

Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique)
Tél.-Fax : 32-(0)65-373729, courriel : sbpm@umh.ac.be, Web : <http://www.sbpn.be>

Membres d'honneur : H. Levarlet, W. Servais (†)

Conseil d'administration : J.-P. Cazzaro, M. Denis-Pecheur, B. Desaedeleer, P. Dupont, Cl. Festraets-Hamoir, M. Frémal, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, P. Marlier, Ch. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler, Ch. Van Hooste

Président :

Ch. Van Hooste, Chemin de Marbisœul
25, 6120 Marbaix-la-Tour,
Tél. 071-217793

Vice-Président,

Olympiades Internationales :

G. Troessaert, Recogne sur le Chêne 58,
6800 Libramont, Tél. 061-224201

Administrateur délégué :

Ch. Michaux, Rue Brigade Piron 290,
6061 Montignies-sur-Sambre,
Tél. 065-354706

Commission Congrès, Publicité :

M. Denis-Pecheur, Rue de la Ferme 11,
5377 Noiseux (Somme-Leuze),
Tél. 086-323755

Trésorier :

P. Marlier, Rue de Plainevaux 185/15,
4100 Seraing, Tél. 04-3374945

Secrétaire :

M. Frémal, Rue W. Jamar 311/51,
4430 Ans, Tél. 04-2636817

Olympiades nationales et site WEB :

Cl. Festraets-Hamoir, Rue J.B.
Vandercammen 36, 1160 Bruxelles
Tél. 02-6739044

Contact Presse :

N. Miewis-Seronveaux, Avenue de Péville
150, 4030 - Grivegnée
Tél. 04-3431992

Math-Jeunes Junior :

A. Paternotte, Rue du Moulin 78,
7300 Boussu, Tél. 065-785064

SBPM-Infor :

R. Gossez, Albert I Laan 13, 1560
Hoeilaart, Tél. 02-6579892

Math-Jeunes Senior :

G. Noël, Rue du 1^{er} Chasseur à cheval
16/14, 7000 - Mons, Tél. 065-848621

Portefeuille de lecture :

M. Herman, Rue Rafhay 95, 4630 Sou-
magne, Tél. 087-267023

Mathématique et Pédagogie :

J. Miewis, Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée, Tél. 04-3431992

Comité de rédaction : J. Miewis, J. Bair, Ch. Bertrand, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, Cl. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, Ch. Michaux, J. Navez, G. Noël, N. Vandenabeele, Ch. Van Hooste, Cl. Villers



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

Articles

- *D. De Bock, W. Van Dooren, D. Janssens et L. Verschaffel, Pourquoi la linéarité joue-t-elle des tours aux élèves? Une étude approfondie dans l'enseignement secondaire* 3
- *R. Greco - B. Micale - F. Milazzo, L'atelier de mathématiques : une activité de recherche sur les quadrilatères* 23
- *G. Lasters, H. Staelens, De Pascal à Einstein* 37
- *J. Miewis, Le Livre mathématique de l'île maritime* 47
- *J.-P. Houben, Lieux avec Cabri-Géomètre* 61
- *J.-P. Gosselin, À la découverte des polynômes - 2^e partie* 65

Rubriques

- *Y. Noël-Roch, Dans nos classes* 77
- *C. Festraets, Olympiades* 80
- *C. Festraets, Des problèmes et des jeux* 84
- *P. Marlier, Le coin du trésorier* 87

NOTE

- * Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
- * Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
- * Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- * Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (L^AT_EX 2_ε, Word); les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés. L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
- * La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
Pour les articles :
Gribaumont A., *Les structures de programmation, Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
- * Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- * MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Pourquoi la linéarité joue-t-elle des tours aux élèves ? Une étude approfondie dans l'enseignement secondaire

D. DE BOCK, W. VAN DOOREN, D. JANSSENS ET L. VERSCHAFFEL,

Mots-clé : linéarité, grandeurs proportionnelles, aire, figures semblables

Quiconque croit que, si l'on double le diamètre d'un cercle, l'aire est également doublée, est tombé dans le piège linéaire. Mais il peut être rassuré : il n'est certes pas le seul à pâtir de l'illusion de la linéarité. L'histoire des mathématiques regorge d'exemples de ce genre. Rappelons-nous, par exemple, l'esclave dans le dialogue « Ménon » de PLATON qui devait dessiner un carré dont l'aire est le double de celle d'un carré donné, ou alors CARDAN qui pensait qu'il faut lancer 18 fois deux dés avant que la probabilité d'un double-six atteigne les 50 %. A quel point cette illusion est-elle encore présente à ce jour auprès des élèves de 12 à 16 ans ? Dans cet article, nous présenterons les résultats des recherches récentes effectuées à Leuven au sujet de l'illusion de la linéarité dans le contexte de l'agrandissement et de la réduction de figures géométriques. Après un aperçu des résultats d'une série d'études collectives à ce sujet, nous décrirons en détails une étude approfondie examinant les causes de ce phénomène par le biais d'interviews individuelles.

Adresse de l'auteur: DIRK DE BOCK, Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie (CIP&T), K.U.Leuven et EHSAL, Europese Hogeschool Brussel, WIM VAN DOOREN, Aspirant du Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO) de Flandres, Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie (CIP&T), K.U.Leuven, DIRK JANSSENS, Academische Lerarenopleiding Wiskunde, K.U.Leuven, LIEVEN VERSCHAFFEL, Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie (CIP&T), K.U.Leuven, Vesaliusstraat 2, 3000 Leuven. courriel : dirk.debock@avl.kuleuven.ac.be

Cet article est la traduction d'un manuscrit néerlandais préparé dans le cadre du projet de recherche *L'illusion de la linéarité : analyse et amélioration*. Ce projet est subventionné par le Conseil de Recherche de la K.U.Leuven (OT-2000-10). Les auteurs remercient cordialement MICHEL ROELENS qui s'est chargé de la traduction française.

1. Introduction

Selon FREUDENTHAL [7], la linéarité (ou la proportionnalité directe) est une propriété tellement évidente que l'on est facilement tenté de traiter n'importe quelle relation entre des grandeurs comme si elle était linéaire. Bien souvent, les élèves mais aussi plusieurs adultes ont tendance à voir partout des relations linéaires et à appliquer la linéarité même dans des situations où ceci n'est pas justifié. Dans ce cas, on parle parfois de l'illusion de la linéarité. Dans la littérature, on trouve d'innombrables exemples de ce phénomène, empruntés à des domaines divers des mathématiques (voir p.e. [2]).

Un exemple élémentaire, dans l'histoire des probabilités, est l'erreur commise par le mathématicien italien CARDAN (1501-1576). CARDAN, qui raisonna correctement que la probabilité d'un double-six en un lancement de deux dés vaut $\frac{1}{36}$, continua son raisonnement en prétendant qu'il faut lancer 18 fois les deux dés afin que la probabilité d'un double-six atteigne au moins 50%. CARDAN s'appuyait donc sur un lien proportionnel (direct) entre le nombre de lancements et la probabilité d'un double-six. Une recherche récente effectuée par VAN DOOREN, DE BOCK et VERSCHAFFEL [16] démontre qu'aujourd'hui encore les élèves de 15 à 18 ans tombent massivement dans ce piège linéaire. Les élèves de cette recherche avaient vraisemblablement une bonne compréhension qualitative des différentes situations aléatoires qu'on leur avait présentées (ainsi, par exemple, presque tous les élèves estimaient correctement que la probabilité d'un succès augmente avec le nombre de tentatives et diminue avec le nombre requis de succès). En même temps, ces élèves étaient fortement portés à quantifier de façon linéaire cette compréhension qualitative correcte (ainsi, par exemple, la grande majorité des ces élèves pensaient que la probabilité d'un succès est doublée lorsque l'on double le nombre de tentatives et que cette probabilité est divisée par deux lorsque l'on double le nombre requis de succès).

La généralisation à tort de la linéarité est également mentionnée dans le domaine des fonctions et des graphes. Lorsque l'on demande à des élèves de donner un exemple d'une fonction ou d'un graphe, dans la plupart des cas ils produisent des exemples linéaires. LEINHARDT, ZASLAVSKY et STEIN [9] ont catégorisé les différentes méprises des élèves qui surgissent lorsqu'ils dessinent des graphes. Une de ces catégories est nommée « linearity ». Les auteurs donnent un aperçu détaillé des études qui constatent que les élèves de différents âges, à qui on demande de dessiner le lien entre deux variables d'une situation donnée (comme p.e. la longueur d'un homme en fonction de

son âge), ont grande tendance à dessiner une droite passant par l'origine, même quand le lien en question n'est clairement pas linéaire et quand le graphe ne passe manifestement pas par l'origine.

Ce n'est pas uniquement dans les mathématiques que l'on découvre des exemples de raisonnements linéaires erronés. On en trouve aussi dans divers domaines scientifiques. GALILÉE [8] décrit dans ses *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorna a due nuove scienze* la théorie naïve d'ARISTOTE sur les objets tombants. ARISTOTE pensait, par exemple, qu'un objet 10 fois plus lourd qu'un autre, atteint 10 fois plus vite le sol que l'autre objet. Un énoncé de PIAGET [12], dont le but était de voir si les enfants étaient capables de raisonner de façon linéaire, sous-entend un lien proportionnel direct entre la longueur d'un poisson et ses besoins de nourriture, mais rien ne dit que ceci soit biologiquement justifié : « (...) trois poissons de longueurs 5, 10 et 15 cm. Pour qu'une seule dimension soit à considérer (...) le poisson B mangera deux fois ce que mange le poisson A, et le poisson C trois fois » (p. 51).

Cet article est axé sur l'illusion de la linéarité dans le domaine de la géométrie. Dans ce domaine, l'exemple le plus célèbre est sans doute celui de la duplication du carré dans le dialogue *Ménon* de PLATON. Un esclave, placé devant l'épreuve de dessiner un carré dont l'aire est le double de celle d'un carré donné, propose spontanément de doubler le côté du carré. L'esclave s'appuie donc de façon implicite sur un lien proportionnel entre le côté et l'aire d'un carré.

Un autre exemple de l'antiquité est le fameux problème « délien » concernant l'impossibilité de construire à la règle et au compas l'arête d'un cube dont le volume est le double du volume d'un cube donné (voir p.e. [1]). L'origine légendaire de ce problème si située vers 430 av. J.-C. dans l'Athènes antique, où une épidémie de peste foudroyante avait abattu près d'un quart de la population. En désespoir de cause, on envoya une délégation à l'oracle d'Apollon à Délos pour demander comment on pouvait mettre fin à ce fléau. L'oracle « répondit » que l'épidémie terminerait si l'on réussissait à doubler l'autel de forme cubique qui se trouvait dans le temple d'Apollon. Dans l'espoir de satisfaire la divinité, les Athéniens doublèrent chaque arête de l'autel, ce qui ne fit qu'intensifier l'épidémie car le volume de l'autel n'était pas doublé mais multiplié par 8.

Aujourd'hui encore, grand nombre d'élèves mais aussi d'adultes ne sont pas toujours conscients des différents facteurs de croissance pour les longueurs, les aires et les volumes de figures semblables agrandies ou réduites.

Ainsi, TIERNEY, BOYD et DAVIS ([15], p. 308) constatent, dans leur recherche sur les conceptions d'aire auprès de futurs instituteurs, que les variations des dimensions linéaires sont bien souvent étendues aux variations de l'aire.

In responding to questions about the effect of halving or doubling the lengths of the sides of a square, most students said that the area was also halved or doubled.

Le manque de distinction entre l'accroissement des mesures de longueur, d'aire et de volume apparaît fréquemment dans des représentations graphiques déroutantes, comme on en voit souvent dans la presse populaire (voir aussi [11]). Le « graphique » de la figure 1 montre la consommation annuelle de bière (en litres par habitant) dans quelques pays européens. Ainsi, il s'avère que les habitants du Bénélux boivent trois fois plus de bière que les Français (respectivement 120 et 40 litres par habitant). L'aire des pots de bière dessinés suggère néanmoins un rapport de 9 à 1, et même de 27 à 1 si l'on considère les volumes des « vrais » pots de bière.

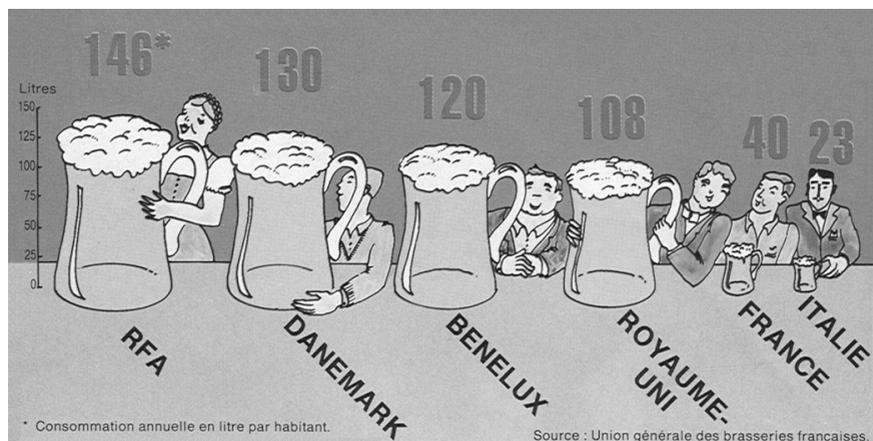


Fig. 1 : Bière. L'Europe sous pression (Dans : Le Vif/L'express - 19 août 1988).

Même quelqu'un ayant compris que les aires et les volumes ne sont pas reliés de manière linéaire aux longueurs, s'étonne encore souvent du fait que l'aire et le volume augmente tellement dans le cas d'un agrandissement et diminue tellement dans le cas d'un rapetissement. Ceci est illustré dans le

livre *Leven en Werken van de Kabouter* ⁽¹⁾ de RIEN POORTVLIET et WIL HUYGEN [13] (voir aussi [5]). Dans ce livre, on retrouve une analyse détaillée et vraisemblablement réaliste de tous les aspects de la vie du gnome. Une des thèses est que le gnome possède une anatomie très semblable à celle de l'être humain, et qu'un gnome mâle mesure environ 15 cm (sans compter son bonnet) et pèse environs 300 g (figure 2). Quoique ceci puisse sembler acceptable à première vue, c'est une estimation très peu réaliste : si on part du fait qu'un gnome de 300 g mesure 15 cm, et qu'un homme adulte mesure 180 cm, alors cet homme (qui est $\frac{180}{15} = 12$ fois plus grand) devrait peser 12^3 ou 1728 fois plus, c'est à dire environ 518400 g ou 518 kilos!



Légende : BOSKABOUTER 275 jaar / in de kracht van zijn leven ware grootte (zonder puntmuts) 15 cm

Légende : volwassen mankabouter weegt 300 gram / de vrouw 250 - 275 gram

Fig. 2 : Combien pèse le gnome?

⁽¹⁾ titre de la traduction française : *Les Gnomes*

Depuis quelques années, le Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie de la Katholieke Universiteit Leuven mène une recherche empirique systématique au sujet du phénomène de l'illusion de la linéarité dans le contexte de l'agrandissement et du rapetissement de figures géométriques semblables. Dans une première série d'études, on a étudié l'ampleur et la persistance de l'illusion de la linéarité dans ce contexte par le biais de tests collectifs. Nous résumons ci-dessous ces études, dont certaines ont déjà été décrites jadis dans cette revue [3]. Pour un commentaire plus complet, nous nous référons à [4].

Toutefois, avec ces tests collectifs, nous n'avions pas obtenu suffisamment d'informations sur les processus de résolution cachés derrière les raisonnements linéaires à tort des élèves. Ainsi, nous basant sur ces tests, nous ne pouvions pas donner de réponse satisfaisante à la question comment et pourquoi tant d'élèves tombent dans le « piège linéaire », ni pourquoi ils s'avèrent tellement insensibles à diverses formes d'aide que nous leur avons fournies lors de ces tests. C'est pourquoi nous avons décidé d'interviewer de façon individuelle un groupe restreint d'élèves et de débrouiller leurs processus de raisonnement lors de la résolution d'un problème non-linéaire, en interrogeant les élèves et en leur offrant quelques indices stratégiques. Nous donnerons un compte-rendu détaillé de cette étude dans le reste de l'article.

2. Etude basée sur des tests collectifs : un résumé

Les tests collectifs, visant à mesurer l'ampleur et la persistance de l'illusion de la linéarité, comportaient aussi bien des questions proportionnelles que des questions non-proportionnelles concernant la relation entre les longueurs, les aires et les volumes de figures géométriques semblables (agrandies ou réduites). Nous avons fait passer ces tests écrits à de grands groupes d'élèves de 12 à 13 ans et de 15 à 16 ans, sous des conditions expérimentales différentes. Toutes les questions des tests étaient formulées sous forme de « problèmes » traditionnels et elles concernaient différentes formes de figures géométriques. Voici, par exemple, une question proportionnelle (sur le périmètre d'un carré) :

Pour creuser un fossé autour d'un champ carré de 100 m de côté, le fermier Gustave a besoin d'environ 4 jours. Combien de

jours lui faut-il, environ, pour creuser un fossé autour d'un champ carré dont le côté mesure 300 m ?

Voici un exemple d'une question non-proportionnelle (sur l'aire d'un carré) :

Pour fertiliser un champ carré de 200 m de côté, le fermier Charles a besoin d'environ 8 heures. Combien d'heures, environ, lui prendra la fumure d'un champ carré dont le côté mesure 600 m ?

Résumons les principaux résultats de ces études.

- La tendance à raisonner de façon proportionnelle s'avère être extrêmement forte dans le groupe des 12 – 13 ans (seulement 2 – 7 % de réponses correctes aux questions non-proportionnelles), mais les 15 – 16 ans, eux aussi, en sont fortement imprégnés (seulement 17 – 22 % de réponses correctes aux questions non-proportionnelles).
- La nature de la figure géométrique liée au problème influence la tendance à raisonner de façon linéaire : les prestations des élèves étaient meilleures dans les cas de figures régulières (carré, cercle) que dans les cas de figures irrégulières (p.e. la carte de la Belgique).
- Ni la consigne de faire un dessin pour chaque question, ni même les dessins fournis n'influencent le comportement de résolution des élèves. Les élèves ont rarement suivi la consigne de faire un dessin et ils n'ont, en général, pas prêté beaucoup d'attention aux dessins fournis. Ce n'est que lorsqu'on leur a présenté des dessins sur papier quadrillé, qu'un effet positif a été constaté (les élèves à qui ceux-ci ont été fournis ont résolu 17 % des questions non-proportionnelles de façon correcte, contre 13 % dans les autres groupes).
- L'offre d'une aide métacognitive (la confrontation des élèves, avant le test, avec une question non-proportionnelle au sujet de laquelle ils pouvaient choisir entre la réponse proportionnelle et la réponse correcte) n'avait qu'un effet positif limité sur la résolution des problèmes non-proportionnels du test : dans les groupes avec cette aide, 18 % des problèmes non-proportionnels ont été bien résolus, contre 12 % dans les autres groupes.
- Le raisonnement proportionnel à tort semble être fortement lié à la structure « valeur manquante » de l'énoncé (une structure dans laquelle les élèves doivent calculer l'inconnue en se basant sur trois nombres donnés, comme dans les exemples cités ci-dessus). Les élèves à qui étaient présentées des questions équivalentes quant au contenu mais formulées sous forme de comparaisons (p.e. la variante de la

question non-proportionnelle citée plus haut : *Le fermier Charles a fertilisé aujourd'hui un champ carré. Demain, il doit fertiliser un champ carré dont le côté est trois fois plus grand. Combien de fois plus de temps lui faudra-t-il pour fertiliser ce champ?*) ont réussi beaucoup mieux aux questions non-proportionnelles que les élèves confrontés aux questions « valeur manquante » (respectivement 41 % et 23 % de réponses correctes). Mais même chez les élèves avec les questions sous forme de comparaison, plus de la moitié des réponses étaient fautes!

- La présentation des questions dans un contexte attrayant et « réaliste », ce qui fut réalisé dans la recherche en montrant une vidéo sur le voyage de Gulliver à l'île des Lilliputiens et en reliant les questions du test à ce contexte, a même eu un effet contraire sur les prestations des élèves aux questions non-proportionnelles (25 % de réponses correctes aux questions non-proportionnelles contre 41 % dans le groupe de contrôle).
- Nous avons constaté à notre surprise que quand les prestations des élèves ont amélioré grâce à l'une ou l'autre forme d'aide offerte ceci allait à chaque fois de pair avec des prestations moins bonnes pour les questions « habituelles » proportionnelles. Bien souvent les fautes commises à ces questions proportionnelles étaient dues à des raisonnements non-proportionnels à tort.

La conclusion générale de ces études est que grand nombre d'élèves se laissent induire en erreur par l'illusion de la linéarité, et ceci de façon flagrante, même quand on leur offre une aide mettant en évidence que le modèle linéaire est insoutenable. Les effets de différentes manipulations expérimentales ont été décevants et même, dans certains cas, négatifs. Mais à cause de la méthode de recherche utilisée (des tests collectifs sous différentes conditions expérimentales), ces tests n'ont pas procuré une image suffisamment détaillée des processus de résolution et des modes de raisonnement des élèves qui donnaient à tort des réponses linéaires. C'est pourquoi ces études avec des tests collectifs ont été complétées par une étude approfondie dans laquelle nous avons interviewé un petit nombre d'élèves.

3. Etude par interviews

3.1. Déroulement des interviews et constatations principales

Décrivons tout d'abord le déroulement des interviews ainsi que les principales constatations d'ordre général concernant les réactions des élèves pendant les interviews. Après ceci, nous donnerons les détails de deux interviews d'élèves, que nous avons sélectionnées comme représentatives des réactions de l'ensemble des élèves interviewés.

Bart travaille pour une entreprise qui peint des dessins publicitaires sur les vitres des étalages. A Noël, il doit souvent peindre des arbres de Noël, des Pères Noël, des étoiles et des bonshommes de neige.

Un jour, il dut peindre un Père Noël de 56 cm de haut sur la porte en verre de la boulangerie Dufour. A cet effet, il avait besoin de 6 ml de peinture. Un peu plus tard, il dut peindre une version beaucoup plus grande de ce Père Noël sur la vitre de l'étalage du supermarché Staes. Ce Père Noël devait mesurer 168 cm de haut. Combien de peinture lui fallait-il?



