d'occasions manquées.

10. La guerre des maths modernes

La description du paysage mathématique belge dans deuxième moitié du XX^e siècle ne serait pas complète sans une mention des querelles et vicis-

situdes liées à l'introduction des « mathématiques modernes » dans l'enseignement primaire et secondaire belge. Un habitant de Sirius qui scruterait la presse belge des cinquante dernières années serait facilement convaincu d'être en face du principal, voire du seul, événement important lié aux mathématiques. Le seul en tous cas à faire, plus d'une fois, la première page de journaux ou de magazines, avec des titres éloquentes : *La guerre des maths aura-t-elle lieu? Sur le front des maths. Nouvelles maths : pour ou contre? Des cobayes pour les papystes. Le pénible spectacle offert par la guerre des maths...*

**Le pénible spectacle offert
par la « guerre des math »...**



SUR LE FRONT DES MATHS

DES PROFESSEURS DE MATHS
rependent aux parents inquiets pour leurs enfants

QU'EN EST-IL DONC DE CETTE REFORME?

**A Waremme, 1.400 parents et professeurs
opposés aux "mathématiques de Papy"**

DES COBAYES POUR LES PAPYSTES

A
V
A
N
T

L
E
S

V
A
C
A
N
C
E
S

Vous

serez présents avec nous à la grande réunion des
Parents de la Province de Liège

**lundi 23 juin
à 20 heures**

ou

PALAIS DES CONGRES
(Jardin d'acclimatation)

Salle de l'Europe

à

LIEGE

pour

affirmer la thèse des Parents
dans le problème de la réforme
de l'enseignement des mathématiques.

Association Provinciale Liégeoise des Parents d'Elèves
de l'Enseignement Officiel.

L'introduction du langage de la théorie des ensembles et la méthode axiomatique ont progressivement modifié la présentation des mathématiques. Peu avant la seconde guerre mondiale, un groupe de mathématiciens français, sous le pseudonyme de NICOLAS BOURBAKI, décide de réécrire l'ensemble des mathématiques en tenant compte de cette évolution, partant des structures les plus générales pour arriver aux plus particulières. Mélangeant habilement une indéniable excellence scientifique avec un certain terrorisme intellectuel, le groupe acquiert une influence considérable sur le développement des mathématiques de l'après-guerre.

D'aucuns, dans divers pays, pensent alors à faire profiter l'enseignement secondaire de cette révolution. En 1958 — le Spoutnik soviétique de 1957 n'y est pas étranger — l'Organisation Européenne de Coopération Economique (OECE, future OCDE) crée un Bureau du Personnel Scientifique et Technique,

ou l'école pour autre chose. Bien sûr chacun s'attend à ce qu'il

dont l'un des objectifs est de « rendre plus efficace l'enseignement des sciences et des mathématiques ». La même année, FRÉDÉRIQUE LENGIER et WILLY SERVAIS proposent un programme d'enseignement aux futures institutrices maternelles (population a priori peu douée en mathématiques) et obtiennent du ministre VAN HEMELRIJK l'autorisation de l'appliquer dans deux classes à Liège et à Arlon. Ils font appel, comme conseiller technique, à un élève de LEPAGE, GEORGES PAFY (né en 1920), professeur d'algèbre à l'ULB depuis 1956. Lassé de cultiver, pour un public restreint, la théorie des formes alternées, PAFY se prend au jeu et, en septembre 1959, demande et obtient la charge de deux classes de froebéliennes.

Des Colloques sont organisés par l'OECE en 1959 à Royaumont et en 1960 à Dubrovnik. Ils établissent un *Programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*, publié en 1961 à Paris sous le nom de *Mathématiques nouvelles*.



Fig. 15 - GEORGES PAFY

Chez nous, PAFY crée, le 24 mai 1961, le Centre Belge de Pédagogie Mathématique (CBPM), avec pour but « l'étude, l'amélioration et la réforme de l'enseignement de la mathématique, et, en particulier, la promotion, le développement et la diffusion de l'enseignement de la mathématique moderne ». La terminologie est habile, condamnant d'office tout opposant au statut de passiste ou de réactionnaire, et ramenant la discussion à l'alternative « mathématique de Papy » ou « mathématique de papa » ! Des mathématiciens professionnels et des utilisateurs des mathématiques entrent dans l'arène. Entre 1962 et 1969, ils se lancent sans retenue des arguments, tantôt savants tantôt passionnés, lors d'assemblées mouvementées où professeurs du secondaire, parents d'élèves et journalistes médusés se contentent souvent de compter les points.

On y retrouve en général les inconditionnels de PAFY, parmi lesquels HENRI BRENY, professeur de calcul des probabilités et de statistique à l'ULg, et ROBERT F. BALLIEU (1914-1980), professeur à l'UCL. On pourrait presque dire professeur universel puisque sa très lourde charge d'enseignement va de l'algèbre et l'analyse à la géométrie projective et au calcul des probabilités,

en passant par la méthodologie mathématique. Il fut un temps où réussir sa candidature en mathématiques à l'UCL revenait pratiquement à réussir chez BALLIEU. Cette surcharge d'enseignement a trop vite tari une activité de recherche consacrée principalement à la limitation et la localisation des zéros de polynômes d'une variable complexe.



Fig. 16 - ROBERT F. BALLIEU



Fig. 17 - LÉON DERWIDUÉ

Parmi les opposants déclarés aux idées du CBRM, on trouve, aux côtés de GARNIR, un ancien élève de GODEAUX, LÉON DERWIDUÉ (1914-1971), professeur aux Facultés Polytechniques de Mons, un géomètre algébriste converti aux équations différentielles et à l'analyse numérique, auteur de nombreux travaux mathématiques où l'intuition l'emporte parfois sur la rigueur.

La querelle étant mauvaise, elle se colore politiquement lorsqu'un Ministre de l'Education Nationale démissionnaire signe la circulaire imposant la mathématique moderne dès la rentrée 1968. Malgré l'enthousiasme des promoteurs, qui fausse quelque peu l'interprétation des expériences pédagogiques, et les recyclages issus d'horizons divers, les enseignants sont loin d'être tous idéalement préparés, et les manuels adoptés n'atteignent pas nécessairement le sérieux scientifique de la collection d'ouvrages *Mathématique moderne* publiée par PAPY et FRÉDÉRIQUE LINGER (devenue PAPY). Dès 1972, PAPY lui-même, déçu peut-être de ne pas voir ses ouvrages officiellement adoptés, déclare à la presse : « le vaisseau de la réforme s'est embourbé ». Une nouvelle réforme, moins médiatique que la précédente, a lieu en 1978.

En 1982, NICOLAS ROUCHE (né en 1925), professeur à l'UCL, un spécialiste reconnu de la stabilité des équations différentielles reconverti à la pédagogie des mathématiques, affirme : « Le virage des maths en 1968 a été nécessaire sans aucun doute. [...] Mais on a introduit inutilement une

mathématique trop formelle, trop symbolisée. [...] Le manque à gagner fondamental se situait du côté de l'intuition et de la géométrie fort sacrifiées par la réforme ». Dès 1977, ROUCHE, très sensible aux aspects épistémologiques et historiques de l'enseignement des mathématiques, avait créé le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM). À la fin des années 1980, une nouvelle commission, présidée par un journaliste scientifique bien connu, se penche sur une nouvelle réforme de l'enseignement des mathématiques. Elle débouche sur un rapport, et sur la création, en 1993, d'un Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) établi à Nivelles, qui a pour missions principales, en Belgique francophone, la recherche sur l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte et la formation continue des enseignants de mathématiques. ROUCHE en assure la présidence.

11. En guise de conclusion

Réformes et contre-réformes se sont ainsi succédées, et le débat est loin d'être clos, comme en témoignent les nombreuses réunions et les livres blancs sur l'enseignement des mathématiques (*Enseigner la mathématique?* SBPMef, 1991). A ces questions s'ajoute aujourd'hui l'angoissant problème du désintérêt des jeunes pour la profession d'enseignant en général, et d'enseignant en mathématiques en particulier. Il faut dire que les licenciés en mathématiques ont trouvé de plus en plus de débouchés dans le privé, informatique, banques et assurances par exemple, et qu'il est difficile de résister au chant des sirènes argentées. Le professeur de mathématique a rejoint le tigre de Sibérie dans les espèces en péril, et ce n'est plus l'OCDE qu'il faut invoquer comme en 1958, mais plutôt le WWF.

Quoiqu'il en soit, et au delà de la méthode ou du programme, n'oublions pas que c'est dans l'éveil d'une vocation que le professeur de mathématique de l'enseignement secondaire trouve sa grandeur et demeure irremplaçable. Chacune des grandes figures que nous venons s'évoquer n'aurait aucune peine à citer le nom de celui qui lui a révélé (au sens photographique) un intérêt et des dons pour les mathématiques, qui l'a guidé, et l'a encouragé. Cette révélation s'est faite, osons l'avouer, indépendamment des programmes et des méthodes pédagogiques. Elle s'est faite parce que ce professeur vivait son métier avec passion, aimait sa discipline parce qu'elle est belle, parce qu'elle est source intarissable de problèmes et fugace illusion de certitudes.

Merci à vous tous d'avoir été ou d'être un jour l'un des artisans de cette indispensable initiation mathématique.

12. Bibliographie

1. P. L. Butzer et J. Mawhin, Notice sur Henri Georges Garnir, *Annuaire Acad. Roy. Belgique*, 2002, 41-60
2. P. L. Butzer et J. Mawhin, A biography of Charles-Jean de La Vallée Poussin, in *Charles-Jean de La Vallée Poussin. Collected Works. Oeuvres Scientifiques*, Volume I, P. Butzer, J. Mawhin et P. Vetro ed., Académie Royale de Belgique, Bruxelles et Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 2000, 3-9
3. P. Butzer, J. Mawhin et P. Vetro ed., *Charles-Jean de La Vallée Poussin. Collected Works. Oeuvres Scientifiques*, Vol. I et II, Académie Royale de Belgique, Bruxelles et Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 2000-2001
4. Ch. J. de La Vallée Poussin, *Cours d'analyse infinitésimale*, 2 vol., Uystpruit, Louvain, 1909-1912
5. R. Debever ed., *Elie Cartan - Albert Einstein, Lettres sur le parallélisme absolu*, Académie Royale de Belgique, Bruxelles et Princeton University Press, 1979
6. J. Dieudonné ed., *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, 2 vol., Hermann, Paris, 1978
7. J. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960*, Birkhäuser, Boston-Basel, 1989
8. Y. Félix ed., *Selected Works of Guy Hirsch*, Société mathématique de Belgique, 1995
9. H.G. Garnir, *Les problèmes aux limites de la physique mathématique*, Birkhäuser, Basel, 1958
10. H.G. Garnir, *Fonctions de variables réelles*, 2 vol., VanderLouvain, 1970
11. H.G. Garnir, M. De Wilde et J. Schmets, *Analyse fonctionnelle*, 3 vol., Birkhäuser, Basel, 1968-1973
12. L. Godeaux, *Esquisse d'une histoire des mathématiques en Belgique*, Office de Publicité, Bruxelles, 1942
13. L. Godeaux, *La géométrie*, Bibliothèque scientifique belge, Thone, Liège, 1931

14. L. Godeaux, *Les géométries*, Collection Armand Colin, Paris, 1952
 15. D. Lambert, *Un atome d'Univers. La vie et l'oeuvre de Georges Lemaître*, Lessius-Racine, Bruxelles, 2000
 16. J. Mawhin, Une brève histoire des mathématiques à l'Université Catholique de Louvain, *Revue des Questions Scientifiques* 163 (1992), 369-386
 17. J. Mawhin, Charles-Jean de La Vallée Poussin et le théorème des nombres premiers, in *Les Nombres. Problèmes anciens et actuels*, Ellipses, Paris, 2000, 75-92
 18. J. Mawhin, Les mathématiques, in *Histoire des sciences en Belgique 1815-2000*, Première partie, R. Halleux, J. Vandersmissen, A. Despy-Meyer et G. Vanpaemel ed., Dexia-Renaissance du Livre, Bruxelles, 2001, 99-115
 19. J. Mawhin, Les mathématiques, in *Histoire des sciences en Belgique 1815-2000*, Deuxième partie, R. Halleux, J. Vandersmissen, A. Despy-Meyer et G. Vanpaemel ed., Dexia-Renaissance du Livre, Bruxelles, 2001, 71-84
 20. J. Mawhin, La mécanique analytique à l'UCL : de Pagani à Lemaître, *Revue des Questions Scientifiques* 173 (2002), 3-18
 21. J. Mawhin, Notice sur Florent J. Bureau, *Annuaire Acad. Roy. Belgique*, 2002, 3-29
 22. G. Papy, *Mathématique moderne*, 5 vol., Didier, Bruxelles, 1964
-

Admettons que le réel S soit la somme de la série infinie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Alors

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots \\ &> \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \dots \\ &= S, \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire.

Sur les racines hypercomplexes d'une équation

M. KASSAB,

Nous nous proposons de définir des champs, dits de nombres hypercomplexes, au sein desquels, nous pourrions assumer la résolution des équations algébriques à coefficients entiers (ou rationnels). Des champs englobant le champ des rationnels, tout en s'y construisant exclusivement.

On distingue dès lors des champs isomorphes, de nature différente, comprenant les racines de la même équation, de sorte que, si l'on ne considère pas la nature intrinsèque des racines de cette équation (nombre complexe, nombre hypercomplexe, matrice, ...), mais si l'on se borne à l'étude de leurs relations rationnelles, il est indifférent de considérer tel ou tel champ comprenant les racines de l'équation considérée, une liberté de choix pouvant s'avérer bien payante, le calcul de telles relations dans un champ d'hypercomplexes, se révélant le plus souvent, moins onéreux que dans tout autre champ.

Trouver pour chaque équation algébrique de degré n , n racines, distinctes ou non, tel est le défi qu'un judicieux recours à ces champs d'hypercomplexes, saura relever. Relever ce défi ne manquera pas de susciter la curiosité intellectuelle de nos élèves, une curiosité qui constitue un important élément de motivation que l'on se doit de préserver, de stimuler, voire d'investir en les responsabilisant, c-à-d, en les faisant participer activement aux recherches prouvant que ce défi n'est que l'expression d'une vérité mathématique propre à la théorie des équations, une vérité que nous ambitionnons de leur faire découvrir. Une participation et une découverte que nos élèves sauront d'autant plus apprécier, que le prérequis pour ce faire, l'algèbre du secondaire, est bien à leur portée.

cela dit, nous pensons pour terminer, que les enseignants du troisième degré, en quête d'exercices où l'idée prime le calcul, d'exercices ouvrant de nouveaux horizons, riches en concepts et en structures, sauront trouver, dans la matière couvrant le présent exposé, en plus d'un apport culturel, de quoi répondre largement à leur attente.

1. Sur la définition d'un champ de nombres hypercomplexes sur un polynôme algébrique ⁽¹⁾ donné

1.1. Définition

Définissons un champ sur le trinôme du second degré

$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

Considérons à cet effet,

- l'ensemble Ω des couples de nombres rationnels,

$$\Omega = \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}\};$$

- l'ensemble $Q(x)$ des binômes de premier degré en x , à coefficients rationnels,

$$Q(x) = \{a(x) \mid a(x) = a_1 + a_2x, (a_1, a_2) \in \Omega\};$$

- la bijection Γ de Ω sur $Q(x)$,

$$\Gamma : \Omega \longrightarrow Q(x) : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \longrightarrow \alpha(x) = \alpha_1 + \alpha_2x.$$

Cela étant, l'égalité, la somme et le produit de deux éléments quelconques de Ω se définissent ainsi :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Omega, \forall x \in \mathbb{Q} :$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta && \text{ssi } \alpha(x) = \beta(x) && \text{ssi } \alpha_i = \beta_i && i = 1, 2 \\ \alpha + \beta &= \gamma && \text{ssi } \alpha(x) + \beta(x) = \gamma(x) && \text{ssi } \alpha_i + \beta_i = \gamma_i && \\ \alpha\beta &= \gamma && \text{ssi } \gamma = \Gamma^{-1}(\gamma(x)) \end{aligned}$$

$\gamma(x)$ désignant le reste de la division euclidienne du produit $\alpha(x)\beta(x)$ par $f(x)$. Autrement dit, k désignant le rationnel quotient de cette division, $\gamma(x)$ est dès lors, l'élément de $Q(x)$ satisfaisant à l'identité

$$\alpha(x)\beta(x) = kf(x) + \gamma(x).$$

⁽¹⁾ Sauf mention explicite du contraire, les polynômes algébriques à coefficients rationnels et de degré n , ($n \geq 2$), en la variable x , faisant l'objet de la présente étude, sont supposés irréductibles sur le champ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ de ces rationnels

Or,

$$\alpha(x)\beta(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 x)(\beta_1 + \beta_2 x) = \alpha_2 \beta_2 f(x) + \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2)x.$$

L'on déduit que

$$Y(x) = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2)x,$$

et, par suite,

$$\alpha\beta = \Gamma^{-1}(Y(x)) = (\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2, \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2). \quad (1)$$

En particulier,

$$\alpha^2 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2, 2\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2^2) \quad (2)$$

On trouve en particulier : $(1, 1)(1, -1) = (2, 1)$; $(1, 1)^2 = (0, 1)$; $(1, -1)^2 = (0, -3)$.

On définira comme suit la différence et le quotient de deux éléments quelconques de Ω

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Omega,$

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \gamma && \text{ssi } \alpha = \beta + \gamma \\ \alpha : \beta &= \gamma \text{ (avec } \beta \neq (0, 0)) && \text{ssi } \alpha = \beta \gamma \end{aligned}$$

Cherchons le quotient γ de α par $\beta \neq (0, 0)$, il vient

$$\begin{aligned} \gamma = \alpha : \beta & \text{ ssi } \beta \gamma = \alpha \\ & \text{ssi } (\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2, \beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \\ & \text{ssi } \begin{cases} \beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2 = \alpha_1 \\ \beta_2 \gamma_1 + (\beta_1 - \beta_2) \gamma_2 = \alpha_2 \end{cases} \\ & \text{ssi } \gamma = \left(\frac{\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\beta_1^2 - \beta_1 \beta_2 + \beta_2^2}, \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\beta_1^2 - \beta_1 \beta_2 + \beta_2^2} \right). \end{aligned}$$

Le dénominateur $\beta_1^2 - \beta_1 \beta_2 + \beta_2^2 = (\beta_1 - \frac{\beta_2}{2})^2 + \frac{3}{4} \beta_2^2$ représentant visiblement un rationnel non nul vu que $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$.

On trouve en particulier : $(1, 1) : (-1, 2) = (\frac{-2}{7}, \frac{-3}{7})$.

Compte tenu de ce qui précède, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division dans Ω sont les opérations appliquant respectivement tout couple d'éléments de Ω , sur sa somme, sa différence, son produit et son quotient.

chacun peut le constater, aucune violence n'a lieu contre.

1.2. Structure

On établit aisément que $(\Omega, +, \cdot)$ est un champ, c'est le champ des **nombre hypercomplexes** définis sur le trinôme $f(x) = x^2 + x + 1$, l'élément $(0,0)$ y étant le zéro hypercomplexe (le neutre de l'addition) et l'élément $(1,0)$, l'unité hypercomplexe (le neutre de la multiplication).

En identifiant ou en remplaçant dans le champ $(\Omega, +, \cdot)$, chaque nombre hypercomplexe tel que $(r,0)$ avec le rationnel r , sans toutefois rien modifier aux règles de calcul, on y engloberait le champ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ des rationnels, les opérations sur ces éléments dans $(\Omega, +, \cdot)$ étant les mêmes que dans $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. On a donc

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot) \subset (\Omega, +, \cdot),$$

et on pourra écrire si nécessaire $(r,0) = r$; en particulier $(0,0) = 0$ et $(1,0) = 1$.

