Photo de couverture : Gerbert d'Aurillac fait connaître les chiffres indo-arabes.

Mathématique et Pédagogie

Sommaire

N° 148 Septembre-Octobre 2004

NOTE

* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be

* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.

* Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.

* Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (LaTeX2ε, Word) ; les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.
L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).

* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
Pour les articles :
Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.

* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.

* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Éditorial

C. VAN HOOSTE

Mesdames et Messieurs, chers collègues ([1]),

Tout d'abord, permettez-moi de saluer M. MICHEL WEBER, directeur de cabinet de la Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique, MARIE-DOMINIQUE SIMONET, et M. WILLY DEMEYER, bourgmestre de Liège. Nous les remercions vivement pour leur présence parmi nous et le soutien moral qu'ils nous apportent de cette manière.

Ainsi que nous le souhaitions depuis quelques temps, le congrès de la SBPMef a été reconnu cette année par l'Institut de la Formation en cours de Carrière (IFC) comme vecteur de formation continuée des enseignants. Il est vrai que notre congrès annuel est organisé de manière optimale, qu'il offre un choix de sujets tellement large qu'il peut satisfaire aux exigences de tous et qu'il attire de ce fait beaucoup de professeurs de mathématique.

Dans la foulée de cette reconnaissance, mais surtout avec la volonté de s'ouvrir de plus en plus et avec le désir de renforcer la communication entre collègues de l'enseignement primaire et de l'enseignement secondaire, nous accueillons à ce congrès nos collègues instituteurs. Plusieurs conférences et une journée Cuisenaire leur sont dévolus ; j'espère qu'ils y trouveront leur compte. En tout cas, je leur souhaite un bon congrès.

En outre, nous espérons naturellement tous que les contacts établis à l'occasion de ces journées ne resteront pas sans lendemain et que des enseignants de l'école fondamentale - j'insiste sur ce terme : fondamentale - viendront gonfler les rangs de la SBPMef, auquel cas nous pourrions avec leur aide prévoir dans notre revue « Mathématique et Pégagogie » des pages consacrées aux expériences pédagogiques vécues dans ce niveau d'enseignement. N'oublions pas en effet que nos élèves commencent à faire des mathématiques bien avant leur entrée dans le secondaire et que les premières notions qu'ils vont acquérir seront primordiales et orienteront peut-être déjà leur avenir vers les sciences et la mathématique si, bien sûr, leur instituteur leur en donne le goût. Dès lors, l'échange d'informations entre instituteurs et mathématiciens peut s'avérer efficace dans la construction du savoir mathématique de nos élèves.

([1]) Discours prononcé lors de la séance inaugurale du 30^{e} Congrès de la SBPMef au Collège St-Louis à Liège, le 24 août 2004.

À ce propos, nous lançons à la rentrée prochaine un concours destiné aux classes de 5e et 6e années de l'enseignement primaire : il s'agit du « **Rallye Mathématique Transalpin** ». Je vais tenter de vous expliquer de quoi il s'agit en quelques mots. Créé en Suisse romande en 1993, ce rallye est devenu aujourd'hui une grande confrontation internationale entre classes de Suisse, d'Italie, de France et du Luxembourg. Il a pour but de faire faire des mathématiques en résolvant des problèmes et il se déroule en quatre étapes : une épreuve d'essai en novembre-décembre, deux épreuves qualificatives, l'une en janvier-février et l'autre en mars-avril, et une finale en mai. Chaque épreuve comprend une série de problèmes à résoudre et consiste en un travail collectif de la classe, le temps imparti (50 minutes) ne permettant pas à un seul élève de résoudre l'ensemble des problèmes. À vous collègues instituteurs de prendre la balle au bond et de faire en sorte que ce rallye soit un succès aussi chez nous ([2]).

Il est une image qui colle de plus en plus à la peau des professeurs de mathématique et que je supporte de moins en moins car elle est de plus en plus injustifiée : nous sommes paraît-il des « buseurs », des obstacles sur le parcours scolaire de nos chères têtes blondes, brunes ou noires. Certains disent même que nous sommes le premier fléau dans l'échec scolaire.

Pour combattre cette étiquette, j'invoquerai essentiellement deux raisons majeures pour lesquelles l'échec en mathématique est relativement important par rapport à d'autres branches. La première de ces raisons est que le cours de mathématique est un cours à accumulation de savoirs et de savoir-faire ; la seconde est que l'école est de plus en plus désorganisée, mal adaptée au contexte social actuel.

En effet, le cours de mathématique ne commence pas au début d'une année scolaire pour se terminer à la fin de celle-ci. Non, pour assimiler les nouvelles notions de l'année numéro n, il faut avoir compris et retenu les principales matières enseignées les années numéro $n-1$, numéro $n-2$ jusqu'à l'année numéro 1. Je prends un exemple simple : comment voulez-vous qu'un élève de 6e année secondaire puisse élaborer une démonstration en géométrie s'il a « oublié » le théorème de Pythagore, celui de Thalès, s'il est incapable de reconnaître des triangles isométriques et des triangles semblables, s'il confond bissectrice, médiatrice, médiane et hauteur. Bien sûr rétorqueront certains, il suffit de pratiquer l'enseignement en spirale. Mais je réponds à cela en demandant que l'on nous donne le temps suffisant pour assurer une

([2]) Voir l'article de Ph. Skilbecq dans ce numéro de Mathématique et Pédagogie pour les détails pratiques de ce concours.

telle pédagogie de manière efficace et aussi en affirmant que, même dans ce cas, il n'est pas possible de constamment refaire ce qui a déjà été bien fait par les collègues des années précédentes.

En réalité - je parle de choses vécues et constatées chaque année - des nuées d'élèves passent de classe en classe sans s'être approprié correctement les matières enseignées en mathématique (et aussi dans d'autres cours). Beaucoup ont pour seul objectif le fameux cinquante pourcents. Mais, et excusez-moi de faire un peu de mathématique, d'année en année dans son parcours scolaire, l'élève ne connaît finalement que 50% de 50% de 50% de 50%, c'est-à-dire pas grand chose, de l'ensemble des connaissances requises pour comprendre ce que les professeurs vont devoir enseigner à un certain moment.

Cours à accumulation, les mathématiques le sont - hélas pour l'élève, mais profitable à cette science si riche - tout comme les cours de langues germaniques d'ailleurs. Ainsi, depuis plusieurs années déjà, j'observe un parallélisme quasi parfait entre le cours de première langue et celui de mathématique : échec dans l'un, échec dans l'autre, réussite dans l'un, réussite dans l'autre.

À côté de ceux-ci, beaucoup d'autres cours ne sont pas à accumulation, du moins pas de manière aussi importante qu'en mathématique et dans l'apprentissage d'une langue. Aussi ces cours ne génèrent pas autant d'échecs. C'est ce qui fait que, nous, professeurs de mathématique, recevons cette fâcheuse étiquette de « buseur ». Pourtant, parmi nous, il y a une très large majorité d'excellents pédagogues, des gens responsables, des personnes de qualité dont le souci est de bien faire comprendre ce qu'ils enseignent, dont le but est de faire réussir le plus grand nombre possible de leurs élèves, dont le sens du devoir va même jusqu'à participer à un congrès de trois jours pendant leurs congés scolaires. Mais, si l'élève ne peut pas comprendre le cours, s'il ne peut pas ou ne veut pas étudier, si sa motivation est ailleurs qu'à l'école, que peut faire de plus un brillant professeur pour cet élève ?

La démotivation, le manque de compétences de nos élèves ont des causes profondes qu'il serait injuste d'attribuer aux professeurs de mathématique. Celles-ci sont à trouver ailleurs.

Et effectivement, je pense de plus en plus que globalement l'enseignement est mal organisé, mal connu et mal maîtrisé par nos pouvoirs politiques.

Comment se fait-il qu'un nombre important d'élèves puisse aborder l'enseignement secondaire général sans pouvoir lire convenablement, sans pouvoir calculer correctement. Qu'attend-t-on alors de ces élèves ? Qu'attend-t-on des professeurs qui doivent s'en occuper ? Si l'élève ne maîtrise pas l'arithmétique élémentaire et les quelques notions simples de géométrie à son sortir de l'école fondamentale et si, de surcroît, il n'est pas apte à déchiffrer un texte simple, je doute fort qu'il puisse rectifier le tir dans l'enseignement secondaire général où d'autres objectifs sont à atteindre. Et puis le temps que prendrait le professeur dans sa classe pour tenter de remettre cet élève en selle serait quelque part du temps volé à d'autres élèves qui ont besoin que l'on s'occupe d'eux à temps plein pour avoir toutes les chances de poursuivre leur parcours scolaire sans encombre.

Plaçons-nous une fois encore au troisième degré de l'enseignement secondaire, là où l'effet cumulatif du cours devient le plus important et où l'échec scolaire en mathématique est aussi plus important. Est-il, par exemple, indispensable que la plupart des élèves soient confrontés à du calcul intégral ? Excepté ceux dont le but est de faire au-delà du secondaire des études scientifiques, je ne vois pas très bien ce que feront les autres élèves des quelques notions de « alculus » auxquelles ils ne comprennent pas grand chose et qui de toute façon ne leur servira à rien dans leur vie future. Réminiscence du caractère humaniste des études secondaires ou édification d'obstacles sur le chemin de la réussite de ces élèves, peu doués pour les mathématiques mais probablement attirés par d'autres muses ?

Franchement, après vous avoir livré ces quelques réflexions personnelles, je crois qu'il y a du travail au niveau de l'organisation des études pour redorer le blason de l'école en général et du cours de mathématique en particulier et redonner aux élèves le goût d'apprendre.

Je profite aujourd'hui d'un changement de ministre pour énumérer une série de points qui devraient, me semble-t-il, être mis à l'ordre du jour rapidement pour rendre l'enseignement plus efficace.

Malheureusement je déplore l'absence parmi nous de Madame la ministre de l'Enseignement Secondaire et de l'Enseignement fondamental, MARIE ARENA. Nous nous étions tellement habitués à la fidèle présence de son prédécesseur depuis quatre ans.

À mettre à l'ordre du jour, il y a d'abord la problématique (il s'agit en effet d'un ensemble de problèmes) de l'orientation des élèves. Celle-ci devrait être plus directive, devrait être basée sur les résultats obtenus à l'école primaire dans un premier temps, donc devrait faire confiance aux instituteurs, d'autant plus que ceux-ci enseignent plusieurs matières. Bien entendu, elle devrait aussi se fonder sur des tests d'évaluation extérieurs à l'école, posséder ses propres garde-fous et permettre des modifications d'orientation en fonction des résultats ultérieurs de l'élève. Une première orientation devrait être prévue à la sortie de l'enseignement fondamental et ensuite à la fin de chaque degré du secondaire.

Cette problématique de l'orientation des élèves pose celle des différents types d'enseignement. Il est urgent de revaloriser l'enseignement technique et l'enseignement professionnel. Que ceux-ci n'apparaissent plus comme la piste d'atterrissage des élèves qui sont éjectés de l'enseignement général, mais comme un choix guidé par les goûts de l'élève, par ses résultats et par les avis formulés par les enseignants. Mais, pour effacer la mauvaise image qui est la leur, il faut en repenser complètement les structures et peut-être même aller jusqu'à changer les dénominations de ces filières d'enseignement, dénominations trop usées.

Une autre priorité est le choix des matières à enseigner en fonction de l'orientation prise par l'élève. Ne pourrait-on pas dans les classes qui ont clairement fait leur deuil des mathématiques être plus pragmatique et se limiter à un cours de mathématiques du citoyen, c'est-à-dire de mathématiques « utilitaires »?

Dans l'enseignement fondamental et à tous les niveaux de l'enseignement secondaire, ne devrait-on pas renforcer l'apprentissage de la langue française? Il est navrant de constater que nombre d'élèves ne comprennent pas une question, un problème à résoudre ou un texte explicatif du seul fait qu'ils ne maîtrisent pas suffisamment le français. Ils écrivent des phrases dépourvues de sens ou sont carrément incapables de s'exprimer à l'aide de phrases complètes. Ils ignorent l'orthographe et n'accordent aucune importance aux mots de liaison tels que les conjonctions de coordination ou de subordination. D'ailleurs l'enquête Pisa 2000 l'a suffisamment démontré. Et, pour avoir été correcteur de l'enquête 2003 portant sur les mathématiques, je peux vous dire que beaucoup de questions n'ont pas été résolues par les élèves testés parce qu'ils n'ont pas pu décoder le texte précédant la question, question qui ne nécessitait souvent qu'une simple opération arithmétique (qu'ils avaient le loisir de pouvoir faire exécuter par une calculatrice). Je ne veux pas présager de notre classement sur le plan international mais il est clair que le résultat global de nos écoles en mathématique sera fortement influencé par la composante « utilisation de l'outil linguistique ».

Apprendre à décortiquer un texte, donner la capacité d'exprimer une idée oralement ou sur papier, enrichir le vocabulaire sont par conséquent des objectifs prioritaires pour lutter contre l'échec scolaire chez nos adolescents.

Voici encore d'autres points que notre ministre doit travailler au plus vite et que je livre pêle-mêle pour ne pas trop monopoliser le micro : créer des cours de rattrapage linguistique pour les élèves étrangers avant l'entrée dans l'enseignement secondaire afin de leur donner un maximum de chances de réussir leurs études, obliger les écoles à construire des grilles de cours plus cohérentes, faire cesser la concurrence entre écoles, stabiliser les équipes pédagogiques, ne plus lier de manière aussi forte le NTPP au nombre d'élèves, introduire, au détriment de la religion sans doute, un cours de philosophie dans les classes supérieures et un cours de civisme dans les classes inférieures pour combattre toutes les dérives de la société actuelle.

En effet, quelles valeurs véhicule-t-on aujourd'hui en Belgique ? L'argent facile (la Loterie Nationale qui n'arrête pas d'inventer de nouveaux jeux de hasard et de tenter nos concitoyens en est le leader), le sexe (AB3, AB4, Club RTL, Canal+, clips de chansons et aussi toutes les émissions où des femmes-potiches servent d'appâts pour téléspectateurs), la tricherie (l'État lui-même le prouve : on crée une loi anti-tabac mais tout aussitôt on sort une exception pour le Grand-Prix de Formule 1, sans compter les ministres qui « oublient » de payer leurs impôts), la violence (pure, dans les films, larvée dans les débâts télévisés, notamment ceux entre hommes politiques). Et quand ces valeurs s'ajoutent entre elles, comme au football, où violence, argent facile et tricherie se complètent harmonieusement, nous atteignons des sommets. Toutes ces valeurs n'étant pas celles qui sont enseignées dans nos écoles, quel crédit peuvent bien avoir les mathématiques et les sciences auprès d'une majorité de jeunes gorgés de télévision ?

Enfin, des mesures faciles et non coûteuses peuvent être prises très rapidement pour diminuer l'échec en mathématique : augmenter le nombre d'heures de mathématique au premier degré de l'enseignement secondaire afin de donner plus de temps au professeur pour approfondir la matière et plus de temps à l'élève pour résoudre des problèmes, pour développer des activités de découverte, pour rédiger une solution, pour apprendre à argumenter. Recréer deux niveaux de mathématique au second degré : 4 ou 6 heures hebdomadaires selon les résultats acquis à la fin du premier degré. En effet, avec le système en place pour le moment, soit 5 heures hebdomadaires pour tous les élèves, l'orientation en mathématique n'intervient qu'à l'entrée en 5^{e} année et engendre de nombreuses catastrophes.

Ces quelques pistes pour retrouver une école plus sereine étant proposées, il est temps de dire ce que la SBPMef fait pour rendre l'enseignement des mathématiques plus confortable, plus attrayant, plus plaisant.

Notre société forte de près de mille membres publie des revues destinées aux élèves, Math-Jeunes-Junior et Math-jeunes. L'année scolaire passée, des efforts considérables ont été entrepris pour en améliorer la qualité. Des articles courts et faciles à lire composent la première des deux revues, faite pour tous les élèves de l'enseignement secondaire ; un concours y a été proposé et a connu un assez beau succès. L'autre revue, plus tournée vers les élèves matheux, se décline maintenant par thèmes de numéro en numéro ; trois thèmes ont déjà été abordés : l'algèbre, les probabilités et les courbes ; d'autres thèmes seront évidemment traités cette année, de quoi peu à peu se constituer une bonne source de références mathématiques. Nous ne pouvons qu'encourager nos jeunes élèves à s'abonner à ces revues au prix très démocratique.

La SBPMef organise aussi l'Olympiade Mathématique Belge. L'an dernier 26 000 élèves y ont participé. Elle est devenue l'épreuve phare du calendrier scolaire et souhaite le rester. N'hésitez donc pas à entraîner vos élèves dans l'aventure : résoudre des problèmes n'a jamais fait de mal à personne et peut amener certains concurrents très loin, jusqu'à représenter la Belgique à l'Olympiade Mathématique Internationale. De plus, des discussions passionnées ont lieu en classe le lendemain de chacune des épreuves.

Par ailleurs, la SBPMef possède en son sein une commission pédagogique. Elle s'occupe essentiellement de produire des dossiers didactiques à l'intention des collègues. L'entrée y est libre et l'ambiance conviviale. J'aimerais cependant que ce groupe de travail soit plus étoffé et qu'il s'ouvre davantage, par exemple vers nos collègues instituteurs. Plus il y aura d'idées émises, plus il y a aura de rédacteurs potentiels, plus nous aurons la possiblilité de composer de nouveaux dossiers et donc de proposer à l'ensemble des collègues de nouvelles manières d'aborder et de traiter certaines parties des mathématiques. Je vous invite donc à nous rejoindre dans cette Commission Pédagogique de la SBPMef.

La SBPMef publie aussi la revue « Mathématique et Pédagogie » destinée aux professeurs ; cinq fois par an, celle-ci offre une centaine de pages de mathématique (articles de fond, relations d'expériences pédagogiques, comptes-rendus de manuels scolaires, problèmes à résoudre, etc.). Le rédacteur en chef est prêt à recevoir tout article relatif aux mathématiques ; si le cœur vous en dit, n'hésitez pas à le contacter.

Ajoutons encore que notre association édite une revue, « SBPM-Infor » qui a pour mission de vous tenir au courant de tout ce qui se passe à la SBPMef et de toutes les activités mathématiques qui se déroulent dans l'ensemble de la Communauté Française, conférences, expositions, formations, ...

Vous trouverez dans votre cartable un résumé de toutes nos activités, pour le cas où vous hésiteriez encore à devenir membre de notre société, qui rappelons-le est pluraliste et ouverte à tous les enseignants.

Comme vous vous en rendez compte, la SBPMef est riche en ressources humaines. Et du fait que tous ceux qui œuvrent à la bonne marche de cette formidable association le font bénévolement, elle mérite d'autant plus d'être reconnue à sa juste valeur par nos pouvoirs politiques.

Je souhaite donc longue vie à la SBPMef et, à vous, Mesdames et Messieurs, chers collègues, je vous souhaite un très bon Congrès.

Merci à Micheline Denis et à son équipe pour l'organisation de ces journées.

Merci également à la firme *Texas Instruments* et à son représentant Mark de Hiep pour leur contribution.

Merci enfin de m'avoir si patiemment écouté.

C'était le 30^e^ Congrès ...

30 est un nombre

- composé ($30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$)
- primoriel *(produit de nombres premiers successifs)*
- sphénique *(produit d'exactement trois facteurs premiers ; c'est d'ailleurs le premier sphénique)*
- pyramidal ($30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$)
- pronique *(produit de 2 entiers consécutifs)* ($30 = 5 \cdot 6$)
- abondant *(ses diviseurs sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30 dont la somme est 72 qui est supérieur à 30)*

30 est la somme de

- nombres naturels consécutifs ($30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$)
- nombres pairs consécutifs ($30 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$)
- puissances successives d'une même base ($30 = 5^1 + 5^2$)

Délits-Mythes

P. DUPONT, *HEC - Liège & U.C.L.*

La notion de limite est, c'est enfoncer une porte béante que de le rappeler, des plus délicates. Alors qu'elle est déjà présente, implicitement, dans la mathématique grecque, essentiellement sous la forme de la méthode d'*exhaustion* d'Eudoxe, on considère généralement qu'il a fallu attendre la première moitié du XIX^e siècle et les écrits de Cauchy pour qu'en apparaisse une définition dont la rigueur satisfasse nos standards.

Or, nous avons à enseigner à des adolescents de seize ou dix-sept ans (parfois davantage, n'y insistons pas) ce concept que les plus grands génies du monde mathématique ont mis plus de vingt siècles à forger, puis à polir !

Est-ce donc que ce processus historique de maturation, de décantation, a fini par aboutir à une définition dont la simplicité et la transparence nous laissent pantois d'admiration ? Certes non, hélas...

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in \operatorname{dom} f)$$
$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Le voici, ce monstre... Lecteur, tu y es sans doute habitué ; le temps a fait son œuvre et tu peux sans malhonnêteté affirmer que tu maitrises cette horrible formule. Mais essaie de te remettre dans la peau (ou dans la tête) de celui que tu étais il y a cinq, vingt ou cinquante ans, lorsque la bête t'est apparue pour la première fois. Ou encore, pense à la perplexité dans laquelle t'a laissée, plus récemment, la lecture d'une phrase, en symboles ou en mots, au début de laquelle s'entassent comme ici trois quantificateurs. Tout mathématicien professionnel que tu sois, quel que soit le nombre d'années de cave durant lesquelles a bonifié ton expérience mathématique, tu dois bien t'avouer à toi-même (une autocritique publique ne te sera toutefois pas demandée ici) que face à un tel ennemi, il est nécessaire de ruser, tel le

Adresse de l'auteur: Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 - Grez-Doiceau.
courriel : `p.dupont@math.ucl.ac.be`

frère Horace survivant qui feint de fuir pour séparer ses ennemis Curiaces et n'en affronter qu'un à la fois.

Si une contrexpertise est nécessaire : pourrais-tu, du tac au tac, dire ce qu'exprime (pour $a \in \operatorname{dom} f$ et $b \in \mathbb{R}$ fixés)

$$(\forall\, x \in \operatorname{dom} f)\ (\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

qui ressemble pourtant de si près à la propriété encadrée quelques lignes plus haut ?

Bref, en un mot comme en mille vingt-quatre, la notion de limite est intrinsèquement difficile et si sa définition a gagné en précision, au fil de l'Histoire, elle n'a pas pour autant perdu en arduité.

Face à cette difficulté, une réponse possible est de faire, complètement ou presque, l'impasse sur les considérations théoriques pour se concentrer sur les techniques de calcul. (Je l'entends d'ici : « Notez la définition au cahier, c'est au programme, mais je ne vous le demanderai jamais, c'est promis ! »!) Si je puis imaginer que, dans certaines classes, ce choix soit le seul possible, je pense qu'il est fortement regrettable. Dans le secondaire général, au moins, le caractère utilitaire des mathématiques n'en est qu'un des aspects, le caractère formatif de leur démarche étant tout aussi important. Or ici, peut-on prétendre que quiconque, dans la vie de tous les jours, aura à calculer des limites ? En tout cas pas en tant que telles. Ce ne peut donc être que la compréhension de l'originalité du concept qui en justifie l'enseignement. Reste donc à faire pénétrer au mieux ledit concept dans les têtes blondes (peut-on encore employer cette métaphore de nos jours ?) qui constituent nos classes.

Mon propos, ci-dessous, est de plaider pour une approche que j'ai partiellement expérimentée en classe. Sans prétendre à beaucoup d'originalité, je pense utile de l'exposer en quelques pages, car ce qui me revient de l'enseignement secondaire, via des conversations ou la lecture de manuels, me laisse penser que, si elle n'est pas ignorée, elle reste cependant assez marginale — et est parfois, hélas, quelque peu malmenée.

Cette approche tient en deux idées :

1. Il vaut mieux définir les limites de suites avant les limites de fonctions. Les suites devront de toute façon être introduites, par exemple pour établir les propriétés des suites arithmétiques ou géométriques. En outre, leur caractère discret les rend certainement plus abordables, plus tangibles que les fonctions. Ce caractère discret se prête

également assez bien à des expérimentations numériques qui rendront concrètes les notions introduites.

2. L'introduction de la notion de suite satisfaisant *presque* une propriété, c'est-à-dire la satisfaisant à partir d'un certain rang, permet de faire l'économie de deux quantificateurs dans la définition de limite. La ramener de trois quantificateurs à un seul, voilà un gain appréciable ! Et il ne s'agit pas, on le constate à l'usage, d'une simple escroquerie qui masque la difficulté. On a scindé celle-ci en deux parties qui sont réellement plus abordables. Cette seconde idée est sans doute un peu plus originale que la première

Ci-dessous, je présente cette approche dans les grandes lignes, en insistant sur les idées et sur les considérations pédagogiques, mais sans guère d'éléments techniques, ni surtout de démonstrations.