Boulangerie Dufour



Supermarché Staes

Fig. 3 : Exemple d'un problème non-linéaire
(bonne réponse : 54 ml, réponse fautive : 18 ml).

Nous avons fait passer des interviews individuelles semi-standardisées à vingt élèves de 12-13 ans et vingt élèves de 15-16 ans de l'enseignement général. Dans ces interviews, nous placions les élèves d'abord devant un problème non-linéaire sur l'agrandissement d'une figure irrégulière. L'énoncé était accompagné de dessins afin de garantir la bonne interprétation du problème par les élèves (notamment comme un agrandissement « semblable »). De par les études avec des tests collectifs, nous savions déjà que le fait de fournir un dessin n'influe pas sur le nombre (massif) de réactions proportionnelles de la part des élèves. Un exemple est donné dans la figure 3.

Pendant la résolution de ce problème, nous faisons penser l'élève à haute voix et nous posons quelques questions supplémentaires. Nous demandons par exemple systématiquement pourquoi ils pensaient que leur réponse était correcte et ils devaient indiquer sur une échelle à cinq niveaux leur degré de certitude (de « sûrement fausse » à « sûrement correcte »). Lorsqu'un élève résolvait le problème de façon linéaire, nous donnions en cours de route des indices supplémentaires. Ces indices soutenaient de plus en plus la solution correcte (non-linéaire) et suscitaient de plus en plus un conflit cognitif auprès de l'élève.

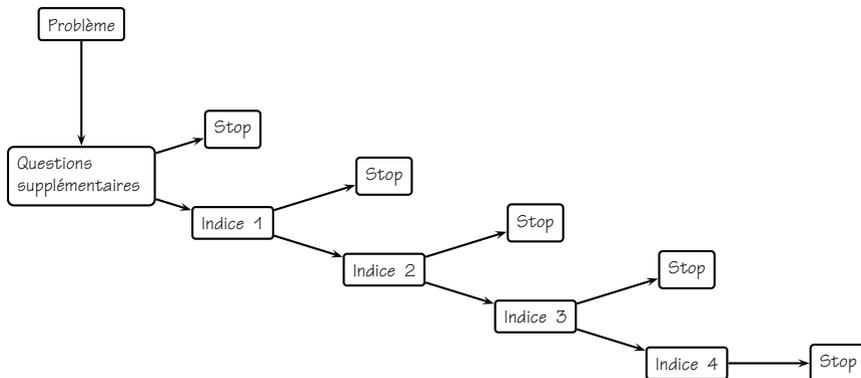


Fig. 4 : Schéma du déroulement de l'interview.

Après chaque indice, l'interviewer demandait à l'élève s'il voulait modifier sa réponse. L'interview terminait lorsque l'élève percevait le caractère non-linéaire du problème et lorsqu'il donnait la bonne réponse. De cette façon, nous pouvions vérifier le degré de persistance de l'élève dans son choix du modèle linéaire. Ces indices n'ambitionnaient pas un trajet d'apprentissage,

mais ils ne servaient qu'à détecter le processus de pensée de l'élève. Dans la figure 4, le déroulement de l'interview est représenté de façon schématique.

Lorsque nous présentions le problème non-linéaire, tous les élèves (à deux près dans le groupe des plus âgés) ont donné la réponse linéaire. Dans la plupart des cas, ils trouvaient la réponse linéaire en calculant le rapport des hauteurs des Pères Noël et en raisonnant que ce rapport s'applique aussi à la quantité de peinture requise pour peindre ces figures (la hauteur est multipliée par trois, donc la quantité de peinture doit, elle aussi, être multipliée par trois). La plupart des élèves se montraient assez sûrs du bien-fondé de leur réponse : sur l'échelle à cinq niveaux, vingt élèves ont indiqué que leur réponse était « sûrement correcte », seize « probablement correcte » et les quatre qui restaient n'en avaient « aucune idée ». Par contre, il est apparu plus tard qu'ils avaient grande peine à expliquer et à justifier leur réponse. Pour eux, la réponse était évidente et une autre réponse était impensable.

Au total, quatre indices étaient prévus. Un premier indice était la confrontation de l'élève avec un tableau de fréquences, manipulé par nous, indiquant que des élèves fictifs avaient donné la réponse non-linéaire aussi fréquemment que la linéaire (voir tableau 1). Nous imaginions que ceci aurait semé le doute. De plus, les élèves ayant répondu de façon linéaire uniquement par distraction, auraient pu reconnaître dans le tableau la réponse correcte.

Réponse	Pourcentage d'élèves
18 ml	41 %
54 ml	41 %
Autres	18 %

Tab. 1 : Tableau de fréquences fourni comme premier indice.

Après la confrontation avec le tableau de fréquences, seulement deux élèves des 38 restants ont changé leur réponse linéaire pour la non-linéaire. Les réactions de la plupart des autres élèves étaient superficielles (p.e. des tentatives vaines d'obtenir le résultat alternatif en effectuant, de façon aléatoire, quelques opérations sur les trois nombres donnés). Grand nombre d'entre eux découvriraient ainsi que l'autre solution s'obtient en multipliant la quantité de peinture par neuf (ou deux fois de suite par trois), mais ceci ne les faisait pas hésiter à la propre solution.

Comme *deuxième indice*, l'interviewer présentait l'argument d'un élève (fictif) en faveur de la solution non-linéaire. Dans l'exemple, cet indice était formulé ainsi : « Un élève m'a expliqué que si le dessin de Père Noël est trois fois plus grand, alors non seulement la hauteur mais aussi la largeur est multipliée par trois. On a donc besoin de neuf fois plus de peinture et c'est pour cela qu'il a répondu 54 ml ».

Après cet indice, 14 des 36 élèves restants ont décidé de changer de réponse. Ils reconnaissaient qu'avant ils n'avaient pas vraiment essayé de se représenter le problème et qu'ils l'avaient résolu de façon irréfléchie et routinière. Mais même à ce moment, 22 élèves se sont tenus à leur réponse originale, quoiqu'ils ne pussent pas (bien) la justifier. Bien souvent, leur argumentation reposait sur une opinion très « scolaire » concernant la résolution de problèmes mathématiques. Ou alors, il s'avérait que les élèves ne comprenaient pas la signification précise de la similitude.

Comme *troisième indice*, on montrait la stratégie de résolution d'un élève fictif qui avait répondu correctement (de façon non-linéaire). Cet élève fictif avait dessiné des rectangles autour du petit et du grand Père Noël. Ainsi, il avait remarqué que la figure ne devient pas seulement trois fois plus haute mais aussi trois fois plus large (voir figure 5).

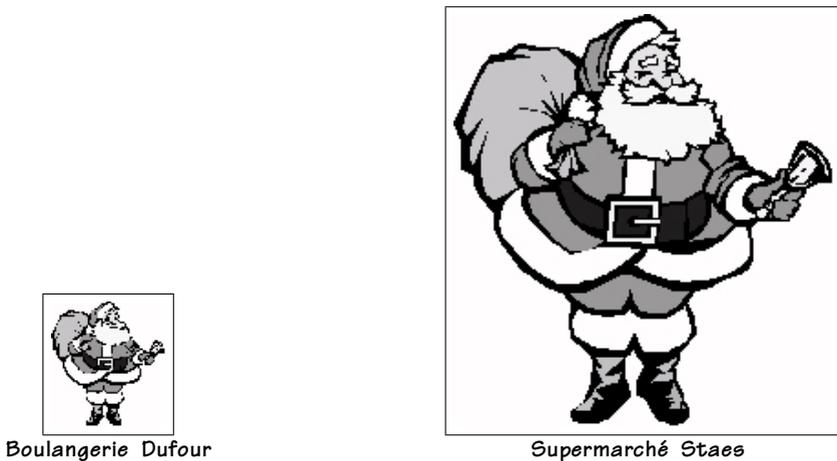


Fig. 5 : Des rectangles fournis comme indice.

La présentation de la stratégie de résolution a suscité dans neuf des 22 cas restants un véritable « Gestaltwechsel » [18]. Dès la présentation

de cet indice, ils ont choisi directement, et convaincus, la solution non-linéaire. Les treize élèves qui restaient se sont tenus à la réponse linéaire et ont exprimé des réflexions assez générales sur la façon dont, selon eux, les problèmes mathématiques doivent être abordés et sur le rôle (restreint) que les dessins peuvent jouer à leurs yeux.

Finalement, comme quatrième indice, on faisait le lien avec la mesure de l'aire. On leur demandait de calculer les aires des deux rectangles de la figure 5 et de les comparer. Pour tous ceux qui restaient encore après ce quatrième indice, l'interview était terminée.

Après ce quatrième indice, encore 5 élèves ont échangé leur réponse linéaire contre la non-linéaire. Mais même après quatre indices (de force croissante), il y avait encore 3 élèves qui se tenaient à leur raisonnement initial linéaire. Ils répétaient surtout, et bien souvent avec emphase, leur opinion stéréotypée sur les mathématiques en général et sur la résolution de problèmes en particulier.

3.2. Deux exemples d'interviews

- L'interview avec Pieter (12 ans)

L'interviewer montra à Pieter une fiche de travail énonçant le problème des Pères Noël (figure 3). L'interview se déroula comme ceci.

Pieter : [Lit l'énoncé à haute voix.] Euh, attendez, laissez-moi regarder les nombres... Ça y est, je vois, la hauteur change de 56 cm à 168 cm. Ce qui fait fois trois. Je dois donc multiplier la quantité de peinture également par trois. [Pieter dessine le schéma de la figure 6.] La réponse est 18 ml. Bart a besoin de 18 ml pour le grand Père Noël.

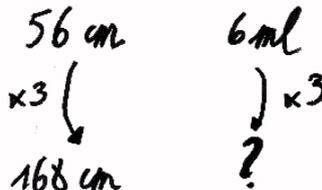


Fig. 7 : Le schéma de résolution de Pieter

Interviewer : Pourquoi penses-tu que cette solution est bonne?

Pieter : [silence] Bien, euh... Je ne sais pas... C'est comme ça que je l'ai résolu.

Interviewer : Mais pourquoi as-tu multiplié par trois?

Pieter : Mais c'est logique. Comment faire autrement? Le Père Noël est plus haut, donc on a besoin de plus de peinture. Et il est trois fois plus haut, donc...trois fois plus de peinture. C'est simple.

Interviewer : A quel point es-tu certain de ta réponse?

Pieter : J'en suis très certain. C'est un problème facile. J'ai utilisé les trois nombres et la formule, donc, forcément, c'est juste.

– L'interviewer lui fournit le premier indice.

Interviewer : La semaine passée, on a donné ce même problème à des élèves d'une autre école. Leurs réponses sont dans le tableau (tableau 1). 41 % des élèves de cette école ont aussi donné comme réponse 18 ml, mais il y a autant d'élèves qui ont répondu 54 ml. Pieter, que penses-tu de cette autre réponse? Et de la tienne? Veux-tu changer?

Pieter : [tout de suite] Non. C'est impossible. Je l'ai calculé et c'est 18 ml. Comment arrivent-ils à 54? Attendez, j'essaie. [Soustrait 54 de 168, essaie quelques combinaisons de 54, 168, 6 et +, -, · et :] Non, je ne vois pas. Ils ont multiplié deux fois par trois. Vous voyez, ils se sont trompés. Je reste à ma réponse.

– Puisque Pieter se tenait à sa réponse linéaire, l'interviewer proposa le deuxième indice.

Interviewer : Un élève de l'autre école m'a expliqué comment il avait résolu le problème. Il disait que le grand Père Noël n'est pas seulement trois fois plus haut, mais aussi trois fois plus large. Donc, il faut neuf fois plus de peinture.

Pieter : Oh, mais cet élève s'appuie sur le dessin. Je n'ai pas regardé le dessin. Seulement le texte. Dans le texte, il n'y a que la hauteur.

Interviewer : Et si tu regardes le dessin?

Pieter : 18 ml est toujours mieux. Cet élève rend les choses compliquées. Ma réponse est meilleure.

– Alors, l'interviewer donna le troisième indice. Il montra les dessins de la figure 5 accompagnés des explications suivantes.

Interviewer : L'élève qui a multiplié par neuf avait dessiné d'abord des rectangles autour des Pères Noël. C'est ainsi qu'il a vu que la figure est trois fois plus grande dans les deux directions : en hauteur mais aussi en largeur. C'est pourquoi il faut neuf fois plus de peinture. Que penses-tu de cette solution? Et de la tienne? Laquelle préfères-tu?

Pieter : Ça pourrait être une bonne solution, mais le problème ne dit rien sur la largeur. Ceci est dans le dessin, pas dans l'énoncé. Le problème traite de la hauteur.

Interviewer : Et que penses-tu de ces rectangles ?

Pieter : Ce qu'ils font avec les rectangles est correct : ceux-ci sont agrandis dans deux directions. Mais à l'intérieur des rectangles, il y a une figure irrégulière. C'est autre chose. Regardez ici, et ici ! [Pieter désigne les parties « vides » des rectangles.]

— Finalement, le quatrième indice fut fourni.

Interviewer : Peux-tu calculer et comparer les aires des deux rectangles ?

Pieter : [Calcule.] Eh bien, celui-ci est neuf fois plus grand que celui-là.

Interviewer : Et si tu devais peindre la surface de ces rectangles ?

Pieter : [tout de suite] Alors il s'agit de peinture, pas d'aire. Vous rendez les choses trop difficiles. Les maths, c'est logique et multiplier par neuf, ici, n'est pas logique. Il est trois fois plus grand, donc il faut trois fois plus de peinture !

— Ici se termina l'interview avec Pieter.

● L'interview avec Karen (15 ans)

Karen fut placée devant le même problème des Pères Noël. L'interview se déroula ainsi.

Karen : [Lit le problème.] Ah, je vois. Il faut 6 ml pour 56 cm. Je peux donc calculer combien de peinture il faut pour 1 cm [divise 6 par 56 avec sa calculatrice]. Ça y est. Il faut 0,107 ml par cm. Après, je multiplie par 168 car le grand Père Noël mesure 168 cm. [Calcule.] Il faut 18 ml pour le grand Père Noël.

Interviewer : Pourquoi penses-tu que c'est la bonne solution ?

Karen : Eh... Ça marche, je ne sais pas pourquoi.

Interviewer : Et comment est-ce que ça marche ?

Karen : Il est facile de calculer combien de peinture il faut pour 1 cm. Donc il n'y a plus qu'à multiplier. On appelle ça la règle de trois. C'est tout ce que je peux dire la-dessus.

Interviewer : À quel point es-tu sûre de ta réponse ?

Karen : Je ne suis pas tout à fait sûre parce que je n'ai pas lu l'énoncé attentivement. Mais je crois que j'ai fait ce qu'on attendait de moi. J'ai utilisé les trois nombres et ça marche. Peut-être que j'ai fait une faute de calcul. Ça peut toujours arriver. Mais à mon avis c'est correct.

— Puisque Karen avait donné une réponse linéaire, l'interviewer lui montra le tableau de fréquences et remarqua que les élèves de l'autre école

ont donné aussi fréquemment comme réponse 54 ml. Karen réagit ainsi.

Karen : 54? Je pense que c'est trop. Je trouve ma réponse bien plus logique. D'ailleurs, il est toujours préférable de se tenir à sa première idée!

Interviewer : Un élève de l'autre école m'a dit que le Père Noël ne devient pas seulement trois fois plus haut, mais aussi trois fois plus large. Donc, il faut neuf fois plus de peinture. C'est pourquoi il a répondu 54 ml.

Karen : Non, je ne pense pas. Il est vrai qu'il devient trois fois plus haut et trois fois plus large. Mais ceci signifie, justement, que tout est multiplié par trois. Également la quantité de peinture. Elle est aussi multipliée par trois. 6 ml, c'est pour le Père Noël entier, pas seulement pour la hauteur. Et 18 ml, c'est pour le grand Père Noël entier. [Désigne successivement le petit et le grand Père Noël.] Cette aire entre trois fois dans cette aire, donc il faut trois fois plus de peinture.

– Karen persistait donc à préférer la solution linéaire après le deuxième indice, donc on lui fournit le troisième indice : l'interviewer montra et commenta la stratégie avec les rectangles circonscrits. En regardant cette figure, Karen changea tout de suite de réponse.

Karen : Oh oui, maintenant je vois. En effet, il est neuf fois plus grand, parce que le petit rectangle entre aussi neuf fois dans le grand. Avec les rectangles, je comprends. Maintenant je suis sûre. C'est 54 ml.

Interviewer : Peux-tu expliquer pourquoi au début tu répondais 18 ml?

Karen : Ma réponse paraissait logique : trois fois plus grand, trois fois plus de peinture... De plus, je n'avais regardé que le texte et j'ai tout de suite commencé à calculer. Si j'avais d'abord regardé les dessins, je l'aurais peut-être vu. Mais je ne m'étais rien représenté au sujet de ce problème ...seulement calculé.

– Ici se termina l'interview avec Karen.

4. En guise de conclusion

Cette étude par interviews confirme la persistance du raisonnement linéaire à tort de la part des 12-16 ans lors de la résolution de problèmes de longueur et d'aire de figures géométriques. Presque tous les élèves sont partis d'emblée d'une relation linéaire (au lieu d'une relation quadratique)

entre la longueur et l'aire. Même après avoir reçu des indices (forts), beaucoup d'élèves persistaient à préférer le modèle linéaire ou éprouvaient de grandes difficultés à apprécier à sa juste valeur le modèle alternatif.

Nous avons obtenu également des informations précieuses sur les processus de raisonnement à la base du raisonnement linéaire à tort des élèves. De façon globale, on peut distinguer quatre grandes catégories de tels processus de raisonnement. La prépondérance de chaque élément varie d'élève en élève, mais aussi, auprès du même élève, selon les différentes phases de l'interview.

Une première catégorie se réfère au caractère intuitif (au sens de Fischbein, [6]) du modèle linéaire : il possède un caractère d'évidence et il est utilisé de façon spontanée et presque inconsciente. C'est pourquoi les élèves ne ressentent aucun besoin de justifier leur choix de ce modèle. Les modèles intuitifs s'avèrent en outre très résistants à un enseignement formel visant à faire contrepoids. Les modèles non-linéaires sont ressentis par l'élève comme illogiques ou comme allant à l'encontre de l'intuition. On peut donc tracer une parallèle avec les « règles intuitives » comme décrites par STAVY et TIROSH [14]. Dans la recherche de ces auteurs, il apparaît que les élèves se font guider bien souvent par des règles intuitives communes lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes en mathématiques et en sciences. Deux règles reviennent fréquemment dans des tâches de comparaison : « plus de A – plus de B » et « même A – même B ». Dans le problème des Pères Noël, le raisonnement « plus de A – plus de B » est très naturel et correct (plus de hauteur correspond à plus d'aire / de peinture). Mais une réaction « même A – même B » est également possible et a été formulée presque littéralement dans certains cas (les deux Pères Noël ont la même forme, donc il faut multiplier tout par le même facteur).

Une deuxième catégorie est constituée par l'application consciente et voulue du modèle linéaire. Cette catégorie diffère de la première dans le sens que les élèves n'appliquent plus le modèle linéaire de façon intuitive, implicite ou automatique. Certains élèves paraissent vraiment convaincus du fait que tout accroissement est un accroissement linéaire. Ces élèves raisonnaient parfois de façon explicite que si la longueur et la largeur accroissent avec un facteur trois, l'aire augmente avec le même facteur. Pour cette conviction spécifique, le nom d'« illusion de la linéarité » est certainement à sa place : ces élèves sont convaincus que le modèle linéaire est le bon choix.

Troisièmement, cette étude par interviews fait apparaître certaines lacunes dans les connaissances géométriques des élèves (p.e. la confusion

entre l'aire et le volume ou le fait de ne pas reconnaître la quantité de peinture comme mesure indirecte de l'aire). Ces lacunes empêchaient les élèves de « découvrir » la faute dans leur raisonnement et de trouver la réponse correcte. En particulier, il est apparu que plusieurs élèves de 12-16 ans ont des problèmes avec les concepts de similitude et d'aire, surtout pour des figures irrégulières.

Quatrièmement, plusieurs élèves s'avèrent avoir des habitudes et des convictions inappropriées sur la résolution de problèmes mathématiques, comme p.e. : « il vaut mieux se baser sur des formules que sur des dessins ; il vaut mieux se tenir à sa première idée ; on ne peut utiliser que les informations mentionnées explicitement dans l'énoncé ; les problèmes mathématiques n'ont rien à voir avec la réalité ; pour la résolution d'un problème, on attend de l'élève qu'il effectue une ou quelques opérations standard ». Ces convictions sont sans doute un sous-produit de l'enseignement des mathématiques que les élèves ont reçu et des expériences scolaires qu'ils ont vécues en ce qui concerne les problèmes en mathématiques [17].

La combinaison de ces quatre éléments a entraîné la plupart des élèves à modéliser le problème de façon superficielle et défectueuse.

Dans une phase ultérieure de notre recherche, nous voudrions vérifier comment on peut mieux équiper les élèves contre le piège de l'illusion linéaire. À cet effet, nous développons et évaluons en ce moment des cours, élaborés en tenant compte non seulement des résultats de nos études antérieures sur l'illusion de la linéarité, mais aussi de quelques principes plus généraux de l'enseignement « réaliste » des mathématiques (partir de contextes riches, construire le savoir sur les bases des connaissances et des stratégies informelles des élèves, ...).

Bibliographie

- [1] De Bock D., Het veld van de construeerbare reële getallen, *Wiskunde & Onderwijs*, 1983, 33, 47-60.
- [2] De Bock D., L'illusion de la linéarité. Première partie : circonstances et commentaires, *Mathématique et Pédagogie*, 1999, 120, 39-50.
- [3] De Bock D., L'illusion de la linéarité. Deuxième partie : trois études dans l'enseignement secondaire, *Mathématique et Pédagogie*, 1999, 121, 30-45.

