Mathématique
et
Pédagogie

Sommaire

Articles

Rubriques

N° 150 Janvier-février 2005

NOTE

* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
* Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
* Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (LaTeX2ε, Word); les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.
  L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
  Pour les livres :
  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
  Pour les articles :
  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Éditorial

J. MIEWIS

Ce numéro de *Mathématique et Pédagogie* porte le numéro 150. À raison d'une publication régulière de 5 numéros par an, notre revue est à son tour trentenaire. À son tour, car notre dernier Congrès à Liège était aussi le trentième et les Olympiades mathématiques en sont cette année également à leur trentième édition.

Force est de constater que dès la scission de la défunte société bilingue en septembre 1974, un dynamisme propre à l'aile francophone s'est rapidement mis en marche. La poursuite d'une édition francophone de *Mathematica & Pædagogia*, la création du *SBPM-Infor*, l'organisation de Congrès d'abord d'un jour puis de trois jours, le lancement de l'Olympiade belge en sont des signes tangibles. Quelques temps plus tard, en 1979, s'ajouteront les revues *Rénover* et *Math-Jeunes*.

Micheline Denis-Pecheur, présidente du Comité d'organisation des Congrès, s'est faite l'écho en Août à Liège de l'immense effort en terme de bénévolat que représente pour son équipe l'organisation de cette activité. Le 14 mai prochain, Jean-Paul Doignon, président du Jury des Olympiades, pourra à son tour évoquer ce besoin important de bénévolat sans quoi ce concours serait impossible à mettre sur pied.

La publication régulière d'une revue ne peut se réaliser, elle aussi, sans le concours de nombreux collaborateurs tous bénévoles. S'il faut en premier lieu remercier les auteurs qui spontanément — ou à la suite d'aimable demande — alimentent le fond de la revue, il convient de ne pas oublier tous les artisans de l'ombre. Il y a tout d'abord les membres du Comité de lecture, sollicités suivant leurs compétences particulières pour aider la rédaction à fournir un avis constructif sur l'opportunité de telle ou telle publication.

Ensuite viennent les « techniciens » qui se chargent des mises en page des textes — et surtout des dessins et graphiques —, de la collecte des publicités, des relectures, des contacts suivis avec l'imprimeur, de la réception et de l'envoi de la revue aux membres.

S'il ne m'est pas possible de remercier individuellement chacune de ces personnes — essentiellement par peur d'en oublier —, je tiens à faire une exception notable pour Cristina Carruana, notre dévouée secrétaire depuis dix ans déjà, qui supporte vaillamment notre stress et nos plannings serrés.

On ne peut non plus passer sous silence le travail inlassable de Claudine Festraets pour alimenter les rubriques *Problèmes* et *Olympiades*, ni les découvertes « inclassables » de la rubrique *Dans nos classes*, souvent assurée par Yolande Noël.

Je voudrais associer mes remerciements — et les vôtres j'en suis sûr — à Guy Noël, au regretté Willy Vanhamme, à Claudine Festraets et à Jacques Bair qui ont assuré par le passé la tâche de directeur de la Revue. Avec eux comme illustres marraines et parrains, je ne peux que remercier à mon tour les membres de la Société de la confiance et des encouragements qu'ils portent à leur Revue et d'une manière générale aux activités de la Société. Cette Société qui ne vit que par la force d'un bénévolat que le Conseil d'Administration souhaiterait encore élargir...

Enfin, je voudrais remercier Mmes Dessy et Giunta, nos contacts au Centre Technique et Pédagogique de l'Enseignement de la Communauté Française à Frameries, qui œuvrent avec beaucoup de professionnalisme à l'élaboration matérielle de la Revue.

En ces temps où nous constatons autour de nous que de plus en plus de personnes enseignent les mathématiques alors que leur formation ou leurs études n'étaient pas orientées vers ce but, il est à souhaiter que notre Société — et notre Revue — leur apportent un peu de cette ouverture d'esprit, de ce besoin de découverte, d'étonnements nouveaux qui participent à l'enthousiasme de notre métier. C'est pourquoi, s'il m'apparaît légitime de déplorer le manque de diplômés en mathématique qui se tournent vers l'enseignement, le pragmatisme de notre Revue — et l'intérêt des élèves — se trouve aussi dans l'accueil et l'aide que nous sommes disposés à fournir à nos nouveaux collègues. C'est peut-être le challenge qui attend cette Revue dans les prochaines années...

N'oubliez pas de renouveler votre cotisation pour l'année 2005. Et profitez-en pour convaincre un nouveau collègue de se joindre à nous...

Didactique des mathématiques et formation tennistique

J. BAIR, *Université et IREM de Liège*

Mots - clés : *didactique des mathématiques, compétences, transposition, dé-transposition, anticipation, situations didactiques, contrat didactique.*

1. Introduction

Le printemps et l'été 2004 aront été riches en événements sportifs de grande envergure et largement couverts par les média de notre région : en guise d'exemples, je citerai le tournoi de tennis de Roland Garros à Paris, l'Euro de football au Portugal, le tournoi de tennis à Wimbledon, le Tour de France en cyclisme, divers grands prix de F1 en automobilisme, les jeux olympiques à Athènes, ...

Certaines de ces manifestations sportives se déroulent traditionnemment pendant les périodes d'examens scolaires, ce qui donne prétexte, aussi bien pour les élèves que pour les professeurs, à préférer (trop souvent) se distraire en regardant la télévision, plutôt qu'à étudier ou travailler.

Au-delà de cette coïncidence de dates, je suis convaincu qu'il existe des liens à exploiter, au niveau de la didactique, entre les pratiques de sports et des mathématiques.

J'ai profité de cet engouement pour les sports (et des vacances d'été), pour mettre par écrit quelques réflexions personnelles reliant l'enseignement des mathématiques et l'apprentissage d'un sport, en l'occurence le tennis que je connais le mieux. Ces idées me donnent l'occasion de faire un peu partager ma (modeste, mais déjà trop longue) expérience en tant qu'enseignant des mathématiques et qu'ancien formateur en tennis.

Ainsi, chemin faisant, j'ai l'opportunité d'aborder, par un biais probablement inhabituel, quelques concepts qui me paraissent fondamentaux en

Adresse de l'auteur: Jacques Bair, Faculté d'Économie, de Gestion et de Sciences Sociales, Boulevard du rectorat, 7, Bât. 31, 4000 - Liège
courriel : `J.Bair@ulg.ac.be`

didactique des mathématiques. Toutefois, pour éviter ce que F. Bacon appelait *le premier dérèglement du savoir, celui qui apparaît quand les hommes étudient davantage les mots que la matière* ([2], p. 33), j'essayerai de m'exprimer dans un langage ordinaire et compréhensible, reléguant quelquefois dans des notes de bas de pages les définitions de termes plus techniques utilisés par certains didacticiens.