Les détails se trouvent dans un autre texte, en chantier mais toutefois déjà relativement présentable. Il est écrit comme pour un enseignant, qui connait déjà le sujet ; il ne s'agit pas d'un chapitre de manuel. Il donne tous les détails des démonstrations, de nombreux exemples, quelques exercices. En revanche, il ne contient pas de considérations méthodologiques ni, pour ainsi dire, de justification des idées développées. Autrement dit, il ne serait guère judicieux de le donner en pâture aux élèves. Nous considérons que chaque professeur qui voudrait s'en inspirer sera mieux à même que nous d'en donner une présentation à ses élèves, en fonction de sa sensibilité propre et des connaissances et habitudes de sa classe. (Si je me laissais aller à jargonner, je parlerais ici du « dispositif pédagogique » ; mais nous sommes entre gens sérieux.) En ce qui concerne le contenu, j'ai inclus des résultats qui dépassent clairement le niveau des humanités, comme par exemple le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

Ce texte, qui est donc toujours en évolution, je peux en envoyer une copie par courrier électronique, au format DVI (environ 125 ko) ou PDF (environ 2,6 Mo !), à qui m'en fera la demande. Mon adresse se trouve en note à la première page de cet article.

1. Suites

On pourrait être tenté de ne donner de la notion de suite (réelle) qu'une idée intuitive, non formalisée : une « liste infinie » de réels. Je pense au contraire qu'il est important de définir une suite réelle comme une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, d'une part parce que cela peut contribuer à comprendre ce qu'est une fonction, et d'autre part (c'est le plus important, pour ce qui nous concerne ici) parce que cela « autorise » 'a en donner une représentation graphique ([1]).

Il importe sans doute de fournir aux élèves, d'emblée, une grosse liste d'exemples, qui serviront à illustrer le discours ultérieur. On variera la présentation : suites données par l'explicitation de leurs quelques premiers termes, suites données par l'expression du terme général en fonction de son indice. Passer de l'une à l'autre de ces descriptions est l'occasion — et nous ne manquerons pas d'y insister lourdement — de faire remarquer que, au petit jeu « Compléter la suite logique ([2]) » si courant dans les magazines, il est toujours possible de justifier n'importe quelle réponse. Exemple : Quel est le terme général de la suite $(1, 2, 4, 8, \ldots)$? Indication : Il s'agit de la suite donnant le nombre maximal de régions en lequel n plans partagent l'espace euclidien. Réponse : La suite s'écrit $\left(\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous montrerons aussi des descriptions inductives de suites. Ici encore, trouver l'expression du terme général sera un bon exercice — parfois difficile : penser à la suite de Fibonacci.

Cette liste d'exemples servira à illustrer différentes propriétés que l'on définira : suite croissante, suite constante, suite périodique, suite positive, suite bornée, suite dans E (où E est une partie de $\mathbb{R}$), ...

Le pas essentiel vient maintenant : définir ce que signifie « la suite s possède *presque* la propriété P ». C'est tout simplement que l'une des suites « tronquées » (ou « décalées ») obtenues à partir de s, soit une suite du type $(s_{n+N})_{n \in \mathbb{N}}$, pour un certain naturel N, possède la propriété en question.

Ainsi, la suite $\left(\left|n - \frac{17}{2}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque strictement croissante ; la suite $((2^n - 100)/2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque positive ; la suite des décimales de $7549/99\,000$ est presque périodique ; une suite presque majorée est tout simplement une suite majorée ; si une suite a presque la propriété P et qu'elle a presque la propriété P', alors elle a presque la propriété (P et P'). Posons $a_n = 1$ lorsque l'indice n est un nombre premier, et $a_n = 0$ dans le cas contraire : la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle presque constante ?

([1]) C'est d'ailleurs un bon moment pour faire remarquer que lorsque des données discrètes sont représentées graphiquement, relier les points du graphe par une ligne brisée est dépourvu de sens mathématique et ne se justifie que par une meilleure lisibilité du schéma.

([2]) Pourquoi *logique*, après tout ?

Les élèves ne manqueront pas d'être interloqués par le fait qu'une suite presque strictement négative peut avoir mille milliards de mille termes positifs. Mais que pèsent-ils face à l'infinité de termes qui les suivent ? Il faut cependant, c'est le point crucial, qu'à partir d'un certain rang, la propriété soit acquise, de manière définitive.

Avec ce langage, la définition de limite d'une suite est extrêmement aisée à formuler : le réel l est *limite* de la suite s (ou s *converge* vers l) si, pour tout intervalle ouvert I contenant l, s est presque dans I. Un seul quantificateur. Est-ce de l'arnaque ? Pas si la notion de propriété presque vraie a, préalablement, été apprivoisée par la manipulation d'exemples assez nombreux et variés.

Cette définition est-elle opérante ? Oui : on peut l'utiliser telle quelle pour démontrer très facilement, par exemple, l'unicité de la limite, les propriétés « arithmétiques » (entendez, limite d'une somme, etc.), la conservation des inégalités, le théorème de l'étau... Ce n'est déjà pas rien ; c'est même probablement déjà trop, car en pratique, faute de temps ou de motivation, ces démonstrations sont presque toutes admises ; mais... celle du théorème de l'étau, par exemple, est si simple dans cette formulation-ci qu'il devient presque tentant de la donner.

L'unicité de la limite nous autorise à introduire un symbole pour la désigner. Si s converge vers l, nous écrirons $l = \lim s$; dans certains cas, comme pour parler de la limite de la suite $((n+(-1)^n)/n)_{n\in\mathbb{N}}$, si nous n'avons pas de raison par ailleurs de lui attribuer un nom, nous écrirons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n},$$

en faisant usage d'une variable muette, ce qui est un pis-aller : il vaut toujours mieux l'éviter (3). Remarquons encore un petit danger : il est clair qu'avant de pouvoir utiliser l'assemblage « $\lim s$ », il faut s'assurer, ou prendre comme hypothèse, que cette limite existe. N'écrivons pas « $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ n'existe pas » (4), mais bien « la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite », ou « la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ».

À un moment donné, il faudra bien montrer l'équivalence de notre définition avec celle en ε-n que l'on trouve le plus communément, ne serait-ce

(3) Nous le faisons cependant couramment en écrivant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(4) *Horresco referens*, on voit pire encore : les mots « n'existe pas » sont parfois remplacés par un symbole dévoyé, un quantificateur barré. Même pour le dénoncer, je n'oserais pas reproduire ici cet assemblage contre nature. Ne confondons pas mathématique et sténographie

que pour ne pas nous couper du reste du monde. Ceci est également très aisé.

Les limites infinies sont introduites de manière tout à fait analogue. On peut alors définir la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ et y prolonger, partiellement, les quatre opérations de $\mathbb{R}$.

2. Continuité

Faut-il introduire la continuité en s'appuyant sur la notion de limite ou l'inverse ? Encore un vieux débat ! Mon avis : ni l'un ni l'autre. Introduisons ces deux concepts indépendamment l'un de l'autre, pour donner aux élèves deux chances de comprendre au lieu d'une seule. Ensuite seulement, nous établirons les liens. Mais, le temps étant linéaire, il faut bien, pour l'exposé, en choisir un premier. Je commence par la continuité, car ce paragraphe est plus bref, et la coupure avant de revenir aux limites de fonctions est donc moins marquée.

Si a est un point du domaine A d'une fonction f, nous dirons que f est *continue* au point a si elle transforme toute suite dans A convergeant vers a en une suite convergeant vers $f(a)$. C'est simple et naturel : une propriété de préservation, qu'on pourra rappeler, pour comparaison, lorsqu'on définira une fonction (strictement) croissante comme une fonction préservant les inégalités (strictes).

Les propriétés de continuité d'une somme, d'un produit, d'une composée de fonctions (etc.) sont des conséquences parfaitement banales des règles de calcul de limites de suites.

Pour en terminer avec la continuité : une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sera dite *continue* (tout court) si elle est continue en chaque point de A ; ceci revient à dire que pour chaque suite convergente s dans A, $f(s)$ est convergente et que $\lim f(s) = f(\lim s)$.

3. Limite d'une fonction en un point

La manière de définir la notion de limite d'une fonction en un point est maintenant presque évidente : soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, où $A \subseteq \mathbb{R}$, soit a et b deux éléments de la droite numérique achevée, avec a adhérent à A ; b est *limite* de f en a si f transforme en une suite de limite b toute suite dans A de limite a.

Après avoir prouvé l'unicité de la limite (rien de plus facile !), on peut introduire la notation $\lim_a f$ pour la limite, si elle existe ; au besoin, on notera $\lim_{x\to a} f(x)$ (mais pas, de grâce, $\lim_a f(x)$; voir [2]).

Remarquons que dans le cas où a appartient au domaine A de f, si la limite existe, elle ne peut valoir que $f(a)$, puisque parmi les suites dans A convergeant vers a il y a la suite constante $(a)_{n\in\mathbb{N}}$, dont la transformée par f est la suite constante $(f(a))_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge évidemment vers $f(a)$. Donc f est continue en a si et seulement si $a \in A$ et que $\lim_a f$ existe.

Le lecteur attentif (le lecteur, veux-je dire ; il est impensable qu'un lecteur qui m'a suivi jusqu'ici soit distrait) aura remarqué que la notion de limite évoquée ici est la notion de limite que j'appellerai *inclusive*, car elle prend en compte la valeur de f en a ; par opposition, la limite *exclusive* (elle est parfois aussi appelée limite *pointée*, me semble-t-il) ignore complètement la valeur, et même l'existence, de $f(a)$.

Voici quelques arguments en faveur de ce choix.

- La définition de limite inclusive est plus simple et plus naturelle. Exclure le point a apparait comme arbitraire dans la formulation.
- C'est la notion de limite inclusive que l'on utilise en topologie générale.
- La notion de limite inclusive jouit d'un meilleur résultat que la limite exclusive en ce qui concerne la limite d'une composée. (Voir plus bas.)
- Il est plus facile de définir la notion de limite exclusive à partir de la notion de limite inclusive que l'inverse : la limite exclusive de f en a n'est autre que la limite (inclusive) en a de la restriction $f|_{A\setminus\{a\}}$.
- Lorsqu'on utilise la notion de limite exclusive, la condition préalable n'est pas que a soit adhérent à A, mais qu'il en soit un point d'accumulation ; cette notion est plus compliquée à introduire aux élèves.
- De toute manière, en pratique, on calcule des limites en des points où la fonction n'est pas définie, donc les deux notions se rejoignent ; la discussion n'a qu'une importance théorique.

Mais foin de ces querelles d'école (!).

On montre sans grande difficulté que, lorsque a et b sont réels,

$$\lim_a f = b \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in \operatorname{dom} f)\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon \quad :$$

c'est la fameuse définition en ε-δ rappelée en introduction. Le lecteur partisan de la limite exclusive aura sursauté. Des caractérisations analogues sont disponibles pour les cas où a ou b sont infinis.

Les justifications de tous les résultats sur la limite d'une somme, d'une différence, etc., sont réduites à deux fois rien, car le gros du travail (et encore n'est-ce qu'un petit gros) a été fait lorsque nous avons prouvé les résultats correspondants sur les suites.

Un autre exemple.

Proposition.

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi que $a \in \operatorname{adh}\left(f^{-1}[\operatorname{dom} g]\right)$ et $b,\ c \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_a f = b$ et si $\lim_b g = c$, alors $\lim_a (g \circ f) = c$.

Autrement dit :

$$\lim_a (g \circ f) = \lim_{(\lim_a f)} g.$$

Démonstration. Le domaine de $g \circ f$ est $f^{-1}[\operatorname{dom} g]$, donc, par hypothèse, a lui est bien adhérent. De plus si s est une suite dans ce domaine, telle que $\lim s = a$, alors $f(s)$ est une suite dans $\operatorname{dom} g$, tendant vers b ; dès lors, $\lim (g \circ f)(s) = \lim g(f(s)) = c$. ■

Remarque : Avec la notion de limite exclusive, cette proposition n'est plus vraie. Voici des exemples montrant les deux problèmes qui peuvent se produire. Notons $\lim_a^* f$ la limite exclusive de f en a.

1. Soit
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lfloor x \rfloor$$
la fonction « partie entière », qui applique x sur le plus grand entier qui lui est inférieur et
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} x \mapsto 0 \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \mapsto 1 \ ; \end{cases}$$
alors, $\lim_{1/2}^* f = 0$; $\lim_0^* g = 0$; cependant, $\lim_{1/2}^* (g \circ f) = 1 \neq \lim_0^* g$. Noter que $\lim_{1/2}^* (g \circ f) = g(0)$.

2. Soit
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} x \mapsto x \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

et

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \begin{cases} x \mapsto 0 \ \text{si} \ x \neq 0, \\ 0 \mapsto 1 \ ; \end{cases}$$

alors, $\lim_0^* f = 0$; $\lim_0^* g = 0$; cependant, $g \circ f$ n'a pas de limite exclusive en 0.

Ces deux exemples sont tirés de [3]; ils n'ont malheureusement pas été repris dans [4].

D'autres propriétés classiques que nous sommes tentés de mentionner ici (théorème de l'étau, conservation des inégalités, ...) ne sont que des généralisations de propriétés déjà rencontrées pour les suites, et leur démonstration est immédiate, compte tenu du cas particulier déjà connu.

Voici. Nos élèves sont maintenant armés pour entamer le processus d'intériorisation qui les mènera, s'ils continuent à réfléchir à ces questions, à s'approprier la notion de limite, à en faire un être familier, qu'ils auront l'impression de maitriser… jusqu'au moment peut-être où ils étudieront les fonctions de plusieurs variables.

Pour l'heure, place à la pratique. Nous avons établi des règles de calcul, utilisons-les pour calculer des « vraies valeurs ». Nos élèves — les naïfs ! — trouvent tellement plus rassurant de calculer que de raisonner…

Bibliographie

[1] Jaime Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, 7ª edição, Fudação Calouste Gulbenkian, Lisbonne, 1999. — Une introduction à l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle, rédigée avec grand soin, et qui privilégie une approche fort voisine de la nôtre.

[2] Pascal Dupont, *Motus !*, Bull. APMEP 390 (1993), 453–460.

[3] Jean Mawhin, *Introduction à l'analyse*, Cabay, Louvain-la-Neuve, 1980.

[4] Jean Mawhin, *Analyse — Fondements, techniques, évolution*, De Boeck--Wesmael, Bruxelles,1992.

Huit projets de machines mathématiques

Y. DURAND, *FPMs*

Trouver des applications pratiques de la géométrie qui soient susceptibles d'éveiller l'intérêt des Elèves ou des Etudiant(e)s mais qui ne requièrent pas de pré-requis techniques particuliers est toujours une tâche relativement difficile.

Concevoir des Machines Mathématiques reste alors une façon efficace de résoudre ce problème pédagogique puisque de tels projets réclament seulement de mettre en pratique des concepts de géométrie et un peu d'ingéniosité : lors du Congrès de la SBPMef d'août 2002, je vous avais ainsi présenté une dizaine de projets d'ellipsographes, ceux-ci d'ailleurs concrètement mis en œuvre alors au moyen de pièces de « Meccano ».

Aujourd'hui, je vous propose d'autres machines mathématiques, dédicacées cette fois au tracé d'une conique d'un autre genre, la parabole. Les 3 premières se baseront sur le tracé de la cissoïde, les 2 suivantes sur ceux de la conchoïde puis de la strophoïde et les 3 dernières opéreront un tracé direct de la parabole.

1. Première Analyse du problème

Considérons la *parabole* d'équation implicite : $y^2 + 4px = 0$ (1)

Nous considérerons comme *cissoïde* associée à cette parabole le lieu des pieds P des perpendiculaires menées à partir du sommet de la parabole vers les tangentes à cette parabole, c'est-à-dire la *podaire cupsidale* de la parabole par rapport à son sommet; l'équation implicite de cette cissoïde est : $y^2(p - x) - x^3 = 0$. (2)

Adresse de l'auteur: Yves Durand, Rue Louis Piérard, 35, 7022 Hyon, Faculté Polytechnique de Mons, Service de Génie Mécanique, 9, Rue de Houdain, 7000-Mons

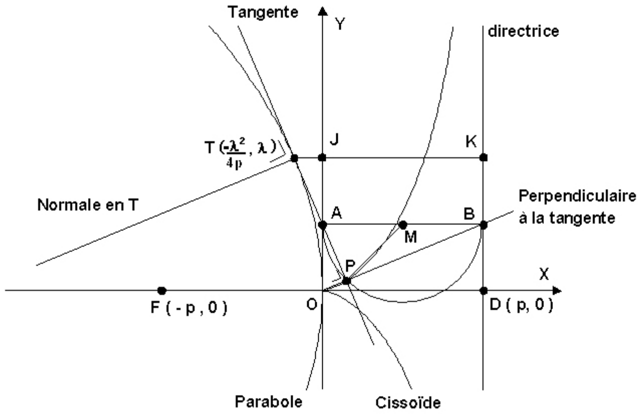


Fig. 1 : Première analyse.

Cette équation de la cissoïde est facilement trouvée en exprimant d'abord l'équation implicite de la famille des tangentes à la parabole, en considérant l'ordonnée y_T du point de contact variable T comme paramètre λ :

$$(y - \lambda) + \frac{2p}{\lambda}\left(x + \frac{\lambda^2}{4p}\right) = 0 \tag{3}$$

puis en exprimant l'équation implicite de la famille des perpendiculaires à ces tangentes, menées depuis l'origine :

$$y - \frac{\lambda}{2p}x = 0 \tag{4}$$

et enfin, en éliminant le paramètre λ entre (3) et (4).

De l'équation de la tangente à la parabole puis de l'équation de sa perpendiculaire OB, on déduit :

$$|\overline{OA}| = |\overline{DB}| = \frac{\lambda}{2} = \frac{|\overline{OJ}|}{2} = \frac{|\overline{DK}|}{2},$$

soit a moitié de l'ordonnée du point T de la parabole. (5)

L'angle $\widehat{APB}$ est droit et intercepte le segment de longueur constante $|\overline{AB}| = p$; le point P de la cissoïde est donc sur la circonférence de centre M milieu de AB et de rayon constant : $|\overline{PM}| = \frac{p}{2}$. (6)

En outre, la normale à la parabole est évidemment parallèle à la droite OB. (7)

Ces 3 propriétés (5), (6) et (7) suffisent pour établir un premier mécanisme traceur de la parabole, de ses tangentes, de ses normales et de sa cissoïde associée.

2. Premier mécanisme

2.1. Éléments de base

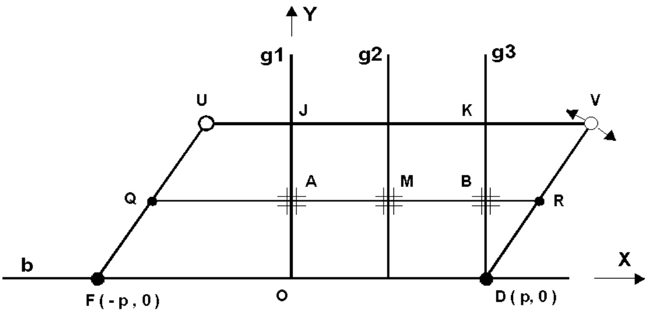


Fig. 2 : Éléments de base.

Soit 4 barres fixes b, g_1, g_2, g_3 : b est aligné sur Ox, g_1 sur Oy, g_3 sur la directrice et g_2 est la parallèle à g_1 et à g_3 située à mi-distance entre g_1 et g_3.

Sur b, 2 pivots implantés au foyer F et au pied D de la directrice (mais ces positions pourraient être modifiées à volonté en fonction de la grandeur de la portion de courbe que l'on souhaite tracer).

Montées sur les 2 pivots F et D, 2 barres articulées FU et DV (longueur commune choisie $= |\overline{FO}|$) et, sur ces 2 barres, 2 pivots Q et R implantés à mi-longueurs de ces barres et 2 rotules U et V d'extrémités.

En articulation sur (Q, R) d'une part, sur (U, V) d'autre part, 2 barres de même longueur $= |\overline{FD}|$.

Le parallélogramme *FUVD* subira, en vue du tracé recherché, des déformations imposées par le mouvement de rotation de *V* (Centre fixe *V*, Rayon constant de la longueur de la barre *DV*).

Les points variables *A*, *M* et *B* (cfr. leurs significations géométriques dans la Fig. 1 de la page 22 sont chacun définis *in concreto* dans le mécanisme au moyen de 2 glissières solidarisées par un axe de rotation : p. ex., pour le point *A*, la glissière verticale coulisse sur la barre g_1 tandis que la barre *QR* coulisse dans la glissière horizontale articulée sur la glissière verticale précitée.

De telles glissières, usinées par fraisage dans des barreaux d'aluminium, ont été expérimentées dans nos montages d'ellipsographes. Ces glissières sont conçues pour permettre un empilage de *n* glissières articulées librement entre elles et, le cas échéant, d'y adjoindre une barre en rotation libre autour de l'axe.

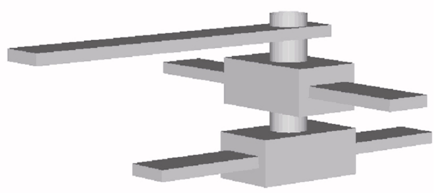


Fig. 3 : Principe d'un montage de 3 barres, 2 glissières pour 2 des 3 barres et une articulation axiale commune.

2.2. Premier ensemble d'éléments complémentaires

Sur la barre *b*, un pivot en *O* sur lequel s'articule la barre *EI* : cette barre glisse en *B* dans une troisième glissière articulée sur l'axe des 2 glissières déjà installées en *B*.

Sur l'axe des 2 glissières en *A*, une barre *t* pivotant autour de *A*.

Sur l'axe des 2 glissières en *M*, un barre articulée en *M*, de longueur $|\overline{MP}| = \frac{p}{2}$, articulée à son autre extrémité *P* sur l'axe de 2 glissières : dans l'une, glissement de la barre *t*, dans l'autre, glissement de la barre *EI*. L'axe de ces 2 glissières matérialise ainsi le point variable *P* de la *cissoïde*.

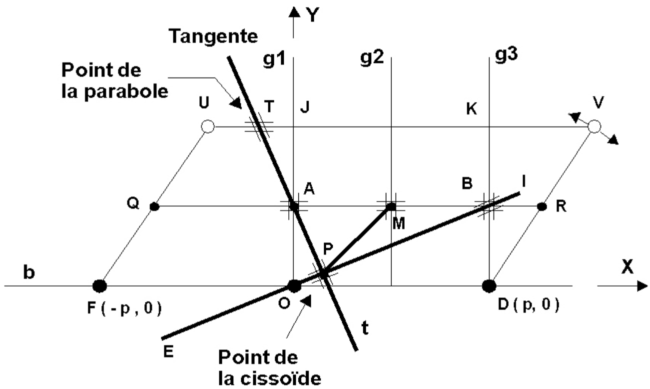


Fig. 4 : Premier ensemble d'éléments complémentaires.

Sur la barre t, au droit du point T de contact de la parabole et de sa tangente en T, 2 glissières où coulissent la barre UV et la barre t : l'axe de ces 2 glissières matérialise ainsi le point variable T de la parabole.

L'ensemble précité définit le point variable P de la cissoïde, le point variable T de la parabole, la tangente variable TP à la parabole et la direction variable EI de la normale à la parabole.

2.3. Second ensemble d'éléments complémentaires

Articulée sur l'axe des 2 glissières en T, une barre n sur laquelle est fixé un pivot G tel que $|\overline{TG}| = |\overline{OE}|$.

Articulés en T et G ainsi qu'en O et E, 2 parallélogrammes $TGHW$ et $OEHW$ tels que $|\overline{WH}| = |\overline{TG}| = |\overline{OE}|$ et $|\overline{TW}| = |\overline{OW}| = |\overline{GH}| = |\overline{EH}|$ et comprenant 3 rotules en E, H et W.

La direction du côté OE étant imposée par les mouvements des mécanismes décrits sous 2.1(?) et 2.2(?), les barres WH puis TG sont alors forcées en directions parallèles à celle de la barre OE par ce mécanisme à parallélogrammes.

L'ensemble précité définit donc la normale variable de la Parabole.