Pour effectuer le produit $r\alpha$ du rationnel r par l'hypercomplexe $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, on se doit de tenir compte du remplacement précité et de la définition du produit dans $(\Omega, +, \cdot)$. On trouve ainsi $r(x) = r$, vu que $r = (r,0)$; $\alpha(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$, dès lors : $r(x)\alpha(x) = r\alpha_1 + r\alpha_2 x$ et par suite $r\alpha = r(\alpha_1, \alpha_2) = (r\alpha_1, r\alpha_2)$.

Il s'en suit que $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (\Omega, +, \cdot)$:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$$

et ce en posant $u_1 = (1,0)$ et $u_2 = (0,1)$. L'on vérifiera que $(\mathbb{Q}, \Omega, +)$ est un espace vectoriel sur le champ des rationnels, le couple (u_1, u_2) formant la base canonique de cet espace à deux dimensions.

2. Résolution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, dans le champ $(\Omega, +, \cdot)$ des nombre hypercomplexes

On a, $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$:

α est racine de $f(x) = 0$

ssi $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

ssi $(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_1 + 1, -\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2) = (0, 0)$

ssi $\begin{cases} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_1 + 1 = 0 \\ \alpha_2(-\alpha_2 + 2\alpha_1 + 1) = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_1 + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 2\alpha_1 + 1 \\ \alpha_1(\alpha_2 + 1) = 0 \end{cases}$

Le dernier système nous fournit les racines hypercomplexes $\alpha = (0, 1)$ et $\beta = (-1, -1)$ de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

3. Sur l'isomorphisme de trois champs assurant la résolution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

•

$W = \{z = m + n\sqrt{3}i \mid m, n \in \mathbb{Q}\}$, désignant le moins étendu des champs des nombres complexes comprenant les racines

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

de cette équation, nous allons montrer que la bijection

$$T : W \longrightarrow \Omega : z = m + n\sqrt{3}i \longrightarrow \alpha = (m + n, n)$$

est un isomorphisme du champ $(W, +, \cdot)$ sur le champ $(\Omega, +, \cdot)$.

On a de fait, $\forall z_1, z_2 \in W$,

1°) $T(z_1 + z_2) = (m_1 + n_1 + m_2 + n_2, 2n_1 + 2n_2) = (m_1 + n_1, 2n_1) + (m_2 + n_2, 2n_2) = T(z_1) + T(z_2)$,

2°) $T(z_1 \cdot z_2) = (m_1m_2 - 3n_1n_2 + m_1n_2 + m_2n_1, 2m_1n_2 + 2m_2n_1) = (m_1 + n_1, 2n_1) \cdot (m_2 + n_2, 2n_2) = T(z_1) \cdot T(z_2)$.

ce qui établit l'isomorphisme de ces deux champs, deux champs partiellement ordonnés, puisqu'ils englobent le champ des rationnels.

••

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ désignant respectivement,

c'est nécessaire que ce soit possible, mais précisément

le champ $(\{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$
 et le champ $(\left\{M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}, +, \cdot)$,

on établit aisément que la bijection

$$\Gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M} : z = a + bi \longrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme du champ des nombres complexes $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sur le champ matriciel $(\mathcal{M}, +, \cdot)$.

Cela étant, le sous-champ $(W, +, \cdot)$ du champ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ayant pour image par la bijection Γ , le sous-champ

$$(\mathcal{N}, +, \cdot), \quad \mathcal{N} = \left\{ N = \begin{pmatrix} m & -n\sqrt{3} \\ n\sqrt{3} & m \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Q} \right\},$$

du champ $(\mathcal{M}, +, \cdot)$, ces deux sous-champ sont donc isomorphes.

Il en résulte que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ admet dans le champ matriciel $(\mathcal{N}, +, \cdot)$, les racines

$$N_1 = \Gamma(x_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 = \Gamma(x_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

●●●

Finalement, et vu l'isomorphisme des champs $(\Omega, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ et $(\mathcal{N}, +, \cdot)$, toute relation rationnelle entre les racines de l'équation donnée, éléments de l'un de champs, se retrouve entre leurs images respectives, éléments d'un autre champ. On vérifiera ainsi, par exemple, qu'on a les relations

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= x_1 + x_2 = N_1 + N_2 = -1 \\ \alpha\beta &= x_1x_2 = N_1N_2 = 1 \\ \alpha^2 - \beta &= x_1^2 - x_2 = N_1^2 - N_2 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= x_1^2 + x_2^2 = N_1^2 + N_2^2 = -1 \end{aligned}$$

●●●●

Étant isomorphes, ces trois champs tout en étant de nature différente, ne sont pas du point de vue abstrait, distincts. Ils sont en quelques sortes

l'image l'un de l'autre. Il s'en suit que si on ne considère pas la nature intrinsèque des racines d'une équation (nombre complexe, nombre hypercomplexe, matrice, ...), mais si l'on se borne à l'étude de leurs relations rationnelles, il est indifférent de considérer tel ou tel champ comprenant les racines de l'équation considérée.

4. Racines hypercomplexes de l'équation du second degré

Considérons l'équation $\varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Q}, a \neq 0$. En réitérant la démarche précédente, on définira de même sur le trinôme $\phi(x) = ax^2 + bx + c$ un champ de nombres hypercomplexes englobant le champ des rationnels, un champ noté $(\mathcal{N}, +, \cdot)$, où il s'avère que

1°) $(\mathcal{N}, \mathbb{Q}, +)$ est un espace vectoriel sur le champ des rationnels et dont le couple $(u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1))$ forme la base canonique.

2°) $\forall \alpha, \beta \in (\mathcal{N}, \mathbb{Q}, +)$:

$$\alpha\beta = (\alpha_1\beta_1 - \frac{c}{a}\alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 - \frac{b}{a}\alpha_2\beta_2) \quad (1)'$$

En particulier,

$$\alpha^2 = (\alpha_1^2 - \frac{c}{a}\alpha_2^2, 2\alpha_1\alpha_2 - \frac{b}{a}\alpha_2^2) \quad (2)'$$

α est racine de l'équation $\phi(x) = 0$

ssi $\varphi(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

ssi $\begin{cases} a\alpha_1^2 - c\alpha_2^2 + b\alpha_1 + c = 0 \\ 2a\alpha_1\alpha_2 - b\alpha_2^2 + b\alpha_2 = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ a\alpha_1^2 + b\alpha_1 + c = 0 \end{cases} \quad (3)' \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{b}{2a}(\alpha_2 - 1) \\ \alpha_1^2 - 1 = 0 \end{cases}$

ssi $\alpha = u_2 = (0, 1)$ ou $\alpha = \beta = (-\frac{b}{a}, -1)$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ étant supposée irréductible sur le champ des rationnels, le système (3)' ne peut y admettre de solution. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède donc dans le champ $(\mathcal{N}, +, \cdot)$ les racines hypercomplexes $\alpha = (0, 1)$ et $\beta = (-\frac{b}{a}, -1)$.

Remarques :

- Le champ des nombres hypercomplexes défini sur le binôme $\varphi(x) = x^2 + 1$ est un sous-champ du champ des complexes. De fait, le produit (1)' s'écrit, au cas où $a = c = 1$ et $b = 0$:

$$\alpha\beta = (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \quad (1)''$$

et l'on retrouve l'expression du produit des deux nombres complexes représentés par les couples (α_1, α_2) et (β_1, β_2) .

- La racine $\alpha = (0, 1)$ étant commune à toutes les équations du second degré représentées par $\varphi(x) = 0$, deux équations distinctes, de même rapport $\frac{b}{a}$, admettant donc formellement les mêmes racines hypercomplexes. Il en est ainsi par exemple des équations $\varphi_1(x) = x^2 + x + 1 = 0$ et $\varphi_2(x) = 2x^2 + 2x - 1 = 0$, dont les racines $\alpha = (0, 1)$ et $\beta = (-1, -1)$ ont pour somme -1 et pour produit 1 ou $-\frac{1}{2}$ selon que ces racines soient perçues en tant qu'éléments du champ défini sur le trinôme $\varphi_1(x)$ ou $\varphi_2(x)$.

5. Généralisation

On définit de même un champ sur le polynôme algébrique de degré n en la variable x ,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, n \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}), a_n \in \mathbb{Q}_0, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Q},$$

en considérant :

- l'ensemble Ω des n -uplets de nombres rationnels,

$$\Omega = \mathbb{Q}^n = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n), \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}\},$$

- l'ensemble $\mathcal{A}(x)$ des polynômes algébriques en x de degré inférieur ou égal à $n-1$,

$$\mathcal{A}(x) = \{a(x) \mid a(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}, (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega\},$$

- la bijection Γ de Ω sur $\mathcal{A}(x)$

$$\Gamma : \Omega \longrightarrow \mathcal{A}(x) : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \longrightarrow \alpha(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1}$$

Cela étant, l'égalité, la somme et le produit de deux éléments quelconques de Ω , seront ainsi définis,

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega, \forall x \in \mathbb{Q} :$$

$$\begin{aligned} \alpha = \beta & \text{ssi } \alpha(x) = \beta(x) & \text{ssi } \alpha_i = \beta_i & \quad i = 1, 2 \\ \alpha + \beta = \gamma & \text{ssi } \alpha(x) + \beta(x) = \gamma(x) & \text{ssi } \alpha_i + \beta_i = \gamma_i & \\ \alpha\beta = \gamma & \text{ssi } \gamma = \Gamma^{-1}(\gamma(x)) \end{aligned}$$

$\gamma(x)$ désignant le reste de la division euclidienne du produit $\alpha(x)\beta(x)$ par $f(x)$. Il va de soi que l'on définira comme suit la différence et le quotient de deux éléments quelconques de Ω .

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \alpha - \beta = \gamma & \text{ssi } \alpha = \beta + \gamma \\ \alpha : \beta = \gamma \text{ (avec } \beta \neq (0, 0)) & \text{ssi } \alpha = \beta\gamma \end{aligned}$$

L'addition, la soustraction, la multiplication et la division dans Ω sont les opérations appliquant respectivement tout couple d'éléments de Ω sur sa somme, sa différence, son produit et son quotient.

L'on établit aussi que

- $(\Omega, \mathbb{Q}, +)$ est un champ, c'est le champ des nombres hypercomplexes défini sur les polynômes $f(x)$, l'élément $(0, 0, \dots, 0)$ y étant le zéro hypercomplexe (le neutre de l'addition et l'absorbant de l'addition), l'élément $(1, 0, \dots, 0)$ l'unité hypercomplexe (le neutre de la multiplication).
- En identifiant ou en remplaçant dans le champ $(\Omega, +, \cdot)$ chaque nombre hypercomplexe tel que $(r, 0, \dots, 0)$ par le rationnel r , sans toutefois rien modifier aux règles de calcul, on y engloberait le champ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ des rationnels, les opérations sur ces éléments dans $(\Omega, +, \cdot)$ étant les mêmes que dans $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. On a donc $(\mathbb{Q}, +, \cdot) \subset (\Omega, +, \cdot)$ et l'on pourra si nécessaire écrire $(r, 0, \dots, 0) = r$ et en particulier $(0, 0, \dots, 0) = 0$ et $(1, 0, \dots, 0) = 1$.
- Pour effectuer le produit $r\alpha$ du rationnel r par l'hypercomplexe $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, on se doit de tenir compte et du remplacement opéré et de la définition du produit dans $(\Omega, +, \cdot)$. On trouve ainsi

$$r(x) = r, \quad \text{vu que } r = (r, 0, \dots, 0); \quad \alpha(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1}.$$

Dès lors $r(x)\alpha(x) = r\alpha_1 + r\alpha_2 x + \dots + r\alpha_n x^{n-1}$, et par suite

$$r\alpha = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (\Omega, \mathbb{Q}, +)$$

Il en résulte que $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (\Omega, +, \cdot)$,

$$\begin{aligned} \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= (\alpha_1, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, \alpha_n) \\ &= \alpha_1(1, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, \dots, 0) + \dots \\ &\quad + \alpha_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \quad (3) \end{aligned}$$

et en posant

$$\begin{aligned}u_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\u_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\&\vdots \\u_n &= (0, 0, \dots, 1),\end{aligned}$$

on vérifie de suite que $(\mathbb{Q}, \Omega, +)$ est un espace vectoriel à n dimensions sur le champ des rationnels, le n -uple (u_1, u_2, \dots, u_n) y formant la base canonique.

Signalons d'ores et déjà l'important rôle que jouera dans la suite l'hypercomplexe $u_2 = (0, 1, \dots, 0)$ en mettant en exergue ces égalités le concernant :

$$u_2^2 = u_3, \quad u_2^3 = u_4, \quad \dots \quad u_2^{n-2} = u_{n-1}, \quad u_2^{n-1} = u_n \quad (4).$$

6. Sur les racines hypercomplexes de l'équation algébrique de degré n à coefficients rationnels

Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, n \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$. On a la proposition : l'équation algébrique de degré $n, (n > 1)$ à coefficients rationnels admet au moins la racine $u_2 = (0, 1, \dots, 0)$ dans le champ $(\Omega, +, \cdot)$ des nombres hypercomplexes, défini sur le polynôme $f(x)$. (5).

On a de fait $u_2(x) = x$ et partant

$$u_2^n(x) = x^n = \frac{1}{a_n} f(x) - \frac{a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{a_n},$$

d'où l'on tire, compte tenu de la définition du produit dans $(\Omega, +, \cdot)$ et des relations (3) et (4) :

$$\begin{aligned}a_n u_2^n &= -(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}) \\a_n u_2^n + a_0 u_1 + \dots + a_{n-2} u_{n-1} + a_{n-1} u_n &= 0 \\a_n u_2^n + a_{n-1} u_2^{n-1} + \dots + a_1 u_2 + a_0 &= 0 \\&\text{ou } f(u_2) = 0\end{aligned}$$

La proposition est ainsi bien établie.

Il est donc démontré qu'étant donné un polynôme algébrique de degré n , à coefficients rationnels, irréductibles sur le champ des nombres rationnels tel que $f(x)$, il est possible de construire une racine α , ($\alpha = u_2$) de ce polynôme ainsi qu'un champ $(\Omega, +, \cdot)$ comprenant cette racine et englobant $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Si le polynôme donné était réductible en un produit

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_r(x)$$

de polynômes irréductibles sur $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, on déterminerait, par la méthode indiquée, une racine u_2 de l'un des facteurs, par exemple de $f_1(x)$ et cette racine u_2 est évidemment une racine de $f(x)$.

Revenons au cas où $f(x)$ est irréductible, après avoir déterminé la racine α ($\alpha = u_2$), on peut passer à la détermination d'autres racines. Dans le champ $(\Omega, +, \cdot)$, le polynôme $f(x)$ est réductible, car il est divisible par $x - \alpha$, mais il admet peut-être aussi d'autres diviseurs linéaires qui correspondent à des racines comprises dans $(\Omega, +, \cdot)$.

Soit $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \cdots \varphi(x)\psi(x) \cdots$ la décomposition de $f(x)$ en facteurs irréductibles sur $(\Omega, +, \cdot)$, les facteurs $\varphi(x), \psi(x)$ étant de degré supérieur à l'unité. On opère sur le polynôme $\varphi(x)$, irréductible sur $(\Omega, +, \cdot)$ comme on a opéré sur le polynôme $f(x)$ irréductible sur $(\Omega, +, \cdot)$. On détermine ainsi un champ $(W, +, \cdot)$ qui englobe $(\Omega, +, \cdot)$ et par conséquent $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ et qui comprend au moins une racine de $f(x)$. Dans ce champ $W, +, \cdot$, on décompose $f(x)$ à nouveau en facteurs irréductibles et l'on continue ainsi jusqu'à obtenir un champ dans lequel $f(x)$ se décompose en facteurs linéaires. Chaque facteur linéaire fournit une racine. Comme le nombre de facteurs linéaires (distincts ou non) est nécessairement égal au degré de $f(x)$, on voit qu'on peut toujours construire un champ comprenant autant de racines (distinctes ou non) qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation, en même temps, déterminer ces racines.

On sait d'ailleurs qu'il est impossible de construire un champ comprenant un plus grand nombre de racines. Rien n'empêche cependant de construire par un autre procédé (et il en existe) un autre champ englobant $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ et comprenant également n racines.

Les exercices numériques qui suivent éclaircissent en la concrétisant cette démarche théorique.

7. Exercices résolus

1. Montrer, tout en s'inspirant de ce qui précède, que l'équation $x^4 + 1 = 0$ est résoluble dans le cadre de trois champs isomorphes, de nature différente.

- Résolution de cette équation dans le champ $(\mathbb{Q}^4, +, \cdot)$.

On vérifie d'abord qu'entre les éléments $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $u_4 = (0, 0, 0, 1)$ de ce champ, on a les relations

$$u_2^2 = u_3 = -u_4^2 \quad \text{et} \quad u_3^2 = -1.$$

Cela étant, on peut dès lors écrire

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 - u_3^2 \\ &= (x^2 - u_3)(x^2 + u_3) \\ &= (x^2 - u_2^2)(x^2 - u_4^2) \\ &= (x - u_2)(x + u_2)(x - u_4)(x + u_4). \end{aligned}$$

L'équation $x^4 + 1$ admet donc dans le champ $(\mathbb{Q}^4, +, \cdot)$, les racines

$$\begin{aligned} \alpha_1 = u_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \alpha_2 = u_4 = (0, 0, 0, 1), \\ \alpha_3 = -u_2 = (0, -1, 0, 0), \quad \alpha_4 = -u_4 = (0, 0, 0, -1). \end{aligned}$$

- Résolution de cette équation dans le champ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

L'équation $x^4 + 1 = 0$ admet dans le champ des complexes, la formule de résolution

$$x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

ou, plus explicitement, les racines

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i), \\ x_3 = -x_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1 + i), \quad x_4 = -x_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2}(-1 + i). \end{aligned}$$

On vérifie aisément

1° L'appartenance des racines au champ

$$(W, +, \cdot), W = \left\{ z = a + b\sqrt{2} + (c + d\sqrt{2})i \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\},$$

définissant le moins étendu des sous-champs du champ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, comprenant les racines de cette équation.

– L'isomorphisme des champs $(W, +, \cdot)$ et $(\mathbb{Q}^4, +, \cdot)$ découlant de la bijection

$$\Gamma : W \longrightarrow \mathbb{Q}^4 : z = a + b\sqrt{2} + (c + d\sqrt{2})i \longrightarrow \alpha = (a, b + d, c, d - b)$$

et l'on vérifie de même que l'on a $\Gamma(x_i) = \alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$.

- Recherche d'un champ matriciel assurant la résolution de l'équation $x^4 + 1 = 0$.

Nous savons que $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ désignant le champ matriciel

$$\left(\left\{ M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, +, \cdot \right),$$

et $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ le champ des complexes

$$(\{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}, +, \cdot),$$

la bijection

$$\Gamma : \mathbb{C} \longrightarrow (\mathcal{M}, +, \cdot) : z = a + ib \longrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme du champ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sur le champ $(\mathcal{M}, +, \cdot)$.

Or, $(W, +, \cdot)$ s'avérant un sous-champ du champ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, son image par la bijection Γ , est le sous-champ

$$(\mathcal{N}, +, \cdot), \quad \mathcal{N} = \left\{ N = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} & -(c + d\sqrt{2}) \\ c + d\sqrt{2} & a + b\sqrt{2} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}$$

du champ $(\mathcal{M}, +, \cdot)$.