J'ai structuré cet article en quatre parties de longueurs inégales. Dans la première section, je tente d'expliquer quelque peu pourquoi je rapproche les formations en tennis et en mathématiques. Les trois autres sections se réfèrent aux trois types d'« acteurs » dans les apprentissages de ces deux disciplines, à savoir respectivement les élèves, les professeurs et l'entourage.

2. Les mathématiques peuvent être considérées comme étant un sport

Je ne m'attarderai par sur le fait bien connu que les mathématiques peuvent être pratiquées sous formes de véritables compétitions, dont le nom se réfère d'ailleurs au monde sportif : ainsi, les élèves peuvent annuellement participer aux *Olympiades mathématiques*, ainsi qu'à divers *rallyes*.

Je vais plutôt m'efforcer de justifier un peu le titre de cette section en répondant, très succinctement et de façon fort subjective, à ces deux questions qui me paraissent capitales : *les mathématiques, c'est quoi ?* et à *quoi servent les mathématiques ?*.

2.1. Les mathématiques, c'est quoi ?

Il n'est évidemment pas question ici de donner une « définition » nette et non ambiguë des mathématiques. Bien des personnes beaucoup plus compétentes que moi ont écrit de multiples pages parfois savantes sur le sujet.

Je vois les mathématiques comme formant un grand *jeu* auquel s'adonnent aussi bien les jeunes en obligation scolaire, que d'autres personnes qui sont amenées à exploiter des théories mathématiques dans d'autres sciences lors de leurs études ou de leur profession, ainsi que certains amateurs de défis intellectuels apparemment gratuits.

Ce jeu est doté de règles précises que tout pratiquant se doit de respecter scrupuleusement, sous peine d'une sanction immédiate ([1]). De ce point de vue, les mathématiques ressemblent au tennis, par exemple, qui se réfère également à des règles très strictes à respecter par les joueurs.

Mon expérience à l'université me fait croire que certains de mes étudiants « jouent » parfois en mathématiques avec des règles déjà rencontrées dans un autre contexte, mais non conformes. Par exemple, il n'est par rare de rencontrer un calcul exécuté avec des nombres corrects, mais avec des opérations inexactes. Or, dans tout jeu, un non-respect des règles conduit inévitablement à l'échec ; à ce propos, il me paraît intéressant de constater que ce principe n'est jamais remis en cause en tennis, mais l'est parfois en mathématiques ; par exemple, si une balle de tennis sort des limites autorisées, même de très peu, elle est déclarée mauvaise ; par ailleurs, si un calcul est faux, mais « presque juste », certains étudiants estiment « normal » de recevoir une partie des points prévus pour la question.

Je me dois d'ajouter que certains scientifiques se sont penchés sur des liens potentiels entre mathématiques et jeux. Ainsi, Cournot estime que les mathématiques sont *un pur jeu d'esprit* ([8]).

Par contre, le philosophe Wittgenstein, dont un chapitre de sa *Grammaire philosophique* intitulé *Les mathématiques comparées à un jeu* ([21], pp. 295 - 301), se montre plus nuancé. D'une part, il compare les mathématiques à un jeu d'échecs où le nom attribué aux pièces (Roi, Reine, ...) n'est d'aucune importance, tandis que les déplacements des pièces pourraient se faire selon d'autres règles sans altérer l'objectivité du jeu. D'autre part, les mathématiques ne sont pas un jeu, car il y est interdit de changer à sa guise les règles qui sont dictées par la logique : *le rôle de la démonstration de non-contradiction est donc de nous apporter la garantie que notre « jeu » arithmétique est indéfiniment jouable et que nous sommes à l'abri de mauvaises surprises.* ([16], pp. 259 - 260)

2.2. A quoi servent les mathématiques ?

Je répondrai (trop) simplement à la question par trois arguments qui sont spécialement destinés à des publics différents.

([1]) Au premier abord, cette vision des mathématiques peut paraître « formaliste ». Elle n'interdit toutefois pas forcément d'autres conceptions philosophiques sur les fondements de cette science, comme l'empirisme ou l'intuitionnisme [20].

— Tout d'abord, l'on peut faire des mathématiques par goût, pour leur « beauté »; un tel argument ne parviendra évidemment à convaincre que les « convertis » pour lesquels toute aventure mathématique vaut la peine d'être vécue.
— Une deuxième raison plus pragmatique consiste à indiquer que les mathématiques sont couramment employées avec efficacité dans la vie courante et dans les autres sciences; à ce propos, je recommande notamment les études réalisées sur le sujet par la Société Mathématique de France ([17], [18]). Cette justification peut être facilement donnée à des étudiants du supérieur qui s'inscrivent dans des orientations grandes consommatrices de mathématiques; toutefois, elle paraîtra probablement peu convaincante pour les autres élèves qui doivent l'admettre comme un acte de foi puisqu'ils ne possèdent pas un bagage suffisant pour véritablement la comprendre.
— Enfin, de manière assez « militante » j'en conviens, je pense que chacun doit faire des mathématiques pour se former l'esprit, de la même manière qu'il est recommandé de faire du tennis pour rester en bonne santé. A ce sujet, il convient toutefois de remarquer une différence entre les mathématiques et le tennis : pour les jeunes, l'éducation scolaire est obligatoire, tandis que la pratique sportive est généralement facultative.

Ce dernier argument comparant les mathématiques au tennis est ancien, puisque F. BACON écrivait déjà en 1605 ([2]) : *...les hommes ne comprennent pas assez quel usage excellent les mathématiques peuvent avoir en ce qu'elles apportent remède et guérison à de nombreux défauts de l'esprit et des facultés intellectuelles. Car si l'esprit est trop obtus, elles l'aiguisent; s'il a trop tendance à vagabonder, elles le fixent, s'il est trop plongé dans le sensible, elles le rendent abstrait. Ainsi en est-il des mathématiques comme du tennis, qui est un jeu en lui-même sans utilité, mais qui est fort utile en tant qu'il rend l'oeil rapide et le corps prêt à se plier à toutes sortes de postures.* ([2], p. 130).

2.3. Sport universel

En guise de conclusion pour cette section, j'écrirai que les mathématiques peuvent être assimilées à un sport. C'est aussi ce que pense, et bien mieux

([2]) Etant donné que les débuts du tennis moderne remontent à 1873 [9], il est vraisemblable que BACON faisait référence au jeu de la paume française qui est l'ancêtre du tennis contemporain.

que je ne pourrai l'exprimer, J. P. Kahane, professeur émérite de l'Université de Paris XI, dont les avis pertinents font toujours autorité dans le monde de l'enseignement : *Certes, les enjeux des hommes dépassent, et de loin, la formation mathématique. Mais on ne saurait réduire la formation mathématique à une couche d'utilisateurs virtuels. La mathématique est une langue universelle, dont les éléments doivent être connus de tous les hommes : c'est un sport universel accessible à tous les enfants ; c'est une science vivante, dont le mouvement, dans ses grandes lignes, doit pouvoir être saisi par tous les citoyens ; c'est la continuation d'une longue histoire, l'annonce d'une histoire future, qui intéresse tous les êtres humains à venir. Elle a sa place, complètement et pour tout le monde, dans la culture de notre temps.*

3. Les élèves

Que la Belgique, un si petit pays, possède au même moment les deux grandes championnes de tennis Justine Henin-Hardenne et Kim Clijster me paraît tout à fait extraordinaire eu égard à la multiplicité de circonstances à réunir pour « fabriquer » un(e) champion(ne). De fait, pour atteindre le sommet du classement mondial, et même du classement national dans une moindre mesure, une personne pratiquant le tennis doit jouir de qualités individuelles hors du commun, être douée d'une excellente technique tennistique, disposer de bons entraîneurs et aussi évoluer dans un contexte très favorable.

