Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique) Tél.-Fax : 32-(0)65-373729, courriel : sbpm@umh.ac.be, Web : http://www.sbpm.be

Membres d'honneur : H. Levarlet, W. Servais (†)

Conseil d'administration: J.-P. Cazzaro, M. Denis-Pecheur, B. Desaedeleer, P. Dupont, Cl. Festraets-Hamoir, M. Frémal, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, P. Marlier, Ch. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler, Ch. Van Hooste

Président : Ch. Van Hooste, Chemin de Marbisœul 25, 6120 Marbaix-la-Tour, Tél. 071-217793	Vice-Président, Olympiades Internationales: G. Troessaert, Recogne sur le Chêne 58, 6800 Libramont, Tél. 061-224201		
Administrateur délégué: Ch. Michaux, Rue Brigade Piron 290, 6061 Montignies-sur-Sambre, Tél. 065-354706	Commission Congrès, Publicité: M. Denis-Pecheur, Rue de la Ferme 11, 5377 Noiseux (Somme-Leuze), Tél. 086-323755		
Trésorier : P. Marlier, Rue de Plainevaux 185/15, 4100 Seraing, Tél. 04-3374945	Secrétaire : M. Frémal, Rue W. Jamar 311/51, 4430 Ans, Tél. 04-2636817		
Olympiades nationales et site WEB: Cl. Festraets-Hamoir, Rue J.B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles Tél. 02-6739044	Contact Presse: N. Miewis-Seronveaux, Avenue de Péville 150, 4030 - Grivegnée Tél. 04-3431992		
Math-Jeunes Junior: A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu, Tél. 065-785064	SBPM-Infor: R. Gossez, Albert Laan 13, 1560 Hoeilaart, Tél. 02-6579892		
Math-Jeunes Senior: G. Noël, Rue du 1er Chasseur à cheval 16/14, 7000 - Mons, Tél. 065-848621	, , ,		

Mathématique et Pédagogie :

J. Miewis, Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée, Tél. 04-3431992

Comité de rédaction : J. Miewis, J. Bair, Ch. Bertrand, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, Cl. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, Ch. Michaux, J. Navez, G. Noël, N. Vandenabeele, Ch. Van Hooste, Cl. Villers



Mathématique et

Pédagogie

Sommaire

Articles

• 6. De Saeaeleer, Le transit de venus du 8 juin 2004 : un événement astronomique exceptionnel!	9
• G. Noël, Structures, géométrie et informatique, de	<i>3</i> 5
 7 à 77 ans A. Antibi, J. Bair et V. Henry, Limites de courbes : théorie et applications en analyse 	65
• JP. Houben, Cabri-Géomètre et les sections	89
Rubriques	
● Y. Noël-Roch, Dans nos classes	95
• C. Festraets, Des problèmes et des jeux	97
• C. Festraets, Olympiades	101
• P. Marlier, Le coin du trésorier	109

NOTE

- * Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
- * Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique stricto sensu, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
- * Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- * Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (LEX2 $_{\mathcal E}$, Word); les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.

L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).

* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous. Pour les livres :

Dieudonné J., <u>Foundations of Modern Analysis</u>, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.

Pour les articles :

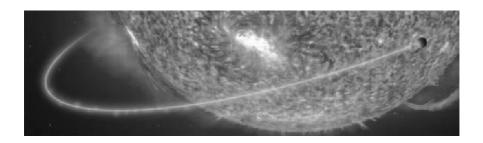
Gribaumont A., Les structures de programmation, Mathématique et Pédagogie, 1982, 36, 53-56.

- * Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- * MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée.

Publié avec l'appui de l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, Service général des Affaires Générales, de la Recherche en Education et du Pilotage interréseaux.

Le transit de Vénus du 8 juin 2004 : un événement astronomique exceptionnel! B. DE SAEDELEER, FUNDP



Soyez les premiers vivants à voir Vénus passer devant le Soleil!

Avertissement: !!! ATTENTION !!! DANGER POUR LES YEUX !!!

N'observez jamais le Soleil, que ce soit à l'œil nu ou avec un instrument : quelques secondes à peine suffisent à entraîner des lésions irréversibles (cécité) avant même qu'on ait ressenti une douleur quelconque. Il est très fortement conseillé d'opter pour une observation par projection sur une surface blanche, comme HORROCKS (voir Fig. 1) Différents dispositifs sont possibles et détaillés un peu partout.



Fig. 1: Horrocks observant par projection (chambre noire avec lunette) le passage de Vénus du 4 décembre 1639.

Pour le procédé par projection : ôtez les viseurs, faites passer le bout de votre téléscope par un trou percé dans un carton mince, et projetez l'image

Adresse de l'auteur: Bernard De Saedeleer, Cité des Pavillons, 8/4, 6150 Anderlues courriel : Bernard.Desaedeleer@fundp.ac.be

sur un autre carton muni d'une surface blanche (voir « Brève présentation » sur le site [1]). Pour le procédé « chambre obscure » (« camera obscura ») : voir [2]. Alternative: on peut aussi se procurer un solarscope [3] tout fait. Toutefois, si vous choisissez tout de même l'observation directe, adoptez alors des précautions encore plus drastiques que lors d'une éclipse de Soleil. Méfiez-vous des fausses protections qui sont inefficaces car elles laissent passer e.a. les infrarouges (verres fumés, films photos ou radios, lunettes de soleil, etc.). Par contre, peuvent exclusivement convenir : de bonnes lunettes d'éclipse neuves (avec la mention CE), du filtre Mylar, ou des verres de soudeur à l'arc de densité #14. Renseignez-vous encore plus complètement via [4, 5, 6]. Limitation de responsabilité: l'auteur du présent article a pris toutes les mesures raisonnables afin d'informer le lecteur du danger; par ailleurs, il ne garantit pas que les informations sont complètes ou exactes; sa responsabilité ne pourrait donc en aucun cas être engagée. A l'aide d'une paire de lunettes protectrices, Vénus sera aisément visible comme une tache noire sur le disque du Soleil. Attention à ne pas confondre avec les taches solaires du moment [7]. En cas de pénurie de lunettes, fabriquez une « chambre obscure » d'appoint : prendre un carton, percer un petit trou à l'aide d'un clou, diriger le carton entre une feuille de papier ou un mur (clair) et le Soleil.

1. Mobilisation mondiale

- + intérêt pédagogique
- = participez!

Le monde entier s'apprête à vivre un moment astronomique de très grande envergure le 8 juin 2004 : Vénus passera devant le Soleil. Aucune personne actuellement en vie sur Terre n'a pu observer un tel transit : le dernier remonte à 1882. D'autre part, après les transits de 2004 et 2012, il faudra patienter jusqu'en 2117! Avec un peu de chance (la météo de début juin devrait être favorable), nous devrions être en mesure de faire des observations historiques en 2004. On s'organise de toutes parts afin de coordonner les observations : une campagne internationale de mesures a été mise sur pied. Plusieurs sites internet donnent beaucoup d'informations diverses sur le passage de Vénus (ESO [4], IMCCE [1], NASA [8], [9]). Allez explorer de préférence le site officiel du transit de Vénus [4]. Vous pouvez vous y inscrire comme équipe participante; toutes les obser-

vations y seront centralisées. Le site du planétarium de Bruxelles [10] regorge également d'informations très pertinentes et clairement présentées. Un congrès spécifique à cet événement astronomique se déroule à Preston (GB) la semaine du transit [11], sur les lieux mêmes d'où Horrocks effectua la première observation d'un transit de Vénus (celui du 4 décembre 1639).

Le passage de Vénus 2004 est une chance pour les professeurs de physique, de mathématique et d'histoire désireux de réaliser un travail susceptible d'éveiller l'intérêt des élèves. Les activités pédagogiques associées sont riches : à la fois interdisciplinaires et transfrontalières. Des tas d'explications et de documents utiles sont disponibles (voir par exemple [1, 12, 13, 14]). Dans cet article nous expliquons ce qu'est au juste un transit de Vénus, pourquoi c'est vraiment exceptionnel et pourquoi c'est si rare et si régulier. Nous décrivons brièvement l'ampleur de ce phénomène ainsi que sa portée historique et scientifique. Nous donnons des informations assez complètes sur le transit de Vénus du 8 juin 2004. Nous faisons également tous les rappels utiles de Mécanique Céleste et donnons explicitement les outils afin que vous puissiez calculer assez précisément la position des planètes Vénus, Terre, Mars.

Cela vous permet entre autres de recalculer vous-même la date de l'opposition de Mars en 2003 et du transit de Vénus 2004. Pour ce dernier, nous décrivons la méthode de HALLEY qui permet de calculer une valeur de l'UA (l'Unité Astronomique) et les phénomènes qui limitent sa précision.

Des institutions (l'ESO, l'IMCCE, l'EAAE, etc.) vous invitent conjointement à participer personnellement à la campagne internationale de mesures : mesurez précisément les instants des 4 contacts (voir Fig. 2) et transmettez-les en même temps que vos coordonnées géographiques (latitude et longitude — que vous pouvez trouver sur [15]) via la page de l'ESO [4].

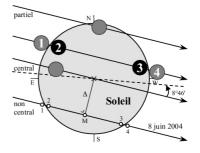


Fig. 2 : Les 3 types de passages. Numérotation des contacts et définitions : le contact extérieur (1) et intérieur (2) à l'entrée; le point M où la distance est minimale par rapport au centre du Soleil (et vaut Δ); le contact intérieur (3) et extérieur (4) à la sortie. Trajectoire vue à partir du centre de la Terre; la ligne en traits interrompus représente l'écliptique 2004 et N le Nord de la sphère céleste (système équatorial).

L'IMCCE centralisera ensuite ces données et calculera la distance moyenne Terre-Soleil (l'UA). Vous aurez un retour sur la qualité de vos propres mesures et des informations internationales (des mesures effectuées autre part sur Terre) pour vous permettre de recalculer vous-même l'UA. De plus, un concours vidéo est ouvert à tous les participants (astronomes amateurs ou pas). La totalité du transit de Vénus 2004 sera diffusée sur les sites [1, 4] entre autres; il est toutefois largement préférable d'y assister en direct!

2. C'est quoi au juste un transit?

Rappelons avant tout que notre système solaire comprend 9 planètes qui tournent toutes quasiment dans le même plan (appelé plan de l'écliptique) et dans le même sens autour du Soleil. Si on dessine les orbites, il s'agit donc grossièrement de cercles (plus exactement d'ellipses) concentriques. Les 4 planètes les plus proches du Soleil sont, dans l'ordre de distance croissante: Mercure, Vénus, Terre et Mars. Mercure et Vénus sont des planètes dites inférieures car elles se trouvent plus près du Soleil que la Terre.



Fig. 3 : Transit de Mercure du 7 mai 2003 [16].

Elles peuvent donc à un moment donné se trouver juste entre le Soleil et la Terre : c'est ce que l'on appelle un transit. En regardant le Soleil (attention danger! : voir l'Avertissement) ou mieux en le projetant, on voit alors un point noir (d'une certaine taille) qui s'y ballade : c'est la planète en transit! Il peut y avoir différents types de passages suivant la façon dont Vénus passe devant le Soleil (la vision dépendant d'ailleurs aussi de l'endroit où l'on se trouve sur Terre) : central (par le centre du Soleil), non-central et partiel (voir Fig. 2). La Fig. 3 montre le transit non-central de Mercure du 7 mai 2003 dernier.

On définit le transit (ou passage) comme le passage d'un corps céleste devant un autre de plus grand diamètre apparent. Le diamètre apparent d'un corps céleste est l'angle sous lequel on le voit à partir de la Terre (soit à une distance de 1 UA = $1.495\,978\,70\times10^{11}$ m). Il prend donc en compte un effet de perspective (voir Fig. 4). Pour fixer les idées, calculons quelques diamètres apparents (pour les planètes, on considère les diamètres

apparents maximaux, c'est-à-dire pour une conjonction inférieure — voir plus loin) :

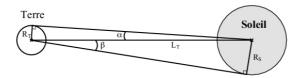


Fig. 4 : Diamètre apparent du Soleil (2 β) et Parallaxe solaire α .

$$DA_{Soleil} = 2\beta = 2 \arcsin(6.96 \times 10^8 \text{ m/1 UA}) \approx 32'$$

 $DA_{V\acute{e}nus} = 2 \arcsin(6.051.9 \times 10^3 \text{ m/((1 - 0.723) \times 1 UA))} \approx 60'' = 1'$
 $DA_{Mercure} = 2 \arcsin(2.439.7 \times 10^3 \text{ m/((1 - 0.387) \times 1 UA))} \approx 11''$

Notons que Mercure nous apparaît environ 5 fois plus petit que Vénus. Malgré cela, un transit de Mercure est déjà observable (voir Fig. 3) — à l'aide d'un instrument grossissant tout de même. Pour le transit de Vénus, pas besoin d'instrument par contre (juste des lunettes protectrices). Retenez l'ordre de grandeur : le long d'un diamètre solaire apparent, on peut aligner visuellement environ 175 Mercure ou 32 Vénus (alors que le rapport des diamètres réels est de 285 et de 115 respectivement). A la Fig. 2, on a représenté à l'échelle le transit de Vénus du 8 juin 2004. Remarquons aussi que le $DA_{Lune} \approx 31'$, ce qui fait que la Lune peut occulter presque totalement (et même quelquefois totalement) le Soleil (c'est ce que l'on appelle alors une éclipse de Soleil).

Nous aurons également grand besoin d'une autre définition monumentale : celle de la parallaxe solaire α : c'est l'angle sous lequel on verrait le rayon de la Terre $R_{\rm T}$ (6.378 \times 10^6 m) depuis le centre du Soleil. En étendant la définition de la parallaxe aux planètes, on a alors :

$$\begin{split} &\alpha_{\rm Soleil} = \alpha = \arcsin(R_{\rm T}/1~{\rm UA}) \approx 8\rlap.{''}794.\\ &\alpha_{\rm V\acute{e}nus} = \arcsin(R_{\rm T}/((1-0.723)\times 1~{\rm UA})) \approx 32\rlap.{''}.\\ &\alpha_{\rm Mercure} = \arcsin(R_{\rm T}/((1-0.387)\times 1~{\rm UA})) \approx 14\rlap.{''}. \end{split}$$

Un transit s'apparente donc un peu à une éclipse; la nuance tient surtout au fait que lors d'une eclipse, la planète cache quasiment totalement l'autre corps céleste (Lune ou Soleil), tandis que lors d'un transit elle le cache à peine (éclipse \equiv assombrissement d'un corps céleste causé par son passage dans l'ombre d'un autre corps céleste).

Tout le monde se souvient de l'éclipse totale de Soleil du 11 août 1999 : la Lune passait devant le Soleil, le cachant totalement. Le spectacle était splendide (surtout pour ceux qui n'ont pas eu de nuages). La baisse de luminosité lors d'un transit est par contre imperceptible.

Une dernière remarque : si vous comptez observer et que vous maintenez votre matériel fixé à la Terre (repère horizontal) durant le transit, vous observerez alors une trajectoire courbée (voir Fig. 5) au lieu d'une ligne droite dans le cas d'un repère équatorial (monture équatoriale).

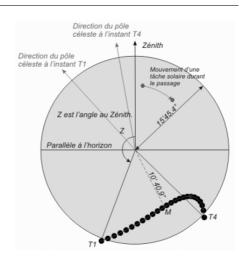


Fig. 5 : Aspect courbé du trajet de Vénus en 2004 (repère horizontal).

3. Pourquoi est-ce vraiment exceptionnel?

Un transit est avant tout exceptionnel parce qu'il permet d'estimer l'UA (principe : voir Chap. 8) par un calcul qui peut être relativement simple; c'est d'ailleurs pour cette raison que les transits de Vénus ont eu un impact historique considérable. La valeur de l'UA est actuellement fixée à $1~\mathrm{UA}=1.495\,978\,70\times10^8$ km. Il n'est pas aisé techniquement d'estimer une distance aussi grande; il a été tout aussi difficile par le passé d'imaginer qu'elle puisse être aussi grande : toutes les estimations antérieures sous-estimaient largement sa valeur réelle.

On peut ensuite s'interroger: à cette fin astronomique, vaut-il mieux observer un transit de Mercure ou de Vénus? La réponse est, et de loin: un transit de Vénus. La raison principale sera donnée au Chapitre 8. On peut néanmoins déjà dire que Vénus est plus facilement observable (disque apparent plus grand) que Mercure, d'où une meilleure précision absolue sur les instants de contact. La durée d'un transit de Vénus est également plus longue, d'où une meilleure précision relative sur les mesures. Par le passé, le mouvement orbital de Mercure devait également être moins bien connu (très excentrique entre autres). Bref un transit de Vénus permet une détermination bien plus précise de l'UA qu'un transit de Mercure. Il y a eu

un transit de Mercure le 7 mai 2003; celui-ci a surtout servi de « répétition générale » pour l'observation du transit de Vénus du 8 juin 2004.

Pour pouvoir observer un transit de Vénus, il faut au minimum que 4 conditions soient réunies : qu'il ait lieu, que l'on puisse le prédire avec assez de précision, que l'on dispose d'un bon matériel et que le ciel soit dégagé.

Date	Næud	Intervalle [ans]
7 déc. 1631	Α	$\Delta t = 105.5$
\$ 4 déc. 1639	Α	$\Delta t = 8$
∢ 6 juin 1761	D	$\Delta t = 121.5$ $\Delta t = 8$
→ 3-4 juin 1769	D	$\Delta t = 0$ $\Delta t = 105.5$
→ 9 déc. 1874	Α	$\Delta t = 8$
\$ 6 déc. 1882	Α	$\Delta t = 121.5$
* * * 8 juin 2004	D	$\Delta t = 8$
6-7 juin 2012	D	$\Delta t = 105.5$
11 déc. 2117	A	$\Delta t = 8$
6 déc. 2125 11 juin 2247	A D	$\Delta t = 121.5$
9 juin 2255	D	$\Delta t = 8$

Fig. 6 : Les dates de 12 transits consécutifs de Vénus. Le symbole \diamondsuit signifie qu'il a été observé par l'Homme. $A \equiv A$ scendant, $D \equiv D$ escendant.

Que le transit ait lieu n'est pas évident car le phénomène est extrêmement rare. Il n'y en a qu'environ 1,4 par siècle (contre 13,3 par siècle pour ceux de Mercure). L'Homme n'a d'ailleurs observé que 5 transits de Vénus jusqu'à ce jour en tout et pour tout (voir Fig. 6). Aucune personne actuellement en vie sur Terre n'a pu observer un transit de Vénus.

De surcroît, même s'il a lieu, il s'agit de se trouver au bon endroit sur Terre : un transit n'est pas visible en totalité de partout sur la Terre car il existe toujours bien une « face cachée de la Terre » qui ne voit pas le Soleil (voir Fig. 7 page 10) : le dernier transit de Vénus visible en totalité en France date de 1283 et le suivant sera en 2247.

Celle de 2004 sera visible en totalité de chez nous (pas celui de 2012) : une aubaine à saisir absolument! D'autant plus qu'aucun des 5 transits historiques observés n'a eu lieu chez nous en totalité : il a fallu voyager!

Que les prédictions soient assez précises ne pose plus de problèmes actuellement : il a toutefois fallu attendre Kepler pour disposer enfin d'éphémérides suffisamment précises (les fameuses Tables rudolphines de 1627). Kepler (1571–1630) prédit les transits de Vénus et de Mercure de

1631; il mourut malheureusement juste avant. Disposer d'un bon matériel d'observation ne pose également plus vraiment de problèmes non plus; mais dans le passé, il a fallu attendre l'avènement des lunettes astronomiques, qui ne furent popularisées que vers 1610 (Gallée) seulement. Pour assurer la qualité des mesures, il fallait également pouvoir déterminer ses coordonnées géographiques avec assez de précision (la longitude posant le plus de difficultés) — et disposer d'une bonne horloge, ce qui n'a pas toujours été simple. Quant à la météo, nous en sommes toujours tributaires ... tant que l'on observe dans (sous) l'atmosphère!

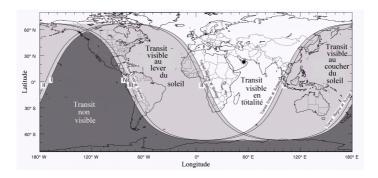


Fig. 7 : Carte de visibilité du transit de Vénus 2004 [17]

Le transit de Vénus 2004 sera également particulier par le fait que son observation ne sera plus réservée à une élite mais sera à la portée du grand public. Il faut également considérer le saut technologique de 1882 à 2004 : on va pouvoir filmer le transit cette fois! En conclusion, on peut bien dire que c'est un événement vraiment exceptionnel!

Un peu d'Histoire sur les 5 transits de Vénus vus par l'Humanité

Le transit du 7 décembre 1631 ne fut pas observé suite aux imprécisions des Tables rudolphines : celles-ci prévoyaient en effet que le passage ne serait pas observable en Europe car il aurait lieu dans la nuit du 6 au 7 décembre 1631, alors qu'en réalité la fin du passage fut visible depuis l'Europe centrale. Par contre, le premier transit à avoir été observé par

l'Humanité (Pierre Gassendi à Paris en l'occurrence) est celui de Mercure du 7 nov 1631.

Le transit du 4 décembre 1639 n'aurait été observé que par 2 personnes: William Crabtree et Jeremiah Horrocks (tous deux en GB). Le succès d'Horrocks provient du fait qu'il dénicha l'intervalle de 8 ans, pouvant ainsi prédire précisément que le prochain passage aurait lieu le 4 décembre 1639, soit beaucoup plus tôt que les 120 ans d'intervalle prédits par Kepler. Horrocks se trouvait à Hoole (à 5 miles de Preston), et prévint son correspondant attitré Crabtree qui lui se trouvait à Manchester et l'exhorta fortement à observer. Crabtree n'eut toutefois pas de chance (ciel couvert) tandis qu'Horrocks put l'observer (il prit « 3 mesures à la hâte avant le coucher du Soleil »: à 15h15, 15h35 et 15h45 — voir Fig. 1). Horrocks fit plusieurs calculs, dont celui de la position du nœud de Vénus (voir Chap. 6).

En observant le transit de Mercure en 1677 sur l'île de Sainte-Hélène, Halley (1656—1742) se rendit compte qu'en mesurant précisément les instants de contact visuel entre Vénus et le Soleil (voir Fig. 2) il devait être possible d'en déduire la parallaxe solaire α et donc l'UA (voir Chapitre 8). Sachant qu'il ne verrait pas le prochain passage qui n'était qu'en 1761, il lanca en 1716 un appel aux générations futures, appel resté très célèbre [18]. L'appel a été largement suivi puisqu'on a organisé de grandes expéditions pour observer les passages de 1761 et 1769.

Le transit du 6 juin 1761 est mémorable : il s'agit de la première campagne internationale d'observations coordonnées sous l'impulsion de Halley : Océan Indien (Le Gentil & Pingré), Sibérie (Abbé Chappe d'Auteroche), Vienne (Cassini), Arkangelsk (Lomonosov), etc. On recense 120 observations sur 62 stations; la parallaxe solaire α est estimée comprise entre 8″.5 et 10″.6, (et donc l'UA comprise entre 125 et 155 millions de km), ce qui n'apporta malheureusement pas vraiment d'amélioration par rapport aux mesures antérieures sur Mars. L'apparence d'une auréole diffuse autour de la planète (visible entre les contacts intérieure et extérieurs) fait suspecter pour la première fois l'existence d'une atmosphère autour de Vénus.

Huit ans après a lieu le transit du 3 juin 1769 : nouvelle campagne internationale, de plus grande ampleur encore : Océan indien (Le Gentil), Caraïbes (Pingré), Mexique (Abbé Chappe d'Auteroche), Océans indien & pacifique (Capitaine Cook à Tahiti [19]), etc. Les épopées sont fascinantes et parfois tragiques; les mésaventures de Le Gentil sont célèbres [20]! Une bande dessinée (en 2 tomes [21]) raconte agréablement l'expédition dirigée

par Bougainville, emmenant l'astronome Véron à l'Île de France. On recense 151 observations sur 77 stations; la parallaxe solaire α est alors estimée comprise entre 8'.5 et 8'.9, (et donc l'UA entre 145—155 millions de km); des résultats satisfaisants (meilleurs qu'en 1761), mais loin des espérances de Halley (voir Chapitres 8 et 9).

Le transit du 9 décembre 1874 sera suivi de celui du 6 décembre 1882 qui sera immortalisé : ce sont les premières observations photographiques. En 1874 on a utilisé des plaques trempées à l'iodure de brome, tandis qu'en 1882 on disposait de plaques sèches avec une émulsion de collodion. La Fig. 8 est l'une des 11 plaques seulement qui survécurent aux expéditions américaines de 1882; tandis que toutes les plaques de 1874 furent perdues. Sur la figure, Vénus va de gauche (Est) à droite (Ouest). Les estimations de α ne sont à nouveau pas exceptionnelles.

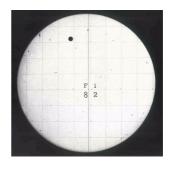


Fig. 8 : Photo (rare) du transit de Vénus de 1882 (Crédit : U.S. Naval Observatory [22]).