- [4] De Bock D., *The illusion of linearity. An empirical analysis of secondary school students' improper proportional reasoning in geometry problems*, Doctoral dissertation, K.U.Leuven, 2002.
- [5] Eggermont H., *Gewichtige kabouters*, *Uitwiskeling*, 1993, 9(3), 3-5.
- [6] Fischbein E., *Intuition in science and mathematics*, Dordrecht, Reidel, 1987.
- [7] Freudenthal H., *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht, Reidel, 1983.
- [8] Galilei G., *Dialogues concerning two new sciences*, New York, Dover, 1954.
- [9] Leinhardt G., Zaslavsky O. and Stein M.K., *Functions, graphs, and graphing : Tasks, learning, and teaching*, *Review of Educational Research*, 1990, 60(1), 1-64.
- [10] National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, VA, NCTM, 1989.
- [11] Peltier M., Rouche N. et Manderick M., *Contremanuel de statistique et probabilité*, Bruxelles, Vie Ouvrière, 1982.
- [12] Piaget J., *Epistémologie et psychologie de la fonction*, Dordrecht, Reidel, 1968.
- [13] Poortvliet R. en Huygen W., *Leven en werken van de kabouter*, Bussum, Van Holkema & Warendorf, 1976. (Ce livre est traduit en français par Maddy Buysse : Huygen W. et Poortvliet R., *Les gnomes*, Paris, Albin Michel, 1992.)
- [14] Stavy R. and Tirosh D., *How students (mis-)understand science and mathematics : Intuitive rules*, New York, Teachers College Press, 2000.
- [15] Tierney C., Boyd C. and Davis G., *Prospective primary teachers' conceptions of area*, in G. Booker, P. Cobb and T.N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2)*, Oaxtepec, Mexico, 1990, 307-314.
- [16] Van Dooren W., De Bock D. et Verschaffel L., *L'illusion de la linéarité parmi les élèves du secondaire : extension au calcul des probabilités*, *Mathématique et Pédagogie*, 2003, 143, 5-23.
- [17] Verschaffel L., Greer B. and De Corte E., *Making sense of word problems*, Lisse, The Netherlands, Swets & Zeitlinger, 2000.
- [18] Wertheimer M., *Productive thinking*, New York, Harper & Brothers, 1945.

Les publications de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

– Les brochures signalées par * sont de publication récente.

– Le prix « adhérent » concerne l'A.P.M.E.P. et la S.B.P.M.ef.



N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix, en €, sans port	
		public	adhérent
	<u>Collège</u>		
*503	La jubilation en mathématiques	4,90	3,80
	Fichiers Evariste : 480 problèmes tirés de différents tournois et rallyes mathématiques		
98/132	2 tomes :	21,35	15,25
502	EXCEL-Classe, CD-Rom (Version individuelle)	16,75	16,75
55	Géométrie expérimentale avec CABRI	13,40	12,65
119	Jeux 5 (Des activités mathématiques au collège)		
	Série EVAPM : Evaluation 6 ^e (première chez nous!)	11	7,60
112/118	2 fascicules : Analyses et résultats & Dossier professeur	17,50	12,15
352	Tableur et mathématiques au Collège	12,20	9,90
451	Concours Australien de mathématiques	15,85	11
250/	Panoramas de compétitions mathématiques		
*251	Panoramath 96 & Panoramath 2	25,90	12,50
	<u>Lycée</u>		
*138	Statistiques en classe de seconde	8,70	6
*120	Classeur informatisé de documents math. - 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	45,95	30,50
	Version 26 installations, port compris	91,45	61
	CD-Rom de mise à jour	10,65	7,60
90/	Série EVAPM : Evaluation 1 ^{re} (cinquième chez nous!)		
107/108	3 fascicules	21,35	14,50
*305	GALION-Thèmes Seconde : 10 thèmes programme 2000	11,45	9,90
*450	MathÉvasion : 46 activités en bandes dessinées	7,60	5,35
	Avec CABRI, faire de la géométrie en jouant		
124/125	2 tomes déjà paru	17,55	10,65
*129	Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaires	9,90	6,85
121	Maths en scène : Commentaires des 22 thèmes de l'expo « Mathématiques 2000 » utilisable indépendamment	11,00	7,60
402	Jeux du Scientific American	20,60	14,50

PORT (prix indicatif) : 1 brochure : 2,50 € ; 2 ou 3 brochures : 4,00 € et au-dessus de 3 : 6,50 €

Serveur de l'APMEP : <http://www.apmep.asso.fr>

L'atelier de mathématiques : une activité de recherche sur les quadrilatères

R. GRECO - B. MICALE - F. MILAZZO,
Université de Catane

1. Introduction

Dans [4], ROBERT a lancé l'idée de constituer une « bibliothèque » de problèmes, originaux et non répétitifs, susceptibles d'être utilisés par les enseignants de l'école secondaire comme champs d'investigation et constituant « une source de motivation entraînée par la joie de la découverte ». De tels problèmes peuvent être utilisés dans un « atelier de mathématiques », où les élèves, guidés par l'enseignant, auront l'occasion de faire des mathématiques en tant que protagonistes et en développant leur goût d'affronter des défis intellectuels à leur portée. Les articles [1], [3] et [5] concernant l'étude des triangles rentrent dans le projet idéal proposé par ROBERT.

Dans cet article, nous proposons une activité de recherche ayant pour objet l'ensemble des quadrilatères convexes ayant deux côtés consécutifs donnés.

Dans cet ensemble nous distinguons plusieurs sous-ensembles de quadrilatères ayant des propriétés particulières (n° 2 et 3). L'indication de nombreux sous-ensembles donne à l'enseignant la possibilité de faire travailler les élèves en petits groupes, en confiant à chaque groupe un ou plusieurs sous-ensembles à étudier. Une fois que les différents groupes auront porté à terme la recherche, les résultats obtenus par chaque groupe pourront être communiqués aux autres groupes et donner lieu à une discussion en classe.

Par la suite les élèves pourront étudier des problèmes d'intersection des sous-ensembles permettant, entre autre, de retrouver les différents types de quadrilatères convexes (n° 4), et des problèmes de maximum et de minimum pour l'aire et le périmètre de certains sous-ensembles de quadrilatères (n° 5).

2. La famille \mathcal{F} des quadrilatères ayant deux côtés consécutifs fixés

Soit un triangle ABC tel que $AB \leq BC$; si on pose $\beta = \widehat{ABC}$, on a $0^\circ < \beta < 180^\circ$. Soit D un point du plan tel que $ABCD$ soit un quadrilatère convexe. Nous désignons par \mathcal{F} l'ensemble des quadrilatères $ABCD$ et par S l'ensemble de tous les sommets D des quadrilatères de \mathcal{F} .

Nous constatons immédiatement que S est la région convexe ouverte délimitée par le segment AC et par les demi-droites AE et CF (fig. 0).

Un quadrilatère commun de \mathcal{F} ne possède pas des caractéristiques géométriques particulières. Ce sont les positions particulières du sommet D qui déterminent des quadrilatères ayant des propriétés spécifiques.

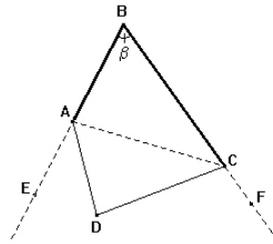


fig. 0

Faisons maintenant décrire au point D variable en S des figures particulières du plan et, parallèlement, déterminons des sous-ensembles particuliers de \mathcal{F} qui seront utiles par la suite pour la résolution de problèmes et pour la recherche de propriétés des quadrilatères.

Nous déterminerons deux séries de sous-ensembles de \mathcal{F} obtenues en imposant que D appartienne à des droites ou à des coniques particulières.

A) Quadrilatères ayant le sommet D sur une droite particulière

A₁) Si D se trouve sur la droite passant par A et parallèle à BC , le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze de bases BC et AD . Le sommet D décrit une demi-droite contenue dans S et les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par X_1 (fig. 1).

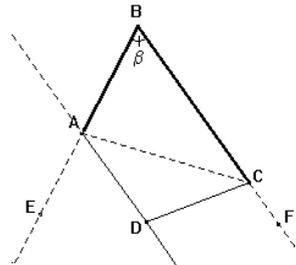


fig. 1

A₂) Si D se trouve sur la droite passant par C et parallèle à AB , le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze de bases AB et CD . Comme dans le cas précédent, D décrit une demi-droite et nous désignons par X_2 l'ensemble des quadrilatères ainsi déterminés (fig. 2).

A₃) Si D se trouve sur la droite perpendiculaire en A au côté AB , les quadrilatères $ABCD$ que l'on obtient ont l'angle \widehat{BAD} droit. Notons toutefois que de tels quadrilatères ne peuvent exister que si l'angle \widehat{BAC} est aigu. Le sommet D décrit une demi-droite si $\beta \geq 90^\circ$, un segment si $\beta < 90^\circ$, et les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par X_3 (fig. 3).

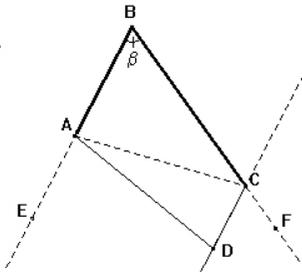


fig. 2

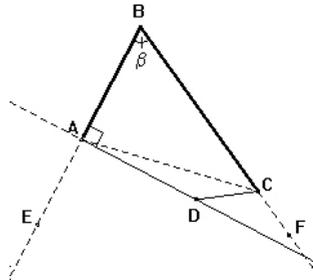


fig. 3

A₄) Si D se trouve sur la droite perpendiculaire en C au côté CB , les quadrilatères $ABCD$ ont l'angle \widehat{BCD} droit. Le sommet D décrit une demi-droite si $\beta \geq 90^\circ$, un segment si $\beta < 90^\circ$ et les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par X_4 (fig. 4).

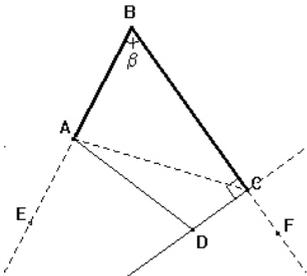


fig. 4

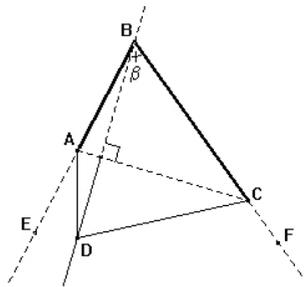


fig. 5

A₅) Si D se trouve sur la droite passant par B et perpendiculaire à AC , les diagonales des quadrilatères $ABCD$ sont perpendiculaires. Toutefois,

on n'obtient de tels quadrilatères que si l'angle \widehat{BAC} est aigu. Le sommet D décrit une demi-droite et les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par X_5 (fig. 5).

A₆) Si D se trouve sur la médiatrice de AC , les côtés consécutifs AD et DC des quadrilatères $ABCD$ sont égaux. Le sommet D décrit une demi-droite si l'angle \widehat{BAC} n'est pas obtus; dans le cas contraire, il décrit un segment. Les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par X_6 (fig. 6).

A₇) Si D se trouve sur une droite r parallèle à AC , les quadrilatères $ABCD$ que l'on obtient ont tous la même aire. Le sommet D décrit le segment HK de r contenu dans S et nous désignons par $X_7(r)$ l'ensemble des quadrilatères correspondants (fig. 7).

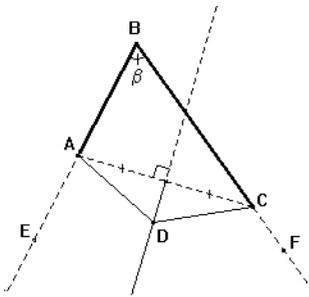


fig. 6

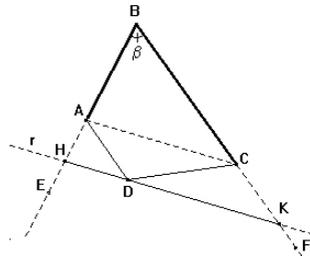


fig. 7

B) Quadrilatères ayant le sommet D sur une conique particulière

B₁) Si D se trouve sur le cercle de centre A et de rayon AB , les côtés consécutifs AB et AD des quadrilatères $ABCD$ sont égaux. Le sommet D décrit un arc de cercle et les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par U_1 (fig. 8).

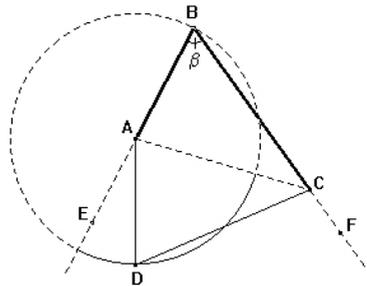


fig. 8

B₂) Si D se trouve sur le cercle de centre C et de rayon CB , les côtés consécutifs CB et CD des quadrilatères $ABCD$ sont égaux. Le sommet

D décrit un arc de cercle et les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par \mathcal{U}_2 (fig. 9).

B₃) Si D se trouve sur le cercle de centre A et de rayon BC , les côtés opposés AD et BC des quadrilatères $ABCD$ sont égaux. Le sommet D décrit un arc de cercle et les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par \mathcal{U}_3 (fig. 10)

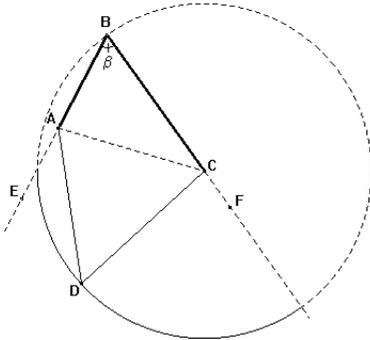


fig. 9

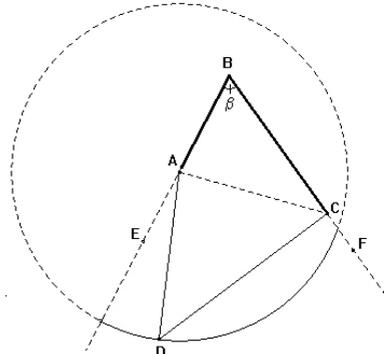


fig. 10

B₄) Si D se trouve sur le cercle de centre C et de rayon AB , les côtés opposés CD et AB des quadrilatères $ABCD$ sont égaux. Le sommet D décrit un arc de cercle et les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par \mathcal{U}_4 (fig. 11).

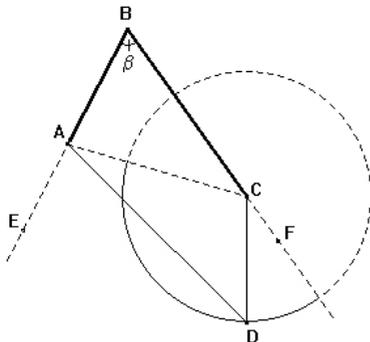


fig. 11

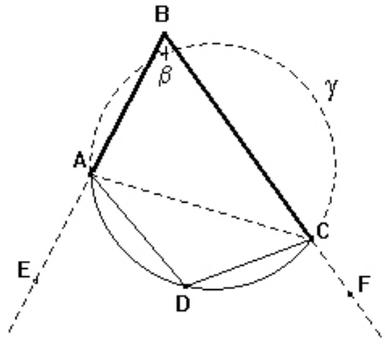


fig. 12

B₅) Si D se trouve sur un cercle γ passant par A et C , les quadrilatères $ABCD$ sont tels que D voit le segment AC sous un angle \widehat{ADC} constant, qui

est droit si AC est un diamètre de γ . Nous désignons leur ensemble par $\mathcal{U}_5(\gamma)$ (fig. 12).

B₆) Si D se trouve sur le cercle passant par A , B et C , les quadrilatères $ABCD$ sont inscrits dans ce cercle et, par conséquent, les angles opposés sont supplémentaires. Le sommet D décrit un arc de cercle et les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par \mathcal{U}_6 (fig. 13).

B₇) Si D se trouve sur une ellipse ϵ ayant ses foyers en A et C , les quadrilatères $ABCD$ sont tels que $AD + DC$ est constant. Il s'agit donc de quadrilatères ayant tous le même périmètre. Le sommet D décrit l'arc HK de l'ellipse ϵ contenu dans S et nous désignons l'ensemble des quadrilatères correspondants par $\mathcal{U}_7(\epsilon)$ (fig. 14).

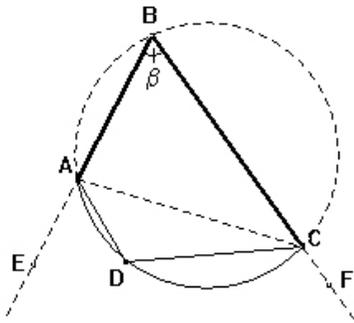


fig. 13

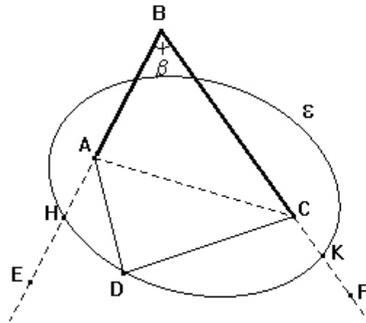
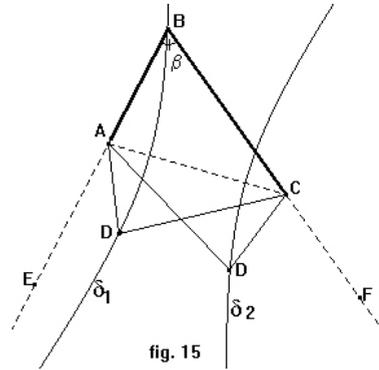


fig. 14

B₈) Supposons que $BC > AB$. Si D se trouve sur l'hyperbole δ ayant ses foyers en A et C et passant par B , les quadrilatères $ABCD$ sont tels que $DC - AD = BC - AB$ ou que $AD - DC = BC - AB$ (fig. 15).

Si D se trouve sur la branche δ_1 de δ relative au foyer A , en d'autres termes si $DC - AD = BC - AB$, alors $DC + AB = BC + AD$ et par conséquent le quadrilatère $ABCD$ est tel que la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés et qu'il peut donc être circonscrit dans un cercle. Le sommet D décrit un arc de δ_1 et les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par $\mathcal{U}_8(\delta_1)$.

Si D se trouve sur la branche δ_2 de δ relative au foyer C , en d'autres termes si $AD - DC = BC - AB$, alors $AD + AB = BC + DC$ et par conséquent le quadrilatère $ABCD$ est tel que la somme des côtés issus de A est égale à la somme des côtés issus de C . Le sommet D décrit un arc de δ_2 et les quadrilatères correspondants forment un ensemble que nous désignons par $\mathcal{U}_\delta(\delta_2)$.



Nous proposons pour finir quelques autres sous-ensembles de \mathcal{F} pouvant être étudiés.

- Ensemble des quadrilatères $ABCD$ ayant D sur la médiane du triangle ABC issue de B .
- Ensemble des quadrilatères $ABCD$ ayant D sur la bissectrice du triangle ABC issue de B .
- Ensemble des quadrilatères $ABCD$ pour lesquels la droite AC est la bissectrice de l'angle \widehat{BAD} (de tels quadrilatères ne peuvent exister que si l'angle \widehat{BAC} est aigu).
- Ensemble des quadrilatères $ABCD$ pour lesquels la droite AC est la bissectrice de l'angle \widehat{BCD} .
- Ensemble des quadrilatères $ABCD$ pour lesquels l'angle \widehat{ADC} est égal à l'angle \widehat{ABC} . Dans ce cas, il suffit de déterminer le point L symétrique du centre du cercle circonscrit au triangle ABC par rapport à la droite AC ; le sommet D se trouve sur le cercle de centre L et de rayon AL .
- Ensemble des quadrilatères $ABCD$ pour lesquels la bissectrice de l'angle \widehat{ADC} passe par le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC ; le sommet D est donc un point qui voit les segments AO et OC sous des angles égaux. Ce dernier cas est particulièrement intéressant car le lieu des points du plan qui voient deux segments consécutifs et égaux AO et OC sous des angles égaux est donné par l'union de la médiatrice a du segment AC , de l'arc γ d'extrémités A et C du cercle passant par A, O, C , qui ne contient pas O et de la droite AC à l'exclusion de tous les points du segment AC (fig. 16). Par conséquent, dans ce cas, D est un point de S qui appartient à l'arc γ ou à la droite a .

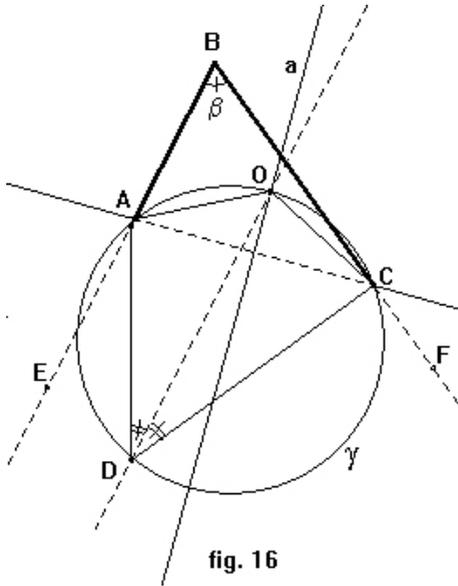


fig. 16

3. Cas particuliers

Les ensembles X_i et U_i définis dans le paragraphe précédent sont généralement tous distincts les uns des autres; cependant, il peut arriver que, pour des relations particulières entre les segments donnés AB et BC ou pour des valeurs particulières de la mesure de l'angle donné β , certains de ces ensembles coïncident. Examinons brièvement quelques cas.

a) Les segments AB et BC sont égaux (fig. 17)

Dans ce cas les ensembles X_5 et X_6 coïncident et les quadrilatères appartenant à ces ensembles sont tous des cerf-volants; en particulier, un seul d'entre eux est un losange. On a également $U_1 = U_3$ et $U_2 = U_4$; tous les quadrilatères appartenant à ces ensembles ont trois côtés égaux et, en particulier, aussi bien dans U_1 que dans U_2 , il n'y a qu'un seul losange.

Tout quadrilatère de X_1 est le symétrique d'un quadrilatère de X_2 par rapport à la bissectrice de l'angle β , et vice versa. La même relation existe entre X_3 et X_4 et entre U_1 et U_2 . En outre, tout quadrilatère de X_7 est le symétrique d'un quadrilatère du même ensemble par rapport à la bissectrice

de l'angle β . La même propriété est valable pour les ensembles \mathcal{U}_5 , \mathcal{U}_6 , \mathcal{U}_7 et \mathcal{U}_8 .

b) L'angle β est droit (fig. 18)

Dans ce cas on a $X_1 = X_3$ et $X_2 = X_4$; tous les quadrilatères appartenant à ces ensembles sont des trapèzes rectangles et, en particulier, un seul d'entre eux est un rectangle. En outre, tous les quadrilatères de l'ensemble \mathcal{U}_6 sont inscriptibles dans le cercle de diamètre AC et leurs angles opposés \widehat{ABC} et \widehat{ADC} sont droits; en particulier, un seul d'entre eux est un rectangle.