Je vais tout d'abord traiter des qualités individuelles en essayant de les transposer à l'apprentissage des mathématiques. Les autres points seront considérés ultérieurement.

3.1. Qualités individuelles

Pour devenir un bon joueur ([3]), il faut posséder d'évidentes qualités athlétiques, telles qu'endurance, résistance, vitesse de course, réflexes, coordination des mouvements, force, détente, ... Il est nécessaire, mais non suffisant, que de telles qualités physiques soient réunies chez un tennisman pour qu'il atteigne un bon niveau.

([3]) Dorénavant, j'utiliserai uniquement le masculin, mais il est clair que cela peut aussi concerner le féminin.

Par ailleurs, un apprenti champion doit faire preuve de grandes qualités mentales. En effet, un match de tennis n'est rien d'autre qu'une « lutte » entre deux combattants qui veulent la victoire ; à qualités athlétiques équivalentes, celle-ci sourit toujours à celui qui gère le mieux son stress, qui est le plus courageux, le plus volontaire, le plus positif, qui a le plus le sens de l'effort,...

Ce qui précède explique clairement pourquoi tout débutant en tennis n'atteindra jamais le niveau de Justine ou de Kim ! Il n'empêche que la pratique du tennis est, généralement, à recommander à chaque jeune qui peut s'épanouir et se développer en s'efforçant d'atteindre le meilleur niveau possible, ce qui lui procurera, de toute façon, bien des satisfactions.

Une semblable analyse peut être faite pour les mathématiques, *mutatis mutandis*.

Pour devenir fort en mathématiques, un élève doit posséder des qualités intellectuelles certaines : la réflexion, l'esprit critique, la rigueur,... Au surplus, il doit également faire preuve de qualités mentales semblables à celles requises en tennis : par exemple, être capable de gérer son stress notamment lors des épreuves certificatives, avoir le sens de l'effort car la discipline n'est pas toujours facile, aborder un problème mathématique inédit avec une mentalité positive [4], ... Bref, il doit posséder ce que les psycho-pédagogues appellent des *compétences transversales* ([4]).

Il me paraît indéniable que tout étudiant n'atteindra pas les compténces transversales nécessaires pour remporter une médaille Fields ([5]). Il n'en est néanmoins pas vrai que chacun peut, et même doit, faire des mathématiques pour son épanouissement intellectuel et sa satisfaction personnelle, ainsi que l'exprimaient si bien F. Bacon et J.P. Kahane dans les extraits cités ci-dessus.

([4]) Un décret du 24 juillet 1997 relatif aux missions prioritaires de l'enseignement en Communauté française de Belgique définit les compétences transversales comme suit : *attitudes, démarches mentales et démarches méthodologiques communes aux différentes disciplines à acquérir et à mettre en oeuvre au cours de l'élaboration des différents savoirs et savoir-faire.* ([14], cité par [7], p. 14)

([5]) Etant donné qu'il n'existe pas de Prix Nobel en mathématiques, la médaille Fields est une des plus hautes distinctions dans la discipline, ce qui constitue à peu près l'équivalent des premières places du classement mondial en tennis occupées actuellement par nos deux championnes belges.

3.2. Point de vue technique

Muni de ses qualités physiques et morales, un tennisman ne peut progresser qu'en acquérant des gestes coordonnés, exécutés selon une technique précise et sûre. Contrairement à certains entraîneurs contemporains, je suis partisan de procéder de façon fort systématique en insistant, dans un premier temps, sur l'acquisition de bons coups de base, à savoir le coup droit, le revers et le service, et ainsi en laissant à plus tard l'apprentissage de coups les moins fréquents comme les volées, le smash, le lob, l'amortie, ...

Il est indispensable pour un tennisman de se doter de gestes automatiques : par exemple, dans une situation de match, un joueur ne doit plus se demander quel pied doit être placé en avant pour exécuter un revers, mais il doit évidemment être capable d'envoyer son revers sans réfléchir à sa technique et en se concentrant exclusivement sur sa tactique.

C'est pour cette raison qu'un jeune tennisman qui aspire à un certain niveau doit s'entraîner fréquemment (souvent quotidiennement et même plusieurs heures chaque jour), en le faisant de manière déterminée, enthousiaste, avec toujours bien en tête ses objectifs établis en concertation avec son entraîneur.

L'analogie entre le tennis et les mathématiques me semble ici aussi pertinente. De fait, avec ses capacités intellectuelles et son niveau de formation, un élève doit se forger une solide base, tant au niveau du savoir que du savoir-faire. A cet effet, je préconise un apprentissage où le « surfing » est à éviter : les méthodes et concepts fondamentaux doivent être bien assimilés avant d'aborder avec efficacité des notions plus particulières.

Il convient encore que l'élève acquiert des « automatismes » lui permettant de bien raisonner, de bien calculer. Ainsi, en guise d'illustrations, un étudiant doit parfaitement maîtriser le principe d'une démonstration par l'absurde pour démontrer que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel, ou encore il ne peut hésiter sur les techniques de calcul algébrique pour primitiver le quotient de deux polynômes.

Pour acquérir de telles compétences, qualifiées par les pédagogues de *disciplinaires* ([6]), les élèves doivent « s'entraîner » à la manière de sportifs. C'est ce qu'a parfaitement compris une grande maison d'éditions française qui propose des ouvrages, dans une collection nommée *Performance* !, dont la couverture présente un sportif en action sur la première face, et un

([6]) Voir note ([4]) page 10

descriptif de la méthode proposée sur la dernière face. Ainsi, la couverture du manuel d'analyse destiné aux élèves de la terminale C-E [10] comprend la photo d'un joueur de tennis et le texte suivant :

La recherche de la performance individuelle, à quelque niveau qu'elle se situe, doit s'appuyer sur une bonne technique et une quantité suffisante d'entraînement; ceci vaut pour le sport, la musique, les jeux ... et l'étude des mathématiques!

Aussi, autant connaître les méthodes et les pratiques d'entraînement qui permettent de progresser.