5. Les 2 prochains transits de Vénus : 2004 et 2012

Une nouvelle campagne internationale coordonnée est mise sur pied [4]; ce seront aussi les premières observations vidéo. Le transit du 8 juin 2004 se déroulera de 5h13m29s à 11h25m59s environ (phases géocentriques en $TU \equiv Temps\ Universel$). On définit les phases du phénomène comme les instants des entrées et des sorties d'un point donné de la Terre dans les cônes d'ombre et de pénombre de la planète. Les phases générales concernent un point de l'ellipsoïde terrestre tandis que les phases géocentriques concernent le centre de la Terre. On définit par ailleurs les circonstances locales qui résument la situation globale pour un lieu donné à la surface de la Terre. Attention aussi au système d'heure local : pour avoir l'heure locale en Belgique, il faut ajouter 1h au TU (voir [23]) en hiver, et 2h en été (le changement d'heure a lieu dans la nuit de samedi à dimanche le dernier week-end de mars et d'octobre). Par exemple, pour Uccle $50^{\circ}47.9N - 4^{\circ}21.5E$), le transit aura lieu de 2h19m56s à 2h23m21s heure locale. Ce transit (non central) aura donc une durée d'environ 2h21.

un transit pouvant durer jusqu'à 8h (transit central). Vous pouvez consulter via une page de la NASA [24] une liste des moments des contacts du transit 2004 pour des centaines de villes dans le monde. Pour Preston (GB) les instants des contacts sont les suivants : I=6:19:46, II=6:39:41, II=9:20:35, II=12:03:55, IV=12:23:28 (heure locale d'été I=12:19:19).

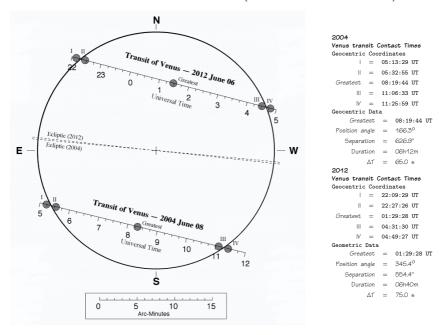


Fig. 9: Carte des transits de Vénus 2004 et 2012 [8].

Voyons à présent comment on peut calculer la date d'un transit; un calcul que vous pourrez refaire intégralement par vous-même. Comme nous l'avons vu, un transit correspond à un alignement (dans l'ordre) des corps Terre, Vénus et Soleil. On définit la conjonction comme le phénomène par lequel 2 corps ont soit la même longitude céleste (système écliptique), soit la même ascension droite (système équatorial) à partir d'un 3° corps. Quand Vénus et le Soleil ont la même longitude vue du centre de la Terre, il s'agit d'une conjonction géocentrique. Elle est de surcroît dite inférieure si Vénus se trouve entre le Soleil et la Terre (supérieure sinon). Une conjonction ne signifie pas qu'il y a transit : les 2 corps n'ont pas spécialement la même latitude (celle-ci dépend de l'inclinaison de l'orbite - voir Fig. 15). Il s'agit

donc d'abord de pouvoir déterminer la position des planètes avec assez de précision; c'est l'objet du chapitre suivant, qui introduit aussi les notions de base de la Mécanique Céleste qui nous seront utiles.

La position des planètes : calculs et définitions

On sait depuis Kepler que chaque planète du Système Solaire décrit — grossièrement — une orbite elliptique dans un plan (solution dans le cas d'un champ de forces central) dont le Soleil occupe l'un des foyers (1^{re} loi de Kepler). Considérons la Fig. 10 où le Soleil est donc placé au foyer de l'ellipse en question. On met en place un repère inertiel (0,x,y,z), où le Soleil est à l'origine, et où le plan (x,y) est celui qui contient l'orbite de la Terre autour du Soleil (on l'appelle plan de l'écliptique). La direction x est également fixée : c'est celle du point vernal Υ (l'équinoxe de printemps). L'axe z, perpendiculaire à l'écliptique, complète le trièdre.

Une planète (p.ex. Vénus) décrit une ellipse dans un plan : le plan orbital de la planète. Ce plan est incliné d'un angle i (l'inclinaison) par rapport à l'écliptique. Par ailleurs, son intersection avec l'écliptique définit la ligne des nœuds (le nœud ascendant A est le point où la planète passe de dessous l'écliptique à au-dessus, et le nœud descendant D vice-versa).

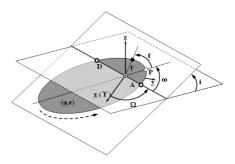


Fig. 10 : Les 6 éléments elliptiques (a, e, i, Ω, ω, τ).

Lors d'un transit, on peut donc les distinguer facilement (voir Fig. 18). On repère la ligne des nœuds par l'angle Ω , la longitude du nœud ascendant.

Quant à la forme de l'ellipse, celle-ci est déterminée par sa grandeur (son demi-grand-axe a), son degré de déformation par rapport à un cercle (l'excentricité e); on a également que son demi petit axe $b=a\sqrt{1-e^2}$. La direction du demi grand axe est donnée dans le plan de l'orbite par l'angle ω (l'argument du périhélie), qui situe le périhélie P (point de l'ellipse le plus proche du Soleil). On utilise encore plus couramment l'angle brisé $\varpi=\omega+\Omega$, que l'on appelle la longitude du périhélie.

Une fois l'orbite elliptique complètement décrite, il faut encore situer la planète sur l'ellipse, ce qui peut se faire via l'angle f, l'anomalie vraie. Celui-ci varie périodiquement avec le temps, suivant une loi bien connue. Reste donc à définir une origine des temps, ce qui se fait en donnant le moment où la planète passe en A, appellé τ (instant de passage au nœud ascendant). On peut aussi donner de façon équivalente la valeur de l'angle f (ou d'un des angles L, M, E définis plus loin) en un temps donné.

Ce qui fait que les 6 éléments elliptiques a,e,i,Ω,ω,τ déterminent complètement le mouvement képlérien des planètes. Nous donnons à la Fig. 11 des valeurs numériques [25] de ces éléments pour les planètes Vénus, Terre et Mars à la date (¹) du 1er janvier 2000 à midi (JD 2451545.0 \equiv JD₀). Au lieu de τ on donne la longitude L_0 (longitude moyenne) à la date JD₀, avec $L_0 = M_0 + \varpi$ (la définition de M_0 est donnée plus loin). Les angles sont donnés en degrés mais il est préférable de faire tous les calculs en radians.

	Vénus	Terre	Mars
a [UA]	0.723 329 820	1.000 001 018	1.523 679 342
e [1]	0.006 771 882	0.016 708 617	0.093 400 620
i [°]	3°23′40′.′078′28	0	1°50′59′′015 32
Ω [°]	76°40′47′′712 <i>6</i> 8	0	49°33′29′′135 54
₩ [°]	131°33′49′′34607	102°56′14″453 10	336°03′36′′84233
Lo [°]	181°58′47′′283 04	100°27′59′′21464	355°25′59′′.788 <i>6</i> 6

Fig. 11: Éléments elliptiques moyens au 1er janvier 2000 à midi.

On peut alors assez aisément calculer la position de chaque planète à une date donnée en projetant le vecteur \vec{r} suivant les axes (x, y, z):

$$\begin{cases} x = r [\cos(f+\omega)\cos(\Omega) - \sin(f+\omega)\cos(i)\sin(\Omega)] \\ y = r [\cos(f+\omega)\sin(\Omega) + \sin(f+\omega)\cos(i)\cos(\Omega)] \\ z = r\sin(f+\omega)\sin(i) \end{cases}$$

⁽¹⁾ Le temps est mesuré en jours juliens : le 1^{er} janvier 2000 à midi correspond au jour julien numéro JD 2451545.0. Si on ajoute 1 on est au jour suivant. On peut facilement trouver des algorithmes de conversion de la date vers le nombre d'années juliennes et vice-versa [25].

Ces relations utilisent l'anomalie vraie f qui repère l'angle de \vec{r} par rapport au périhélie, ainsi que le rayon r, tous deux étant calculables par ailleurs (voir ci-dessous).

Bien sûr, dans la réalité, ces orbites képlériennes sont perturbées par différents effets (ne fût-ce que par les autres planètes), mais pour simplifier nous ne les considérerons pas ici.

Les éléments de la Fig. 11 sont d'ailleurs les éléments moyens (de l'orbite de référence non perturbée) à la date JD_0 . Par opposition, les éléments osculateurs sont ceux de l'orbite osculatrice (qui change continuellement avec le temps, à cause des perturbations précisément).

Pour chaque planète, on calcule également le moyen mouvement angulaire n (en radians par seconde), via la 3^e loi de Kepler : $n=\sqrt{\mu_5/a^3}$, avec la constante de gravitation solaire qui vaut $\mu_5=(6.673\times 10^{-20})\times (1.989\times 10^{30})$ km $^3/s^2$ et a exprimé en km. Par exemple, le n_{Terre} vaut 0.0172 rad/j, ce qui signifie que la Terre parcourt 2π en 1 an. Le moyen mouvement angulaire n sert à calculer l'anomalie moyenne M=n $(JD-JD_0)+M_0$ (attention de bien exprimer n en rad/j). C'est une simple une relation temporelle linéaire!

Pour faire le lien entre les anomalies (voir Fig. 12) moyenne M et vraie f, il s'agit tout d'abord de résoudre (numériquement) l'équation de KEPLER $M=E-e\sin(E)$ pour trouver l'anomalie excentrique E. On peut alors en déduire f et r via les relations :

$$\begin{cases} r = a(1 - e\cos E) \\ \cos(f) = (a/r)(\cos(E) - e) \\ \sin(f) = (b/r)\sin E \end{cases}$$

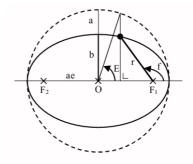
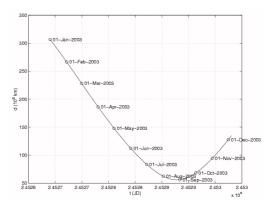


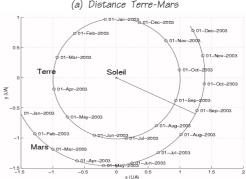
Fig. 12: Relation entre les anomalies E et f.

Vous avez à présent toutes les informations nécessaires afin de calculer par vous-même des éphémérides de ces 3 planètes. Par exemple, vous pouvez calculer l'évolution de la distance Terre-Mars (voir Fig. 13(a) page 17). On voit bien qu'elle est minimale en fin août 2003 (c'est le moment où la distance entre les 2 ellipses est minimale comme on le voit à la Fig. 13(b) page 17, qui est une vue de dessus de l'écliptique).

Il s'agit d'une opposition très remarquable [26] car Mars n'avait jamais été si proche de nous depuis 59619 ans (elle sera par contre de plus en plus proche à l'avenir, mais la prochaine fois cela ne sera que dans 284 ans). Cette très grande opposition a permis les missions et les observations qui sont d'actualité pour Mars.

Une autre application consiste à calculer les dates du transit de Vénus (à partir de 2004 mettons). Il suffit de calculer la distance Δ du centre du Soleil à la droite Terre-Vénus (voir Fig. 2): si celle-ci est inférieure au rayon solaire (6.96 x 10^8 m, soit 0.0047 UA) alors Vénus peut être en transit devant le Soleil. On montre facilement que le carré de la distance △ vaut:



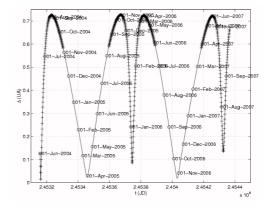


(b) Position de la Terre et de Mars
Fig. 13 : Calcul de la date de l'opposition de Mars en
2003.

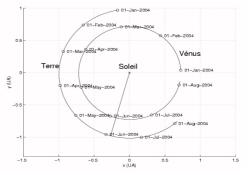
$$\Delta^{2} = \frac{(x_{2}y_{3} - y_{2}x_{3})^{2} + (x_{2}z_{3} - z_{2}x_{3})^{2} + (y_{2}z_{3} - z_{2}y_{3})^{2}}{(x_{3} - x_{2})^{2} + (y_{3} - y_{2})^{2} + (z_{3} - z_{2})^{2}}$$

où \vec{x}_2 (x_2,y_2,z_2) et \vec{x}_3 (x_3,y_3,z_3) sont les coordonnées de Vénus et de la Terre respectivement. Pour déterminer s'il s'agit d'une conjonction inférieure ou supérieure, il suffit d'étudier le signe du produit scalaire $P=\vec{x}_2\cdot\vec{x}_3$: il est positif quand Vénus se trouve devant le Soleil par rapport à nous (transit), et négatif derrière.

L'évolution de Δ est donnée à la Figure 14(a). On constate effectivement qu'un transit est possible début juin 2004, car le minimum est très (les + correspondent à P > 0). On y voit aussi les conjonctions supérieures, avec des pentes moins raides, ce qui est logique. Ensuite, on ne voit plus aucun transit, les minima devenant trop élevés. Si prolongeait le graphique, on verrait que le prochain transit possible serait celui de juin 2012. La Figure 14(b) montre la position des 2 planètes par rapport Soleil: au notamment la conjonction lors du transit.



(a) Distance Δ du centre du Soleil à la droite Terre-Vénus



(b) Positions de la Terre et de Vénus

Fig. 14 : Calcul de la date du transit de Vénus à partir de 2004.

7. Pourquoi un transit de Vénus est-il si rare et si régulier?

Nous venons de constater l'occurrence d'un transit dans un graphe numérique. Soit. Mais nous ne sommes pas à l'abri d'erreurs numériques : il est donc également utile de se poser la question plus théoriquement : quelles sont les conditions pour qu'un transit puisse avoir lieu? Autrement dit : quand cela a-t-il lieu? A quelle fréquence? Un examen attentif de la Fig. 6 fait apparaître un cycle de périodes de 105.5 - 8 - 121.5 - 8 années, soit un cycle général de 243 ans. Les transits ont visiblement lieu

par paires (2 en 8 ans) séparées par plus d'un siècle : on les appelle transits doubles, ou paire de transits. Nous donnons ici une explication de cette régularité. Pour simplifier le raisonnement, nous supposerons que l'orbite de Vénus est circulaire (on néglige ainsi l'excentricité $e_{V\acute{e}nus}\approx 0.007$). C'est une hypothèse réaliste dans ce cadre-ci.

Puisqu'il est question de périodicité, il s'agit avant tout de définir plusieurs périodes fondamentales. On définit la période sidérale d'une planète comme l'intervalle de temps moyen entre 2 positions identiques d'un corps par rapport aux étoiles. La période sidérale de la Terre est $T=365.256\,36$ j = 1 an. On définit la période synodique d'une planète comme l'intervalle de temps moyen entre 2 conjonctions successives de 2 corps, vue à partir du Soleil. Il est relativement aisé de mesurer la période synodique de Vénus (temps entre 2 configurations Soleil-Terre-Vénus semblables en longitude) : S=583.92 j. On peut alors en déduire la période sidérale de Vénus : V=224.701 j, vu la relation 1/V=1/T+1/S (qu'il est aisé de démontrer par ailleurs).

Si l'on considérait qu'une simple conjonction (longitude identique) constituait le critère de transit, il y aurait un transit tous les 1.6 ans. Or ce n'est pas le cas : c'est donc qu'il faut également considérer la latitude, c'est-à-dire le fait que l'orbite de Vénus est inclinée d'environ 3°24′ par rapport à celle de la Terre (voir Fig. 15).

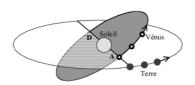


Fig. 15 : L'orbite de Vénus est inclinée de 3°24'.

Pour qu'un alignement avec la Terre soit possible, il faut donc que Vénus passe justement dans le plan de l'écliptique; c'est à dire que Vénus se trouve en son nœud ascendant A ou descendant D. Par ailleurs, il s'agit aussi que la Terre soit « juste en face » au moment où Vénus est à un de ses nœuds : cela ne peut se produire que début juin (D) ou début décembre (A) nécessairement. Mais à chaque fois que la Terre est là où il faut, Vénus ne l'est peut-être pas : cela ne se produit donc pas chaque année non plus. Il faut également considérer le fait que le disque solaire est étendu : on peut avoir un passage exactement par le centre du Soleil (transit central), ou bien désaxé (transit non central) — voir Fig. 2. En résumé, la condition pour avoir un transit est qu'il y ait une conjonction géocentrique inférieure lors du passage au nœud de l'orbite, avec une certaine tolérance.

Imaginons que l'on parte d'une configuration de transit au nœud ascendant A: après combien de temps aura-t-on un autre transit?

Pour avoir le prochain transit au même nœud A, chaque planète doit avoir parcouru un nombre entier d'orbites, afin de se retrouver dans la même configuration (alignement au nœud A); il s'agit donc de calculer le plus petit commun multiple (ppcm) de V et de T: ppcm = pV = qT avec $(V,T\in\mathbb{R}$ et $p,q\in\mathbb{N})$. Les périodes n'étant pas entières, il s'agit de tolérer une erreur sur le ppcm, comme classiquement dans les phénomènes non commensurables.

au	nœu	d A	au nœud D		D
9	р	€ [j]	9	р	€ [j]
0	0	0	405.5	171.5	4.68
8	13	-0.94	113.5	184.5	0.74
46	26	-4.88	121.5	197.5	-0.20
227	369	4.48	429.5	210.5	-1.14
235	382	0.54	348.5	566.5	4.28
243	395	-0.40	356.5	579.5	0.34
254	408	-1.34	364.5	592.5	-0.60
470	764	4.07	372.5	605.5	-1.54
478	777	0.14	478	777	0.14

Considérons donc plutôt les solutions de pV - qT = ϵ , avec $|\epsilon| < \epsilon_{max}$; elles sont facilement calculables et sont reprises à la Fig. 16, où l'on a choisi $\epsilon_{max} = 2$ j. On y lit entre autres les solutions principales : 13V =8 ans - 0.94 j et 395V =243 ans -0.4 j. Bien entendu, on aurait plus de solutions si on tolérait une erreur temporelle plus grande, mais alors la Terre ne serait plus suffisamment alignée : il s'agit donc de rejeter certaines solutions, celles pour lesquelles $\epsilon > \epsilon'_{max}$.

Fig. 16: Quasi-alignements (ppcm).

La question de l'erreur e'_{max} à tolérer dans le ppcm n'est pas triviale : combien peut-on tolérer? Il y a un peu de marge de manœuvre : le diamètre du disque solaire étant relativement important (32'), on peut tolérer certains écarts à la périodicité parfaite. Par contre on peut considérer Vénus comme une tache ponctuelle ($DA_{V\acute{e}nus}\approx 1$ '). On peut calculer qu'une erreur de 0.7 j correspond à un écart d'un rayon solaire entre 2 lignes de transit (voir Fig. 2). Autrement dit, les transits doivent avoir lieu à moins de ± 0.7 j du passage du nœud. Si deux transits successifs se passent l'un à un bord du Soleil et l'autre au bord d'en face, cela ferait 1.4 j de tolérance, mais

cela constitue vraiment un maximum. En pratique, il faut tenir compte aussi des perturbations, et les solutions à rejeter in fine sont celles barrées à la Figure 16. En conclusion, l'intervalle de temps entre 2 transits au nœud A (noté $A \to A$) est de 8 ans ou 243 ans (la solution O est triviale tandis que les autres sont des combinaisons de 8 ans et 243 ans, comme par exemple q=235=243-8 et $q=478=2\times243-8$). On peut faire le même raisonnement pour les espacements $D \to D$. Ce sont donc ces 2 périodes fondamentales (8 ans et 243 ans) qui permettent de retracer les séries de dates des passages en un même nœud $(A \to A \text{ ou } D \to D)$ de la Fig. 6.

Après 243 ans, les lignes de transits sont quasiment reproduites à l'identique; elles sont légèrement décalées vers le Sud : d'environ -61'' en D et de -105'' en A. La Fig. 17 représente une série complète de transits de Vénus au nœud A. Sur un diamètre solaire d'environ 1950'', il y a moyen d'espacer 18 fois 105'', ce qui donne un cycle de 19 transits (\approx 4600 ans); au nœud D le cycle est de 31 transits (\approx 7500 ans).

Le léger décalage des lignes de transits (et des dates) au fil des temps est dû aux perturbations séculaires (qui sont variables); nous en donnons ici quelques valeurs actuelles moyennes.

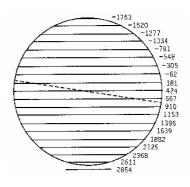


Fig. 17: Une série complète de transits de Vénus au nœud A (période de 243 ans). Le transit de 2854 ne sera visible qu'en Antarctique. L'écliptique est en traits interrompus [27].

Il va de soi que ces décalages pourraient être fort différents à des échelles de plusieurs millénaires. Aux extrémités d'un tel cycle de 243 ans, les transits peuvent être partiels (en -1763 par exemple), voire même mipartiels mi-complets suivant l'endroit où l'on se trouve sur Terre (cela sera le cas en 2611 comme ça l'était en 1631). Pour l'espacement de 8 ans, le décalage vertical entre les lignes de transits est d'environ $+1200^{\prime\prime}$ en D et de $-1440^{\prime\prime}$ en A (voir Fig. 18). Autrement dit, d'une part les transits doubles sont plus « serrés » au nœud D qu'au nœud A, et d'autre part il est impossible d'avoir un transit double quand l'un d'eux est quasi central (le demi-diamètre apparent du Soleil étant d'environ $960^{\prime\prime}$); c'est ce qui se passe autour de l'an 424 (voir Fig. 17 et 19).

Sur la Fig. 17, il y avait donc également un transit (décalé de $+1\,440''$ vers le haut) et ce 8 ans avant chacune des dates postérieures ou égales à 1639.

Reste à considérer ce qui se passe pour le cas $A \to D$: pour que le prochain transit ait lieu au nœud descendant D cette fois (notons que les passages 2004 et 2012 ont lieu en ce nœud). Si on considère que le nœud D est juste à l'opposé du nœud D de départ (ce qui revient à $e_{V\acute{e}nus}\approx D$), alors on a cette fois à résoudre (p+1/2)V-(q+1/2)T=e. Les solutions sont à nouveau reprises à la Fig. 16. Ces solutions font apparaître des périodes supplémentaires de 113.5 ans et 121.5 ans qui correspondent bien aux intervalles de temps entre les changements de nœuds $A \leftrightarrow D$ de la Fig. 6 (113.5 = 105.5 + 8).

Nous sommes donc finalement parvenus à reproduire l'entièreté de la séquence étrange des passages qui était donnée à la Fig. 6; nous résumons la situation graphiquement à la Fig. 18.

Pour obtenir des solutions plus précises, il s'agirait de considérer l'excentricité des orbites et le fait que la ligne des nœuds se déplace lentement à cause des perturbations séculaires. Il s'agirait en outre d'affiner les valeurs de T et de V, en prenant pour V la période draconitique (de nœud à nœud) réelle de Vénus (224.6989 j) et pour T la période orbitale de la Terre, rapportée au nœud de Vénus (365.251 j).

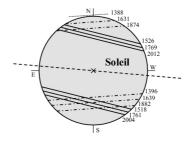


Fig. 18 : Trajets de Vénus sur le disque solaire, de 1388 à 2012; entrée à gauche (E), sortie à droite (W).

Types de traits :

- continus ≡ nœud descendant D
- d'axe ≡ nœud ascendant A
- pointillés ≡ pas de transit
- interrompus ≡ écliptique.

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, le cycle de 243 ans (séquence 105.5 - 8 - 121.5 - 8) n'est pas immuable : il présente des ruptures sur des périodes très longues. La solution q=8 ans n'est en effet satisfaite qu'à 0.9 j près, ce qui signifie que lorsque le passage est central, on ne saurait pas avoir un autre transit 8 ans après, vu que le décalage de 0.9 j est trop grand par rapport au 0.7 j tolérés, si bien que l'on peut perdre l'intervalle de 8 ans tantôt à un nœud, tantôt à l'autre, tantôt aux deux. C'est alors un transit simple. La séquence n'est par exemple pas apparue de -920 à +1631, soit durant plus de 25 siècles! Autour de 2004, elle est à nouveau présente. On peut visualiser cela en reportant la distance Δ

en fonction du temps. C'est ce qui est fait pour Vénus à la Fig. 19 page 23 (Δ est exprimé en '). Les traits quasi verticaux rejoignent des transits espacés de 8 ans (transits doubles). On voit clairement que la situation se répète tous les 243 ans, avec une légère dérive.

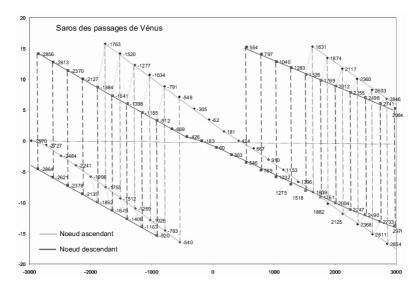


Fig. 19 : Séries de récurrences des transits de Vénus entre -3000 et +3000 (source [1]).

On peut faire un raisonnement analogue pour les transits de Mercure; on trouvera alors des périodes de 13, 33, 46 et 217 ans et des passages qui ont lieu début mai et début novembre. Cependant, la plus grande excentricité de l'orbite de Mercure ($e_{Mercure} \approx 0.206$) cause des asymétries plus importantes entre les nœuds A et D (par exemple, point de vue fréquence : entre 1600 et 2300, il y a 63 transits en novembre contre 31 en mai; et également point de vue durée : un transit central en mai dure 7.9H contre 5.5H en novembre).