Ces deux sous-champs de champs isomorphes, sont donc, eux aussi, isomorphes. Il en résulte que l'équation $x^4 + 1 = 0$, admet dans le champ matriciel $(\mathcal{N}, +, \cdot)$ les racines

$$N_1 = \Gamma(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \Gamma(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$N_3 = \Gamma(x_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad N_4 = \Gamma(x_4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

- Finalement, vu l'isomorphisme des champs $(\mathbb{Q}^4, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ et $(\mathcal{N}, +, \cdot)$, toute relation rationnelle entre les racines de l'équation $x^4 + 1 = 0$, éléments de l'un des champs, se retrouve entre leurs images respectives, éléments d'un autre champ. On vérifiera, par exemple, ces relations

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i = \sum_{i=1}^4 x_i = \sum_{i=1}^4 N_i = 0;$$

$$\prod_{i=1}^4 \alpha_i = \prod_{i=1}^4 x_i = \prod_{i=1}^4 N_i = 1;$$

$$\alpha_3 \alpha_4 = x_3 x_4 = N_3 N_4 = -1;$$

$$\alpha_1^3 - \alpha_2 = x_1^3 - x_2 = N_1^3 - N_2 = 0.$$

• Remarques

- Établir les isomorphismes rencontrés dans cet exercice, constitue pour les élèves, un test de leur compétence dans le domaine du calcul algébrique-matriciel.
- Les racines hypercomplexes d'une équation se caractérisent, et ça se confirme dans la suite, par leur grande simplicité.

2. Construire un champ de nombres hypercomplexes assurant la résolution de l'équation $x^3 + 2 = 0$.

- L'élément $u_2 = (0, 1, 2)$ du champ $(\Omega, +, \cdot) = (\mathbb{Q}^3, +, \cdot)$ étant une racine de cette équation, cherchons si d'autres éléments de Ω sont aussi racines de cette équation.

Factorisons à cet effet le binôme $x^3 + 2$ dans Ω en partant de l'identité

$$(x - (0, 1, 0)) (x^2 + (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x + (\beta_1, \beta_2, \beta_3)) = x^3 + 2 \quad \alpha, \beta \in \Omega.$$

Il vient $x^3 + 2 = ((x - (0, 1, 0))\phi(x), \phi(x)$ désignant le trinôme $x^2 + (0, 1, 0)x + (0, 0, 1)$.

Dès lors, α est racine de $\phi(x) = 0$ ssi $\phi(x) = \alpha^2 + (0, 1, 0)\alpha + (0, 0, 1) = (0, 0, 0) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} \alpha^2(x) &= (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2)^2 \\ &= (\alpha_3^2 x + 2\alpha_1 \alpha_2)(x^3 + 2) + \alpha_1^2 - 4\alpha_2 \alpha_3 \\ &\quad + 2(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)x + (\alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_3)x^2 \\ (0, 1, 0)\alpha(x) &= x(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) \\ &= \alpha^3(x^3 + 2) - 2\alpha_3 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\alpha \text{ est racine de } \phi(x) = 0 \text{ ssi } \begin{cases} \alpha_1^2 - 4\alpha_2 \alpha_3 - 2\alpha_3 = 0 & (6) \\ 2\alpha_1 \alpha_2 - 2\alpha_3^2 + \alpha_1 = 0 & (7) \\ \alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 + 1 = 0 & (8) \end{cases}$$

On remarque de suite qu'un tel système ne saurait admettre une solution dans laquelle $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_3 = 0$ puisqu'elle impliquerait

qu'un rationnel soit racine de l'équation $\alpha_2^2 + \alpha_2 + 1 = 0$, ce qui n'est pas possible.

Les équations (6) et (7) s'écrivant respectivement

$$\alpha_1^2 - 2\alpha_3(2\alpha_2 + 1) = 0,$$

$$2\alpha_3^2 - \alpha_1(2\alpha_2 + 1) = 0,$$

l'on en tire $\alpha_1^3 = 4\alpha_3^3$ ou $\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \sqrt[3]{4}$, une égalité inacceptable pour le quotient de deux rationnels.

Conclusion : le trinôme $\phi(x) = x^2 + (0, 1, 0)x + (0, 0, 1)$ étant irréductible sur le champ $(\Omega, +, \cdot) = (\mathbb{Q}^3, +, \cdot)$, l'élément $u_2 = (0, 1, 0)$ est l'unique racine de l'équation $x^3 + 2 = 0$ dans ce champ.

- Opérons sur le trinôme $\phi(x)$ irréductible sur le champ Ω comme on a opéré sur le binôme $f(x) = x^3 + 2$ irréductible sur le champ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ des rationnels. On considère ainsi

– l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \Omega \times \Omega \\ &= \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3 \\ &= \{\alpha = ((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)), \alpha_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, 6\} \end{aligned}$$

– l'ensemble $\mathcal{A}(x)$ des fonctions linéaires

$$\mathcal{A}(x) = \{a(x) \mid a(x) = (a_1, a_2, a_3) + (a_4, a_5, a_6)x, a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, 6\}$$

– la bijection Γ de \mathcal{W} sur \mathcal{A} ,

$$\Gamma : \mathcal{W} \leftrightarrow \mathcal{A}(x) : \alpha \leftrightarrow \alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)x.$$

On définira comme suit, l'égalité, la somme et le produit de deux éléments quelconques de \mathcal{W} : $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \text{ ssi } \alpha_i = \beta_i \\ \alpha + \beta &= \gamma \text{ ssi } \alpha_i + \beta_i = \gamma_i \\ \alpha\beta &= \gamma \text{ ssi } \gamma = \Gamma^{-1}(\gamma(x)) \end{aligned} \quad i = 1, \dots, 6$$

$\gamma(x)$ désignant le reste de la division euclidienne du produit $\alpha(x)\beta(x)$ par $\gamma(x)$. Cela étant,

– la différence et le quotient de deux éléments quelconques de \mathcal{W} seront ainsi défini, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \gamma \text{ ssi } \beta + \gamma = \alpha \\ \alpha : \beta &= \gamma \text{ ssi } \beta\gamma = \alpha, \beta \neq ((0, 0, 0), (0, 0, 0)). \end{aligned}$$

- L'addition, la soustraction, la multiplication et la division dans \mathcal{H} sont des opérations appliquant tout couple d'éléments de \mathcal{H} respectivement sur sa somme, sa différence, son produit et son quotient.
- On établit aisément que
 - $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ est un champ, le champ des nombres hypercomplexes défini sur le trinôme $\phi(x)$.
 - $((0, 0, 0), (0, 0, 0))$ y étant le zéro hypercomplexe (le neutre de l'addition, l'absorbant de la multiplication) et
 - $((1, 0, 0), (0, 0, 0))$ l'unité hypercomplexe (le neutre de la multiplication).
- En identifiant ou en remplaçant dans le champ $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ chaque élément tel que
 - $((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (0, 0, 0))$ par l'élément $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ du champ $(\Omega, +, \cdot)$,
 - $((r, 0, 0), (0, 0, 0))$ par l'élément r du champ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,
 sans toutefois rien modifier aux règles de calcul, en y engloberait les champs $(\Omega, +, \cdot)$ et $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, les opérations sur ces éléments dans $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ étant les mêmes dans $(\Omega, +, \cdot)$ et $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. On aura ainsi

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot) \subset (\Omega, +, \cdot) \subset (\mathcal{H}, +, \cdot),$$

et l'on pourra écrire

$$r = (r, 0, 0) = ((r, 0, 0), (0, 0, 0)),$$

et en particulier,

$$0 = (0, 0, 0) = ((0, 0, 0), (0, 0, 0))$$

$$1 = (1, 0, 0) = ((1, 0, 0), (0, 0, 0)).$$

- Pour effectuer le produit $a\alpha$ d'un élément de Ω tel que $a = (a_1, a_2, a_3)$ par un élément de \mathcal{H} tel que $\alpha = ((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6))$, on tiendra compte et du remplacement et de la définition du produit dans $\mathcal{H}, +, \cdot$. on trouve ainsi
 - $a(x) = (a_1, a_2, a_3)$, vu que $a = ((a_1, a_2, a_3), (0, 0, 0))$,
 - $\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)x$,
 - $a(x)\alpha(x) = (a_1, a_2, a_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (a_1, a_2, a_3)(\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)x$.
 Par suite

$$\begin{aligned} a\alpha &= (a_1, a_2, a_3)((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)) \\ &= ((a_1, a_2, a_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (a_1, a_2, a_3)(\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)) \quad (9) \end{aligned}$$

En particulier, si $a = r \in \mathbb{Q}$, alors

$$\begin{aligned} r\alpha &= r((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)) \\ &= (r, 0, 0)((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)) \\ &= ((r, 0, 0)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (r, 0, 0)(\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)) \\ &= ((r\alpha_1, r\alpha_2, r\alpha_3), (r\alpha_4, r\alpha_5, r\alpha_6)) \quad (10) \end{aligned}$$

- On a, $\forall \alpha = ((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)) \in (\mathcal{N}, +, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \alpha &= ((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)) \\ &= ((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (0, 0, 0)) + ((0, 0, 0), (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), ((1, 0, 0), (0, 0, 0)) + (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), ((0, 0, 0), (1, 0, 0)) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)u_1 + (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)u_2 \quad (11) \end{aligned}$$

et ce, en posant

$$u_1 = ((1, 0, 0), (0, 0, 0))$$

$$u_2 = ((0, 0, 0), (1, 0, 0))$$

Il en résulte que $(\Omega, \mathcal{N}, +)$ est un espace vectoriel sur le champ $(\Omega, +, \cdot)$, le couple (u_1, u_2) formant une base de cet espace.

- Résolution de l'équation $x^3 + 2 = 0$ dans le champ $(\mathcal{N}, +, \cdot)$ des nombres hypercomplexes.

Montrons d'abord que l'élément $u_2 = ((0, 0, 0), (1, 0, 0))$ du champ $(\mathcal{N}, +, \cdot)$ est racine de l'équation

$$\phi(x) = x^2 + (0, 1, 0)x + (0, 0, 1) = 0.$$

On a de fait

$$u_2^2 = ((0, 0, -1), (0, -1, 0))$$

vu que

$$u_2^2(x) = \phi(x) - (0, 0, 1) - (0, 1, 0)x$$

et

$$(0, 1, 0)u_2 = ((0, 0, 0), (0, 1, 0))$$

vu que

$$(0, 1, 0)(x)u_2(x) = (0, 1, 0)x,$$

et partant

$$\phi(u_2) = u_2^2 + (0, 1, 0)u_2 + (0, 0, 1) = ((0, 0, 0), (0, 0, 0)) = 0.$$

u_2 est bien une racine de l'équation $\phi(x) = 0$.

Tout autre élément de $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ tel que α sera aussi racine de cette équation s'il satisfait à l'identité

$$(x - u_2)(x - \alpha) = x^2 + (0, 1, 0)x + (0, 0, 1)$$

autrement dit aux relations

$$\alpha + u_2 = ((0, -1, 0), (0, 0, 0)) \quad \text{et} \quad \alpha u_2 = ((0, 0, 1), (0, 0, 0))$$

ce qui implique $\alpha = ((0, -1, 0), (-1, 0, 0))$.

Finalement, l'équation $x^3 + 2 = 0$ admet les racines

$$\alpha_1 = ((0, 1, 0), (0, 0, 0))$$

$$\alpha_2 = ((0, 0, 0), (1, 0, 0))$$

$$\alpha_3 = ((0, -1, 0), (-1, 0, 0))$$

dans le champ hypercomplexe $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ et les racines

$$x_1 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} (1 + \sqrt{3}i)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} (1 - \sqrt{3}i)$$

$$x_3 = -\sqrt[3]{2}$$

dans le champ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ des nombres hypercomplexes.

Comme par ailleurs, la bijection

$$\Gamma : \mathbb{C} = \{z = a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathcal{M} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} :$$

$$z = a + bi \longrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme du champ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sur le champ $(\mathcal{M}, +, \cdot)$, il en résulte que l'équation $x^3 + 2 = 0$ admet aussi les racines matricielles

$$M_1 = \Gamma(x_1) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \Gamma(x_2) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \Gamma(x_3) = -\sqrt[3]{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on relève une légèreté et une simplicité des solutions hypercomplexes de cette équation, contrastant avec la lourdeur et la complexité, —toutes relatives—, de ses solutions complexes et matricielles.

3. Établir, en suivant la démarche de l'exercice précédent que l'équation cubique

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q}, d \neq 0$$

admet dans le champ $(\mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3, +, \cdot)$, les racines hypercomplexes

$$\alpha_1 = ((0, 1, 0), (0, 0, 0))$$

$$\alpha_2 = ((0, 0, 0), (1, 0, 0))$$

$$\alpha_3 = ((-b, -1, 0), (-1, 0, 0)) \quad (12)$$

En déduire que les équations représentées par cette équation, ont deux racines en commun et que celles de même coefficient b , admettent formellement les mêmes racines, tout en étant bien distinctes.

4. Trouver les racines hypercomplexes, complexes et matricielles de l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ (13)

(Se servir des formules (12) et de la formule de CARDAN

$$x = y + z = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad 3yz = -p$$

relative à l'équation $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.)

On trouvera, sans trop de difficulté, que l'équation (13) admet

1° Les racines hypercomplexes

$$\alpha_1 = ((0, 1, 0), (0, 0, 0))$$

$$\alpha_2 = ((0, 0, 0), (1, 0, 0))$$

$$\alpha_3 = ((0, -1, 0), (-1, 0, 0)) \quad (12)$$

dans le champ $(\mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3, +, \cdot)$.

2° Les racines complexes

$$x_1 = \frac{-a + b\sqrt{3}i}{2}, \quad x_2 = \frac{-a - b\sqrt{3}i}{2} \quad \text{et} \quad x_3 = a$$

où $a = -a_1 + a_2$, $b = a_1 + a_2$,

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}} \quad \text{et} \quad a_2 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}}$$

et ce dans le champ complexe \mathbb{C} .

3° Les racines matricielles

$$N_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a & -b\sqrt{3} \\ b\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}, \quad N_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a & b\sqrt{3} \\ -b\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$$

et

$$N_3 = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans le champ matriciel $\left(\left\{ N = \begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{R} \right\}, +, \cdot \right)$

On vérifiera que les racines de l'équation (13) satisfont aux relations

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = \sum_{i=1}^3 x_i = \sum_{i=1}^3 N_i = 0;$$

$$\prod_{i=1}^3 \alpha_i = \prod_{i=1}^3 x_i = \prod_{i=1}^3 N_i = 1;$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 = \sum_{i=1}^3 N_i^2 = -2;$$

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 = x_1 x_2 - x_3^2 = N_1 N_2 - N_3^2 = 1.$$

5. Même question pour l'équation $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (14).

1° Les racines hypercomplexes.

Nous savons que l'hypercomplexe $\alpha_1 = (0, 1, 0, 0)$ et son opposé $\alpha_2 = -\alpha_1 = (0, -1, 0, 0)$ sont les racines dans le champ $(\mathbb{Q}^4, +, \cdot)$ de cette équation bicarrée. Dès lors, cette équation étant divisible par le produit $(x - (0, 1, 0, 0))(x + (0, 1, 0, 0))$ autrement dit, par le binôme $x^2 - (0, 0, 1, 0)$, peut s'écrire

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - (0, 0, 1, 0))(x^2 + (3, 0, 1, 0)) = 0.$$

Or, l'équation $\phi(x) = x^2 + (3, 0, 1, 0) = 0$, possède dans le champ $(\mathbb{Q}^4 \times \mathbb{Q}^4, +, \cdot)$ défini sur $\phi(x)$ les racines

$$\alpha_3 = ((0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0)) \text{ et } \alpha_4 = -\alpha_3 = ((0, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 0)).$$

Il s'en suit que l'équation $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ admet dans le champ $(\mathbb{Q}^4 \times \mathbb{Q}^4, +, \cdot)$ les racines

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= ((0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0)) \\ \alpha_2 = -\alpha_1 &= ((0, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 0)) \\ \alpha_3 &= ((0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0)) \\ \alpha_4 = -\alpha_3 &= ((0, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 0)).\end{aligned}$$

On vérifiera par exemple que l'hypercomplexe α_3 est racine de l'équation(14) dans ce champ, vu que l'on a

$$\alpha_3(x) = x, \quad \alpha_3^2(x) = x^2 = \phi(x) - (3, 0, 1, 0) + (0, 0, 0, 0)x$$

$$\alpha_3^2 = ((-3, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 0)),$$

$$\alpha_3^4(x) = (3 + x^2)^2 = x^4 + 6x^2 + 9 = f(x) + 7 + 3x^2$$

$$\text{d'où } \alpha_3^4 = ((7, 0, 3, 0), (0, 0, 0, 0))$$

$$\text{et } f(\alpha_3) = \alpha_3^4 + 3\alpha_3^2 + 2 = (7, 0, 3, 0) + (-9, 0, -3, 0) + (2, 0, 0, 0) = 0.$$

2° Les racines complexes

En s'écrivant $(x^2 + 1)(x^2 + 2) = 0$, l'équation $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ montre de suite qu'elle admet les racines complexes

$$x_1 = i, \quad x_2 = -x_1 = -i, \quad x_3 = \sqrt{2}i \quad \text{et} \quad x_4 = -x_3 = -\sqrt{2}i.$$

3° Les racines matricielles

Compte tenu de l'isomorphisme des champs

$$\mathbb{C} = (\{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$$

et

$$\mathcal{M} = \left(\left\{ M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, +, \cdot \right)$$

établi par la bijection

$$\Gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M} : z = a + bi \longrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

l'équation $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$, admet aussi les racines matricielles

$$\begin{aligned} M_1 &= \Gamma(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ M_2 &= -M_1 = \Gamma(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ M_3 &= \Gamma(x_3) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ M_4 &= -M_3 = \Gamma(x_4) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vérifiera à titre d'exercice, que l'une des matrices, M_4 par exemple, est bien racine de l'équation (14).

6. résolution dans les champs d'hypercomplexes d'équations réductibles sur le champ des nombres rationnels.

On trouve de suite, compte tenu des exercices précédents, qu'en s'écrivant dans ce champ

- $(x+1)(x^2-x+1) = 0$, l'équation $x^3+1=0$ admet dans le champ $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ les racines

$$\alpha_1 = (-1, 0), \quad \alpha_2 = (0, 1), \quad \alpha_3 = (1, -1).$$

- $(x+1)(x^3+2) = 0$, l'équation $x^4+x^3+2x+2=0$, admet dans le champ $(\mathbb{Q}^3, +, \cdot)$ les racines

$$\alpha_1 = ((-1, 0, 0), (0, 0, 0)), \quad \alpha_2 = ((0, 1, 0), (0, 0, 0))$$

$$\alpha_3 = ((0, 0, 0), (1, 0, 0)), \quad \alpha_4 = ((0, -1, 0), (-1, 0, 0)).$$

- $(x-1)(x^4+1) = 0$, l'équation $x^5-x^4+x-1=0$, admet dans le champ $(\mathbb{Q}^4, +, \cdot)$ les racines

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \alpha_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \alpha_3 = (0, 0, 0, 1)$$

$$\alpha_4 = (0, -1, 0, 0), \quad \text{et} \quad \alpha_5 = (0, 0, 0, -1).$$

- $(x^2-1)(x^4+1) = 0$, l'équation $x^6-x^4+x^2-1=0$, admet dans le champ $(\mathbb{Q}^4, +, \cdot)$ les racines

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \alpha_2 = (-1, 0, 0, 0), \quad \alpha_3 = (0, 1, 0, 0),$$

$$\alpha_4 = (0, 0, 0, 1), \quad \alpha_5 = (0, -1, 0, 0), \quad \alpha_6 = (0, 0, 0, -1).$$

- $(x^2 + 1)(x^2 + 2) = 0$, l'équation $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2 = 0$, admet les racines $\alpha_1 = (0, 1)$ et $\beta_1 = (0, -1)$ dans le champ $\Omega_1 = (\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ défini sur le binôme $f_1(x) = x^2 + 1$ ainsi que $\alpha_2 = (0, 1)$ et $\beta_2 = (0, -1)$ dans le champ $\Omega_2 = (\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ défini sur le binôme $f_2(x) = x^2 + 2$.