Ce livre vous aidera à affronter victorieusement les mathématiques en Terminale C-E. Il propose :
- un grand nombre de Q.C.M. (questions à choix multiples, techniques d'évaluation permettant de tester progressivement les acquis, de savoir ce qui a été compris, ce qui ne l'a pas été et, grâce aux corrigés motivés et détaillés, de combler des lacunes;
- « l'essentiel » à mémoriser;
- « Pour savoir faire » : tous les objectifs à atteindre, illustrés d'exemples commentés avec explications et conseils de méthode;
- des exercices de synthèse entièrement résolus afin d'étudier des thèmes sous un angle synthétique.

Bordas Performance! privilégie la réflexion et sélectionne l'essentiel pour vous permettre de vraiment réussir en maths.

Bons entraînements ... avec Bordas Performance! ([10]).

4. Les professeurs

4.1. Qui?

L'apprentissage d'un tennisman est généralement long, au vu de la difficulté du jeu. Au départ, des moniteurs spécialisés se chargent d'initier les coups de base : ils doivent faire preuve de nombreuses qualités pédagogiques telles que la patience, la clarté, la rigueur, la psychologie, ..., mais peuvent ne pas avoir été eux-mêmes des champions ([7]). Je ne considérerai pas ici ce type de formateurs, bien qu'ils jouent évidemment un rôle essentiel dans

([7]) La fédération belge exige toutefois que les « initiateurs » aient un classement minimum de C15,2, ce qui correspond à un niveau local respectable.

la carrière du joueur ; je ne considérerai donc que les entraîneurs de joueurs techniquement formés et qui participent déjà à des compétitions.

Les journalistes sportifs se penchent souvent sur le rôle primordial que possède un entraîneur de tennis auprès de son protégé : il l'aide à se préparer idéalement tant physiquement que moralement et techniquement, il analyse ses rencontres et met avec lui au point une stratégie pour l'avenir, il lui donne la sérénité, l'enthousiasme, le courage et le moral nécessaires pour aborder des compétitions parfois stressantes, ...Il convient d'ailleurs de noter que les champions s'entourent souvent de plusieurs personnes ayant des spécificités particulières : un coach pour organiser la carrière, un entraîneur technique pour affiner les coups, un préparateur physique qui met au point un entraînement corporel adéquat et, parfois, un sophrologue chargé de la préparation mentale.

En poursuivant mon analogie avec le tennis, je m'occuperai principalement dans cette note des licenciés en mathématiques (parce que je connais le mieux leur cas) ; bien entendu, les instituteurs et régents, dont le rôle est pourtant si important dans la société, pourront peut-être trouver dans ce qui suit des idées qui les concernent quelque peu.

Par comparaison avec les entraîneurs de tennis, j'estime que la mission d'un professeur de mathématiques est quadruple : il doit en effet jouer le rôle de « coach », de formateur aux plans procédural, méthodologique et mental. Effectivement, un professeur de mathématiques doit

- être un « guide » pour chacun de ses élèves, qu'il s'efforcera d'amener le plus loin possible dans les connaissances et le savoir-faire ;
- veiller à donner un bon bagage technique à chacun de ses élèves, en s'inspirant notamment de la méthodologie préconisée par les ouvrages « Bordas Performances ! » évoqués ci-dessus ;
- faire acquérir des méthodes de travail et de raisonnement performantes ;
- lui donner le goût et l'envie du travail mathématique ; il est malheureusement bien connu que certains élèves sont dégoûtés des mathématiques parce qu'un de ses professeurs n'a pas fait preuve d'une psychologie adéquate.

Toutes ces missions, pourtant fort différentes les unes des autres, doivent être simultanément exercées par chaque professeur et, de plus, s'adapter à chacun des élèves (pourtant fort différents les uns des autres). Cette vision d'un professeur de mathématiques met bien en évidence toute la difficulté de cette profession. A titre anecdotique (mais fort réaliste), on peut regretter que les professeurs de mathématiques ne jouissent pas de la même considération, et des mêmes salaires, que leurs homologues sportifs. Il est toutefois vrai qu'en cas d'échec d'un de ses élèves, le mathématicien n'est pas remercié, comme cela se fait couramment en tennis (et dans d'autres sports) face à des résultats jugés peu satisfaisants !

4.2. Comment ?

Je me placerai encore dans le cas d'un entraîneur de tennis qui s'occupe de joueurs participant à des compétitions.

Tout entraînement doit être préparé en fonction du programme immédiat du joueur, de ses objectifs à court terme et de son plan de carrière. Cette préparation se base sur les connaissances théoriques et l'expérience du coach, mais celui-ci se doit d'adapter son plan de travail au mieux des intérêts de son protégé.

L'essentiel d'un entraînement est consacré à du travail sur le terrain, les aspects physiques et psychologiques étant certes importants mais moins prenants. A ce niveau, il me semble intéressant de relever le fait que les entraînements se réduisent souvent à « faire des gammes » pourtant fastidieuses, mais indispensables pour assurer l'automatisme des coups dont il a été question ci-dessus. Toutefois, les séances doivent être variées, attrayantes et efficaces, ce qui impose au coach de trouver les séquences de travail les plus adéquates pour son poulain.

Régulièrement, et notamment après chaque match, l'entraîneur doit analyser la situation avec son joueur, rectifier en conséquence les entraînement ultérieurs. Cela réclame un respect mutuel des deux protagonistes et une bonne connaissance l'un de l'autre : l'entraîneur indique à son joueur ce qu'il attend de lui et celui-ci doit « jouer le jeu » et informer son mentor de ses possibilités, de ses difficultés et de ses aspirations.

Comme un formateur de tennis se doit de réfléchir à ses entraînements, le professeur de mathématiques prépare ses leçons.

L'enseignant a, tout du moins dans le secondaire, l'avantage (qui peut se révéler être un inconvénient !) sur le sportif de disposer d'un programme officiel avec des directives plus ou moins précises. Il n'en reste néanmoins pas vrai que son travail est imposant et revient à adapter pour ses élèves ce qu'il a appris lors de ses études universitaires ([8]). A ce sujet, il me semble utile de signaler que ce travail de transposition doit quelquefois être suivi d'une phase que certains qualifient de *dé-transposition* [1] : il s'agit alors de préciser une présentation antérieure pouvant être trop sommaire et même quelquefois de rectifier une approche erronée. C'est le cas, par exemple, avec la définition d'une tangente qui est d'abord présentée dans l'enseignement secondaire inférieur comme étant, dans le cas d'un cercle, la droite passant par le point de tangence qui rencontre la courbe en un seul point, puis, dans le secondaire supérieur, est introduite d'une autre façon pour le graphe d'une fonction ; si, en analyse, l'élève en reste à la première conception d'une tangente, il risque de se heurter à ce que les didacticiens appellent un *obstacle épistémologique* ([9]). A la suite de V. Henry [11], j'ajoute que de tels obstacles peuvent quelquefois être réduits grâce à une *anticipation* adéquate. En guise d'illustration, quand le professeur présente l'équivalence entre la différentiabilité et la dérivabilité d'une fonction à une variable réelle, il peut alors insister sur le fait que cette propriété n'est plus forcément valable dans le cas de fonctions à plusieurs variables ; cette pratique de l'anticipation est souhaitée autant que possible, mais elle réclame évidemment du recul sur la matière et une bonne connaissance des matières qui seront dispensées ultérieurement.