La Fig. 20 représente l'occurrence des transits de Mercure au nœud D (Δ est exprimé en "cette fois). L'allure est singulièrement différente de celle des transits de Vénus : les transits de Mercure sont en effet environ 10 fois plus nombreux que ceux de Vénus. Chaque sommet de la grille triangulaire représente un transit en l'année indiquée. Les points joints par des traits continus, interrompus ou pointillés sont espacés de respectivement 46, 33 ou 13 ans. On pourrait également tracer les lignes de période de 217 ans

(quasiment horizontales, entre 1845 et 2062, ou 1832 et 2049). La pente des lignes en trait continus est d'environ –200"/46 ans. La périodicité de 46 ans n'est pas immuable : une série s'arrête en 1937 et une autre débute en 1957.

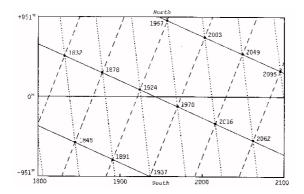


Fig. 20: Transits de Mercure au nœud descendant D (en mai) de 1800 à 2100 [27].

On pourrait également considérer les transits possibles à partir d'autres planètes que la Terre [27].

Notons pour terminer que les cordes tracées par Vénus sur le disque solaire sont à un angle d'environ $8^{\circ}46'$ par rapport à l'écliptique (voir Fig. 2), tandis que l'inclinaison de l'orbite de Vénus n'est que de $3^{\circ}24'$. La cause est une illusion d'optique due au fait que nous observons à partir de la Terre, qui est en mouvement (dans le même sens que Vénus). On peut retrouver la valeur de $8^{\circ}46'$ par un calcul simple à partir des périodes sidérales T=365.25636 j et V=224.701 j : l'angle vaut arctan(tan($3^{\circ}24'$)×T/(T-V)) = $8^{\circ}46'$. A la limite, si la Terre avançait à la vitesse angulaire de Vénus, cet angle vaudrait 90° !

8. Estimez la valeur de l'UA (Unité Astronomique)

On peut déterminer les valeurs relatives $(^2)$ des demi-grands axes a des planètes à partir de leurs périodes. En effet, la 3^e loi de Kepler donne le

 $[\]binom{2}{}$ Remarquons que la puissance des triangles rectangles est également redoutable à cet égard : grâce à eux, on a pu facilement estimer des rapports de distances, en mesurant

lien entre a et la période orbitale $T:T^2/a^3=$ constante (cette relation peut également s'écrire $T^2*n^3=$ constante car on a la relation $nT=2\pi$). La détermination des dimensions absolues du Système Solaire nécessite par contre de déterminer au moins une distance : c'est tout le problème de la détermination de l'UA, un des plus gros défis de l'astronomie du 17^e siècle! On apprend à l'école que l'UA vaut environ 150 millions de km, et peu s'interrogent de savoir comment il est possible de mesurer une telle distance, tant elle semble énorme; on oublie également qu'il a fallu des efforts considérables pour arriver à obtenir une telle mesure. Nous rappelons ici brièvement comment on a pu y parvenir.

On a tout d'abord pensé à utiliser la parallaxe solaire α (voir Fig. 4) : on voit en effet immédiatement que l'on peut obtenir une estimation de l'UA via la relation $L_T = R_T / \sin(\alpha)$ — où l'on peut prendre $\sin(\alpha) \approx \alpha$ car α est assurément petit. Il s'agissait donc de connaître R_T et α .

On dispose depuis longtemps d'estimations du rayon de la Terre R_{T} , la plus célèbre étant celle d'Eratosthène (284-192 ACN), qui fit la première mesure précise de R_T . Il utilisa très astucieusement la trigonométrie, en l'occurrence ici que la longueur de l'arc de cercle est proportionnelle à l'angle au centre. Il utilisa le fait qu'à Alexandrie, le jour du solstice d'été, l'ombre portée d'un bâton à midi faisait un angle de 1/50 de 360°, alors qu'elle était nulle (le Soleil était au zénith, ce qu'il put vérifier car la lumière du Soleil arrivait dans le fond d'un puits profond) 800 kilomètres plus au Sud, à Syène (maintenant Assouan sur le Nil en Egypte) situé sur le tropique du Cancer. Il en déduisit que la distance entre ces 2 villes devait donc valoir également 1/50 de la circonférence de la Terre (en supposant que le Soleil était si loin que ses rayons étaient parallèles). Connaissant la distance entre ces 2 villes (5000 stades), il trouva que la longueur de la circonférence de la Terre devait valoir 250 000 stades. Même s'il y a une certaine polémique quant à savoir quelle est la longueur d'un stade, elle tourne en tout cas autour de 160 m, ce qui fait qu'Eratosthène trouva ainsi $R_T \approx 6500$ km, soit une valeur remarquablement correcte (la valeur communément admise est $R = 6.378 \times 10^6$ m pour le rayon équatorial). Ce fut le premier calcul mathématique de mesure dans le Système Solaire.

Par contre, la très faible valeur (\approx 1°/409) de α empêcha sa mesure directe et sa détermination posa problème pendant longtemps; on a donc dû avoir recours à des moyens indirects pour estimer l'UA. Il est à noter

astucieusement un seul angle (différence angulaire entre l'objet et le Soleil) : il suffit de le mesurer au moment où l'on sait qu'on a un triangle rectangle (ce qu'on peut savoir en observant les phases de l'objet étudié)!

que la grande majorité des anciennes estimations de l'UA sous-estiment fortement sa valeur réelle. Horrocks par exemple calcula que $\alpha=14''$ et donc 1 UA = 14 700 $R_{\rm T}$, ce qui est trop peu. Historiquement, deux types de méthodes ont été utilisées pour estimer l'UA : la méthode trigonométrique de triangulation (passage de Mars à l'opposition) et le passage des planètes inférieures devant le Soleil (transit de Vénus).

Nous décrivons ici brièvement la méthode de HALLEY (1716) qui a permis la première estimation de l'UA à partir du transit de Vénus; cette méthode vous permettra de réévaluer vous-même la valeur de l'UA le 8 juin 2004. Il s'agit ici d'une version simplifiée; la méthode complète requérant des notions plus complexes (de trigonométrie sphérique), avec notamment la prise en compte d'un effet de rotation différentielle terrestre.

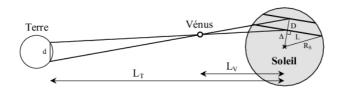


Fig. 21 : La méthode de Halley (1716) pour calculer L_T (estimation de l'UA).

L'idée est représentée à la Fig. 21: si on observe le passage à partir de 2 latitudes différentes sur Terre, on verra des lignes de transit légèrement écartées sur le Soleil. Supposons que la distance d (en km) soit connue; la distance d (en km) peut alors être estimée à l'aide du théorème de Thalès et de la 3^e loi de Kepler:

$$\frac{D}{d} = \frac{L_V}{L_T - L_V} = \frac{1}{\left(\frac{T}{V}\right)^{2/3} - 1} \approx 2.627$$

On souhaite maintenant obtenir la valeur de cette distance D en unité d'angle (") au lieu d'unité de longueur (km), afin d'en déduire ensuite la valeur de l'UA. L'idée est de calculer la proportion angulaire $D/R_{\rm S}$ à partir d'un relevé tel que celui de la Fig. 22. On peut tout d'abord calculer Δ via le théorème de Pythagore : $\Delta^2=R_{\rm S}^2-L^2$. Le rayon $R_{\rm S}$ est connu : $R_{\rm S}=\beta\approx 16'$ (demi-diamètre apparent), tandis que la distance 2L est le déplacement angulaire de Vénus durant le transit. On déduit ensuite $D=\Delta_1-\Delta_2$ (on peut aussi utiliser la relation différentielle $\Delta\delta\Delta=-L\delta L$ vu que les 2 cordes sont très proches). On peut alors conclure par le calcul de l'UA et de la parallaxe solaire α .

Reste à déterminer la valeur angulaire d'une corde L: comme on ne peut la mesurer directement, on l'estime à nouveau indirectement, à partir des temps de transit. Si les lignes de transit sont différentes, elles ont forcément des longueurs de cordes différentes, et donc des temps de passage différents. Halley avait remarqué que la durée du passage serait d'environ 7H, et que l'image de Vénus avancerait à la vitesse v de 1" en 14s. Il est aisé de la calculer à partir de la période synodique de Vénus S=583.92 j et de $L_V=0.723$ UA: $v=(L_V/(1-L_V))\times(360\times60)/(5\times24)\approx4'/h=4''/m$.

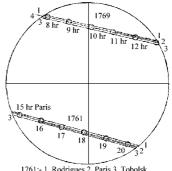
Voici un exemple numérique illustratif : supposons que les 2 lieux d'observation soient distants de d=5000 km et qu'en ces lieux on mesure des temps de transit de 6h et de 6h08m. On en déduit alors successivement $D\approx 13\,135$ km, $2L_1=24'$ et $2L_2\approx 24.53$, soit $\Delta_1\approx 10.58$ et $\Delta_2\approx 10.27$ d'où $D\approx 0.31\approx 0.000\,09$ rad; on calcule finalement l'UA en supposant qu'on a un arc de cercle de longueur D (km) vu sous un angle de D (rad) avec un cercle de rayon L_T : $L_T=13\,135$ km/0.000 09 = 145 660 657 km. On en déduit alors la valeur de la parallaxe $\alpha=\arcsin(R_T/L_T)=\arccos(6\,378$ km/145 660 657 km) ≈ 9.03 . Ces estimations ne sont pas très éloignées des valeurs communément admises : $\alpha=8.039$ km. (mesure radar sur Vénus, NASA 1990), soit 1 UA = 149.597 870 $\times 10^6$ km.

Il s'agit donc in fine de mesurer le plus précisément possible le temps écoulé entre l'entrée et la sortie de Vénus dans le disque solaire. Les 2 contacts extérieurs étant quasiment inobservables, on se basera surtout sur les 2 contacts intérieurs (le 2^e et le 3^e contact). On effectue alors la mesure simultanément à partir de 2 lieux d'observation différents, avec le plus grand écart possible en latitude pour avoir plus de précision (il est préférable de garder la même longitude tant que l'on ne dispose pas d'horloge précise). Ceci a conduit aux grandes expéditions et a également amené le problème de la détermination des coordonnées géographiques locales (la longitude posant le plus de difficultés).

Il est à noter que le décalage entre les lignes de transit représenté à la Fig. 21 est très largement exagéré; la réalité ressemble plutôt à la Fig. 22. On peut facilement voir que le décalage angulaire D entre les lignes de transit pour $d=R_T$ vaut en fait la différence des parallaxes de la planète et du Soleil. Cet écart D est donc d'autant plus grand que la planète en transit est plus proche de nous — donc pour Vénus que pour Mercure. Pour Vénus et pour $d=R_T$, on a que $D=\alpha_{V\acute{e}nus}-\alpha_{Soleil}\approx 32''-9''=23''$. Ce décalage ne peut valoir au maximum que $D\approx 46''$, ce qui correspond au cas où les observateurs sont le plus éloignés possible sur Terre $(d=2R_T)$.

Et 46" ne représentent que 3/4 du diamètre apparent de Vénus! On est donc dans une situation où il s'agit d'être extrêmement minutieux dans la mesure des instants de contact. Halley calcula qu'une erreur de 1s dans la mesure du temps de passage produirait seulement une erreur de 1/500" pour la parallaxe solaire α .

L'astronome français Delisle (1688–1768) apportera une modification théoriquement intéressante à la méthode de Halley.



1761:- 1. Rodrigues 2. Paris 3. Tobolsk 1769:- 1. Tahiti 2. Batavia 3. Vardo 4. Paris

Fig. 22 : Différents trajets de Vénus pour les transits de 1761 et 1769.

Selon cette variante, il n'était plus nécessaire d'observer à la fois l'entrée et la sortie de Vénus devant le disque solaire : un seul de ces deux instants devait suffire, à la condition toutefois de connaître la position exacte de l'observateur au moment de l'observation. Or, la connaissance de la longitude n'était pas facile; Delisle commença donc par consacrer beaucoup de temps à l'amélioration des techniques permettant de déterminer les longitudes très précisément. La méthode de Delisle présentait l'avantage non négligeable d'accroître considérablement le nombre d'observations utiles par l'augmentation du nombre de stations possibles : le risque global de mauvaises conditions météorologiques est alors beaucoup plus limité que si on reste confiné aux seuls endroits d'où l'on voit le transit dans sa totalité.

9. Une précision limitée toutefois

Les résultats ne furent toutefois pas aussi bons que ce que Halley avait espéré : la précision sur α n'était que de 1/20'' au lieu de 1/500''. Cela était dû d'une part aux erreurs de détermination des coordonnées en longitude mais d'autre part à un phénomène inattendu qui limita la précision des mesures : le phénomène de la « goutte noire ». Le dessin repris à la Fig. 23 illustre ce phénomène; il a été réalisé lors du transit de Vénus de juin 1769 par le Capitaine Cook, lors de l'expédition de l'Endeavour à Tahiti.

Le phénomène de la « goutte noire » [28] se manifeste près des contacts et gêne la détermination précise des instants de contact. Près du bord du

Soleil (limbe solaire), le disque sombre semble prendre la forme d'une petite goutte de liquide noir, ce qui incite à croire que la planète touche le bord du disque solaire, alors que ce n'est pas le cas en réalité. L'ordre de grandeur de l'imprécision est de 20s à 60s. L'origine du phénomène est restée longtemps mystérieuse; on l'avait d'abord attribuée à la réfraction à travers l'atmosphère de Vénus; mais cette hypothèse a dû être écartée, le phénomène de la « goutte noire » ayant également été observé pour Mercure (qui n'a pour ainsi dire pas d'atmosphère).

Actuellement, on attribue le phénomène de la « goutte noire » à un effet de diffraction [30] qui a même pu être reproduit facilement en laboratoire [31]; il faut toutefois un grossissement suffisant. Vous pouvez aisément reproduire vous-même ce phénomène en rapprochant le pouce et l'index situés à une dizaine de centimètres de vos veux et placés devant une source lumineuse intense (le ciel, par exemple). Le phénomène de diffraction est également à l'origine de l'histoire du soi-disant volcan de Mercure, à cause de l'apparence d'un point brillant observé au centre du disque noir de la planète.

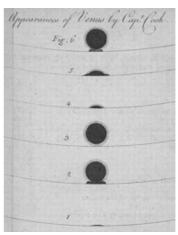


Fig. 23 : Phénomène dit « de la goutte noire » (Crédit : Linda Hall Library of Science, Engineering & Technology [29]).

Malgré cela, l'estimation de la parallaxe solaire α qui en résulta fut une grande première : entre 8'.43 et 8'.80, ce qui correspond tout de même à une précision relative de 4% sur l'UA. Grâce aux efforts persévérants de nombre d'astronomes, explorateurs, marins, etc., on put enfin disposer d'une échelle absolue de distance dans le système solaire, après avoir été longtemps cantonné aux échelles relatives. Le phénomène du transit contient toutefois intrinsèquement des limitations en précision; il faudra l'avènement des mesures radar afin d'atteindre beaucoup plus de précision.

10. Conclusion & remerciements

Voilà! Vous avez à présent tout ce qu'il vous faut pour pouvoir calculer vous-même le transit 2004, participer aux campagnes de mesure et comprendre un peu mieux

comment tout cela se passe. Je vous encourage surtout à vivre l'événement personnellement. N'oubliez pas l' **Avertissement!** Admirez le célèbre effet de la « goutte noire ». Croisons les doigts pour la météo!

J'ai souhaité que la majorité des références de cet article soient principalement des ressources que l'on peut trouver sur Internet — cela procède d'un souci d'accès rapide et bon marché à l'information mondiale; le lecteur curieux pourra par ailleurs toujours facilement y trouver de nombreuses références de livres s'il le souhaite. Les personnes intéressées par de plus amples renseignements (notamment pour avoir l'adresse de quelques revendeurs de matériel : télescopes bon marchés, lunettes pour éclipses, feuilles de filtre spéciaux, etc.) peuvent me contacter, de préférence par email.

Je tiens à remercier toutes les personnes ou institutions qui interviennent entre autres via les Références bibliographiques de cet article; et en particulier plusieurs personnalités qui ont déjà œuvré à la diffusion de l'information sur le transit de Vénus 2004 — p.ex. en tant que conférenciers, ou via Internet, ou encore en donnant aimablement leur autorisation pour la publication d'images. Je songe (entre autres et non exhaustivement) à RENÉ DEJAIFFE (SRBA), ALAIN JORISSEN (ULB), FRANÇOIS MIGNARD (OCA), FRED ESPENAK (NASA/GSFC), ROLAND BONINSEGNA (EAAE), l'UCLan (GB), l'ESO et à l'IMCCE (qui fournit des informations très complètes [32] sur les passages). Un merci tout spécial à JEAN MEEUS, une célébrité non seulement belge mais mondiale, grand spécialiste des éphémérides et des algorithmes astronomiques [33], qui a gentiment accepté de relire le présent article.

Bibliographie

- [1] http://www.imcce.fr/vt2004/fr/index.html (Venus Transit Page).
- [2] http://funsci.com/fun3_en/sky/sky.htm (Camera obscura).
- [3] http://www.solarscope.org (Solarscope).
- [4] http://www.vt-2004.org/ (Official Venus Transit Page).
- [5] « Ephémérides astronomiques 2004 », dans Ciel et Terre, Bulletin de la Société Royale Belge d'Astronomie, de Météorologie et de Physique du Globe (SRBA), Vol. 119, No. 5, septembre-octobre 2003.
- [6] http://www.transit-of-venus.org.uk/safety.htm (Sécurité des observations).
- [7] http://bass2000.obspm.fr/solar_web.php (Base de données sur le Soleil : taches solaires, etc.).
- [8] http://sunearth.gsfc.nasa.gov/sunearthday/2004/ index_vthome.htm (NASA Transit Page).

- [9] http://www.transitofvenus.org (Site extrêmement complet sur les transits de Vénus Chuck Bueter).
- [10] http://www.planetarium.be (Site du planétarium de Bruxelles).
- [11] http://www.transit-of-venus.org.uk/conference/index.html (Congrès GB).
- [12] http://www.venus2004.org/ (Pédagogie).
- [13] http://www.ac-nice.fr/clea/MercureVenus/protocol.htm (Proposition de protocole pour mesurer la distance du Soleil le 8 juin niveau 14-15 ans).
- [14] http://www.imcce.fr/vt2004/fr/fiches.html (Fiches pédagogiques d'aide pour les enseignants, étudiants et astronomes amateurs).
- [15] http://www.heavens-above.com/countries.asp (Coordonnées géographiques).
- [16] http://www.gothard.hu/astronomy/astronews/html/2003/20030507-Mercury-transit.html (*Photo du transit de Mercure 2003*).
- [17] http://sunearth.gsfc.nasa.gov/eclipse/transit/transit.html (Infos très complètes sur les Transits, entre autre celui de Venus 2004)
- [18] http://www.dsellers.demon.co.uk/venus/ven_ch8.htm (Texte de l'appel de Halley Phil. Trans. Vol. XXIX (1716) « A new Method of determining the Parallax of the Sun, or his Distance from the Earth », by Dr. Halley, Sec. R. S. NO 348, p.454. Translated from the Latin.).
- [19] http://www.melbourneobservatory.com/ (Historique richement illustré des transits de Vénus, avec entre autres la description du voyage de Cook et des instruments).
- [20] « Le Rendez-vous de Vénus », Luminet J.-P., ed. J.-C. Lattès, 1999.
- [21] « Le passage de Venus », Jean-paul Dethorey, Jean-Pierre Autheman, François Bourgeon et Tomas Bergfelder, Dupuis (Coll. Aire Libre), Tome 1:1999, Tome 2:2000.
- [22] http://www.usno.navy.mil/pao/History/Figure_7_13.htm (Photo (rare) du Transit de 1882 U.S. Naval Observatory).
- [23] http://www.astro.oma.be/GENERAL/INFO/fri001.html (UT heure d'hiver/été).
- [24] http://sunearth.gsfc.nasa.gov/eclipse/transit/TV2004.html (Moments des contacts du Transit 2004 pour différentes villes du monde).

- [25] Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, edited by P. Kenneth Seidelmann, USNO Washington, D.C.
- [26] http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/mars/oppo.html (Petite notice sur les oppositions de Mars).
- [27] Meeus, J., 1989, Transits, Willmann-Bell, Inc., Richmond. (Ephémérides précises des transits).
- [28] http://home.hetnet.nl/~smvanroode/ (Site très complet sur les transits de Vénus Steven van Roode, en Néérlandais).
- [29] http://www.lhl.lib.mo.us/events_exhib/exhibit/ exhibits/voyages/index.html (Expéditions scientifiques 1679-1859, Linda Hall Library of Science, Engineering & Technology.)
- [30] http://www.imcce.fr/vt2004/fr/fiches/fiche_n20b.html (Phénomène de la « goutte noire »).
- [31] « Lunettes et télescopes », André Danjon et André Couder, Ed. Albert Blanchard (Paris), 1935 (réédité en 1979).
- [32] http://www.imcce.fr/ephem/passage/html/passage.html (Passages des planètes Mercure et Vénus devant le Soleil : explications, éphémérides, annexes pédagogiques, etc.).
- [33] Meeus, J., 1999 (2nd Edition), Astronomical Algorithms, Willmann-Bell, Inc., Richmond. (Algorithmes astronomiques).



place réservée à la publicité

place réservée à la publicité

Structures, géométrie et informatique, de 7 à 77 ans

G. NOËL, U.M.H.

1. Des dessins animés

Nous sommes en 1944. La plus grande partie de l'Europe est occupée par les nazis. Les préoccupations quotidiennes ne laissent guère de place à une réflexion sur l'enseignement des mathématiques. La Suisse est épargnée par le conflit. Un petit fascicule, [8], y est publié:

Le dessin animé appliqué à l'enseignement des mathématiques et des sciences

Son auteur a pour nom Jean-Louis Nicolet (1903-1968). Depuis plusieurs années, il réalise des dessins animés de géométrie. Une vingtaine de films très courts (de 2 à 7 minutes), nécessitant plusieurs milliers de dessins à l'encre de chine, ont ainsi vu le jour. Son but est simple : les élèves doivent voir la géométrie. T. Fletcher, [5], raconte :



Once someone said, "Why do you make a film?"

Nicolet raised his voice, "Parce qu'on voit la vérité!"

Dans [8], [9] et [10], Nicolet précise ses idées sur la formation de l'intuition et l'usage des dessins animés dans ce cadre. Il résume ses conceptions comme suit (extrait de [8]) :

1. Dissocier l'activité intuitive de celle de la Raison. Le résultat sera d'autant meilleur que cette dissociation sera plus complète.

Adresse de l'auteur: Guy Noël, Rue du Premier Chasseur à Cheval, 16/14, 7000 Mons courriel : guy.noël@umh.ac.be

- 2. Faire parcourir à l'élève les étapes de la compréhension dans l'ordre où elles ont été parcourues par l'inventeur.
- 3. Faire surgir dans l'esprit de l'élève l'énoncé d'une vérité antérieurement à toute démonstration.
- 4. Choisir parmi les moyens d'expression utilisés dans le dessin animé ceux qui favorisent le plus l'abstraction.

Un jour, Nicolet rencontre Caleb Gattegno (1911—1988). Celui-ci s'enthousiasme. A partir de 1949, il parcourt l'Europe une boîte de réglettes Cuisenaire sous un bras, une bobine de films de Nicolet sous l'autre. Et il expérimente l'usage de ces deux matériels dans les circonstances les plus diverses.



Caleb Gatteand

Pour donner une idée de ce qu'était un film de Nicolet et comment on pouvait l'utiliser dans une classe, nous ne pouvons faire mieux que de présenter ici des extraits de [10] et [6]. Le premier film choisi se rapporte à un cercle passant par trois points. Les dessins sont réalisés d'après [10].

Figure 1.

Commentaires de Nicolet

On voit apparaître dans le plan trois points fixes.

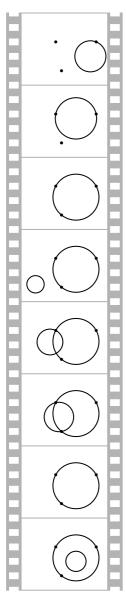
Un cercle circule, tout à fait librement.

Ce cercle jouit de trois degrés de liberté : son centre est mobile suivant deux dimensions, et son rayon varie indépendamment de la position du centre.

Commentaires de Gatteano

On voit d'abord apparaître sur l'écran trois points non alignés.

Puis aussitôt après, un cercle qui se déplace du coin gauche de l'écran sans changer de dimensions jusqu'à venir passer par un des points fixes.



Nicolet:

Gattegno :

Il semble que le hasard amène la circonférence en contact avec l'un des points. Le cercle est moins libre que tout à l'heure.

Il se balance, son rayon grandit, de façon qu'un deuxième point coincide avec un point de la circonférence. Le cercle a encore perdu un degré de liberté. Il ne lui en reste plus qu'un seul.