Montrons par exemple, que la racine $\alpha_1 = (0, 1)$ est bien une racine de l'équation $f(x) = 0$. On a de fait $\alpha_1(x) = x$, $\alpha_1^2(x) = x^2 = f_1(x) - 1$, et $\alpha_1^4(x) = x^4 = (x^2 - 1)f_1(x) + 1$. D'où

$$\alpha_1^2 = (-1, 0), \alpha_1^4 = (1, 0) \text{ et}$$

$$f(\alpha_1) = \alpha_1^4 + 3\alpha_1^2 + 2 = (1, 0) + 3(-1, 0) + 2(1, 0) = (0, 0) = 0.$$

On ne manquera pas de relever que, vu l'exercice 5, l'équation $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$, admet des racines hypercomplexes dans trois champs différents.

Admettons que le réel S soit la somme de la série infinie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} + \dots.$$

Alors

$$S = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots \right) \\ = S_{\text{impair}} + S_{\text{pair}}$$

D'une part, $S_{\text{pair}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right) = \frac{1}{2}S$;

et d'autre part, $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$ implique que $S_{\text{impair}} > S_{\text{pair}}$ et $S_{\text{impair}} > S$.

Ainsi, $S = S_{\text{impair}} + S_{\text{pair}} > \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S = S$, ce qui est contradictoire.

place réservée à la publicité

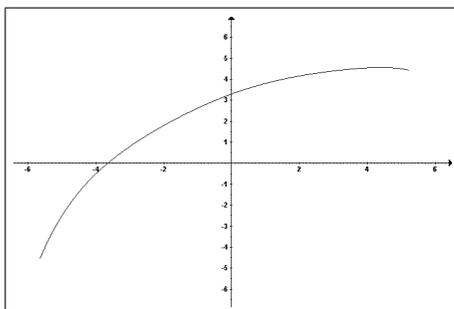
À la découverte des polynômes

J.-P. GOSSELIN,

Mon objectif n'est pas de présenter les polynômes de NEWTON, LAGRANGE, TAYLOR ou d'autres grands mathématiciens mais bien de montrer qu'avec un peu de réflexion et l'aide d'un professeur et avec un support informatique permettant de vérifier l'exactitude de ses intuitions, ces polynômes peuvent être découverts sans trop de difficulté par des élèves motivés, et que parfois des théories qui portent les noms de prestigieux mathématiciens ne sont pas aussi inaccessibles qu'on serait tenté de croire ⁽¹⁾.

Supposons que dans une classe de cinquième les élèves soient en principe tous capables de représenter graphiquement une fonction dont on donne l'expression analytique, mais de manière artisanale, en procédant point par point comme le ferait un ordinateur.

Le professeur se prépare à leur enseigner les dérivées, une méthode plus évoluée pour raconter l'histoire d'une fonction sans manquer le moindre extremum ou changement de concavité et commence par dessiner un graphe de fonction comme celui ci-contre pour introduire une première notion.



Un élève particulièrement motivé l'interrompt et lui demande s'il est possible de trouver l'expression analytique de la fonction dont il vient de tracer le graphe.

Cette question inaugure les découvertes qui font l'objet de cet exposé. On pourrait commencer par ramener cette question à la suivante :

Adresse de l'auteur: Jean Pierre Gosselin, Rue du Haut Pré, 26, 5100 Jambes
courriel : jp.gosselin@worldonline.be

⁽¹⁾ Ce texte est un résumé de l'exposé « Curiosus à la découverte des polynômes » (59 pages) constituant le fichier **polynome.doc** téléchargeable sur le site : <http://home.tiscali.be/menumath>. Le lecteur y trouvera détails et compléments qui ne peuvent trouver leur place ici. Le fichier d'installation **install1024.exe** du logiciel freeware **menumath** utilisé ici peut également être téléchargé sur le même site.

« Peut-on trouver l'expression analytique d'une fonction qui comprend exactement n points donnés, d'abscisses distinctes » ?

Choisissons par exemple les 7 points $(-5;-2.5)$, $(-4;-0.5)$, $(-2;1.8)$, $(0,3.3)$, $(1.5;4)$, $(3;4.4)$, $(5;4.5)$ sur le graphe ci-dessus et cherchons une fonction polynôme qui les comprend.

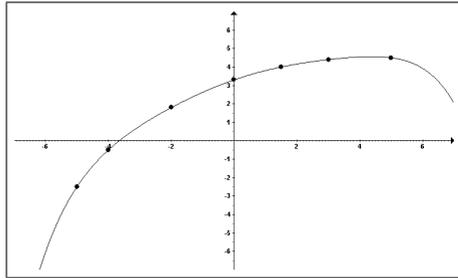
Observons qu'un point donné détermine un polynôme de degré 0, que deux points donnés, d'abscisses distinctes, déterminent un polynôme de degré 0 ou 1, que trois points donnés, d'abscisses distinctes, déterminent un polynôme de degré 0 ou 1, ou 2, ..., et donc que n points donnés, d'abscisses distinctes, déterminent un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

1. Polynômes comprenant n points donnés.

1.1. Système d'équation.

Quel est donc le polynôme de degré ≤ 6 comprenant les 7 points $(-5;-2.5)$, $(-4;-0.5)$, $(-2;1.8)$, $(0,3.3)$, $(1.5;4)$, $(3;4.4)$ et $(5;4.5)$?

La première idée est de résoudre un système de 7 équations à 7 inconnues et on trouve :



$$p(x) = 3.3 + 0.58967x - 0.0842x^2 - 0.00074433x^3 + 0.0013088x^4 + 0.0002063x^5 - 0.0000648x^6$$

Plus généralement, le polynôme $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ comprendra les n points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ..., (x_n, y_n) , si ses n coefficients $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ sont solutions du système de n

équations :

$$\begin{cases} p(x_1) = y_1, \\ p(x_2) = y_2, \\ p(x_3) = y_3, \\ \vdots \\ p(x_n) = y_n. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est le déterminant de VANDERMONDE (1735-1796) :

$$(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \cdots (x_n - x_1)(x_{n-1} - x_{n-2}) \cdots (x_{n-1} - x_1) \cdots (x_2 - x_1)$$

Ce déterminant est non nul, la solution du système existe et est unique.

Un **inconvenient** de cette méthode est de devoir recalculer tout le système d'équations si on ajoute ou supprime un point.

1.2. Polynôme de NEWTON (1642-1727).

Un meilleur polynôme sera obtenu en choisissant davantage de points, mais peut-on raisonnablement songer à résoudre un système de 50 équations à 50 inconnues ou plus ?

Le polynôme de départ était écrit sous la forme :

$$p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}.$$

On pourrait tenter de simplifier les calculs en exprimant ce polynôme p de manière à faire déjà intervenir une partie des données comme par exemple les abscisses x_1, x_2, \dots, x_n des n points donnés ?

Réécrivons ce polynôme p de manière plus générale :

$$p(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + \cdots + a_{n-1}p_{n-1}(x)$$

où p_i représente un polynôme de degré i convenablement choisi.

Déterminons ensuite les coefficients a_i et les polynômes p_i pour que p comprenne les n points.

On peut toujours poser $p_0(x) = 1$

Il faut ensuite exprimer que $p(x_1) = y_1$, $p(x_2) = y_2$, $p(x_3) = y_3$, ..., $p(x_n) = y_n$.

● **Exploisons l'information** : $p(x_1) = y_1$.

Pour que le calcul de $p(x_1)$ se réduise au premier terme du membre de droite, il faudrait que chaque terme du membre de droite, à partir du deuxième, contienne le facteur $(x - x_1)$. Le polynôme p peut s'écrire :

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1)q_0(x) + a_2(x - x_1)q_1(x) + \dots + a_{n-1}(x - x_1)q_{n-2}(x)$$

où q_i représente un polynôme de degré i convenablement choisi.

Ainsi $p(x_1) = a_0$ et donc : $a_0 = y_1$

● **Exploisons ensuite l'information** : $p(x_2) = y_2$.

Pour cela formons : $\frac{p(x) - a_0}{x - x_1} = a_1q_0(x) + a_2q_1(x) + \dots + a_{n-1}q_{n-2}(x)$. Nommons $d_1(x) = \frac{p(x) - a_0}{x - x_1}$ et encore $d_0(x) = p(x)$. Posons ensuite : $q_0(x) = 1$.

Dans ce cas : $d_1(x) = \frac{d_0(x) - d_0(x_1)}{x - x_1} = a_1 + a_2q_1(x) + \dots + a_{n-1}q_{n-2}(x)$.

Pour que le calcul de $d_1(x_2)$ se réduise au premier terme du membre de droite, il faudrait avoir :

$d_1(x) = \frac{d_0(x) - d_0(x_1)}{x - x_1} = a_1 + a_2(x - x_2)r_0(x) + \dots + a_{n-1}(x - x_2)r_{n-3}(x)$ où r_i représente un polynôme de degré i convenablement choisi.

$d_1(x)$ est appelé **différence divisée d'ordre 1** et $d_1(x_2) = a_1$.

● **Semblablement** : $d_2(x) = \frac{d_1(x) - d_1(x_2)}{x - x_2} = a_2 + a_3(x - x_3)s_0(x) + \dots + a_{n-1}(x - x_3)s_{n-4}(x)$, $d_2(x)$ est appelé **différence divisée d'ordre 2** et $d_2(x_3) = a_2$. et ainsi de suite.

● **Finalement** : le polynôme p de départ a été mis sous la forme :

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

et, sachant au départ que $d_0(x_1) = y_1 = a_0$, $d_0(x_2) = y_2$, ..., $d_0(x_n) = y_n$, il suffira à l'aide de la formule de récurrence :

$$d_j(x) = \frac{d_{j-1}(x) - d_{j-1}(x_j)}{x - x_j}$$

de calculer successivement :

$$d_1(x_2) = a_1, d_1(x_3), \dots, d_1(x_n)$$

Approximations

$$d_2(x_3) = a_2, d_2(x_4), \dots, d_2(x_n)$$

⋮

$$d_{n-1}(x_n) = a_{n-1}$$

En pratique, on remplira le tableau suivant :

x_i	$y_i = d_0(x_i)$	$d_1(x_i)$	$d_2(x_i)$	$d_3(x_i)$	$d_4(x_i)$
x_1 (1)	$y_1 = a_0$ (6)				
x_2 (2)	y_2 (7)	a_1 (11)			
x_3 (3)	y_3 (8)	(12)	a_2 (15)		
x_4 (4)	y_4 (9)	(13)	(16)	a_3 (18)	
x_5 (5)	y_5 (10)	(14)	(17)	(19)	a_4 (20)
...

en calculant successivement (algorithme d'AITKEN (1895-1967)) :

$$(11) = \frac{(7)-(6)}{(2)-(1)}, \quad (12) = \frac{(8)-(6)}{(3)-(1)}, \quad (13) = \frac{(9)-(6)}{(4)-(1)}, \quad (14) = \frac{(10)-(6)}{(5)-(1)}, \dots$$

$$(15) = \frac{(12)-(11)}{(3)-(2)}, \quad (16) = \frac{(13)-(11)}{(4)-(2)}, \quad (17) = \frac{(14)-(11)}{(5)-(2)}, \dots$$

$$(18) = \frac{(16)-(15)}{(4)-(3)}, \quad (19) = \frac{(17)-(15)}{(5)-(3)}, \dots$$

$$(20) = \frac{(19)-(18)}{(5)-(4)}, \dots$$

Ce tableau pourrait aussi être calculé à l'aide d'un **tableur**.

● **Exemple :**

Cherchons le polynôme p de degré ≤ 6 comprenant les 7 points du graphe précédent : (-5; -2.5), (-4; -0.5), (-2; 1.8), (0; 3.3), (1.5; 4), (3; 4.4), (5; 4.5).

Après avoir calculé les coefficients $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ en remplissant le tableau on a :

$$\begin{aligned}
 p(x) = & -2.5 \\
 & +2(x+5) \\
 & -0,28333(x+5)(x+4) \\
 & +0,03667(x+5)(x+4)(x+2) \\
 & -0,0051082(x+5)(x+4)(x+2)x \\
 & +0,00062771(x+5)(x+4)(x+2)x(x-1,5) \\
 & -0,0000648(x+5)(x+4)(x+2)x(x-1,5)(x-3)
 \end{aligned}$$

En calculant dans $p(x)$ les coefficients des puissances de x , on s'expose à utiliser des valeurs approchées suite à des valeurs arrondies ou à la perte de chiffres significatifs. Appelons alors $p^*(x)$ le polynôme obtenu.

$$p^*(x) = 3,3 + 0,58967x - 0,0842x^2 - 0,00074433x^3 + 0,0013088x^4 \\ + 0,002063x^5 - 0,000064832x^6.$$

Sur $[-5; 5]$ l'écart maximum entre $p(x)$ et $p^*(x)$ est inférieur à $4,337 \cdot 10^{-18}$.

Dans cet exemple, les coefficients $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ont été obtenus après

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{(6+1)6}{2} = 21 \text{ calculs élémentaires.}$$

Plus généralement, outre les produits à exécuter dans chaque terme, la détermination du polynôme comprenant n points nécessitera au plus $\frac{n(n-1)}{2}$ calculs élémentaires.

L'avantage de cette méthode est de pouvoir calculer le polynôme comprenant un $(n+1)^{\text{e}}$ point en profitant des calculs effectués pour un polynôme comprenant déjà n points. Il suffit en effet de calculer une ligne supplémentaire dans le tableau des calculs.

1.3. Polynôme d'interpolation de LAGRANGE (1736-1813).

Ne pourrait-on pas simplifier davantage encore les calculs en faisant intervenir les abscisses x_1, x_2, \dots, x_n **et** les ordonnées y_1, y_2, \dots, y_n des n points ?

Soit p le polynôme de degré ≤ 3 comprenant les 4 points $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$.

On peut imaginer $p(x)$ écrit sous la forme d'un polynôme de degré 3 du type :

$$p(x) = y_1 \frac{a_1(x)}{b_1} + y_2 \frac{a_2(x)}{b_2} + y_3 \frac{a_3(x)}{b_3} + y_4 \frac{a_4(x)}{b_4}$$

$p(x_1) = y_1$ impose : $\frac{a_1(x_1)}{b_1} = 1$ et $a_2(x), a_3(x), a_4(x)$ contiennent le facteur $(x - x_1)$;

Approximations

$p(x_2) = y_2$ impose : $\frac{a_2(x_2)}{b_2} = 1$ et $a_1(x)$, $a_3(x)$, $a_4(x)$ contiennent le facteur $(x - x_2)$;

$p(x_3) = y_3$ impose : $\frac{a_3(x_3)}{b_3} = 1$ et $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_4(x)$ contiennent le facteur $(x - x_3)$;

$p(x_4) = y_4$ impose : $\frac{a_4(x_4)}{b_4} = 1$ et $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$ contiennent le facteur $(x - x_4)$;

ainsi

$$a_1(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$a_2(x) = (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$a_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)$$

$$a_4(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

et par voie de conséquence :

$$b_1 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)$$

$$b_2 = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)$$

$$b_3 = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)$$

$$b_4 = (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} p(x) &= y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} \\ &+ y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + y_4 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \\ &= \sum_{i=1}^4 \left(y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \end{aligned}$$

Plus généralement on obtient le **polynôme d'interpolation de LAGRANGE** de degré $\leq (n - 1)$:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \left(y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

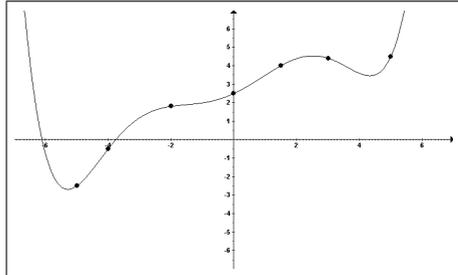
On peut ainsi écrire directement le polynôme recherché et il ne « reste » plus qu'à effectuer de simples produits de facteurs et quelques additions de termes semblables pour trouver les coefficients du polynôme.

L'inconvénient de cette méthode est évident puisqu'elle ne permet pas d'ajouter un nouveau point en bénéficiant des calculs précédents.

Mais qu'arriverait-il **si un de ces points était moins bien situé?**

Par exemple, en remplaçant le point $(0; 3,3)$ par $(0; 2,5)$, le graphe obtenu n'est plus du tout celui escompté, la disposition des points n'étant plus assez régulière.

Dans ce cas, on pourrait songer à prendre une craie assez grosse pour couvrir tous les points d'un trait satisfaisant.



Par contre, pour être plus sûr d'avoir une disposition régulière des points, on pourrait prendre ceux qui se trouvent déjà sur une fonction f connue. On reviendra plus loin sur la « grosse craie », suggéra le professeur, et commençons par creuser l'idée de prendre des points d'une fonction donnée. Evidemment on change alors tout à fait notre problème initial puisqu'on connaît déjà la fonction f et si de plus cette fonction f est déjà un polynôme, la question ne présente plus aucun intérêt sinon de vérifier l'exactitude et la précision des calculs.

Par contre si f n'est pas un polynôme, on pourrait comparer f et le polynôme et aller peut-être au devant de nouvelles découvertes!

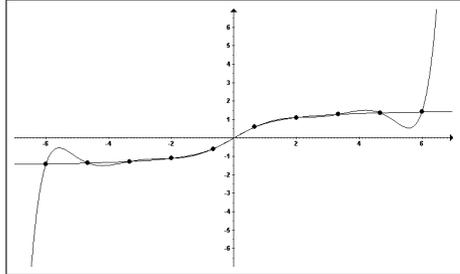
2. Polynômes comprenant n points d'une fonction.

Soit donc un polynôme p de degré $n - 1$ comprenant les n points $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$. Choisissons des abscisses x_1, x_2, \dots, x_n également espacées $x_1 = a, x_2 = a + h, \dots, x_n = a + (n - 1)h$ et poursuivons les recherches par la méthode de NEWTON, qui permet d'ajouter un point en bénéficiant des calculs antérieurs.

Ainsi le polynôme p comprenant 10 points sur $[-6; 6]$ dont les abscisses sont également espacées et les ordonnées sur la fonction périodique $f(x) = \sin(x)$ reste proche du graphe de f puisque l'écart maximal entre f et p sur $[-6; 6]$ est inférieur à 0,054.

Il en est de même du polynôme p comprenant 10 points sur $[-6; 6]$ dont les abscisses sont également espacées et les ordonnées sur la fonction non périodique $f(x) = 3^{\frac{x}{4}} - 2$ qui est quasi confondu au graphe de f , l'écart maximal entre f et p sur $[-6; 6]$ étant inférieur à $6,2 \cdot 10^{-7}$.

Par contre le polynôme p comprenant 10 points sur $[-6; 6]$ dont les abscisses sont également espacées et les ordonnées sur la fonction non périodique $f(x) = \arctg(x)$ « décroche » près des points extrêmes et l'écart maximal entre f et p sur $[-6; 6]$ est inférieur à 0,851.



La fonction \arctg semble rebelle! Les points sont cependant bien disposés, et ce résultat troublant fait songer de nouveau à la « grosse craie ».