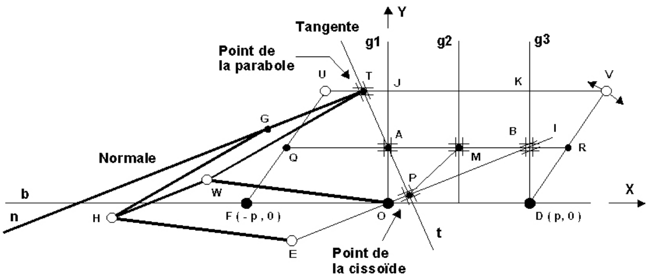


Fig. 5 : Second ensemble d'éléments complémentaires.

3. Deuxième analyse de problème

La définition de la parabole comme lieu des points équidistants du foyer et de la directrice implique que le triangle FTK soit isocèle. Son côté FK coupe l'axe Oy en A.

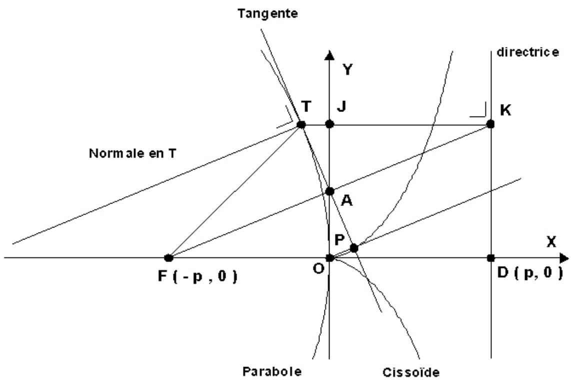


Fig. 6 : Deuxième analyse.

La définition de la parabole comme lieu des points équidistants du foyer et de la directrice implique que le triangle FTK soit isocèle. Son côté FK coupe l'axe Oy en A. Or, les triangles semblables FAO et FKD sont dans un rapport de similitude 2 (car $|\overline{FD}| = 2|\overline{FO}|$). Le point A est donc le point milieu de FK et aussi de OJ. La droite TA est donc médiane, mais aussi médiatrice puisque le triangle FTK est isocèle. Or, il a été montré — Propriété (5) — que la tangente en T passait par ce point A situé au milieu de OJ.

On en tire que la tangente en T est diagonale de tout losange de diagonale FK (8)

et donc que la direction de la normale au point T est donnée par la direction de FK (9)

Ces 2 propriétés (8) et (9) suffisent pour établir un deuxième mécanisme traceur de la parabole, de ses tangentes, de ses normales et de sa cissoïde associée.

4. Deuxième mécanisme

Dans l'alignement de Ox, 4 pivots fixes F (Foyer), O (Origine), D (pied de la directrice), E (quelconque) et une barre fixe d correspondant à la directrice de la parabole.

Sur les pivots D et E, montage de 2 parallélogrammes $DUVE$ et $UKLV$ tels que la barre UV leur soit commune. L'articulation K correspond à l'axe de 2 glissières telles que l'une glisse sur d tandis qu'une barre m, pivotant autour de F, coulisse dans l'autre. La barre b prolonge à gauche le côté KL du parallélogramme $KLVU$ et reste donc toujours parallèle à Ox : le point variable T de la parabole s'y localisera.

Sur les pivots F et K, montage d'un losange $FGKH$ articulé en ses sommets. Sur l'axe de la rotule G s'articule la barre t, matérialisant la tangente à la parabole : elle glisse en H dans une glissière articulée sur l'axe de la rotule H ; l'intersection de la barre b et de la barre t, soit le point T variable de la parabole, est matérialisé par l'axe de 2 glissières, l'une glissant sur b, l'autre sur t.

La barre m qui matérialise la direction de la normale à la parabole, va servir de référence pour orienter dans cette direction la barre p articulée en O sur laquelle se localisera le point P de la cissoïde et la barre n, articulée en T, matérialisant la normale variable à la parabole ; dans cet objectif, on définit sur les barres m, p et n des segments FW, OQ et MN de longueurs égales et qui serviront de bases pour la construction des parallélogrammes $FWSR$, $OQSR$, $FWBC$ et $MNBC$ articulés en leurs sommets et partageant, pour les 2 premiers, le même côté SR et pour les 2 suivants, le même côté *BC* : la direction de *WF* impose une direction parallèle pour *SR* et *BC* puis, en chaîne, pour *OQ* et *MN* et impose donc aussi aux barres *n* et *p* de rester constamment parallèles à *FK*, direction de la normale à la parabole.

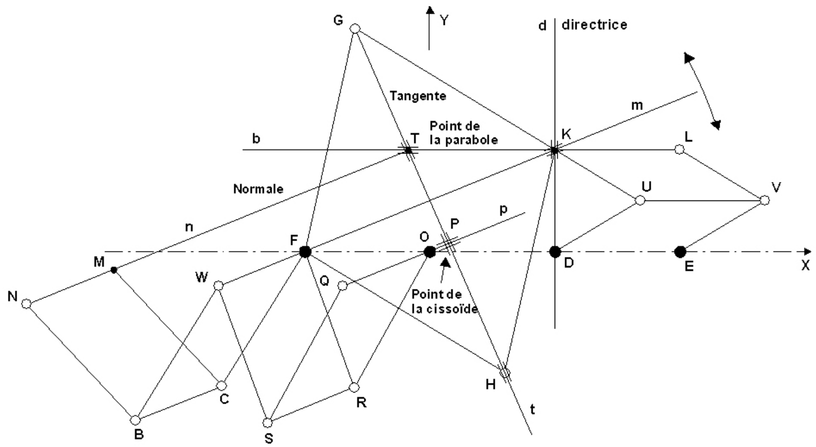


Fig. 7 : Deuxième mécanisme.

La position variable du point *P* de la cissoïde sur la barre variable *p* correspond à son intersection avec la barre variable *t* : elle est matérialisée par l'axe de 2 glissières en *P*, l'une glissant sur la barre *t*, l'autre sur la barre *p*.

Les mouvements de l'ensemble du mécanisme peuvent être imposés par des mouvements de rotation appliqués à la barre *m* autour du pivot *F*.

5. Troisième analyse du problème

Par le point *D*, pied de la directrice de la parabole sur *Ox*, menons une parallèle *DC* à la tangente; *DC* est évidemment aussi perpendiculaire à *OP* ou, identiquement, à *OB*.

Les 2 triangles *OAP* et *DCB* sont rectangles, présentent le même angle θ et la même hypoténuse, ils sont donc isométriques et par suite : $|\overline{OP}| = |\overline{CB}|$.

Le point milieu I de OB est donc aussi point milieu de PC : C et P sont donc symétriques par rapport à I sur OB. (10)

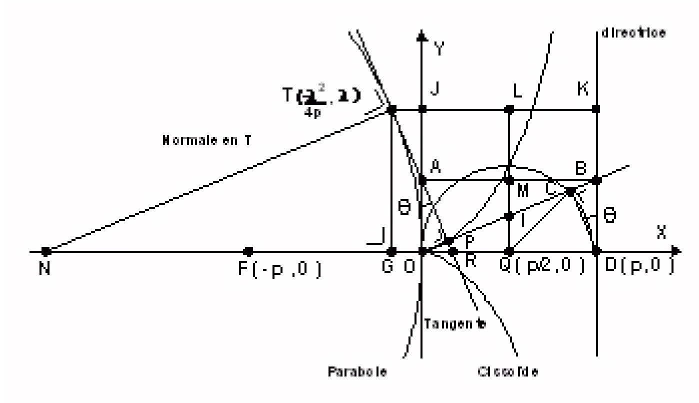


Fig. 8 : Troisième analyse.

En outre, comme l'angle droit en C intercepte le segment fixe OD de longueur constante p, quelle que soit la direction de OB et quelle que soit donc la valeur du paramètre λ, le lieu du point C pour λ variable est la circonférence de diamètre $|\overline{OD}| = p$ et de centre fixe Q. (11)

La construction *géométrique classique de la cissoïde, podaire d'une parabole par rapport à son sommet en est d'ailleurs déduite :*

> *Par le sommet de la parabole, on fait passer une droite d'orientation variable : elle coupe selon un point C la circonférence fixe dont le diamètre est le segment joignant le sommet de la parabole au pied de la directrice sur l'axe de cette parabole et elle coupe la directrice en un point B. Sur cette droite et à partir du sommet de la parabole, on porte une distance égale à la longueur du segment CB, ce qui détermine un point P sur cette droite : ce point P appartient à la Cissoïde.*

La *Sous-Normale $|\overline{GN}| = 2p$, ce qui se démontre aisément en considérant le rapport de similitude 2 qui existe entre les triangles TGN et BDO ($|\overline{TG}|$ vaut en effet $2 \times |\overline{BD}|$).* (12)

La *mesure de l'abscisse $|\overline{OG}|$ du point courant T de la parabole est égale à la longueur $|\overline{OR}|$ du segment déterminé sur l'axe Ox par son intersection* avec la tangente variable, ce qui se démontre tout aussi facilement en considérant l'isométrie des triangles OAR et JAT. (13)

On rappelle, par ailleurs, que $|\overline{OA}| = |\overline{DB}| = \frac{\lambda}{2} = \frac{\overline{OJ}}{2} = \frac{\overline{DK}}{2}$, soit la moitié de la mesure de l'ordonnée du point T considéré sur la parabole. (14)

Ces 5 propriétés (10), (11), (12), (13) et (14) vont être utilisées pour établir un troisième mécanisme traceur de la parabole, de ses tangentes, de ses normales et de sa cissoïde associée.

6. Troisième mécanisme

Sur la barre fixe b, soit 2 pivots O (correspondant au sommet de la parabole) et Q, point milieu de OD (D = pied de la directrice). Soit aussi 2 barres d (correspondant à la directrice) et k (alignée sur Oy).

En B sur la barre d, une glissière et, articulées sur l'axe B de cette glissière, 2 barres BU et BV de même longueur comportant 2 rotules en leurs extrémités U et V sur lesquelles s'articulent 2 autres barres UO et VO, toujours de la même longueur, qui se rejoignent et s'articulent toutes deux sur le pivot O, ces 4 barres composant le losange déformable $OUBV$.

Articulée sur le pivot O, une barre m matérialisant l'une des diagonales du losange $OUBV$: elle coulisse dans une seconde glissière articulée sur la première déjà en place en B. L'autre diagonale du losange déformable est la barre j, articulée sur l'axe de la rotule U et coulissant dans une glissière en V, articulée sur la rotule V.

Sur la barre m, une glissière dont l'axe matérialisera le point variable C de la circonférence (virtuelle) de diamètre OD : la barre r, de longueur $\frac{p}{2}$ et articulée en Q, milieu de OD et donc centre de la circonférence précitée, est articulée à son autre extrémité sur l'axe de la glissière en C.

Le point P de la cissoïde est situé sur m et doit être le symétrique de C par rapport à I, intersection des 2 diagonales du losange déformable $OUBV$: l'axe d'une glissière coulissant sur m matérialisera ce point P. Deux barres CE et EP de même longueur sont articulées sur les axes des 2 glissières C et P, leur extrémité commune E étant articulée sur l'axe d'une glissière coulissant sur la diagonale UV : P sera donc ainsi symétrique de C.

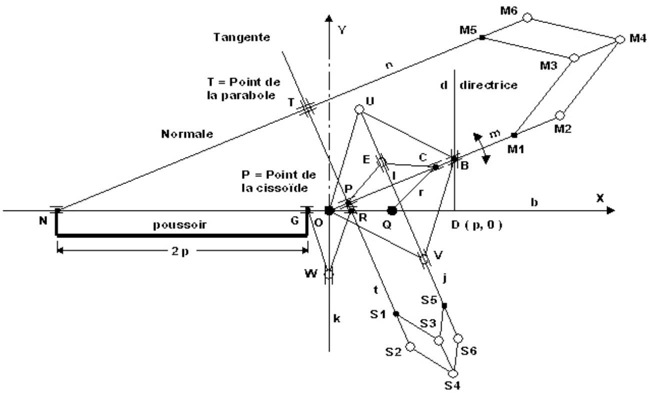


Fig. 9 : Troisième mécanisme.

La tangente (barre t) à la parabole doit passer par ce point P et doit aussi être parallèle à la diagonale UV, c.-à.-d. à la barre j : pour assurer ce parallélisme quelle que soit la position du point P variable, un mécanisme à 2 parallélogrammes ($S5 - S6 - S4 - S3$ et $S1 - S2 - S4 - S3$) assemble les 2 barres j et t .

L'intersection de la barre t avec la barre b, matérialisée par l'axe de 2 glissières, l'une coulissant sur la barre b, l'autre sur la barre t, donne lieu au point R dont il a été montré qu'il était, sur Ox et par rapport à l'origine O, symétrique du point G, lui-même d'abscisse égale à celle du point T de la parabole.

Pour déterminer ce point G, un mécanisme en triangle isocèle RWG met en action 2 barres RW et GW de longueurs égales, articulées en leurs extrémités sur les axes de glissières coulissant sur la barre b en R et G et sur la barre k en W. Ce point G actionne lui-même un poussoir constitué d'une barre de longueur $2p$ articulée sur l'axe de la glissière en G et d'une nouvelle glissière en N, coulissant aussi sur la barre b : le point N ainsi défini par ce mécanisme est l'intersection de la normale à la parabole avec l'axe Ox.

Articulée sur l'axe de la glissière en N, une barre n matérialise la normale à la parabole. Il faut que lui soit imposée une direction parallèle à celle de la diagonale OB du losange $OUBV$. Le mécanisme à 2 parallélogrammes articulés

M5 — M6 — M4 — M3 et *M4 — M3 — M1 — M2* à barre *M3 — M4* commune remplit cette fonction.

Le point *T* de la parabole est alors matérialisé par l'axe de 2 glissières, l'une coulissant sur la barre *t*, l'autre sur la barre *n*.

7. Quatrième analyse du problème

Au lieu d'établir le mécanisme en se basant sur le point variable de la cissoïde, il est aussi possible de prendre en considération le point variable de la conchoïde de Sluse dont il est connu qu'elle est la podaire de la parabole par rapport au pied *D* de sa directrice. Dans *Oxy*, l'équation implicite de cette conchoïde est : $y^2(x-2p)+x(x-p)=0$ (15)

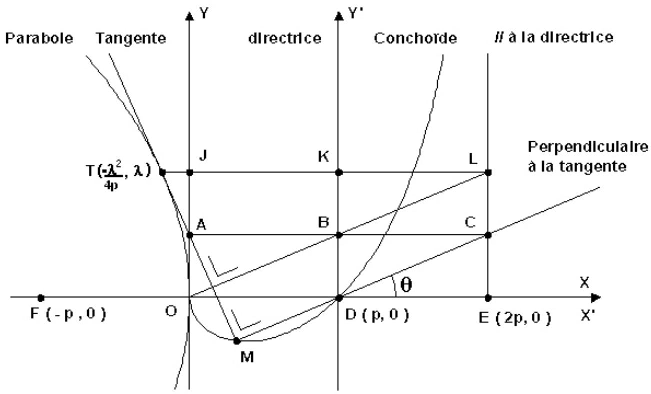


Fig. 10 : Quatrième analyse.

Elle résulte de l'élimination du paramètre λ entre l'équation (1) de la tangente à la parabole et l'équation de la perpendiculaire à cette tangente menée à partir du pied *D* de la directrice : $y-\frac{\lambda}{2p}(x-p)=0$. (16)

En procédant au changement de système d'axes $Oxy \rightarrow Dx'y'$, la conchoïde s'exprime alors selon l'une des formes :

$$
\begin{aligned}
y'^2(x'-p)+x'^2(x'+p) &= 0\\
(x'-p)(y'^2+x'^2)+2px'2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$p(x' - p)(y'^2 + x'^2) + 2p^2x'^2 \;=\; 0 \tag{17}$$

qui est la forme habituelle de l'équation de la conchoïde de Sluse, obtenue en l'exprimant comme le lieu des points M tels que : $|\overline{DC}| \times |\overline{CM}| = 2p^2$, C parcourant la parallèle à distance p de la directrice et D étant le pied sur l'axe Ox de la directrice de la parabole. (18)

Il suffit en effet, dans le système $Dx'y'$, d'établir l'expression du vecteur $\overrightarrow{DC}$ en fonction du paramètre θ : $\overrightarrow{DC} = p\overrightarrow{ux'} + p \text{ tg } \theta\overrightarrow{uy'}$, d'en calculer le module $|\overline{DC}|$ et le vecteur unitaire $\overrightarrow{dc}$, puis en exprimant que $|\overline{DC}| \times |\overline{CM}| = 2p^2$, d'en tirer le module$|\overline{CM}|$, puis d'établir l'expression du vecteur $\overrightarrow{CM}$ selon : $\overrightarrow{CM} = -|\overline{CM} \cdot \overrightarrow{dc}$, enfin de construire le vecteur $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM}$ dont les composantes sur Dx' et Dy' donnent lieux aux équations paramétriques du point M :

$$x' \;=\; p - \frac{2p}{1 + \text{ tg }^2\theta} \tag{19}$$

$$y' \;=\; \left(p - -\frac{2p}{1 + \text{ tg }^2\theta}\right) \cdot \text{ tg } \theta \tag{20}$$

En éliminant le paramètre θ entre (19) et (20), on retrouve l'équation implicite (17).

Cette propriété (18) sera utilisée pour établir un quatrième mécanisme, traceur de la conchoïde de Sluse associée à la parabole.

Il est clair que si, en outre, des mécanismes semblables à ceux utilisés précédemment en association avec les mécanismes traceurs de la cissoïde sont joints à celui servant au tracé du point M variable de la conchoïde de Sluse, le tracé de la parabole, de ses tangentes et normales est alors résolu.

On remarquera spécialement à cet effet dans la figure 7 de la page 32, qu'il est immédiat de démontrer que l'ordonnée du point T de la parabole est identique à celle du point L sur la parallèle menée à distance p de la directrice et que l'ordonnée de T vaut ainsi le double de celle du point C.

8. Quatrième mécanisme

Soit un pivot D (pied sur Ox de la directrice de la parabole) sur lequel s'articule une barre a : elle rencontre la barre fixe k (parallèle à distance p

de la directrice) au point C, matérialisé par l'axe d'une glissière coulissant sur cette barre k.

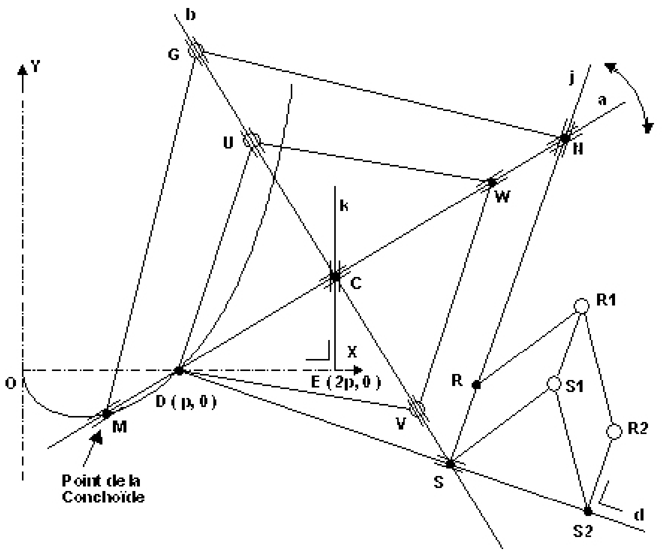


Fig. 11 : Quatrième mécanisme.

Une autre barre b est en pivotement sur l'axe de cette glissière en C : elle matérialisera la diagonale du losange DUWV, formé de 4 barres de longueurs égales : au droit des sommets-articulations U, V et W, 3 glissières coulissent sur la barre b et sur la barre a. La diagonale variable UV est évidemment toujours maintenue perpendiculaire à la diagonale DW : autrement dit, la barre b articulée en C est toujours ainsi perpendiculaire à la droite a.

Sur cette barre b et à distance fixe ($p\sqrt{2}$) du point C, est articulée en S une autre barre j que l'on maintient en position perpendiculaire à une autre barre d (celle-ci articulée en D et coulissant dans une glissière articulée sur S) grâce à un mécanisme à 2 parallélogrammes articulés $S-R-R1-S1$ et $R1-S1-S2-R2$ partageant le côté $R1-S1$ et dont le côté $R2-S2$ est fixé rigidement sur d au point S2 de sorte que sa direction soit perpendiculaire à celle de d. La barre j croise la barre a en N, matérialisé par l'axe des 2 glissières coulissant, l'une sur la barre a, l'autre sur la barre j.

Le triangle *DSN* est donc en permanence rectangle en *S* et sa hauteur est toujours le segment *SC* dont la longueur constante vaut $(p\sqrt{2})$: le produit des segments définis sur l'hypoténuse *DN* de ce triangle rectangle vaut donc toujours $2p^2$ et par suite : $|\overline{DC}| \times |\overline{CN}| = 2p^2$.

Autrement dit, $|\overline{CN}| = |\overline{CM}|$, $|\overline{CM}|$ étant justement la longueur recherchée qui doit être reportée à partir de *C* vers la gauche de *C* sur la barre *a* pour déterminer le point *M* de la conchoïde de Sluse.

Ce report s'opère via un mécanisme en triangle isocèle articulé *NGM*, l'articulation en *G* coïncidant avec l'axe d'une glissière coulissant sur la barre *b* tandis que l'articulation au point *M* recherché coïncide avec l'axe d'une glissière coulissant sur la barre *a*.

Notons, à titre anecdotique, qu'il est bien dommage que la podaire d'une parabole par rapport au pied de sa directrice soit une conchoïde de Sluse plutôt qu'une conchoïde de Nicomède puisque cette dernière, bien qu'il s'agisse d'une quartique (alors que la conchoïde de Sluse n'est qu'une cubique), est bien plus facile à tracer au moyen d'un mécanisme élémentaire formé seulement de 2 barres et de 2 glissières.

9. Cinquième analyse du problème

Le mécanisme envisagé ici est un traceur simultané de la cissoïde et de la conchoïde de Sluse associées à la parabole. Il est directement inspiré des travaux de Newton sur la cissoïde ([1]). A nouveau, ce mécanisme pourrait être complété des éléments utiles au tracé de la parabole, de ses tangentes et de ses normales, c.-à.-d. les éléments décrits dans les 3 premiers mécanismes étudiés. Soit un segment articulé au foyer *F* de la parabole, dont l'extrémité *J* parcourt l'axe *Oy*. Par *J*, on mène la parallèle à *Ox* qui coupe en *K* la directrice et en *L* la parallèle menée à cette directrice à distance *p*. Par *J* encore, on mène la perpendiculaire à *FJ* sur laquelle on détermine le point *Q* tel que $|\overline{KQ}| = |\overline{JK}| = p$.

• **Le lieu du point *P*, milieu de *JQ*, est la cissoïde associée à la parabole.** (21)

([1]) *Arithmetica Universalis*, T. II, Trad. Beaudeux, Paris, 1802.

Comme $|\overline{JK}| = |\overline{KQ}| = p$, le triangle JKQ est isocèle. Le point P, milieu de JQ, est donc aussi pied de la hauteur issue de K. Or, OK est parallèle à FJ et donc aussi perpendiculaire à JQ : OK passe donc par le point P.

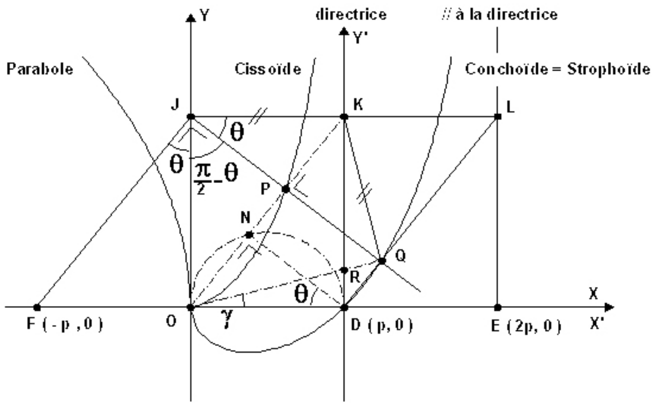


Fig. 12 : Cinquième analyse.

OK coupe la circonférence de diamètre OD en N. ND est donc perpendiculaire à OK. Les 3 triangles rectangles OND, JKP et QKP sont donc isométriques (même hypoténuse p, même angle θ) et ainsi : $|\overline{KP}| = |\overline{ON}|$, ce qui indique justement (cf. section 1, page 21) que P appartient à la cissoïde, podaire de la parabole par rapport à son sommet O.