Son rayon peut grandir encore. Son centre se déplace en fonction de la variation du rayon sur une droite. Le cercle finit par passer par le troisième point.

Un deuxième cercle, tout aussi libre que le premier, court des aventures semblables à celles du premier.

Il passe par un des trois points, puis par un deuxième, et enfin vient se confondre avec le premier cercle. Le cercle commence par se balancer et puis s'étend jusqu'à ce qu'il atteigne un des deux autres points et pendant un instant la figure est fixe.

Le mouvement reprend vers le troisième point et le cercle est figé dans cette position.

Alors apparaissent à tour de rôle, des cercles dont le destin est le même;

commençant par être soit extérieurs, soit intérieurs, soit intérieurs, soit centrés sur un des points donnés, soit venus de droite, de gauche, ils se développent et atteignent un, deux des points donnés et finissent par se fondre dans le cercle obtenu au début.

Figure 2.

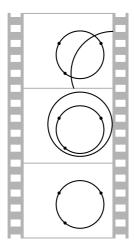


Figure 3.

Nicolet:

Un troisième, un quatrième cercle apparaissent, d'autres encore, à l'intérieur de celui qui est maintenant fixe, ou le coupent, ou l'entourent complètement. Ils subissent des variations multiples et finissent toujours par passer par les trois points fixes, se confondant tous en un seul cercle.

On notera la concision et la précision des commentaires de Gattegno, et cela bien que son texte ne soit pas accompagné de figures.

On l'a déjà dit plus haut : le rôle que Nicolet attribue à ses films est la découverte et la compréhension intuitives de la vérité d'un énoncé mathématique. Après s'être imposée à l'esprit, la vérité, intuitive et impérieuse, réclame elle-même sa démonstration.

Gattegno explique comment il utilise dans les classes les films de Nicolet :

Dans mes diverses utilisations de ce film, j'ai suivi divers chemins. Quelquefois je montre le film une, deux, trois fois sans rien dire du tout et ensuite seulement, je demande aux élèves de m'en redire le scénario. D'autres fois, je projette le film et pose des questions aux élèves dès le début. Questions qui, elles aussi, varient de « Que voyez-vous? » appliquée à un ensemble de vues, à « Et maintenant où se trouve le centre du cercle variable? » Ces diverses leçons avec des groupes différents livrent des moissons fort diverses mais toutes intéressantes quant à l'outil employé.

[...] L'auteur avait en vue un atome ou une molécule du programme de la géométrie élémentaire, et notre emploi de ses films a pris une autre tournure. Nous y avons vu un moyen de créer des situations mathématiques dynamiques.

[...] Dès que le film a été montré plusieurs fois et qu'on a attiré l'attention des élèves sur ce qui arrive lorsque le cercle est « pris » entre deux des points fixes, même les plus jeunes de nos élèves ont vu le centre décrire une droite perpendiculaire à la droite joignant ces deux points et, après quelque discussion, ils ont vu qu'elle passait par le milieu des segments qu'ils délimitent.

Pour terminer, nous demandons aux élèves de résumer le fait permanent du film, le destin de tous les cercles. Quelquefois, mais pas toujours, un élève peut dire ce que désire Nicolet : « Par trois points non alignés passe un cercle et un seul. »

En général, ce sont des propositions équivalentes mais plus proches de l'imagination des élèves comme :

« Si sur un cercle il y a trois points fixes, tous les cercles qui passent pas ces points se confondent avec lui. »

011

« Par trois points, il y a beaucoup de cercles confondus, de quelque cercle qu'on commence. »

etc.

Nicolet avait créé ce film pour obtenir ce dernier résultat mais notre expérience nous montre que c'est un des moindres faits dans l'ensemble de ce que les élèves y trouvent. Un fois le film vu et revu, et la discussion conduite d'une manière ou d'une autre, la leçon avec le film commence pour nous. Il a servi à donner de l'expérience, un fonds d'images et une ligne d'intégration de ces images. Maintenant commence le travail d'enseignement du professeur de mathématiques.

Gattegno fait alors sentir aux élèves que le centre d'un cercle possède deux degrés de liberté. Il lie cela aux deux dimensions du plan, aux deux coordonnées ... Il fait imaginer des familles de cercles : celle des cercles de rayon donné, celle des cercles de centre donné. Il structure ainsi l'ensemble de tous les cercles du plan.

Éventuellement, il projette le film une fois de plus et fait percevoir à quelles familles appartiennent les cercles variables.

Il introduit les faisceaux et met en évidence le losange ayant pour sommet deux points et les centres de deux cercles de même rayon appartenant au faisceau déterminé par les deux points. Il fait chercher le plus petit cercle d'un faisceau ainsi que la droite des centres, et il fait découvrir que celle-ci est aussi une des deux diagonales des losanges précédents et la médiatrice du segment joignant les deux points de base du faisceau.

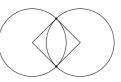


Figure 4.

Il fait également apparaître que le cercle passant par trois points non alignés appartient à trois faisceaux (les trois faisceaux déterminés par les trois paires de sommets). Exploitant les constatations précédentes, il fait enfin réaliser des constructions à la règle et au compas, notamment celle des losanges mentionnés ci-dessus et celle de la droite des centres - médiatrice du segment joignant les deux points de base.

À la différence de Nicolet, Trevor Fletcher, [4] — qui a également réalisé des dessins animés géométriques — considère que les films mathématiques, y compris certains des films de Nicolet, peuvent aussi servir à démontrer un résultat. Il donne comme exemple un film de Nicolet qui étudie le lieu ces centres des cercles passant par un point fixe et tangents intérieurement à un cercle donné, et s'exprime comme suit :

On voit d'abord un cercle fixe, puis son centre et un autre point à l'intérieur du cercle.

Un cercle variable apparaît, qui touche le cercle fixe et passe par le point fixe. Quel est le lieu des centres de ces cercles variables?

Quand le lieu apparaît dessiné point par point, on voit que c'est une ellipse dont les foyers sont le point fixe et le centre du cercle.



Figure 5.

En montrant que la somme des distances des foyers aux points du lieu égale le rayon, il apparaît que la courbe est bien une ellipse. La structure logique du film est impeccable, il n'y a aucune lettre et le résultat est démontré en toute certitude.

Comme on le voit, les films de Nicolet, grâce sans doute à leur brièveté et à leur dépouillement, permettent des lectures à plusieurs niveaux. Ils peuvent être exploités non seulement pour découvrir la vérité, mais aussi — mais surtout, dirait Gattegno qui fut l'un des initiateurs de la pédagogie

des situations — pour explorer des situations, pour les utiliser en vue de structurer des familles d'objets géométriques et pour établir des relations entre ces structures et d'autres.

Après 1960, la modernisation de l'enseignement des mathématiques a pu détourner l'attention des dessins animés géométriques (1). Mais si Nicolet revenait aujourd'hui parmi nous, il n'y a aucun doute qu'il réaliserait ses films à l'aide d'un logiciel tel que Cabri-Géomètre. Ou plutôt, il n'en réaliserait plus car, avec Cabri, les élèves peuvent les réaliser eux-mêmes!

2. Des dessins animés par micro-ordinateur

Cabri introduit dans l'animation une nouvelle dimension : l'interactivité. Désormais non seulement les professeurs et les élèves peuvent réaliser euxmêmes de petits dessins animés, mais ils peuvent intervenir en direct dans le déroulement du film.

2.1. Les coniques centrées

Reprenons l'exemple du film de Nicolet consacré à la génération d'une ellipse, et traduisons-le en Cabri. Nous supposons que les élèves n'ont jamais étudié les coniques. Voici quelques étapes d'un scénario possible de film. Elles ne sont mentionnées qu'à titre indicatif, car l'avantage de Cabri est précisément qu'un tel film peut être construit avec les élèves, donc varier en fonction de leurs suggestions et réactions.

1. On commence par dessiner une cercle Γ de centre c, et un point fixe f intérieur à Γ. Le point mobile sur Γ sera p. On détermine le centre du cercle passant par f et tangent à Γ en p en prenant l'intersection de la droite cp et de la médiatrice de [fp]. Après avoir observé ce qui se passe lorsque p parcourt Γ, on demande le lieu du centre du cercle mobile, et on obtient la figure ci-dessous (à gauche). On introduit le mot ellipse.

En interagissant avec Cabri, on fait passer le point f à l'extérieur de Γ . Si, comme ci-dessus, on a bien déterminé le centre du cercle mobile

 $^(^1)$ Encore que les troisième, sixième et septième congrès de la CIEM, qui ont eu lieu respectivement en 1976, 1988 et 1992, aient réservé une place à la présentation de films.

en prenant l'intersection de la droite cp (et non du segment [cp]) avec la médiatrice de [fp], la construction reste valable, mais le lieu devient très différent (figure de droite). On introduit le mot hyperbole.

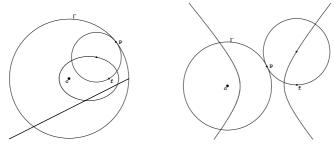


Figure 6.

2. Afin d'étudier les propriétés d'une conique, pour une position donnée de p (que l'on s'empresse ensuite de faire varier, par exemple avec l'aide de l'option Animation de Cabri), on joint le point du lieu aux points c, f et p, et on fait apparaître la médiatrice de [fp]. On constate que dans le cas d'une ellipse, la somme des distances d'un point du lieu aux points c et f est constamment égale au rayon du cercle fixe, alors que dans le cas de l'hyperbole, c'est la différence de ces distances qui est constante.

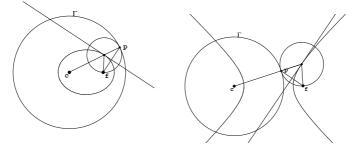


Figure 7.

3. Avec les dernières images, on est arrivé à la fin du film de Nicolet, à ceci près qu'un seul film est valable à la fois pour l'ellipse et l'hyperbole et que ces deux coniques apparaissent donc comme intimement associées. Une remarque qui justifiera qu'un jour on parle des sections de cône ou des courbes de degré 2.

À présent, allons plus loin en nous intéressant à la médiatrice du segment [fp]. Cabri nous permet de dessiner des positions successives de cette médiatrice grâce à l'option Trace. Malheureusement, Cabri ne

permet ni d'enregistrer, ni d'imprimer la figure ainsi obtenue, ce qui explique son absence ici $(^2)$. Toujours est-il qu'on constate sur les figures obtenues à l'écran que la médiatrice semble bien être toujours tangente à la conique, le point de tangence étant le centre x du cercle variable passant par f.

Il se pose alors la question de prouver cette propriété.

Dans le cas de l'hyperbole, on peut utiliser une propriété analogue : c et f étant placés de part et d'autre de D, le point x qui rend maximum la différence |xc|-|xf| est l'intersection de cp et D.

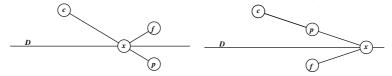


Figure 8.

Dans les deux cas, on montre de cette façon que la médiatrice de [fp] n'a qu'un seul point commun avec la conique.

- 4. Les figures obtenues plus haut, avec ou sans les tangentes à la conique, donnent l'intuition de la symétrie des coniques. Peut-on établir cette symétrie à l'aide des outils déjà mis en place?
 - Si l'ellipse et l'hyperbole admettent un centre de symétrie, à toute position du point p on doit pouvoir en associer une autre, notée p', telle que p et p' déterminent des points symétriques du lieu. Où pourrait se trouver p'?

Il y a sans doute plusieurs façons d'aborder la question. Nous pouvons remarquer, par exemple, que les tangentes aux points déterminés par p et p', c'est-à-dire les médiatrices de $\lceil fp \rceil$ et $\lceil fp' \rceil$, doivent être

 $[\]binom{2}{2}$ L'option Lieu de Cabri permet aussi de dessiner l'enveloppe d'une famille de droites — la conique dans notre cas — mais ne dessine pas du tout les droites de la famille.

parallèles (voir la figure 9). Mais alors les droites fp et fp' coı̈ncident. Le point p' est donc le second point d'intersection de fp et de Γ . Après construction du point p' et du point du lieu qui lui correspond, on arrive aux deux composantes de la figure 9. Comme plus haut, on effectue les constructions de manière que la figure de gauche se transforme en celle de droite quand on fait sortir le foyer f du cercle Γ . Cela suppose qu'on ne prend jamais l'intersection d'un segment et d'une droite, mais toujours celle de deux droites, quitte ensuite à effacer une droite et la remplacer par un segment.

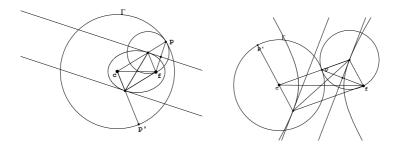
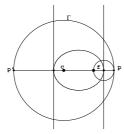


Figure 9.

Sur ces figures, examinons le quadrilatère ayant pour diagonales le segment [cf] et le segment joignant les points de la conique correspondant à p et p'. On trouve facilement des égalités d'angles qui montrent que ce quadrilatère est un parallélogramme. Les diagonales se coupent donc en leur milieu, et ce milieu est un centre de symétrie de la conique.

5. Faisant varier p sur Γ , on découvre des points privilégiés d'une conique centrée : d'abord les sommets du grand axe, où les tangentes sont perpendiculaires à la droite cf. Dans le cas d'une ellipse, on découvre aussi les sommets du petit axe où les tangentes sont parallèles à cf. Enfin, dans le cas de l'hyperbole, si p=p', fp est tangente à Γ donc perpendiculaire à cp. Dans ce cas la médiatrice de [fp] est parallèle à cp, le cercle mobile disparaît ou, si l'on préfère son centre est à l'infini. La tangente à l'hyperbole devient une asymptote.



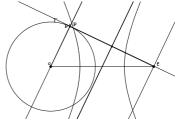


Figure 10.

6. Pour terminer cette première étude des coniques centrées, on peut encore mettre en évidence, dans le cas de l'ellipse la notion de directions conjuguées. Il s'agira de déterminer les positions q et q' sur Γ qui déterminent des points de l'ellipse où les tangentes seront parallèles au diamètre de celle-ci associé à p et p'. Autrement dit, les médiatrices de [fq] et [fq'] doivent être parallèles à ce diamètre et la droite fq = fq' lui est perpendiculaire. On obtient la figure suivante où on a fait apparaître le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués. Comme à l'habitude, en faisant circuler p au long de Γ , on se familiarise avec la nouvelle notion.

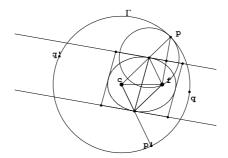


Figure 11.

2.2. Forcer la prise de conscience

Une autre retombée de la réalisation d'un dessin animé mathématique est que leur auteur est parfois amené à perfectionner ses propres connaissances. Fletcher cite son cas personnel :

Parce que je m'étais familiarisé avec le contenu de mon film sur la Cardioïde, j'ai pu trouver des démonstrations plus courtes et plus

simples des théorèmes qui apparaissent dans le film et même résoudre mentalement des problèmes semblables, ce que je ne pouvais pas faire auparavant.

C'est un peu ce que Gattegno appelle « forcing the awareness » (forcer la prise de conscience). Par son interactivité, Cabri est particulièrement utile pour « forcer » élèves et professeurs à sortir des sentiers battus.

Donnons un exemple simple. La figure suivante permet sans peine de calculer l'aire d'un quadrilatère quelconque (quelconque, vraiment?)

On en déduit que l'aire du quadrilatère est la moitié de celle du parallélogramme gris, le parallélogramme « extérieur ».

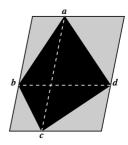


Figure 12.

À présent, jouons avec Cabri, en déplaçant un sommet. On fera par exemple tendre le sommet c vers la diagonale bd. Que se passe-t-il quand c se rapproche d'un point intérieur au segment [bd]? Jusque là, on n'observe rien de très surprenant, mais cela n'enlève rien à l'utilité de ce jeu pour certains élèves qui vont par exemple constater que parfois un triangle peut être considéré comme un quadrilatère dont deux côtés consécutifs sont alignés.

Puis, voici que l'un des utilisateurs fait passer le point c de l'autre côté de bd.

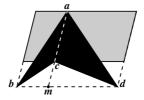


Figure 13.

L'aire du quadrilatère est-elle encore la moitié de celle du parallélogramme? Un moment de réflexion montre que oui : on a aire (abcd) =

aire (abd) – aire (bcd) et on retrouve la moitié de l'aire du parallélogramme gris.

Tant que nous y sommes, pourquoi ne pas croiser le quadrilatère?

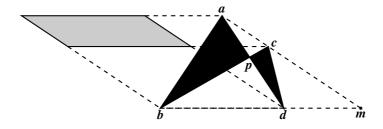


Figure 14.

Cette fois, il y a vraiment matière à réflexion. Constatons d'abord que la figure 14 est construite de la même manière que les précédentes : le parallélogramme gris est déterminé par les parallèles à bd passant par a et c et les parallèles à ac passant par b et d.

Notons p le point d'intersection des côtés [ad] et [bc] du quadrilatère, et considérons séparément le triangle abp:

aire
$$(abp) = aire (abm) - aire (bcm) - aire (adm) + aire (cdp) + aire (cdm)$$

Chacun des termes aire (abm), aire (bcm), aire (adm) et aire (cdm) est la moitié de l'aire d'un parallélogramme. Et le nombre

aire
$$(abm)$$
 – aire (bcm) – aire (adm) + aire (cdm)

est la moitié de l'aire du parallélogramme gris. Ainsi, c'est la différence aire (abp) – aire (cdp) et non la somme aire (abp) + aire (cdp) qui est la moitié de l'aire du parallélogramme gris.

Devons-nous en conséquence dire que l'aire du quadrilatère croisé est la différence aire (abp) — aire (cdp)? Il pourrait donc exister des quadrilatères d'aire négative!

Autrement dit, l'aire serait une grandeur orientée. En fait, toute personne ayant rencontré un peu de trigonométrie sait que l'aire du parallélogramme gris est $|ac| \cdot |bd| \cdot \sin \theta$ où θ est l'angle des diagonales (du

quadrilatère). La présence du facteur $\sin\theta$ dans cette formule a effectivement pour conséquence que l'aire est une grandeur orientée : en changeant le sens de parcours du quadrilatère, l'angle θ change de signe, donc son sinus aussi. Les deux triangles qui constituent un quadrilatère croisé sont parcourus dans des sens différents : leurs aires doivent être soustraites et non additionnées.

Remarquez au passage que, vu la formule, l'aire d'un anti-trapèze (ou trapèze croisé) est nulle, puisque dans ce cas, $\theta=0$. Et nous retrouvons le « théorème du papillon » (³) cher à J.-M. Slovik et B. Honclaire : aire (abm) = aire (cmd).

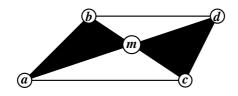


Figure 15.

3. Et en géométrie de l'espace?

On vient de rappeler l'importance de l'animation interactive en géométrie plane : elle permet selon les circonstances la formation de l'intuition, la découverte de la réponse à une question ou l'exploration d'une situation. Elle peut aussi servir de support au raisonnement démonstratif. T. Fletcher, [3] va jusqu'à souhaiter la formalisation d'un langage mathématique « visuel ».

En géométrie de l'espace, nous pourrions lui assigner une mission supplémentaire : apprendre à « voir dans l'espace ». Par cette expression, nous désignons l'aptitude à reconstituer mentalement une vue spatiale à partir d'une ou plusieurs représentations planes d'un objet de l'espace. En architecture ou dans le domaine industriel, la question peut être traitée grâce aux procédures de la géométrie « descriptive » (méthode de Monge ou méthode des plans cotés). Encore peut-on se demander si ces procédures sont assimilables par quelqu'un qui n'aurait pas d'avance une « bonne vision spatiale ». Il est aussi des domaines où le problème est extrèmement

^{(&}lt;sup>3</sup>) Ce théorème peut bien entendu être démontré de façon tout à fait élémentaire!

difficile. Ainsi, en imagerie médicale, on sait qu'un nombre fini de radiographies, si grand soit-il, peut toujours correspondre à plusieurs configurations différentes de la zone radiographiée. Nous ne nous attarderons pas sur cette question.

Beaucoup de « figures » rencontrées dans les débuts d'un cours de géométrie de l'espace n'ont de figure que le nom. Par exemple, la « figure » ci-dessous est censée représenter un plan α , deux droites A et D et leurs points de percée dans α . Ces points de percée ont été positionnés de façon arbitraire : les représentations du plan et des droites ne permettent pas de les déterminer. Une partie de chaque droite est dessinée en pointillés pour indiquer qu'elle est située en-dessous de α . Le dessin pourrait faire croire que la droite D coupe le « bord horizontal de α » et redevient ensuite visible! Enfin, il est impossible de savoir si les droites A et B sont ou ne sont pas coplanaires, et dans le cas où elles ne le sont pas, laquelle est en avant de l'autre. On pourrait de plus discuter pour savoir ce que signifie « être en avant » dans ce cas!

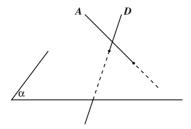


Figure 16. Ceci n'est pas une figure géométrique.

De tels schémas peuvent éventuellement servir de support au raisonnement, mais apprennent-ils à voir dans l'espace?

Une permière idée à explorer est donc d'éviter l'emploi de figures « flottantes » comme la figure 16 au profit de figures qui intègrent les éléments à étudier dans un contexte familier. Par exemple, si deux droites passent par des sommets d'un cube, on « verra » plus facilement si elles sont ou ne sont pas coplanaires que si elles « flottent » comme ci-dessus.

Une deuxième idée à exploiter est d'utiliser des figures animées. « Voir dans l'espace », c'est en particulier apprécier les positions relatives des objets les uns par rapport aux autres, c'est percevoir le relief. Il est bien connu que notre perception du relief résulte de ce que nous avons deux yeux,

et que de plus ceux-ci sont toujours en mouvement. En d'autres termes, notre cerveau ne perçoit pas une unique image plane de la situation observée, mais bien plusieurs. Il est ainsi à même de reconstituer le relief.

Il s'agirait donc, lors de l'apprentissage de la géométrie de l'espace, d'utiliser des logiciels qui permettent de modifier en continu l'angle de vue d'une situation géométrique.

Des logiciels spécifiques suffisamment conviviaux apparaissent être nécessaires. Ils doivent en particulier permettre à un élève de dessiner et de positionner lui-même des objets tels qu'un cube, une sphère ou un segment, et cela en choisissant (avec l'aide de son professeur) un système de représentation plane (perspective cavalière, projection orthogonale ou perspective centrale), mais en laissant au logiciel le soin de faire les calculs nécessaires.

Supposons donc que nous disposons d'un tel logiciel (4). Il a été utilisé pour réaliser la figure suivante :

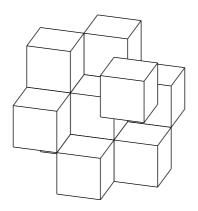


Figure 17.

Combien de cubes distinguez-vous? Sept d'entre eux semblent constituer une espèce de « construction » à trois niveaux. Un huitième « flotte » à l'avant-plan. Pouvez-vous déterminer s'il se situe à l'un des trois niveaux rencontrés, et si oui dans quel niveau, ou entre deux niveaux et lesquels? Observez bien la figure. Vous risquez d'hésiter longtemps.

⁽⁴⁾ Il en existe effectivement, mais ils sont souvent limités à la réalisation de figures particullères.

Dans le cas présent, l'œil de l'observateur est situé au-dessus de tous les cubes. En amenant son œil à l'horizontale de chacun des niveaux, notre observateur va pouvoir situer le cube flottant par rapport aux autres.

Le logiciel doit donc permettre de modifier en direct les paramètres de la représentation. Nous allons augmenter l'angle entre la verticale et la direction du regard (la colatitude de l'œil). Cela nous fournit le film suivant :

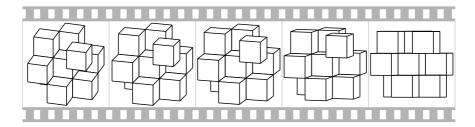


Figure 18.

Maintenant nous n'hésitons plus : le cube flottant est situé au niveau supérieur. En même temps, nous avons vu apparaître un neuvième cube à l'arrière plan, en bas à gauche. En regardant bien, nous constatons qu'une toute petite partie en était visible déjà sur la première image.

Les neuf cubes de cette figure jouissent d'une propriété particulière : si nous regardons exactement dans la direction d'une quelconque des arêtes de ces cubes, nous les voyons tous les neuf, et ils remplissent alors un carré 3×3 . Pouvez-vous les assembler autrement tout en conservant cette propriété?

La possibilité de modifier l'angle de vue d'une figure spatiale doit être considérée comme indispensable pour tout logiciel de représentation spatiale.

Au passage, notons que les modes usuels de représentation plane ne peuvent être considérés comme équivalents du point de vue de la « vision dans l'espace ». En ce qui concerne le relief, on connait le procédé consistant à superposer une image rouge et une image verte, destinées chacune à un des deux yeux. On regarde alors l'écran avec des lunettes rouge-vert. Mais ce système n'est — évidemment — pas adapté à des figures polychromes. Une autre méthode consiste à placer les deux images côte à côte, et à demander à l'observateur de les superposer en louchant. C'est assez efficace, mais tout le monde n'est pas capable de loucher! La vue stéréoscopique pose donc des problèmes difficiles.