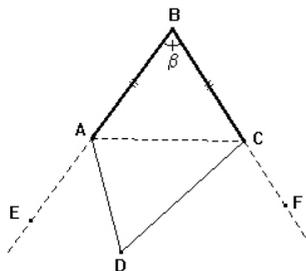


fig. 17

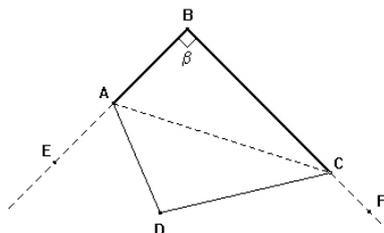


fig. 18

4. Intersections d'ensembles de quadrilatères

En faisant l'intersection deux par deux des différents ensembles X_i et \mathcal{U}_i , on obtient des quadrilatères possédant des propriétés particulières.

Le sommet D des quadrilatères ABCD d'un ensemble X_i se trouve sur une droite et décrit une demi-droite ou un segment de cette droite; le sommet D des quadrilatères d'un ensemble \mathcal{U}_i se trouve sur une conique et décrit un arc de cette conique. Il en résulte que, si l'on appelle n le nombre des éléments communs à deux ensembles distincts, on a $n \in \{0, 1\}$ pour deux ensembles de type X_i , et $n \in \{0, 1, 2\}$ pour un ensemble de type X_i et un de type \mathcal{U}_i ou bien pour deux ensembles de type \mathcal{U}_i .

Notons, par exemple, qu'en général, les intersections $X_2 \cap X_4$, $X_5 \cap X_6$, et $\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_4$ sont vides; en outre les ensembles $\mathcal{U}_8(\delta_1) \cap X_6$ et $\mathcal{U}_8(\delta_2) \cap X_6$ sont toujours vides.

Mettons maintenant en évidence quelques-uns des cas les plus significatifs d'intersections.

L'ensemble $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ est constitué d'un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles, c'est-à-dire d'un parallélogramme. L'ensemble $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{U}_3$ est également constitué d'un parallélogramme car l'unique élément que les ensembles ont en commun est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles et égaux. L'ensemble $\mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4$ contient un seul quadrilatère, qui est lui aussi un parallélogramme car ses côtés opposés sont égaux.

L'ensemble $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_4$ est constitué d'un trapèze rectangle. Par contre, l'ensemble $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{U}_4$ est constitué, en général, de deux quadrilatères ayant deux côtés opposés parallèles tandis que les deux autres côtés sont égaux; l'un d'eux est un parallélogramme et l'autre un trapèze isocèle (fig. 19); cependant si $\beta = 90^\circ$, $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{U}_4$ est constitué d'un seul quadrilatère, qui est un rectangle.

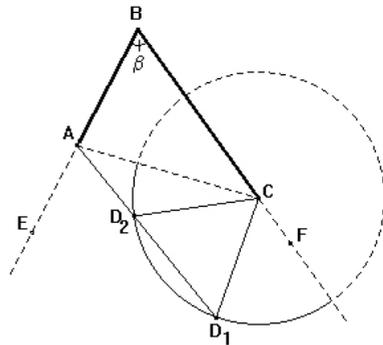


fig. 19

L'ensemble $\mathcal{X}_5 \cap \mathcal{U}_1$ est constitué d'un seul quadrilatère, qui est un cerf-volant car il a deux côtés consécutifs égaux et les diagonales perpendiculaires; l'ensemble $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ contient lui aussi un seul quadrilatère, qui est un cerf-volant car $AB = AD$ et $BC = CD$.

De même, chacun des ensembles $\mathcal{U}_8(\delta_1) \cap \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_8(\delta_1) \cap \mathcal{U}_2$ est constitué d'un cerf-volant, tandis que chacun des ensembles $\mathcal{U}_8(\delta_2) \cap \mathcal{U}_3$, $\mathcal{U}_8(\delta_2) \cap \mathcal{U}_4$ est constitué d'un parallélogramme.

Le nombre n des éléments de l'ensemble $\mathcal{U}_5(\gamma) \cap \mathcal{U}_7(\epsilon)$ dépend du choix du cercle γ passant par A et C et de l'ellipse ϵ de foyers A et C . Considérons le cas où l'ellipse ϵ passe par B et étudions l'ensemble $\mathcal{U}_5(\gamma) \cap \mathcal{U}_7(\epsilon)$ en fonction des variations du cercle γ .

Soit O le centre de γ , a la médiatrice du segment AC et V le sommet de ϵ qui se trouve dans la région S . Nous désignons par M le centre du cercle passant par A, C, V , par M' le centre du cercle passant par A, C, H , et par M'' le centre du cercle passant par A, C, K (fig. 20).

On peut facilement vérifier que :

- si O coïncide avec M , alors $n = 1$;
- si O est un point du segment MM' , les extrémités exclues, alors $n = 2$;

- si O est un point du segment $M'M''$, l'extrémité M'' exclue, alors $n = 1$;
- si O est un n'importe quel autre point de la droite a , alors $n = 0$.

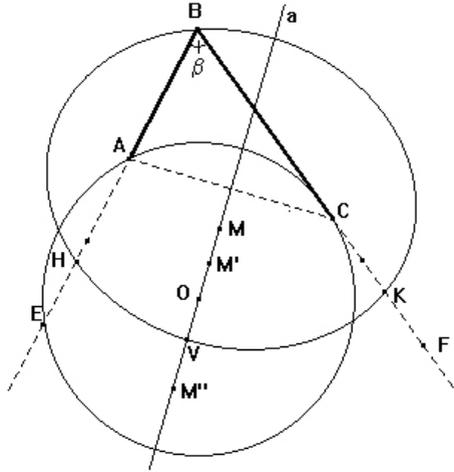


fig. 20

Nous observons que, dans le cas particulier où les deux segments donnés AB et BC sont égaux, les quadrilatères des ensembles $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{U}_3$ et $\mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4$ sont des parallélogrammes dont les côtés sont égaux, c'est-à-dire des losanges; les quadrilatères appartenant aux ensembles $\mathcal{X}_5 \cap \mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ sont des cerf-volants dont les côtés sont égaux, c'est-à-dire, ici aussi, des losanges. En outre, nous observons que pour l'ensemble $\mathcal{U}_5(\gamma) \cap \mathcal{U}_7(\epsilon)$, il faut se rappeler que $M' = M''$.

Dans le cas particulier où l'angle donné β est droit, les quadrilatères des ensembles $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{U}_3$ et $\mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4$ sont des parallélogrammes dont les angles sont égaux, et donc des rectangles; les quadrilatères appartenant aux ensembles $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_4$ et $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{U}_3$ sont des trapèzes ayant les angles égaux et donc des rectangles eux aussi.

Enfin, dans le cas particulier où $AB = BC$ et où β est droit, les ensembles $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{U}_3$, $\mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4$, $\mathcal{X}_5 \cap \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ coïncident et sont constitués d'un carré.

5. Problèmes de maximum et de minimum

Affrontons à présent le problème de déterminer, parmi les quadrilatères d'un ensemble X_i ou \mathcal{U}_i , ceux qui ont l'aire maximum, l'aire minimum, le périmètre maximum et le périmètre minimum. Examinons quelques-uns des cas les plus intéressants.

Considérons les quadrilatères $ABCD$ de l'ensemble \mathcal{F} ayant un périmètre p donné. Ces quadrilatères forment un ensemble du type $\mathcal{U}_7(\epsilon)$, où ϵ est une ellipse ayant ses foyers en A et en C , et le sommet D décrit l'arc HK de ϵ (fig. 14). Le quadrilatère d'aire maximum est celui pour lequel la distance de D à la droite AC est maximum, c'est-à-dire le quadrilatère dont le sommet D est le point commun à l'arc HK et à la médiatrice du segment AC . Ce quadrilatère appartient aussi à l'ensemble X_6 et par conséquent ses côtés AD et DC sont égaux. Nous observons, par contre, que $\mathcal{U}_7(\epsilon)$ ne contient pas de quadrilatères d'aire minimum.

Considérons à présent les quadrilatères $ABCD$ de l'ensemble \mathcal{F} ayant une aire k donnée. Ces quadrilatères forment un ensemble du type $X_7(r)$, où r est une droite parallèle à la diagonale AC , et le sommet D décrit le segment HK de r (fig. 7). Le quadrilatère de périmètre minimum est celui pour lequel la somme $AD+DC$ est minimum, c'est-à-dire le quadrilatère dont le sommet D est le point commun au segment HK et à l'ellipse de foyers A et C tangente à la droite r . Remarquons alors que le sommet D appartient à la médiatrice du segment AC et donc que le quadrilatère de périmètre minimum appartient aussi à l'ensemble X_6 et que par conséquent ses côtés AD et DC sont égaux. Nous observons qu'au contraire $X_7(r)$ ne contient pas de quadrilatères de périmètre maximum.

Des considérations exposées ci-dessus nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- parmi tous les quadrilatères $ABCD$ de \mathcal{F} ayant le périmètre constant, a l'aire maximum celui pour lequel le triangle ADC est isocèle sur la base AC ;
- parmi tous les quadrilatères $ABCD$ de \mathcal{F} ayant l'aire constante, a le périmètre minimum celui pour lequel le triangle ADC est isocèle sur la base AC .

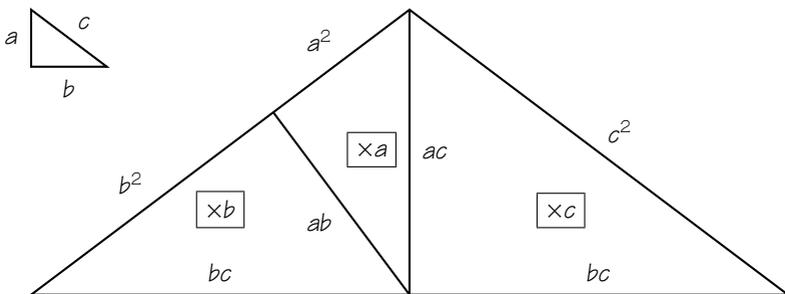
De la même manière, on peut démontrer que :

- parmi tous les quadrilatères $ABCD$ de \mathcal{F} inscrits dans un cercle (ensemble \mathcal{U}_6) a l'aire et le périmètre maximum celui pour lequel le triangle ADC est isocèle sur la base AC ;
- parmi tous les quadrilatères $ABCD$ de \mathcal{F} ayant les côtés consécutifs CB et CD égaux (ensemble \mathcal{U}_2) a l'aire maximum celui pour lequel le triangle ADC est rectangle en C .

Bibliographie

- [1] MICALE B., Problèmes de maximum et de minimum pour les triangles, *Mathématique et Pédagogie*, 2003, 140, 5-24.
- [2] MILAZZO F.- PENNISI M., Una classificazione dei quadrilateri, *La matematica e la sua didattica*, 2000, 4, 440-449.
- [3] PENNISI M., Triangles et moyennes, *Mathématique et Pédagogie*, 1994, 99, 21-26.
- [4] ROBERT G., Le triangle. Champ d'investigation et de découvertes, *Mathématique et Pédagogie*, 1993, 91, 27-41; 1993, 92, 17-26.
- [5] ROBERT G., Voyage au pays de Simson ou « Le roman ... inachevé d'une droite », *Mathématique et Pédagogie*, 1995, 100, 41-60.
- [6] ROBERTSON S.A., Classifying triangles and quadrilaterals, *Mathematical Gazette*, vol. 61, 1977, 415, 38-49.

Théorème de Pythagore.





Coordination des Associations
Pluralistes de Professeurs

La SBPMef et la Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs organisent une après-midi de « rencontre controversée » sur le thème :

2004, année du sursaut éducatif ou la poursuite du plongeon ?

Quelles mesures notre société pourrait-elle prendre pour améliorer les performances scolaires en Communauté Française, tous réseaux confondus ?

Cette rencontre, animée par Monsieur SACHA DAOUT, présentateur du journal télévisé de la RTBF, aura lieu le mercredi 28 avril de 15h à 18h à la Faculté Universitaire de Gembloux, auditorio de Biologie végétale.

- | | |
|-------------|--|
| 14h-15h | Accueil des participants par les Associations de Professeurs |
| 15h-15h45 | Lecture, mathématiques Sciences
un état des lieux (Pisa 2000 et 2003) |
| 15h45-16h45 | L'enseignement et les programmes politiques
Présentation par 4 représentants des partis politiques |
| 17h-18h | Controverse |

En cette année d'élections, les professeurs auront à cœur de rappeler au monde politique qu'en Angleterre, le travailliste TONY BLAIR s'était fait élire avec un programme en trois points :

ÉDUCATION, ÉDUCATION, ÉDUCATION !

Capp sur demain, au 28 avril, à Gembloux !

De Pascal à Einstein

G. LASTERS, H. STAELENS,

En 2005 la théorie de la relativité restreinte d'EINSTEIN aura exactement 100 ans, et le Théorème de PASCAL en aura 365. À première vue, il n'y a aucun rapport évident entre ces deux faits. Pourtant, un lien existe, et c'est avec plaisir que nous nous proposons d'en convaincre le lecteur.

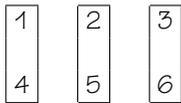
1. Pascal et Einstein

BLAISE PASCAL (1623-1662) formula son théorème en 1640 :

Si un hexagone est inscrit dans une conique, alors les côtés opposés se coupent en trois points colinéaires.

Le théorème est valable pour toutes les coniques, dégénérées ou non (figure 1).

On trouve les côtés opposés à l'aide du schéma suivant :



Les couples (1, 4), (2, 5), (3, 6) forment les côtés opposés de l'hexagone. La figure 1 illustre l'exactitude du théorème.

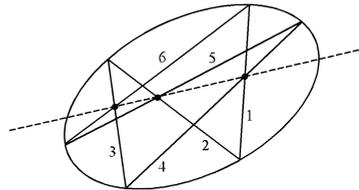


Fig. 1

Dans le cas où la conique dégénère en une droite double, le théorème devient trivial puisque les « côtés opposés » coïncident avec la conique; les côtés opposés ont tous leurs points en commun.

ALBERT EINSTEIN (1879-1955) publia sa théorie de la relativité restreinte en 1905. On peut illustrer l'essentiel de sa théorie par l'exemple qu'il a donné lui-même, à partir de la cinétique newtonienne :

Adresses des auteurs : Guido Lasters, K. A. Leuven, Ganzendries 245, 3300 Tienen (Oplinter); Hugo Staelens, Beneluxstraat 1, 9900 Eeklo
courriel : hagenhof@tiscali.be

Un train se déplace avec une vitesse v par rapport à la voie. Un voyageur se déplace dans la direction du mouvement du train, avec une vitesse w . La vitesse du voyageur par rapport à la voie est alors $v + w$, soit leur somme algébrique, dans la mécanique newtonienne.

Cependant, d'après la théorie de la relativité, l'assertion ci-dessus ne peut être vraie que si les vitesses sont suffisamment petites par rapport à la vitesse c de la lumière. En effet, cette vitesse c est la plus grande avec laquelle une masse peut se déplacer, et en plus, l'égalité $c + c = c$ doit être satisfaite.

Cette propriété a été découverte expérimentalement par ALBERT MICHELSON (1852-1931). La formule fondamentale de la relativité restreinte d'EINSTEIN, est

$$v \oplus w = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}$$

au lieu de la somme newtonienne $v + w$. Elle vaut pour des vitesses du même ordre de grandeur que la vitesse c de la lumière.

2. Multiplication des points d'une conique

L'addition [1] et la multiplication [2] des points du plan ont été traitées dans les articles *in fine*. Il ne s'agit que de l'addition et de la multiplication de nombres complexes. Ces derniers sont essentiellement les translations classiques (ou vecteurs) du plan. Conformément à [2], à la place du cercle unitaire (ou goniométrique) nous considérons une conique K contenant un point fixe F (le point fixe sur le cercle étant $(1,0)$ ou tout simplement le point 1). On introduit aussi une droite fixe H qui sera considérée comme horizon (figure 2).

A et B sont des points quelconques de K . La droite AB coupe l'horizon H en S . La droite SF coupe la conique en un deuxième point P . Ce point est une fonction de A et B . Nous notons $P = A * B$ et appelons P le produit du couple (A, B) . $*$ est une opération sur l'ensemble des couples de points de la conique K ; c'est une opération qui applique tous les couples de points de la conique K sur K , ou formellement :

$$* : K^2 \rightarrow K : (A, B) \mapsto A * B.$$

L'opération $*$ — que nous appellons *multiplication* — est évidemment commutative :

$$A * B = B * A.$$

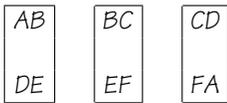
De plus, on a

$$P = P * F = F * P,$$

ce qui montre que F est neutre pour $*$.

Maintenant, considérons un hexagone $ABCDEF$, inscrit dans une conique \mathcal{K} (figure 3).

La droite sur laquelle les côtés opposés



se coupent (selon le théorème de PASCAL), est choisie comme horizon H .

On a :

$$A * B = D * E, \quad B * C = E * F, \quad C * D = F * A.$$

Si F est considéré comme point fixe de \mathcal{K} , on obtient, vu que F est neutre pour $*$:

$$A * B = D * E \tag{1}$$

$$B * C = E \tag{2}$$

$$C * D = A \tag{3}$$

Après avoir substitué A et E dans (1) par leurs valeurs données par (3) et (2) respectivement, on obtient

$$(C * D) * B = D * (B * C)$$

ou encore, vu la commutativité de $*$:

$$B * (C * D) = (B * C) * D,$$

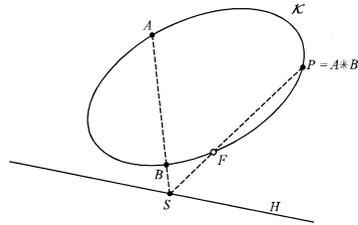


Fig. 2

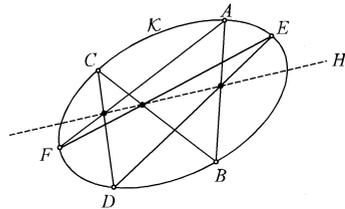


Fig. 3

l'opération $*$ est donc associative.

Conclusion :

Le Théorème de PASCAL est équivalent à

$\left\{ \begin{array}{l} \text{la commutativité} \\ \text{et} \\ \text{l'associativité} \end{array} \right\}$ de la multiplication des points d'une conique.

3. Projection sur une droite

Nous retournons vers la figure 2. Considérons une ellipse \mathcal{C} et proposons la projection sur une droite R (figure 4) :

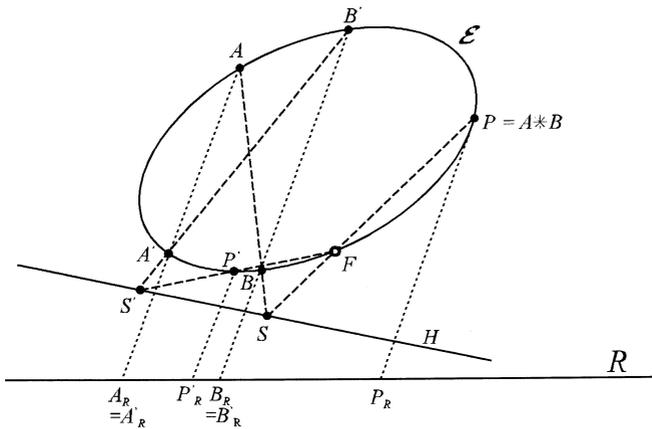


Fig. 4

Nous constatons que

$$A_R = A'_R \quad \text{et} \quad B_R = B'_R,$$

mais aussi que

$$P_R = (A * B)_R \neq P'_R = (A' * B')_R.$$

Du couple $(A_R, B_R) = (A'_R, B'_R)$ on obtient les deux points différents $P_R \neq P'_R$ après la projection. Donc la projection induit sur R une relation plurivalente.

Recommençons à partir d'une autre conique, par exemple une parabole (figure 5). Si nous choisissons une projection non-parallèle à l'axe, on se trouve devant la même difficulté que dans le cas précédent. Alors nous optons pour une projection parallèle à l'axe de la parabole.

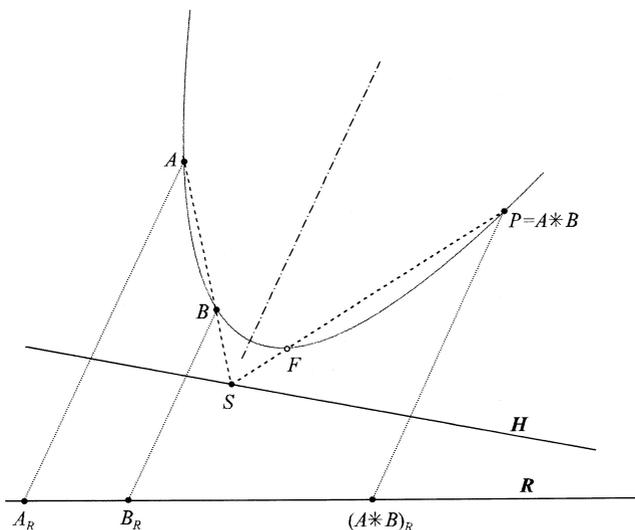


Fig. 5

Dans ce cas, la projection induit sur R une opération univoque que nous notons \diamond . On a donc

$$(A * B)_R = A_R \diamond B_R.$$

Les propriétés de $*$ sont conservées après la projection. Notons par exemple que l'opération \diamond est associative :

$$\begin{aligned} (A_R \diamond B_R) \diamond C_R &= (A * B)_R \diamond C_R \\ &= ((A * B) * C)_R \\ &= (A * (B * C))_R \quad (* \text{ est associative}) \\ &= A_R \diamond (B * C)_R \\ &= A_R \diamond (B_R \diamond C_R) \end{aligned}$$

Si la direction de la projection est asymptotique, l'hyperbole aussi satisfait aux conditions précédentes.