- **Le lieu du point Q est la conchoïde de Sluse associée à la parabole.** (22)

Dans le triangle rectangle FJO :

$$|\overline{FJ}| = \frac{p}{\sin\theta} \tag{23}$$

Dans le triangle rectangle JKP :

$$|\overline{PK}| = p \cdot \sin\theta \tag{24}$$

JKP et JLQ sont 2 triangles semblables, dans un rapport de similitude 2; donc $|\overline{QL}| = 2.|\overline{PK}|$ et dès lors, de (24) :

$$|\overline{QL}| = 2p \cdot \sin\theta \tag{25}$$

$|\overline{FJ}| = |\overline{OK}| = |\overline{DL}|$ et ainsi, de (23) :

$$|\overline{DL}| = \frac{p}{\sin\theta} \tag{26}$$

De (25) et (26), on tire que :

$$|\overline{DL}| \cdot |\overline{QL}| = 2p^2 \tag{27}$$

Or, (27) indique justement (crf. 4^e Analyse, page 32) que Q appartient à la conchoïde, podaire de la parabole par rapport au pied de la directrice.

• **Le lieu de Q est aussi une strophoïde droite dont le tracé est identique à celui de la conchoïde.** (28)

Dans le triangle isocèle JKQ, KP est médiatrice, hauteur, ... : comme il a été montré que le sommet O du triangle JQO était sur le prolongement de cette médiatrice, il s'agit aussi d'un triangle isocèle. Dès lors, comme son angle $OJQ = 90^o - \theta$, son angle $OQJ = 90^o - \theta$. Or, dans le triangle isocèle JKQ, l'angle $KJQ = \theta$ et donc l'angle $KQJ = \theta$. Par suite, comme $\widehat{OQK} = \widehat{OQJ} + \widehat{KQJ}$, cet angle $\widehat{OQK} = 90^o$.

Le triangle KRQ est donc rectangle en Q et est opposé par le sommet R à l'autre triangle rectangle ORD. Ces 2 triangles présentent en outre des côtés OD et QK de longueurs égales à p : ces 2 triangles rectangles sont donc isométriques et, par suite : $|\overline{DR}| = |\overline{RQ}|$ (29)

Or, cette condition (29) est justement celle qui préside à la définition géométrique de la strophoïde droite.

Dans Oxy, les équations paramétriques des 2 branches de la strophoïde, déduites de (29) sont :

$$x = p(1 \pm sin\gamma) \tag{30}$$

$$\text{et} \qquad y = p \operatorname{tg} \gamma(1 \pm \sin\gamma) \tag{31}$$

L'équation implicite de la courbe complète, obtenue par élimination de γ entre (30) et (31) et changement d'axes $Oxy \longrightarrow Dx'y'$ est :

$$p(x'-p)(y'^2 + x'^2) + 2p^2x'^2 = 0$$

c.-à.-d. l'équation (17) de la conchoïde de Sluse déjà mise en évidence comme podaire de la parabole.

Remarquons enfin que, comme les triangles KRQ et ORD sont isométriques, le triangle KRO est aussi isocèle : ses angles RKO et ROK

sont donc égaux et comme les 2 triangles isocèles KRO et QRD sont opposés par le sommet, les 4 angles $\widehat{RKO}, \widehat{ROK}, \widehat{QDR}$ et $\widehat{DQR}$ sont donc aussi égaux.

Par suite, OK est parallèle à DQ et, par suite encore, appartient à DL où L est le sommet du rectangle $DKLE$, isométrique par rapport au rectangle $OJKD$.

Ainsi, le point Q apparaît comme l'intersection de la circonférence de rayon constant p et de centre variable K avec la droite variable DL, en observant que les points variables K et L parcourent, l'un la directrice de la parabole, l'autre, la parallèle à cette directrice, située à distance $2p$ du sommet de la parabole, les ordonnées de ces 2 points K et L restant en permanence égales. (32)

Cette propriété (32) est à la base du 5^e mécanisme examiné ici, cette fois au titre de traceur simultané de la cissoïde et de la strophoïde (et donc aussi de la conchoïde de Sluse, confondue dans ce cas avec cette strophoïde) associées à la parabole.

10. Cinquième mécanisme.

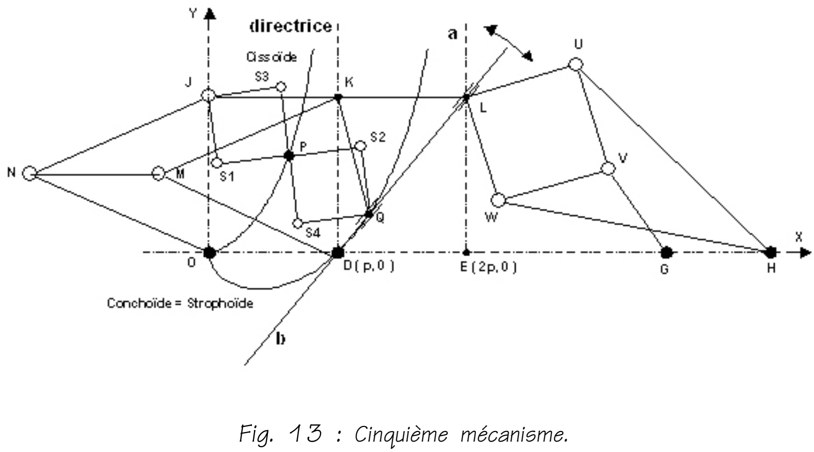


Fig. 13 : Cinquième mécanisme.

Soit 4 pivots O, D, G, H sur Ox .

Sur G et H s'articule un **Inverseur de Peaucellier**, c.-à.-d. le mécanisme très classique, entièrement articulé et destiné à faire parcourir à l'une de ses articulations (ici L) une droite : $LUVW$ est un losange articulé en ses sommets, les barres U et W sont de longueurs égales et la barre GV est telle que $|\overline{GV}| = |\overline{GH}|$: en l'espèce, ce mécanisme est dimensionné et positionné de telle sorte que l'articulation L parcoure la trajectoire ([2]) droite (a) perpendiculaire à Ox en $E(2p, 0)$.

Sur O et D, s'articule un mécanisme à 2 parallélogrammes $ODMN$ et $MNSK$, partageant la même barre horizontale MN ; ce mécanisme impose à la barre SK de rester en permanence horizontale, tout en autorisant le libre déplacement de SK dans le plan. Cette barre SK est prolongée vers la droite jusqu'en la rotule L de l'Inverseur de Peaucellier où elle s'articule ; le tronçon SK est tel que $|\overline{SK}| = p$. Le point K est ainsi astreint à parcourir la directrice ([3]).

Sur ce point variable K est articulée la barre KQ de longueur p. À son extrémité Q, un axe sur lequel s'articule une glissière dans laquelle coulisse la barre b, celle-ci pivotant autour du pied D de la directrice de la parabole mais aussi guidée par coulissement dans une glissière articulée sur l'axe de la rotule L de l'Inverseur de Peaucellier : le point variable Q parcourt ainsi la strophoïde.

Pour tracer la cissoïde, un mécanisme articulé est formé des barres $JS1$, $JS3$, $QS2$, $QS4$, $S1 - S2$ et $S3 - S4$ tel que : $|\overline{JS1}| = |\overline{JS3}| = |\overline{QS2}| = |\overline{QS4}| = L$ et $|\overline{S1 - S2}| = |\overline{S3 - S4}| = 2L$ (longueur L quelconque adaptée pour le tracé d'une portion donnée de la cissoïde), un axe en P (milieu de $S1 - S2$ et $S3 - S4$) sur lequel pivotent les barres $S1 - S2$ et $S3 - S4$ matérialisant le point P variable de la cissoïde qui respecte ainsi la propriété (21) : $|\overline{JP}| = |\overline{QP}|$.

11. Sixième analyse du problème

Le sixième mécanisme envisagé réalise le tracé direct de la parabole. Il est tout simplement basé sur l'interprétation géométrique de l'équation de la parabole sous la forme : $y^2 = -4p \cdot x$ (où $x \leqslant 0$). (33)

([2]) Aucune barre ne matérialise (a) dans le montage.
([3]) Aucune barre ne matérialise cette directrice dans le montage.

Dans la *géométrie d'un triangle rectangle, cette expression peut s'interpréter en considérant que le module de l'ordonnée du point de la parabole est la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit, partageant l'hypoténuse en 2 segments, l'un de longueur constante 4p, l'autre de longueur égale au module de l'abscisse du point de la parabole, propriété directement utilisée pour le 6^e mécanisme.* (34)

12. Sixième mécanisme

Sur l'origine *O* comme pivot et sur un autre pivot *G* implanté sur *Oy*, soit un parallélogramme articulé *OGBC* : son côté *BC* est à considérer comme la matérialisation de la perpendiculaire abaissée du point *T* de la parabole sur *Ox* en *H*.

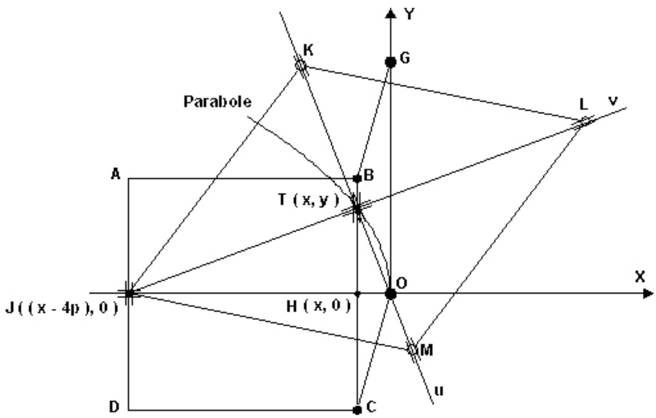


Fig. 14 : Sixième mécanisme.

Sur cette barre *BC*, soit un rectangle *BCDA* fixé rigidement sur *B* et *C* : les longueurs de *AB* et *DC* valent *4p*. L'intersection variable *J* de la barre *AD* avec *Ox* correspond donc au point distant de *4p* du point *H*, à l'aplomb de *T*. Ce point *J* est matérialisé par l'axe de 2 glissières, l'une coulissant sur *Ox*, l'autre sur *AD*.

En appliquant la propriété (34), on sait que l'angle *OTJ* doit être droit. On considérera que cet objectif est atteint si *T* est à l'intersection des 2 diagonales d'un losange, l'une alignée sur JT, l'autre sur OT. Soit donc 2 barres u et v matérialisant ces diagonales, l'une (u) pivotant sur le point fixe O, l'autre (v) sur le point variable J. Comme l'intersection de ces 2 barres diagonales doit passer par T, c.-à.-d. un point variable sur BC, 3 glissières articulées sur un même axe (correspondant à T variable) sont prévues : dans l'une coulisse la barre u, dans l'autre la barre v et dans la 3e la barre BC.

12.1. Compléments au 6e mécanisme pour le tracé des tangentes et normales à la parabole

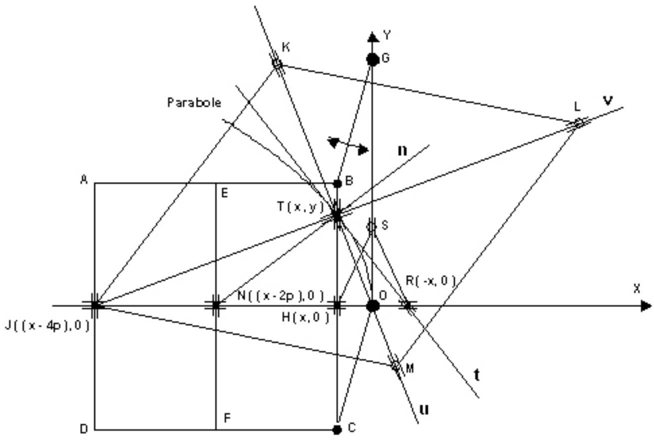


Fig. 15 : Compléments au sixième mécanisme.

Pour le tracé de la normale, la propriété (12) sera appliquée ([4]) : une barre EF est solidarisée au rectangle $ABCD$ (E et F milieux de AB et de DC); son intersection N avec Ox correspond au pied de la normale sur Ox (comme $|\overline{AB}| = |\overline{DC}| = 4p$, $\overline{EB}|| = |\overline{FC}| = 2p$ et donc $|\overline{NH}| = 2$).

N est matérialisé par l'axe de 2 glissières, l'une coulisse sur Ox et l'autre sur EF. En articulation sur cet axe, une barre n matérialise la normale à la parabole : elle doit passer par le point T variable de la parabole et,

([4]) La Sous-Normale = $2p$.

par suite, la barre n passera dans une glissière articulée sur l'axe des 2 glissières déjà mises en œuvre pour définir le point T.

Pour le tracé de la tangente, la propriété (14) sera appliquée ([5]) : un mécanisme en triangle isocèle articulé HSR est alors mis en place ; ses mouvements sont dirigés par les déplacements de H, intersection de BC et de OX, matérialisé par l'axe de 2 glissières, l'une coulissant sur BC, l'autre sur Ox. Le point S est, quant à lui, matérialisé par l'axe d'une glissière coulissant sur la barre Oy tandis que le point R est matérialisé par l'axe d'une glissière coulissant sur la barre Ox.

Une barre t, matérialisant la tangente à la parabole, pivote sur l'axe des 3 glissières en T et se trouve guidée pour passer par R au moyen d'une seconde glissière installée sur l'axe de la première glissière en R .

13. Septième analyse du problème

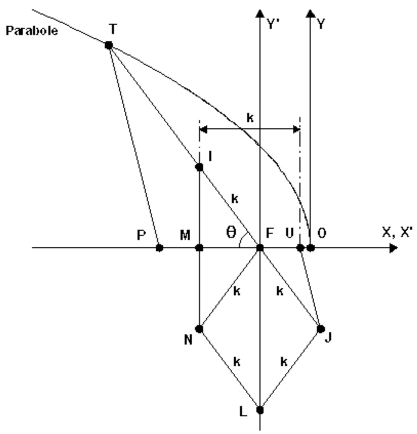


Fig. 16 : Septième analyse.

Le tracé de la parabole est cette fois basé sur son équation polaire classique, établie dans le système $Fx'y'$:

$$\rho = |\overline{FT}| = \frac{2p}{1 - \cos\theta} \qquad (35)$$

Elle peut encore s'écrire :

$$\frac{|\overline{FT}|}{2p} = \frac{k}{k - k\cos\theta} \qquad (36)$$

Dans la figure ci-contre, soit P un point fixe à distance $2p$ du Foyer F et soit I un point de FT à distance k de F.

Soit aussi un losange $FNLJ$ de côté k, L étant astreint à rester à l'aplomb de F et N à l'aplomb de I. Soit encore un point U à distance k du point M, intersection de la verticale IN avec Ox.

([5]) La mesure de l'abscisse $|\overline{OH}|$ du point courant T de la parabole est égale à la longueur $|\overline{OR}|$ du segment déterminé sur l'axe Ox par son intersection avec la tangente variable.

$|\overline{MF}| = k\cos\theta$ et donc $|\overline{FU}| = k - k\cos\theta$. Comme $|\overline{FP}| = 2p$ et $|\overline{FJ}| = k$, la relation (36) s'écrit :

$$\frac{|\overline{FT}|}{|\overline{FP}|} = \frac{|\overline{FJ}|}{|\overline{FU}|} \tag{37}$$

Les triangles *FTP* et *FJU*, opposés par leur sommet commun *F*, sont donc semblables et, par suite, le côté *TP* est parallèle au côté *JU*. (38)

Cette propriété (38) est à la base du septième mécanisme traceur de parabole envisagé ici.

14. Septième mécanisme

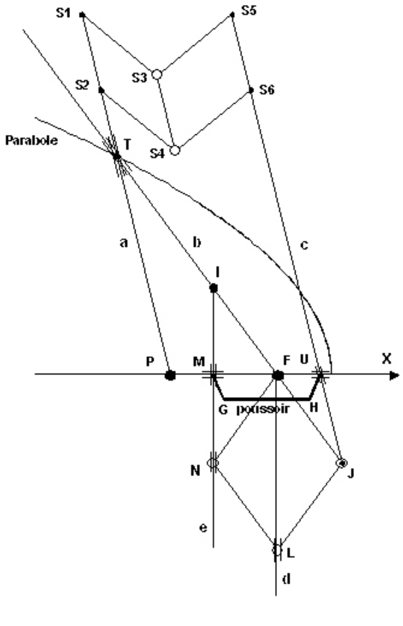


Fig. 17 : Septième mécanisme.

Sur *Ox*, soit 2 pivots, l'un en *F* (Foyer de la parabole), l'autre en *P*, distant de 2*p* de *F*.
Sur *F* pivote la barre *b* sur laquelle, à distance *k* (quelconque) de *F*, 2 pivots *I* et *J* sont implantés. *F* et *J* sont alors les sommets du losange articulé *FJLN* de côté *k* : sur l'axe de sa rotule en *L*, une glissière coulissant sur une barre *d*, fixe et perpendiculaire à *Ox* en *F*, oblige l'articulation *L* à rester en permanence à l'aplomb de *F*.
Une barre *e*, en pivotement sur *I*, coulisse dans une glissière implantée sur l'axe de l'articulation *N* du losange. Comme $|\overline{IF}| = |\overline{NF}|$, le triangle *IFN* est isocèle et, par suite, *IN* reste toujours perpendiculaire à *Ox*.

A l'intersection *M* de *e* avec *Ox*, l'axe de 2 glissières, l'une coulissant sur *Ox*, l'autre sur *e*, matérialise ce point *M*. Articulé sur cet axe *M*, un poussoir de longueur *k* rejoint le point *U*, matérialisé par l'axe d'une glissière *coulissant sur Ox. Dans une autre glissière, articulée en U, coulisse une barre c, articulée en J.*

Soit aussi une barre a, pivotant en P : la propriété (38) indique que cette barre a doit rester parallèle à la barre c. Pour atteindre cet objectif, un mécanisme à 2 parallélogrammes articulés $S1 - S2 - S4 - S3$ et $S5 - S6 - S4 - S3$, partageant la même barre $S4 - S3$, est mis en place pour assurer le parallélisme de ces 2 barres a et c.

Le point T de la parabole est matérialisé par l'axe commun de 2 glissières, l'une coulissant sur la barre a, l'autre sur la barre b.

15. Huitième analyse du problème

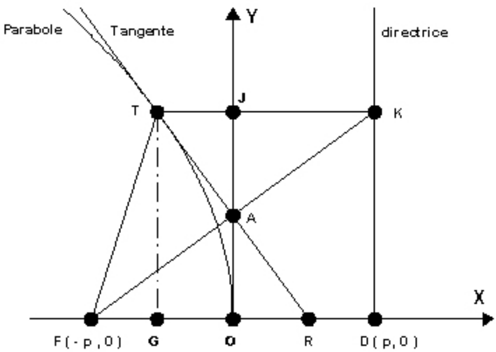


Fig. 18 : Huitième analyse.

On rappelle que :

1. La mesure de l'abscisse $|\overline{OG}|$ du point courant T de la parabole est égale à la longueur $|\overline{OR}|$ du segment déterminé sur l'axe Ox par son intersection avec la tangente variable. (14)

2. $|\overline{OA}| = \frac{|\overline{OJ}|}{2}$ soit, la moitié de la mesure de l'ordonnée du point T considéré sur la parabole. (5)

Les 2 triangles rectangles AOR et AJT sont donc isométriques et, par suite, $|\overline{AT}| = |\overline{AR}|$. (39)

On rappelle aussi que la tangente en T est diagonale de tout losange de diagonale FK. (8)

Les 2 propriétés (8) et (39) sont utilisées pour établir le mécanisme suivant, traceur de la parabole.

16. Huitième mécanisme

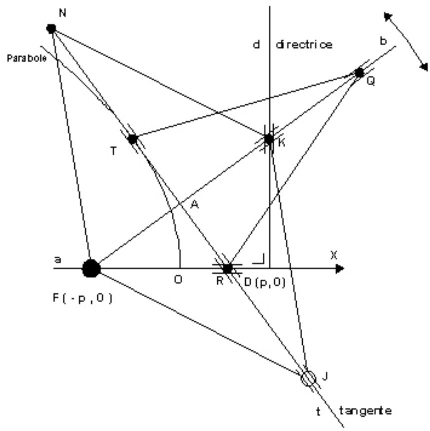


Fig. 19 : Huitième mécanisme.

Soit une barre a, alignée sur Ox ; sur cette barre, un pivot au foyer F de la parabole. Une barre d matérialise la directrice de cette parabole.
Une barre b est articulée sur F. Son intersection K avec b est matérialisée par l'axe de 2 glissières : dans l'une coulisse la barre b ; l'autre glissière coulisse sur la barre d.
Soit un losange articulé $FNKJ$: l'un de ses sommets, F, est fixe, les 3 autres sont mobiles.

En articulation sur le sommet N, soit une barre t qui coulisse par ailleurs dans une glissière articulée sur la rotule J du losange : NJ est ainsi diagonale du losange variable $FNJK$ et matérialise la tangente variable de la parabole, mais matérialise aussi simultanément le lieu du point de contact T de cette tangente à la parabole, c.-à.-d. aussi le lieu du point courant T de la parabole. Soit alors l'intersection R de cette tangente variable avec Ox : on sait que ce point R est symétrique de T par rapport au point A, c.-à.-d. aussi par rapport à l'autre diagonale FK du losange.

Pour matérialiser cette symétrie, soit un mécanisme RQT en triangle isocèle variable : sa barre RQ est articulée à l'une de ses extrémités sur l'axe des 2 glissières en R, à l'autre sur l'axe d'une glissière qui coulisse sur la barre diagonale b ; sa barre TQ, de même longueur que RQ, est articulée en Q puis en T, sur l'axe d'une glissière coulissant sur l'autre diagonale NJ du losange. T définit le point de la parabole.

17. Note

Les figures de cet article ont été composées au moyen du logiciel **DAO DesignCAD 3000**, ©1995-2000, Upperspace Corporation, USA. Tous les mécanismes ont ainsi pu être testés par **DAO** en définissant dans chaque cas plusieurs de leurs positions, p.ex. pour le deuxième mécanisme :

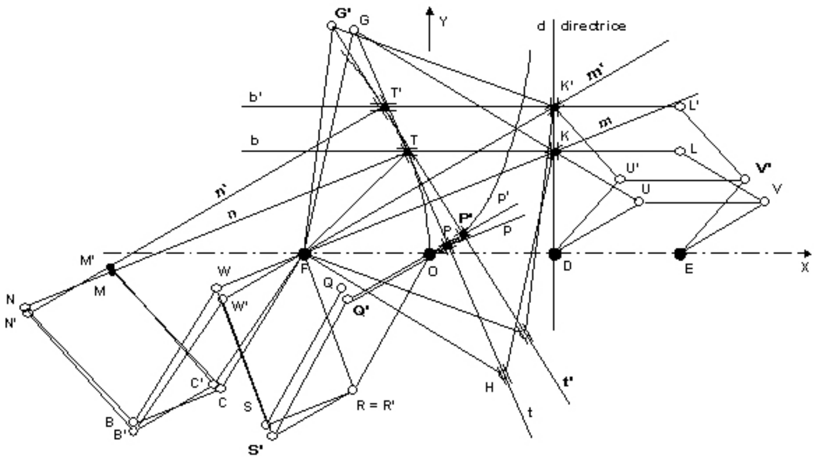


Fig. 20 : Deuxième mécanisme; plusieurs positions.

Bibliographie

[1] Burlet O., *Géométrie*, Lausanne, Ed. L.E.P., 1989, 299 pages.

[2] Devresse A., *Cours de Géométrie Analytique Plane*, Bruxelles, Ed. De Boeck, 1964, 438 pages.

[3] Durand Y., *Cours de Géométrie Analytique et Infinitésimale, Tome III « Les Courbes Planes »*, Ed. F.P.Ms, 1999, 327 pages

[4] Durand Y., *L'Ellipse … à la Règle et au Compas*, texte de la conférence présentée au Congrès de la SBPMef d'août 2002, Mons, Ed. F.P.Ms, 142 pages.

[5] Gomes Teixeira F., *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches, Tome I*, Coïmbre, Ed. de l'Imprimerie de l'Université, 1908, Reprint Ed. J. Gabay, Paris, 1995, 391 pages.

[6] Grogzinski P. & Polster H., *Getriebelehere*, Berlin, Ed. Walter de Gruyter & Co., 1933, 278 pages.

[7] Lupsin G., *Notes de Géométrie Analytique Plane*, Bruxelles-Namur, Ed. La Procure, 1956, 445 pages.

[8] Servais C., Etude Géométrique sur la Cissoïde et la Strophoïde, *Revue belge de Mathématiques « Mathesis »*,Tome X, 1890, pages 9 à 14.