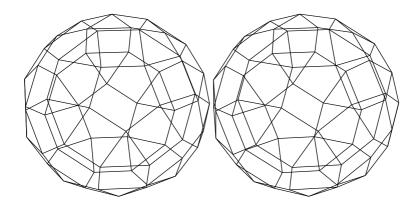


Figure 19. Louchez et vous verrez un rhombicosidodécaèdre en relief!

Par ailleurs, l'image qui se forme sur notre rétine est obtenue par une projection centrale. C'est donc ce mode de représentation qui est le plus réaliste. La projection orthogonale est encore assez réaliste, en tous cas pour les objets éloignés, et dans ce contexte, cela ne veut pas nécessairement dire qu'ils sont très loin. Elle a l'avantage de conserver le parallélisme des droites. La perspective cavalière conserve aussi le parallélisme des droites, mais est très peu réaliste et de ce fait, on peut se demander si elle ne constitue pas un handicap pour ceux qui « ne voient pas dans l'espace ». Son seul avantage est qu'elle permet aisément de représenter un cube dont une face est parallèle au plan de projection (5). Pour des situations un tantinet plus complexes, on ne voit guère son utilité.

Quoi qu'il en soit des habitudes, on peut souhaiter qu'un logiciel de dessin géométrique en dimension trois donne à l'utilisateur un choix permanent entre ces trois modes de représentation.

4. Structurer des familles d'objets

L'utilisation de logiciels de dessin, et en particulier la réalisation de dessins animés ou animables, permet et amène aussi une plus grande structuration des concepts mathématiques rencontrés.

⁽⁵⁾ Cet avantage est surtout appréciable quand on dessine à la main!

Nous utilisons ici les mots « structure » et « structuration » dans un sens assez informel et certainement plus large que celui qu'on rencontre par exemple dans le traité de Bourbaki. Structurer un ensemble de connaissances, c'est établir des connexions entre ces connaissances, ainsi qu'avec d'autres connaissances déjà établies antérieurement. C'est aussi procéder à des classifications, distinguer des caractéristiques de certains sousensembles, etc.

C'est de cette façon que les connaissances accumulées deviennent des compétences utilisables. De façon un peu pédante, nous pouvons dire que « La Connaissance résulte de la structuration des connaissances. C'est la différence entre la « tête bien faite » et la « tête bien pleine ».

Fidèle à notre habitude, nous allons tenter de donner des exemples de structuration. Le premier n'est pas très profond. Il a surtout pour but de décrire les étapes d'une structuration.

4.1. Un problème de l'oreiller

Le problème suivant est dû à Lewis Carroll (Pillow problems : thought out during wakeful hours) et rapporté par Ruma Falk et Ester Samuel-Cahn dans [2].

Trois points sont choisis au hasard dans un plan infini. Trouver la probabilité qu'ils soient les sommets d'un triangle obtusangle.

D'emblée, on voit que « ce problème pose problème » : qu'est-ce que choisir un point au hasard dans un plan? Dans un domaine quarrable, c'est clair, les probabilités sont des rapports de mesures d'aires. Mais dans un plan? Carroll se ramène effectivement à un domaine quarrable de la façon suivante (nous résumons et nous utilisons nos notations habituelles) :

D'abord, il n'est pas nécessaire de considérer 1005 les triangles du plan. On peut limiter le choix aléatoire à tous ceux qui ont un segment [ab] fixé comme côté. Et même, on peut supposer que [ab] est le plus grand côté de tous les triangles choisis aléatoirement. Alors le troisième sommet c est nécessairement dans l'intersection des disques de centres a et b et de même rayon |ab|.

Puisque [ab] est le plus grand côté, le plus grand angle est l'angle en c. Le triangle est obtusangle si et seulement si le sommet c appartient au disque ouvert de diamètre [ab].

Carroll calcule le rapport de l'aire du disque de diamètre [ab] à celle de l'intersection des deux disques précités et trouve que la probabilité

cherchée vaut
$$\frac{3}{8 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}} \simeq 0,63938.$$

(En fait, Carroll suppose le point c au-dessus de la droite ab et raisonne donc sur la moitié supérieure de la figure ci-contre. Il est clair que cela ne change rien au raisonnement. Nous avons dessiné une figure complète par simple souci esthétique.)

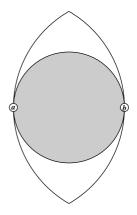


Figure 20.

Le raisonnement de Carroll lui permet de se ramener à un rapport d'aires. Malheureusement, il est faux. En ne regardant que le cas où le plus grand angle est en c, Carroll suppose implicitement que la probabilité cherchée est la même, que le plus grand angle soit en a, en b ou en c. Il n'y a aucune raison pour que cela soit vrai. Carroll ne calcule pas la probabilité pour qu'un triangle de côté [a,b] soit obtusange, il calcule la probabilité pour qu'un triangle dont plus grand côté est [a,b] soit obtusangle.

Regardons les deux autres cas : où le sommet c se trouve-t-il si le plus grand côté est [bc]? et si le plus grand côté est [ac]? Nous découpons ainsi le plan en trois zones:

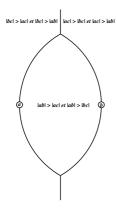


Figure 21.

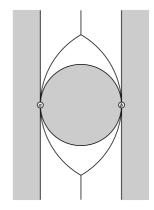


Figure 22.

Si [bc] est le plus grand côté, le triangle abc est obtusangle à condition que le sommet c soit situé à gauche de la verticale passant par a (figure 21).

La probabilité que ce soit le cas serait alors donnée par un rapport d'aires toutes deux infinies!! Cela n'a aucun sens, les trois probabilités correspondant aux cas « plus grand angle en a, en b ou en c » ne peuvent être égales car deux d'entre elles n'ont pas de sens précis (figure 22).

Ne considérons pas pour autant que le problème posé par Carroll n'a lui-même aucun sens. Une modélisation différente va nous permettre d'y voir plus clair.

Notons d'abord que Carroll, contrairement à l'énoncé du problème, ne choisit pas trois points au hasard dans le plan, mais seulement un (et encore, il le choisit dans une région limitée du plan). Cela revient à considérer que la probabilité pour qu'un triangle abc choisi au hasard dans le plan soit obtusangle est indépendante de la position du côté ab (que Carroll suppose être le plus grand côté, et c'est là son erreur).

Au fond, ce qui doit être choisi au hasard, ce n'est pas un triangle, mais une forme de triangle. Quand deux triangles ont-ils la même forme? Quand ils sont semblables. Et pour cela, il faut et il suffit que deux des angles du premier soient égaux à deux des angles de l'autre.

La forme d'un triangle est déterminée par deux angles.

Notons α , β et γ les amplitudes des angles d'un triangle. Nous allons paramétrer les formes de triangles à l'aide des deux angles α et β . Ces deux paramètres varient de O à π , limites exclues, avec la contrainte supplémentaire $\alpha+\beta<\pi$ (car $O<\gamma=\pi-\alpha-\beta<\pi$).

Tout couple de valeurs (α,β) , avec $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$ et $\alpha+\beta<\pi$ détermine une forme de triangle, mais peut aussi être considéré comme la coordonnée d'un point dans un plan $\alpha\beta$. Ce point appartient nécessairement au triangle de sommets (0,0), $(0,\pi)$ et $(\pi,0)$, qui est donc le domaine de la paramétrisation. Nous le nommerons D (pour « Domaine »).

La difficulté à surmonter est de comprendre que CHAQUE POINT DU TRIANGLE D REPRÉSENTE UNE FORME DE TRIANGLE. Une telle représentation n'est sans doute pas accessible avant la fin du secondaire. Elle peut bénéficier d'un support informatique, par exemple grâce à Cabri-géomètre. Dans les figures Cabri qui suivent, les angles sont mesurés en degrés et non en radians.

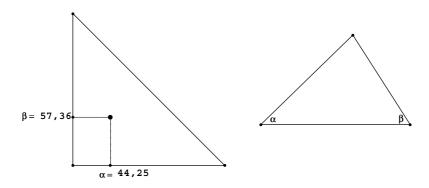


Figure 23.

La partie gauche de la figure est le domaine D de la paramétrisation. Le point (α,β) représente donc un triangle : celui qui est dessiné à droite. Lorsque ce point se déplace dans le triangle D, les valeurs de α et β sont modifiées et le triangle de droite est redessiné.

Pour se familiariser avec le mode de représentation, on déterminera les points de D qui correspondent aux triangles rectangles (les segments joignant les milieux des côtés de D), aux triangles isocèles (les médianes de D), au triangle équilatéral (le barycentre de D).

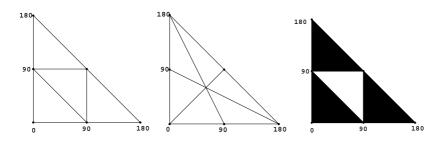


Figure 24.

Les triangles obtusangles correspondent aux points des trois petits triangles déterminés par les conditions $\alpha>\frac{\pi}{2},\ \beta>\frac{\pi}{2},\ \gamma>\frac{\pi}{2}$. L'aire totale de ces trois triangles vaut les $\frac{3}{4}$ de celle de D, de sorte que la probabilité pour qu'une forme de triangle choisie au hasard soit obtusangle vaut $\frac{3}{4}$.

Pour clore ce paragraphe, notons encore que chaque forme de triangle est associée à plusieurs points de D. Le lecteur intéressé pourra vérifier que le domaine D peut en fait être découpé en six sous-domaines contenant chacun un et un seul point représentatif de chaque forme de triangle, et que la probabilité pour qu'un triangle soit obtusangle est indépendante du sous-domaine choisi. Nous ne tombons donc pas dans l'erreur de Carroll!

Notre but dans ce paragraphe n'était que de mettre en évidence le processus de structuration d'une famille d'objets géométriques. Ce processus comporte toujours les étapes suivantes :

- 1. Paramétrer la famille.
- 2. Identifier les sous-familles correspondant à des parties remarquables du domaine des paramètres.

On peut alors observer, par exemple, la façon dont un objet de la famille se transforme en un autre, lorsque le point-paramètre parcourt un chemin dans le domaine de paramétrisation. R. Palais, [11], appelle cela des « morphings ». Nous allons revenir sur cette question à l'aide d'un exemple un peu plus sophistiqué.

4.2. Des pavages du plan

Nous allons nous intéresser à des pavages simples, obtenus en appliquant itérativement à un point du plan deux rotations de 90° de centres distincts.

Au départ, on se donne trois points du plan, dont deux, symbolisés par de petits carrés noirs, sont des centres de rotation de 90°. Le troisième servira de base pour le dessin.

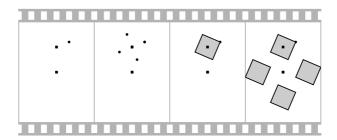


Figure 25.

Au départ, on se donne trois points du plan, dont deux, symbolisés par de petits carrés noirs, sont des centres de rotation de 90°. Le troisième servira de base pour le dessin.

On applique itérativement une des rotations au point de base. On obtient quatre points, sommets d'un carré.

On dessine le carré et on le remplit.

On applique itérativement la seconde rotation au carré. On obtient quatre carrés.

On continue « éternellement » en appliquant alternativement les deux rotations aux carrés déjà dessinés. On obtient in fine une infinité de carrés uniformément répartis dans le plan.

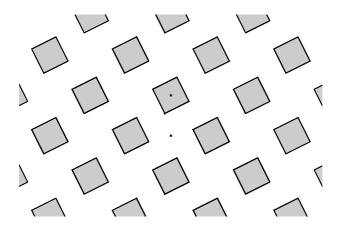


Figure 26.

Nous pouvons ensuite réaliser de véritables pavages polygonaux en joignant entre eux, de façon régulière, les sommets des carrés. Ceci peut se réaliser de plusieurs façons. Nous pouvons par exemple introduire une deuxième famille de carrés en réalisant les mêmes constructions, mais en appliquant d'abord la seconde rotation au point de base.

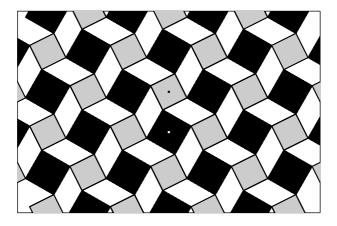


Figure 27.

On peut aussi remplir les espaces libres avec des octogones :

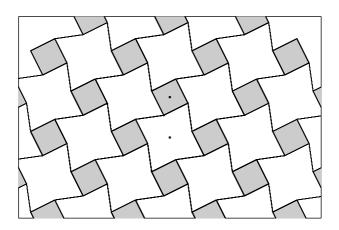


Figure 28.

Ou encore superposer les deux pavages précédents :

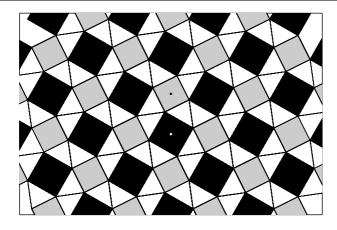
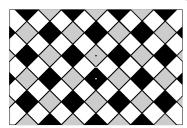


Figure 29.

Il n'y a qu'un nombre fini de façons de joindre les sommets des carrés rouges pour réaliser un pavage. Par contre la position du point de base peut varier de façon continue et déterminer l'allure générale du résultat final, comme le montrent encore les figures suivantes :



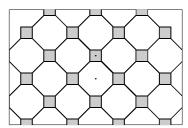


Figure 30.

Nous avons en fait une famille de figures paramétrisée par la position de ce point de base. Et celui-ci ne peut être placé n'importe où dans le plan. Pour que notre pavage ressemble réellement à un pavage, il ne faut pas que deux pavés se chevauchent. Et, vu la façon dont les pavés noirs ou blancs sont définis, il suffit que deux carrés gris ne puissent jamais se chevaucher.

Cette contrainte va nous permettre de déterminer le domaine de variation du paramètre, autrement dit du point de base. Nous exprimerons sa position en coordonnées polaires, en plaçant l'origine au centre de la première rota-

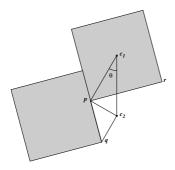
tion, donc au centre d'un carré gris. L'axe des x est dirigé vers le centre de la deuxième rotation, qui est donc de coordonnée (d,0).

Il est d'abord clair que l'angle polaire θ du point de base peut être limité à l'intervalle $[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}]$. Par ailleurs, pour éviter que deux carrés rouges voisins ne se chevauchent, la distance ρ du point de base au centre de la première rotation ne peut être trop grande. Par exemple, pour $\theta=0$, ρ peut grandir jusque d (les carrés rouges remplissent alors tout le plan), mais

pour
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$
, ρ ne peut dépasser $\frac{d\sqrt{2}}{2}$.

 ρ est donc une fonction, à déterminer, de θ .

La figure suivante représente deux gris rouges voisins dont les bords se touchent. L'un d'eux a pour centre le centre de la première rotation, le second est l'image du premier par la seconde rotation. Les centres des rotations sont notés c_1 et c_2 .



Notons q l'image de p par la rotation de centre c_2 . Le triangle qc_2p est rectangle et isocèle. Donc l'angle qpc_2 mesure 45° . Comme p appartient aux bords des deux carrés et que les côtés des deux carrés qui comprennent p sont perpendiculaires, l'angle c_2pr vaut 45° . De plus pc_1 vaut aussi 45° . De tout cela résulte que le triangle c_1pc_2 est rectangle en p, et par conséquent que $|c_1p| = |c_1c_2| \cos \theta$.

Figure 31.

La valeur maximum de ρ est donc $d\cos\theta$ et lorsque l'angle θ varie de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$, le point p parcourt un demi-cercle.

Nous pouvons à présent dessiner le domaine de variation de p :



Figure 32.

Cabri-Géomètre permet de réaliser un pavage dont le point de base est effectivement contrôlé par un point variable dans un secteur tel que celui de la figure 32. On peut ainsi réaliser visuellement des « morphings » entre pavages d'une famille donnée.

Il est aussi intéressant de rechercher quelles valeurs des paramètres ρ et θ correspondent à des pavages particuliers, par exemple les pavages réguliers ou, plus généralement, les pavages archimédiens. Rappelons qu'un pavage est dit « archimédien » s'il ne comprend que des polygones réguliers, si un sommet d'un polygone ne peut appartenir à un autre polygone que s'il en est aussi un sommet et si tous les sommets ont la même « configuration » (mêmes polygones rangés dans le même ordre autour du sommet) (6). Dans la famille que nous avons rencontrée figurent trois pavages archimédiens dont un régulier, le quadrillage. Les deux autres sont obtenus, l'un à partir de la figure 28 , en déplaçant le point de base de façon que les octogones soient réguliers, l'autre à partir de la figure 29 en faisant en sorte que les triangles soient équilatéraux.

5. Remerciements

Plusieurs amis de longue date m'ont fourni un appui logistique indispensable à la préparation de ce travail. Théo Bernet m'a prêté sa copie des films de Nicolet. Lucien Delmotte m'a fourni les références [1], [4], [6], [10] et [8]. Lors d'un exposé fait au CDS il y a quelques années, Bernard Honclaire a attiré mon attention (et celle des autres personnes présentes) sur le problème de l'aire orientée d'un quadrilatère. De plus, je lui dois d'avoir appris quelques « ficelles » permettant de tirer un parti maximum des possibilités de Cabri. Enfin, Claude Villers a veillé à ce que je dispose du matériel multimedia indispensable à la présentation orale. Que tous trouvent ici mes plus chaleureux remerciements.

Bibliographie

[1] C.I.E.A.E.M., Le matériel pour l'enseignement des mathématiques, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1958.

- [2] R. Falk and E. Samuel-Cahn, Lewis Caroll's obtuse problem, *Teaching Statistics*, vol 23-3, 2001.
- [3] Fletcher, T. J., Un nouveau langage mathématique, Mathematica & Paedagogia, 4, 1954-1955.
- [4] Fletcher, T. J., Les problèmes du film mathématique, C.I.E.A.E.M., Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1958.
- [5] C. Gattegno and T. J. Fletcher, Jean-louis Nicolet, Mathematics Teaching , 38, 1968.
- [6] C. Gattegno, L'enseignement par le film mathématique, C.I.E.A.E.M., Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1958.
- [7] B. Grünbaum and G. C. Shephard, Tilings and patterns, Freeman, New York, 1987.
- [8] Nicolet, J.-L., Le dessin animé appliqué à l'enseignement des mathématiques et des sciences, Scientifilm A. Colomb, Lausanne, 1944.
- [9] Nicolet, J.-L., Réflexions sur l'intuition en mathématiques, Mathematica & Paedagogia, 4, 1954-1955.
- [10] Nicolet, J.-L., Intuition mathématique et dessins animés, C.I.E.A.E.M., Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1958.
- [11] Palais, R., The Visualisation of Mathematics: Towards a Mathematical Exploration, Notices of the A. M. S., 46 6, 1999.

30° Congrès de la SBPMef

Rendez-vous les 24, 25 et 26 août 2004 à Liège, dans les locaux du Collège St-Louis pour la

Mathématique hors les murs.

Programme détaillé de ces journées (et bulletin d'inscription) dans le numéro de juin de SBPM-INFOR.

Une attention particulière sera apportée cette année à la transition primaire-secondaire.

Et pourquoi pas devenir Ingénieur Civil?

La Polytech est une institution universitaire à taille humaine intégrée dans sa ville et dans sa région. Venez y acquérir la formation polyvalente et irremplaçable d'Ingénieur Civil

La Faculté Polytechnique de Mons,

seule faculté de sciences appliquées en Hainaut, vous propose ses spécialités :

- ✓ architecture
- √ chimie
- √ électricité

Inscription à l'examen d'entrée

Pour la 1^{re} session :
• jusqu'au 28/06
de 8 à 12h (mercredi de 14 à 16h)

- Pour la 2º session :
 le 13/07 de 14 à 16h
 du 2 au 27/08
 du lundi au vendredi
 de 8 à 12h
- ✓ informatique et gestion
- √ mécanique
- √ mines-géologie
- √ science des matériaux

Renseignements : Secrétariat des Etudes

9, rue de Houdain • 7000 MONS

Tél.: 065/37 40 30 à 32 • Fax: 065/37 40 34 secretu@fpms.ac.be • http://www.fpms.ac.be

Limites de courbes : théorie et applications en analyse

A. ANTIBI, J. BAIR ET V. HENRY, *Université*Paul Sabatier de Toulouse et Ulg

Mots-clé: Limite de courbes, tangente, microscope virtuel, cercle osculateur, fonction analytique, direction asymptotique, télescope virtuel, convergence uniforme.

1. Introduction

La notion de limite joue assurément un rôle fondamental en analyse mathématique. Selon J. Mawhin, c'est d'ailleurs le seul concept vraiment nouveau que l'analyse introduit; il s'agit d'une méthodologie proche de celle de l'expérimentateur ou du technicien qui propose un procédé de résolution approchée en cherchant à montrer que l'erreur commise peut être rendue arbitrairement petite ([14], préface, p. V).

Une autre notion importante est celle de courbe, notamment parce qu'elle permet de donner une représentation géométrique d'une fonction à une variable.

En analyse mathématique, on est quelquefois amené à considérer des limites de courbes : par exemple, une tangente à une courbe peut être vue comme étant la limite de sécantes, ou un cercle osculateur peut être obtenu comme la limite de cercles passant par trois points infiniment voisins.

Si de tels passages à la limite sont fort naturels et se comprennent aisément d'un point de vue intuitif, ils ne sont généralement pas définis de façon rigoureuse.

Nous nous proposons dans cette note de combler cette lacune en présentant d'une manière précise la notion de limite de courbes planes.

Adresses des auteurs : ANTIBI André, Université Paul Sabatier, IREM, 118 route de Narbonne, Bât 1R2, 31062 Toulouse cédex 4 - France, courriel : antibi@cict.fr

BAIR Jacques. et HENRY Valérie, Université de Liège, Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales, 7 Boulevard du Rectorat, Bât. B31, 4000 Liège, courriel: J.Bair@ulg.ac.be, V.Henry@ulg.ac.be

A cet effet, nous envisageons différents cas selon le mode de définition des courbes envisagées.

Après ces définitions de base illustrées par des exemples élémentaires, nous passons en revue quelques utilisations de cette notion en analyse. Cela nous permet notamment d'unifier deux conceptions classiques de la notion de tangente à une courbe : il s'agit d'une part de la limite de sécantes passant par le point considéré, mais aussi de la limite des courbes obtenues par des zooms successifs réalisés au moyen de microscopes virtuels. Nous proposons d'autres applications telles que le cercle osculateur comme limite de cercles, le graphe d'une fonction analytique comme limite courbes polynomiales et une direction asymptotique comme limite d'images données par des télescopes virtuels.

Nous étudions ensuite des liens entre cette notion de limite de courbes et celle de convergence uniforme de fonctions; nous relevons à cette occasion quelques situations paradoxales.

Nous terminons par une annexe indiquant comment le logiciel Mathematica peut être utilisé pour tracer, puis animer des graphiques semblables à ceux qui figurent dans cet article.

2. Définitions et exemples élémentaires

2.1. Définition intuitive

Considérons une suite de courbes planes C_n pour $n \in \mathbb{N}$. Dans une première approche intuitive, nous dirons que cette suite possède une courbe \bar{C} comme limite lorsque « la limite des équations des C_n est une équation de \bar{C} ».

Nous allons préciser cette idée en envisageant différents cas.

2.2. Limite de courbes définies par des relations implicites

Pour tout entier naturel n, considérons la courbe C_n définie implicitement par

$$f_n(x; y) = 0.$$

Soit E un ensemble sur lequel sont définies toutes les fonctions f_n . S'il existe une fonction f telle que, pour tout $(x;y) \in E$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x;y) = f(x;y),$$

on dira que la limite des Cn est la courbe d'équation

$$f(x; y) = 0.$$

Exemple:

Pour tout naturel n, on considère l'ellipse Cn définie par

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^2 + y^2 = 1.$$

La suite des C_n possède pour limite le cercle centré à l'origine et de rayon 1.

Une courbe limite peut être dégénérée ou réduite à l'ensemble vide. Ainsi, la suite des ellipses d'équation $\frac{x^2}{n^2}+y^2=1$ possède pour limite la conique définie par $y^2=1$: celle-ci est dégénérée en deux droites horizontales d'équation y=1 et y=-1. Par ailleurs, la suite des hyperboles d'équation $\frac{x^2}{n^2}-y^2=1$ possède pour limite la conique d'équation $y^2+1=0$: dans \mathbb{R}^2 , il s'agit de l'ensemble vide.

Une activité intéressante pourrait d'ailleurs consister à chercher des liens entre la nature des courbes C_n d'une suite et celle de leur limite \bar{C} , même dans des cas simples. Par exemple, on pourrait se demander quand une suite d'ellipses possède pour limite un cercle, ou une droite,...