4. Application

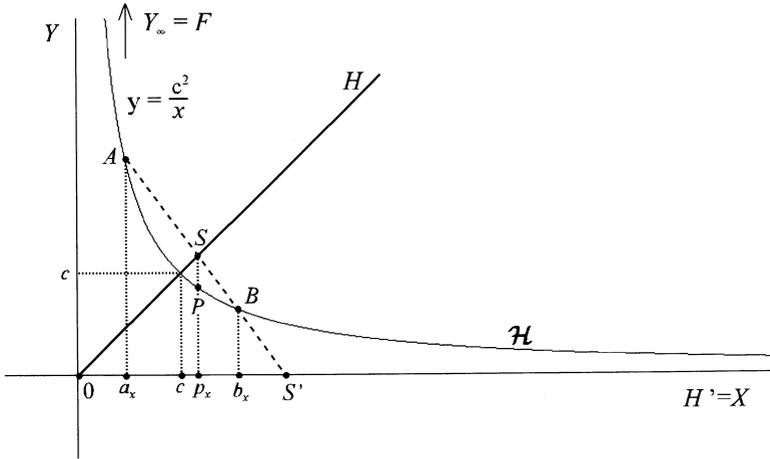


Fig. 6

Du point de vue de la physique, la figure n'est pas correcte : une vitesse plus grande que la vitesse c de la lumière est évidemment impossible. Cependant une esquisse exacte serait très indistincte car les points B , S , P et (c, c) se trouveraient trop près les uns des autres.

Dans un système orthonormé, considérons l'hyperbole

$$\mathcal{H} : xy = c^2$$

ou $y = \frac{c^2}{x}$ où c est la vitesse de la lumière (figure 6). Comme horizon H nous choisissons la première bissectrice : $y = x$, et pour F le point à l'infini de l'hyperbole \mathcal{H} confondu avec le point à l'infini de l'axe Y . Choisissons deux points $A, B \in \mathcal{H}$, alors la droite AB coupe l'horizon H au point S . Relier S à F , c'est projeter S perpendiculairement à l'axe X , ce qui nous donne le point P sur l'hyperbole, et le point p_x sur l'axe X .

L'opération $*$ sur \mathcal{H} induit sur X une opération que nous noterons \oplus .
On a alors

$$P = A * B, \quad \text{donc aussi} \quad p_x = a_x \oplus b_x.$$

Si nous posons $A\left(v, \frac{c^2}{v}\right), B\left(w, \frac{c^2}{w}\right) \in \mathcal{H}$, alors $p_x = v \oplus w$.

Le vecteur directeur de la droite AB est

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= \left(w - v, \frac{c^2}{w} - \frac{c^2}{v} \right) \\ &= \frac{1}{vw} (vw(w - v), c^2(v - w)) \\ &= \frac{v - w}{vw} (-vw, c^2) \end{aligned}$$

ou plus simplement : $(-vw, c^2)$.

L'équation cartésienne de AB est donc

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} x - v & y - \frac{c^2}{v} \\ -vw & c^2 \end{array} \right| = 0 &\iff c^2(x - v) + vw \left(y - \frac{c^2}{v} \right) = 0 \\ &\iff c^2x + vwy = c^2(v + w) \end{aligned} \quad (4)$$

L'intersection avec $y = x$:

$$\begin{aligned} (c^2 + vw)x &= c^2(v + w) \\ x &= \frac{c^2(v + w)}{c^2 + vw} \\ &= \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} \end{aligned}$$

et donc

$$s_x = p_x = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}.$$

Les coordonnées de S et l'abscisse de P ne sont que la somme relativiste des vitesses v et w :

$$v \oplus w = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}$$

On constate que $c \oplus c = c$, conformément à l'expérience de MICHELSON. L'opération \oplus est commutative et associative, ce que nous avons démontré au point 3.

Finalement nous choisissons l'axe X comme horizon H' (figure 5). La droite AB coupe H' en S' . L'abscisse de S' s'obtient en posant $y = 0$ dans l'équation cartésienne (4) de AB :

$$c^2x = c^2(v + w) \quad \text{d'où} \quad x_{S'} = v + w,$$

ce qui est visiblement la somme algébrique des vitesses v et w en mécanique newtonienne.

5. Conclusion

L'opération commutative et associative $*$ des points d'une conique, qui est équivalente au Théorème de PASCAL, conduit, dans le cas particulier de l'hyperbole, en même temps à la somme relativiste et la somme newtonienne des vitesses. Il existe donc bien un lien entre PASCAL et EINSTEIN.

6. Petit supplément : PASCAL et OHM-KIRCHHOFF

En 2004 il y aura exactement 150 ans que le physicien allemand GEORG SIMON OHM (1787-1854) décède à Munich. Il est connu dans le cours d'électricité pour le lien qu'il a découvert entre potentiel (tension, voltage), résistance et intensité du courant électrique.

En 2004 aussi, il y aura 180 ans qu'un autre physicien allemand, GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1824-1887), naît à Königsberg (Kaliningrad de nos jours). C'est KIRCHHOFF qui reprend et étend la théorie de GEORG OHM. Il s'occupe entre autres des montages en série et en parallèle des résistances électriques.

Ainsi, la résistance R équivalente à deux résistances R_1, R_2 , connectées parallèlement, est donnée par la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \iff R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Ici aussi le Théorème de PASCAL a voix au chapitre. Dans un système ortho-normé, considérons la parabole

$$\mathcal{P} : y = x^2.$$

Nous choisirons l'axe $X : y = 0$ comme horizon H , et $F = Y_\infty$, le point à l'infini de la parabole, comme point fixe. Choisissons deux points A, B sur \mathcal{P} , alors la droite AB coupe l'horizon H au point S .

L'opération $*$ sur la parabole induit sur X une opération que nous noterons \odot . Considérons la droite passant par S et parallèle à l'axe Y ; elle coupe \mathcal{P} en P . On a :

$$P = A * B \quad \text{et donc aussi} \quad p_x = a_x \odot b_x.$$

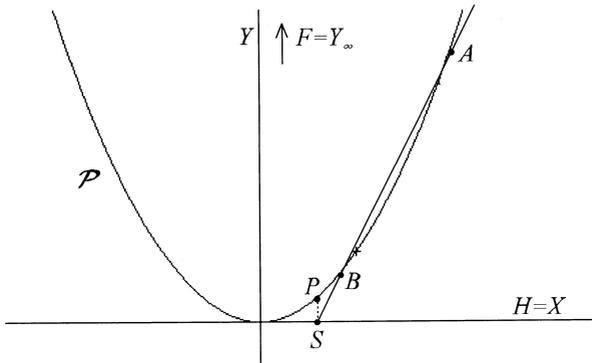


Fig. 7

Posons $A(a, a^2), B(b, b^2) \in \mathcal{P}$. Pour l'abscisse de S on a $s_x = p_x$. Le vecteur directeur le plus simple de la droite AB est $(1, a + b)$; l'équation cartésienne de AB est

$$(a + b)x - y - ab = 0.$$

Son intersection avec H s'obtient en posant $y = 0$:

$$x_s = \frac{ab}{a + b}.$$

La loi $a \odot b = \frac{ab}{a+b}$ est commutative et associative (voir au point 3).

Dans le cas particulier de la parabole, le Théorème de PASCAL nous conduit à la résistance équivalente à un montage de deux résistances en parallèle.

Les auteurs remercient JACK G. SEGERS de Liège pour ses remarques constructives.

Bibliographie

- [1] G. Lasters en H. Staelens, Optelling van punten in het vlak, *Wiskunde en Onderwijs* 85 (1996), 69 - 76.
- [2] G. Lasters en H. Staelens, Vermenigvuldiging van punten in het vlak, *Wiskunde en Onderwijs* 87 (1996), 348 - 353.
-

Si l'on sait que la somme $1 + 2 + 3 + \dots + n$ des n premiers naturels non nuls vaut $\frac{n(n+1)}{2}$,

et que la somme $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ des n premiers impairs vaut n^2 ,

alors on peut trouver facilement la somme $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ des cubes des n premiers naturels non nuls en observant le tableau suivant :

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1^3 \\ 3+5 & = & 2^3 \\ 7+9+11 & = & 3^3 \\ 13+15+17+19 & = & 4^3 \\ 21+23+25+27+29 & = & 5^3 \\ 31+33+35+37+39+41 & = & 6^3 \\ 43+45+47+49+51+53+55 & = & 7^3 \end{array}$$

Ainsi, si l'on additionne tous les nombres impairs des n premières rangées du tableau, la somme des cubes des n premiers naturels non nuls est égale à la somme des $1 + 2 + 3 + \dots + n$ premiers impairs, donc à la somme des $\frac{n(n+1)}{2}$ premiers impairs, donc à $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Le Livre mathématique de l'île maritime

J. MIEWIS, CREM

Le *Livre mathématique de l'île maritime* (Hai-tao Suan-ching) est un recueil chinois, qui explique l'art de mesurer à distance. Comme le premier problème exposé consiste à trouver la hauteur d'une île maritime, le livre porte ce nom, par une allusion traditionnelle à l'écriture chinoise. L'auteur en est LIU HOUI qui vivait au III^e siècle ap. J.-C. dans la province du Shansi au centre de la Chine. Il est le premier commentateur (en 263 ap. J.-C.) connu du *Livre de Calcul*. (voir [1] et [2])

Le *Livre de Calcul*, (Chu-chang Suan-shu) est le grand classique chinois des mathématiques, dont l'influence est comparable aux *Éléments* d'EUCLIDE. LIU HOUI affirme dans sa préface qu'il s'est servi du texte de TCHANG TS'ANG qui vécut de 254 à 152 av. J.-C.. Au neuvième chapitre ⁽¹⁾, consacré aux triangles rectangles, LIU HOUI ajoute de son cru *Neuf problèmes sur la double différence* (Tchong Tsouo) ⁽²⁾. C'est ce complément qui a été séparé du tronc commun au XVIII^e siècle et a pris alors son nom actuel de *Livre mathématique de l'île maritime*. Le *Livre de Calcul*, augmenté de nombreuses annotations fut régulièrement recopié, arrangé, perdu, retrouvé, modernisé jusqu'en 1775 où l'érudit TAI TCHEN en rédigea la version actuelle.

Les neuf énoncés de LIU HOUI font penser à des problèmes classiques de topographie des actuels traités de trigonométrie. L'auteur donne sans justification et sous une forme littéraire une formule conduisant à la solution. Le mathématicien, LI HOANG a rédigé en 1811 des commentaires soigneux et a proposé des démonstrations qui utilisent uniquement la similitude de triangles. Ce sont celles-là que nous allons expliciter à notre tour.

Nous allons envisager également ces problèmes du point de vue trigonométrique et montrer que cette approche moderne retrouve bien les formules géométriques.

Adresse de l'auteur: Jules Miewis, avenue de Péville, 150, 4030 - Grivegnée.

Courriel : j.miewis@infonie.be

⁽¹⁾ Les neuf chapitres du *Livre de Calcul* se répartissent comme suit : Arpentage (38 problèmes), Troc et Proportions (46), Règles de Société (20), Convergence (24), Volumes (28), Mélanges et Alliage (28), Excès et Défaut (20), Équations (18), Triangle rectangle (24).

⁽²⁾ Ce nom vient de ce que l'auteur fait toujours une double observation, avec des perches ou des grandes équerrés.

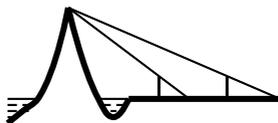
Les énoncés portent sur des observations topographiques concrètes et utilisent des unités de longueurs en vigueur en Chine. Les valeurs de ces unités ont beaucoup varié, mais les multiples et sous-multiples ont gardé les mêmes noms et les mêmes valeurs relatives.

Le pied vaut 10 pouces, le pas vaut 6 pieds, la toise vaut 10 pieds, le li vaut 300 pas ou 1800 pieds. Par souci historique, nous avons gardé ces mesures dans notre texte. Il est très simple d'adapter ces énoncés à nos unités européennes.

1. Problème 1

I : Problème de l'île maritime

Il y a une île à mesurer. Deux perches sont élevées, hautes également de 30 pieds, l'une plus près, l'autre plus loin de l'île, à un intervalle de 1000 pas. La perche la plus éloignée est parfaitement en ligne droite avec la première et l'île. Si l'œil regarde de la terre le sommet de la première perche, avec un recul de 123 pas, il aperçoit juste le plus haut point de l'île. Si l'on se met de la même façon à 127 pas en arrière de l'autre perche, l'on voit le haut de l'île, sur le rayon visuel qui de la terre passe au sommet de la première perche. Trouver la hauteur de l'île et sa distance.



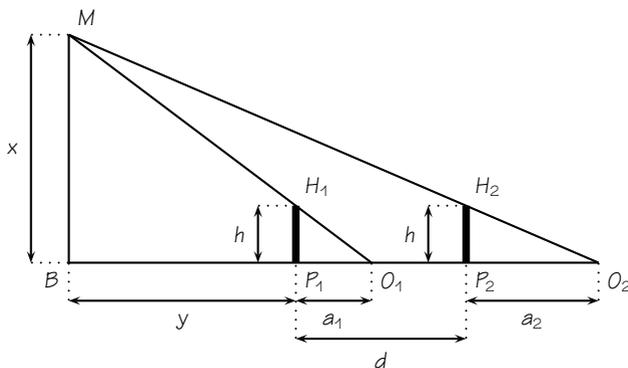
Solution :

Multiplier la hauteur des perches par l'intervalle qui les sépare et prendre le produit pour dividende; le diviseur sera la différence entre les deux reculs opérés derrière les deux perches; le quotient augmenté de la hauteur des perches donnera la hauteur de l'île. Réponse : 4 lis 55 pas.

Pour trouver la distance de l'île à la première perche, multiplier le nombre de pas faits en arrière de la première perche, par la distance qui sépare les deux perches; prendre pour diviseur la différence entre les deux reculs : le quotient sera la distance cherchée. Réponse : (distance de la première perche) 102 lis 150 pas.

1.1. Solutions géométriques

En utilisant nos notations modernes, examinons la solution proposée par LI HOANG à ce premier problème. La hauteur h des perches est 30 pieds ou 5 pas. La distance d entre les deux perches est 1000 pas. Les reculs d'observation sont $a_1 = 123$ pas et $a_2 = 127$ pas.



La hauteur de l'île est donnée par $x = \frac{hd}{a_2 - a_1} + h$.

En prenant le pas comme unité, $x = \frac{5 \cdot 1000}{127 - 123} + 5 = 1255$, ce qui correspond bien à la réponse de 4 lis 55 pas.

La distance qui sépare l'île de la première perche est $y = \frac{a_1 d}{a_2 - a_1}$.

Ainsi, $y = \frac{123 \cdot 1000}{127 - 123} = 30750$ pas, ce qui équivaut à 102 lis 150 pas.

Établissons ces deux formules donnant x et y .

Les triangles MBO_1 et $H_1P_1O_1$ sont semblables, on a

$$\frac{x}{y + a_1} = \frac{h}{a_1},$$

d'où l'on tire

$$xa_1 = hy + ha_1. \quad (1)$$

Les triangles MBO_2 et $H_2P_2O_2$ sont semblables, on a

$$\frac{x}{y + d + a_2} = \frac{h}{a_2},$$

d'où l'on tire

$$xa_2 = hy + hd + ha_2. \quad (2)$$

En soustrayant (1) à (2), on obtient successivement :

$$\begin{aligned} x(a_2 - a_1) &= hd + h(a_2 - a_1) \\ x &= \frac{hd}{a_2 - a_1} + h, \end{aligned} \quad (3)$$

ce qui justifie la première réponse de l'auteur.

Multiplions à présent (1) par a_2 pour obtenir

$$xa_1a_2 = hya_2 + ha_1a_2 \quad (4)$$

et (2) par a_1 pour obtenir

$$xa_1a_2 = hya_1 + hda_1 + ha_1a_2 \quad (5)$$

En soustrayant (5) de (4), on obtient successivement :

$$\begin{aligned} 0 &= hy(a_2 - a_1) - hda_1 \\ y(a_2 - a_1) &= da_1 \\ y &= \frac{da_1}{a_2 - a_1}, \end{aligned} \quad (6)$$

ce qui justifie la seconde réponse de l'auteur. Remarquons que la hauteur h des deux perches n'apparaît pas directement dans l'expression de y . Sa présence est néanmoins implicite puisque si on change la hauteur des perches lors de l'observation, les reculs a_1 et a_2 sont changés.

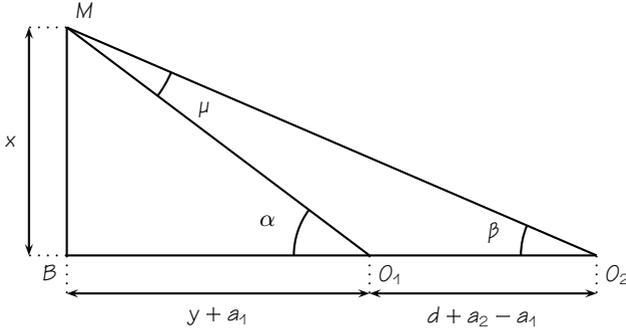
1.2. Solutions trigonométriques

Observons d'abord la figure de la page 49 : l'angle d'élévation de M en O_1 ($\widehat{H_1O_1P_1}$) est donné par la relation $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a_1}$. On calcule $\alpha = 2^\circ 19' 40''$.

De même, l'angle d'élévation de M en O_2 ($\widehat{H_2O_2P_2}$) est donné par la relation $\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{a_2}$. On calcule $\beta = 2^\circ 15' 17''$.

La base O_1O_2 du triangle MO_1O_2 est donnée par $d + a_2 - a_1$; elle vaut 1004 pas. L'angle α extérieur au triangle MO_1O_2 est la somme des angles $\mu = \widehat{O_1MO_2}$ et β , donc $\mu = \alpha - \beta$. Nous reprenons ces données sur la figure de la page suivante.

Triangles semblables



Dans la triangle MO_1O_2 , la règle des sinus donne

$$\frac{MO_1}{\sin \beta} = \frac{O_1O_2}{\sin \mu}$$

$$MO_1 = \frac{O_1O_2 \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (7)$$

Dans le triangle rectangle MBO_1 , on a $x = MO_1 \sin \alpha$. En tenant compte de la relation (7), on a :

$$x = O_1O_2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}. \quad (8)$$

Numériquement, $x = 1004 \frac{\sin(2^\circ 19' 40'') \sin(2^\circ 15' 17'')}{\sin(4' 23'')} = 1258,23$ pas.

Dans ce même triangle, on a $y = MO_1 \cos \alpha - a_1$. En utilisant la relation (7), on a

$$y = O_1O_2 \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} - a_1 \quad (9)$$

Numériquement, $y = 1004 \frac{\cos(2^\circ 19' 40'') \sin(2^\circ 15' 17'')}{\sin(4' 23'')} - 123 = 30830,02$ pas.

De meilleures valeurs pour x et y peuvent bien sûr être obtenues en augmentant la précision des angles intermédiaires. Une autre méthode consiste à utiliser les formules de passage entre les nombres trigonométriques sans utiliser la valeur de l'angle. Puisque les angles utilisés sont du premier quadrant, on a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a_1}, \text{ donc } \sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{a_1^2 + h^2}} \text{ et } \cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + h^2}};$$

sans la comprendre, est une prouesse que tentent certains naïfs

Triangles semblables

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{a_2}, \text{ donc } \sin \beta = \frac{h}{\sqrt{a_2^2+h^2}} \text{ et } \cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+h^2}}.$$

$$\text{On calcule : } \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \frac{h(a_2 - a_1)}{\sqrt{a_1^2+h^2}\sqrt{a_2^2+h^2}}.$$

On remplace dans la formule trouvée en (8) les nombres trigonométriques par les expressions que nous venons de trouver, ce qui permet d'écrire successivement :

$$\begin{aligned} x &= (d + a_2 - a_1) \frac{\frac{h}{\sqrt{a_1^2+h^2}} \frac{h}{\sqrt{a_2^2+h^2}}}{\frac{h(a_2 - a_1)}{\sqrt{a_1^2+h^2}\sqrt{a_2^2+h^2}}} \\ &= (d + a_2 - a_1) \frac{h^2}{h(a_2 - a_1)} \\ &= \frac{h(d + a_2 - a_1)}{a_2 - a_1} \\ &= \frac{hd}{a_2 - a_1} + h, \end{aligned}$$

et on retrouve la formule proposée en (3). La formule trouvée en (9) est à son tour transformée successivement en :

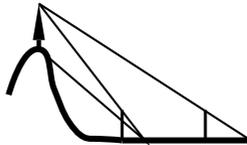
$$\begin{aligned} y &= (d + a_2 - a_1) \frac{\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+h^2}} \frac{h}{\sqrt{a_2^2+h^2}}}{\frac{h(a_2 - a_1)}{\sqrt{a_1^2+h^2}\sqrt{a_2^2+h^2}}} - a_1 \\ &= (d + a_2 - a_1) \frac{ha_1}{h(a_2 - a_1)} - a_1 \\ &= \frac{a_1(d + a_2 - a_1)}{a_2 - a_1} - a_1 \\ &= \frac{a_1 d}{a_2 - a_1} + a_1 - a_1 \\ &= \frac{a_1 d}{a_2 - a_1}, \end{aligned}$$

et on retrouve la formule proposée en (6).

2. Problème 2

II : Problème du conifère

Un conifère s'élève sur une montagne et l'on voudrait calculer sa hauteur inconnue. Deux poteaux, long de 20 pieds, sont élevés à un intervalle de 50 pas et en ligne droite avec l'arbre. l'œil placé à terre, juste 7 pas 4 pieds en arrière du premier poteau, aperçoit les sommets de l'arbre et du poteau sur une même oblique; mais le bas du conifère est aperçu à 2 pieds 8 pouces en-dessous du sommet du poteau. À 8 pas 5 pieds en arrière du second poteau, l'œil placé à terre voit de même le haut de l'arbre et le bout du poteau sur la même oblique. Chercher la hauteur du conifère et la distance de la montagne.



Solution :

Prenez comme dividende le produit de l'intervalle qui sépare les perches par la distance du point de coupure du sommet du poteau; et pour diviseur, la différence entre les deux reculs. Le quotient augmenté de la distance du point de coupure au sommet du poteau donnera la hauteur de l'arbre.
Réponse : 12 toises 2 pieds 8 pouces.

Pour trouver la distance, prendre comme dividende le produit de l'intervalle qui sépare les perches par le premier recul, et comme diviseur, la différence entre les deux reculs; le quotient donnera la distance de la montagne.
Réponse : 1 li 28 et $\frac{4}{7}$ de pas.