[9] Simon M., *Analytische Geometrie der Ebene*, Leipzig, G.J. Göschen'she Verlagshandlung, 1906, 197 pages.

[10] Vygodski M., *Aide-Mémoire de Mathématiques Supérieures*, Moscou, Ed. MIR, 1990 , 861 pages.

[11] Zinoviev V., *Théorie des mécanismes et des machines*, Moscou, Ed. MIR, 1969, 218 pages.

C'était le 30ᵉ Congrès ...

Il *existe un carré magique* (4 × 4) *dont les sommes des lignes, des colonnes et des diagonales valent* 30.

	10	5	15	0	= 30
	9	6	12	3	= 30
	4	11	1	14	= 30
	7	8	2	13	= 30
= 30	= 30	= 30	= 30	= 30	= 30

Ancien testament, Premier livre des Rois, VII, 23,

Puis il fit la « Mer en fonte », qui avait dix coudées de bord à bord ; parfaitement circulaire, elle avait une hauteur de cinq coudées ; un cordeau de trente coudées en mesurait le tour.

La « Mer en fonte » est un bassin cylindrique de 10 coudées de diamètre et de 30 coudées de circonférence : donc $\pi = 3$.

50 ans de Programmes dans le Secondaire

J.-P. HOUBEN, *U.C.L.*

Mots-clés : 50 ans, programmes, secondaire.

Si l'on m'avait demandé de faire un exposé sur les programmes des 50 premières années du siècle dernier, ma tâche eût été plus facile. En effet, si je prends un des ouvrages classiques de l'époque : un Dalle et De Waele sur la Géométrie plane édité en 1960, on y trouve qu'on en était à sa vingt-sixième édition.

De plus, dans la préface on peut lire :

> *Cette onzième édition (1932) prouve le succès rencontré chez nous par cet ouvrage, la sixième édition datant de 1919.*

On peut presque considérer que l'ouvrage date du début du siècle, et que peu de changements y ont été apportés.

Dans l'avertissement de la 19 ème édition, on trouve d'ailleurs :

> *... pour répondre au vœu exprimé par le Ministère de l'Instruction publique, nous avons donné une nouvelle démonstration de l'existence du barycentre, analysé le problème de la construction du segment de cercle capable d'un angle donné, introduit trois lieux classiques sur les distances d'un point mobile à deux points fixes et, dans les compléments, inséré la notion d'axe antiradical.*

C'était une époque où le grand-père, le père et le fils ont presque vu la même matière à l'école et consulté les mêmes ouvrages.

C'était même très intéressant pour les éditeurs puisqu'il y avait peu de changements d'une édition à l'autre.

Il n'en est plus de même aujourd'hui.

Le résultat du travail de la commission des programmes pendant les cinquante dernières années se retrouve dans un ensemble de documents qui totalise exactement 726 pages de textes. C'est presque un roman, même plus, c'est une saga qui a porté sur cinq générations de programmes.

1. Le Programme de type II en 1951

Dans les années cinquante, la première classe du secondaire était la sixième. On comptait à partir de la sixième jusqu'à la première. Le premier texte complet de programme pour la période considérée date de 1955. Mais son élaboration a débuté auparavant.

Le premier texte en ma possession est de 1951 et concerne les classes de troisièmes, premières années du cycle supérieur. En 1953 est publié le programme pour les secondes et les premières.

Le programme disponible en 1955 reprend l'ensemble des documents précédents et y ajoute les programmes pour les sixièmes, cinquièmes et quatrièmes.

Extraits des commentaires du programme de 1951 destiné au cycle supérieur :

> *Une idée directrice a guidé l'élaboration du nouveau programme de mathématique du cycle supérieur : diminuer la quantité de matière sans tomber en dessous des exigences raisonnables de l'enseignement supérieur. Par là, on espère réserver plus de temps aux exercices et applications et ménager à l'élève plus de possibilités de travail personnel. On a réduit, voire supprimé l'étude de certains points d'intérêt secondaire figurant à l'ancien programme. La trigonométrie sphérique, par exemple, est ramenée en section scientifique à l'établissement des trois formules principales et à leur extension aux triangles rectangles.*
>
> ...
>
> *Par souci d'unité, l'enseignement de certaines branches se limitait jusqu'ici à une classe déterminée. En amorçant dès la classe antérieure, on cherche à ménager une période d'initiation et d'adaptation ; en étendant dans le temps, on veut obtenir que l'esprit des élèves s'imprègne de ces notions.*
>
> ...
>
> *Toutefois, on ne peut perdre de vue que le but lointain et supérieur du cours de mathématiques est le développement de l'esprit logique, de la faculté d'analyse et d'observation, et l'exercice de l'imagination créatrice.*

Pour atteindre cet objectif, il est indispensable de faire résoudre par les élèves un certain nombre d'applications d'une complexité assez grande et d'un niveau de difficulté suffisamment élevé.

...

Ce travail de haute qualité requiert une habile initiation. Ainsi, au cours de séances de recherche collective, le professeur donnera la mesure de son talent didactique en dirigeant les efforts de chacun sans étouffer l'esprit d'initiative.

...

Extraits des directives méthodologiques de 1955 pour le programme du premier cycle.

...

En principe, chaque théorie doit être éclairée par des applications et, dans le choix de celles-ci, on aura le souci constant de rapprocher l'école de la vie. Il ne faut pas non plus perdre de vue qu'on ne peut, en sixième, retenir trop longtemps l'attention des enfants sur un sujet déterminé. Le professeur veillera donc, dans le déroulement des leçons, à varier ses procédés d'enseignement. Il évitera notamment les longues leçons de théorie, qui engendrent fatalement la monotonie.

...

Remarquons le peu de changements dans ce programme des années 50 par rapport au programmes précédents. On allège le programme précédent sur seulement quelques points de matières.

Mais l'important est de constater que, dans les directives méthodologiques de l'époque, on insistait déjà sur le travail personnel de l'élève dans des applications. On y proposait déjà de l'enseignement en spirale.

Dans les programmes des années 50 et 60, on faisait des mathématiques : il y avait des groupements de matières répertoriées en arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie plane, trigonométrie sphérique, géométrie analytique et géométrie descriptive.

De plus, il y avait plusieurs sections :

les latin-grec avec 3 heures de math en fin de cycle, les latin-sciences et scientifiques B avec 5 heures de math en dernière année,

les latin-math et scientifiques A avec 7 heures de math.

C'était le programme dit traditionnel appelé par la suite de type II qui a été d'application pour toutes les classes en 1955 et qui va faire place progressivement au programme moderne et disparaître en 1974.

En effet, en 1958-59, commencent des essais d'enseignement de mathématiques modernes dans deux classes des écoles normales gardiennes de Liège et d'Arlon.

En 1959-60, Georges Papy enseigne à l'école normale gardienne de Berkendael à Bruxelles.

En 1959 la SBPM organise les premières journées d'Arlon et cela jusqu'en 1968. Le ministère de l'éducation nationale prend en charge les journées d'Arlon en 1960.

1961-62 marque le début d'un programme expérimental dans le secondaire.

Pendant toute la période qui a précédé l'introduction officielle du programme moderne, les enseignants enthousiastes ont suivi des formations : journées d'Arlon ou des formations internes dans les établissements.

Il y a eu de l'opposition de la part des anciens qui devaient être très dérangés dans leurs habitudes. Si on trouvait jusqu'à 600 personnes aux journées d'Arlon, c'était loin de rencontrer la majorité des enseignants. Heureusement, il y avait transmission au retour dans les établissements. Moi-même, j'ai, dans l'école où j'enseignais, rédigé des notes et assuré des formations pour des collègues.

2. Le Programme moderne de type I en 1968

L'introduction des math modernes dans les classes est annoncée par le ministre de l'éducation nationale en juin 1962 avec le souhait que les enseignants se préparent à l'enseignement de la mathématique nouvelle. Le programme de mathématique moderne devient obligatoire au 1er septembre 1968 en vertu de la directive du 11 avril 1968 destinée à la première année d'étude de l'enseignement moyen inférieur. Chaque année est publié le programme de l'année d'étude suivante. Celui-ci remplace donc progressivement l'ancien programme de type II.

Voici le commentaire introductif de la circulaire du 11 avril 1968 :

> *Le renouveau de l'enseignement de la mathématique s'élabore dans le monde entier.*
>
> *La Belgique tient dans ce mouvement une place importante. Les circulaires ministérielles des 7 juin 1962 et 14 mai 1965 annonçaient une réforme des programmes de l'enseignement secondaire. Elles encouragèrent dans notre pays de nombreuses expériences de modernisation.*
>
> *Pour donner aux problèmes de l'enseignement de la mathématique une solution nationale, nous avons créé deux commissions d'études.*
>
> *La* **Commission universitaire** *a remis, en septembre 1967, son rapport comprenant la liste des matières qu'elle juge souhaitables pour la préparation aux études supérieures, ainsi que des vœux concernant la mise en application d'un programme nouveau.*
>
> *La* **Commission de l'enseignement moyen**, *chargée d'établir un programme détaillé, a déjà mis au point la partie relative à la première année. Elle a tenu compte des travaux de la Commission universitaire, du programme traditionnel et des expériences conduites suivant le programme optionnel.*
>
> *Après avis du Conseil de Perfectionnement de l'Enseignement moyen, nous avons décidé que le programme repris en annexe entrera en vigueur le 1erseptembre 1968, dans la première année d'études de l'enseignement moyen du degré inférieur de l'Etat.*

Le 11 avril 1969 est publié le programme pour la cinquième avec les commentaires suivants :

> *Toute liberté est laissée au professeur pour traiter les matières du programme dans l'ordre qui lui paraît le plus avantageux et pour choisir les méthodes qui assurent à son enseignement le meilleur rendement en tenant compte du niveau des élèves, de leurs possibilités et de leurs intérêts.*
>
> *Certaines matières peuvent être étudiées en connexion plus ou moins étroite les unes avec les autres et le professeur est juge de l'opportunité d'une telle coordination.*
>
> *La longueur du libellé des différentes rubriques ne préjuge pas de leur importance respective et ne constitue pas une indication sur le temps à consacrer à leur enseignement.*

> *Le maître aura le souci de la construction logique de son cours. Cependant, il ne perdra pas de vue que les concepts mathématiques doivent être enseignés, dans la mesure du possible, en liaison avec la vie quotidienne et les autres branches.*
>
> *Il veillera à faire acquérir par ses élèves les techniques du calcul tant numérique que littéral.*

Le 11 mai 1970 c'est au tour du programme de la quatrième.

> *Les conditions générales, qui servent d'introduction aux programmes des deux années précédentes, sont aussi valables pour le cours de la troisième année.*
>
> *Le professeur tirera parti de la liberté pédagogique qui est la sienne, pour organiser les matières dans un ordre qui se prête le mieux à l'acquisition conceptuelle et pratique des notions mathématiques.*
>
> *Il veillera à montrer, par des applications bien choisies, l'intérêt et la portée de la théorie. En ce qui concerne celle-ci, bien que les possibilités d'abstraction des élèves soient plus grandes que dans les années précédentes, le professeur nuancera ses exigences quant à la connaissance des démonstrations. Si certaines d'entre elles peuvent être trouvées par les élèves, d'autres, plus subtiles tout en étant compréhensibles, ne doivent pas être mémorisées. Enfin, des développements théoriques que le professeur présenterait pour apaiser ses scrupules mathématiques, seront remplacés plus utilement par des travaux où l'activité des élèves a la meilleure part.*

En 1971 sont publiés les programmes pour les troisièmes.

Le 28 avril 1972 paraissent les programmes pour les classes de seconde.

Enfin, le 10 août 1973 est publié le programme complet pour le cycle supérieur et d'application pour ... le 1erseptembre !

Cette année-là, c'est la SBPM qui communique à ses membres le programme pour la première avant que le document officiel parvienne dans les écoles pendant les vacances.

En voici un extrait : le programme pour la section Latin-Grec, économique et sciences humaines.

PROGRAMME DES PREMIERES LATIN-GREC,

ECONOMIQUE et SCIENCES HUMAINES.

MATHEMATIQUES

A. Analyse.

Formule des accroissements finis.
Formule de TAYLOR et de MACLAURIN .
Variation et représentation graphique de fonctions : croissance, décroissance, extréma, tangentes, asymptotes.
Notion d'intégrale ; fonction primitive. Intégration immédiate.
Méthodes d'intégrations.
Calculs simples d'aires et de volumes.
Fonctions exponentielles et logarithmiques.

Commentaire

La formule des accroissements finis sera admise sur la base de son interprétation géométrique.
On pourra présenter les formules de TAYLOR et de MACLAURIN comme des extensions de la formule des accroissements finis. On donnera la formule de MACLAURIN pour $\sin x$ et pour $\cos x$.
Grâce à la formule des accroissements finis, il est possible de montrer la liaison entre la croissance ou la décroissance d'une fonction et le signe de la dérivée première.
On étudiera la variation et la représentation graphique des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} x \longrightarrow ax+b & x \longrightarrow \sqrt{x} \\ x \longrightarrow ax^2+bx+c & x \longrightarrow \sin x \\ x \longrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} & x \longrightarrow \cos x \\ & x \longrightarrow \operatorname{tg} x \end{array}$$

(pour les deux premières, il s'agira d'une vérification rapide).
La fonction homographique et la fonction $x \longrightarrow \operatorname{tg} x$ donneront des exemples d'asymptotes parallèles aux axes.
La notion d'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ sera introduite d'une façon intuitive à partir de la détermination de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe ox, les droites $x = a$ et $x = b$ et le graphique de la fonction f.

On pourra traiter d'abord les intégrales de fonctions en escalier. Elles donneront des approximations de

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

lorsque f est une fonction intégrable quelconque.

D'une manière intuitive, en admettant les propriétés de l'aire, on montrera que

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

lorsque $f(x)$ est continue sur l'intervalle d'intégration.

On considèrera l'ensemble des primitives d'une fonction continue et on se servira des dérivées connues pour calculer des aires par la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f.

On calculera, dans des cas simples, des intégrales par des méthodes classiques : décomposition, intégration par parties, par changement de variable.

A titre d'application, on calculera des aires et des volumes.

On pourra définir une fonction logarithme par l'intégrale :

$$\mathbb{R}_o^+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow \int_1^x \frac{k}{t}\,dt$$

Lorsque k =1, on obtient la fonction logarithme népérienne.

On déduira les propriétés des logarithmes en faisant usage de la dérivée de la fonction logarithme

$$\mathbb{R}_o \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow \frac{k}{x}$$

Une fonction exponentielle apparaîtra comme la fonction réciproque d'une fonction logarithme.

On établira la formule de dérivation des fonctions inverses et on l'appliquera aux fonctions logarithmes et exponentielles.

On ne manquera pas, en plus de quelques applications numériques, de souligner l'importance de la fonction exponentielle comme modèle d'un type de croissance important dans les sciences naturelles et économiques.

On donnera le développement de e^x par la formule de MACLAURIN, ce qui permettra une approximation du nombre e.

B. Calcul des probabilités.

Analyse combinatoire avec et sans répétitions. Binôme de NEWTON

Variable aléatoire. Espérance mathématique. Moyenne. Ecart-type.

Distribution binomiale et normale. Usage des tables.

Loi des grands nombres.

Commentaire

L'<<Analyse combinatoire>> peut être abordée en étudiant le nombre d'applications, le nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini, le nombre des permutations d'un ensemble fini ainsi que le nombre de parties de k objets dans un ensemble fini de n objets ($k < n$). On se limitera à ce qui est indispensable au calcul des probabilités.

Une variable aléatoire est une application dans $\mathbb{R}$, de l'ensemble des cas possibles liés à une expérience aléatoire. On étudiera successivement les variables aléatoires discrètes et les variables aléatoires continues en faisant usage de graphiques pour la distribution et pour la fonction de répartition. Dans le premier cas, l'emploi de signes sommatoires permettra d'établir les formules relatives à la moyenne, à la variance et à l'écart-type de la variable. En ce qui concerne les variables aléatoires continues, on se bornera au cas où il existe une densité de probabilité et on fera usage de l'intégrale d'une fonction numérique.

On appliquera les notions générales à la distribution binomiale. Sous certaines conditions, la distribution normale peut être représentée intuitivement comme limite de la dis-

> tribution binomiale. Il importe de familiariser les élèves avec l'usage d'une table de la variable normale réduite.
>
> En ce qui concerne la loi des grand nombres de Bernoulli, il suffira de l'énoncer et de la commenter.

Cette seconde période va de 1973 à 1980 où toutes les classes suivent le programme moderne de type I.

Pourquoi ce programme moderne n'a-t-il pas répondu à toutes les attentes, à tous les espoirs ?

Personnellement, aujourd'hui je peux le dire, j'ai fait des mathématiques modernes avant la publication des programmes officiels. Dans mon cours d'algèbre il y avait comme sujet : *récapitulation des extensions successives de la notion de nombre. Nombres irrationnels. Valeur décimale approchée d'un nombre irrationnel. Théorie des radicaux arithmétiques. Nombres complexes.*

J'ai remplacé cela par "une extension successive de la notion de nombre". Mais tous les points du programmes ont été vus. Cette matière a été bien accueillie et assimilée par mes élèves. Mais, ... c'était une très bonne classe. De plus ils avaient 17 ans et possédaient un bagage mathématique suffisant pour faire les synthèses voulues : ensemble, relations, groupe, loi de composition, sous-groupe, anneau, champ. Ils avaient suffisamment d'exemples mathématiques qu'ils connaissaient pour assimiler les structures nouvelles.

Mais, pour des enfants de 12 ans, l'enseignement devait être trop théorique. Pour bien comprendre une matière, ne dit-on pas qu'il faut l'intégrer, l'avoir digérée. Or, beaucoup d'enseignants qui, avec leur très bonne volonté, suivaient avec entousiasme les formations, l'ont simplement reproduite dans leur classe.

L'expérience de Papy à Berkendael a été une réussite, parce que c'était lui, d'abord, - un enseignant convaincu fait toujours mieux passer son message - mais il s'adressait aussi à des étudiants qui avaient comme les miens un certain bagage mathématique dû à leurs études antérieures.

A la fin de la réforme des mathématiques modernes on est passé à l'enseignement rénové. Les sections Latin-Grec, Latin-Mathématiques, Latin-Sciences, Economique, Moderne, Scientifique A, Scientifique B disparaissent et les années se comptent à partir de la première pour les 12 ans jusqu'à la sixième pour les aînés. Le rénové a permis de choisir le nombre d'heures de mathématiques :

en première et deuxième : 4h de mathémaiques par semaine.

en troisième et quatrième : 4h par semaine ou 6h par semaine.

en cinquième et sixième : 3h/sem, 5h/sem ou 7h/sem.

On retrouvait ainsi, au choix, le volume d'heures des anciennes sections.

3. Le Programme de 1980

En 1980, pour les réfractaires aux mathématiques du cycle supérieur, est introduit un cours de 2 heures de math/sem avec des thèmes de culture mathématique.

Mais dès 1980 est introduit un nouveau programme en première année du secondaire. Il va se poursuivre d'année en année jusqu'en 1985.

Après le renouveau très théorique des mathématiques modernes de 1968, c'est un retour à une véritable activité de l'élève. C'est une réforme où on remet l'accent sur la méthodologie. Voyons-en des extraits :

En 1980 :

> *L'enseignement de la Mathématique en première année comporte, en même temps qu'un entretien des connaissances acquises à l'école primaire, une initiation à la Géométrie, un approfondissement de la connaissance des nombres, en élargissant leur ensemble à celui des entiers, et des notions fondamentales sur les ensembles, les relations et les fonctions.*
>
> *Cet enseignement a donc pour objectif l'assimilation de certaines notions et propriétés et l'acquisition de savoir faire.*
>
> *Cependant, il ne suffit pas, pour cela, d'énoncer en langage précis des définitions et des propriétés, de les illustrer par l'un ou l'autre exemple, et de les appliquer dans des exercices ad hoc. Il importe que la prise de conscience des notions et des propriétés résulte d'une véritable activité de l'élève.*
>
> *Aussi lui proposera-t-on des activités : résolution de problèmes, calcul, transformation d'expressions, observation d'objets géométriques, analyse de situations concrètes et de situations mathématiques, dans lesquels sont engagés les notions ensemblistes et appliquées les propriétés des nombres ou les éléments de la géométrie.*

C'est à partir de la réflexion sur ces activités qu'on élaborera des définitions et énoncera des propriétés. On demandera d'abord que les notions soient utilisées à bon escient ; ce n'est qu'ensuite qu'on élaborera et consignera des définitions importantes. Pour celles-ci, il ne suffit pas de les faire réciter. Ce qui importe, c'est de les mettre en œuvre, dans des déductions ou des applications immédiates, de manière à en faire saisir peu à peu toute la portée.

On aura d'ailleurs soin :

1. *d'utiliser des propriétés dans des applications significatives plutôt que de dresser des listes d'énoncés de propriétés, ceci aussi bien pour les opérations sur les ensembles et les nombres que pour les relations ;*
2. *de garder aux moyens pédagogiques et aux schémas représentatifs leur juste valeur, de les employer là ou ils aident à appréhender les concepts ou à résoudre des problèmes ;*
3. *d'éviter des exercices qui concernent seulement les schémas pris en eux-mêmes.*

En 1981 :

Après l'ajustement des connaissances opéré en première année dans l'étude des nombres et la découverte de l'espace physique préambulant à l'initiation à la géométrie, le programme de deuxième année vise les objectifs suivants :

I. Nombres :

Notions :

— rendre plausibles les extensions de la notion de nombre, sans pour autant prétendre à une construction de leurs différents ensembles ;
— structurer les ensembles de nombres par leurs opérations et leurs propriétés ;
— faire prendre conscience progressivement à l'élève des "ressemblances" existant entre les différentes structures qu'il rencontre dans l'étude des nombres.

Savoir-faire :

Le savoir-faire doit être compris comme un emploi raisonné de méthodes qu'on est éventuellement capable de justifier; il ne peut en aucune façon se limiter à un usage aveugle de recettes opératoires.

II.<u>*Géométrie*</u> :

Le processus d'"idéalisation-abstraction" mis en œuvre dès la première année pour se libérer du support de l'espace physique s'amplifie au cours de la deuxième année. Cela ne doit pas empêcher toutefois de revenir aux "modèles physiques" pour faciliter l'approche des notion nouvelles.

Le cours de deuxième année se distingue de celui de première année par le souci d'organiser au moins localement les faits géométriques. Ceci postule que, lors des activités géométriques, on fasse la distinction entre, d'une part, les propriétés générales admises et les hypothèses particulières et, d'autre part, ce que l'on peut déduire, mais n'implique pas la construction d'un cours complet de géométrie à partir de quelques axiomes faibles.

...

Après les programmes de 1985, le ministre de l'époque Yvan Ylieff a mis sur pied la commission Danblon qui s'est réunie de 1989 à 1990. Le rapport Danblon a, quant à lui, été publié en juin 1990. Ce document commence par une situation en exergue :

Changer le système d'enseignement des mathématiques est une course de fond. Les gens qui s'y engagent et essayent de la boucler en une décennie n'y arriveront pas et seront complètement désappointés.

Changer le système d'éducation, je sais de façon très claire que les mathématiciens ne peuvent pas le faire, les professeurs ne peuvent pas le faire, les politiciens ne peuvent pas le faire. Pour réaliser vraiment ces changements, il faut un effort global de coopération.

L. Henkin

Nous ne sommes donc pas sortis de l'auberge.

Quelques orientations relatives aux matières

Notre Commission n'a pas considéré comme relevant de sa mission de faire des propositions de détail relatives aux matières, ce qui revient aux Commissions de programmes. Il lui semble toutefois que les quelques indications suivantes pourraient être utiles, non pas de façon générale, mais au moins pour certaines filières.

1. *Les programmes de 1980 insistaient au départ sur la géométrie de l'espace, mais l'ont négligée en cours de route. Il serait utile de réaliser ce qui est resté là à l'état de velléité.*
2. *Réintroduire un peu d'arithmétique raisonnée, amenant une plus grande familiarité avec les nombres naturels.*
3. *Entamer plut tôt l'initiation des élèves à la pensée aléatoire (statistique et probabilité).*
4. *Insister sur la connaissance et l'usage des moyens modernes de calcul.*

Le temps nécessaire pour développer ces quelques points devrait être trouvé, non sans courage sans doute, dans la suppression de certains autres.

Faire évoluer les programmes, ne rien bouleverser

Certaines des réflexions ci-dessus touchent aux fondements des programmes et pourraient donner à penser que notre Commission suggère une réforme radicale. Nous pensons au contraire qu'il faut créer les conditions d'une transformation progressive, longuement mûrie par l'ensemble des personnes qu'elle concerne.