2.3. Limite de courbes définies paramétriquement

Pour tout entier naturel n, soit la courbe C_n définie par les égalités suivantes, dans lesquelles le paramètre t appartient à un intervalle l:

$$\begin{cases} x = x_n(t) \\ y = y_n(t) \end{cases}$$

Si, pour tout $t \in I$, on a

$$\lim_{n\to +\infty} x_n(t) = \bar{x}(t) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to +\infty} y_n(t) = \bar{y}(t),$$

alors on dira que la courbe $\bar{\mathbb{C}}$ définie paramétriquement par les égalités suivantes (pour $t \in I$) :

$$\begin{cases} x = \bar{x}(t) \\ y = \bar{y}(t) \end{cases}$$

est la limite de la suite des courbes C_n .

Exemple:

Les cercles centrés en l'origine et de rayon égal à $1+\frac{1}{n}$ ont pour équations paramétriques, avec $t\in[0,2\pi[$:

$$\begin{cases} x = x_n(t) = (1 + \frac{1}{n}) \cos t \\ y = y_n(t) = (1 + \frac{1}{n}) \sin t \end{cases}$$

Leur limite Č est le cercle trigonométrique puisque

$$\lim_{n \to +\infty} x_n(t) = \cos t \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} y_n(t) = \sin t.$$

2.4. Limite de graphes de fonctions

Le graphe de toute fonction $f:x\mapsto f(x)$ est une courbe qui peut être définie paramétriquement en choisissant la variable comme paramètre, c'està-dire par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

Une autre approche consiste à regarder le graphe de cette fonction f comme défini implicitement par une relation du type y - f(x) = 0.

On peut donc adapter les définitions précédentes au cas des graphes de fonctions. Quelle que soit l'approche choisie, on aboutit à cette définition : si, pour des fonctions f_n à une variable définies sur un intervalle I et pour tout $x \in I$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x),$$

alors on dira que le graphe \bar{C} de f est la limite des graphes C_n des f_n .

Exemples:

- Considérons les droites \mathfrak{D}_n d'équation $y=(1+\frac{1}{n})x$ pour tout naturel n. Leur limite est la droite $\bar{\mathfrak{D}}$ d'équation y=x, puisque

$$\lim_{n \to +\infty} y - (1 + \frac{1}{n})x = y - x.$$

– Les portions d'ellipses définies par l'égalité $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{n}}$ ont pour limite la droite horizontale d'équation y=1.

3. Applications en analyse

3.1. Tangente comme limite de sécantes

La tangente au graphe C_f d'une fonction f en un point P est régulièrement définie comme étant la limite des droites sécantes passant par P(a;f(a)) et un autre point P' de la courbe lorsque P' se rapproche de P. Cette définition très intuitive peut être, grâce à notre approche, interprétée de manière rigoureuse et conduire, sous réserve de l'hypothèse de dérivabilité de f en a, à une caractérisation de la tangente comme étant la droite passant par P et de coefficient angulaire égal à la dérivée de f en a.

Soit f une fonction dérivable en a. La limite des sécantes passant par les points P(a;f(a)) et $P_n\left(a+\frac{1}{n};f(a+\frac{1}{n})\right)$ a pour équation

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la droite sécante \mathfrak{D}_n passant par P et P_n a pour équation $y = f_n(x)$ avec

$$f_n(x) = f(a) + n\left(f(a + \frac{1}{n}) - f(a)\right)(x - a).$$

Par définition, la limite de la suite des \mathfrak{D}_n , que nous appellerons $\bar{\mathfrak{D}}_n$, a pour équation $y=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)$, ce qui s'écrit, en exploitant la dérivabilité de f en a:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

3.2. Tangente à une courbe algébrique comme limite d'images fournies par des microscopes virtuels

Signalons que la notion de microscope virtuel est étudiée en profondeur dans les deux articles [4] et [11]. Contentons-nous ici de rappeler qu'un microscope virtuel de puissance n et dirigé vers un point P(r;s) agit comme une transformation du plan définie par

$$(x; y) \mapsto (X; Y)$$

moyennant les égalités suivantes

$$x = r + \frac{\chi}{n}$$
 et $y = s + \frac{\Upsilon}{n}$.

Considérons une courbe algébrique C arbitraire d'équation implicite

$$F(x; y) = 0$$
, avec $F(x; y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} a_{ij} x^{i} y^{j}$:

il s'agit d'une courbe algébrique de degré égal à

$$d = \sup_{a_{ii} \neq 0} (i + j).$$

Sur un point P(r;s) quelconque de C, pointons le microscope virtuel \mathcal{M}_n^P de puissance n (avec $n \in \mathbb{N}$). L'image, notée C_n , de C par \mathcal{M}_n^P est la courbe algébrique dont l'équation exprimée dans les nouvelles coordonnées X,Y est donnée par

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} a_{ij} (r + \frac{\chi}{n})^{i} (s + \frac{\Upsilon}{n})^{j} = 0.$$

Développons les diverses puissances intervenant dans cette égalité en exploitant la formule du binôme de Newton. Toutefois, contentons-nous d'écrire les deux premiers termes de chaque développement en regroupant tous les autres dans un reste, matérialisé par le symbole « ... », dont tous les termes contiennent un facteur $\frac{1}{n^k}$ avec $k\geqslant 2$; on peut ainsi écrire une équation de C_n :

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} a_{ij} (r^{i} + ir^{i-1} \frac{\chi}{n} + \cdots) (s^{j} + js^{j-1} \frac{Y}{n} + \cdots) = 0.$$
 (1)

On constate aisément que les termes indépendants de X et de Y se simplifient puisque $P \in C$ implique que F(r;s) = O. Par ailleurs, dans le produit des deux parenthèses, le terme en XY est rejeté dans le reste indiqué par le signe « ... » puisqu'il contient le facteur $\frac{1}{n^2}$; on aboutit alors à cette équation de C_n :

$$m_1 \frac{\chi}{n} + m_2 \frac{\Upsilon}{n} + \dots = 0 \tag{2}$$

où les coefficients m_1 et m_2 ne sont rien d'autre que les dérivées partielles de la fonction polynomiale F au point P, soit

$$m_1 = F'_1(r;s)$$
 et $m_2 = F'_2(r;s)$.

A ce stade, il nous faut distinguer deux cas selon que les deux coefficients m_1 et m_2 sont simultanément nuls, ou pas, c'est-à-dire selon que le gradient de F au point P est nul ou ne l'est pas. Dans le premier cas, le point P est qualifié de singulier pour la courbe C et dans le second cas, il est dit régulier.

Si le point P est régulier, l'équation de l'image C_n (de C par \mathcal{M}_n^P) peut s'écrire, après multiplication par le facteur n des deux membres de l'égalité (2) ci-dessus :

$$m_1X+m_2Y+\cdots=0,$$

où le reste « . . . » est composé de termes comprenant tous en dénominateur une puissance naturelle de n. La suite des C_n possède donc comme limite lorsque $n \to +\infty$ la droite d'équation

$$m_1X + m_2Y = 0.$$

En revenant aux variables initiales x et y, on obtient une équation de la tangente à la courbe C au point P, soit la droite d'équation

$$m_1(x-r) + m_2(y-s) = 0$$
:

il s'agit d'une tangente horizontale, oblique ou verticale selon que $m_1=0$, $m_1m_2\neq 0$ ou $m_2=0$ respectivement. Remarquons que dans les deux premiers cas, on retrouve bien le coefficient directeur de la tangente donné par le théorème de dérivation des fonctions implicites, à savoir le nombre

$$-\frac{m_1}{m_2} = -\frac{F'_1(r;s)}{F'_2(r;s)};$$

dans le dernier cas, on obtient une équation de la tangente alors que la relation implicite F(x;y)=0 ne définit pas une fonction (en la variable x) dérivable au point d'abscisse r.

Lorsque P est un point singulier de C, c'est-à-dire lorsque $m_1=m_2=0$, il importe de développer davantage les calculs en précisant ce que vaut le reste dans l'égalité (1). Nous nous contenterons ici de traiter le cas où les trois dérivées partielles secondes de F au point P ne sont pas toutes nulles (1). Dans le développement du premier membre de (1), tous les termes non nuls contiennent un facteur en $\frac{1}{n^k}$ avec $k \ge 2$. En multipliant les deux membres de (1) par n^2 , on obtient comme équation de C_n :

$$m_{11}X^2 + 2m_{12}XY + m_{22}Y^2 + \cdots = 0$$
,

où les coefficients m_{11} , m_{12} , m_{22} sont égaux à des multiples positifs des dérivées partielles secondes $F_{11}''(r;s)$, $F_{12}''(r;s)$, $F_{22}''(r;s)$ respectivement, et où tous les termes du reste « ... » contiennent un facteur en $\frac{1}{n^k}$ avec $k \geqslant 1$. En conséquence, la suite des C_n possède comme limite la courbe algébrique d'équation en les variables X,Y:

$$m_{11}X^2 + 2m_{12}XY + m_{22}Y^2 = 0$$
,

ou encore en les variables x, y originelles :

$$m_{11}(x-r)^2 + 2m_{12}(x-r) \times (y-s) + m_{22}(y-s)^2 = 0.$$

Il s'agit d'une conique dégénérée en un point, en une droite ou en deux droites, selon que le nombre $\Delta=m_{11}\times m_{22}-m_{12}^2$ est respectivement positif, nul ou négatif; le point P est alors respectivement un point isolé pour C, un point de rebroussement, ou encore un noeud avec deux tangentes.

Nous allons dégager de ce qui précède une méthode générale permettant de traiter systématiquement la cas d'un point quelconque P(r;s) de n'importe quelle courbe algébrique C; ensuite, nous l'illustrerons par quelques exemples typiques.

Algorithme relatif à l'application d'un microscope virtuel en un point d'une courbe algébrique arbitraire

1. Dans l'équation de C, remplacer la variable x par $r + \frac{\chi}{n}$ et la variable y par $s + \frac{\gamma}{n}$.

⁽¹⁾ Dans le cas contraire, il suffit de poursuivre les calculs encore plus loin.

- 2. Développer les calculs par distributivité, en exploitant la formule du binôme de Newton et en regroupant entre eux les termes contenant une même puissance de $\frac{1}{n}.$ Toutefois, ne calculer effectivement que les termes en la plus petite puissance $\frac{1}{n^k}$ de $\frac{1}{n}$, les autres étant regroupés dans un reste matérialisé par le symbole « ... »; on obtient ainsi une équation de la courbe C_n .
- 3. Multiplier les deux membres de l'équation obtenue par le facteur n^k puis passer à la limite pour $n \to +\infty$, ce qui revient à supprimer le reste « ... » : on obtient une équation de la limite $\bar{\mathbb{C}}$ de la suite des C_n . En remplaçant X par x-r et Y par y-s dans l'équation de $\bar{\mathbb{C}}$, on a une équation d'une courbe C_0 dans le repère initial.
- 4. Interpréter géométriquement les résultats obtenus. Notamment, si k=1, C_0 est la droite tangente au point P qui est régulier pour C; si k=2, le point P est singulier et peut être un noeud, un point de rebroussement ou un point isolé.

Exemple:

Appliquons cette méthode à la LEMNISCATE DE GERONO C d'équation

$$x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0.$$

Pointons tout d'abord un microscope de puissance n sur le point $P_1\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ qui appartient à cette courbe. L'image C_n de C par $\mathcal{M}_n^{P_1}$ est définie par

$$\left(1 + \frac{X}{n}\right)^4 - 4\left(1 + \frac{X}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{Y}{n}\right)^2 = 0.$$

Développons le premier membre sachant que les termes indépendants vont s'éliminer et que les termes contenant en dénominateur une puissance de n d'exposant au moins égal à 2 sont regroupés dans le reste « ... » : il suffit donc de n'écrire que les termes en $\frac{1}{n}$, ce qui donne

$$\frac{4X}{n} - \frac{8X}{n} + \frac{4\sqrt{3}Y}{n} + \dots = 0.$$

La limite \bar{C} de la suite des C_n est la droite d'équation

$$-X + \sqrt{3}Y = 0;$$

le point P_1 est régulier pour C : la tangente en ce point est la droite d'équation

$$(x-1)+\sqrt{3}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

Dirigeons à présent un microscope de puissance n sur le point $P_2(0;0)$. L'image C_n de la courbe par le microscope $\mathcal{M}_n^{P_2}$ est fournie par l'égalité

$$\frac{X^4}{n^4} - 4\frac{X^2}{n^2} + 4\frac{Y^4}{n^4} = 0.$$

lci, le plus petit exposant k de n est 2. Partant, la limite $\bar{\mathbb{C}}$ de la suite des \mathbb{C}_n est définie par

$$X^2 = Y^2.$$

Le point P_2 est singulier pour C: il s'agit d'un noeud où la courbe possède deux tangentes, à savoir les deux droites définies, dans le repère initial, par

$$y = x \ et \ y = -x$$
.

La figure 1 page 75 illustre la méthode du microscope virtuel appliquée à la lemniscate au point P_2 .

Remarque:

La notion de tangente est présentée de diverses façons lors de la formation mathématique traditionnelle ([7], [12]), avec des changements de point de vue et de conceptions, par exemple avec une approche locale ou globale, une vision géométrique ou plus analytique ([12]). Dans les cours d'analyse, elle est souvent présentée soit comme limite de sécantes, soit comme « rectification » d'une courbe; la première présentation est régulièrement développée sans définir avec précision ce qu'est la limite de droites, et la seconde conception vient généralement bien après la première sans nécesserairement être reliée à celle-ci ([7]).

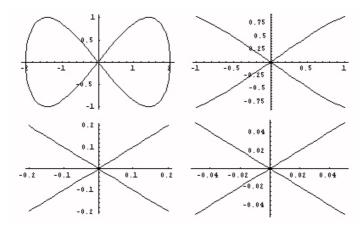


Fig 1 : « Zooms » successifs sur la courbe d'équation $x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0$

La réunification de ces deux points de vue grâce à la notion de limite de courbes nous semble faciliter la dé-transposition ([2]) que tout enseignant devrait envisager avec ses élèves pour passer d'un point de vue à l'autre.

Par ailleurs, signalons que les deux derniers auteurs [6] emploient régulièrement des microscopes virtuels dans les cours qu'ils dispensent à la Faculté d'Economie et de Gestion de l'Université de Liège. Grâce au côté systématique de cette méthodologie, à la simplicité des calculs qu'elle engendre et à son efficacité pour traiter des problèmes de nature locale rencontrés en analyse, ils pensent que ce choix didactique peut contribuer à réduire le nombre d'échecs, et partant à éliminer en partie la constante macabre ([1]) au sein de leurs auditoires. Cette hypothèse a priori est examinée dans [12].

3.3. Cercle osculateur

On appelle cercle osculateur d'une courbe C d'équation y=f(x) (où f est supposée au moins deux fois dérivable en a et telle que $f''(a) \neq 0$), en un point A(a;f(a)) la limite des cercles passant par A et par deux autres points de la courbe lorsque ces deux points se rapprochent de A (2).

 $[\]binom{2}{}$ Notons que le logiciel Cabri - Géomètre permet de tracer effectivement des cercles osculateurs en exploitant cette idée ([8], p. 84).

Montrons qu'avec notre définition de la limite de courbes, nous pouvons déterminer les coordonnées du centre ainsi que le rayon d'un tel cercle en fonction des dérivées première et deuxième de f en a (3).

Soit f une fonction au moins deux fois dérivable en a et telle que $f''(a) \neq 0$. La limite de la suite des cercles C_n passant par les trois points

$$A(a; f(a)), A_n\left(a - \frac{1}{n}; f(a - \frac{1}{n})\right)$$
 et $B_n\left(a + \frac{1}{n}; f(a + \frac{1}{n})\right)$

est un cercle dont le centre (4), est le point

$$M_{O}\left(a - \frac{f'(a)}{f''(a)}[1 + (f'(a))^{2}]; f(a) + \frac{1 + (f'(a))^{2}}{f''(a)}\right)$$

et dont le rayon (5) est égal à

$$\frac{\left(1+(f'(a))^2\right)^{\frac{5}{2}}}{|f''(a)|}.$$

Posons b = f(a), $c_n = f(a - \frac{1}{n})$, $d_n = f(a + \frac{1}{n})$; le cercle C_n , passant par A, A_n et B_n a pour centre le point de coordonnées $(x_n; y_n)$, donc pour équation

$$(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 = R_n^2$$

où R_n désigne son rayon. La limite de la suite des C_n a pour équation

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \bar{R}^2$$

avec $\bar{x}=\lim_{n\to+\infty}x_n$, $\bar{y}=\lim_{n\to+\infty}y_n$ et $\bar{R}=\lim_{n\to+\infty}R_n$. Le point de coordonnées $(x_n;y_n)$ est à l'intersection des médiatrices des segments $[A;A_n]$ et $[A;B_n]$; en d'autres termes, x_n et y_n vérifient ces deux égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n - \frac{b + c_n}{2} \ = \ \frac{1}{n(c_n - b)} \left(x_n - a + \frac{1}{2n} \right) \\ y_n - \frac{b + d_n}{2} \ = \ \frac{1}{n(b - d_n)} \left(x_n - a - \frac{1}{2n} \right) . \end{array} \right.$$

⁽³⁾ Nous retrouvons ainsi la définition donnée par Krasnov-Kisselev-Makarenko-Chikine dans [13].

⁽⁴⁾ appelé le centre de courbure de la courbe.

^{(&}lt;sup>5</sup>) appelé le rayon de courbure.

Des calculs élémentaires livrent

$$x_n = a + \frac{1}{2b - d_n - c_n} \left[n \left(\frac{d_n - c_n}{2} \right) (c_n - b)(b - d_n) - \frac{1}{2n} (c_n - d_n) \right].$$

Un passage à la limite pour $n \to +\infty$ dans l'expression ci-dessus nous donne

$$\bar{x} = a - \frac{f'(a)}{f''(a)} [1 + (f'(a))^2],$$

d'où l'on déduit

$$\bar{y} = f(a) + \frac{1 + (f'(a))^2}{f''(a)}$$
 et $\bar{R}^2 = \frac{\left[1 + (f'(a))^2\right]^3}{(f''(a))^2}$

ce qui permet de conclure.

Exemple:

En guise d'exemple simple, considérons la fonction $f: x \mapsto x^2$ et le point A(0;0) de son graphe. Comme f'(0)=0 et f''(0)=2, on trouve

$$\bar{x} = 0$$
, $\bar{y} = \frac{1}{2}$ et $\bar{R} = \frac{1}{2}$:

le cercle osculateur en A au graphe de f est donc d'équation

$$x^{2} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4} \iff x^{2} + y^{2} - y = 0.$$

Dans l'oculaire d'un microscope virtuel de puissance suffisamment grande pointé sur l'origine, le graphe de f et ce cercle osculateur paraissent confondus avec l'axe horizontal des abscisses.

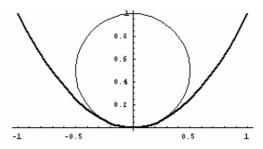


Fig 2 : Le cercle osculateur à la courbe d'équation $y = x^2$

3.4. Polynômes de Taylor

Soient f une fonction analytique sur un intervalle ouvert I et a un point arbitraire de I. Il est bien connu que le graphe de f apparaît comme étant, dans un voisinage de a, la limite des graphes C_n des polynômes de Taylor définis par l'égalité

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

- La suite composée des graphes des polynômes

$$y = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{k!}$$

a pour limite la courbe représentative de la fonction $y=e^x$. Ainsi, au voisinage du point P(O;1), la courbe d'équation $y=e^x$ peut être progressivement approchée par la droite d'équation y=1+x qui n'est rien d'autre que la tangente à la courbe en P, puis par la parabole d'équation $y=1+x+\frac{x^2}{2}$, puis par la cubique d'équation $y=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}$,...

- La courbe d'équation $y = \sin x$ peut être obtenue comme limite des courbes représentatives des polynômes

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

La figure 3 de la page 79 illustre ce cas.

3.5. Directions asymptotique comme limite d'images fournies par des télescopes virtuels

Partant de l'idée que, d'un point de vue projectif, une asymptote peut être considérée comme une tangente au graphe en un point à l'infini, nous avons adapté notre méthode du microscope pour rechercher des directions asymptotiques.

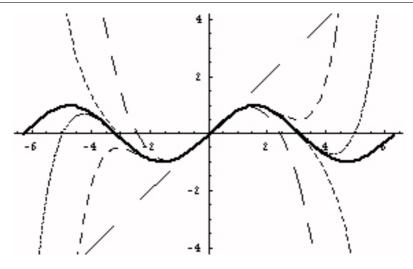


Fig 3 : Fonction sinus et polynômes de TAYLOR

Toutefois, il ne s'agit plus ici de « zoomer » autour d'un point du graphe, mais bien, intuitivement, de « ramener à distance finie des points très éloignés du graphe ». Une telle opération peut être réalisée au moyen d'un télescope virtuel qui réduit les coordonnées de tout point du plan dans une même proportion en les multipliant toutes deux par un même facteur.

Formellement, on a recours à un télescope virtuel de puissance n, noté C_n , qui divise par n les deux coordonnées d'un point, ce qui équivaut à effectuer la transformation suivante, également notée C_n :

$$\mathcal{T}_n: (x,y) \longmapsto (X,Y), \quad \text{avec} \ \ X = \frac{x}{n} \ \ \text{et} \ \ Y = \frac{y}{n}.$$

En regardant le graphe d'une courbe C, d'équation y=f(x), dans l'oculaire de C_n , on observe une courbe C_n , dont une équation en fonction des nouvelles variables X,Y est donnée par nY=f(nX).

Lorsque le graphe C de f possède une asymptote non verticale d'équation y=mx+p en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), il existe une fonction g qui tend vers O en $+\infty$ (resp. $-\infty$) et telle que f(x)=mx+p+g(x). Dans ces conditions, l'image C_n de C par C_n est définie par

$$nY = mnX + p + g(nX)$$
, soit encore $Y = mX + \frac{p}{n} + \frac{1}{n}g(nX)$.

La limite des C_n est la droite \bar{C} d'équation

$$Y = mX$$
.

Remarque : Cette image peut être visualisée en demandant à un logiciel de tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{n} f(nx)$. La figure 4 illustre ce que l'on obtient pour la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 100}$ et n = 1, 2, 5, 100.

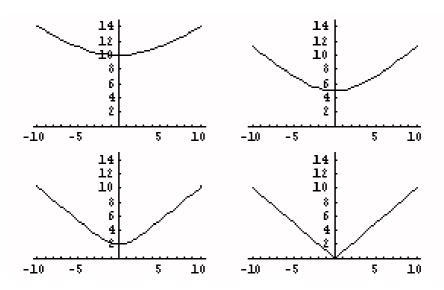


Fig 4 : Images successives de la courbe d'équation $y = \sqrt{x^2 + 100}$ par des télescopes virtuels de plus en plus puissants.

Illustrons la méthode en présentant fort brièvement trois exemples.

a) Soit la courbe C de la figure 4, c'est-à-dire la courbe d'équation

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 100}$$
.

L'image C_n de C par le télescope virtuel C_n est donnée par

$$nY = \sqrt{n^2X^2 + 100}$$
, soit $Y^2 = X^2 + \frac{1}{n^2}$ avec $Y \ge 0$.

La suite des C_n a pour limite la droite d'équation Y=X pour X (donc x) positif et la droite d'équation Y=-X pour X (donc x) négatif :

ces deux droites correspondent aux deux asymptotes, à savoir la droite y = x en $+\infty$ et la droite y = -x en $-\infty$.

b) Considérons la courbe d'équation

$$y = f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 4}{x^2 + 1}.$$

Son image C_n par le télescope virtuel C_n est fournie par l'égalité :

$$nY(n^2X^2 + 1) = 2n^3X^3 + 3n^2X^2 - 2nX + 4.$$

En adaptant en conséquence la méthode du microscope virtuel pour obtenir une tangente, nous pouvons écrire, après simplification par le facteur n^3 :

$$YX^2 = 2X^3 + \cdots,$$

où chaque terme du reste « ... » contient un facteur en $\frac{1}{n}$. En conséquence, la limite $\bar{\mathbb{C}}$ des \mathbb{C}_n est composée des droites d'équation

$$x = 0$$

et

$$Y = 2X$$
.

La première ne fournit pas d'asymptote tandis que la deuxième a pour coefficient directeur 2 qui est celui de l'asymptote oblique (aussi bien en $+\infty$ qu'en $-\infty$) d'équation

$$y = 2x + 3$$
.

c) L'image du graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2 - 1}$$

par le télescope virtuel C_n est la courbe C_n dont une équation peut se mettre sous la forme

$$nY = nX + \frac{1}{n^2X^2 - 1}$$
, soit encore $YX^2 - \frac{Y}{n^2} = X^3 - \frac{X}{n^2} + \frac{1}{n^3}$.

La limite des courbes C_n a donc pour équation

$$YX^2 = X^3.$$

On en déduit que X = O ou Y = X, ce qui donne ainsi une vision globale des deux directions asymptotiques.

Notons que, comme illustré dans l'exemple b), l'apparition d'une droite dans l'oculaire d'un télescope virtuel puissant ne garantit pas l'existence d'une asymptote, ainsi qu'en atteste encore la fonction $x\mapsto\sin x$. En effet, on a pour image C_n la courbe d'équation $Y=\frac{1}{n}\sin(\frac{x}{n})$ et la limite des C_n est l'axe horizontal Y=0; cependant il n'existe évidemment pas d'asymptote dans ce cas. Nous dirons simplement que la présence d'une droite vue au travers un télescope virtuel permet de conjecturer l'existence d'une asymptote et ne nous fournit en réalité que les directions asymptotiques éventuelles [5].