2.1. Solutions géométriques

En utilisant nos notations modernes, examinons la solution proposée par LI HOANG à ce deuxième problème. La hauteur h des poteaux est 20 pieds. La distance d entre les deux poteaux est de 50 pas ou 300 pieds. Les reculs d'observation sont $a_1 = 7$ pas, 4 pieds ou 46 pieds et $a_2 = 8$ pas,

Triangles semblables

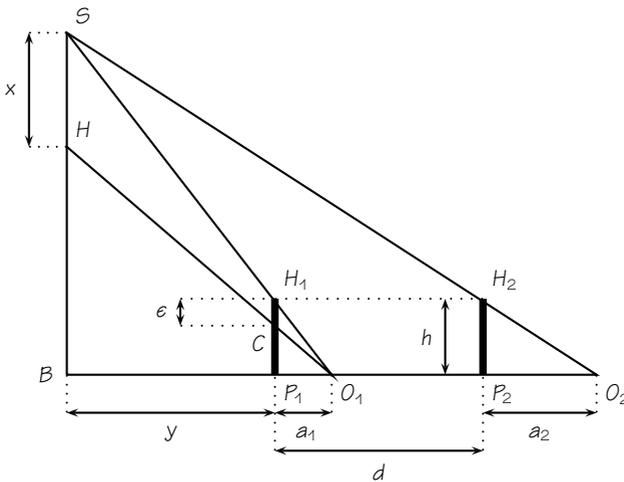
5 pieds ou 53 pieds. La distance ϵ du point de coupure (qu'il faut donc comprendre comme le point où la ligne de visée du bas de l'arbre coupe le premier poteau) au sommet de ce premier poteau est de 2 pieds 8 pouces ou 2,8 pieds.

La hauteur de l'arbre est donnée par $x = \frac{d\epsilon}{a_2 - a_1} + \epsilon$.

En prenant le pied comme unité, $x = \frac{300 \cdot 2,8}{53 - 46} + 2,8 = 122,8$, ce qui correspond bien à la réponse de 12 toises 2 pieds 8 pouces.

La distance « de la montagne au premier poteau » est $y = \frac{a_1 d}{a_2 - a_1}$.

Toujours avec le pied comme unité, $y = \frac{46 \cdot 300}{53 - 46} = 1971 + \frac{3}{7}$, ce qui correspond à 1 li 171 et $\frac{3}{7}$ de pieds ou 1 li 28 pas et $\frac{24}{7}$ pieds ou encore 1 li 28 et $\frac{4}{7}$ pas.



Établissons les deux formules proposées par l'auteur.

Les triangles CH_1O_1 et HSO_1 sont semblables, on a

$$\frac{CO_1}{HO_1} = \frac{\epsilon}{x}. \quad (10)$$

Les triangles CP_1O_1 et HBO_1 sont semblables, on a

$$\frac{CO_1}{HO_1} = \frac{h - \epsilon}{BH}. \quad (11)$$

Triangles semblables

Des égalités (10) et (11), on tire successivement

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{x} &= \frac{h - \epsilon}{BH} \\ BH &= \frac{hx - \epsilon x}{\epsilon} \\ BH &= \frac{hx}{\epsilon} - x.\end{aligned}$$

Puisque $BS = BH + x$, on a

$$BS = \frac{hx}{\epsilon}. \quad (12)$$

Les triangles BSO_2 et $P_2H_2O_2$ sont semblables, on a

$$\frac{BS}{h} = \frac{BO_2}{a_2},$$

d'où l'on tire $h \cdot BO_2 = a_2 \cdot BS$ et en utilisant (12), on a

$$BO_2 = \frac{a_2 x}{\epsilon}. \quad (13)$$

Enfin, les triangles BSO_1 et $P_1H_1O_1$ sont semblables, on a

$$\frac{BS}{h} = \frac{BO_1}{a_1},$$

d'où l'on tire

$$a_1 \cdot BS = h \cdot BO_1. \quad (14)$$

Mais $BO_1 = BO_2 - O_1O_2 = BO_2 - d - a_2 + a_1$, valeur que l'on remplace dans (14) pour obtenir

$$a_1 \cdot BS = h(BO_2 - d - a_2 + a_1). \quad (15)$$

En remplaçant les valeurs de BS trouvée en (12) et de BO_2 trouvée en (13) dans (15), on obtient

$$\frac{a_1 hx}{\epsilon} = h \left(\frac{a_2 x}{\epsilon} - d - a_2 + a_1 \right)$$

c'est une règle absolue; ne pas la respecter, c'est perdre son temps. 55

Triangles semblables

$$\begin{aligned}\frac{a_1x}{\epsilon} &= \frac{a_2x}{\epsilon} - d - a_2 + a_1 \\ (a_2 - a_1)\frac{x}{\epsilon} &= d + (a_2 - a_1) \\ x &= \frac{d\epsilon}{a_2 - a_1} + \epsilon,\end{aligned}\tag{16}$$

ce qui est la première solution de l'auteur.

Cherchons y : pour cela remplaçons dans (12), la valeur trouvée pour x :

$$BS = \frac{hd}{a_2 - a_1} + h.\tag{17}$$

En remplaçant la valeur de BS trouvée en (17) dans la relation (14), il vient successivement

$$\begin{aligned}hBO_1 &= a_1 \left(\frac{hd}{a_2 - a_1} + h \right) \\ BO_1 &= \frac{a_1d}{a_2 - a_1} + a_1\end{aligned}$$

et puisque $y = BO_1 - a_1$, on trouve bien la seconde solution de l'auteur

$$y = \frac{a_1d}{a_2 - a_1}.\tag{18}$$

Comme dans le premier problème, cette formule ne contient pas explicitement une référence à la hauteur h des deux poteaux.

2.2. Solutions trigonométriques

Observons d'abord la figure de la page 54 : l'angle d'élévation du point H en O_1 ($\widehat{CO_1P_1}$) est donné par la relation $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h-\epsilon}{a_1}$. On calcule $\alpha = 20^\circ 30' 5''$.

L'angle d'élévation du point S en O_1 ($\widehat{H_1O_1P_1}$) est donné par la relation $\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{a_1}$. On calcule $\beta = 23^\circ 29' 55''$.

Enfin l'angle d'élévation du point S en O_2 ($\widehat{H_2O_2P_2}$) est donné par la relation $\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{a_2}$. On calcule $\gamma = 20^\circ 40' 28''$.

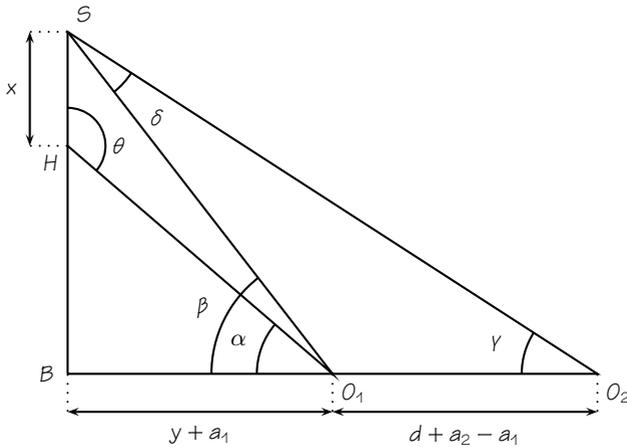
La base O_1O_2 du triangle SO_1O_2 est donnée par $d + a_2 - a_1$; elle vaut 307 pieds. L'angle β extérieur au triangle SO_1O_2 est la somme des angles

Triangles semblables

$\delta = \widehat{O_1SO_2}$ et γ , donc $\delta = \beta - \gamma$. L'angle θ extérieur au triangle HBO_1 est la somme de l'angle droit en B et de l'angle α , donc $\theta = 90^\circ + \alpha$. Nous reprenons ces données sur la figure de la page suivante.

Dans le triangle SO_1O_2 , la règle des sinus donne

$$\begin{aligned} \frac{SO_1}{\sin \gamma} &= \frac{O_1O_2}{\sin \delta} \\ SO_1 &= \frac{O_1O_2 \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)}. \end{aligned} \quad (19)$$



Dans le triangle SO_1H , la règle des sinus donne

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sin(\beta - \alpha)} &= \frac{SO_1}{\sin \theta} \\ x &= \frac{SO_1 \sin(\beta - \alpha)}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation (19), on a

$$x = O_1O_2 \frac{\sin \gamma \sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta - \gamma) \cos \alpha}. \quad (20)$$

Numériquement, $x = 307 \frac{\sin 20^\circ 40' 28'' \sin 2^\circ 59' 50''}{\sin 2^\circ 49' 27'' \cos 20^\circ 30' 5''} = 122,8$ pieds.

Triangles semblables

Dans le triangle SBO_1 , on a $y = BO_1 - a_1 = SO_1 \cos \beta - a_1$. En utilisant la relation (19), on a :

$$y = O_1O_2 \frac{\sin \gamma \cos \beta}{\sin(\beta - \gamma)} - a_1. \quad (21)$$

Numériquement, $y = 307 \frac{\sin 20^\circ 40' 28'' \cos 23^\circ 29' 55''}{\sin 2^\circ 49' 27''} - 46 = 1971,41$ pieds.

Utilisons à nouveau les formules de passage entre les nombres trigonométriques sans utiliser la valeur de l'angle. Puisque les angles utilisés sont du premier quadrant, on a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h-\epsilon}{a_1}, \text{ donc } \sin \alpha = \frac{h-\epsilon}{\sqrt{a_1^2 + (h-\epsilon)^2}} \text{ et } \cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + (h-\epsilon)^2}};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{a_1}, \text{ donc } \sin \beta = \frac{h}{\sqrt{a_1^2 + h^2}} \text{ et } \cos \beta = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + h^2}};$$

$$\text{et } \operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{a_2}, \text{ donc } \sin \gamma = \frac{h}{\sqrt{a_2^2 + h^2}} \text{ et } \cos \gamma = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + h^2}}.$$

$$\text{On calcule } \sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta = \frac{\epsilon a_1}{\sqrt{a_1^2 + (h-\epsilon)^2} \sqrt{a_1^2 + h^2}}$$

$$\text{et } \sin(\beta - \gamma) = \sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta = \frac{h(a_2 - a_1)}{\sqrt{a_1^2 + h^2} \sqrt{a_2^2 + h^2}}.$$

On remplace dans la formule trouvée en (20) les nombres trigonométriques par les expressions que nous venons de calculer, ce qui permet d'écrire successivement :

$$\begin{aligned} x &= (d + a_2 - a_1) \frac{\frac{h}{\sqrt{a_2^2 + h^2}} \frac{\epsilon a_1}{\sqrt{a_1^2 + h^2} \sqrt{a_1^2 + (h-\epsilon)^2}}}{\frac{h(a_2 - a_1)}{\sqrt{a_1^2 + h^2} \sqrt{a_2^2 + h^2}} \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + (h-\epsilon)^2}}} \\ &= (d + a_2 - a_1) \frac{hea_1}{ha_1(a_2 - a_1)} \\ &= \frac{\epsilon(d + a_2 - a_1)}{a_2 - a_1} \\ &= \frac{d\epsilon}{a_2 - a_1} + \epsilon, \end{aligned}$$

et on retrouve la formule proposée en (16). La formule trouvée en (21) est à son tour transformée successivement en :

$$y = (d + a_2 - a_1) \frac{\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + h^2}} \frac{h}{\sqrt{a_2^2 + h^2}}}{\frac{h(a_2 - a_1)}{\sqrt{a_1^2 + h^2} \sqrt{a_2^2 + h^2}}} - a_1$$

$$\begin{aligned} &= (d + a_2 - a_1) \frac{ha_1}{h(a_2 - a_1)} - a_1 \\ &= \frac{a_1(d + a_2 - a_1)}{a_2 - a_1} - a_1 \\ &= \frac{a_1d}{a_2 - a_1} + a_1 - a_1 \\ &= \frac{a_1d}{a_2 - a_1}, \end{aligned}$$

et on retrouve la formule proposée en (18).

Remarquons pour terminer que les formules (6 et 18) donnant la distance y sont les mêmes dans les deux problèmes ce qui se voit bien en comparant les dessins des pages 49 et 54. Si l'on remplace la hauteur h du poteau dans la formule (3) par ϵ , on trouve la formule (16) : si l'on se place à la position du premier observateur (en O_1), la distance x à déterminer est dans le premier cas vue suivant la grandeur h et dans le deuxième cas suivant la grandeur ϵ par rapport à un poteau situé chaque fois à une distance a_1 en avant de l'observateur.

Bibliographie

- [1] Florian Cajori, *A history of mathematics*, Chelsea Publishing Company, New-York, 1991.
- [2] Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, Ed. du Renouveau Pédagogique, Montréal 1973.
- [3] P. L. van Hee, *Le classique de l'île maritime*, ouvrage chinois du III^e siècle, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Absteilung B, Band 2, Heft 3, Berlin, Julius Springer, 1932.

FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS

*La Polytech est
une institution
universitaire
à taille humaine
intégrée
dans sa ville et
dans sa région.
Venez y acquérir
la formation
polyvalente et
irremplaçable
d'Ingénieur Civil.*

Formation d'ingénieurs civils en:

- ✓ architecture
- ✓ chimie
- ✓ électricité
- ✓ informatique et gestion
- ✓ mécanique
- ✓ mines-géologie
- ✓ science des matériaux

**PORTES
OUVERTES
2004**

**samedi 15 mai
de 9h à 13h**



Renseignements : Secrétariat des Etudes

9, rue de Houdain • 7000 MONS

Tél.: 065/37 40 30 à 32 • Fax: 065/37 40 34

secretu@fpms.ac.be • <http://www.fpms.ac.be>

Lieux avec Cabri-Géomètre

J.-P. HOUBEN, *Université Catholique de Louvain*

Mots-clés : Cabri-Géomètre, Cabri, lieux, géométrie.

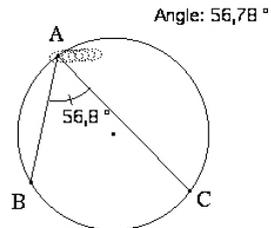
On peut presque dire que Cabri-Géomètre est un outil privilégié pour faire l'étude de lieux géométriques. N'empêche que, pour les élèves, voir le lieu semble leur suffire. Il est cependant indispensable de démontrer que l'ensemble des points qui satisfont aux conditions est bien, soit une droite, soit un cercle. Cabri-Géomètre ne sert qu'à faire découvrir le lieu. La démonstration pour convaincre reste toujours à faire.

L'approche d'un lieu peut se faire progressivement. Il y a plusieurs outils : animation, trace et enfin, lieu.

1. Angles inscrits

Vu la dynamique de Cabri-Géomètre, il est intéressant de l'utiliser entre autres pour visualiser la mesure constante d'un angle inscrit à un cercle. Il suffit de tracer un cercle; de placer trois points A, B et C sur celui-ci et de dessiner un angle inscrit par les deux segments AB et AC.

Marquons cet angle en pointant C, puis A, puis B. Affichons la valeur de l'angle. Si, maintenant, nous déplaçons le point A, nous pouvons visualiser la constance de la valeur de l'angle inscrit. Même si l'on démontre la proposition, il est utile pour certain élèves de constater, de visu, que la proposition est toujours vraie.



Nous pouvons cependant utiliser l'animation ⁽¹⁾, pour montrer que l'angle est constant. En choisissant cet outil, un petit ressort apparaît lorsqu'on s'approche d'un point qui peut se déplacer sur un objet (ici le point A), et qu'on clique sur le point. Si l'on déplace alors la souris tout en pressant le

Adresse de l'auteur: Jean-Paul Houben, Rue de l'Eglise, 78, 1301 - Bierges
courriel : Houben@anma.ucl.ac.be

⁽¹⁾ **Affichage/ Animation**

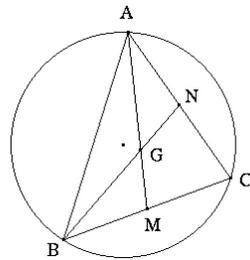
bouton, le ressort devient plus ou moins grand. En relâchant le bouton de la souris, le mouvement est amorcé. La vitesse de déplacement dépend de l'étirement du ressort, mais il peut être modifié pendant l'exécution avec les touches + et -. Le mouvement s'arrête en cliquant à nouveau sur le bouton de la souris.

2. Centre de gravité

Quel est le lieu du centre de gravité d'un triangle ABC inscrit à un cercle lorsque le point A parcourt le cercle et les points B et C sont fixes ?

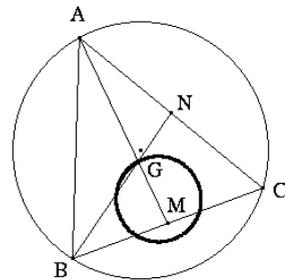
Trçons un cercle. Plaçons-y trois points A, B et C et construisons le triangle ABC. Le centre de gravité G sera obtenu en recherchant l'intersection de deux des médianes du triangle : AM et BN.

Une première approche du lieu peut être faite par une animation. Il suffit de prendre le point A pour voir le déplacement du point G.



Aucun dessin du lieu n'est fait, mais on peut essayer de deviner la forme du lieu esquissé. Il suffit, après avoir choisi l'outil Trace ⁽²⁾, de montrer le point G qui se met à clignoter, puis de déplacer le point A de la figure.

Tant que le point G clignote on peut obtenir sa trace, même avec une animation. Si l'on rechoisit l'outil trace et qu'on re pointe G, il ne clignote plus et on n'a plus de trace pour ce point. Remarquons en passant que, si plusieurs points ont été sélectionnés avec l'outil trace, on marque le déplacement de chacun d'eux. Les traces d'un dessin peuvent être effacées en choisissant l'option « Tout redessiner » dans Edition.

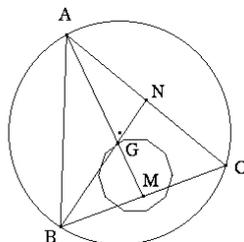


Naturellement on obtient rapidement le lieu avec l'outil lieu ⁽³⁾ Cependant, il faut être attentif. Car la première fois le lieu peut n'être pas très lisse, comme dans la figure de la page suivante.

⁽²⁾ **Affichage**/ Trace

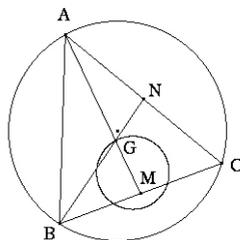
⁽³⁾ **Constructions**/ Lieu

Il suffit d'aller voir les Préférences dans les Options. On constatera alors qu'on peut choisir le nombre des points du lieu. Par défaut, il est de 30 points. Il est souhaitable de passer au maximum de 1000 points.



On termine par enregistrer les préférences et appliquer celles-ci au dessin pour avoir la figure ci-contre.

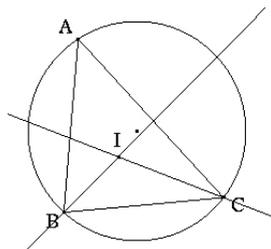
Le lieu semble être un cercle. En effet, il est l'image du cercle circonscrit au triangle ABC pour l'homothétie de centre M (milieu de BC) et de rapport $\frac{2}{3}$.



3. Intersection des bissectrices

Quel est le lieu du point d'intersection des bissectrices d'un triangle ABC inscrit dans un cercle lorsque le point A parcourt le cercle et les points B et C sont fixes ?

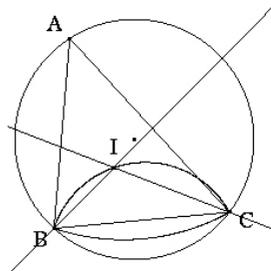
Reprenons un triangle ABC inscrit dans un cercle de centre O. Construisons-y deux des trois bissectrices et recherchons leur intersection I.



Nous pouvons faire d'abord une animation. Puis rechercher la trace. Enfin demander la construction du lieu.

En voyant le dessin, on peut se demander si l'angle BIC n'est pas constant? Dans ce cas, le lieu serait un arc capable.

Or, sachant que I est l'intersection des bissectrices (bissectrices qui divisent un angle en deux parties égales), que la somme des angles d'un triangle est constante, on va pouvoir démontrer que dans le triangle BIC l'angle en I a une mesure constante.

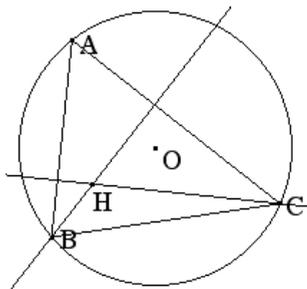


$l + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \pi$, or $A + B + C = \pi$ et donc $\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ ce qui donne finalement pour $l : l = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$. L'angle l est donc un angle constant puisque A l'est.

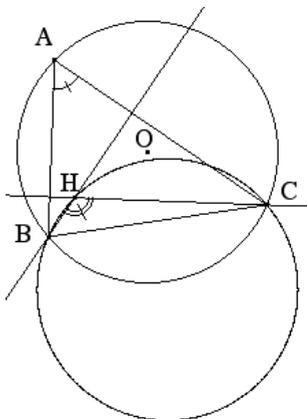
4. Orthocentre

Quel est le lieu de l'orthocentre d'un triangle ABC inscrit à un cercle lorsque le point A parcourt le cercle et les points B et C sont fixes ?

Inscrivons un triangle ABC dans un cercle de centre O . Construisons les hauteurs issues de B et C . Puis, recherchons l'intersection H de celles-ci. Demandons à Cabri-Géomètre de nous tracer le lieu de H lorsque A parcourt le cercle de centre O .



Le lieu apparaît comme un cercle. L'arc qui passe par H est un arc capable. Indications pour une démonstration. L'angle en H étant constant : il est le supplément de l'angle en A . En effet, le quadrilatère de sommets opposés A et H a les deux autres angles opposés droits, puisque formés par les hauteurs.



On peut même démontrer que le point H est le symétrique par rapport à la droite BC d'un point du cercle circonscrit à ABC . Ce qui, d'emblée, donne tout le lieu.

Je laisse la démonstration à la sagacité du lecteur.

À la découverte des polynômes - 2^e partie

J.-P. GOSSELIN,

La première partie de cet article a été publiée dans *Mathématique et Pédagogie* n° 145. Nous y avons étudié les approximations par des polynômes soumis à la condition « **COMPRENANT** n points ». Cette seconde partie va s'affranchir de cette condition en la remplaçant par une condition plus faible : polynômes « **PROCHES** de n points ».

4. Polynômes proches de n points donnés.

On se rappelle le problème causé par un point mal placé et celui suscité par la fonction \arctg pour lesquels on avait pensé utiliser une « grosse craie ». Creusons maintenant cette question.

Si le centre d'une craie de longueur convenable, tenue verticalement, décrivait le graphe d'une fonction polynôme tout en recouvrant tous les points donnés ou ceux d'une fonction donnée, on estimerait avoir bien répondu à la question initiale de cet exposé.