2.1. Polynôme descendant de NEWTON.

Avec les abscisses $x_1 = a, x_2 = a + h, \dots, x_n = a + (n - 1)h$, le polynôme :

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \dots$$

devient :

$$p(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)(x - a - h) + a_3(x - a)(x - a - h)(x - a - 2h) + \dots$$

En calculant formellement a_0, a_1, a_2, \dots dans le tableau :

x_i	$y_i = d_0(x_i)$	$d_1(x_i)$	$d_2(x_i)$	$d_3(x_i)$	$d_4(x_i)$
a (1)	$f(a) = a_0$ (6)				
$a + h$ (2)	$f(a + h)$ (7)	a_1 (11)			
$a + 2h$ (3)	$f(a + 2h)$ (8)	(12)	a_2 (15)		
$a + 3h$ (4)	$f(a + 3h)$ (9)	(13)	(16)	a_3 (18)	
$a + 4h$ (5)	$f(a + 4h)$ (10)	(14)	(17)	(19)	a_4 (20)
...

on obtient :

$$\begin{aligned}
 p(x) = & f(a) \\
 & + \frac{1}{1!} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} (x-a) \\
 & + \frac{1}{2!} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} (x-a)(x-a-h) \\
 & + \frac{1}{3!} \frac{f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)}{h^3} (x-a)(x-a-h)(x-a-2h) \\
 & + \frac{1}{4!} \frac{f(a+4h) - 4f(a+3h) + 6f(a+2h) - 4f(a+h) + f(a)}{h^4} \\
 & \qquad \qquad \qquad (x-a)(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-3h) \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

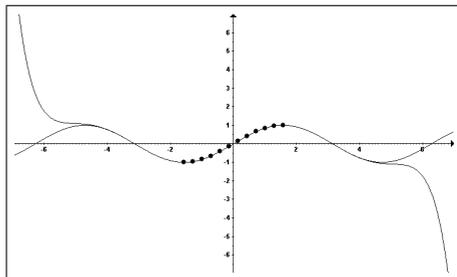
C'est le **polynôme descendant de NEWTON** (ou de GREGORY-NEWTON). Cette formule fascinera ceux qui connaissent déjà celle de TAYLOR et qui songent à faire tendre h vers zéro.

Testons cette formule avec la fonction sinus en choisissant 12 points également espacés sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
 p^*(x) = & -2,8627 \cdot 10^{-20} + x + 7,8488 \cdot 10^{-19}x^2 - 0,16667x^3 \\
 & - 2,8607 \cdot 10^{-18}x^4 + 0,0083333x^5 + 3,6955 \cdot 10^{-18}x^6 \\
 & - 0,00019841x^7 - 1,924 \cdot 10^{-18}x^8 + 2,7539 \cdot 10^{-6}x^9 \\
 & + 3,4187 \cdot 10^{-19}x^{10} - 2,4132 \cdot 10^{-8}x^{11}.
 \end{aligned}$$

Ce résultat est remarquable puisque sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ l'écart entre $p(x)$ et $f(x)$ reste inférieur à $3,034 \cdot 10^{-10}$.

Ainsi donc on peut estimer le sinus de n'importe quel angle (en le réduisant préalablement à cet intervalle si nécessaire) avec une précision remarquable.



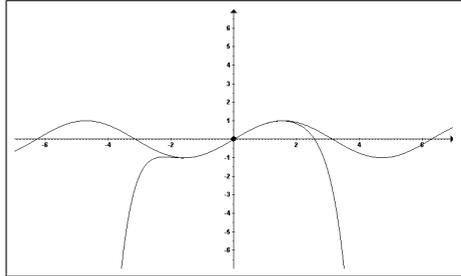
Ce résultat est encore plus étonnant quand on sait qu'il a été établi sans avoir utilisé de théories plus élaborées comme celles des dérivées ou des polynômes des moindres carrés. On reste cependant un peu surpris de

Approximations

trouver des puissances paires de x , mais les coefficients sont si petits qu'on peut les imputer à des erreurs d'arrondis.

Testons encore cette formule avec la fonction sinus en choisissant 9 points d'abscisses également espacées sur l'intervalle $[-0,01, 0,01]$.

Avec surprise on constate que le graphe n'est pas symétrique par rapport à l'origine des axes et donc que polynôme trouvé n'est pas impair.



Que s'est-il donc produit? p comprend les 9 points :

$(-0,01; -0,009999833\dots), (-0,0075; -0,007499929\dots), \dots$

$$p(x) = -0,009999833333416666 + 0,99996145858756442(x+0,01) + \dots$$

$$\begin{aligned} p^*(x) &= x + 0,000000000000006x^2 - 0,166666666666667310x^3 \\ &\quad - 0,000000000000359940x^4 + 0,00833333341567444x^5 \\ &\quad + 0,00000005782111624x^6 - 0,00019865057226506x^7 \\ &\quad - 0,0002819460656858x^8 \end{aligned}$$

Évidemment en imposant le passage par 9 points, l'ordinateur cherchera un polynôme de degré au plus égal à 8, et s'il travaillait avec une précision absolue, il devrait trouver a_8 égal à zéro, ce qui n'est manifestement pas le cas ici.

Sur $[-6; 6]$ l'écart maximum entre $p(x)$ et $p^*(x)$ est inférieur à $8,327 \cdot 10^{-17}$. Cet écart étant très petit, l'erreur ne semble pas provenir du calcul de p^* à partir de p mais bien plutôt de p lui-même, c'est-à-dire du calcul des coefficients a_0, a_1, \dots, a_8 .

On a par exemple :

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{0,99997083349479127 - 0,99996145858756442}{-0,0500 + 0,0075} \\ &= \frac{0,00000937490722686}{0,0025} \\ &= 0,00374996289074258. \end{aligned}$$

On voit que la différence entre deux nombres très proches l'un de l'autre s'accompagne de la perte de chiffres significatifs (**différence évanescence**) et que les résultats successifs vont se dégrader de plus en plus pour devenir parfois franchement erronés. Voilà pourquoi l'ordinateur a trouvé ici a_8 non nul.

En conséquence, les valeurs les plus précises de p seront à priori celles qui correspondent à des valeurs de x proches des premiers points utilisés dans les calculs. Le polynôme descendant de Newton est donc particulièrement précis au voisinage du premier point $x_1 = a$.

2.2. Polynôme ascendant de NEWTON.

Pour avoir un polynôme particulièrement précis au voisinage du dernier point d'abscisse a , il suffira de conduire les calculs en commençant par ce dernier point, ce qui revient encore à imposer aux abscisses $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ précédentes de jouer le rôle des abscisses $a, a - h, a - 2h, \dots, a - (n - 1)h$.

C'est le **polynôme ascendant** de NEWTON particulièrement précis au voisinage du dernier point.

Dès lors, pour que le graphe d'un polynôme qui devrait être impair soit davantage symétrique par rapport à l'origine des axes, on aurait intérêt à conduire les calculs en commençant par le point milieu. Celui-ci dépendra de la parité du nombre n de points.

2.3. Polynôme de STIRLING (1692-1770).

Considérons un nombre n **impair** de points. Soit $n = 2k + 1$. Le rang du point milieu est donc $k + 1$. Dans la suite, pour la facilité, on prendra $n = 9$, donc $k = 4$ et $x_5 = a$.

En imposant aux abscisses $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ de jouer le rôle des abscisses $a, a - h, a + h, a - 2h, a + 2h, a - 3h, a + 3h, a - 4h, a + 4h$ on détermine le polynôme p_g .

Mais on aurait également pu imposer aux abscisses $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ de jouer le rôle des abscisses $a, a + h, a - h, a + 2h, a - 2h, a + 3h, a - 3h, a + 4h, a - 4h$. On détermine alors le polynôme p_d .

Le polynôme de STIRLING est la demi-somme de ces deux polynômes p_g et p_d . Il est particulièrement précis au voisinage du point central a .

Avec la fonction sinus, en choisissant 9 points également espacés sur l'intervalle $[-0,01; 0,01]$ on trouve :

$$p_g^*(x) = x - 0,166666666666666619x^3 + 0,00833333333332509320x^5 \\ - 0,00019834223384068x^7$$

Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ l'écart entre $p_g^*(x)$ et $f(x)$ reste inférieur à $1,553 \cdot 10^{-4}$. Cette fois, les puissances paires de x ont disparu, ce qui montre bien que l'ordre dans lequel les points sont traités peut avoir de l'importance. On observe de plus, ici, que $p_d^*(x) = p_g^*(x)$. En général ces deux polynômes sont très voisins.

2.4. Polynôme de BESSEL (1784-1846).

Considérons enfin un nombre n **pair** de points. Soit $n = 2k$. Le rang du premier des deux points milieux est donc k . Dans la suite, pour la facilité, on prendra $n = 8$, donc $k = 4$ et $x_4 = a$.

En imposant aux abscisses $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ de jouer le rôle des abscisses $a + h, a, a + 2h, a - h, a + 3h, a - 2h, a + 4h, a - 3h$ on détermine le polynôme p_g .

Mais on aurait également pu imposer aux abscisses $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ de jouer le rôle des abscisses $a, a + h, a - h, a + 2h, a - 2h, a + 3h, a - 3h, a + 4h$. On détermine alors le polynôme p_d .

Le polynôme de BESSEL est la demi-somme de ces deux polynômes p_g et p_d . Il est particulièrement précis au voisinage du « point central » $a + \frac{h}{2}$.

Avec la fonction sinus, en choisissant 8 points également espacés sur l'intervalle $[-0,01; 0,01]$ on trouve :

$$p_g^*(x) = x + 0,000000000000000003x^2 - 0,1666666666666666730x^3 \\ + 0,000000000000111188x^4 + 0,008333333338568098x^5 \\ - 0,00000000810810766x^6 - 0,00019881266646411x^7.$$

On observe de plus, ici, que $p_d^*(x) = p_g^*(x)$. En général ces deux polynômes sont très voisins.

3. Découvertes des dérivées et conséquences.

Ainsi donc, en multipliant ses observations, on se dit que si l'ordinateur pouvait traiter tous les chiffres significatifs, la donnée d'un nombre convenable de points permettrait de construire un polynôme qui pourrait « coller » aussi longtemps que l'on veut à une fonction et cela peut-être même si les points étaient très proches les uns des autres. On oserait même penser que toute l'histoire de certaines fonctions pourrait être contenue dans la donnée d'un nombre suffisant de points quasi confondus!

En constatant en particulier que deux points d'une fonction, infiniment proches, semblaient définir une droite tangente au graphe de la fonction, on peut soupçonner l'existence d'un lien entre la pente de cette droite et la croissance de la fonction.

C'est alors le début de la fantastique découverte des **dérivées** dont il ne sera pas question ici et l'on mettra entre parenthèses tout le cheminement au terme duquel les élèves de cinquième ont appris à dériver les fonctions connues, le message de la dérivée première, le message de la dérivée seconde, l'existence de dérivées successives, et l'exposé reprend au moment où les élèves sont en principe capables de construire le graphe de n'importe quelle fonction, sans omettre le moindre extremum ou point d'inflexion.

L'exploration des **dérivées successives** allait leur permettre de donner un sens aux coefficients a_0, a_1, a_2, \dots du polynôme : $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$. En calculant successivement $p(0), p'(0), p''(0), \dots$, on trouve en effet :

$$p(x) = p(0) + \frac{1}{1!}p'(0)x + \frac{1}{2!}p''(0)x^2 + \frac{1}{3!}p'''(0)x^3 + \dots$$

On en conclut que le coefficient $p'(0)$ de x est la pente de la tangente au graphe de p en O et que le signe du coefficient de x^2 est celui de $p''(0)$.

Un petit **exercice** allait d'ailleurs illustrer cette conclusion.

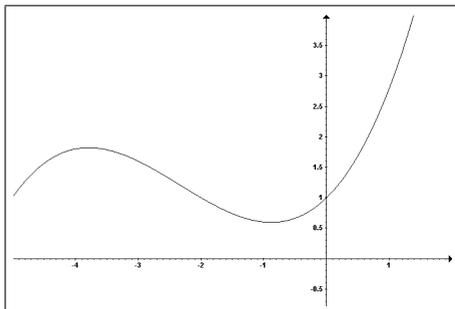
On donne le graphe de la fonction ci-contre : Rien qu'en posant les yeux dessus, sans faire le moindre calcul, dites pourquoi ce graphe est peut-être ou bien certainement pas celui de f , de g ou de h sachant que :

$$f(x) = 0,1x^3 + 0,7x^2 + x + 1?$$

$$g(x) = 0,1x^3 + 0,7x^2 + 2x + 1?$$

$$h(x) = 0,1x^3 - 0,7x^2 + x + 1?$$

Très vite on vérifie que le point $(0; 1)$ est bien sur le graphe de f , de g et de h puisque le terme indépendant est égal à 1, et que le comportement du graphe à l'infini est correct (en supposant qu'il n'y ait plus d'autres extrêmes ni points d'inflexion).



Tenant compte des coefficients de x et de x^2 , on peut conclure que le graphe

- n'est certainement pas celui de g puisque $g'(0) = 2$ et qu'au point O la pente de la tangente au graphe de la fonction donnée n'est manifestement pas 2;
- n'est certainement pas celui de h puisque $h''(0) < 0$ et qu'au point O le graphe de la fonction donnée tourne sa concavité vers les $y > 0$;
- peut être celui de f puisque $f'(0) = 1$ et qu'au point O la pente de la tangente au graphe de la fonction donnée semble bien être 1, d'une part, et puisque $f''(0) > 0$ et qu'au point O le graphe de la fonction donnée tourne sa concavité vers les $y > 0$, d'autre part.

Ensuite, **à la lumière des dérivées**, la formule encadrée découverte plus haut pouvait livrer toute sa richesse. On avait :

$$\begin{aligned}
 p(x) &= f(a) \\
 &+ \frac{1}{1!} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} (x-a) \\
 &+ \frac{1}{2!} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} (x-a)(x-a-h) \\
 &+ \frac{1}{3!} \frac{f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)}{h^3} (x-a)(x-a-h)(x-a-2h) \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

Pour h assez petit, on sait maintenant que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est proche de $f'(a)$.

Dans les mêmes conditions $f''(a)$ doit être proche de $\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}$, etc.

Enfin pour h assez petit $(x-a)(x-a-h)\dots(x-a-nh)$ doit être proche de $(x-a)^{n+1}$.

Approximations

et sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ l'écart entre $p^*(x)$ et $f(x)$ restait inférieur à $1,553 \cdot 10^{-4}$.

●● Deuxième exemple :

En utilisant le développement de MAC-LAURIN jusqu'à l'ordre 11 de $f(x) = \sin x$, on trouve :

$$p_{11}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

$$\begin{aligned} p_{11}(x) &= x - 1,66666666 \cdot 10^{-1} x^3 + 8,33333333 \cdot 10^{-3} x^5 \\ &\quad - 1,98441270 \cdot 10^{-4} x^7 + 2,75573192 \cdot 10^{-6} x^9 \\ &\quad - 2,50521084 \cdot 10^{-8} x^{11}. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ l'écart entre f et p_{11} reste inférieur à $5,626 \cdot 10^{-8}$. En appelant

$$p_1(x) = x;$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{3!};$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!};$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!};$$

...

on observe que la suite $p_1(a)$, $p_3(a)$, $p_5(a)$, $p_7(a)$, ..., $p_{2k+1}(a)$, ... finit toujours par converger même si a est grand. On pourrait donc dire dans le cas de la fonction sinus : « donnez-moi un gros point de la fonction sinus et je vous en représente le graphe d'autant plus loin que le point est gros ».

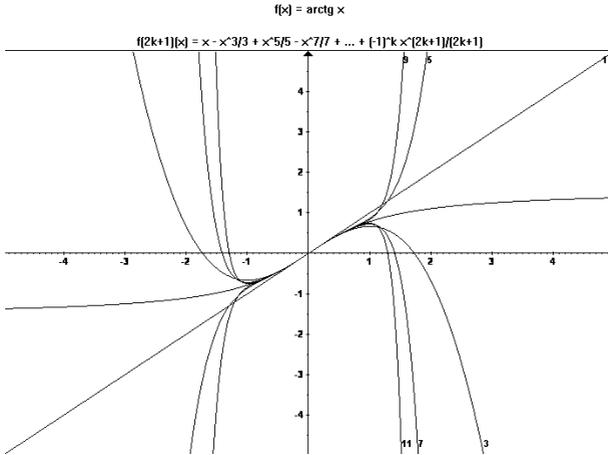
●●● Troisième exemple :

En utilisant le développement de Mac-Laurin de $f(x) = \operatorname{arctg} x$, jusqu'à l'ordre 1, 3, 5,...

$$p_{2k+1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{avec} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

on obtient le graphe

Approximations



On observe que les polynômes ne collent à la fonction \arctg qu'entre -1 et 1. Cette fonction reste « rebelle »!

En appelant $p_1(x) = x$; $p_3(x) = x - \frac{x^3}{3}$; $p_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$;

... $p_{2k+1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$;

on observe que la suite $p_1(a)$, $p_3(a)$, $p_5(a)$, ..., $p_{2k+1}(a)$, ... ne converge que si a est compris entre -1 et 1. Autrement dit :

$$p_{2k+1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{avec } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ne converge que si x est compris entre -1 et 1.

Dans ce cas, on voit qu'il n'est plus possible de coller autant que l'on veut à la fonction, en augmentant le degré du polynôme et qu'il ne sera plus question de dire : « donnez-moi un gros point de la fonction \arctg et je vous en représente le graphe d'autant plus loin que le point est gros ».

Par contre si on s'affranchit de la condition « **COMPRENANT** n points » qui semble très forte en la remplaçant par la condition plus faible : « **PROCHE** de n points » on garde l'espoir de trouver un polynôme qui colle autant que l'on veut à une fonction donnée.

C'est ce que nous observerons dans le prochain *Mathématique et Pédagogie*.

Nouvelle approche pour introduire la notion de tangente à une courbe

V. HENRY, *Ulg*

1. Situations-problèmes

Nous introduisons cette approche par l'étude de trois situations-problèmes diversifiées destinées à motiver l'intérêt des apprenants pour cette notion.

– Technique tennistique

D'un point de vue technique, certains joueurs de tennis se caractérisent par leur style « rotationnel » : pour frapper la balle, leur raquette décrit (approximativement) un arc de cercle. En effet, ces joueurs débutent leur mouvement face au filet, puis tournent le buste sur les hanches et les genoux; la frappe se fait ainsi en rotation et le coup se termine près de l'épaule [Bair, [?]].

Pour un joueur adepte de cette technique, quelle sera la direction prise par la balle en fonction du point d'impact de cette dernière avec la raquette? Comment doit réagir un adversaire face à un tel tennisman?

Intuitivement, il est clair que la direction prise par la balle dépendra du point d'impact avec la raquette ainsi que du cercle décrit par le centre du tamis (en supposant que le joueur est suffisamment adroit pour bien « centrer » toutes ses frappes); en fait, la direction suivie par la balle sera perpendiculaire à la droite déterminée par l'ensemble bras-raquette au moment de l'impact. Cette direction détermine la tangente au cercle décrit par le tamis au point d'impact. Ainsi, on voit sur la figure ??, que la balle prendra des directions fort variées suivant que le joueur attaquera la balle en un point ou en un autre (par exemple, en A ou en B, ...). Il en résulte que l'adversaire peut

aisément prévoir son placement en observant attentivement l'endroit où la balle est frappée.

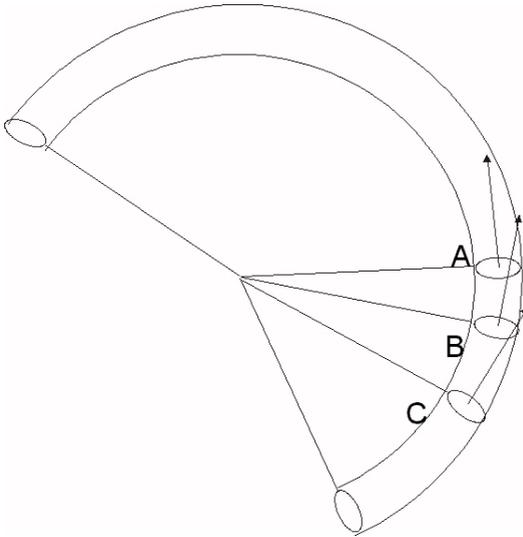


Fig. 1 — Style rotationnel et direction prise par la balle

— **Visibilité**

Examinons la situation représentée sur la figure ?? (page suivante). Un observateur est situé au pied d'une colline stylisée surmontée d'un mât vertical, celui-ci étant suffisamment grand pour que son extrémité supérieure puisse être aperçue depuis le pied de la colline. Quelle est la direction que doit prendre le regard de cet observateur pour observer un point du mât le plus bas possible? [AHA, [?], p. 68].