4. Limite de courbes et convergence uniforme

4.1. Un exemple d'illusion d'optique

Il arrive que les courbes d'une suite admettent plusieurs « facettes », en ce sens qu'elles peuvent être observées de plusieurs points de vue ou matérialisées dans divers supports ([9], p. 243).

Cette multiplicité des facettes est susceptible d'entraîner l'existence de plusieurs limites ou d'engendrer des situations paradoxales.

En guise d'exemple, considérons tout d'abord les fonctions f_n telles que, pour tout $x \in [0;1]$ et n entier naturel, on a

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{si} \quad x \in [0; \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2n}; 1\right] \end{cases}$$

On a visiblement, pour tout $x \in [0;1]$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$. Ce résultat peut surprendre : en effet, alors que, comme nous venons de le remarquer, les courbes C_n , graphes de f_n , tendent analytiquement vers la portion \bar{C} de l'axe horizontal comprise entre les abscisses O et 1, les points $P_n\left(\frac{\alpha}{2n};\alpha\right)$, pour tout $\alpha \in]0;1[$, appartiennent à C_n et tendent vers le point $(O;\alpha)$ situé sur l'axe vertical mais non sur \bar{C} (voir figure 5 page 83).

Cette « illusion d'optique » ne se présente toutefois pas lorsque les courbes \mathbb{C}_n sont introduites comme suit

$$\begin{cases} \begin{cases} x_n(t) = \frac{t}{2n} \\ y_n(t) = t \end{cases} & \text{si } t \in [0; 1] \\ \begin{cases} x_n(t) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)t - 1 + \frac{1}{n} \\ y_n(t) = 0 \end{cases} & \text{si } t \in]1; 2] \end{cases}$$

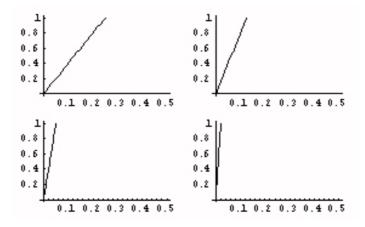


Fig 5: « Illusion d'optique ».

La suite des courbes ainsi définies paramétriquement possède pour limite la réunion des deux segments de droite joignant l'origine O respectivement à A(O;1) et à B(1;O).

4.2. Absence d'illusion d'optique et convergence uniforme

La notion de limite d'une suite de courbes est reliée à celle de convergence uniforme. Il est d'ailleurs possible de démontrer que l'illusion d'optique décrite ci-dessus (figure 5) ne se présente pas en cas de convergence uniforme; de façon plus précise, nous disposons de ce résultat :

Considérons une suite de courbes C_n , graphes des fonctions f_n et une suite de nombres a_n appartenant à un intervalle compact I. Si les fonctions f_n sont continues sur I et y convergent uniformément vers une fonction f et si la suite (a_n) converge vers un point \bar{a} , alors les points $M_n(a_n; f_n(a_n))$ de C_n forment une suite qui converge vers le point $\bar{M}(\bar{a}; f(\bar{a}))$ de $\bar{C} = \lim_{n \to +\infty} C_n$.

On dispose de ces majorations :

$$|f_n(a_n) - f(\bar{a})| \le |f_n(a_n) - f(a_n)| + |f(a_n) - f(\bar{a})|$$

$$\leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| + |f(a_n) - f(\bar{a})|,$$

ce qui permet de conclure puisque les deux derniers termes tendent vers O en raison d'une part de la convergence uniforme des f_n et, d'autre part, de la continuité de f.

4.3. Un autre exemple paradoxal avec convergence uniforme

L'exemple classique des « festons » qui sont composés de demi-cercles contigus dont les rayons diminuent sans cesse montre la possibilité de trouver des courbes C_n qui ont pour limite \bar{C} (ici un segment de l'axe horizontal), la convergence étant uniforme, mais dont les longueurs $I(C_n)$ ne tendent pas vers la longueur $I(\bar{C})$ (figure 6); ceci est contraire à ce que l'intuition pourrait suggérer ([9], p. 250).

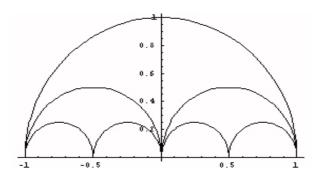


Fig 6: Exemple des festons.

Annexe : Programmes informatiques en langage de Mathematica

En 1879, Julius Petersen écrivait : on comprend bien mieux une figure et on se la rappelle bien plus facilement quand on l'a vue pendant la période de construction (cité dans [8], p. 3).

Ce principe de didactique ancien nous semble toujours d'actualité; de nos jours, son application est aisée grâce à l'accessibilité et aux performances

de l'outil informatique moderne (ordinateurs ou calculatrices portables). Cette hypothèse a priori et des questions connexes sont notamment étudiées dans [15].

Considérons, par exemple, le logiciel Mathematica [16] qui nous a servi pour tracer les figures contenues dans ce texte. Il offre la possibilité d'animer des graphiques et ainsi de visualiser, dans le cas qui nous occupe, l'évolution des courbes C_n d'une suite lorsque l'indice n augmente indéfiniment.

Nous expliquons ici les commandes à utiliser pour réaliser une telle animation et puis nous l'illustrons par un exemple.

- La commande principale pour réaliser un graphique est

Plot [fonction de x, { x, xmin, xmax }].

Elle représente la fonction fonction de x entre les abscisses xmin et xmax. Cette commande possède plusieurs options dont voici quelques exemples :

- PlotRange permet de spécifier l'intervalle désiré sur l'axe des ordonnées.
- AspectRatio précise le rapport entre l'unité sur l'axe des abscisses et celle de l'axe des ordonnées. La valeur Automatic renvoie un repère orthonormé.
- PlotStyle impose un style de trait au graphique.
 Dashing [{ k₁, k₂ }] alterne un trait plein de longueur k₁ avec un espace de longueur k₂, il fournit donc tout type de « pointillé ».
 Thickness [k] dessine un trait gras dont l'épaisseur dépend de k.
- La commande qui réalise l'animation se présente sous la forme suivante
 Do [action de n , { n , nmin , nmax , p }].
 Cette commande répète l'action action de n pour chaque valeur de n entre nmin et nmax par pas de p.

L'exemple de la figure 3 page 79 permet de tracer le graphique de la fonction $x \mapsto \sin x$ ainsi que ceux de ses polynômes de Taylor d'ordre impair depuis l'ordre 1 jusqu'à l'ordre 13 au voisinage de 0. La commande

$g[x_] = Normal[Series[Sin[x],{x,0,n}]]$

définit g[x] comme étant le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction $\sin x$.

 $\label{eq:def:Do[general} $$Do[\{g[x_{-}] = Normal[Series[Sin[x], \{x, 0, n\}]], Plot[\{Sin[x], g[x]\}, \{x, -2Pi, 2Pi\}, PlotRange $\to \{-10, 10\}, AspectRatio $\to Automatic]$, \{n, 1, 13, 2\}$]$

A la compilation, Mathematica fournit une suite de 7 graphiques, un pour chaque valeur de n. En double-cliquant sur l'un de ces graphiques, on obtient l'animation : les différents graphiques défilent à l'écran. Une barre de tâches apparaît dans le bas de l'écran et permet à l'utilisateur d'arrêter le défilement à l'aide de l'icône "pause" et de poursuivre l'animation manuellement en utilisant l'icône « play ».

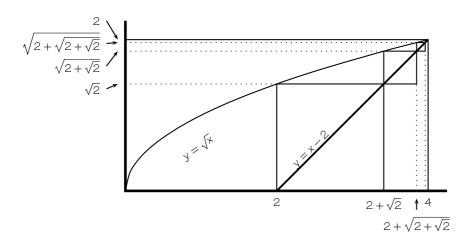
Les autres exemples traités dans cet article se construisent de manière analogue.

Bibliographie

- [1] ANTIBI A., La constante macabre., Editions Math'Adore, Toulouse, 2003.
- [2] ANTIBI A. BROUSSEAU G., La dé-transposition didactique, Recheches en Didactique des Mathématiques, Vol. 20, n° 1, 2000, pp. 7 40.
- [3] ANTIBI A. BARRA R., Transmath Term ES, programme 2002, Nathan, Paris, 2002.
- [4] ANTIBI A. BAIR J. HENRY V., Modélisation d'un zoom au moyen de microscopes virtuels, à paraître.
- [5] ANTIBI A. BAIR J. HENRY V., Ombre et cône asymptotique d'une courbe algébrique plane, à paraître.
- [6] BAIR J. HENRY V., Analyse mathématique au moyen de nombres hyperréels infiniment petits et grands, en préparation.
- [7] CASTELA C., Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 15, n° 1, 1995, pp. 7-47.
- [8] CUPPENS R., Avec Cabri-Géométre II, jouez ...et faites de la géométrie, Brochure APMEP n° 136, Paris, 2002.
- [9] HAUCHART C. ROUCHE N., Apprivoiser l'infini : un enseignement des débuts de l'analyse, Ciaco éditeur, Louvain-la-Neuve, 1987.
- [10] HENRY V., Les hyperréels en analyse, Mathématique et Pédagogie, n° 141, 2003, pp. 47-58.
- [11] HENRY V., Nouvelle approche pour introduire la notion de tangente à une courbe, à paraître Mathématique et Pédagogie, n° 145, 2004.

- [12] HENRY V., Quelques questions soulevées par l'enseignement de l'analyse non standard à des économistes, thèse de didactique des mathématiques, Université Paul Sabatier de Toulouse, en préparation.
- [13] KRASNOV M. KISSELEV A. MAKARENKO G. CHIKINE E., Mathématiques supérieures pour ingénieurs et polytechniciens, tome I, De Boeck Université, Bruxelles, 1993.
- [14] MAWHIN J., Analyse: fondements techniques évolution, De Boeck et Larcier, Editions De Boeck Université, Bruxelles, 2^e édition, 1997.
- [15] NAVARRO D., Etude didactique d'une ingénierie pour calculer la somme de certaines séries entières, thèse doctorale en didactique de mathématiques, Université P. Sabatier, Toulouse, en préparation.
- [16] WOLFRAM S., Mathematica : le système informatique pour les mathématiques, 2^e édition, Addison-Wesley France, Paris, 1995.

Évaluation d'une limite par géométrie



$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}} \to 2.$$



Journée Portes Ouvertes à Mons le samedi 26 juin de 9h à 12h30 et à Charleroi le mercredi 5 mai de 14h à 18h00

dês la remirée 2004

Nouveau à Mons le BAG en DRO le BAG en SCIENCES HUMAINES

et à Charleroi

formation complète en Sciences de Gestion en cours du jour













Université

tél.: 065/373014

fax: 065/373054

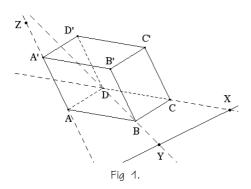
www.umh.ac.be

Cabri-Géomètre et les sections J.-P. HOUBEN, Université Catholique de Louvain

Partant de la vision en perspective cavalière d'un solide, nous allons en chercher la section par un plan mobile. La construction de ces différentes sections (qui dépendent de la position du plan) est relativement longue, car il va falloir envisager tous les cas de figure.

Dans l'exemple qui suit, nous prendrons un parallélipipède, mais cela peutêtre seulement un cube, une pyramide ou un polyèdre quelconque. L'une des faces du solide sera considérée comme base (généralement, on la choisira horizontale). Le plan de section sera défini à partir d'une droite de cette base et un point exérieur à ce plan. Si le plan est défini autrement (par exemple par trois points situés sur les arètes), il va falloir, au préalable, en rechercher l'intersection avec le plan de base pour se ramener à notre situation.

Soit donc un parallélipipède ABCDA'B'C'D' et un plan défini par un point Z de l'arète AA' et une droite XY de la base ABCD (X a été pris sur la droite contenant l'arète CD et Y sur la droite contenant la diagonale BD).



Dans le dessin donné par la figure 1, certains segments et les droites où se trouvent les points X, Y et Z ont été tracés en utilisant l'option pointillé. Il faut cependant savoir qu'en superposant des éléments avec des tracés différents, c'est le tracé effectué en dernier lieu qui est apparent.

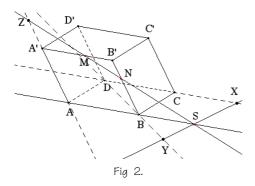
Expliquons-le en prenant par exemple le segment AA' et la droite passant par les deux points A et A'. Pour avoir le segment AA' en trait plein, il faut, soit tracer d'abord la droite en pointillé puis le segment en plein sur la droite, soit, s'il ont été tracés dans l'autre ordre, de cacher le segment puis le redessiner en dernier lieu.

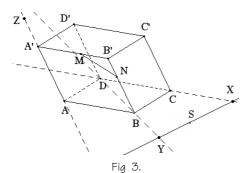
Adresse de l'auteur: Jean-Paul Houben, Rue de l'Eglise, 78, 1301 - Bierges

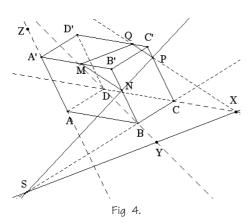
courriel: Houben@anma.ucl.ac.be

Première section

Recherchons l'intersection du plan de section avec la face ABB'A'.







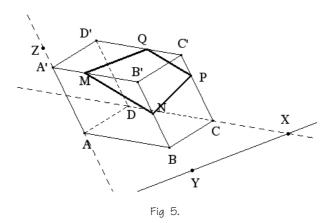
La droite AB de la face rencontre la droite XY au point S. La droite définie par S et Z est l'intersection recherchée. Le point commun de cette droite avec le segment A'B' donne le point N comme point commun de cette même droite avec le segment B'B.

On termine cette partie du dessin en traçant le segment [MN] puis, en cachant les constructions, on obtient la figure 3. En prenant maintenant pour nouveau point S, l'intersection de BC avec XY, on trouve le point P comme point commun des

droites NS et CC'.

Comme nous traitons section dans นท parallélipipède (où l'intersection d'un plan avec les faces opposées sont droites parallèles) nous pouvons terminer la construction de la section par le tracé de parallèles (PQ//MN). Il n'en aurait pas été de même si le solide avait été une pyramide. On a alors l'image de la figure 4.

On peut y cacher les constructions et mettre la section en traits épais. Ce qui donne la figure finale. La section est un trapèze donné par la figure 5.



Deuxième section

Revenons à la figure 3. Le segment de section MN qu'on y avait obtenu correspond à la position du point Z au dessus de B. Mais, si l'on déplace ce point Z pour le mettre entre A et B, le point M de A'B' disparaît et il faut maintenant prendre l'intersection de la droite avec le segment AA' Nous l'appelerons encore M.

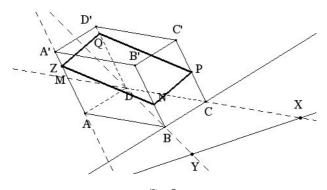


Fig 6.

Mais, dans notre cas particulier, il sera confondu avec le point Z. Construisons le segment MN et cachons à nouveau la droite ZP. Ache-

Cabri-Géomètre

vons la section comme précédemment. Ce qui donne le parallélogramme de la figure 6.

Troisième section

Mais notre construction n'est pas encore terminée, loin de là. En effet, il nous faut la section dans tous les cas de figure, comme il a été fait lorsque le poin t M était extérieur ou intérieur au segment [AA']. Il faut réaliser une autre construction lorsque le point Q devient extérieur au segment [DD']. On obtient alors en déplaçant un peu le point Z une autre section : MNPQR. C'est maintenant un pentagone donné dans la figure T:

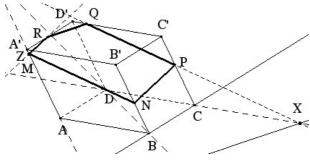


Fig 7.

Si le point Z se déplace encore, nous aurons la figure 8 où la section est un parallélogramme.

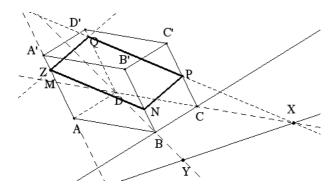


Fig 8.

Autres sections

Mais notre travail est loin d'être fini. Il faut tout recommencer lorsqu'on déplace la droite XY dans le plan de la base. Si la droite XY rencontre directement les cotés de la base ABCD, nous aurons d'autres cas de sections. En voici quelques figures finales sans entrer dans le détail des constructions. Ce travail laborieux est laissé au lecteur.

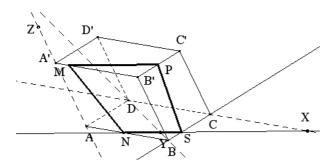


Fig 9.

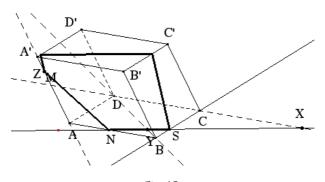


Fig 10.

Ces dernières images (figures 9 à 11) ont été imprimées à partir du fichier final obtenu avec Cabri-Géomètre.

Ce fichier : « SECTION.FIG » qui permet d'obtenir toutes les sections dans un parallélipipède se trouve sur le site de la SBPMef :

Cabri-Géomètre

Dans l'élaboration du fichier SECTION.FIG, il a fallu par deux fois utiliser la technique des constructions impossibles. En effet des points ont du y être dédoublés. On peut découvrir les situations en regardant les cachés.

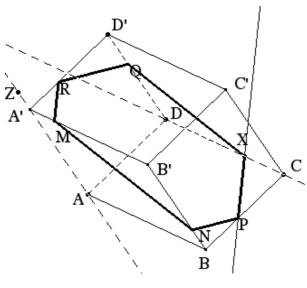


Fig 11.

- Une première fois, en fonction de la position du point X par rapport à C. Soit il est devant le point C et l'intersection utile est le segment PQ. Soit il est derrière le point C et le segment est XQ. Le point X a été dédoublé lorsque le point X est un point du segment [CD] pour pouvoir tracer la solution dans cette configuration.
- Une seconde fois, en fonction de la position de Y par rapport à B. Suivant que Y est réellement sur la diagonale ou est en avant sur la figure, la section dans la face A'ABB' utilise ou n'utilise pas directement le point d'intersection de AB avec la trace du plan de section dans la base. Avec une demi-droite issue de B et passant par Y, on définit le point de rencontre avec la droite passant par M et R de la base supérieure. Ce point va permettre de dédoubler le point R pour tracer correctement MR.

Dans un prochain article, nous verrons comment faire l'éclaté d'une section dans un solide coupé par un plan.

Dans nos classes

Y. Noël-Roch

Des provocations ...

1. Des fractions.

Pour calculer $\frac{5}{4} - \frac{9}{12}$, nous sommes conditionnés à effectuer $\frac{15}{12} - \frac{9}{12}$ pour obtenir $\frac{1}{2}$.

C'est aussi
$$(1 + \frac{1}{4}) - (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

Mais on a également $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{9-5}{12-4}$ de même que $\frac{1}{2} = \frac{-4}{-8} = \frac{5-9}{4-12}$.

Peut-on en déduire que $\frac{5}{4} - \frac{9}{12} = \frac{5-9}{4-12} = \frac{9-5}{12-4} = \frac{9}{12} - \frac{5}{4}$?

2. Des primitives.

Pour "calculer" $\int \sin x \cos x dx$, nous procédons comme suit :

$$\int \sin x \, d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2}$$

ou encore

$$\int \cos x \, d(-\cos x) = -\frac{\cos^2 x}{2}$$

Peut-on en déduire que $\sin^2 x = -\cos^2 x$ et donc $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$...et donc 1 = 0?

3. Du calcul littéral.

 $a^2-a^2=a(a-a)$ et $a^2-a^2=(a+a)(a-a)$ De ces deux égalités, on déduit a(a-a)=(a+a)(a-a). Donc, après simplification a=2a et, après nouvelle simplification 1=2...0=1.

4. Ces fractions maudites! $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

a, b et c désignant des chiffres et ab le nombre de deux chiffres égal à $10 \times a + b$, a-t-on $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$

Les publications de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

- Les brochures signalées par * sont de publication récente.
- Le prix « adhérent » concerne l'A.P.M.E.P. et la S.B.P.M.ef.



Ν°	Titres des brochures	Prix, en € ,	
	[PORT : cf. bas du tableau]	san	s port
	Collège	public	adhérent
*503	La jubilation en mathématiques		
	Fichiers Evariste : 480 problèmes tirés de différents tour-	4.90	3.80
	nois et rallyes mathématiques		
98/132		21,35	15,25
1	EXCEL-Classe, CD-Rom (Version individuelle)	16.75	16.75
55	Géométrie expérimentale avec CABRI	13.40	12.65
119	Jeux 5 (Des activités mathématiques au collège)		
	Série EVAPM : Evaluation 6 ^e (première chez nous!)	11	7.60
112/118	2 fascicules : Analyses et résultats & Dossier professeur	17.50	12.15
352	Tableur et mathématiques au Collège	12,20	9,90
451	Concours Australien de mathématiques	15,85	11
250/	Panoramas de compétitions mathématiques		
*251	Panoramath 96 & Panoramath 2	25,90	12,50
	Lycée		
*138	Statistiques en classe de seconde	8.70	6
*120	Classeur informatisé de documents math 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	45,95	30,50
	Version 26 installations, port compris	91,45	61
	CD-Rom de mise à jour	10,65	7,60
90/	Série EVAPM : Evaluation 1 ^{re} (cinquième chez nous!)		
107/108	3 fascicules	21.35	14.50
*305	GALION-Thèmes Seconde : 10 thèmes programme 2000	11,45	9,90
*450	MathÉvasion : 46 activités en bandes dessinées	7,60	5,35
	Avec CABRI, faire de la géométrie en jouant		
124/125	2 tomes déjà paru	17,55	10,65
*129	Arithmétique : des résultats classiques par des moyens	9.90	6.85
	élémentaires		
121	Maths en scène : Commentaires des 22 thèmes de l'expo	11,00	7,60
	« Mathématiques 2000 » utilisable indépendamment		
402	Jeux du Scientific American	20.60	14.50
PORT	(prix indicatif) : 1 brochure : 2,50 €; 2 ou 3 brochu	ires : 4	1,00 € <i>e</i> t
	1 7 . GEO E		

au-dessus de 3 : 6,50 €

C. Festraets

Facile

Problème nº 286 de Mathématique et Pédagogie nº 144.

Résoudre l'équation suivante

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(x - z)$$

où x, y, z sont des entiers.

Solution de J. RASSE de Méan

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} - 2x - 2z = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^{2} + (z - 1)^{2} + y^{2} - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)^{2} + (z - 1)^{2} + y^{2} = 2$$

Puisque x, y et z sont des entiers, il existe trois possibilités.

- 1. $(x-1)^2 = 1$ d'où x = 2 ou x = 0, $y^2 = 0$ d'où y = 0 et $(z-1)^2 = 1$ d'où z = 2 ou z = 0.
 - Les triples suivants sont solutions : (2, 0, 2), (2, 0, 0), (0, 0, 2) et (0, 0, 0).
- 2. $(x-1)^2 = 1$ d'où x = 2 ou x = 0, $y^2 = 1$ d'où y = 1 ou y = -1 et $(z-1)^2 = 0$ d'où z = 1.
 - Les triples suivants sont solutions : (2, 1, 1), (2, -1, 1), (0, 1, 1) et (0, -1, 1).
- 3. $(x-1)^2 = 0$ d'où x = 1, $y^2 = 1$ d'où y = 1 et $(z-1)^2 = 1$ d'où z = 2 ou z = 0.

Les triples suivants sont solutions : (1, 1, 2), (1, -1, 2), (1, 1, 0) et (1, -1, 0).

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare, P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, J. FINOULST de Diepenbeek, A. PATERNOTTRE de Boussu,

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse courriel : hamoircl@brutele.be

J. SEGERS de Liège, M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles et C. VILLERS de Hyon.

Un, deux, trois

Problème nº 287 de Mathématique et Pédagogie nº 144.

Soient a, b, c, d des réels strictement positifs. Démontrer que

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}$$

Solution de P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte

L'inégalité désirée est homogène, on peut supposer que a+b+c+d=1. Comme la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0; +\infty[$, on a alors :

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c}$$

$$= af(b+2c+3d) + bf(c+2d+3a) + cf(d+2a+3b) + df(a+2b+3c)$$

$$\geq f(a(b+2c+3d) + b(c+2d+3a) + c(d+2a+3b) + d(a+2b+3c))$$

$$= \frac{1}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Il suffit donc de prouver que $ab+ac+ad+bc+bd+cd\leqslant \frac{3}{8}$ (1). Or $2ab\leqslant a^2+b^2$, avec égalité si et seulement si a=b. En sommant les inégalités analogues, il vient : $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$. Mais alors :

$$1 = (a+b+c+d)^{2}$$

$$= a^{2} + b^{2} + c^{2} + d^{2} + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

$$\geq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

$$= \frac{8}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

D'où l'on déduit immédiatement (1) et la conclusion. Notons que l'égalité a lieu si et seulement si a=b=c=d.