...

4. Les Programmes de 1994

En 1992, un programme expérimental est présenté sous une nouvelle forme : un nouveau découpage. Chaque point du programme comporte deux volets : un noyau et des travaux et applications. Les directives méthodologiques sont maintenant insérées dans le programme présenté en colonnes.

En 1994 dans le programme du premier cycle et qui reprend celui de 1992 et 1993, on retrouve dans l'introduction des extraits des commentaires méthodologiques de 1980, 1968 et 1955. On y fait même référence au rapport Danblon.

> *Il importe que la prise de conscience des notions et des propriétés résulte d'une véritable activité de l'élève.*
>
> (Extrait de 1980)
>
> ...
>
> *Les notions d'ensemble (de nombre, de figures) et de parties d'ensemble, d'équivalence (de proposition, de figures ...), de fonctions numériques (sous les formes de tableau de nombres, de graphiques, de condition ...), de transformation géométrique, les extensions de propriétés des nombres et les analogies entre propriétés des opérations gardent tout leur intérêt pour unifier des chapitres dans un cadre plus général et pour expliciter des mécanismes implicites de la pensée.*
>
> (Extrait de 1968)
>
> ...
>
> *Un bon enseignement des mathématiques doit (aussi, sans attendre l'âge des classes supérieures,) profiter de toutes les occasions pour imprégner l'esprit des élèves des importantes idées de symétrie et d'analogie.*
>
> *Le maître aura recours aux récapitulations fréquentes, aux synthèses après chaque théorie, aux rapprochements entre théories similaires.*
>
> (Extrait de 1955)
>
> ...
>
> *Dans l'enseignement dit en spirale, chaque notion, chaque théorie vue une première fois à un niveau élémentaire et dans un contexte peu étendu est reprise et approfondie plus tard dans un contexte élargi, et ainsi plusieurs fois jusqu'à ce que, d'approfondissement en approfondissement et de généralisation en généralisation, elle arrive à maturité en établissant ses connexions naturelles avec les notions et théories voisines.*
>
> (Extrait du rapport Danblon)
>
> ...

Le 8 mai 1992 est publié le programme expérimental pour les 1e.

Le 17 août 1992 c'est au tour des programmes de géométrie pour les 4e 6h/sem .

Le 2 juin 1993, sortent les programmes pour la 3e année 5h/sem et 5e année 2h/sem, 3h/sem et 5h/sem

Enfin le 4 mars 1994 est publié le programme définitif pour les 1e et 2e années.

5. En l'an 2000 : les programmes dérivés du décret mission

Nous arrivons à la fin du siècle avec la dernière modification que vous devez bien connaître parce que vous la pratiquez et qui a débuté en 2000 suite au décret mission.

Pour le premier degré commun :

> à partir de 2001-2002 pour la 1ère
>
> à partir de 2002-2003 pour la 2ème
>
> abroge le programme du 22 mai 1995

Pour le deuxième degré :

> à partir de 2001-2002 pour la 3ère
>
> à partir de 2002-2003 pour la 4ème
>
> abroge le programme du 20 mai 1997

Pour le troisième degré formation optionnelle obligatoire 6, 4 ou 2 périodes :

> à partir de 2001-2002 pour la 5ère
>
> à partir de 2002-2003 pour la 6ème
>
> abroge le programme du 20 juin 1999

Il n'y a d'ailleurs que pour les mathématiques que la commission des programmes est interréseaux. Le contenu des programmes est le même pour les trois réseaux d'enseignement : celui de la communauté française, celui de l'enseignement libre et celui de l'enseignement des villes et des communes.

La commission des programmes est constituée des représentants des différents réseaux : inspecteurs et conseillers pédagogiques. Le programme qui en est sorti était le résultat des discutions et des compromis entre les membres de cette commission.

Avec les mathématiques modernes les spécificités dans les différentes branches ont disparu. Il n'y avait plus que de la mathématique.

Dans les derniers programmes on reparle d'algèbre, de géométrie, de trigonométrie et d'analyse.

C'est un retour du balancier après l'intermède des mathématiques modernes. Cependant les contenus ne sont pas restés les mêmes. Des pans entiers de matières ont été perdus alors que d'autres ont été développés.

De l'arithmétique présente dans les programmes des années 50, il n'en est resté que la notion de PGCD et PPCM à partir des mathématiques modernes. Toute la formation obtenue par les démonstrations sur la divisibilité, les nombres premiers s'est envolée. C'était des petites démonstrations, vérifiées dans le cycle inférieur sur des nombres puis démontrées en toute généralité dans le cycle supérieur.

Mais toute cette arithmétique a disparu des programmes du secondaire. Elle est cependant encore développée pour les besoins de l'informatique et les clefs de messages codés.

A disparu aussi des programmes la géométrie descriptive de Monge qui donnait une représentation d'objets de l'espace par trois projections : projection verticale, horizontale et de profil.

La géométrie et la géométrie analytique ont été fortement réduites.

Les Théorèmes de Céva et de Ménélaüs sont passés à la trappe. L'analytique n'a conservé que les coniques rapportées à un système d'axes cartésiens rectangulaires.

La trigonométrie n'étudie les triangles que dans les cas où seuls les angles et les côtés sont donnés. Les situations avec les bissectrices et les médianes ne sont plus envisagées.

Quant à la trigonométrie sphérique elle a complètement disparu. Elle n'est plus utilisée que dans des domaines très spécifiques : la topographie, l'aviation, l'astronomie et les vols spéciaux. Ce sont donc seuls ces utilisateurs qui l'étudient encore.

D'ailleurs, les formules ne sont pas si simples.

Les formules fondamentales bien connues de la trigonométrie plane :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

deviennent en sphérique :

$$cos^2(a) = cos^2(b) + cos^2(c) - 2sin(b)sin(c)cos(A)$$

Mais, c'est surtout l'analyse qui s'est développée depuis les mathématiques modernes. Dans les années 50, l'intégrale n'était pas abordée dans les sections fortes en mathématiques. Seule la section latin - grec y avait droit. Que faut-il penser des commentaires du programme de 1955 ?

> *Dans son ensemble, le cours d'algèbre revêtira le caractère rigoureux de l'enseignement des autres branches des mathématiques. Cependant quelques matières échappent à cette exigence, notamment les nombres irrationnels, les limites et les dérivées : l'étude en profondeur de ces questions n'est accessible que dans l'enseignement supérieur et nos programmes ne peuvent leur accorder qu'un développement intuitif dépourvu de toute prétention.*
>
> *La portée de ces restrictions doit encore être accentuée quand il s'agit des notions de calcul différentiel et intégral dans les sections latin-grec ou latin-sciences.*

Les programmes ont changé pendant 50 ans, mais il y une certaine constance dans les contenus. Depuis les années 50, on prône un enseignement où les matières sont introduites par des situations de la vie réelle. Il est même proposé que les matières soient abordées progressivement comme dans l'enseignement en spirale imposé maintenant.

Mais toutes ces directives méthodologiques était-elles vraiment lues et suivies ?

Dans les programmes de base on retrouve les mêmes thèmes :

Etude des nombres, puis des fractions.

La résolution d'équations et de systèmes d'équations à l'occasion de problèmes.

L'étude des polynômes avec la division par $(x - a)$.

La résolution des triangles rectangles et les formules principales de la trigonométrie.

L'étude de la fonction du premier degré.

La résolution de l'équation du second degré et étude du trinôme.

On termine par l'analyse avec les dérivées et l'intégration.

Que penser pour l'avenir ?

La situation est différente suivant les élèves que nous avons en classe.

Les bons et très bons élèves ont toujours très bien appris à faire des mathématiques quels que soient les programmes. C'est même pendant la période des mathématiques modernes qu'il y a eu le plus d'agrégés en mathématiques.

Pour les autres, c'est au professeur de faire aimer les mathématiques par une approche la plus naturelle possible. En fait, pourquoi ne pas répondre anticipativement à la question classique << à quoi ça sert ? >> par une approche par problèmes. C'est ce que les programmes nous proposent depuis 50 ans et nous imposent maintenant.

En fait, historiquement, les mathématiques se sont développées à cause des besoins du moment. On peut donc faire des mathématiques et en même temps avoir des repères dans l'histoire de l'humanité. Situer les grands mathématiciens dans un contexte historique est profitable. Mais, c'est un tout autre sujet qui devrait aussi intéresser les enseignants afin d'enseigner les mathématiques en montrant d'où elles viennent et quelles sont les raisons qui les ont fait évoluer.

C'était le 30^{e} Congrès ...

Une période de 30 ...

- Trentaine : *environ 30 ; environ 30 ans.*
- Trentenaire : *qui dure 30 ans ; âge de 30 à 39 ans.*
- Tricennal : *d'une durée de 30 ans.*
- Trigésimal : *à base 30.*
- Triacontagone : *polygone à 30 côtés.*
- Trentain : *30 messes pendant 30 jours consécutifs pour un défunt..*

Rallye de l'enseignement fondamental

PH. SKILBECQ, *CREM*

Depuis quelques temps, le Conseil d'Administration de la SBPMef réfléchissait aux moyens et aux actions qu'il pouvait mettre en œuvre au service de l'enseignement primaire. Le 30^e Congrès à Liège fut l'occassion d'un premier pas en consacrant plusieurs conférences et cours-ateliers plus particulièrement à l'intention des instituteurs.

D'une part, l'Association Cuisenaire de Belgique a pu exposer l'utilisation des matériels CUISENAIRE, ATTRIMATH et TANGRAM aux niveaux maternels et primaires ; d'autre part, le CREM a montré l'apprentissage des notions de grandeurs, fractions et mesure avec le logiciel APPRENTI GÉOMÈTRE.

La SBPMef a également décidé de parrainer et d'organiser un RALLYE MATHÉMATIQUE pour les 3^e , 4^e , 5^e et 6^e primaires en 2004-2005.

1. Le Rallye

En 1993, la Suisse romande créait un RALLYE MATHÉMATIQUE, une confrontation s'adressant à des classes entières du primaire. En 1996, des classes italiennes se joignaient à l'épreuve qui prit le nom de RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN (RMT). Vinrent ensuite les Français, les Luxembourgeois et même des Israéliens. L'année dernière, plus de 2000 classes participèrent au 12^e RMT. La SBPMef a décidé d'élargir dans une autre direction le terme « transalpin » et de faire acte de candidature à l'ASSOCIATION DU RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN (ARMT), l'organisme international qui coordonne désormais ce RALLYE. Notre appel ayant été chaleureusement accueilli, nous vous transmettons le flambeau car, c'est à vous que revient de relever le gant.

Dans un premier temps, le rôle de notre Société se limitera à organiser un groupe de travail de gens du terrain qui prendra en charge la diffusion (et l'éventuel calibrage), puis la correction des problèmes du RALLYE pour cette première année de participation. Le secrétariat de la Société s'occupera de l'intendance. Dans un seconde étape, si comme nous l'espérons, la participation d'écoles belges est un succès, des instituteurs belges rejoindront l'équipe internationale qui prépare, discute et amende les problèmes. Bien que le RALLYE s'adresse aux élèves de 8 à 14 ans, nous pensons ne pas disperser nos forces et nous limiter cette première année aux quatre dernières années de l'enseignement fondamental.

2. Buts du RALLYE

Le RALLYE propose aux élèves :

— *de faire des mathématiques en résolvant des problèmes;*
— *d'apprendre les règles élémentaires du débat scientifique en discutant et défendant les diverses solutions proposées;*
— *de développer leurs capacités, aujourd'hui essentielles, à travailler en équipe en prenant en charge l'entière responsabilité d'une épreuve;*
— *de se confronter avec d'autres camarades, d'autres classes.*

Pour les maîtres, associés à toutes les étapes dans la mesure de leurs disponibilités, le RALLYE permet :

— *d'observer des élèves (les leurs lors de l'épreuve d'essai et ceux d'autres classes par la suite) en activité de résolution de problème;*
— *d'évaluer les productions de leurs propres élèves et leurs capacités d'organisation, de discuter des solutions et de les exploiter ultérieurement en classe;*
— *d'introduire des éléments de renouvellement dans leur enseignement par des échanges avec d'autres collègues et par l'apport de problèmes stimulants;*
— *de s'engager dans l'équipe des animateurs et de participer ainsi à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.*

Pour l'enseignement des mathématiques en général et la recherche en didactique, le RALLYE *offre une source très riche de résultats, d'observations et d'analyses. Des journées d'études internationales permettent aux animateurs des différents pays participants de conduire des analyses* a priori *ou* a posteriori *et de déterminer les exploitations didactiques des problèmes du* RALLYE*. Ces finaltés se sont définies au cours des années et font l'objet d'adaptations permanentes, lors des rencontres internationales ou locales.*

3. Les épreuves

Sans règles du jeu, il ne peut y avoir de comparaisons productives. Le RALLYE établit donc un contrat entre l'équipe d'animateurs, les maîtres et les classes participantes, dont voici les termes essentiels :

- Le RALLYE propose des épreuves de résolution de problèmes par classes entières, réparties en quatre catégories, pour les 3e, 4e, 5e et 6e années de l'enseignement fondamental. La décision de participer au concours est prise conjointement par la classe et le maître, après une épreuve d'essai au cours de laquelle les uns et les autres ont pu saisir les enjeux d'une résolution collective de problèmes, à la charge des élèves seulement.
- Chaque épreuve est composée de 5 à 7 problèmes par catégorie, à résoudre en 50 minutes. Des problèmes sont communs aux quatre catégories. Ils sont choisis, en nombre et en difficulté, de telle façon que chaque élève, indépendamment de son niveau, puisse y trouver son compte et que l'ensemble de la tâche soit globalement trop lourd pour un seul individu, aussi rapide soit-il.
- C'est la classe qui est responsable des réponses apportées. Les élèves doivent produire une solution unique pour chacun des problèmes. Il n'y a pas que la « réponse juste » qui compte, les solutions sont jugées aussi sur la rigueur des démarches et la clarté des explications fournies. Les épreuves qui suivent les essais se font hors de la présence du maître titulaire de la classe. Celui-ci est remplacé par un collègue avec qui, si possible, il fait un échange. Il quitte donc son rôle d'enseignant pour celui d'observateur, s'abstenant de toute intervention, de quelque nature que ce soit, dans la classe dont il a le contrôle pendant la durée de l'épreuve. Son rôle se limite à la distribution des sujets, au contrôle de la durée et à l'envoi des copies à l'équipe qui sera chargée de les évaluer.
- La préparation des problèmes se fait en coopération entre les différentes équipes régionales et nationales. Les traductions (en français, italien, allemand, hébreu) sont rigoureusement comparées.
- L'évaluation des copies est faite par l'équipe régionale responsable, selon les critères déterminés dans l'analyse *a priori* des problèmes, lors de leur élaboration. Pour chaque catégorie, un classement est établi, par région, sur l'ensemble des deux épreuves I et II. C'est lui qui détermine la participation aux finales régionales. Les critères

d'évaluation et le résultat de chaque problème, ainsi que les classements, sont communiqués aux classes dans les meilleurs délais.

- Après chaque épreuve le maître est libre de photocopier les solutions produites par la classe, d'exploiter les problèmes, de les discuter, de les reprendre et d'analyser les résultats avec l'ensemble des élèves.
- Des journées d'études internationales permettent aux animateurs des différents pays participants de se rencontrer pour organiser l'élaboration des problèmes, conduire des analyses *a priori* ou *a posteriori*, déterminer les orientations du Rallye ou les exploitations didactiques de ses problèmes. L'appui scientifique au Rallye est assuré par l'ARMT, ses sections, son comité exécutif et ses coordinateurs internationaux, dont plusieurs membres appartiennent à des institutions de recherche en didactique des mathématiques dans leurs pays. De nombreux comptes-rendus des Rallyes précédents sont publiés dans la revue Math-École ([1]).

4. Organisation pratique

Le Rallye Mathématique Transalpin s'organise selon quatre étapes :

- une épreuve d'essai, en novembre ou décembre. Cette étape est placée sous l'entière responsabilité des maîtres qui choisissent les problèmes, les proposent selon les principes du rallye, en discutent avec leurs élèves, s'occupent de l'inscription et de son financement. La décision de participer au concours est prise conjointement par la classe et le maître, après que l'épreuve d'essai ait permis aux uns et aux autres de saisir les enjeux d'une résolution collective de problèmes, à la charge des élèves seulement ;
- une première épreuve, en janvier ou février, selon entente entre les maîtres concernés, titulaires et surveillants ;
- une deuxième épreuve en mars ou avril ;
- une finale, en mai, regroupant les classes d'une même région ayant obtenu les meilleurs scores dans les deux épreuves.

([1]) Cette revue est disponible au Crem (067 21 25 27) et au siège de la SBPMef.

5. Conceptions pédagogiques et didactiques du Rallye

Résolution de problèmes et activité mathématique

C'est en résolvant les problèmes auxquels il était confronté que l'homme a commencé à élaborer ses connaissances mathématiques. Il y a tout lieu de penser qu'il en va de même pour l'élève. De nombreux pédagogues et didacticiens affirment que la résolution de problèmes constitue l'une des stimulations essentielles des apprentissages, par le sens qu'elle donne aux situations à mathématiser. Mais encore faut-il s'entendre sur ce que l'on appelle « problème ».

Le Rallye propose des situations pour lesquelles on ne dispose pas d'une solution immédiate et qui conduisent à inventer une stratégie, à essayer, à vérifier, à justifier sa solution. Cette définition se rapproche de celle du « problème ouvert », qu'on s'approprie rapidement, où l'on trouve des défis, du plaisir à chercher, des aspects ludiques. Ce n'est pas celle du « problème d'application » destiné à renforcer et assimiler des connaissances ou en étendre le champ d'application, qu'on situe généralement en fin de séquence d'apprentissage d'une notion. Ce n'est pas non plus celle de la « situation-problème » destinée à construire de nouvelles connaissances, exigeant des phases de recherche, des mises en commun et des séquences d'institutionnalisation qui se développent sur une longue durée.

Une des conséquences de la définition du problème de Rallye est qu'il doit être inédit (dès qu'on en a trouvé la solution, ce n'est plus un problème), riche et stimulant pour les élèves. Une autre condition, imposée cette fois-ci par le contexte scolaire, est que ces problèmes doivent être exploitables en classe, après le concours. On ne participe pas au Rallye « en plus » ou « à côté » des activités habituelles mais on le conçoit comme une partie intégrante (« à l'intérieur ») du programme de mathématiques et de ses objectifs ; en particulier de ceux qui concernent l'initiation à la démarche scientifique, le développement de l'autonomie, l'organisation d'une recherche, la rigueur des notations, la communication de résultats.

Débat et travail d'équipe en mathématiques

Bien souvent, le maître pense qu'il est le seul responsable de la réussite de ses élèves lorsque ceux-ci sont placés devant un problème de mathématiques. Il a tendance, par conséquent à diriger le travail, à donner des indices conduisant aux démarches les plus efficaces, à contourner les obstacles, à ériger des protections contre les erreurs, à montrer le bon chemin. C'est aussi lui qui, le plus souvent, informe les élèves de la pertinence de leur travail, juge leurs démarches et résultats.

Dans le débat actuel sur l'enseignement et l'apprentissage, la tendance est de donner aux enfants l'occasion d'argumenter, de discuter leurs solutions, de soutenir les affirmations qu'ils avancent, de valider leur travail mathématique. En un mot leur faire confiance, leur laisser la charge ou la responsabilité de leur recherche.

Cette « dévolution » (comme disent les didacticiens) de la tâche de résolution à l'élève ou au groupe est assurée par la première des règles du Rallye : le maître n'intervient plus du tout dans la recherche ; il le voudrait qu'il ne pourrait pas car il est absent de sa classe, remplacé par un observateur extérieur dont les tâches pratiques se limitent à la distribution des énoncés. Pour les élèves, il s'agit alors de se répartir le travail, de gérer le temps, de s'organiser à plusieurs, de contribuer personnellement à la recherche, d'accepter les contributions des autres, de pouvoir entrer dans leurs points de vue. Ces capacités d'interactivité relationnelle ne sont pas faciles à acquérir, mais elles sont de plus en plus nécessaires pour s'adapter à la société actuelle. Il y a trop de problèmes à résoudre pour un seul élève dans une épreuve du rallye. Là encore, les règles du jeu garantissent la coopération et la valorisation des interactions entre élèves.

Observation des élèves et évaluation

Dans la pratique quotidienne, les multiples tâches de gestion d'une activité de résolution de problèmes - mise en place matérielle, relances, interventions différenciées selon les groupes d'élèves, mises en commun - occupent généralement la totalité du temps du maître. Sous les contraintes d'organisation et d'animation, celui-ci doit se contenter d'entrevoir quelques démarches de ses élèves, de fugaces épisodes de discussion, de brèves séquences de construction.

Les règles du Rallye lui confèrent un autre rôle : celui d'observateur - dans sa propre classe lors de l'épreuve d'essai, dans celle d'un collègue lors des épreuves comptant pour le concours. Il peut donc tout à loisir s'intéresser à un groupe ou un autre, voire évoluer les stratégies, assister aux débats. Le déroulement du Rallye offre également des conditions exceptionnelles pour une évaluation des aptitudes du groupe et de ses individus. Tous les maîtres qui l'ont expérimenté le reconnaissent : ils perçoivent à cette occasion des phénomènes, des attitudes, des compétences, des lacunes ou des obstacles qu'ils n'avaient pas pu constater dans les conditions habituelles de classe. Ces observations, exploitées lors de mises en commun après la passation des épreuves, conduisent à des mises au point, des consolidations, des activités complémentaires, toutes caractéristiques d'une évaluation formative.

Valorisation de la recherche en didactique des mathématiques

Le RALLYE n'est pas qu'une compétition, c'est aussi l'occasion d'un intense travail d'analyse didactique. Lors de l'élaboration des sujets, l'équipe de rédaction envisage, *a priori*, les différentes procédures que les élèves pourront adopter, les obstacles qu'ils rencontreront, les représentations qu'ils se feront de la tâche.

Puis vient l'écriture des textes, le réglage des variables qui permettra de tirer profit au mieux de la situation. Après l'épreuve, c'est la grande séance de correction où les explications des élèves, les « perles » parfois, la rigueur des justifications surtout, n'en finissent pas d'étonner les évaluateurs. Finalement l'analyse *a posteriori* permet de confirmer ou d'infirmer les hypothèses de départ, de faire apparaître des stratégies ou des représentations non prévues, de calculer la fréquence des types de procédures, de mesurer les difficultés rencontrées par les élèves. En conclusion de cette introduction, le rallye est une opportunité de rencontre, un lieu d'échanges entre la pratique de la classe et la réflexion pédagogique et didactique

6. Des épreuves du Rallye Mathématique

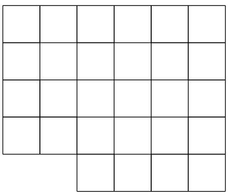
Afin de se rendre compte de ce que sont les épreuves du Rallye, nous vous proposons quelques problèmes établis par le comité de rédaction du Rallye Mathématique Transalpin et proposés aux élèves au cours des épreuves 1 et 2, ainsi qu'à l'épreuve finale de la session 2001-2002. Ils sont extraits de la revue Math-École, numéros 200, 201 et 202. Ces problèmes sont classés par catégories, de 3 à 6, qui correspondent aux quatre dernières années de l'enseignement primaire. La majorité des situations proposées sont prévues pour plusieurs catégories. Ceci permet, pour une même catégorie, de posséder un large éventail de choix lors des épreuves.

Dans la plupart des cas, les problèmes s'articulent autour des domaines de la géométrie et des grandeurs associées, des nombres et de la logique. Ces activités permettent donc d'exercer de nombreuses compétences mathématiques. Il va sans dire que la lecture est, comme pour beaucoup de situations de classe, une compétence essentielle à exercer au cours de la résolution de ces situations. Cependant, la tâche ne s'effectue pas individuellement, l'entraide et la participation de tous étant une des règles d'or du Rallye Mathématique.

Nous espérons que ceci pourra rencontrer un double objectif :
- d'une part, vous confronter au Rallye Mathématique et vous motiver à y participer ;
- d'autre part, vous proposer des problèmes que vous pourrez utiliser en classe avec vos élèves, et ainsi rencontrer un des autres objectifs du Rallye Mathématique.

- Catégories 3, 4 — Feuille de timbres

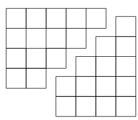
Monsieur Méticulus, employé à la poste de Transalpie, a devant lui une feuille de timbres carrés, dont deux timbres ont été détachés. Il aimerait partager cette feuille en deux parties qui se recouvrent exactement.