Désignons par P le point de cette observation. Si le regard de la personne se réalise dans une direction trop peu inclinée par rapport à l'horizontale, par exemple selon la droite PA , l'observateur ne verra que la colline et pas le mât. Par contre, si le regard est dirigé trop haut, par exemple dans la direction PB , une partie visible du mât échappera à l'observateur.

En fait, le point le plus bas du mât qui puisse être aperçu depuis P est situé sur la droite PT qui « frôle » la courbe en P : pour dessiner une telle droite, on applique à vue du mieux qu'on peut une règle sur la courbe [AHA, [?], p. 68]; cette droite PT est la tangente, au point P , à la courbe décrivant la colline.

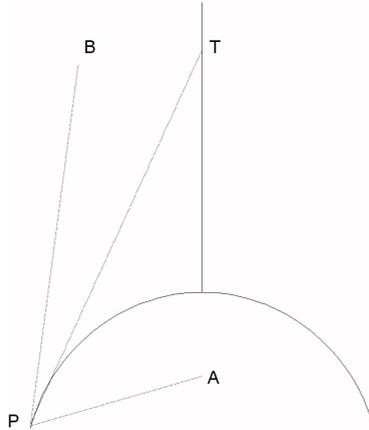


FIG. 2 – Visibilité d'un mât

– **Consommation de sucre**

En 1838, A. COURNOT s'interrogeait sur les variations dans la consommation de sucre en fonction des variations des prix : *Supposons que, dans un pays comme la France, la consommation de sucre soit de 100 millions de kilogrammes, quand le prix est de 2 fr. le kilogramme, et qu'on l'ait vue s'abaisser à 99 millions de kilogrammes, quand le prix s'est élevé à 2 fr. 10 cent.* [Cournot, [?], p. 39] Comment évaluer la consommation qui correspondrait au prix de 2 fr 20 cent, et de 1 fr. 90 cent ?

Il s'agit d'un problème classique en économie : il consiste à étudier la « loi de demande » d'un produit (ici, le sucre) liant la quantité q demandée au prix unitaire p ; cette loi est de la forme générale : $q = F(p)$.

La forme explicite de la fonction de demande F n'est pas donnée dans l'énoncé, mais il est naturel de supposer que cette fonction F est continue, et même dérivable (au voisinage du prix donné, à savoir $p = 2$). En conséquence, comme l'écrit COURNOT lui-même, cette fonction jouira de la propriété commune à toutes les fonctions de cette nature, et sur laquelle repose tant d'applications importantes de l'analyse mathématique : les variations de la demande seront sensiblement proportionnelles aux variations du prix, tant que celles-ci seront de petites fractions du prix originare. D'ailleurs, ces variations seront de signes

contraires, c'est-à-dire qu'à une augmentation de prix correspondra une diminution de la demande. [Cournot, [?], p. 39]

La solution du problème est donnée par COURNOT : On pourra, sans erreur notable, évaluer à 98 millions de kilogrammes la consommation qui correspondrait au prix de 2 fr. 20 cent, et à 101 millions de kilogrammes la consommation correspondante au prix de 1 fr. 90 cent. [Cournot, [?], p. 39]

Ce raisonnement consiste à supposer que le graphe de F est une droite au voisinage de l'abscisse $p = 2$. Bien entendu, la loi de demande n'est généralement pas affine. Ainsi, la réponse de COURNOT n'est qu'approximative et valable uniquement pour des petites variations de prix (comme le constate lui-même l'auteur). D'un point de vue mathématique, il s'agira de remplacer, au voisinage de l'abscisse $p = 2$, le graphe de F par sa tangente au point $(2, F(2))$.

Chacun de ces trois problèmes conduit à remplacer une courbe par une droite qui, en un point donné, « l'épouse le mieux ». D'un point de vue didactique, on est dès lors amené à changer de cadre, en passant géométriquement d'une courbe à une droite ou encore d'un point de vue fonctionnel en passant généralement d'une fonction dérivable à une fonction affine. Cette opération mathématique porte le nom de *linéarisation* [Cazzaro-Noel-Pourbaix-Tilleuil, [?], p. 90]. De nombreuses autres applications permettent de l'illustrer : par exemple, remplacer $\sin x$ par x ou encore $\frac{1}{1+x}$ par $1-x$ pour x petit, rechercher l'extremum d'une fonction en la remplaçant localement par une constante, approcher numériquement un zéro d'une fonction par la méthode de NEWTON-RAPHSON, ...

Intuitivement, il s'agit de regarder une courbe non seulement en un point, mais aussi dans son « voisinage immédiat ». Une bonne image mentale de ce phénomène peut être obtenue en zoomant suffisamment (dans les deux directions) [Cazzaro-Noel-Pourbaix-Tilleuil, [?], p. 45]. En effet, pour observer de manière bien distincte des points fort proches, on peut utiliser (du moins par la pensée) un microscope. Il convient de remarquer que l'utilisation d'un tel « outil » est d'une part très naturelle et d'un usage très courant dans la vie pratique et dans les autres sciences, et est d'autre part préconisée par divers mathématiciens contemporains comme Keisler [?], Deledicq-Diener [?], Pétry [?].

2. Notion de microscope

La méthode que nous proposons consiste donc à regarder une courbe dans l'oculaire d'un microscope pointé sur le point de tangence choisi sur la courbe.

Pour bien comprendre ce que l'on peut voir dans l'oculaire d'un microscope, travaillons tout d'abord sur la droite numérique réelle et considérons un petit voisinage centré sur l'origine, par exemple l'intervalle $I = [-0.1, 0.1]$. Lorsque l'unité de référence n'est pas grande, les trois points -0.1 , 0 et 0.1 sont pratiquement confondus. Pour mieux les distinguer, nous les multiplions par un facteur 10 et nous représentons les résultats obtenus sur une copie conforme de l'axe numérique.

Nous pouvons de la même façon agrandir tout intervalle centré sur un nombre quelconque de l'axe numérique. Il suffit pour cela de translater notre microscope d'autant d'unités que nécessaire sur l'axe des abscisses. La figure ?? illustre l'exemple de l'intervalle centré sur un réel quelconque r : $[r - 0.1, r + 0.1]$

Le recours à un tel microscope a donc pour effet de « transformer » les réels en d'autres réels : par exemple, pour $r = 1$, les nombres 0.8 , 0.99 , $1.3, \dots$ sont vus dans l'oculaire aux nouvelles abscisses respectives -2 , -0.1 , $3, \dots$. En d'autres termes plus formalisés, l'emploi de ce microscope agit comme l'application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie, pour tout réel x , par

$$x \mapsto 10(x - 1).$$

2.1. Microscope de puissance n

Pointons maintenant sur un réel r un microscope qui agrandit n fois (avec n positif) les longueurs sur l'axe réel. L'image dans son oculaire d'un nombre réel x voisin de r est le nouveau réel $X = n(x - r)$. Il est évident que plus la puissance du microscope augmente plus l'image de x s'éloigne de l'image de r . Il nous faut donc imposer à x d'être tel que son image X reste observable. Nous prendrons donc un voisinage du réel r de la forme

$$\left[r - \frac{a}{n}, r + \frac{a}{n} \right]$$

pour une constante a positive qui rend compte de la longueur de l'intervalle observé dans l'oculaire, cette longueur valant $2a$. Nous pouvons alors

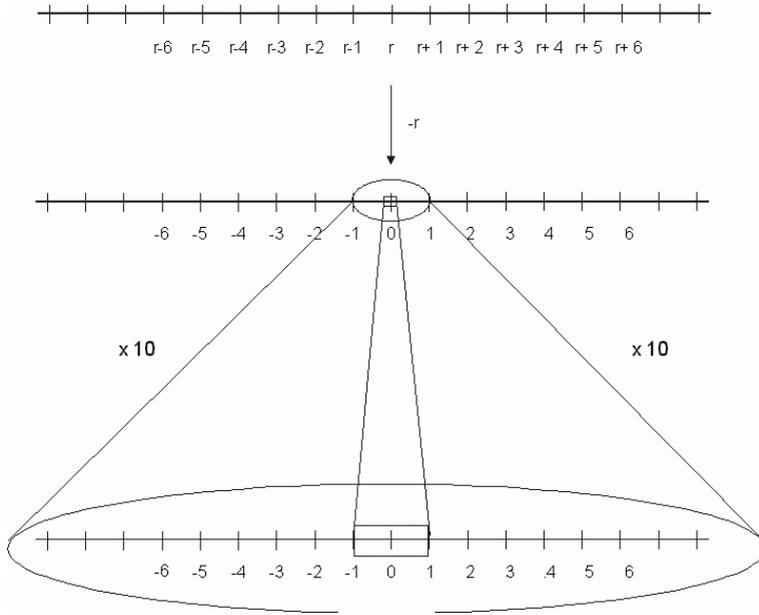


FIG. 3 — Agrandissement d'un petit voisinage de r

considérer l'application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie, pour tout réel x , par

$$x \mapsto X = n(x - r),$$

cette application étant de plus une bijection.

Nous allons à présent diriger un semblable microscope non plus sur un point r de la droite numérique, mais sur un point $P = (r, s)$ du plan numérique. En guise d'exemple, considérons un microscope qui agrandit 10 fois les longueurs sur chacun des deux axes de coordonnées et pointons-le sur $P = (1, 1)$. En appliquant le même raisonnement que ci-dessus aussi bien sur l'axe horizontal que sur l'axe vertical, le « voisinage »

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0.9 \leq x \leq 1.1, 0.9 \leq y \leq 1.1\} = [0.9, 1.1] \times [0.9, 1.1]$$

de P est translaté d'une unité verticalement et horizontalement et « grossi » par un facteur $10^2 = 100$ puisque son image dans l'oculaire est le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

D'un point de vue mathématique, on introduit ainsi une application de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 définie par

$$(x, y) \mapsto (10(x - 1), 10(y - 1)).$$

Plus généralement, nous noterons M_n^P un microscope pointé sur $P = (r, s)$ et qui agrandit n fois (avec $n > 0$) les longueurs aussi bien en abscisses qu'en ordonnées. Nous appellerons n la puissance du microscope. Ce dernier agit comme une application, qui sera également notée M_n^P pour ne pas multiplier les notations, de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 définie par

$$(x, y) \mapsto (X, Y) = (n(x - r), n(y - s)).$$

On a bien entendu ces formules entre les anciennes coordonnées x, y et les nouvelles X, Y :

$$x = r + \frac{X}{n}, \quad y = s + \frac{Y}{n}.$$

2.2. Microscopes et courbes

Nous allons à présent analyser comment une courbe est vue dans l'oculaire d'un tel microscope dirigé vers un point de cette courbe. En guise d'exemple introductif simple, considérons la parabole d'équation $y = x^2$, le point $P = (0.3, 0.09)$ et le microscope M_{10}^P . Un point (x, y) de la parabole est vu, dans le repère de l'oculaire, comme étant le point (X, Y) et l'on a encore cette relation entre les nouvelles coordonnées X, Y :

$$0.09 + \frac{Y}{10} = \left(0.3 + \frac{X}{10}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$Y = 0.6X + \frac{X^2}{10}.$$

L'image dans l'oculaire est encore une parabole, mais de « convexité » moins prononcée; en termes imagés, cette image est « moins courbe » et donc « plus droite » que la parabole initiale; cette tendance à la « rectification » s'explique par la présence du facteur $\frac{1}{10}$ dans le terme en X^2 .

Si nous faisons appel à un microscope plus puissant, par exemple M_{100}^P , l'image dans l'oculaire sera cette fois la parabole d'équation

$$Y = 0.6X + \frac{X^2}{100}.$$

De manière générale, dans l'oculaire d'un microscope \mathcal{M}_n^P de puissance n (avec $n > 0$), on voit la parabole d'équation

$$Y = 0.6X + \frac{X^2}{n}.$$

Au fur et à mesure que la puissance n augmente, le terme $\frac{X^2}{n}$ devient de plus en plus petit puisque X est borné, ce qui se traduit par le fait que l'image de la parabole initiale dans l'oculaire de \mathcal{M}_n^P s'approche toujours davantage de la droite d'équation

$$Y = 0.6X;$$

en revenant aux coordonnées de départ, on obtient la droite d'équation

$$y - 0.09 = 0.6(x - 0.3)$$

qui est en réalité la tangente à la parabole au point P considéré.

Lorsque la puissance du microscope est sans cesse augmentée, l'évolution de la transformation de la parabole en une droite peut être visualisée à l'aide d'un logiciel : il suffit d'effectuer des « zooms » successifs autour de 0.3. Par exemple, la figure ?? illustre ce que donne le logiciel *Mathematica* auquel on a demandé de travailler sur des intervalles toujours plus petits, centrés sur 0.3, en réduisant les ordonnées dans un même rapport d'échelle et en effectuant un changement d'origine pour amener l'image de P en l'origine du nouveau repère.

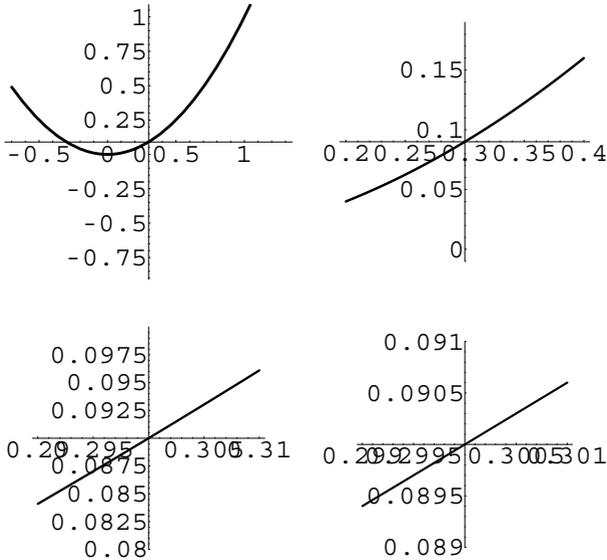
2.3. Microscope et droites

L'exemple traité ci-dessus montre que la « convexité » de la parabole diminue lorsque la puissance n du microscope augmente, au point d'obtenir assez rapidement l'image d'une droite dans l'oculaire.

C'est pourquoi, on pourrait légitimement se demander si, en augmentant encore la puissance du microscope, cette droite ne finirait pas par « redevenir courbe » mais en changeant de concavité.

Il n'en est (heureusement) rien puisque l'image d'une droite dans l'oculaire de tout microscope est encore une droite.

FIG. 4 – Zooms successifs sur $f(x) = x^2$ autour de $x = 0.3$



En effet, considérons une droite quelconque (horizontale, oblique ou verticale) d'équation

$$ax + by = c$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Pour un point $P = (r, s)$ de cette droite et un réel positif n arbitraire, considérons le microscope M_n^P . L'image d'un point (x, y) de la droite est le point (X, Y) , avec $x = r + \frac{X}{n}$ et $y = s + \frac{Y}{n}$. L'équation de la droite donnée permet d'écrire

$$a\left(r + \frac{X}{n}\right) + b\left(s + \frac{Y}{n}\right) = c$$

soit encore, puisque $ar + bs = c$

$$aX + bY = 0 \quad :$$

l'image de la droite initiale fournie par M_n^P est donc la droite qui, dans le nouveau repère, passe par l'origine et est parallèle à la droite de départ.

Après ces généralités, je peux, considérer en elle-même la question

2.4. Microscope et fonctions polynomiales

Considérons une courbe qui est le graphe d'une fonction polynomiale, à savoir la courbe d'équation

$$y = f(x) = \sum_{j=0}^p a_j x^{p-j} \quad (\text{avec } a_0 \neq 0),$$

et choisissons un point $P = (r, s)$ sur cette courbe; on a donc $s = f(r) = \sum_{j=0}^p a_j r^{p-j}$.

Dans l'oculaire du microscope \mathcal{M}_n^P , avec n positif quelconque, on voit une courbe composée de points (X, Y) tels que

$$s + \frac{Y}{n} = \sum_{j=0}^p a_j \left(r + \frac{X}{n} \right)^{p-j},$$

d'où l'on tire l'équation explicite de cette image, à savoir

$$Y = \sum_{j=0}^{p-1} a_j (p-j) r^{p-j-1} X + \varepsilon(n),$$

où l'expression $\varepsilon(n)$ dépend de n et est telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Concrètement, pour n suffisamment grand, le terme $\varepsilon(n)$ devient « négligeable », de sorte que les points (X, Y) visibles dans l'oculaire apparaissent tous alignés et forment ainsi la droite (passant par l'origine) d'équation

$$Y = \sum_{j=0}^{p-1} a_j (p-j) r^{p-j-1} X;$$

la parallèle à cette droite menée par le point P dans le repère initial est la tangente à la courbe menée depuis P ; son coefficient angulaire vaut le nombre dérivé $f'(r)$ et son équation est donc :

$$y - s = \sum_{j=0}^{p-1} a_j (p-j) r^{p-j-1} (x - r).$$

En adaptant le raisonnement ci-dessus, de nombreux exemples similaires peuvent être aisément construits. Bien entendu, il est loisible de commencer avec d'autres cas particuliers avant d'aborder le cas d'un polynôme quelconque.

3. Définition générale

Ces considérations nous amènent à donner une définition à la fois fort générale, rigoureuse et intuitive de la tangente à une courbe.

Soient C une courbe plane et P un de ses points. On dit que C admet en P une tangente lorsque l'image de C vue dans l'oculaire d'un microscope M_n^P de puissance positive n quelconque est d'équation

$$aX + bY + \varepsilon(n) = 0, \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Dans ce cas, la courbe initiale a dans l'oculaire l'apparence d'une droite pour autant que la puissance n soit assez élevée; on définit alors la tangente en P à C comme étant la droite, dans le repère initial, passant par P et parallèle à la droite vue dans l'oculaire, c'est-à-dire la droite d'équation

$$a(x - r) + b(y - s) = 0.$$

Appliquons cette définition à diverses situations classiques. Ainsi, nous allons montrer que notre définition recouvre notamment celles données dans le secondaire relativement à un cercle et au graphe d'une fonction dérivable.

Considérons tout d'abord une fonction $f : x \rightarrow f(x)$ définie sur un intervalle $]a, b[$ et dérivable en $r \in]a, b[$.

L'image visible du graphe d'équation $y = f(x)$, dans l'oculaire de M_n^P , avec $P = (r, f(r))$ et n entier positif quelconque, est constituée de points (X, Y) tels que

$$f(r) + \frac{Y}{n} = f\left(r + \frac{X}{n}\right)$$

ou encore

$$\frac{Y}{n} = \frac{[f(r + \frac{X}{n}) - f(r)]}{\frac{X}{n}} \times \frac{X}{n}.$$

Après simplification, on obtient

$$Y = \frac{[f(r + \frac{X}{n}) - f(r)]}{\frac{X}{n}} \times X$$

où le coefficient de X tend vers $f'(r)$ lorsque n tend vers $+\infty$ vu la dérivabilité de f en r . La fonction admet donc une tangente non verticale en tout point P où elle est dérivable et l'équation de cette tangente s'obtient en revenant aux coordonnées de départ :

$$T_P \equiv y - s = f'(r)(x - r).$$

Analysons à présent une courbe plane C définie par son équation

$$f(x, y) = 0,$$

un de ses points $P = (r, s)$ et un réel positif n quelconque.