Lors de ses cours, un professeur de mathématiques consacre l'essentiel de son temps à l'apprentissage spécifique de sa matière, dans la mesure du possible sans oublier les autres aspects de sa mission. Un de ses rôles majeurs consiste à trouver des *situations didactiques* ([10]) adéquates, c'est-à-dire motivantes, adaptées à la matière ainsi qu'au public visé, et susceptibles d'atteindre les objectifs fixés par les différents acteurs. Ces situations didactiques peuvent être puisées dans les mathématiques elles-mêmes ou dans le monde réel : le premier cas se réfère à un enseignement qualifié de *vertical*, tandis que le second cas se rapporte à un enseignement

([8]) Les didacticiens appellent ce travail la *transposition didactique* ; ils disent de plus que cela consiste à transformer le *savoir savant* en un *savoir à enseigner*.

([9]) Selon P. Legrand, on parle d'*obstacle épistémologique quand on peut vérifier qu'historiquement, les mathématiciens ont éprouvé les mêmes difficultés que les élèves dans le domaine des mathématiques concerné.* ([12], p. 311).

([10]) Selon Briand et Chevalier, *une situation est didactique lorqu'un individu (en général le professeur) a l'intention d'enseigner à un autre individu (en général l'élève) un savoir donné.* ([5], p. 27) appelé *horizontal* ([11]) ; en particulier, de nombreuses situations peuvent être trouvées dans le monde des sports, notamment du tennis ([3], [19]).

Par analogie avec le tennis, je souhaite insister sur la nécessité, à mes yeux, d'imposer à certains moments des exercices qualifiés de « drills », qui semblent décriés ces derniers temps. De tels exercices, comparables à des gammes en tennis (ou en musique), constituent, selon moi, un passage obligé vers un savoir-faire technique indispensable à la progression ; en effet, l'objectif suprême d'un cours consiste à résoudre des problèmes [4], mais comme le font justement remarquer des collègues français, *il n'est pas possible de résoudre efficacement des problèmes sans maîtriser des automatismes, c'est-à-dire des procédures qu'on peut exécuter sans réfléchir* ([12]) ([6], p. 12). Une telle pratique systématique permet, dans bien des cas, à l'élève de « donner du sens » à la matière qu'il étudie.

Enfin, tout enseignement doit se dérouler dans un esprit de confiance réciproque et de respect mutuel. De plus, contrairement au tennis où les liens entre joueur et entraîneur sont la plupart du temps fort informels, un apprentissage scolaire est plus codifié et doit obéir à des règles explicites et implicites ([13]).

5. L'entourage

La carrière d'un champion de tennis dépend, je l'ai déjà signalé, de nombreux facteurs, mais elle est toujours influencée par le milieu dans lequel évolue le joueur. En premier lieu, il y a lieu de mettre en évidence le rôle essentiel tenu par les membres de la famille du sportif ; spécialement, les parents doivent donner au joueur le goût du sport, l'encourager dans ses

([11]) D'après N. Rouche, *un enseignement de mathématiques est vertical s'il consiste pour l'essentiel à inculquer la théorie déductive aux élèves et ne se soucie pas des applications, des multiples liens que les mathématiques entretiennent avec le monde réel, physique ou social. ...Un enseignement est horizontal s'il consiste surtout à faire travailler les élèves dans des contextes du monde réel, physique ou social* ([15], p. 2).

([12]) *L'acquisition d'automatismes évite ce que les psychologues appellent « la surcharge cognitive » qui se traduit par une perte de contrôle d'une partie de la procédure que l'on est en train de mettre en place : on oublie une étape, on oublie ce qu'on cherchait, ...*

([13]) Ces règles sont rassemblées dans ce que les didacticiens appellent le *contrat didactique*. D'après Johsua et Dupin, *ce contrat fixe les rôles, les places et fonctions de chaque partie. Il fixe les activités attendues du professeur comme des élèves, les places respectives de chacun au regard du savoir traité, et même les conditions générales dans lesquelles ces rapports au savoir évolueront au cours d'un enseignement.* ([13], p. 6).

efforts, le guider dans ses objectifs, ...sans oublier de mentionner le temps et l'argent investis dans cette aventure. En deuxième lieu, je signalerai l'impact joué par les dirigeants de clubs : c'est souvent eux qui organisent les entraînements. Enfin, il y bien sûr les responsables de la fédération qui sélectionnent les jeunes et dictent toute la politique de la formation à leur niveau (régional, national ou international).

Une semblable pyramide se retrouve en apprentissage scolaire. Au premier stade se situe aussi le milieu familial : il ne fait pas de doutes, contrairement aux souhaits de certains, qu'un élève issu d'une famille avec un niveau culturel et intellectuel élevé est au départ favorisé par rapport à quelqu'un provenant d'un milieu social plus pauvre. Au niveau intermédiaire se situent les professeurs et responsables des écoles ; là aussi, il est de notoriété publique que le choix d'un établissement peut jouer un rôle important dans la formation intellectuelle d'un élève. Enfin se retrouvent au niveau le plus large les inspecteurs et responsables de la politique d'enseignement ([14]) : ils ont notamment pour mission d'élaborer les programmes et de veiller à leur respect.

6. Conclusion

Cette brève analyse comparative entre les mathématiques et le tennis paraîtra probablement à certains « tirée par les cheveux », voire parfois polémique et tout à fait critiquable. Il n'empêche qu'elle me paraît, même si j'ai parfaitement conscience de « prêcher un converti », instructive à bien des égards et peut amener à repenser en partie l'enseignement des mathématiques.

Quoi qu'il en soit, j'avoue avoir pris bien du plaisir à rédiger cet article !

Bibliographie

[1] Antibi A. - Brousseau G., La dé-transposition de connaissances scolaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20 (1), 2000,

([14]) *En didactique, on désigne parfois par le terme* noosphère *l'ensemble des personnes ou instances qui participent à la définition des programmes. Il ne faut pas y voir que le Ministère de l'Education Nationale. D'autres institutions participent à ces choix : académies, parents, etc.* ([5], p. 53).

pp. 7 - 40.

[2] Bacon F., *Du progrès et de la promotion des savoirs* (1605), avant-propos, traduction et notes par M. Le Doeuff, Tel Galimard, 1991.

[3] Bair J., *Mathématiques et sports*, édidions de la Société Mathématique de Belgique d'expression française, 1992.

[4] Bair J. - Haesbroeck J. J. - Haesbroeck G., *Formation mathématique par la résolution de problèmes*, De Boeck Université, 2000.