Comment Monsieur Méticulus doit-il faire pour obtenir deux parties de même forme, avec le même nombre de timbres ?
Indiquez votre solution.

Notre commentaire : la tâche proposée demande que les deux parties se recouvrent exactement, c'est-à-dire que l'on puisse les superposer sans que rien ne dépasse, ni de l'une ni de l'autre feuille de timbres. Mais, elle ne précise pas si l'on doit uniquement glisser les feuilles l'une sur l'autre ou si l'on peut en retourner une pour la superposer à la seconde.

Solution



- Catégories 3, 4 — Bonbons aux fruits

Il y a trois sortes de bonbons dans le paquet de Grand-mère : à l'orange, au citron et à la fraise.
- Il y a un nombre impair de bonbons dans le paquet.
- Les bonbons à la fraise sont les plus nombreux.
- Le nombre de bonbons à l'orange est le même que celui des bonbons au citron.
- Le produit des trois est 36.

Combien y a-t-il de bonbons de chaque sorte dans le paquet de Grand-mère ? Expliquez votre raisonnement.

Notre commentaire : dans la rédaction de la tâche apparaît le terme « produit » qui peut ne pas être connu par certains élèves de troisième et quatrième années primaires. Cependant, il nous semble que cette information est celle qui est la plus pertinente pour débuter la résolution de la tâche. Établir un tableau reprenant toutes les situations peut sembler une tâche imposante, mais on peut la limiter si dans la première colonne, on inscrit le nombre de bonbons à la fraise. La deuxième condition nous indiquant que ces bonbons sont les plus nombreux, il nous suffit de noter dans une deuxième colonne le nombre de bonbons à l'orange et dans une troisième colonne le nombre de bonbons au citron, en veillant que ces deux nombres restent inférieurs à celui de la première colonne. Trois situations montrent un même nombre de bonbons à l'orange et au citron, mais une seule de ces trois situations donne un nombre impair de bonbons dans le paquet, d'où la solution.

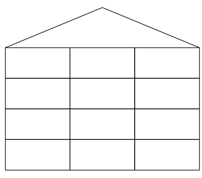
F	O	C
36	1	1
18	2	1
18	1	2
12	3	1
12	1	3
9	4	1
9	2	2
9	1	4
6	6	1
6	3	2
6	2	3
6	1	6
4	3	3

Solution
9 bonbons à la fraise,
2 bonbons à l'orange,
2 bonbons au citron.

A posteriori, l'enseignant peut analyser la situation, et bien d'autres similaires, en mettant en évidence les informations nécessaires (et éventuellement non nécessaires), et expliquer pourquoi elles le sont. De même pour la démarche qui permet de connaître toutes les solutions possibles de décomposition d'un nombre en trois facteurs et leur rangement, comme celles montrées par le tableau.

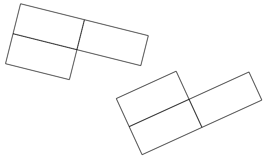
- Catégories 3, 4, 5 — Puzzle de quatre pièces

Marco doit recouvrir entièrement ce tableau pendu au mur par quatre pièces de papier.



Il dispose de deux pièces de cette forme :

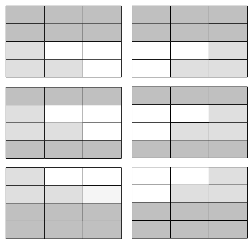
et de deux autres pièces de cette forme, qu'on peut retourner :



De combien de manières différentes Marco peut-il recouvrir le tableau ? Dessinez toutes les manières possibles de disposer les pièces.

Notre commentaire : l'analyse des pièces et de leurs positionnements possibles dans le tableau fait apparaître rapidement qu'elles possèdent une seule orientation possible, nous dirons une orientation horizontale. En effet, le plus petit élément étant un rectangle, ses deux dimensions différentes — longueur et largeur — forcent l'orientation des pièces. Il en va de même pour l'assemblage des deux dernières pièces qui doivent absolument être juxtaposées.

Solution



La résolution complète de la tâche demande aussi de percevoir la possibilité de retournement des deux dernières pièces et le fait que ceci apporte trois nouveaux assemblages possibles, différents des premiers (voir la seconde colonne de la solution ci-dessus).
Comme pour l'activité précédente, la méthode avec laquelle les élèves vont rechercher les solutions est importante pour s'assurer de les avoir toutes. A posteriori, cela peut également être analysé en classe et transféré à de nouvelles situations.

- Catégories 3, 4, 5 — L'un monte, l'autre descend

Jean va chez Jacques. Quand il arrive à la maison de son ami, Jean monte les escaliers par sauts d'une marche ou de deux marches à la fois, de manière irrégulière.
Jacques descend à sa rencontre en faisant toujours des sauts de trois marches à la fois.
Les deux amis se rencontrent sur la sixième marche (depuis le bas), après avoir fait chacun le même nombre de sauts.

Combien de marches peut avoir l'escalier de la maison de Jacques ? Expliquez comment vous avez trouvé vos solutions.

Notre commentaire : les élèves doivent d'abord déterminer le nombre de sauts possibles pour Jean à partir des informations disant : rencontre à la sixième *marche et sauts de une ou deux marches. À partir du nombre de sauts de Jean, on peut déterminer les marches descendues par Jacques et donc calculer les différents nombres possibles de marches de l'escalier.*

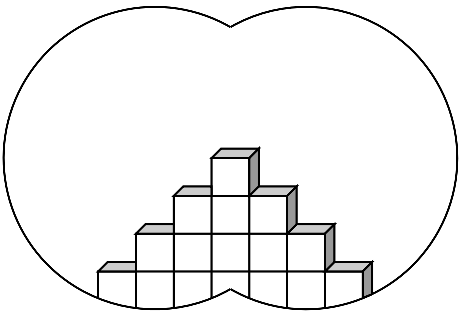
Type de déplacement de Jean	Nombre de sauts de Jean	Nombre de marches pour Jacques	Nombre de marches de l'escalier
1+1+1+1+1+1	6	6 x 3 = 18	6 + 18 = 24
1+1+1+1+2	5	5 x 3 = 15	6 + 15 = 21
1+1+2+2	4	4 x 3 = 12	6 + 12 = 18
2+2+2	3	3 x 3 = 9	6 + 9 = 15

Solution

L'activité pourrait se poursuivre par la comparaison des escaliers présents dans la maison de chacun des élèves : hauteur à monter, nombre de marches, hauteur, longueur et largeur (giron) d'une marche... En fonction de tous ces éléments, il serait également possible de rechercher quels sont les escaliers plausibles dans la tâche proposée par le rallye. Sachant que l'on peut admettre qu'une marche permet de gravir en moyenne 18 cm, l'escalier qui possède 24 marches serait installé dans une maison où la hauteur à monter pour atteindre le niveau supérieur serait de près de 4 mètres cinquante !

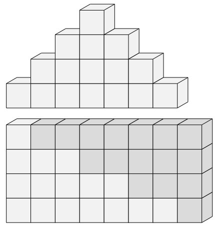
- Catégories 4, 5, 6 — Double escalier

Sophie a construit un double escalier, bien régulier, de 1 mètre de haut, avec des cubes de 5 cm d'arrête. Son ami André, de la fenêtre de la maison d'en face, observe sa construction avec des jumelles. Voici ce qu'il voit :



Combien Sophie a-t-elle utilisé de cubes pour construire son escalier ? Expliquez votre solution.

Notre commentaire : cette situation peut-être abordée soit uniquement numériquement en additionnant le nombre de cube contenu dans chaque ligne, soit géométriquement et numériquement comme le montre le dessin ci-contre pour un double escalier de 4 lignes. Pour la solution numérique, il faut d'abord déterminer le nombre de lignes de cubes. Il y a 20 lignes de 5 cm de haut (arrête d'un cube) puisque le double escalier fait un mètre de haut. Ensuite, il faut additionner le nombre de cubes sur chaque ligne, soit : $1+3+5+7+\cdots+35+37+39=400$.

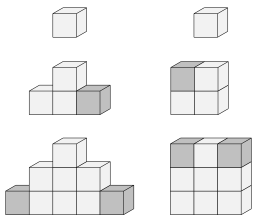


Solution
400 cubes

Deux possibilités au-moins existent pour réaliser ce calcul : soit additionner tous les termes successivement, soit additionner des paires de nombres $(1+39)+(3+37)+(5+35)+\cdots$ ou multiplier 40 par 10, ce qui correspond aux 10 paires de nombres dont la somme vaut 40.

Pour la solution géométrique et numérique, en poussant les cubes pour les aligner à gauche ou à droite, en retournant ce même assemblage et en le juxtaposant au premier (voir figure ci-dessus), il est possible de construire un « mur » de 20 blocs de haut et 40 blocs de large (39 + 1), soit 800 blocs. Pour l'escalier, il faut rediviser ce nombre par deux.

Une autre façon de résoudre ce problème de manière numérique et géométrique est de remarquer que les sommes successives correspondent au carré du rang de la ligne. Ainsi, pour la deuxième ligne, le nombre total de cubes correspond à 1 + 3, soit 4 qui est le carré de 2. Pour la troisième ligne, le nombre de cubes est de 1 + 3 + 5, soit 9 qui est le carré de 3. Ainsi de suite jusqu'à la vingtième ligne, soit un nombre total de cubes qui correspond au carré de 20, qui est 400. Remarquons que la première ligne ne comprend qu'un cube, et le carré de 1 vaut 1. Cette démarche numérique peut également trouver une représentation géométrique comme le montrent les figures ci-contre.



- Catégories 4, 5, 6 — Répartition des tâches

Dans la classe, Élise, Marc, Paul et Grégory ont été nommés, au début de l'année scolaire, responsables des quatre tâches suivantes :
A. Chef de classe

B. Liste des devoirs
C. Craies du tableau
D. Bibliothèque

Les responsables changent de tâches à chacun des quatre trimestres de manière que, à la fin de l'année, chacun des quatre responsables se soit occupé de chacune des quatre tâches.

- Au premier trimestre, Élise était chef de classe, alors que Paul s'occupait de la liste des devoirs.
- Au deuxième trimestre, le chef de classe était Paul.
- Au quatrième trimestre, Grégory s'occupait des craies.

Quelle a été la tâche des quatre responsables pour chacun des quatre trimestres de l'année ? Expliquez comment vous avez trouvé.

Notre commentaire : la résolution de cette situation-problème peut-être facilitée par l'emploi d'un tableau à double-entrée. Le critère qui organise ce tableau est que chaque ligne et chaque colonne ne peut contenir qu'une seule fois la même information — tâche, élève ou période selon la manière d'organiser ce tableau.

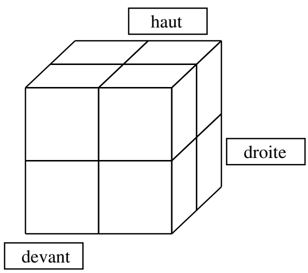
	E	M	P	G
1	A	C	B	D
2	C	D	A	B
3	D	B	C	A
4	B	A	D	C

	A	B	C	D
1	E	P	M	G
2	P	G	E	M
3	G	M	P	E
4	M	E	G	P

	A	B	C	D
E	1	4	2	3
M	4	3	1	2
P	2	1	3	4
G	3	2	4	1

- Catégories 5, 6 — Points de vue

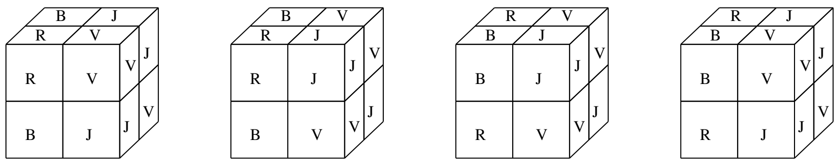
Le cube que vous voyez ci-contre est composé de 2 petits cubes rouges, 2 blancs, 2 verts et 2 jaunes.
Si on regarde ce grand cube du haut, on voit : 1 petit cube vert, 1 blanc, 1 jaune, 1 rouge.
Si on le regarde de devant, on voit : 1 petit cube vert, 1 blanc, 1 jaune, 1 rouge.
Et si on le regarde de la droite, on voit : 2 petits cubes verts et 2 jaunes.



De quelle(s) couleur(s) peut-être le petit cube qu'on ne voit pas sur le dessin ? Expliquez votre raisonnement.

Notre commentaire : selon les agencements des couleurs sur les faces du haut et de droite, deux possibilités apparaissent pour le dernier cube : soit rouge (deux premiers cubes ci-dessous), soit blanc (deux derniers cubes ci-dessous). Ces solutions sont confortées par le fait que sur la face de droite il y a deux cubes verts et deux jaunes, donc sur la face de gauche, il doit y en avoir 2 rouges et 2 blancs. Le cube que l'on ne voit pas ne peut donc être que rouge ou blanc.

Solution :



7. Inscriptions

Si vous êtes intéressé par cette première session (en Belgique) du Rallye Mathématique et souhaitez recevoir les épreuves d'essai au cours du premier trimestre de cette année scolaire, veuillez renvoyer avant le 15 novembre, une copie (pour ne pas abimer votre Math et Péda) du talon d'inscription ci-dessous à l'adresse habituelle : SBPMef - Rallye Mathématique, Rue de la Halle, 15, 7000 - Mons.

Bulletin d'inscription à l'épreuve d'essai du Rallye Mathématique

Nom : **Prénom :**

Classe : 3^e, 4^e, 5^e, 6^e primaires (Biffer la mention inutile.)

École :

Adresse de l'école :

Adresse de l'envoi des épreuves :

Numéro de téléphone pour contact éventuel :

Dans nos classes

Y. Noël-Roch

Autour des (ir)rationnels

Le numéro 109 de la revue *Math-Jeunes* sera consacré au thème de l'infini. Un des articles s'appuiera sur des écritures illimitées, certaines définissant un nombre, d'autres non. Parmi celles-là,

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

et peut-être 325,74545454545... à moins que le nombre limité de pages ne nous oblige à supprimer ce dernier sujet. Les situations choisies constituent des ouvertures sur des sujets variés et permettent de les relier entre eux. Citons entre autres

- quotient par défaut et reste d'une division,
- écritures fractionnaire et décimale d'un rationnel,
- écriture décimale d'un irrationnel,
- écriture d'un (ir)rationnel comme fraction continue (il)limitée,
- caractérisation des rationnels et des irrationnels en termes d'écritures décimales,
- algorithme d'Euclide,
- plus grand commun diviseur de deux nombres.

Tous ces sujets s'imbriquent les uns dans les autres et peuvent intéresser des élèves du début à la fin du secondaire.

1. L'ensemble des nombres rationnels

Sur une caculatrice, le quotient de 5 par 38 apparaît sous une forme peu claire (par exemple 0,131578947) : est-ce la réponse exacte ? Ou est-ce 0,13157894789478 94 $\cdots$ Ou un autre nombre ? Comment connaître les éventuels chiffres qui ne seraient pas donnés par la calculatrice ? Et combien y en a-t-il ? Voilà une question qui motive un calcul écrit qui amènera

$$\frac{5}{38}=0{,}1\overline{315789473684210526}$$

avec reconnaissance de la *période* 315789473684210526 puisque le reste 12 que nous venons d'obtenir fait démarrer la même suite de calculs que ce même reste obtenu précédemment. Les restes successifs devant être strictement inférieurs à 38, en un maximum de 39 étapes, nous devions obtenir nécessairement soit un reste nul, soit une une valeur non nulle déjà rencontrée.

En généralisant, si a et b sont deux naturels ($b \neq 0$), il existe plusieurs écritures ([1]) du quotient de a par b :
- la fraction $\frac{a}{b}$,
- une écriture décimale limitée dans le cas où un reste nul apparaît dans le déroulement de l'algorithme,
- une écriture décimale illimitée **périodique** dans le cas où un même reste non nul réapparaît dans le déroulement de l'algorithme.

Ainsi, $\frac{5}{38}$ peut s'écrire $0{,}1\overline{315789473684210526}$ et $\frac{38}{5}$ peut s'écrire 7,6. Mais une démarche inverse est-elle possible : pouvons-nous transformer une écriture décimale en une fraction ? Cette question peut motiver une revision du calcul des fractions !

Premier cas : écritures décimales limitées

$$7{,}6 = \frac{76}{10} = \frac{38}{5}$$

Et tout autre cas conduit à un naturel comme numérateur et une puissance de 10 comme dénominateur, la simplification éventuelle n'ayant aucune importance dans notre contexte.

Second cas : écritures décimales illimitées périodiques

$$0{,}1\overline{315789473684210526} = \frac{1}{10} + 0{,}0\overline{315789473684210526}$$

Le problème se ramène donc en général à trouver une fraction qui remplace $0{,}\overline{P}$ où P désigne une période.

Par exemple, désignons par x le nombre $0{,}\overline{471}$. Alors $1000x = 471{,}\overline{471}$ et, par soustraction $999x = 471$, d'où

$$0{,}\overline{471} = \frac{471}{999}.$$

([1]) Nous n'abordons pas ici **toutes** les écritures possibles !

D'une manière générale

$$0,\overline{P} = \frac{P}{10^p - 1} \text{où} \quad p \quad \text{est le nombre de chiffres de la période.}$$

Si la période ne commence pas immédiatement après la virgule, soit $x = 0,0000\overline{471}$, alors $10\ 000x = 0,\overline{471}$ et

$$0,0000\overline{471} = \frac{471}{9990000}$$

Encore plus généralement, en désignant par E la partie entière de e chiffres, M le début de la partie décimale de m chiffres précédant la période et P la période de p chiffres, nous obtenons

$$E,M\overline{P} = E + \frac{M}{10^m} + \frac{P}{(10^p - 1)(10^m)}$$

Sans nous soucier d'effectuer l'addition ci-dessus, nous pouvons affirmer que toute écriture décimale illimitée périodique peut être ramenée à une fraction.

Nous avons donc un contexte qui permet de remettre en chantier du calcul de fractions pour déboucher sur deux définitions équivalentes de l'ensemble des rationnels et une caractérisation des nombres irrationnels.

- L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble
  - des fractions dont le numérateur est un entier et le dénominateur un naturel non nul,
  - des écritures décimales limitées ou illimitées périodiques.
- L'ensemble des nombres irrationnels correspond aux écritures décimales illimitées et non périodiques.

2. Une autre distinction entre rationnels et irrationnels

Partons de

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

La difficulté principale pour les élèves est de comprendre que $x = 1 + \frac{1}{x}$ parce que la fraction est supposée sans fin. Si ce cap est franchi, il reste à résoudre l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$ pour obtenir une solution positive compatible avec le problème (le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) et un résultat négatif qui est éliminé.

De même que nous ne faisions pas du calcul aveugle de fractions dans la première partie, nous ne faisons pas de résolution aveugle d'équation dans cette seconde partie.

Dans le cas que nous venons d'envisager, la fraction illimitée est un nombre irrationnel. Prenons encore un autre cas particulier.

Soit $x = 7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}$. En posant $y = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}$, nous obtenons $y = \frac{1}{3+y}$ d'où $y = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ et finalement $x = \frac{11+\sqrt{13}}{2}$ ... encore un nombre irrationnel !

Dans la suite, nous envisageons l'ensemble des fractions (dites **continues**) du type

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cdots}}}}$$

a, b, ... sont des naturels et les numérateurs des fractions sont toujours 1. De telles fractions continues peuvent être illimitées ou non.

Premier cas : fractions continues limitées

Exemple : $4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{5}}$. C'est l'occasion d'un petit calcul pour les élèves ... entre nous, pas besoin de calcul pour conclure que toutes les fractions limitées vont se ramener à une expression simplifiée du type $\frac{a}{b}$:

$$\boxed{\text{toute fraction limitée est un nombre rationnel.}}$$

Inversément, partant d'un nombre rationnel, comment obtenir une fraction continue équivalente ?

Reprenons le rationnel $\frac{38}{5}$ déjà exploité plus haut et recherchons une écriture dans laquelle tous les numérateurs valent 1 :

$$\frac{38}{5} = 7 + \frac{3}{5} = 7 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 7 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Nous voyons apparaître une application de l'algorithme d'Euclide dans la succession des couples de nombres :

$$(38\ ;\ 5) \longrightarrow (5\ ;\ 3) \longrightarrow (3\ ;\ 2) \longrightarrow (2\ ;\ 1)$$

Le processus s'arrête parce que nous avons obtenu un numérateur 1 à la quatrième étape. S'arrêtera-t-il dans tous les cas?

Soit le rationnel $\frac{a}{b}$

— la division de a par b donne le quotient par défaut q_1 et le reste r_1. On a $a = bq_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < b$, ou encore $\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b}$ ou encore $\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$

— l'étape suivante consiste à traiter la fraction $\frac{b}{r_1}$ de manière analogue. Ainsi, le même processus recommence en prenant comme dividende le diviseur précédent et comme diviseur le reste que l'on vient d'obtenir. C'est exactement l'algorithme d'Euclide pour la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres. Les restes successifs étant de plus en plus petits, le procédé conduit nécessairement à un n^e reste nul. Le quotient correspondant est entier et apparaît comme le **dernier** dénominateur de la **fraction continue limitée**.

Nous avons obtenu une troisième définition possible des nombres rationnels :

L'ensemble des rationnels est l'ensemble des fractions continues limitées.

Deuxième cas : fractions continues illimitées

Compte tenu de ce qui précède, les fractions continues illimitées sont nécessairement des nombres irrationnels.

3. Postface et complément

Notre idée n'est évidemment pas de traiter de manière magistrale le contenu de cette rubrique, ni de développer une étude des fractions continues. Par contre, les quelques situations proposées aux élèves dans la revue *Math-Jeunes* sous le titre *Des écritures sans fin* permettent, suivant la classe, son niveau et ses acquis d'ouvrir des portes sur des sujets où intervient l'infini ou d'exploiter des acquis dans un contexte plus riche que les exercices techniques.

Le calcul d'une fraction continue n'a été réalisé ci-dessus qu'à partir de nombres rationnels mais une recherche analogue à partir d'un irrationnel peut aider à appréhender le fait que la fraction continue correspondante est nécessairement illimitée.

En effet, soit r un irrationnel positif et soit e et $e+1$ les deux naturels qui l'encadrent. On a $r = e + r_1$ avec r_1 irrationnel et $0 < r_1 < 1$ ou encore $r = e + \cfrac{1}{\cfrac{1}{r_1}}$, le dénominateur $\frac{1}{r_1}$ étant un irrationnel strictement plus grand que 1. Nous avons déjà le début de la fraction continue cherchée. En appliquant le même procédé à $\frac{1}{r_1}$, nous obtenons un deuxième naturel, soit $\frac{1}{r_1} = n_1 + r_2$. Nous pouvons écrire le début de la fraction continue :

$$r = e + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{r_2}}}$$

Comme les r_i successifs sont tous irrationnels et strictement compris entre 0 et 1, le processus s'applique sans fin aux $\frac{1}{r_i}$.

En utilisant une Casio fx-92 et sa valeur interne de π, nous avons calculé les cinq premières étapes :

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{291}}}}.$$

Pour gagner de la place, l'écriture $< \ 3 \ ; \ 7 \ ; \ 15 \ ; \ 1 \ ; \ 291 \ >$ est également utilisée.

Nous sommes évidemment tributaires de la valeur approximative de π utilisée par la calculatrice et d'erreurs d'approximations dans le déroulement des calculs. A titre de comparaison, nous avons trouvé, dans les *Compléments d'Arithmétique & d'Algèbre* de **Schons** (éd. La Procure, 1940), les douze premières valeurs suivantes : $< 3 \,;\, 7 \,;\, 15 \,;\, 1 \,;\, 292 \,;\, 1 \,;\, 1 \,;\, 1 \,;\, 2 \,;\, 1 \,;\, 3 \,;\, 1 >$.

Utiliser cette dernière notation pour écrire le nombre d'or ainsi que les nombres $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{11+\sqrt{13}}{2}$ utilisés précédemment donne respectivement $< 1 \,;\, 1 \,;\, 1 \,;\, \cdots >$, et $< 0 \,;\, 3 \,;\, 3 \,;\, \cdots >$ et $< 7 \,;\, 3 \,;\, 3 \,;\, \cdots >$. Ici, les points de suspension cachent des 1 à l'infini dans le premier cas, des 3 à l'infini dans les deux suivants. Nous pourrions nous embarquer dans la recherche d'une autre caractérisation des fractions continues illimitées *périodiques* ou *non périodiques* ! Mais nous avons déjà largement débordé de notre article initial dans *Math-Jeunes* aussi nous limitons-nous à citer un résultat : *une fraction continue illimitée est périodique si et seulement si elle est construite à partir d'une solution irrationnelle d'une équation du second degré à coefficients entiers.*

La rubrique « Dans nos classes » du no 146 proposait un paragraphe « Pour faire patienter un élève trop rapide ». La quatrième question demandait de trouver un nombre de deux chiffres tel que le carré de la somme de ses chiffres égale le nombre obtenu en permutant les deux chiffres. La solution 18 était proposée et nous pensions qu'elle était unique.