L'image de C vue dans l'oculaire du microscope M_n^P est constituée des points (X, Y) qui se trouvent sur une courbe passant par l'origine du nouveau repère et d'équation

$$F(X, Y) = f(r + \frac{X}{n}, s + \frac{Y}{n}) = 0.$$

En supposant la fonction f deux fois continûment dérivable dans un voisinage de P , un développement de Taylor d'ordre 2 permet d'écrire

$$F(X, Y) = f(r, s) + \frac{X}{n}f'_1(P) + \frac{Y}{n}f'_2(P) + \frac{1}{2} [X^2f''_{11}(P) + 2XYf''_{12}(P) + Y^2f''_{22}(P)] + \dots$$

où P est de la forme $P = (r + \theta\frac{X}{n}, s + \theta\frac{Y}{n})$ pour un réel θ strictement compris entre 0 et 1. Comme $f(r, s) = 0$, on en déduit

$$f'_1(P)X + f'_2(P)Y + \varepsilon(n) = 0$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Pour une puissance n du microscope suffisamment grande, on voit dans l'oculaire la droite d'équation

$$f'_1(P)X + f'_2(P)Y = 0.$$

Étudions le cas particulier du cercle centré à l'origine et de rayon unitaire, soit la courbe d'équation

$$x^2 + y^2 = 1;$$

soit $P = (r, s)$ un point sur ce cercle. L'image visible de cette courbe dans l'oculaire de \mathcal{M}_n^P , pour $n > 0$, est composée des points (X, Y) tels que

$$\left(r + \frac{X}{n}\right)^2 + \left(s + \frac{Y}{n}\right)^2 = 1$$

soit, puisque $r^2 + s^2 = 1$, puis en simplifiant par n

$$rX + sY = \frac{-1}{2n}(X^2 + Y^2).$$

Comme $|X| \leq a$ et $|Y| \leq a$, on a, pour

$$\varepsilon(n) = \frac{-1}{2n}(X^2 + Y^2),$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$. Ainsi, la tangente au cercle initial en P est la droite d'équation

$$r(x - r) + s(y - s) = 0.$$

Vérifions que cette droite est bien perpendiculaire au rayon mené par P , c'est-à-dire à la droite passant par l'origine et par P . Si la tangente au cercle est verticale (resp. horizontale), alors $s = 0$ (resp. $r = 0$) et donc r (resp. s) vaut 1 ou -1 : le rayon est bien horizontal (resp. vertical). Si la tangente est oblique, son coefficient angulaire vaut $-\frac{r}{s}$, tandis que celui du rayon est égal à $\frac{s}{r}$: les deux droites sont bien perpendiculaires puisque le produit de leurs pentes vaut -1 .

4. Remarques complémentaires

1. Cette définition englobe le cas des tangentes verticales (cas où $b = 0$ avec $a \neq 0$) : par exemple, la courbe $y^3 = x$ avec $P = (0, 0)$.
2. Cette théorie s'applique sans problème à des courbes qui ne sont pas le graphe de fonctions, ainsi que l'a illustré la courbe $x^2 + y^2 = 1$.
3. Cette définition peut être aisément adaptée au cas des demi-tangentes : par exemple, la courbe $y^2 = x$ avec $P = (0, 0)$.

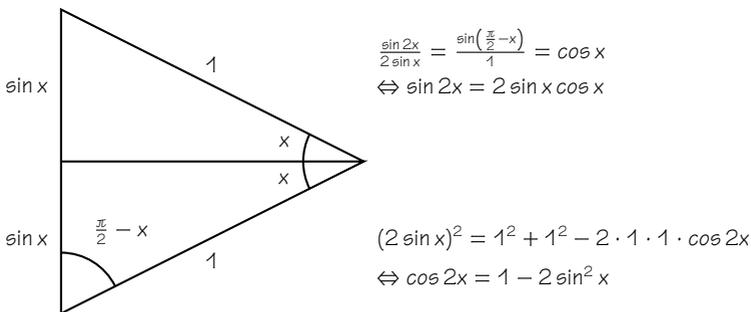
4. Si l'image dans l'oculaire du microscope est une droite non verticale alors la fonction dont la courbe est le graphe est dérivable en l'abscisse considérée; dans ce cas, la droite (passant par l'origine) vue dans l'oculaire n'est rien d'autre que le graphe de la différentielle de la fonction y (définie implicitement par $f(x, y) = 0$) en $x = r$.
5. Le procédé utilisé ci-dessus permet de « visualiser » ce qui se passe dans certains cas de non différentiabilité; considérer, par exemple, la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad [\text{Pétry, [?], p. 164}].$$
6. Cette définition s'applique encore à des courbes définies paramétriquement et en des points qui peuvent être singuliers [Pétry, [?]].
7. Dans le cadre d'un enseignement du calcul différentiel et intégral par l'analyse non standard, cette approche se fait aisément sans référence à la notion de limite, en utilisant le concept de « microscope infiniment puissant ».

Bibliographie

- [1] AHA, *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse*, De Boeck Wesmael, Bruxelles, 1999.
- [2] ANTIBI A., *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions*. Thèse doctorale, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1988.
- [3] ANTIBI A., BAIR J., HENRY V., Une modélisation d'un zoom au moyen de microscopes virtuels, à paraître
- [4] BAIR J., *Les mathématiques et le sport*, Brochure de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques, 1992
- [5] BAIR J. - HENRY V., De l'analyse Classique à l'Analyse Non Standard, *Les cahiers de la mathématique appliquée*, Editions Ferrer - Céfal, Bruxelles - Liège, n° 1, mars 2003, pp. 51-74.
- [6] CAZZARO J.P. - NOEL G. - POURBAIX F. - TILLEUIL P., *Structurer l'enseignement mathématique par des problèmes*, Ed. De Boeck Université, Bruxelles, 2001.
- [7] CURNOT A., *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Librairie J. Vrin, Paris, 1980.

Situations-problèmes

- [8] DELEDICQ A. - DIENER M., *Leçons de calcul infinitésimal*, Ed. A. Colin, Paris, 1989.
- [9] HENRY V., *Les hyperréels en analyse*, *Mathématique et Pédagogie*, n° 141, 2003, pp. 47-58.
- [10] HENRY V., *Quelques questions soulevées par l'enseignement de l'analyse non standard à des économistes*, thèse de didactique des mathématiques, Université Paul Sabatier de Toulouse, en préparation.
- [11] KEISLER H.J., *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt Inc., Boston, 1976.
- [12] PETRY A., *Analyse infinitésimale, Tome 1*, Imprisil, Liège, 2002.
- [13] PETRY A., *A propos des tangentes à une courbe, une présentation non standard*, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, Supplement A tribute to Maurice Boffa, december 2001, pp. 155-166.
-



place réservée à la publicité

Dans nos classes

Darrell Morgan

Les chiffres de 1 à 6 ⁽¹⁾

1. Enoncés

1. Trouve (a) le plus grand, (b) le plus petit résultat possible pour chacun des problèmes suivants en utilisant chacun des chiffres de 1 à 6.

(1)

Ecris tes réponses en chiffres et en lettres.

(2)
$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ + \square \square \square \\ \hline \hline \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r} \square \square \\ \square \square \\ + \square \square \\ \hline \hline \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ - \square \square \square \\ \hline \hline \end{array}$$

Pour les situations (5), (6) et (7), utilise une calculatrice pour tes différents essais. Au fur et à mesure, note chacun de tes essais avec le résultat de manière à pouvoir les comparer.

(5)
$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ \times \square \square \square \\ \hline \hline \end{array}$$

(6)
$$\begin{array}{r} \square \square \square \square \square \\ \times \square \\ \hline \hline \end{array}$$

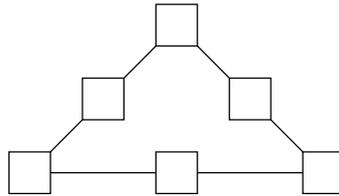
(7)
$$\begin{array}{r} \square \square \square \square \\ \times \square \square \\ \hline \hline \end{array}$$

⁽¹⁾ Le texte qui suit est paru dans le volume 32, n°4, de *Mathematics in School* (revue de la *Mathematical Association*, Angleterre). Nous remercions l'auteur et l'éditeur de nous avoir autorisés à en réaliser une traduction. Celle-ci est due à Y. Noël-Roch.

2. Peux-tu placer les six chiffres (chacun une seule fois!) dans les boîtes de manière à respecter le schéma (a) de l'addition, (b) de la multiplication?

$$\begin{array}{r}
 (8)(a) \quad \square \square \\
 + \quad \square \square \\
 \hline
 \square \square
 \end{array}
 \qquad
 (8)(b) \quad \begin{array}{r}
 \square \square \\
 \times \quad \square \\
 \hline
 \square \square \square
 \end{array}$$

3. Place les six chiffres dans la grille suivante de manière à ce que la somme soit la même sur les trois côtés du triangle. Cela peut s'obtenir avec quatre sommes différentes.



4. Ce « jeu du **« plus petit—plus grand »** » se joue à deux. Comme dans ce qui précède, les six chiffres 1, 2, ... 6 sont utilisés. Chacun est écrit sur une carte dont les dos doivent être dépourvus de tout signe distinctif. Le joueur A ordonne les six cartes comme il le veut. Il les aligne retournées, sauf la première dont la face est visible. Le joueur B doit pronostiquer si la deuxième carte porte un nombre inférieur ou supérieur au nombre lisible sur la première. Le joueur A retourne alors cette deuxième carte :

- si B a bien deviné, il pronostique si la troisième carte cache un nombre inférieur ou supérieur à celui de la deuxième... Il continue aussi longtemps qu'il pronostique bien et qu'il reste des cartes « face cachée ». Les rôles de A et B sont alors inversés.
- si B n'a pas bien pronostiqué, les rôles sont inversés immédiatement : B ordonne les six cartes à sa façon, les range sur la table et A va essayer à son tour de gagner le défi.

Peux-tu préparer un défi (a) facile, (b) difficile pour ton partenaire?

2. Suggestions et réponses

Il peut être utile de mettre à la disposition des élèves des cartes portant les chiffres à utiliser de manière à ce qu'ils puissent les disposer sur leur table de travail. Il faut ensuite qu'ils notent leurs réponses finales.

1.

(1) (a) 654.321 — six cent cinquante-quatre mille trois cent vingt et un.

(b) 123.456 — cent vingt-trois mille quatre cent cinquante-six.

(2) (a) $642 + 531 = 1173$.

(3) (a) $63 + 52 + 41 = 156$.

(b) $135 + 246 = 391$.

(b) $16 + 25 + 34 = 75$.

Un jeu peut être joué après cette première approche en utilisant les grilles (2) ou (3) (la grille de type (2) étant plus intéressante, c'est dans ce cas de figure que le jeu est décrit). Tous les élèves reproduisent la grille, le professeur jette un dé et chaque élève doit écrire le chiffre obtenu dans une des cases libres. Il doit choisir la case de manière à obtenir la somme la plus grande possible lorsque les deux nombres de trois chiffres seront finalement complétés et additionnés. Un chiffre doit être placé après chaque jet (et chaque élève peut vérifier que son voisin le fait). Toute grille portant trace de modification sera disqualifiée.

Pour sa part, le professeur accumule les six résultats du dé et ne complète une grille qu'en fin de partie. Les élèves qui ont obtenu le résultat du professeur sont les gagnants.

Le jeu peut être répété en recherchant le total le plus petit possible.

(4) Le professeur peut choisir de travailler soit dans le cadre des naturels, soit dans le cadre des entiers. Beaucoup d'élèves proposent 111 comme plus petite réponse positive possible alors que $412 - 365 = 47$.

(a) $654 - 123 = 531$

(b) $123 - 654 = -531$

Pour les grilles 4, 5 et 6, il faut encourager les élèves à noter tant leurs essais que leurs réponses, sans quoi on observe très peu d'essais et d'« amélioration ». Les élèves doivent se convaincre eux-mêmes que leur réponse est la plus élevée (ou la plus basse) possible mais des comparaisons entre élèves peuvent s'avérer utiles.

Une autre tactique utile après un certain temps est de donner des réponses et de voir si les élèves peuvent proposer une question adéquate.

(5) (a) $631 \times 542 = 342002$.

(6) (a) $54321 \times 6 = 325926$.

(b) $135 \times 246 = 33210$.

(b) $23456 \times 1 = 23456$.

(7) (a) $6321 \times 54 = 341334$.

(b) $2456 \times 13 = 31928$.

2. (a) Lorsqu'il commence à apparaître que le problème n'admet pas de solution, les élèves pourront essayer de (se) convaincre (ou de démontrer) qu'il en est bien ainsi.

(b) $54 \times 3 = 162$.

3. Les totaux qui peuvent être obtenus sur les trois côtés du triangle sont 9, 10, 11 et 12.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 6 & 5 & \\ 2 & 4 & 3 \\ \hline \text{total} & 9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 5 & \\ & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ \hline \text{total} & 10 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 6 & \\ 3 & 1 & \\ 2 & 5 & 4 \\ \hline \text{total} & 11 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 6 & \\ & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ \hline \text{total} & 12 & \end{array}$$

Ces triangles peuvent prendre un aspect un peu différent si on leur applique des symétries et/ou des rotations. Si les élèves amènent une discussion grâce à cela, c'est l'occasion d'analyser le problème. Trois nombres sont à placer aux sommets du triangle et les trois autres aux milieux des côtés, ces deux groupes de trois nombres ont des rôles différents et l'analyse est payante.

4. La difficulté des défis peut varier très fort. Par exemple

$$4 \quad 5 \quad 2 \quad 6 \quad 1 \quad 3$$

est un défi difficile, spécialement si votre partenaire est averti au départ de ce que vous avez choisi un défi difficile. Nombreuses sont les possibilités de « bluff » et « contre-bluff » (2). Les élèves peuvent jouer plusieurs jeux, remporter un défi apporte un point, celui qui a le plus de points par exemple après cinq jeux est le gagnant.

Vous devrez vous assurer qu'aucune carte n'est faussée (dos reconnaissable, ...); mieux vaut que les élèves écrivent les défis et qu'ils découvrent un chiffre à la fois.

Les défis simples comme par exemple

$$1 \quad 6 \quad 2 \quad 5 \quad 3 \quad 4$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

sont plus évidents.

Combien existe-t-il de défis simples?

(2) Note du traducteur : l'intuition probabiliste est alors perturbée par un jeu psychologique entre les partenaires!

Des problèmes et des jeux

C. Festraets

Condition nécessaire et suffisante

Problème n° 280 de Mathématique et Pédagogie n° 142.

n et p sont des entiers positifs donnés. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système d'équations

$$\begin{cases} x + py = n \\ x + y = p^z \end{cases}$$

admette une solution (x, y, z) où x , y et z sont des entiers positifs. cette solution est-elle unique?

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek

Si $p = 1$, il faut que $n = 1$ et le système se ramène à $x + y = 1$, z étant arbitraire. Mais dans ce cas, x et y ne sont pas tous deux des entiers positifs.

Si $p > 1$, calculons x et y en fonction de z :

$$x = \frac{p^{z+1} - n}{p - 1}, \quad y = \frac{n - p^z}{p - 1}$$

x et y sont positifs à condition que $p^z < n < p^{z+1}$, c'est-à-dire $z < \frac{\ln n}{\ln p} < z + 1$.

$\frac{\ln n}{\ln p}$ ne peut être entier, il faut donc $n > p$ et alors on a $z = \left[\frac{\ln n}{\ln p} \right]$.

Transformons les expressions de x et de y :

$$\frac{p^{z+1} - n}{p - 1} = \frac{p^{z+1} - 1 + 1 - n}{p - 1} = \frac{p^{z+1} - 1}{p - 1} - \frac{n - 1}{p - 1}$$

$$\frac{n - p^z}{p - 1} = \frac{n - 1 - (p^z - 1)}{p - 1} = \frac{n - 1}{p - 1} - \frac{p^z - 1}{p - 1}$$

Les deux fractions où figure z sont entières, on a donc la condition que $p - 1$ divise $n - 1$.

Pour avoir des solutions (x, y, z) entières et positives, il faut que $n > p > 1$,

que n soit compris entre deux puissances consécutives de p et que $p - 1$ soit un diviseur de $n - 1$.

Ces conditions sont suffisantes; en effet en choisissant n et p satisfaisant aux conditions ci-dessus, il est toujours possible de déterminer une seule valeur de z et donc une seule valeur de x et de y .

Par exemple, pour $p = 8$ et $n = 106$, on trouve $z = 2$ car $8^2 < 106 < 8^3$, et de là $x = 58$ et $y = 6$.

P. BORNSZTEIN de Maisons-Lafitte, A. PATERNOTTRE de Boussu et J. G. SEGERS de Liège ont envoyé des **solutions analogues**.

Minimum

Problème n° 281 de *Mathématique et Pédagogie* n° 142.

a_1, a_2, \dots, a_n sont des réels positifs ou nuls tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.
Démontrer que :

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}$$

admet un minimum et déterminer ce minimum.

Solution de J. ANSEEUW de Roesselare

Désignons par S la somme dont on doit déterminer le minimum et calculons l'un de ses termes :

$$\begin{aligned} \frac{a_i}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n} &= \frac{a_i}{1 + 1 - a_i} \\ &= \frac{a_i}{2 - a_i} \\ &= \frac{a_i - 2 + 2}{2 - a_i} \\ &= \frac{2}{2 - a_i} - 1 \end{aligned}$$

D'où $S = 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 - a_i} - n$ (1)

Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2 \geq (\sum u_i v_i)^2$$

où nous posons $u_i = \frac{1}{\sqrt{2-a_i}}$ et $v_i = \sqrt{2-a_i}$.

Nous obtenons : $\sum \frac{1}{2-a_i} \cdot \sum (2-a_i) \geq n^2$.

Mais $\sum (2-a_i) = 2n-1$, donc $\sum \frac{1}{2-a_i} \geq \frac{n^2}{2n-1}$.

Et de l'équation (1), il vient : $S \geq 2 \frac{n^2}{2n-1} - n = \frac{n}{2n-1}$.

Pour $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$, on a $S = \frac{n}{2n-1}$, c'est donc bien le minimum cherché.

Bonnes solutions de P. BORNSZTEIN de Maisons-Lafitte, R. CUCULIERE de Clichy la Garenne, P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek et J. G. SEGERS de Liège.

Coloriage

Problème n° 282 de *Mathématique et Pédagogie* n° 142.

On considère un damier rectangulaire comportant $2m$ lignes et $2n$ colonnes. Dans chaque case du damier se trouve un point rouge ou un point vert. Chaque ligne contient autant de points rouges que de verts, et de même dans chaque colonne. Deux points rouges adjacents d'une même ligne ou d'une même colonne sont joints par un segment rouge. De même, les points verts par des segments verts. Démontrer que le nombre de segments rouges est égal au nombre de segments verts.

Solution de P. BORNSZTEIN de Maisons-Lafitte

Considérons deux lignes adjacentes, disons L et L' .

On note r (resp. v) le nombre de segments rouges (resp. verts) qui relie une case de L et une case de L' .

Il y a alors $n-r$ points rouges de L adjacents à des points verts de L' et $n-v$ points verts de L adjacents à des points rouges de L' .

Par suite le nombre n de points rouges de L' est aussi égal à $(n-v) + r$ et donc $r = v$.

Cela signifie qu'entre deux lignes adjacentes quelconques, le nombre de segments rouges est égal au nombre de segments verts. On en déduit que le nombre total de segments rouges « verticaux » est égal au nombre total de segments verts verticaux.

La même démarche permet de prouver que le nombre total de segments

rouges « horizontaux » est égal au nombre total de segments verts horizontaux.

La conclusion désirée en découle immédiatement.

J'ai aussi reçu de **bonnes solutions** (cependant plus longues) de J. ANSEEUW de Roeselare et J. FINOULST de Diepenbeek.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir pour le 1^{er} mai au plus tard.

289. Partage proportionnel

Soient E et F des points appartenant respectivement aux côtés AB et AC d'un triangle ABC et tels que $|AE| = |AF|$. La médiane AM coupe EF au point Q . Démontrer que $\frac{|QE|}{|QF|} = \frac{|AC|}{|AB|}$.

290. Pythagore

Soit α un angle strictement compris entre 0° et 45° . Démontrer que 2α est un angle aigu d'un triangle pythagoricien (c'est-à-dire un triangle rectangle dont tous les côtés ont des longueurs entières) si et seulement si α est le plus petit angle d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont des longueurs entières.