De manière plus précise, cherchons un polynôme p (s'il existe) de degré m ($m \leq n - 1$), dont le graphe est le plus proche possible de n points d'abscisses distinctes $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$.

$$\text{Soit } p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m.$$

On doit chercher des réels a_0, \dots, a_m qui rendent minimum la grandeur

$$N = \sum_{i=1}^n |y_i - p(x_i)|.$$

Cette grandeur se prête mal aux calculs à cause des valeurs absolues qu'elle renferme.

Pour cette raison, on pourrait la remplacer par la grandeur :

$$M = \sum_{i=1}^n (y_i - p(x_i))^2.$$

Voilà pourquoi ce polynôme sera appelé **polynôme des moindres carrés**.

Comment rendre minimum cette grandeur M ?

Si les coefficients a_1, a_2, \dots, a_m étaient connus et que seul le coefficient a_0 restait à déterminer, il faudrait le choisir de telle manière que la dérivée de M par rapport à a_0 soit nulle, c'est à dire de telle manière que la dérivée partielle de M par rapport à a_0 soit nulle.

En raisonnant de la même manière pour tous les réels $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ on devra trouver ceux qui annulent simultanément les dérivées partielles de M obtenues en les calculant successivement par rapport à $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$.

4.1. Première manière : système d'équations

En annulant la dérivée partielle de M par rapport à a_k on a :

$$\begin{aligned} a_0 (x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k) + a_1 (x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + \dots + x_n^{k+1}) + \dots \\ + a_n (x_1^{k+m} + x_2^{k+m} + \dots + x_n^{k+m}) = y_1 x_1^k + y_2 x_2^k + \dots + y_n x_n^k \end{aligned}$$

On devra donc résoudre le système de $(m + 1)$ équations aux $(m + 1)$ inconnues a_0, a_1, \dots, a_m

$$\begin{aligned} a_0 (x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_n^0) + a_1 (x_1^1 + x_2^1 + \dots + x_n^1) + \dots \\ + a_m (x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m) = y_1 x_1^0 + y_2 x_2^0 + \dots + y_n x_n^0 \\ a_0 (x_1^1 + x_2^1 + \dots + x_n^1) + a_1 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \dots \\ + a_m (x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + \dots + x_n^{m+1}) = y_1 x_1^1 + y_2 x_2^1 + \dots + y_n x_n^1 \\ a_0 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + a_1 (x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) + \dots \\ + a_m (x_1^{m+2} + x_2^{m+2} + \dots + x_n^{m+2}) = y_1 x_1^2 + y_2 x_2^2 + \dots + y_n x_n^2 \\ \vdots \\ a_0 (x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m) + a_1 (x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + \dots + x_n^{m+1}) + \dots \\ + a_m (x_1^{2m} + x_2^{2m} + \dots + x_n^{2m}) = y_1 x_1^m + y_2 x_2^m + \dots + y_n x_n^m \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est un déterminant de **VANDERMONDE**. Ce déterminant est non nul, la solution du système existe bien et est unique.

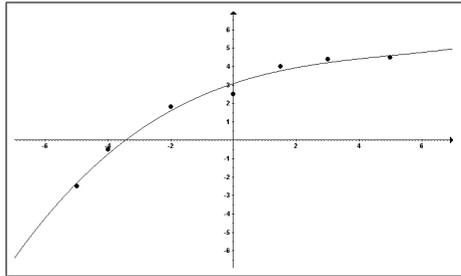
● **Exemple** : Cherchons le polynôme p de degré 3 proche des 7 points : $(-5; -2,5)$, $(-4; -0,5)$, $(-2; 1,8)$, $(0; 3,3)$, $(1,5; 4)$, $(3; 4,4)$, $(5; 4,5)$

En résolvant le système de 4 équations à 4 inconnues on trouve :

$$p(x) = 3,3632 + 0,54466x - 0,092037x^2 + 0,0059452x^3.$$

Et si on remplaçait le point $(0; 3,3)$ par le point $(0; 2,5)$?
Cherchons semblablement le polynôme p de degré 3 proche des 7 points : $(-5; -2,5)$, $(-4; -0,5)$, $(-2; 1,8)$, $(0; 2,5)$, $(1,5; 4)$, $(3; 4,4)$, $(5; 4,5)$

Semblablement on trouve :



$$p(x) = 3,0827 + 0,5633x - 0,077799x^2 + 0,0051101x^3.$$

Cette fois le graphe est proche de celui escompté.

Remarques :

En particulier si $m = 1$ alors $p(x) = a_0 + a_1x$ représente **la droite des moindres carrés**.

La résolution du système de 2 équations à 2 inconnues conduit bien à la droite des moindres carrés d'équation :

$$y - \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} (x - \bar{x}).$$

L'inconvénient de cette méthode est de devoir résoudre un nouveau système d'équations, sans profiter des résultats établis antérieurement, dès que l'on recherche un polynôme proche des mêmes n points mais de degré différent.

4.2. Deuxième manière : Polynômes de TSCHEBYCHEV (1821 - 1894)

Cet inconvénient pourrait peut-être disparaître en conduisant autrement les calculs et en définissant $p(x)$ à l'instar de la méthode de NEWTON de la manière suivante :

$$p(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_m\phi_m(x)$$

où $\phi_i(x)$ représente un polynôme de degré i convenablement choisi.

En annulant la dérivée partielle de

$$M = \sum_{i=1}^n (y_i - p(x_i))^2$$

par rapport à a_k il vient :

$$\begin{aligned} & a_0(\phi_0(x_1)\phi_k(x_1) + \phi_0(x_2)\phi_k(x_2) + \dots + \phi_0(x_n)\phi_k(x_n)) \\ & a_1(\phi_1(x_1)\phi_k(x_1) + \phi_1(x_2)\phi_k(x_2) + \dots + \phi_1(x_n)\phi_k(x_n)) \\ & \quad + \dots \\ & a_k(\phi_k(x_1)\phi_k(x_1) + \phi_k(x_2)\phi_k(x_2) + \dots + \phi_k(x_n)\phi_k(x_n)) \\ & \quad + \dots \\ & a_m(\phi_m(x_1)\phi_k(x_1) + \phi_m(x_2)\phi_k(x_2) + \dots + \phi_m(x_n)\phi_k(x_n)) \\ & = y_1\phi_k(x_1) + y_2\phi_k(x_2) + \dots + y_n\phi_k(x_n) \end{aligned} \quad (1)$$

En utilisant les notations suivantes (celles du « produit scalaire ») :

$$\begin{aligned} \langle \phi_i, \phi_j \rangle &= \phi_i(x_1)\phi_j(x_1) + \phi_i(x_2)\phi_j(x_2) + \dots + \phi_i(x_n)\phi_j(x_n) \\ \langle y, \phi_i \rangle &= y_1\phi_i(x_1) + y_2\phi_i(x_2) + \dots + y_n\phi_i(x_n) \end{aligned}$$

(1) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} a_0 \langle \phi_0, \phi_k \rangle + a_1 \langle \phi_1, \phi_k \rangle + \dots + a_k \langle \phi_k, \phi_k \rangle \\ + \dots + a_m \langle \phi_m, \phi_k \rangle = \langle y, \phi_k \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

Choisissons encore, si possible, les polynômes ϕ_i de telle manière que $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$ si $i \neq j$. Dans ce cas, l'expression (2) devient : $a_k \langle \phi_k, \phi_k \rangle = \langle y, \phi_k \rangle$ et on trouve :

$$a_k = \frac{\langle y, \phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle} \quad (0 \leq k \leq m)$$

Approximations

Il reste à vérifier si l'on peut réellement déterminer des polynômes $\phi_k(x)$ tels que :

$\phi_k(x)$ est un polynôme de degré k
 $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$ avec $(0 \leq i, j \leq m$ et $i \neq j)$.

- On peut toujours poser : $\phi_0(x) = 1$
- Posons ensuite : $\phi_1(x) = x + b_0\phi_0(x)$ et déterminons b_0 à partir de la condition : $\langle \phi_0, \phi_1 \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle \phi_0, \phi_1 \rangle &= \phi_0(x_1)\phi_1(x_1) + \phi_0(x_2)\phi_1(x_2) + \dots + \phi_0(x_n)\phi_1(x_n) \\ 0 &= 1(x_1 + b_0 \cdot 1) + 1(x_2 + b_0 \cdot 1) + \dots + 1(x_n + b_0 \cdot 1) \\ 0 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n + b_0 + b_0 + \dots + b_0 \end{aligned}$$

Observons que $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ peut s'écrire $x_1\phi_0(x_1) + x_2\phi_0(x_2) + \dots + x_n\phi_0(x_n)$ et convenons encore de noter :

$\langle x^k, \phi_i \rangle$ l'expression $x_1^k\phi_i(x_1) + x_2^k\phi_i(x_2) + \dots + x_n^k\phi_i(x_n)$.

Dès lors $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \langle x, \phi_0 \rangle$ et on a : $0 = \langle x, \phi_0 \rangle + b_0 \langle \phi_0, \phi_0 \rangle$

$$b_0 = -\frac{\langle x, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle} \quad \text{et} \quad \phi_1(x) = x - \frac{\langle x, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle}.$$

- Posons encore $\phi_2(x) = x^2 + c_1\phi_1(x) + c_0\phi_0(x)$ et déterminons c_1 et c_0 à partir des conditions $\langle \phi_0, \phi_2 \rangle = 0$ et $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 0$. Ces conditions conduisent semblablement à :

$$c_0 = -\frac{\langle x^2, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle} \quad \text{et} \quad c_1 = -\frac{\langle x^2, \phi_1 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle}$$

et

$$\phi_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, \phi_1 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle} \phi_1(x) - \frac{\langle x^2, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle}.$$

Plus généralement on a :

$$\phi_k(x) = x^k - \frac{\langle x^k, \phi_{k-1} \rangle}{\langle \phi_{k-1}, \phi_{k-1} \rangle} \phi_{k-1}(x) - \dots - \frac{\langle x^k, \phi_1 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle} \phi_1(x) - \frac{\langle x^k, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle}.$$

Ces polynômes $\phi_k(x)$ existent donc bien et sont appelés polynômes de TCHEBYCHEV. L'ensemble $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_m(x)\}$ de ces polynômes forment un système orthogonal sur l'ensemble des points $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Finalement :

$$p(x) = \sum_{k=0}^m a_k \phi_k(x) \quad (m \leq n-1)$$

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_k(x) = x^k - \frac{\langle x^k, \phi_{k-1} \rangle}{\langle \phi_{k-1}, \phi_{k-1} \rangle} \phi_{k-1}(x) - \dots - \frac{\langle x^k, \phi_1 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle} \phi_1(x) - \frac{\langle x^k, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle} \phi_0(x)$$

$$a_k = \frac{\langle y, \phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle}$$

L'**avantage** ici est incontestablement de pouvoir calculer le polynôme des moindres carrés proche des mêmes n points mais de degré différent en profitant des calculs déjà effectués.

• Remarque :

En particulier si $m = 1$ alors $p(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x)$ représente la droite des moindres carrés. Et on vérifie que

$$p(x) = \bar{y} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} (x - \bar{x}) \quad \text{ou} \quad y - \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} (x - \bar{x}).$$

Exemple Cherchons le polynôme p de degré 3 proche des 7 points :

$(-5; -2,5), (-4; -0,5), (-2; 1,8), (0; 3,3), (1,5; 4), (3; 4,4), (5; 4,5)$

Soit $p(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x)$. On trouve :

$$\begin{aligned} p(x) &= 2,142857 \\ &+ 0,689673(x + 0,214286) \\ &- 0,090625(x^2 + 0,299206x - 11,54303) \\ &+ 0,005945(x^3 - 0,237502x^2 - 19,83099x + 4,453646) \end{aligned}$$

$$p * (x) = 3,3632 + 0,54466x - 0,092037x^2 + 0,0059452x^3.$$

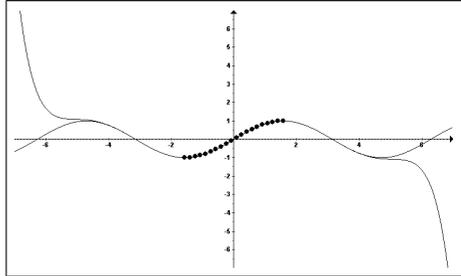
5. Polynômes proches de n points d'une fonction

On est donc capable de trouver le polynôme des moindres carrés, proche de n points donnés, ces points, d'abscisses distinctes, pouvant représenter des résultats d'expériences ou être ceux d'un nuage statistique.

En particulier, on peut espérer trouver un polynôme de degré m ($m \leq n-1$) convenable dont le graphe est assez proche de n points d'une fonction donnée.

Cherchons par exemple le polynôme de degré 11 proche des 20 points d'abscisses également espacées sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction sinus.

On trouve, en négligeant les puissances paires de x dont les coefficients sont de l'ordre de 10^{-17} à 10^{-15} :



$$\begin{aligned} p *_{11}(x) &= x - 1,666666659 \dots 10^{-1}x^3 + 8,333330563 \dots 10^{-3}x^5 \\ &\quad - 1,984083651 \dots 10^{-4}x^7 + 2,752474705 \dots 10^{-6}x^9 \\ &\quad - 2,388733933 \dots 10^{-8}x^{11} \end{aligned}$$

On vérifie que sur cet intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ l'écart entre f et $p *_{11}$ reste inférieur à $5,919 \cdot 10^{-11}$.

Cherchons encore, s'il existe un polynôme de degré convenable, proche de 20 points également espacés sur l'intervalle $[-6; 6]$ qui colle raisonnablement à la fonction $f(x) = \arctan(x)$.

Soit m le degré du polynôme $p *_m$ des moindres carrés proche de ces 20 points.

A l'aide du logiciel **menumath**, on observe que sur $[-6; 6]$, pour m variant de 19 à 1 :

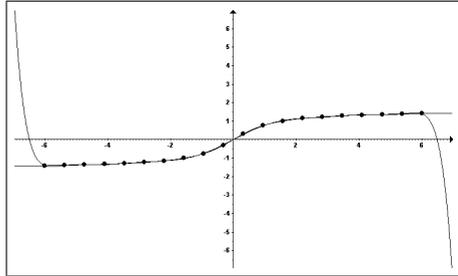
qu'ils dominent de très haut.

- La somme des carrés des écarts entre $f(x_i)$ et $p * _m(x_i)$ ($1 \leq i \leq 20$) croît de 0,00000205 à 2,41.
- Le maximum de $|f - p * _m|$ décroît de 19,23 à 0,059 (pour $m = 11$) puis croît de 0,059 à 0,522.

Ainsi pour $m = 11$ on a le graphe ci-contre :

Sur $[-6;6]$ l'écart entre f et $p * _{11}$ reste inférieur à 0,059.

Mais alors si le graphe d'un polynôme est assez proche de n points d'une fonction donnée, on peut se demander s'il l'est aussi de tous les autres points, ou encore s'il existe un polynôme qui s'écarte d'une fonction donnée sans dépasser une grandeur imposée?



Plus précisément, sur un intervalle donné, peut-on toujours trouver n tel que l'écart entre f et un polynôme p de degré n reste inférieur à une grandeur positive ϵ donnée, si petite soit elle?

Ainsi, se profile tout naturellement le théorème de WEIERSTRASS (1815-1897)!

6. Polynômes proches de tous les points d'une fonction

Théorème de WEIERSTRASS (1885) :

Le voici sans démonstration :

Toute fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ peut être approximée de façon aussi précise que l'on veut par un polynôme.

Autrement dit :

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$,
 p_n est un polynôme de degré n ,

$$\text{alors } \forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \max_{x \in [a; b]} |f(x) - p_n(x)| < \epsilon$$

On a trouvé des polynômes proches de n points d'une fonction donnée. N'est-il vraiment pas possible de trouver des polynômes proches de tous les points de cette fonction ?

La réponse est OUI, mais les élèves de cinquième ne pourront la comprendre qu'en rhéto après avoir découvert les intégrales définies.

On avait calculé les produits scalaires :

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = \phi_i(x_1)\phi_i(x_1) + \phi_i(x_2)\phi_i(x_2) + \dots + \phi_i(x_n)\phi_i(x_n)$$

$$\langle y, \phi_i \rangle = y_1\phi_i(x_1) + y_2\phi_i(x_2) + \dots + y_n\phi_i(x_n)$$

$$\langle x^k, \phi_i \rangle = x_1^k\phi_i(x_1) + x_2^k\phi_i(x_2) + \dots + x_n^k\phi_i(x_n)$$

en faisant la somme d'un nombre fini n de termes formés par les produits des valeurs numériques de deux fonctions calculées respectivement en $a = x_1$, en x_2 , ..., en $x_n = b$.

En bref, on peut montrer que « la limite de la somme d'un nombre infini de termes, formés par les produits des valeurs numériques de deux fonctions calculées pour toutes les valeurs de x parcourant l'intervalle $[a; b]$ », est l'**intégrale de a à b** du produit de ces deux fonctions.

Ainsi, pour trouver une approximation polynomiale de **tous** les points d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, il suffit de calculer les produits scalaires de la manière suivante :

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = \int_a^b \phi_i^2(x) dx$$

$$\langle y, \phi_i \rangle = \int_a^b f(x)\phi_i(x) dx$$

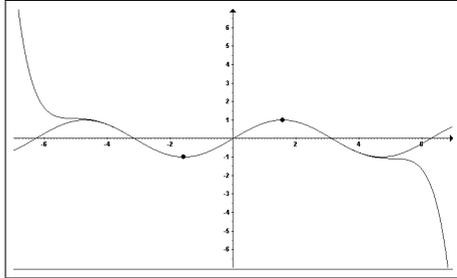
$$\langle x^k, \phi_i \rangle = \int_a^b x^k\phi_i(x) dx$$

● **Premier exemple :**

Polynôme p des moindres carrés de degré 11 proche de TOUS les points situés sur la fonction sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

En négligeant les puissances paires de x dont les coefficients sont de l'ordre de 10^{-17} à 10^{-15} .

$$\begin{aligned}
 p_{*11}(x) = & x \\
 & - 1,6666666666666666 \cdot 10^{-1} x^3 \\
 & + 8,33332995 \cdot 10^{-3} x^5 \\
 & - 1,98407729 \cdot 10^{-4} x^7 \\
 & + 2,75219410 \cdot 10^{-6} x^9 \\
 & - 2,38436875 \cdot 10^{-8} x^{11}
 \end{aligned}$$



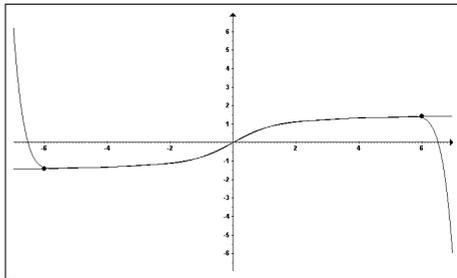
$$\max_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |\sin x - p_{*11}(x)| < 4,283 \cdot 10^{-11}.$$

● **Deuxième exemple :**

Polynôme p des moindres carrés de degré 11 proche de TOUS les points situés sur la fonction arctg sur $[-6;6]$.

En négligeant les puissances paires de x dont les coefficients sont de l'ordre de 10^{-21} à 10^{-16} .

$$\begin{aligned}
 p_{*11}(x) = & 8,72809139 \cdot 10^{-1} x \\
 & - 1,10325853 \cdot 10^{-1} x^3 \\
 & + 1,00786487 \cdot 10^{-2} x^5 \\
 & - 4,88395030 \cdot 10^{-4} x^7 \\
 & + 1,15737333 \cdot 10^{-5} x^9 \\
 & - 1,05661768 \cdot 10^{-7} x^{11}
 \end{aligned}$$



$$\max_{x \in [-6,6]} |\arctg x - p_{*11}(x)| < 0,0442.$$

● En guise de conclusion :

L'ordinateur a permis d'estimer l'écart maximum de la fonction d'erreur $f - p$ sur un intervalle donné, mais est-il possible d'exprimer cet écart à

l'aide d'une formule? Autrement dit, si $f(x) = p_n(x) + R_n$, peut-on exprimer R_n ?

Une fonction « rebelle » a surgi, la fonction arctg , et à cette occasion se sont posées des questions de convergence de suites.

Quelle approximation polynomiale faut-il privilégier selon le type de la fonction?

Même si de nombreuses questions ont été résolues depuis longtemps, il est toujours savoureux d'en rechercher intuitivement les réponses.

L'outil informatique permet d'ouvrir des portes pour en dévoiler de nouvelles et susciter par là aux utilisateurs le goût de la recherche, la joie des découvertes et le plaisir du partage des beautés de la mathématique.

Jadis, lorsque les voyages par mer étaient beaucoup plus périlleux qu'aujourd'hui, maintenant, lorsque les navires battus par les tempêtes jetaient une partie de leur cargaison par-dessus bord, il fut admis que ceux dont les marchandises avaient été sacrifiées avaient droit à une indemnité équitable, aux frais de ceux dont les marchandises étaient arrivées à bon port. La valeur des biens perdus était remboursée suivant un accord entre tous ceux dont les marchandises se trouvaient à bord du même navire. Ce dommage en cours de route était appelé *havaría* (avarie) et cette appellation fut tout naturellement reportée sur le dédommagement que chaque particulier était invité à payer. C'est de ce mot latin que dérive le terme anglais moderne *average* (moyenne dans le sens de valeur centrale). L'idée d'une moyenne a donc des racines dans des formes primitives d'assurance.

Très naturellement, par suite de l'extension de la navigation, les assurances furent fondées sur des bases plus fermes : elles répartirent les risques, non plus entre ceux dont les marchandises étaient exposées au cours d'une traversée, mais entre un grand nombre de négociants. Par la suite, le fait de garantir de tels risques devient une profession spécialisée et rémunératrice, entraînant le paiement à l'assureur d'une prime en rapport avec le risque couvert.

M. J. Moroney, *Comprendre la statistique*, Penguin Books, 1951.



Université
de Mons-Hainaut

UMH

Journée Portes Ouvertes à Mons
samedi 24 avril de 9h à 12h30
samedi 26 juin de 9h à 12h30

tél. : 065/373014
fax : 065/373054
www.umh.ac.be

**Nouveau
à Mons**

dès la rentrée 2004

le BAC en **DROIT**

à l'Université
de Mons-Hainaut



Psychologie
Sciences de
l'Éducation



Faculté Vercorpe
Économie & Gestion



Médecine
& Pharmacie



Institut de Linguistique



Dans nos classes

Y. Noël-Roch

De tout... un peu

Pour détendre l'atmosphère

1. Comment obtenir quatre comme moitié de neuf?
2. Quatre allumettes et un confetti symbolisent une pelle sur laquelle est placé un déchet. Sans toucher au déchet, le faire sortir de la pelle en déplaçant deux allumettes.
3. Comment convaincre qu'une bouteille pleine équivaut à une bouteille vide?
4. Comment découper en huit parts équitables un gâteau cylindrique en trois coups de couteau « bien droits ».