[5] Briand J. - Chevalier M.C., *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, Hatier Pédagogie, 1995.

[6] Chapiron G. - Mante M. - Mulet-Marquis R. - Perotin C., Les exercices rituels, revue *Plot*, numéro 109 - nouvelle série, numéro 6, 2004, pp. 12 - 14.

[7] Cazzaro J.P. - Noël G. - Pourbaix F. - Tilleuil P., *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes*, De Boeck éditions, 2001.

[8] Cournot A., *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843), édité par B. Brun, Vrin éditions, 1984.

[9] Dauven J., *Encyclopédie des sports*, Librairie Larousse, 1961.

[10] Haye G. - Rivard J., *Mathématiques*, $T^{erm}_{C,E}$, *Analyse*, Bordas Performance!, 1961.

[11] Henry V., *Questions de didactique soulevées par un enseignement de l'analyse non standard à de futurs économistes*, thèse doctorale, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2004.

[12] Legrand P., *Profession enseignant : les mathématiques en collège et en lycée*, Hachette Education, 1997.

[13] Johsua S. - Dupin J.J., *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, Presses Universitaires de France, 1993.

[14] Moniteur Belge, Décret du 24 juillet 1997 définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire et organisant les structures propres à les atteindre, 23 septembre 1997, pp. 24653-24674.

[15] Rouche N., Huit points de vue pour repenser son enseignement en mathématiques, revue *Plot*, numéro 109 - nouvelle série, numéro 6, 2004, pp. 2 - 5.

[16] Schmitz F., Wittgenstein et les mathématiques, chapitre du livre *Les philosophes et les mathématiques*, par E. Barbin et M. Caveing, Editions Ellipses, 1996, pp. 243 - 263.

[17] SMF (Société Mathématique de France), *Mathématiques à venir*, Supplément au *Bulletin de la Société Mathématique de France*, tome 115, Gauthier-Villars, 1987.

[18] SMF (Société Mathématique de France), site internet : http ://smf.emath.fr.

[19] Tangente, *Maths - sport : peut-on mettre le sport en équations ?*, Tangente hors série numéro 19, 2004.

[20] Verdier N., *Qu'est-ce que les mathématiques ?*, Editions Le Pommier - Fayard, 2000.

[21] Wittgenstein L., *Grammaire philosophique*, Gallimard éditions, 1980.

Camemberts, histo, courbes, toutes ces représentations font partie de notre quotidien.

En une année, plus de 2×10^{12} graphiques statistiques sont imprimés dans le monde.

La Science au présent, éd. Encyclopædia Universalis.

En Italie, une boutade exprime l'incrédulité du quidam à l'égard de la démarche statistique : soit deux hommes affamés auxquels on donne un poulet rôti. Le premier s'en empare et le dévore entièrement. En moyenne, chacun a eu un demi-poulet.

La Cité de chiffres, Jean-Louis Besson, éd. Autrement.

Dans les sondages, chaque mot compte :

À la question : « Pensez-vous que les États-Unis doivent *autoriser* les discours pubics contre la démocratie ? », 21 % des Américains répondent « oui » et 62 % « non ».

Mais en demandant : « Pensez-vous que les États-Unis doivent *interdire* les discours publics contre la démocratie ? », on obtient 39 % de réponses positives et 46 % de négatives.

Moralité : il y a bien plus de gens prêts à ne pas autoriser que de gens prêts à interdire.

Science et Vie, n° 299.

Euclidiana...

J. OOMS, *Athénée Royal de Chimay*

Scolie pour le 4^e livre des Éléments

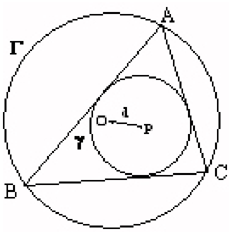


Fig. 1

Voici une configuration familière : le triangle ABC avec son cercle circonscrit Γ et son cercle inscrit γ (voir figure 1).
Nous caractérisons cette configuration en disant que le triangle ABC est inscrit entre les deux cercles.

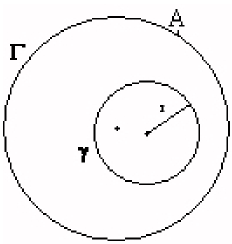


Fig. 2

Ôtons les composants du triangle à l'exception du sommet A : nous obtenons la figure 2.

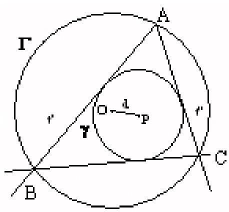


Fig. 3

Nous pouvons évidemment reconstruire le triangle en menant par A les tangentes t' et t'' au cercle γ et en joignant les points d'intersection B et C de ces tangentes avec le cercle Γ : la droite BC ainsi obtenue, est automatiquement tangente au cercle Γ (voir figure 3).

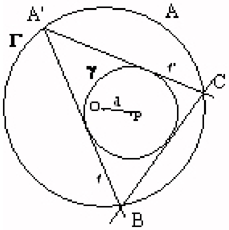


Fig. 4

Jouons avec la figure en déplaçant le point A sur le cercle Γ : A se déplace en A'. Menons par A' les tangentes t' et t'' au cercle γ : nous avons la surprise de constater que la droite joignant les points d'intersection B, C de ces tangentes avec le cercle Γ est encore « sensiblement » tangente au cercle γ (voir figure 4).

Adresse de l'auteur: Ooms Jean, Rue de Bourlers, 22, 6460 - Chimay.

L'apparente constance de la propriété : **droite BC tangente au cercle γ pour différentes positions du A sur le cercle Γ** nous donne à penser que tout point du cercle Γ est le sommet d'un triangle inscrit entre ces deux cercles.

Voilà ce qu'Euclide ne nous a, apparemment, pas révélé !

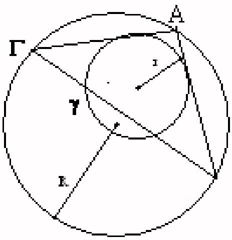


Fig. 5

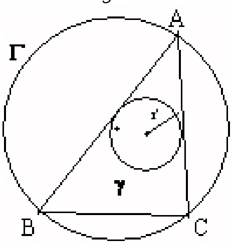


Fig. 6

Reprenons encore une fois la figure 2 et jouons autrement :

1. en modifiant la distance d des centres des deux cercles (dont les rayons R et r sont invariants) sous la condition $d < R - r$: cette fois la droite BC n'est plus tangente au cercle γ (voir figure 5).
2. en modifiant le rayon r du cercle γ (dont le centre reste fixe) : ici encore, la droite BC n'est plus tangente au cercle γ' (voir figure 6).

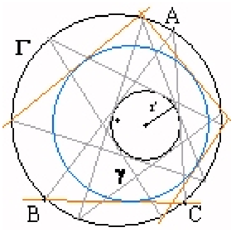


Fig. 7

Pierre Ooms ([1])a observé et, ensuite, conjecturé que, dans tous les cas de figure, qu'il y ait ou non possibilité d'inscrire un triangle entre les deux cercles, la droite variable BC, correspondant à n point variable A du cercle Γ, avait pour enveloppe E un cercle (voir figure 7).