L'une de nos lectrices assidues, M$^{\text{me}}$ Patricia Wautiez remarque que le nombre 10 convient également. Merci à elle.

C'était le 30^{e} Congrès ...

— Le niveau moyen de bruit du ventilateur de votre PC est de 30 dB.
— La vitesse orbitale de la Terre est de 30 km/s.
— Un IMC (Indice de Masse Corporelle, quotient de votre poids en kg par le carré de votre taille en m) supérieur ou égal à 30 est un indice d'obésité.
— On peut arrondir le pied anglais à 30 cm (exactement : 1 pied = 30,48 cm).
— On offre des perles pour fêter 30 ans de mariage. Dimitri MENDELEEV aurait préféré offrir du zinc !

Les publications de l'**A**ssociation des **P**rofesseurs de **M**athématiques de l'**E**nseignement **P**ublic (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

— Les brochures signalées par * sont de publication récente.

— Le prix « *adhérent* » concerne l'A.P.M.E.P. **et la S.B.P.M.ef**.

N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix, en €, *sans port*	
	Collège	public	adhérent
*503	La jubilation en mathématiques		
	Fichiers Evariste : 480 problèmes tirés de différents tournois et rallyes mathématiques	4.90	**3.80**
98/132	*2 tomes :*	21,35	**15,25**
502	EXCEL-Classe, CD-Rom (Version individuelle)	16.75	**16.75**
55	*Géométrie expérimentale avec CABRI*	13.40	**12.65**
119	Jeux 5 (Des activités mathématiques au collège)		
	Série EVAPM : Evaluation 6^{e} (première chez nous !)	11	**7.60**
112/118	2 fascicules : Analyses et résultats & Dossier professeur	17.50	**12.15**
352	Tableur et mathématiques au Collège	12,20	**9,90**
451	Concours Australien de mathématiques	15,85	**11**
250/	Panoramas de compétitions mathématiques		
*251	*Panoramath 96 & Panoramath 2*	25,90	**12,50**
	Lycée		
*138	Statistiques en classe de seconde	8.70	**6**
*120	Classeur informatisé de documents math. - 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	45,95	**30,50**
	Version 26 installations, port compris	91,45	**61**
	CD-Rom de mise à jour	10,65	**7,60**
90/	Série EVAPM : Evaluation 1^{re} (cinquième chez nous !)		
107/108	3 fascicules	21.35	**14.50**
*305	GALION-Thèmes Seconde : 10 thèmes programme 2000	11,45	**9,90**
*450	MathÉvasion : 46 activités en bandes dessinées	7,60	**5,35**
	Avec CABRI, faire de la géométrie en jouant		
124/125	*2 tomes déjà paru*	17,55	**10,65**
*129	Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaires	9.90	**6.85**
121	Maths en scène : Commentaires des 22 thèmes de l'expo « Mathématiques 2000 » utilisable indépendamment	11,00	**7,60**
402	Jeux du Scientific American	20.60	**14.50**

PORT (prix indicatif) : 1 brochure : 2,50 € ; 2 ou 3 brochures : 4,00 € et au-dessus de 3 : 6,50 €

Des problèmes et des jeux

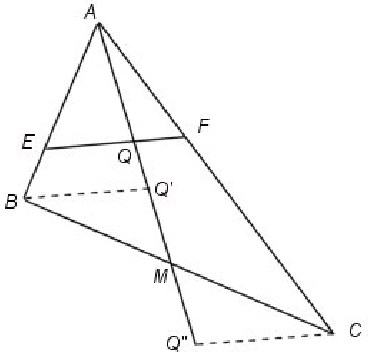
C. Festraets

Partage proportionnel

Problème n° 289 de *Mathématique et Pédagogie* n° 145.

Soient E et F des points appartenant respectivement aux côtés AB et AC d'un triangle ABC et tels que $|AE| = |AF|$. La médiane AM coupe EF au point Q. Démontrer que $\dfrac{|QE|}{|QF|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$.
Voici deux solutions fort simples l'une et l'autre et utilisant des méthodes très différentes.

Solution de S. COURTOIS de Landen



Complétons la figure en menant des parallèles à EF par B et C : BQ' et CQ'' avec Q' et Q'' sur la droite AQ.
Les triangles AEQ et ABQ' étant semblables : $\dfrac{|QE|}{|AE|} = \dfrac{|Q'B|}{|AB|}$. (1)
Les triangles AFQ et ACQ'' étant semblables : $\dfrac{|QF|}{|AF|} = \dfrac{|Q''C|}{|AC|}$. (2)

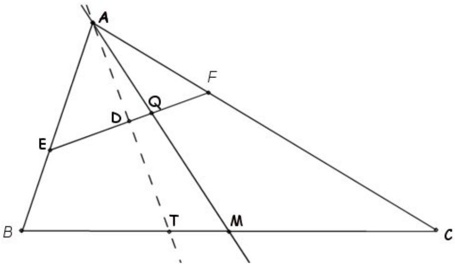
Comme les triangles BMQ' et CMQ'' sont isométriques, nous avons $Q'B = Q''C$. Divisons les égalités (1) et (2) membre à membre, nous obtenons $\dfrac{|QE|}{|QF|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$.

Solution de C. VILLERS de Hyon

Traçons la bissectrice de l'angle BAC. Cette bissectrice coupe EF en D et BC en T. Le triangle EAFest isocèle de sommet principal A. La bissectrice ADT de son angle principal EAF est en même temps médiane de sa base. Donc D est le milieu de EF.

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse courriel : **hamoircl@brutele.be**

Le faisceau de droites AB, AC, AM et AT détermine sur les sécantes EF et BC deux quaternes de points de même rapport anharmonique.



Donc $(EFQD) = (BCMT)$ ou encore $\dfrac{|EQ|}{|QF|} : \dfrac{|ED|}{|DF|} = \dfrac{|BM|}{|MC|} : \dfrac{|BT|}{|TC|}$.
Et comme $|ED| = |DF|$ et $|BM| = |MC|$, on a $\dfrac{|EQ|}{|QF|} = \dfrac{|TC|}{|BT|}$.
Mais on a aussi $\dfrac{|TC|}{|BT|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$, par le théorème de la bissectrice dans le triangle ABC.

D'où $\dfrac{|QE|}{|QF|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$.

J'ai reçu beaucoup de bonnes solutions, celles de N. BERCKMANS de Waterloo, P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, L. COLOT de Bouge, J. FINOULST de Diepenbeek, C. HALLET de Tinlot, P. LE GALL de Metz, M. MAESEN d'Eupen, J. OOMS de Chimay, A. PATERNOTTRE de Boussu, J. RASSE de Méan, J.-G. SEGERS de Liège et R. SOMVILLE de Fontaine-l'Evêque; S. COURTOIS outre la solution ci-dessus en a envoyé une deuxième basée sur les transformations du plan.

Pythagore

Problème n° 290 de *Mathématique et Pédagogie* n° 145.

Soit α un angle strictement compris entre 0° et 45°. Démontrer que 2α est un angle aigu d'un triangle pythagoricien (c'est-à-dire un triangle rectangle dont tous les côtés ont des longueurs entières) si et seulement si α est le plus petit angle d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont des longueurs entières.

Solution de P. LE GALL de Metz

La condition « 2α est un angle aigu d'un triangle pythagoricien » est équivalente à la condition « $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ sont rationnels ».

De même, la condition « α est un angle aigu d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont de longueur entière » est équivalente à la condition « $\tan(\alpha)$ est un rationnel ».

Les relations : $\cos(2\alpha) = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ et $\sin(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ assurent l'équivalence entre les deux conditions.

L'exigence que α soit un angle de mesure comprise entre 0 et 45 degrés garantit qu'il s'agit bien du plus petit des deux angles du triangle rectangle.

Bonnes solutions de P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, L. COLOT de Bouge, J. FINOULST de Diepenbeek, M. MAESEN de Eupen, J. OOMS de Chimay, A. PATERNOTTRE de Boussu, J. RASSE de Méan et J.-G. SEGERS de Liège.

Le problème 291 n'a reçu qu'une seule solution d'ailleurs incorrecte. Ce problème n'est pas facile, mais j'espère tout de même recevoir quelques bonnes solutions, aussi j'en rappelle l'énoncé ci-dessous. Les solutions doivent me parvenir au plus tard le 1er janvier 2005.

291. Probabilité

Deux personnes, A et B, jouent à un jeu dans lequel la probabilité que A gagne une partie est p, la probabilité que B gagne est q et la probabilité d'une partie nulle est r. Au départ, A possède m euros et B possède n euros. A la fin de chaque partie, le perdant donne un euro au gagnant. A et B décident de jouer jusqu'au moment où l'un d'eux aura perdu tout son argent. Quelle est la probabilité que ce soit A qui gagne tout l'argent ?

298. Un peu d'arithmétique

Déterminer tous les nombres entiers positifs n divisibles par tous les entiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

299. Un peu d'algèbre

G est un groupe fini d'élément neutre e. G contient des éléments a et b tels que $a^5 = e$ et $aba^{-1} = b^2$. Quel est l'ordre de b ?

300. Un peu de géométrie

ABC est un triangle quelconque et les points D, E, F appartiennent respectivement aux droites BC, CA et AB. Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles AEF, BDF et CDE ont un point commun.

Olympiades

C. Festraets

Dans ce numéro, je vous propose les problèmes soumis aux finalistes de la 29e Olympiade Mathématique Belge, ainsi que les questions du test AIME. Les solutions des problèmes de la finale de l'OMB seront publiées dans les deux prochains numéros de cette revue, ces solutions seront choisies parmi les meilleures proposées par les concurrents.

Mini

1. Le code d'un cadenas est un nombre à quatre chiffres (de 0 à 9, le nombre pouvant commencer par 0).
   Mathieu a oublié le code mais il se rappelle que ce nombre est inférieur à 2004 et que ses quatre chiffres sont tous différents.
   Combien de codes doit-il essayer pour être certain que le cadenas s'ouvre ?
2. Quatre nombres entiers différents a, b, c et d sont tels que
   $$(a-2004)(b-2004)(c-2004)(d-2004)=4\ .$$
   Que vaut $a+b+c+d$?
3. Dans le triangle ABC, D est le milieu de $[BC]$, E est le milieu de $[AD]$, F est le milieu de $[BE]$ et G est le milieu de $[CF]$. Sachant que l'aire du triangle ABC vaut 1, calculer l'aire du triangle EFG.
4. Les masses, en kilogrammes, de cinq citrouilles sont des naturels tous différents. On place ces citrouilles deux par deux sur une balance. Les plus petites masses ainsi obtenues sont 16 kg et 18 kg, tandis que les plus grandes sont 26 kg et 27 kg.
   (a) Ces informations permettent-elles de déterminer la masse de chacune des citrouilles ?
   (b) Si non, combien de cas en tout sont cohérents avec ces informations ? Donner les cinq masses dans chacun des cas.

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse courriel : **hamoircl@brutele.be**

Midi

1. Parmi tous les entiers positifs multiples de 2004, quels sont ceux qui ont exactement 20 diviseurs positifs ?
2. Dans le parallélogramme $ABCD$, le point M est le milieu de $[BC]$. Le point E est le pied de la perpendiculaire à MA issue de D.
   Démontrer que $|CD| = |CE|$.
3. 2004 bougies seront disposées sur un gâteau à étages. Sur l'étage du haut se trouvent n bougies, et chaque autre étage comporte k bougies de plus que l'étage immédiatement supérieur ($k > 0$).
   (a) Trouver le nombre maximum d'étages d'un tel gâteau.
   (b) Pour ce nombre maximum, déterminer toutes les valeurs possibles des nombres naturels n et k.
4. Un jeu de 2004 cartes est déposé en un paquet sur la table, dans un ordre que nous qualifierons d'initial. L'opération suivante lui sera appliquée plusieurs fois :
   Prendre la carte A située tout en haut et la carte B située tout en bas, placer A au dessus de B puis remettre ces deux cartes entre la n^e et la $(n+1)^e$ carte des cartes restantes du paquet ($1 \leq n \leq 2001$).
   Cette opération est répétée avec la même valeur de n en prenant chaque fois les cartes situées alors aux extrémités du paquet comme A et B.
   (a) Est-il certain que les 2004 cartes retrouveront à un moment l'ordre initial ? Si oui, pour la première fois après combien d'opérations ?
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de n ce nombre d'opérations sera-t-il minimum, et pour quelle(s) valeur(s) de n ce nombre sera-t-il maximum ?

Maxi

1. (a) Existe-t-il un polynôme p à coefficients entiers tel que $p(2) = 0$ et $p(0) = \ 4$?
   (b) Existe-t-il un polynôme p à coefficients entiers tel que $p(1) = 7$ et $p(8) = \ 9$?
   (c) Pour quelles valeurs de l'entier n existe-t-il un polynôme p à coefficients entiers tel que $p(1) = 7$ et $p(8) = n$?
2. Combien existe-t-il d'entiers compris entre 10 000 et 99 999 comportant un nombre pair de chiffres pairs ?

3. Dans le triangle ABC, le point D appartient à $[AC]$ et est tel que $|BD| = |CD|$. Une droite parallèle à BD coupe le segment $[BC]$ en E et coupe la droite AB en F. Le point d'intersection des droites AE et BD est G.
   Démontrer que les angles $\widehat{BCG}$ et $\widehat{BCF}$ ont même amplitude.
4. Une liste initiale contient tous les entiers de 1 à 2004 dans un ordre quelconque.
   L'opération suivante lui sera appliquée de manière répétée :
   Si la première valeur de la liste est le nombre k, les k premières valeurs sont récrites dans l'ordre inverse de celui où elles étaient (les autres valeurs sont inchangées). Notons que si $k = 1$, la liste n'est pas modifiée.
   (a) Existe-t-il une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération quatre fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?
   (b) Existe-t-il une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération dix-sept fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?
   (c) Existe-t-il, pour tout naturel n tel que $1 \leq n \leq 2004$, une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération n fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?
   (d) Pour toute liste initiale, existe-t-il nécessairement un naturel n tel qu'après avoir appliqué l'opération à la liste n fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position ?

22$^{\text{nd}}$ Annual American Invitational Mathematics Examination 2004 (AIME).

Ces petits problèmes (dont certains ne sont pas si simples) ont été proposés à 47 élèves ayant obtenus plus de 100/150 à la demi-finale de l'OMB (12 élèves de 4^e, 12 de 5^e et 23 de 6^e).
Il s'agissait de répondre en trois heures aux 15 questions par un entier compris entre 0 et 999 (inclus).
Le meilleur résultat est obtenu par Marie Coutelier, élève de 5^{e}au Centre Scolaire Saint Michel à Etterbeek avec 8/15.
Les 7 premières questions, ainsi que la 9^e ont été résolues par un nombre satisfaisant d'élèves, mais les questions 10, 13 et 15 n'ont été résolues par aucun élève.

1. Les chiffres d'un entier strictement positif n sont quatre entiers consécutifs en ordre décroissant quand ils sont lus de gauche à droite. Quelle est la somme de tous les restes possibles quand n est divisé par 37 ?
2. Un ensemble A consiste en m entiers consécutifs dont la somme est $2m$, et l'ensemble B consiste en $2m$ entiers consécutifs dont la somme est m. La valeur absolue de la différence entre le plus grand élément de A et le plus grand élément de B est 99. Trouver m.
3. Un polyèdre convexe P a 26 sommets, 60 arêtes et 36 faces dont 24 sont triangulaires et 12 des quadrilatères. Une diagonale spatiale est un segment de droite reliant deux sommets non adjacents n'appartenant pas à la même face. Combien le polyèdre P a-t-il de diagonales spatiales ?
4. Un carré a des côtés de longueur 2. L'ensemble S est l'ensemble de tous les segments de droites de longueur 2 et dont les extrémités sont sur des côtés adjacents du carré. Les milieux des segments de l'ensemble S limitent une région dont l'aire, arrondie au centième le plus proche, est k. Trouver $100k$.
5. Alpha et Beta ont participé tous deux à une compétition de résolution de problèmes qui durait deux jours. A la fin du deuxième jour, chacun s'était penché sur des questions dont la valeur totale était de 500 points. Alpha a obtenu 160 points sur 300 le premier jour et 140 points sur 200 le deuxième jour. Les questions tentées par Beta le premier jour ne représentaient pas un total de 300 points. Beta a obtenu un score entier pour chacun des deux jours et son rapport de succès (points obtenus divisés par points tentés) lors de chaque jour était inférieur à celui de Alpha ce jour là. Le rapport de succès de Alpha pour les deux jours était 300/500=3/5. Le plus grand rapport de succès pour les deux jours que Beta aurait pu obtenir est m/n où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Que vaut $m+n$?
6. Un nombre entier est dit *snakelike* si sa représentation décimale $a_1a_2a_3...a_k$ satisfait $a_i < a_{i+1}$ si i est impair et $a_i > a_{i+1}$ si i est pair. Combien d'entiers *snakelike* entre 1000 et 9999 ont quatre chiffres distincts ?
7. Soit C le coefficient de x^2 dans le développement du produit

$$(1-x)(1+2x)(1-3x)...(1+14x)(1-15x).$$

Trouver $|C|$.

8. On définit une étoile régulière à n sommets par la réunion de n segments de droites $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$,...,$\overline{P_nP_1}$ tels que
   - les points P_1, P_2, ... , P_n sont coplanaires et trois quelconques d'entre eux ne sont pas colinéaires,
   - chacun des n segments coupe au moins un des autres segments en un point autre que les extrémités,
   - tous les angles en P_1, P_2, ... , P_n sont égaux,
   - tous les n segments de droites $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$,...,$\overline{P_nP_1}$ ont même longueur et
   - le chemin $P_1P_2...P_nP_1$ tourne dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre d'un angle inférieur à 180^o en chaque sommet.

   Il n'y a pas d'étoile régulière à 3, 4 ou 6 sommets. Toutes les étoiles régulières à 5 sommets sont semblables mais il y a deux étoiles régulières à 7 sommets non semblables. Combien existe-t-il d'étoiles régulières à 1000 sommets non semblables ?
9. Soit ABC un triangle de côtés 3, 4 et 5 et $DEFG$ un rectangle de côtés 6 et 7. Un segment est dessiné pour diviser le triangle ABC en un triangle U_1 et un trapèze V_1. Un autre segment est dessiné pour diviser le rectangle $DEFG$ en un triangle U_2 et un trapèze V_2 tels que U_1 est semblable à U_2 et V_1 est semblable à V_2. La valeur minimale de l'aire de U_1 peut être écrite sous la forme m/n, où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.
10. Un cercle de rayon 1 est placé au hasard sur un rectangle $ABCD$ de côtés 15 et 36, de telle sorte que le cercle se trouve entièrement à l'intérieur du rectangle. Supposons que la probabilité que le cercle ne touche pas la diagonale $\overline{AC}$ soit m/n, où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.
11. Un solide de la forme d'un cône circulaire droit a une hauteur de 4 pouces et sa base a un rayon de 3 pouces. La surface entière du cône, base comprise, est peinte. Un plan parallèle à la base de cône divise celui-ci en deux solides, un petit cône C et un cône tronqué F, de telle sorte que le rapport entre les aires des surfaces peintes de C et F et le rapport entre les volumes de C et F sont tous les deux égaux à k. Si $k = m/n$, où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux, trouver $m+n$.
12. Soit S l'ensemble des paires ordonnées (x, y) telles que $0 < x \leq 1$, $0 < y \leq 1$ et $\lfloor log_2\left(\frac{1}{x}\right)\rfloor$ et $\lfloor log_5\left(\frac{1}{y}\right)\rfloor$ sont tous deux pairs. Sachant que l'aire de la représentation graphique de S est m/n, où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux, trouver $m+n$.

La notation $\lfloor z \rfloor$ représente le plus grand entier qui est inférieur ou égal à z.

13. Le polynôme

$$P(x) = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{17}\right)^2 - x^{17}$$

a 34 racines complexes de la forme $z_k = r_k[\cos(2\pi\alpha_k) + i\sin(2\pi\alpha_k)]$, $k = 1, 2, 3, \ldots, 34$, avec $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \ldots \leq \alpha_{34} < 1$ et $r_k > 0$. Sachant que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = m/n$, où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux, trouver $m + n$.

14. Une licorne est attachée par une corde d'argent de 20 pieds de long à la base d'une tour cylindrique dont le rayon est de 8 pieds. La corde est attachée en un point de la tour situé au niveau du sol et à la licorne à une hauteur de 4 pieds. Lorsque la licorne tend la corde, l'extrémité de celle-ci se trouve à 4 pieds du point de la tour le plus proche. La longueur de la corde qui est alors en contact avec la tour est $\dfrac{a - \sqrt{b}}{c}$ pieds où a, b et c sont des entiers strictement positifs et c est un nombre premier. Trouver $a + b + c$.

15. Pour tous les entiers strictement positifs x, soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ x/10 & \text{si } x \text{ est divisible par } 10, \\ x + 1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et définissons une suite comme suit : $x_1 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tous les entiers strictement positifs n. Soit $d(x)$ le plus petit n tel que $x_n = 1$. (Par exemple, $d(100) = 3$ et $d(87) = 7$). Soit m le nombre d'entiers positifs x tels que $d(x) = 20$. Trouver la somme des facteurs premiers distincts de m.

C'était le 30e Congrès ...

30 est l'aire ET le périmètre du triangle rectangle 5, 12, 13.

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Septembre 2004)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :
- Cotisation ordinaire : 20 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 28,50 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 50 € (non **PRIOR**), 60 € (**PRIOR**)
Autres pays : 62 € (non **PRIOR**), 75 € (**PRIOR**)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 26 €.
Europe : 42 € (non **PRIOR**), 43 € (**PRIOR**).
Autres pays : 48 € (non **PRIOR**), 54 € (**PRIOR**).

Anciens numéros :

Avant 2002 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.
Années 2003 ou 2004 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 5 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

- Abonnements groupés à <u>une</u> des revues : (3 numéros)
  Belgique : 4 €. Europe : 7 € (non **PRIOR**), 9 € (**PRIOR**).
  Autres pays : 10 € (non **PRIOR**), 14 € (**PRIOR**).
- Abonnements groupés <u>aux deux</u> revues : (6 numéros)
  Belgique : 7 €. Europe : 13 € (non **PRIOR**), 17 € (**PRIOR**).
  Autres pays : 15 € (non **PRIOR**), 20 € (**PRIOR**).

Abonnements individuels.

- Abonnements à <u>une</u> des revues : (3 numéros)

Belgique : 6 €. Europe ([1]) : 13 € (non **PRIOR**), 16 € (**PRIOR**).
Autres pays : 15 € (non **PRIOR**), 21 € (**PRIOR**).

- Abonnements <u>aux deux</u> revues : (6 numéros)

Belgique : 11 €. Europe : 16,50 € (non **PRIOR**), 20,50 € (**PRIOR**).
Autres pays : 20 € (non **PRIOR**), 25 € (**PRIOR**).

Anciens numéros :

Avant 2002-2003 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.
Année 2003-2004 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 43 €. Ils recevront le *Bulletin de* l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.
Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP; ils bénéficient du prix « adhérents »..

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.
Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 BIC BPOTBEB1
ou CCP LILLE : IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n° 7 à n° 11 et n° 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 6 (Statistiques)	7,40 €	6 €	voir ci-dessous
Dossier 7 (Vers les infiniment petits)			
Simone Trompler et Guy Noël	6 €		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Jacques Bair, Mathématique et Sport	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12 €	9,50 €	T2
G. Robert, CD-Rom, logiciels mathématiques	5 €	/	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 4	5 €		voir ci-dessous
Tome 5	6 €		voir ci-dessous
Tome 4 et 5	10 €		voir ci-dessous

Frais d'expédition en non PRIOR

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	6,50 €	10 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions en PRIOR, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.

Exemples de tarification pour commandes groupées

Brochures OMB (4 ou 5) ou Dossier 6

1 ex.	T1	4 à 6 ex.	T3
2 ou 3 ex.	T2	7 à 12 ex.	T4

Dossier 8 (Démonstration...)

1 ex.	T2	3 à 4 ex.	T4
2 ex.	T3		

Au-delà, consulter le secrétariat