Pour faire patienter un élève trop rapide

1. Comment planter 19 arbustes de manière à obtenir 9 rangées de 5 arbustes?
2. Trouver dix paires de nombres premiers dont la somme est un premier.
3. Trouver un nombre de deux chiffres tel que la somme des cubes de ses chiffres est le triple du nombre.
4. Trouver un nombre de deux chiffres tel que le carré de la somme de ses chiffres égale le nombre obtenu en permutant les deux chiffres.
5. Trouver un nombre de deux chiffres dont la somme des carrés des chiffres est un carré parfait.
6. Trouver un nombre de deux chiffres qui est parfait (égal à la somme de ses diviseurs propres : 6 est parfait parce que $6 = 1 + 2 + 3$).

Pour intéresser aux factorisations

1. Des jeunes ayant tous plus de 10 ans et moins de 20 ans sont réunis. Le produit de leurs âges est 10 584 000. Quelle est la somme de leurs âges?
2. Comment trouver **économiquement** le nombre de diviseurs d'un nombre?

Pour disposer de différents niveaux de difficulté

Le sujet peut être traité avec les chiffres de 0 à 9. Dans ce cas, les chiffres 0 et 5 par exemple permettent d'écrire les deux nombres 50 et 05. Si cela « donne des petits boutons » on ne travaillera qu'avec les chiffres de 1 à 9.

Choisir deux chiffres (différents ou non), additionner les deux nombres qu'ils permettent d'écrire. Recommencer un certain nombre de fois pour induire une propriété commune à toutes les sommes obtenues. Eventuellement, démontrer cette propriété.

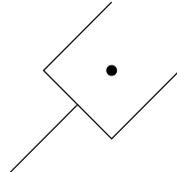
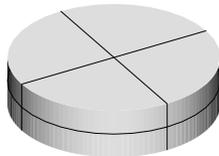
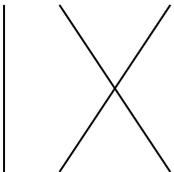
Situation analogue avec trois chiffres et la somme des six nombres qu'ils permettent d'écrire ...

Comment généraliser aux nombres de k chiffres ?

.....

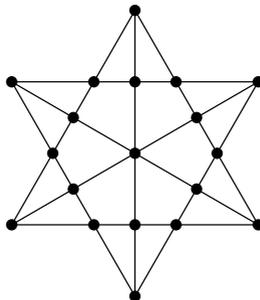
Quelques indices ?

Atmosphère ? Il serait dommage de brider les imaginations ! Trois petits dessins tout de même, dans le désordre !



En attendant ...

1. Une jolie plantation hexagonale :



2. Les dix paires sont peu intéressantes ... mais la recherche conduit à l'idée que 2 doit faire partie de toutes les paires.

3. Solution unique : 24.

5. De quoi réveiller Pythagore!

4. Solution unique : 18.

6. Solution unique : 28.

Factorisons !

1. Comme $10\ 584\ 000 = 2^6 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2$, les seuls âges possibles dans le groupe sont 16, 14, 15. En exploitant ensuite les valeurs des exposants, on obtient six jeunes dont la somme des âges est 89 ans.

2. Une recherche sur des nombres n'ayant que 2 diviseurs premiers et l'emploi d'un support géométrique adéquat (nous renvoyons au CD distribué dans *Mathématique et Pédagogie* n°143 ou aux détectives **Hick** dans *Math-Jeunes Junior* n°107 et aux treillis de diviseurs qui y sont proposés) amènent un premier résultat :

Tout nombre du type $p_1^{a_1} \times p_2^{a_2}$ admet $(a_1 + 1) \times (a_2 + 1)$ diviseurs.

Le passage aux dimensions 3, 4, ... et les treillis cubiques, quadridimensionnels ... visualisent la généralisation :

Tout nombre du type $p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_n^{a_n}$ admet $(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \dots \times (a_n + 1)$ diviseurs.

Une question de niveaux

L'exploitation minimale peut consister à induire sur des exemples une propriété commune à toutes les sommes : être multiple de 11.

L'hypothèse peut être justifiée : " $ab + ba = 11(a+b)$... et/ou la recherche peut passer aux nombres de trois chiffres?

Enfin, les « Grands » pourront conjecturer et démontrer la propriété :

La somme de tous les nombres de k chiffres obtenus en permutant les chiffres a_1, \dots, a_k vaut

$$(k-1)! \times (10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10^0) \times (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$$

Ainsi, la somme de tous les nombres obtenus à l'aide des chiffres de 1 à 8 vaut 2 015 999 979 840 ... sauf erreur de ma part!

Olympiades

C. Festraets

Habituellement, dans ce numéro de Mathématique et Pédagogie, je publie les solutions des trois premiers problèmes de la dernière Olympiade Mathématique Internationale. Mais je viens de me rendre compte que les énoncés de cette compétition sont parus dans le numéro 144 qui vient seulement de vous parvenir au moment où j'écris ces lignes (les délais d'impression sont impératifs), ce qui ne me permet pas de recevoir vos solutions. J'espère vous lire avant le 1^{er} mars et les solutions que vous m'enverrez seront publiées dans le numéro 147.

J'ai découvert un site extrêmement intéressant pour les amateurs de problèmes. Y sont publiés les énoncés et parfois les solutions de problèmes d'Olympiades et de diverses compétitions mathématiques organisées dans différents pays. Voici l'adresse de ce site : www.kalva.demon.co.uk/

J'y ai appris que, depuis 2000, la MAA organise chaque année deux tests AIME (American Invitational Mathematics Examination). Les élèves qui ont obtenu plus de 100 sur 150 à la demi-finale de l'OMB ne participent qu'au premier de ces tests et les énoncés ont été publiés pour 2003 dans le numéro 143.

Voici les tests AIME2 des années 2002 et 2003. Pour éviter des problèmes de copyright, les énoncés en ont été légèrement modifiés, sans toutefois en altérer le sens (ce qui explique pourquoi les solutions ne sont pas toujours des nombres entiers).

20° AIME2 2002

1. n est un entier compris dans l'intervalle $[100, 999]$ et le nombre n' formé en intervertissant les chiffres de n appartient au même intervalle. Combien y a-t-il de valeurs possibles pour $|n - n'|$?
2. $P(7, 2, 10)$, $Q(8, 8, 1)$ et $R(11, 3, 9)$ sont trois sommets d'un cube. Que vaut l'aire du cube?
3. a , b , c sont des entiers positifs formant une suite géométrique croissante. $b - a$ est un carré parfait et $\log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = 6$. Que vaut $a + b + c$?
4. On utilise des hexagones de côté 1 pour former un grand hexagone; sur chaque côté de ce grand hexagone se trouvent n hexagones de côté 1 (la figure ci-dessous le montre pour $n = 3$).

Pour $n = 202$, quelle est l'aire de la surface intérieure limitée par le grand hexagone?

5. Trouver la somme de tous les entiers positifs $n = 2^a 3^b$, avec $a \neq 0 \neq b$, tels que n^6 ne divise pas 6^n .
6. Déterminer l'entier le plus proche de $1000 \sum_{n=3}^{10000} \frac{1}{n^2-4}$.
7. Quel est le plus petit entier positif n tel que $\sum_{k=1}^n k^2$ est un multiple de 200.
8. Déterminer le plus petit entier positif n pour lequel l'équation $[\frac{2002}{x}] = n$ n'a pas de solution.
9. Soit $S = \{1, 2, \dots, 10\}$. Combien existe-t-il de paires A, B de sous-ensembles non vides et disjoints de S ?
10. Quelles sont les deux plus petites valeurs de x tel que $\sin x^\circ = \sin x$ rad.
11. La somme des termes de deux progressions géométriques différentes est la même et vaut 1. Ces progressions ont le même second terme et l'une d'elles a $\frac{1}{8}$ comme troisième terme. Trouver le second terme.
12. Une pièce de monnaie truquée est jetée 10 fois. A chaque jet, la probabilité d'obtenir « face » est 0,4. Désignons par a_n le nombre de « faces » obtenus dans les n premiers jets. Quelle est la probabilité que $\frac{a_n}{n} \leq 0,4$ pour $n = 1, 2, \dots, 9$ et $\frac{a_{10}}{10} = 0,4$?
13. Dans le triangle ABC , D et E appartiennent respectivement aux côtés $[BC]$ et $[AC]$. $|AE| = 3$, $|EC| = 1$, $|CD| = 2$, $|DB| = 5$ et $|AB| = 8$. Les droites AD et BE se coupent en P . Par P , on mène la parallèle à AC qui rencontre AB en Q et la parallèle à BC qui rencontre AB en R . Déterminer le rapport de l'aire du triangle PQR à celle du triangle ABC .
14. Le triangle APM est rectangle en A et son périmètre vaut 152. Soit O le point de AP tel que le cercle de centre O et de rayon 19 soit tangent à AM en A et tangent à PM . Déterminer la longueur de $[OP]$.
15. Deux cercles sont tangents à l'axe des x et à la droite $y = mx$ où $m > 0$. Ils se coupent en deux points et la coordonnée de l'un des deux est (9,6). Le produit de leurs rayons est 68. Trouver m .

1. Le produit P de trois entiers positifs vaut 6 fois leur somme. Un des entiers est la somme des deux autres. Trouver la somme de toutes les valeurs possibles de P .
2. n est le plus grand multiple de 8 n'ayant pas deux chiffres identiques. Que vaut n modulo 1000?
3. Combien existe-t-il de « mots » de 7 lettres formés uniquement avec les lettres A , B et C (les lettres ne doivent pas nécessairement figurer toutes dans chaque mot) où A n'est pas suivi immédiatement par B , B n'est pas suivi immédiatement par C et C n'est pas suivi immédiatement par A ?
4. T est un tétraèdre régulier et T' est le tétraèdre dont les sommets sont les centres des faces de T . Déterminer le rapport du volume de T' au volume de T .
5. Une bûche a la forme d'un cylindre circulaire droit de diamètre 12. On le coupe par deux plans, le premier perpendiculaire à l'axe du cylindre, le second forme un angle de 45° avec le premier et n'a pas d'intersection avec une base de la bûche. La droite d'intersection de ces deux plans rencontre la bûche en un seul point. Ces deux sections permettent d'enlever un coin de la bûche. Quel est le volume de ce coin?
6. Les côtés d'un triangle T sont de longueur 13, 14 et 15. L'image de T par la rotation de 180° autour de son centre de gravité est le triangle T' . Déterminer l'aire de la réunion des triangles T et T' .
7. Dans le losange $ABCD$, les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABD et ACD sont respectivement 12,5 et 25. Quelle est l'aire de ce losange?
8. On multiplie les termes correspondants de deux suites arithmétiques et on obtient la suite 1440, 1716, 1848, ... Déterminer le huitième terme de cette suite.
9. Les racines de l'équation $x^4 - x^3 - x^2 - 1 = 0$ sont a, b, c, d . Déterminer $p(a) + p(b) + p(c) + p(d)$ avec $p(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$.
10. Trouver le plus grand entier n tel que $\sqrt{n} + \sqrt{n+60} = \sqrt{m}$, m étant un entier non carré parfait.
11. Dans le triangle ABC rectangle en C , $|AC| = 7$ et $|BC| = 24$. M est le milieu de $[AB]$ et D est le point situé du même côté de AB que C et tel que $|DA| = |DB| = 15$. Déterminer l'aire du triangle CDM .
12. Lors d'une élection, il y a 27 candidats et n votants. Chacun vote pour un seul candidat. Pour chaque candidat, son pourcentage de votes est

inférieur d'au moins une unité à son nombre de votes. Quelle est la plus petite valeur possible de n ?

13. Une fourmi se déplace le long du bord d'un triangle métallique. A chaque sommet, elle a une chance sur deux de se diriger vers l'un des deux autres sommets. Quelle est la probabilité qu'elle revienne à son point de départ après avoir parcouru 10 côtés du triangle?
14. Dans l'hexagone convexe $ABCDEF$, les six côtés sont de même longueur et les côtés opposés sont parallèles. L'angle \widehat{FAB} mesure 120° . Les ordonnées de A et de B sont 0 et 2 respectivement et, dans un certain ordre, les ordonnées des autres sommets sont 4, 6, 8, 10. Que vaut l'aire de l'hexagone?
15. Les racines distinctes du polynôme $x^{47} + 2x^{46} + 3x^{45} + \dots + 24x^{24} + 23x^{23} + 22x^{22} + \dots + 2x^2 + x$ sont z_1, z_2, \dots, z_n . Pour $k = 1, 2, \dots, n$, $z_k^2 = a_k + i \cdot b_k$ (a_k et b_k étant réels). Déterminer $|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|$.

Solutions de l'AIME 2002

1	2	3	4	5
9	294	111	$361803 \frac{\sqrt{3}}{2}$	42
6	7	8	9	10
521	112	49	28501	$\frac{360\pi}{180 - \pi}, \frac{180\pi}{180 + \pi}$
11	12	13	14	15
$\frac{\sqrt{5} - 1}{8}$	$\frac{2^4 3^6 23}{5^{10}}$	$\frac{225}{676}$	$\frac{95}{3}$	$\frac{12\sqrt{221}}{49}$

Solutions de l'AIME 2003

1	2	3	4	5
336	120	192	$\frac{1}{27}$	216π
6	7	8	9	10
112	400	348	6	48
11	12	13	14	15
$\frac{527}{40}\sqrt{11}$	134	$\frac{171}{512}$	$48\sqrt{3}$	$8 + 4\sqrt{3}$

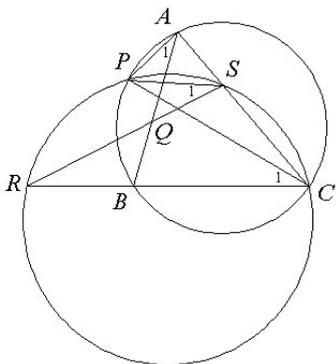
Des problèmes et des jeux

C. Festraets

Quadrilatères inscrits

Problème n° 283 de *Mathématique et Pédagogie* n° 143.

Les côtés AB , BC et CA d'un triangle ABC sont coupés par une transversale aux points Q , R et S respectivement. P est le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et RC . Prouver que le quadrilatère $APSQ$ est inscrit.



Solution de C. VILLERS de Hyon

Dans le cercle circonscrit au triangle ABC , les angles A_1 et C_1 sont inscrits et interceptent le même arc (PB) . Ils ont donc même amplitude.

Dans le cercle circonscrit au triangle RC , les angles S_1 et C_1 sont inscrits et interceptent le même arc (PB) . Ils ont donc même amplitude.

D'où les angles S_1 et A_1 ont la même amplitude et le quadrilatère croisé $APSQ$ a deux angles opposés de même amplitude, il est donc inscrit.

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare, P. DASSY de Liège, J. DILLIES de Philadelphie (USA), J. FINOULST de Diepenbeek, F.GERARD de Somzee, P. LE GALL de Metz, A. PATERNOTTRE de Boussu, J. RASSE de Méan, J.G. SEGERS de Liège et M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles.

Presqu'un entier

Problème n° 284 de *Mathématique et Pédagogie* n° 143.

Démontrer que parmi les nombres réels positifs $a, 2a, 3a, \dots, (n-1)a$ il y en a au moins un qui diffère d'un entier d'au plus $\frac{1}{n}$.

Solution de J. ANSEEUW de Roeselare

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse courriel : hamoircl@brutele.be

Belle application du principe de Dirichlet.

Il y a $(n-1)$ nombres dont la partie décimale appartient à l'intervalle $[0, 1[$.
Partageons cet intervalle en n intervalles de même longueur :

$$\left[0, \frac{1}{n}[, \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[, \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}[, \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1[$$

Si la partie décimale de l'un des nombres $a, 2a, 3a, \dots, (n-1)a$ appartient à $\left[0, \frac{1}{n}[\right]$ ou à $\left[\frac{n-1}{n}, 1[$, alors ce nombre diffère d'au plus $\frac{1}{n}$ d'un entier. Sinon, chacune des $(n-1)$ parties décimales de ces nombres appartient à l'un des $(n-2)$ intervalles

$$\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[, \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}[, \left[\frac{3}{n}, \frac{4}{n}[, \dots, \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}[\right] \quad (1)$$

Il y a donc au moins un de ces intervalles qui comprend au moins deux des parties décimales.

Soient ka et la , avec k et l entiers et $0 < l < k < n$, deux nombres dont la partie décimale appartient au même intervalle. Alors $ka - la < \frac{1}{n}$ et la partie décimale de $(k-l)a$ appartient soit à $\left[0, \frac{1}{n}[\right]$, soit à $\left[\frac{n-1}{n}, 1[$, ce qui contredit l'hypothèse (1).

P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, J. FINOULST de Diepenbeek et P. LE GALL de Metz ont aussi envoyé de **bonnes solutions**.

Multiples de 10

Problème n° 285 de *Mathématique et Pédagogie* n° 143.

Soit $S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ et $S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$. Démontrer que pour tout naturel n non multiple de 4, S_n est toujours multiple de S_1 .

Solution de P. LE GALL de Metz

Dans le tableau ci-dessous, considérons le chiffre des unités de $1^n, 2^n, 3^n, 4^n$ et de leur somme S_n , selon les congruences de n modulo 4.

Des problèmes et des jeux

$(\text{mod } 4), n \text{ est congru à}$	1^n	2^n	3^n	4^n	S_n
0	1	6	1	6	4
1	1	2	3	4	0
2	1	4	9	6	0
3	1	8	7	4	0

Donc, si n n'est pas multiple de 4, S_n finit par 0 et est un multiple de 10.

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare, P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, P. DASSY de Liège, J. DILLIES de Philadelphie, J. FINOULST de Diepenbeek, A. PATERNOTTRE de Boussu, J. RASSE de Méan et C. VILLERS de Hyon.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir avant le 1^{er} septembre 2004.

292. Partition

Soit n un entier strictement positif et E_n l'ensemble des entiers compris dans l'intervalle $[2n^2 + n, 2n^2 + 3n]$. Est-il possible de déterminer une partition de E_n en deux sous-ensembles A et B tels que

$$\sum_{x \in A} x^2 = \sum_{x \in B} x^2$$

293. Racines réelles

Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré $n > 1$ et tel que

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots \quad (a \neq 0)$$

Démontrer que si $b^2 - \frac{2n}{n-1}ac < 0$, alors P admet au plus $(n-2)$ racines réelles.

294. Suite périodique?

Soit (s_1, s_2, s_3, \dots) la suite d'entiers telle que $s_1 = 21$, $s_2 = 45$ et $s_{n+2} = s_{n+1}^2 - s_n$, n étant entier et strictement positif. Démontrer que 2004 divise une infinité de termes de cette suite.

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Septembre 2003)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :

- Cotisation ordinaire : 20 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 28,50 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 40 € (non PRIOR), 53 € (PRIOR)

Autres pays : 47 € (non PRIOR), 70 € (PRIOR)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 26 €.

Europe : 37 € (non PRIOR), 43 € (PRIOR).

Autres pays : 39 € (non PRIOR), 52 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2001 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.

Années 2002 ou 2003 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

- Abonnements groupés à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 3,80 €.

Europe : 6 € (non PRIOR), 7,80 € (PRIOR).

Autres pays : 6,60 € (non PRIOR), 10 € (PRIOR).

- Abonnements groupés aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 6,60 €.

Europe : 11 € (non PRIOR), 14 € (PRIOR).

Autres pays : 12 € (non PRIOR), 18 € (PRIOR).

Abonnements individuels.

- Abonnements à une des revues : (3 numéros)
Belgique : 5 €. Europe ⁽¹⁾ : 11,50 € (non PRIOR), 15,80 € (PRIOR).
Autres pays : 12,75 € (non PRIOR), 20,40 € (PRIOR).
- Abonnements aux deux revues : (6 numéros)
Belgique : 10 €. Europe : 16,50 € (non PRIOR), 20,50 € (PRIOR).
Autres pays : 20 € (non PRIOR), 25 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2001-2002 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.

Année 2002 ou 2003 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe ⁽¹⁾ : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 43 €. Ils recevront le Bulletin de l'APMEP, le BGV (Bulletin à Grande Vitesse) et PLOT.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP; ils bénéficient du prix « adhérents »..

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de la SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 5 de la SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :

CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 BIC BPOTBEB1

ou CCP LILLE : IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8502 683 BIC : PSSTFRPPLIL

Le coin du trésorier

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n° 7 à n° 11 et n° 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 6 (Statistiques)	7,40 €	6 €	voir ci-dessous
Dossier 7 (Vers les infiniement petits)			
Simone Trompler et Guy Noël			
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire)	6 €		T1
Claude Villers et alii			
	9 €		T3
Jacques Bair , Mathématique et Sport	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12 €	9,50 €	T2
G. Robert , CD-Rom, logiciels mathématiques	5 €	/	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 4	5 €		voir ci-dessous
Tome 5	6 €		voir ci-dessous
Tome 4 et 5	10 €		voir ci-dessous

Frais d'expédition en non PRIOR

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,60 €	2,70 €	3,00 €
Tarif 2	2,30 €	4,70 €	5,80 €
Tarif 3	3,50 €	4,70 €	5,80 €
Tarif 4	4,00 €	11,50 €	16,50 €
Tarif 5	5,60 €	15,50 €	26,50 €
Tarif 6	6,20 €	15,50 €	26,50 €
Tarif 7	6,95 €	15,50 €	26,50 €

Pour les expéditions en PRIOR, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.

Exemples de tarification pour commandes groupées

Tomes 4 ou 5 des questions OMB

1 ex.	T1	7 à 10 ex.	T5
2 ou 3 ex.	T3	11 à 14 ex.	T6
4 à 6 ex.	T4	15 à 17 ex.	T7

Dossier 6 (Statistiques)

1 ex.	T1	10 à 13 ex.	T5
2 à 4 ex.	T2	14 à 18 ex.	T6
5 à 9 ex.	T4	19 ou 20 ex.	T7