Suite à l'appel à démonstration que j'avais lancé sous la rubrique « Au secours ! » page 94 du numéro 122 de *Mathématique et Pédagogie*, deux collègues se sont donné la peine de vérifier cette conjecture par la géométrie

([1]) Ing. FPMS, fils ainé de l'auteur.

analytique (via l'analyse d'un faisceau de coniques) . Il s'agit de P. LEPOURCQ de St Symphorien et de J. FINOULST de Diepenbeek ([2]).

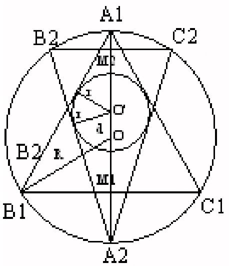


Fig. 8

L'existence du cercle enveloppe étant ainsi bien établie, on peut en déterminer le centre et le rayon en construisant les triangles isocèles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ comme indiqué par la figure 8. $[M_1M_2]$ est un diamètre de l'enveloppe. L'analyse de la figure permet de calculer directement l'abscisse x du centre (sur l'axe $OX = OO'$ d'origine O) et le rayon ρ de l'enveloppe E, en fonction des rayons R et r des 2 cercles de départ et de la distance d de leurs centres.

On trouve

$$x = d\left(\frac{2Rr}{R^2 - d^2}\right)^2$$

et

$$\rho = \left| R\left[1 - 2(R^2 + d^2)\left(\frac{r}{R^2 - d^2}\right)^2\right]\right|.$$

On constate alors que $x = d$ et $\rho = r$ (c'est-à-dire que le cercle enveloppe E s'identifie au cercle γ), ssi

$$R^2 - d^2 = 2Rr$$

ce que l'on peut interpréter en disant que : $R^2 - d^2 = 2Rr$ est la condition nécessaire et suffisante pour que tout point du cercle Γ soit le sommet d'un triangle inscrit entre les deux cercles.

Il reste à voir s'il peut exister au moins un triangle inscrit entre les deux cercles lorsque la condition précédente n'est pas satisfaite.

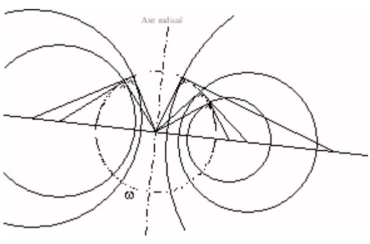


Fig. 9

En vertu des propriétés exposées en appendice (1 et 2) de cet article, le cercle enveloppe étudié ci-dessus appartient au faisceau des deux cercles de départ, qui est un faisceau de cercles non sécants (faisceau de PONCELET) (figure 9).

([2]) La démonstration de J. FINOULST a été publiée intégralement dans le numéro 124 de la revue, sous la rubrique « Des problèmes et des jeux », p 78 sq.

Et comme l'enveloppe E et le cercle γ sont tous deux intérieurs au cercle Γ, il n'y a, topologiquement, que deux possibilités

— ou bien E est intérieur à γ ;

— ou bien γ est intérieur à E.

Dans ces conditions, s'il existait un triangle ABC inscrit entre les deux cercles Γ et γ, la droite BC devrait être tangente au cercle γ et au cercle enveloppe E (différent du cercle γ), ce qui est, topologiquement impossible.

Corollaire.

Dans tout triangle :

$$R^2 - d^2 = 2Rr$$

R, r, d représentant respectivement le rayon du cercle circonscrit, le rayon du cercle inscrit et la distance des centres de ces deux cercles.

Conclusion.

Alors que l'existence et la construction des cercles inscrit et circonscrit à un triangle donné est une question incontournable de notre enseignement de la géométrie, la question réciproque de l'inscriptibilité d'un triangle entre deux cercles donné n'a, apparemment, pas retenu l'attention des chercheurs. Cette question trouve ici sa réponse, mais je serais reconnaissant au lecteur qui pourrait me fournir quelques références historico-bibliographiques relatives à ce problème.

Appendice.

1. En relisant le calcul de MM. Lepourcq et Finoulst, je réalise que ce calcul ne prend pas en compte la situation relative des deux cercles de départ, à savoir que l'un des deux cercles est intérieur à l'autre. J'en déduis que le résultat du calcul (l'existence d'un cercle enveloppe de la droite variable BC) s'applique à deux cercles quelconques, qu'ils soient intérieurs ou extérieurs l'un à l'autre, voir même, sécants ou tangents.

   Il en résulte immédiatement que chacun des deux cercles de départ peut servir de support au point variable A, si bien que cette analyse aboutit à l'existence de deux cercles enveloppes associés aux deux cercles de départ.

   Bien entendu, lorsque le point A est intérieur au disque γ, les tangentes menées par A au cercle γ sont des droites imaginaires conjuguées, mais la droite déterminée par l'intersection de ces tangentes avec le cercle Γ est réelle et l'enveloppe de ladite droite est elle-même bien réelle.

2. En contrôlant les résultats précédents par le dessin, dans le cas de deux cercles sécants, j'observe que les cercles enveloppes de Pierre Ooms appartiennent « sensiblement » au faisceau des deux cercles de départ. Et le calcul m'a permis de vérifier que les dites enveloppes appartiennent effectivement au faisceau des cercles de départ, qu'il s'agisse d'un faisceau de cercles sécants ou d'un faisceau de cercles non sécants (faisceau de Poncelet).

Si les éléments de la matrice à une ligne et trois colonnes $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ forment un triplet pythagoricien avec $a^2 + b^2 = c^2$, alors le produit de cette matrice par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ fournit également un triplet pythagoricien.

On a $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+b+2c & 2a+2b+3c \end{pmatrix}$.

Calculons :

$(a + 2b + 2c)^2 = a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4ab + 4ac + 8bc$

et $(2a + b + 2c)^2 = 4a^2 + b^2 + 4c^2 + 4ab + 8ac + 4bc$.

Par addition : $(a+2b+2c)^2+(2a+b+2c)^2 = 5a^2+5b^2+8c^2+8ab+12ac+12bc$

et puisque $a^2 + b^2 = c^2$,

$(a + 2b + 2c)^2 + (2a + b + 2c)^2 = 4a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 8ab + 12ac + 12bc$

ce qui est bien $(2a + 2b + 3c)^2$.

Les matrices $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ jouissent également de cette propriété.