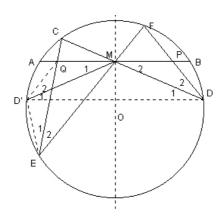
Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare et de J. FINOULST de Diepenbeek.

Cordes

Problème nº 288 de Mathématique et Pédagogie nº 144.

Dans un cercle de centre O, on trace une corde [AB] de milieu M. Par M, on mène deux autres cordes [CD] et [EF]. DF coupe AB en P et CE coupe AB en Q. Démontrer que |MP| = |MQ|.

Solution de C.VILLERS de Hyon



Le diamètre MO est axe de symétrie du cercle (O, |OA|). Exploitons cette symétrie S.

On a B = S(A). Soit D' = S(D). Donc $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$.

 $\widehat{M_1} = \widehat{D'_1}$ (angles alternes-internes formés par deux parallèles et une sécante).

 $\widehat{D}'_1 = \widehat{D}_1$ (symétrie S).

 $\widehat{D_1} = \widehat{E_1}$ (angles inscrits interceptant le même arc).

Donc $\widehat{M_1}=\widehat{E_1}$, le quadrilatère croisé MEQD' est inscriptible et $\widehat{D_2'}=\widehat{E_2}.$

Or, $\widehat{E_2}=\widehat{D_2}$ (angles inscrits interceptant le même arc du cercle initial).

Donc $\widehat{D}_2' = \widehat{D}_2$.

Les triangles MQD' et MPD ont un côté de même longueur (|MD'| = |MD| par S) compris entre angles de même amplitude; ils sont isométriques. Dès lors |MQ| = |MP|.

 $\ensuremath{\mathsf{NB}}$: cette solution est à adapter en cas de tracés différents des cordes.

J'ai reçu beaucoup de **bonnes solutions**, celles de J.ANSEEUW de Roeselare, P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, J. FINOULST de Diepenbeek, J. OOMS de Chimay, A. PATERNOTTRE de Boussu, J.G. SEGERS de Liège et R.SOMVILLE de Fontaine-l'Evêque.

Les solutions des problèmes suivants doivent me parvenir avant le 1^{er} novembre 2004.

295. En librairie

Pendant l'année 2003, dans cette librairie ouverte 7 jours par semaine, on a vendu au moins un livre chaque jour, et au total 600 livres sur l'année. Montrer qu'il y a eu une période de jours consécutifs pendant laquelle on a vendu exactement 129 livres.

296. Pas de solution

Démontrer qu'il n'existe pas d'entiers a, b, c, d non tous nuls vérifiant l'équation

$$a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0$$

297. Impuissance

Démontrer que $2^p + 3^p$, où p désigne un nombre premier, n'est une puissance d'un entier pour aucune valeur de p.

Transport de bagage en cabine

Comment faire pour emballer un ou des objets de manière que la somme de ces TROIS dimensions ne dépasse pas 115 cm? Après les robinets qui fuient et les intérêts bancaires, c'est le nouveau problème à la mode : en effet cette « très réaliste » réglementation est en usage dans les avions d'un tour-opérateur qui sévit dans notre pays.

Quel serait la réaction des responsables (?) si un voyageur emporte une canne à pêche de 1,13 m de long et de 2 cm de diamètre? Et un tableau de maître de $57 \, \mathrm{cm} \times 57 \, \mathrm{cm} \times 10 \, \mathrm{cm}$, saura-t-il le caser dans une loge au-dessus de sa tête?

Avez-vous lu ce règlement avant de faire vos bagages? Car si c'est à l'enregistrement des bagages qu'on s'en aperçoit, c'est un peu tard pour changer le format...

De plus, avez-vous déjà vu une employée mesurer les trois dimensions? Et en faire la somme, avec ou sans machine à calculer?

Robert Haine.

C. Festraets

Voici les solutions des six problèmes proposés à l'Olympiade Mathématique Internationale de 2003.

Trois de nos élèves participant à cette olympiade ont obtenu le maximum de points à certaines questions, ce sont leurs solutions que je vous propose.

Problème 1

Soit A un sous-ensemble de l'ensemble $S=\{1,2,\ldots,1\,000\,000\}$ ayant exactement 101 éléments. Montrer qu'il existe des nombres t_1,t_2,\ldots,t_{100} dans S, tels que les ensembles :

$$A_j = \{x + t_j | x \in A\}$$
 pour $j = 1, 2, ..., 100$

soient deux à deux disjoints.

Solution de Antony TRINH

Notons a_1 , a_2 , ..., a_{101} les 101 éléments de A, et posons

$$E_n = \{t_n + a_i - a_j | 1 \le i, j \le 101\}$$
 pour $n = 1, 2, ..., 99$

Il est clair que chaque ensemble E_n contient au plus $100\cdot 101+1$ éléments $(100\cdot 101$ si $i\neq j$ et 1 si i=j).

On aborde à présent une manière de construire les cent nombres $t_1,\ t_2,\ \dots,t_{100}.$

Commençons par choisir dans S un t_1 quelconque; il y a 10^6 choix possibles. Ensuite, pour chaque k entre 2 et 100, le choix de t_k est restreint à l'en-

semble $S\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, puisqu'il faut que $\forall i, j (1 \leq i, j \leq 101) : a_i + t_n \neq a_j + t_k$ pour chaque n entre 1 et k-1.

Ainsi lorsque k=100, t_{100} doit être choisi dans $S\setminus\bigcup_{n=1}^{99}E_n$.

Comme $S \setminus \bigcup_{n=1}^{99} E_n$ comporte au moins $10^6 - 99 \cdot (100 \cdot 101 + 1) = 1$ élément, il s'ensuit qu'il est toujours possible de trouver dans S des nombres $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ vérifiant la propriété requise.

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse courriel : hamoircl@brutele.be

Problème 2

Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (a,b) tels que :

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

soit un entier strictement positif.

Solution de Cédric TROESSAERT

On a:

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} > 0 \Leftrightarrow 2ab^2 - b^3 + 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow 2ab^2 - b^3 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow 2a - b \geqslant 0$$

Deux cas se présentent :

-2a = b

qui donne une suite de solutions car $(2a) \cdot (2a)^2 - (2a)^3 + 1 = 1$ est un diviseur de a^2 ; donc (a, 2a) est solution $\forall a > 0$.

-2a > b

On a $b^2(2a-b)+1 \le a^2$, d'où $b^2+1 \le a^2$, et de là b < a ou encore 2a-b > a.

On a alors $b^2(2a - b) + 1 > b^2 \cdot a + 1$, or $b^2(2a - b) + 1 \le a^2$, d'où $b^2 \cdot a < a^2$ et $b^2 < a$.

Si on prend b=1, on a $2a|a^2$ et donc a est pair. Cela donne une suite de solutions car pour a=2n, $2\cdot 2n\cdot 1^2-1^3+1=4n$ est un diviseur de $4n^2$.

Donc (2n,1) est solution $\forall n > 0$.

On peut prendre b > 1.

De l'énoncé, on tire :

$$2ab^2 - b^3 + 1|(2a^2b^2 - a(2ab^2 - b^3 + 1)) = ab^3 - a$$

et ensuite

$$2ab^{2} - b^{3} + 1|(2(ab^{3} - a) - b(2ab^{2} - b^{3} + 1)) = b^{4} - 2a - b$$

Trois cas sont possibles.

1.
$$b^4 - 2a - b < 0$$

Alors $2ab^2 - b^3 + 1 \le 2a + b - b^4$, ou encore $2a(b^2 - 1) \le b^3 - b^4 + b - 1 = (b^3 - 1)(1 - b)$, ce qui est impossible car a > 0 et b > 1, donc le premier membre est positif tandis que le second est négatif.

2.
$$b^4 - 2a - b > 0$$

Alors $2ab^2 - b^3 + 1 \le b^4 - 2a - b$, ou encore $2a(b^2 + 1) \le b^4 + b^3 - b - 1 = (b^3 - 1)(b + 1) = (b^2 - 1)(b^2 + b + 1)$, d'où $2a < b^2 + b + 1$, ce qui est impossible car 2a > b.

3.
$$b^4 - 2a - b = 0$$

Alors $a = \frac{1}{2}b(b^3 - 1)$, et en remplaçant dans l'énoncé, il vient

$$\frac{\frac{1}{4}b^2(b^3-1)^2}{b(b^3-1)b^2-b^3+1} = \frac{b^2}{4}\frac{(b^3-1)^2}{b^6-2b^3+1} = \frac{b^2}{4}$$

qui doit être entier, donc b = 2n et $a = n(8n^2 + 1) \forall n > 0$.

Conclusion : on a trois familles de solutions, (a, 2a), (2a, 1), $(a(8a^3-1),2a)$ avec $a\in\mathbb{N}_0$.

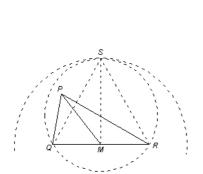
Problème 3

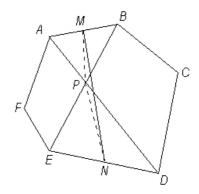
On se donne un hexagone convexe dans lesquel deux côtés opposés quelconques ont la propriété suivante : la distance entre leurs milieux est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ fois la somme de leurs longueurs. Montrer que tous les angles de cet hexagone sont égaux.

(Un hexagone convexe ABCDEF a trois paires de côtés opposés : AB et DE, BC et EF, CD et FA.)

Solution

1. Considérons un triangle PQR tel que $\overline{QPR} \geqslant 60^\circ$. Le point P est situé à l'intérieur du cercle circonscrit au triangle équilatéral SQR ou sur ce cercle, donc à l'intérieur du cercle de centre M et de rayon |MS| (ou en S) et on a $|PM| \leqslant |SM| = \frac{\sqrt{3}}{2}|QR|$, l'égalité ayant lieu si et seulement si P = S, si et seulement si le triangle PQR est équilatéral.





2. Soit ABCDEF l'hexagone ayant la propriété donnée dans l'énoncé. Les diagonales AD, BE et CF se coupent en trois points déterminant un triangle (éventuellement dégénéré). L'un au moins des angles de ce triangle est supérieur ou égal à 60°.

Supposons que AD et BE se coupent en P tel que $\widehat{APB} = \widehat{DPE} \geqslant 60^\circ$. Si M et N désignent les mileux respectifs de [AB] et [DE], on a par hypothèse $|MN| = \frac{\sqrt{3}}{2}(|AB| + |DE|)$ et en vertu du 1), $|MP| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$ et $|NP| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}|ED|$. Or $|MP| + |NP| \geqslant |MN|$. D'où P doit appartenir à MN et les triangles ABP et DEP doivent être équilatéraux.

Un des deux autre angles du triangle déterminé par les trois diagonales est supérieur ou égal à 60°.

Supposons que AD et CF se coupent en Q tel que $\widehat{AQF} = \widehat{CQD} \geqslant 60^\circ$. Le même raisonnement montre que les triangles AQF et CQD sont équilatéraux.

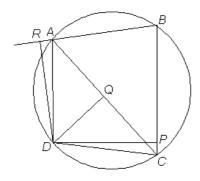
Un dernier angle du triangle déterminé par les diagonales est supérieur ou égal à 60° , c'est celui formé par les diagonales BE et CF. Si ces diagonales se coupent en R, le même raisonnement implique que les triangles BCR et EFR sont équilatéraux.

Les angles intérieurs de l'hexagone sont donc tous égaux à 120°.

Problème 4

ABCD est un quadrilatère convexe, inscriptible. Soient P, Q et R les pieds des perpendiculaires issues de D, respectivement, sur les côtés BC, CA et AB. Montrer que PQ = QR si et seulement si les bissectrices des angles \widehat{ABC} et \widehat{ADC} se coupent sur AC.

Solution de Thimothée MARQUIS



- 1. QDCP est cyclique car $\widehat{DQC} + \widehat{QPC} = 180^{\circ}$ (1)

 ARQD est cyclique car $\widehat{ARD} = \widehat{AQD} = 90^{\circ}$,

 d'où $\widehat{DRQ} = \widehat{DAC}$ (2)

 et $\widehat{RDQ} = \widehat{RAQ} = \widehat{BAC}$ (3)

 De plus, $\widehat{PDQ} = \widehat{PDR} \widehat{QDR} = 180^{\circ} \widehat{B} \widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ (4)
- 2. Par les relations en sinus dans les triangles PDQ et RDQ, on obtient $\frac{PQ}{\sin\widehat{PDQ}} = \frac{DQ}{\sin\widehat{DPQ}}, \text{ d'où } \frac{PQ}{\sin\widehat{BCA}} = \frac{DQ}{\sin\widehat{DCA}} \text{ (par (1) et (4))}$ $\frac{RQ}{\sin\widehat{RDQ}} = \frac{DQ}{\sin\widehat{DRQ}}, \text{ d'où } \frac{RQ}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{DQ}{\sin\widehat{DAC}}$ et en calculant le quotient membre à membre de ces deux égalités, on obtient $\frac{PQ}{\sin\widehat{BCA}} = \frac{\widehat{DCA}}{\sin\widehat{DCA}}$

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{\sin \widehat{BCA}}{\sin \widehat{BAC}} \cdot \frac{\sin \widehat{DCA}}{\sin \widehat{DCA}}$$
(5)

- 3. Par les relations en sinus dans les triangles ABC et DAC, on obtient $\frac{AB}{\sin\widehat{BCA}} = \frac{BC}{\sin\widehat{BAC}} \text{ et } \frac{DC}{\sin\widehat{DAC}} = \frac{DA}{\sin\widehat{DCA}}$ $d'où \frac{\sin\widehat{BCA}}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{AB}{BC} \text{ et } \frac{\sin\widehat{DCA}}{\sin\widehat{DAC}} = \frac{AD}{DC}$ $ce qui donne dans la relation (5) \frac{PQ}{QR} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{DC}{AD}$
- 4. Si |PQ| = |QR|, alors $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

Soient T et T'les points d'intersection de AC avec les bissectrices des angles \widehat{B} et \widehat{D} respectivement.

Par le théorème de la bissectrice intérieure dans les triangles ABC et ACD, on a $\frac{AT}{TC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{AT'}{T'C}$, d'où T = T'.

5. Si les bissectrices des angles \widehat{B} et \widehat{D} rencontrent AC au même point T, on a: $\frac{AT}{TC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}, \text{ d'où } \frac{PQ}{QR} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{DC}{AD} = 1 \text{ et } |PQ| = |QR|.$

Problème 5

Soit n un entier strictement positif et $x_1, x_2, ..., x_n$ des nombres réels tels que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.

(a) Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_{i}-x_{j}|\right)^{2} \leqslant \frac{2(n^{2}-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{i}-x_{j})^{2}$$

(b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si x_1, x_2, \ldots, x_n est une suite arithmétique.

Solution

Remarque 1: si on restreint les sommes à i < j, les sommes sont divisées par 2; dans le membre de gauche, la somme est élevée au carré, ce qui n'est pas le cas dans le membre de droite, l'inégalité à démontrer de vient alors

$$\left(\sum_{i < j} (x_j - x_i)\right)^2 \leqslant \frac{n^2 - 1}{3} \sum_{i < j} (x_i - x_j)^2$$

Remarque 2: Si on ajoute un réel r à chacun des x_i , les deux membres de l'inégalité restent invariants, on peut donc choisir r tel que la somme de tous les x_i soit nulle.

1. Considérons le premier membre de l'inégalité à démontrer et calculons la somme de tous les (x_j-x_i) avec i< j. x_1 apparaît dans (n-1) termes avec le signe -, x_2 apparaît dans un terme avec le signe + et dans (n-2) termes avec le signe -, x_3 apparaît dans 2 termes avec le signe + et dans (n-3) termes avec le signe -, et ainsi de suite. Nous obtenons donc

$$\sum_{i < j} (x_j - x_i) = (1 - n)x_1 + (3 - n)x_2 + (5 - n)x_3 + \dots + ((2n - 1) - n)x_n = \sum_{i = 1}^{n} (2i - 1 - n)x_i$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{i < j} (x_j - x_i)\right)^2 = \left(\sum_{i = 1}^n (2i - 1 - n)x_i\right)^2 \leqslant \sum_{i = 1}^n (2i - 1 - n)^2 \sum_{i = 1}^n x_i^2$$

Calculons le premier facteur :

$$\begin{split} \sum_{i=1}^{n} (2i - 1 - n)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (4i^2 + 1 + n^2 - 4i - 4in + 2n) \\ &= 4 \sum_{i=1}^{n} i^2 + n + n^3 - 4 \sum_{i=1}^{n} i - 4n \sum_{i=1}^{n} i + 2n^2 \\ &= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n + n^3 - 4 \frac{n(n+1)}{2} - 4n \frac{n(n+1)}{2} + 2n^2 \\ &= \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) - 2(1+n)n(n+1) + n(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(4n+2-6-6n+3n+3) \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n-1) \end{split}$$

ďoù

$$\left(\sum_{i < j} (x_j - x_i)\right)^2 \leqslant \frac{1}{3} n(n+1)(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2$$

2. Examinons à présent le second membre de l'inégalité à démontrer.

$$\sum_{i < j} (x_j - x_i)^2 = (n - 1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i < j} x_i x_j$$
$$= n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$
$$= n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

ď'où

$$\frac{n^2 - 1}{3} \sum_{i < i} (x_i - x_j)^2 = \frac{n(n^2 - 1)}{3} \sum_{i = 1}^n x_i^2$$

Et finalement, on a bien

$$\left(\sum_{i < j} (x_j - x_i)\right)^2 \leqslant \frac{n^2 - 1}{3} \sum_{i < j} (x_i - x_j)^2$$

S'il y a égalité, x_i est proportionnel à 2i-n-1, pour tout i. Donc il existe un réel k tel que $x_i=k(2i-n-1)$ et $x_{i+1}=k(2i+2-n-1)$, ce qui donne $x_{i+1}-x_i=2k$ et les x_i forment une suite arithmétique. Réciproquement, si les x_i forment une suite arithmétique de raison 2d, alors $x_i=x_1+(n-1)2d$ et il suffit de choisir $x_1=d(1-n)$ pour obtenir $x_i=d(2i-n-1)$, ce qui fournit l'égalité (remarquons que l'on a bien $\sum_{i=1}^n x_i=0$).

Problème 6

Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe un nombre premier q tel que pour tout entier n, le nombre n^p-p n'est pas divisible par q.

Solution

Si p=2, alors on choisit q=3 car, quel que soit le naturel n, $n^2-2\not\equiv O(\text{mod}3)$. Si p est impair, soit $N=\frac{p^p-1}{p-1}=1+p+p^2+\ldots+p^{p-1}$.

 $N\equiv (1+p)(\bmod p^2)$, donc il existe au moins un diviseur premier q de N tel que $q\not\equiv 1(\bmod p^2)$. Démontrons que q est le nombre cherché.

Supposons qu'il existe un naturel n non nul tel que $n^p - p \equiv O(\text{mod } q)$, ou encore $n^p \equiv p(\text{mod } q)$.

On a $p \neq q$ car p ne divise pas N, donc $n^p \not\equiv O(\bmod{q})$ et $n \not\equiv O(\bmod{q})$; appliquons le petit théorème de FERMAT : $n^{q-1} \equiv 1(\bmod{q})$.

D'autre part, $n^{p^2} \equiv p^p \pmod{q} \equiv 1 \pmod{q}$ car p^p-1 est divisible par q. D'où $n^{p^2} \equiv n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$.

On sait que $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, donc le pgcd de p^2 et q-1 est p ou 1 et on a soit $n^p \equiv 1 \pmod{q}$, soit $n \equiv 1 \pmod{q}$.

Dans le premier cas, comme $n^p \equiv p \pmod{q}$, il faut que $p \equiv 1 \pmod{q}$, mais alors $N \equiv \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_p \equiv p \equiv 1 \pmod{q}$, ce qui est faux car q est $p \in P$ termes

un diviseur de N.

Dans le second cas, $n^p-p\equiv 1-p\equiv O(\text{mod }q)$ et nous venons de voir que $p\equiv 1(\text{mod }q)$ conduit à une impossibilité.

Il n'existe donc aucun naturel n tel que $n^p - p \equiv O(\text{mod } q)$.

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Septembre 2003)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent Mathématique et Pédagogie, SBPM-Infor et les deux Math-Jeunes.

Belgique:

- Cotisation ordinaire : 20 €

 Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 28,50 €

Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : $40 \in (\text{non PRIOR})$, $53 \in (\text{PRIOR})$ Autres pays : $47 \in (\text{non PRIOR})$, $70 \in (\text{PRIOR})$

Abonnement à Mathématique et Pédagogie

Belgique: 26 €.

Europe : $37 \in (\text{non PRIOR})$, $43 \in (\text{PRIOR})$. Autres pays : $39 \in (\text{non PRIOR})$, $52 \in (\text{PRIOR})$.

Anciens numéros:

Avant 2001 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.

Années 2002 ou 2003 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Abonnement à Math-Jeunes ou Math-Jeunes Junior

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

• Abonnements groupés à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 3.80 €. Europe : 6 € (non PRIOR), 7.80 € (PRIOR).

Autres pays : $6,60 \in (\text{non PRIOR}), 10 \in (\text{PRIOR}).$

• Abonnements groupés <u>aux deux</u> revues : (6 numéros)

Belgique : 6,60 €. Europe : 11 € (non PRIOR), 14 € (PRIOR).

Autres pays : $12 \in (\text{non PRIOR})$, $18 \in (\text{PRIOR})$.

Le coin du trésorier

Abonnements individuels.

• Abonnements à <u>une</u> des revues : (3 numéros)

Belgique : 5 €. Europe (1) : 11,50 € (non PRIOR), 15,80 € (PRIOR).

Autres pays : $12,75 \in (\text{non PRIOR}), 20,40 \in (\text{PRIOR}).$

• Abonnements aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 10 €. Europe : 16,50 € (non PRIOR), 20,50 € (PRIOR).

Autres pays : $20 \in (\text{non PRIOR})$, $25 \in (\text{PRIOR})$.

Anciens numéros:

Avant 2001-2002 : 0,25 \in /N° + frais d'expédition. Année 2002 ou 2003 : 0,50 \in /N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 0,50 \in , Europe (1) : 2,50 \in , Autres pays : 3 \in .

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 43 \in . Ils recevront le Bulletin de l'APMEP, le BGV (Bulletin à Grande Vitesse) et PLOT.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP; ils bénéficient du prix « adhérents »..

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique: Compte 000-0728014-29 de la SBPMef.

Si vous habitez en France: Compte CCP Lille 10 036 48 S de la SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :

CCP BELGIQUE: IBAN BE26 0000 7280 1429 BIC BPOTBEB1

ou CCP LILLE : IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8502 683 BIC : PSSTFRPPLIL

Le coin du trésorier

	Prix		Prix		Frais
	plein		réduit	;	d'expédition
Séries RENOVER					
Série 1 (nº 12)	1 €	€∣	/		T1
Série 2 (nº 7 à nº 11 et nº 13)	5 +	€	/		T2
Série 3 (nº 14)	5 €	€∣	/		T2
Les 3 séries	7,50 ŧ	€	/		T2
Dossiers d'exploration didactique					
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 +	€∣	1,20 €	€	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 +	€∣	1,20 €	€	T1
Dossier 6 (Statistiques)	7,40 ŧ	€∣	6 €	€	voir ci-dessous
Dossier 7 (Vers les infiniment petits)					
Simone Trompler et Guy Noël	6 €	€∣			T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie					
plane dans les premières années de					
l'enseignement secondaire)					
Claude Villers et alii	9 ŧ	€∣			T3
Jacques Bair, Mathématique et Sport	5 +	€	3,70 €	(II)	T1
François Jongmans					
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie,	12 ŧ	€∣	9,50 €	€	T2
G. Robert, CD-Rom, logiciels mathématiques	5 +	€	/		T1
Recueils de questions des OMB					
Tome 4	5 +	€			voir ci-dessous
Tome 5	6 €	€∣			voir ci-dessous
Tome 4 et 5	10 +	€			voir ci-dessous

Frais d'expédition en non PRIOR							
	Belgique	Europe	Autres pays				
Tarif 1	1,60 €	2,70 €	3,00 €				
Tarif 2	2,30 €	4,70 €	5,80 €				
Tarif 3	3,50 €	4,70 €	5,80 €				
Tarif 4	4,00 €	11,50 €	16,50 €				
Tarif 5	5,60 €	15,50 €	26,50 €				
Tarif 6	6,20 €	15,50 €	26,50 €				
Tarif 7	6,95 €	15,50 €	26,50 €				

Pour les expéditions en PRIOR, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.

Exemples de tarification pour commandes groupées

Tomes 4 ou 5 des questions OMB Dossier 6 (Statistiques)

1	ex.	T1
2	ou 3 ex.	T3
4	à 6 ex.	T4

7 à 10 ex.	T5
11 à 14 ex.	T6
15 à 17 <i>e</i> x.	T 7

)) :	انار	0	(000
	1	e×	ί.		T1
ĺ	2	à	4	ex.	T2
	5	à	9	ex.	T4

 عاد، ت		/		
10	à	13	ex.	T5
14	à	18	ex.	T6
19	οι	20	<i>e</i> x.	T7

place réservée à la publicité