Probabilité

Deux personnes, A et B , jouent à un jeu dans lequel la probabilité que A gagne une partie est p , la probabilité que B gagne est q et la probabilité d'une partie nulle est r . Au départ, A possède m euros et B possède n euros. A la fin de chaque partie, le perdant donne un euro au gagnant. A et B décident de jouer jusqu'au moment où l'un d'eux aura perdu tout son argent. Quelle est la probabilité que ce soit A qui gagne tout l'argent?

Olympiades

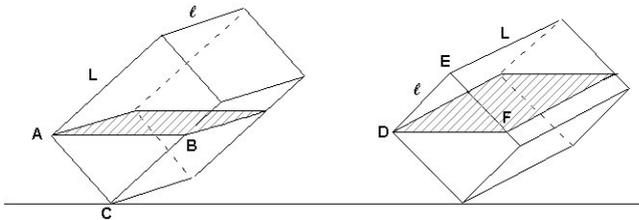
C. Festraets

Voici les solutions des problèmes posés à la finale de la 28^e Olympiade Mathématique Belge. Certaines ont été choisies parmi les meilleures proposées par les élèves finalistes, les autres sont les solutions « officielles », ces problèmes n'ayant été résolus complètement par aucun des concurrents.

Midi 1.

Un aquarium a la forme d'un parallélépipède rectangle de largeur ℓ , de longueur L et de hauteur $h = 30$ cm, avec $\ell < 30$ cm $< L$. Il est totalement rempli d'eau et posé sur un sol horizontal. Pour le vider d'une partie de son eau, si on le fait pivoter autour de l'une des deux plus longues arêtes de sa base jusqu'à ce que cette base fasse un angle de 45° avec le sol, il perd un tiers de son eau; tandis que si on le fait pivoter autour de l'une des deux plus courtes arêtes de sa base jusqu'à ce que cette base fasse un angle de 45° avec le sol, il perd les quatre cinquièmes de son eau. Quel est le volume de cet aquarium?

Solution de Thibaud GODET, élève de 4^e année au Centre Scolaire Saint Michel à Etterbeek



Dans le second cas, le triangle ABC est rectangle en C et il est isocèle car les côtés AC et AB sont inclinés tous deux à 45° sur le sol et sont coupés par l'eau qui est parallèle au sol. Nous pouvons calculer son aire : $\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 \text{ cm}^2 = 450 \text{ cm}^2$. Le volume, en cm^3 , de l'eau est donc $450 \cdot \ell$, il vaut le cinquième du volume total de l'aquarium qui est $30 \cdot L \cdot \ell$.

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse courriel : festraetsc1@brutele.be

D'où $450 = 6 \cdot \ell$ et $L = 75$.

Dans le premier cas, nous pouvons maintenant chercher la largeur.

Le triangle DEF est rectangle en E et isocèle ($|DE| = |DF|$); son aire vaut (en cm^2) $\frac{1}{2} \cdot \ell^2$. Nous pouvons donc dire que le volume de l'eau $\frac{1}{2} \cdot 75 \cdot \ell^2$ vaut le tiers du volume total qui est $30 \cdot 75 \cdot \ell$. D'où $\frac{1}{2} \cdot \ell^2 = 10 \cdot \ell$ et de là, $\ell = 20$ (car $\ell \neq 0$).

Maintenant que nous connaissons la largeur et la longueur de l'aquarium, calculons le volume total, en cm^3 , il vaut $75 \cdot 20 \cdot 30 = 45\,000$.

Midi 2.

Les quatre nombres réels positifs a, b, c, d sont tels que $a > b > c > d$ et $a + b + c + d = 1$. Dans ces conditions, l'inégalité $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 < 1$ est-elle toujours valide?

Solution

$a > b > c > d$, donc $ab > b^2$, $ac > c^2$, $ad > d^2$, $bc > c^2$, $bd > d^2$ et $cd > d^2$. De là

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c + d \\ &= (a + b + c + d)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \\ &> a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2c^2d^2 + 2d^2. \end{aligned}$$

Et on a bien : $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 < 1$.

Midi 3.

En numération décimale, on considère tous les nombres de 10 chiffres distincts, le chiffre le plus à gauche étant différent de 0. Combien de ces nombres sont divisibles par 99 999?

Solution de Raphaël LIÉGEOIS de l'Athénée Royal François Bovesse à Namur

Cette question revient à déterminer combien il y a de multiples de 99 999 qui ont 10 chiffres distincts, le premier chiffre étant différent de 0.

Il faut multiplier $99\,999 = 10^5 - 1$ par un nombre de cinq chiffres pour arriver à un nombre de dix chiffres (le plus petit est 10 234 et le plus grand est 98 765, pour que les 10 chiffres soient distincts).

Posons \overline{wxyz} ce nombre de cinq chiffres. Le nombre de possibilités pour ce

nombre donne le nombre de solutions.

$$\begin{aligned} (10^5 - 1) \cdot \overline{vwxyz} &= \overline{vwxyz00000} - \overline{vwxyz} \\ &= \overline{vwxyz(z-1)(9-v)(9-w)(9-x)(9-y)(10-z)} \end{aligned}$$

Les chiffres de ce nombre doivent être deux à deux distincts. De plus v doit être non nul, il y a donc 9 possibilités pour v .

Pour w , il faut $w \neq v$ et $w \neq 9-v$, d'où 8 possibilités.

Pour x , il faut $x \neq v$, $x \neq w$, $x \neq 9-v$ et $x \neq 9-w$, d'où 6 possibilités.

Pour y , il faut $y \neq v$, $y \neq w$, $y \neq x$, $y \neq 9-v$, $y \neq 9-w$ et $y \neq 9-x$, d'où 4 possibilités

Pour z , il faut $z \neq v$, $z \neq w$, $z \neq x$, $z \neq y$, $z \neq 9-v$, $z \neq 9-w$, $z \neq 9-x$ et $z \neq 9-y$, d'où 2 possibilités.

Au total, il y a donc $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$ possibilités pour \overline{vwxyz} , ce qui donne 3456 nombres de 10 chiffres répondant à la question.

Midi 4.

Soit ABC un triangle isocèle avec $|AB| = |AC|$. La bissectrice de l'angle \widehat{ABC} coupe la droite AC en un point D tel que $|BC| = |BD| + |AD|$. Déterminer la mesure en degrés de l'angle \widehat{BAC} .

Solution

Construisons le cercle circonscrit au triangle ABD , il coupe BC en E .

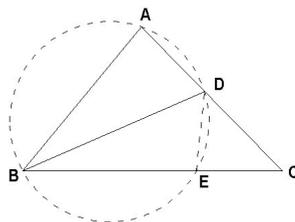
BD est la bissectrice de l'angle B , donc D est le milieu de l'arc AE et on a $|AD| = |DE|$.

$\widehat{BED} = 180^\circ - A$, car le quadrilatère $ABED$ est inscrit dans le cercle. Or $A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 2C$, d'où $\widehat{BED} = 2C$.

D'autre part, $\widehat{BED} = \widehat{EDC} + C$, d'où $\widehat{EDC} = C$ et le triangle DEC est isocèle. On a alors $|CE| = |DE| = |AD|$.

Par hypothèse, $|BC| = |BD| + |AD|$, or $|AD| = |CE|$, donc $|BE| = |BD|$ et le triangle BED est isocèle.

Calculons l'angle \widehat{BED} dans le triangle isocèle BED : $\widehat{BED} = 90^\circ - \frac{1}{4}B$. Mais on sait que $\widehat{BED} = 180^\circ - A = 2B$, d'où $2B = 90^\circ - \frac{1}{4}B$, ce qui donne $B = 40^\circ$ et finalement $A = 100^\circ$.



Maxi 1.

Entre les chiffres 4 et 9, on insère un ou plusieurs chiffres 4 suivis par le même nombre de chiffres 8. Les deux premiers nombres ainsi obtenus sont $4489 = 67^2$ et $444889 = 667^2$. Tous les nombres construits de cette façon sont-ils des carrés d'entiers ?

Solution de Timothée MARQUIS, élève de 5^e année à l'Institut de Dames de Marie à Woluwé-St-Lambert

On a $4489 = 4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9$
 $444889 = 4 \cdot 10^5 + 4(10^4 + 10^3) + 8(10^2 + 10) + 9$

La forme générale du nombre demandé est, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} & 4 \cdot 10^{2n+1} + 4(10^{2n} + 10^{2n-1} + \dots + 10^{n+1}) + 8(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10) + 9 \\ &= 4(10^{2n+1} + 10^{2n} + \dots + 10) + 4(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10) + 9 \\ &= 4\left(\frac{10^{2n+2} - 1}{10 - 1}\right) + 4\left(\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1}\right) + 9 \\ &= \frac{4 \cdot 10^{2n+2} - 40}{9} + \frac{4 \cdot 10^{n+1} - 40}{9} + \frac{81}{9} \\ &= \frac{4 \cdot 10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 1}{9} \\ &= \left(\frac{2 \cdot 10^{n+1} + 1}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

ce qui est bien un carré parfait car $10^{n+1} \equiv 1 \pmod{3}$, donc $2 \cdot 10^{n+1} + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ et $\frac{2 \cdot 10^{n+1} + 1}{3}$ est un entier.

La réponse est donc « oui ».

Maxi 2.

Soit un quadrilatère inscriptible ABCD tel que $\widehat{ACB} = 2\widehat{CAD}$ et $\widehat{ACD} = 2\widehat{BAC}$. L'égalité $|CA| = |CB| + |CD|$ est-elle nécessairement vraie ?

Solution de Antony TRINH, élève de 6^e année à l'Athénée R. Catteau à Bruxelles

Posons $\alpha = \widehat{CAD}$ et $\beta = \widehat{BAC}$.

Comme ABCD est un quadrilatère cyclique :

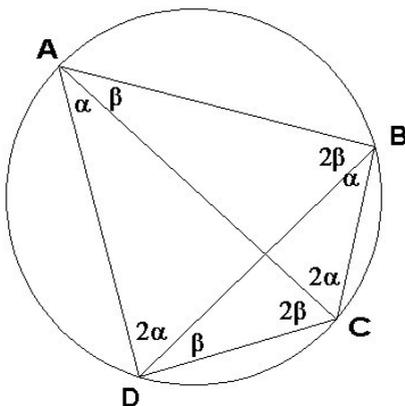
$$\begin{aligned} \widehat{DBC} &= \alpha, \widehat{ADB} = 2\alpha, \widehat{BDC} = \beta, \widehat{ABD} = 2\beta, \\ \widehat{BAD} + \widehat{BCD} &= 180^\circ \text{ d'où } 3(\alpha + \beta) = 180^\circ \text{ et } \alpha + \beta = 60^\circ. \end{aligned}$$

Par la relation des sinus :

90 *comme on monte finalement pour la première fois sur une bicyclette.*

$$\frac{|CA|}{\sin(\alpha + 2\beta)} = \frac{|CB|}{\sin \beta} \quad \text{et} \quad \frac{|CA|}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{|CD|}{\sin \alpha}$$

$$|CA| = |CB| + |CD| \iff |CA| = |CA| \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + 60^\circ)} + |CA| \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + 60^\circ)} \quad (1)$$



Or $\sin(\alpha + 60^\circ) = \sin(\beta + 60^\circ)$ puisque $\alpha + 60^\circ + \beta + 60^\circ = 180^\circ$;
d'où l'égalité (1) devient $1 = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + 60^\circ)} + \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + 60^\circ)}$
ce qui est équivalent à $\sin \alpha + \sin \beta = \sin(\alpha + 60^\circ)$
ou encore : $\sin \alpha + \sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha = \sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha$
et enfin $\sin \alpha = 2 \cos 60^\circ \sin \alpha = \sin \alpha$.
Comme aucune restriction n'a été posée sur α et β au cours des calculs,
l'égalité $|CA| = |CB| + |CD|$ est toujours réalisée.

Maxi 3.

Sur un cube dont la longueur des côtés est 1, considérons des chemins allant d'un sommet (quelconque) du cube à un autre (quelconque). Ces chemins sont formés par des arêtes et des diagonales de faces du cube et ils ne passent pas deux fois par le même point.
Calculer la plus grande longueur d'un tel chemin.

Solution de Cédric TROESSAERT, élève de 6^e année à l'Athénée Centre Ardenne à Libramont

Appelons « déplacement » une diagonale ou un côté parcouru.

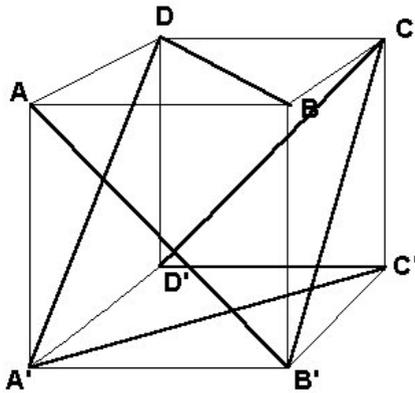
Chaque déplacement va d'un sommet du cube à un autre. Comme il y a 8 sommets et qu'on ne peut pas passer deux fois au même point, on ne peut passer qu'une fois par sommet, donc on a droit à maximum 7 déplacements (si on passe par les 8 sommets).

Une diagonale (de longueur $\sqrt{2}$) est plus longue qu'un côté (de longueur 1), il est donc plus avantageux de parcourir une diagonale qu'un côté.

On ne peut pas parcourir 7 diagonales, car il n'y a que 6 faces dans un cube. On aurait deux diagonales dans la même face, or deux diagonales d'un carré ont toujours au moins un point commun.

Le nombre maximum de diagonales qu'on peut parcourir est 6. Comme le nombre maximum de déplacements est 7, le chemin le plus long, s'il est possible, comportera 6 diagonales et 1 côté.

Ce chemin est possible, en voici un exemple :



$$A \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow D' \rightarrow C' \rightarrow A' \rightarrow D \rightarrow B$$

Le chemin le plus long aura une longueur de $l = 1 + 6\sqrt{2}$.

Maxi 4. Dans la table infinie ci-dessous, la première ligne et la première colonne sont formées par la progression arithmétique 4, 7, 10, 13, 16, ... de raison 3. Les lignes suivantes sont aussi des progressions arithmétiques successivement de raisons impaires 5, 7, 9, 11, ...

4	7	10	13	16	19	22	...
7	12	17	22	27	32	37	...
10	17	24	31	38	45	52	...
13	22	31	40	49	58	67	...
16	27	38	49	60	71	82	...
19	32	45	58	71	84	97	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

L'affirmation suivante est-elle correcte pour tout entier strictement positif n ? « Le nombre n ne figure pas dans cette table si et seulement si $2n + 1$ est premier ».

Solution de Vincent DIEDERICH, élève de 5^e année de l'Athénée de Luxembourg

p étant un entier strictement positif, les éléments de la 1^{re} colonne peuvent s'écrire sous la forme $3p + 1$, les éléments de la 2^e colonne peuvent s'écrire sous la forme $5p + 2$, les éléments de la 3^e colonne peuvent s'écrire sous la forme $7p + 3$, les éléments de la 4^e colonne peuvent s'écrire sous la forme $9p + 4$, et ainsi de suite, p déterminant la ligne du nombre considéré. Dans toutes ces formulations ($3p + 1, 5p + 2, 7p + 3, \dots$), il s'agit à chaque fois d'une relation linéaire du type $ax + b$. De plus, il existe un rapport entre a et b : $a = 2b + 1$ où b détermine la colonne du nombre en question. Finalement tous les éléments de la table peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} n_{b,p} &= (2b + 1)p + b \\ &= 2bp + p + b \end{aligned} \quad (1)$$

Dire que « le nombre n ne figure pas dans cette table si et seulement si $2n + 1$ est premier » équivaut à dire « le nombre n figure dans cette table si et seulement si $2n + 1$ n'est pas premier ».

Soit n un nombre de la table. De l'égalité (1), il vient :
 $2n + 1 = 4bp + 2p + 2b + 1 = 2p(2b + 1) + (2b + 1) = (2b + 1)(2p + 1)$
 Or $2b + 1$ et $2p + 1$ sont deux entiers strictement supérieurs à 2. Par conséquent, leur produit $2n + 1$ ne peut être un nombre premier. Réciproquement, si $2n + 1$ n'est pas premier, alors comme $2n + 1$ est impair, il existe deux nombres impairs $2p + 1$ et $2b + 1$ tels que $2n + 1 = (2p + 1)(2b + 1)$ et alors n figure dans la table à la ligne p et la colonne b .

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Décembre 2003)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :

– Cotisation ordinaire : 20 €

– Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 28,50 €

– Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 40 € (non PRIOR), 53 € (PRIOR)

Autres pays : 47 € (non PRIOR), 70 € (PRIOR)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 26 €.

Europe : 37 € (non PRIOR), 43 € (PRIOR).

Autres pays : 39 € (non PRIOR), 52 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2001 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.

Années 2002 ou 2003 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

● Abonnements groupés à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 3,80 €.

Europe : 6 € (non PRIOR), 7,80 € (PRIOR).

Autres pays : 6,60 € (non PRIOR), 10 € (PRIOR).

● Abonnements groupés aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 6,60 €.

Europe : 11 € (non PRIOR), 14 € (PRIOR).

Autres pays : 12 € (non PRIOR), 18 € (PRIOR).

Abonnements individuels.

- Abonnements à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 5 €. Europe (1) : 11,50 € (non PRIOR), 15,80 € (PRIOR).
Autres pays : 12,75 € (non PRIOR), 20,40 € (PRIOR).

- Abonnements aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 10 €. Europe : 16,50 € (non PRIOR), 20,50 € (PRIOR).
Autres pays : 20 € (non PRIOR), 25 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2001-2002 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.

Année 2002 ou 2003 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe (1) : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 43 €. Ils recevront le Bulletin de l'APMEP, le BGV (Bulletin à Grande Vitesse) et PLOT.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP; ils bénéficient du prix « adhérents »..

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 5 de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international au compte CCP « giro » 000-0728014-29 de SBPMef. Si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer un virement de CCP à CCP, (virement « giro »), envoyez-nous un mandat poste international. Seuls les chèques encaissables sans frais en Belgique seront acceptés.

Le coin du trésorier

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n° 7 à n° 11 et n° 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 6 (Statistiques)	7,40 €	6 €	voir ci-dessous
►►► NOUVEAUX DOSSIERS ◀◀◀			
Dossier 7 (Vers les infinement petits)			
Simone Trompler et Guy Noël	6 €		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire)			
Claude Villers et ali	9 €		T3
Jacques Bair , Mathématique et Sport	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12 €	9,50 €	T2
G. Robert , CD-Rom, logiciels mathématiques	5 €	/	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 4	5 €		voir ci-dessous
Tome 5	6 €		voir ci-dessous
Tome 4 et 5	10 €		voir ci-dessous

Frais d'expédition en non PRIOR

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,60 €	2,70 €	3,00 €
Tarif 2	2,30 €	4,70 €	5,80 €
Tarif 3	3,50 €	4,70 €	5,80 €
Tarif 4	4,00 €	11,50 €	16,50 €
Tarif 5	5,60 €	15,50 €	26,50 €
Tarif 6	6,20 €	15,50 €	26,50 €
Tarif 7	6,95 €	15,50 €	26,50 €

Pour les expéditions en **PRIOR**, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.

Exemples de tarification pour commandes groupées

Tomes 4 ou 5 des questions OMB

Dossier 6 (Statistiques)

1 ex.	T1	7 à 10 ex.	T5
2 ou 3 ex.	T3	11 à 14 ex.	T6
4 à 6 ex.	T4	15 à 17 ex.	T7

1 ex.	T1	10 à 13 ex.	T5
2 à 4 ex.	T2	14 à 18 ex.	T6
5 à 9 ex.	T4	19 ou 20 ex.	T7