Université de Mons-Hainaut
Mons / Charleroi
http://www.umh.ac.be

UMH

Psychologie Sciences de l'Éducation

Warocqué
Faculté Warocqué Économie & Gestion

Sciences

Médecine & Pharmacie

EII

SHS
SCIENCES HUMAINES ET SOCIALES

DROIT

JOURNÉE PORTES OUVERTES

Mons
Samedi 19 février
de 9h à 12h30

Service Accueil et Relations Publiques
20, Place du Parc à 7000 MONS
Tel. : +32(0) 65/37.30.14 | 15 | 16
Fax : +32(0) 65/37.30.54
e-mail : accueil.information@umh.ac.be

ACADÉMIE UNIVERSITAIRE
WALLONIE-BRUXELLES

Problème de lieux - problèmes de construction

B. DESTAINVILLE, ***IREM de Toulouse***

Les problèmes de construction sont liés à ceux de lieux. Pour chacun de ces deux types d'activités, après découverte d'un ensemble E qui contient les solutions, et lorsque cet ensemble n'est pas vide, une seconde partie, réciproque de la précédente, est indispensable : tout élément de l'ensemble E est-il solution du problème ?

• **Dans un problème de lieu géométrique de points**, et lorsque la réponse n'est pas immédiate, il est préférable de construire une figure, éventuellement avec plusieurs positions du point variable, pour conjecturer ce lieu.

Dans la recherche éventuelle d'une conjecture à l'aide d'un logiciel dynamique, cette construction n'est efficace que si la séquence de construction des points est correcte. Surtout, avec un tel logiciel, le point P du lieu doit être déclaré après celui qui a été choisi comme point variable M.

Le mouvement de ce point variable M sur l'écran est très utile pour observer celui de P ; cela aidera beaucoup pour l'étude réciproque (voir l'énoncé IV).

En ce qui concerne les démonstrations de lieux, une fois obtenu un support E du lieu (et dans la mesure où E n'est pas vide), une étude réciproque est indispensable pour voir si tous les points de cet ensemble E conviennent : à partir d'un point P quelconque de E peut-on faire correspondre dans l'ensemble de départ au moins un point M dont P est l'image ? Les points P de E qui n'ont pas d'antécédent sont à rejeter (voir les énoncés III et IV).

Il est préférable de construire une nouvelle figure pour mieux cerner les étapes de la réciproque ; la séquence de construction des points est nécessairement différente de celle de la première partie.

À l'issue de cette étude, nous avons donc trouvé le lieu géométrique par double inclusion ; c'est l'ensemble des points de E qui ont un antécédent.

Adresse de l'auteur: IREM de Toulouse, Bat 1R2, Roure de Narbonne, 118, 31062 Toulouse.

On retrouve évidemment cette démarche lorsqu'on entreprend de justifier les divers « ensembles-images », en général admis dans les programmes actuels pour les transformations.

Dire que l'ensemble B est l'image de l'ensemble A par une transformation T signifie que B est le lieu des images des éléments de A par T : tout élément de A a son image dans B et, réciproquement, tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A.

Pour les transformations des différents programmes, l'image d'un segment est un segment, celle d'un cercle est un cercle, ... Mais ce n'est pas toujours le cas (penser à l'inversion) ; une recherche complète de lieu avec étude directe et étude réciproque peut alors davantage se justifier.

• **Dans un problème de construction géométrique d'un point**, on est souvent conduit à privilégier parmi les hypothèses deux conditions nécessaires qui se traduisent par l'apparition du point sur deux lieux géométriques dont on recherche l'intersection[1]. Lorsque ces deux lieux sont sécants, il reste à faire une réciproque : les éventuels points communs à ces lieux satisfont-ils à toutes les propriétés imposées ?

Un exemple : le centre du cercle circonscrit à un triangle est nécessairement à l'intersection de deux des trois médiatrices des côtés de ce triangle ; pour prouver que c'est suffisant, il faut démontrer que le point d'intersection de ces deux médiatrices est effectivement équidistant des trois sommets du triangle.

Dans certains problèmes de construction, un point M peut être l'image d'un autre point M' par une transformation connue ; mais, d'une part, il faut souvent construire d'abord ce point M', d'autre part, pour la réciproque, le passage de M' à M nécessite lui-même une nouvelle construction, en général aussi par intersection de deux lieux (voir l'énoncé II).

Dans les activités qui suivent, on peut en particulier observer les liens entre les deux types de problèmes.

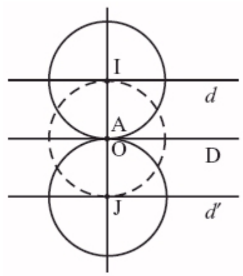
Énoncé I

> Soient un point A et une droite D du plan. Construire un cercle de rayon r passant par A et tangent à D.

- S'il *existe* une solution, soit I le centre du cercle :
  - la distance de I à D est r ; I appartient donc à l'une ou l'autre des droites d et d' parallèles à D à la distance r, lieu des points situés à la distance r de D ;
  - la distance de I à A est r ; I appartient donc au cercle (A, r) (second lieu).

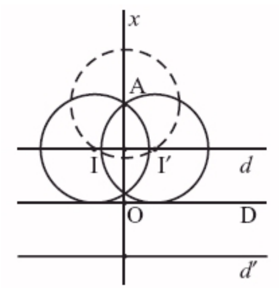
Si le point I existe, il appartient donc à l'intersection de d ou d' et du cercle (A, r). Appelons O la projection de A sur D et supposons, sans nuire à la généralité de l'exercice, que le point A et la droite d sont d'un même côté de D.

- **On peut traiter à part le cas particulier où A est en O**, c'est-à-dire où $OA = 0$: dans ce cas, le cercle (A, r) est tangent à d en un point I et à d' en un point J.

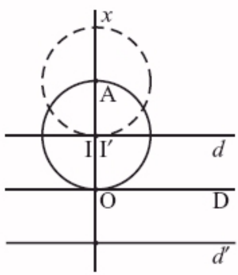


Réciproque :
dans ce cas, il y a deux cercles solutions : les cercles de centre I et J qui passent par A, c'est-à-dire O, et qui sont par conséquent tangents à D.

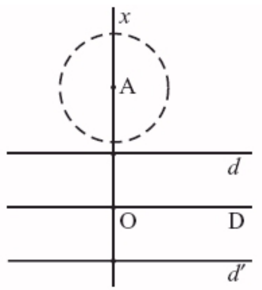
- **Dans tous les autres cas**, avec l'hypothèse ci-dessus (le point A et la droite d d'un même côté de D), les points I, s'ils existent, appartiennent à d et au cercle (A, r). Une fois ces deux ensembles construits, on obtient les trois cas ci-dessous, avec deux, une ou zéro intersections.



Si $0 < OA < 2r$, il y a deux intersections I et I'.



Si $OA = 2r$, il y a une intersection I.



Si $OA > 2r$, il y a zéro intersection.

Réciproque :

— Construisons les cercles de centre I (ou I') et de rayon r, lorsqu'ils existent.
— Ils passent par A, et comme la distance de I (ou I') à D est égale à r, ces cercles sont aussi tangents à D.

Bilan complet :

— si $O \leqslant OA < 2r$, il y a deux cercles solutions ;
— si $OA = 2r$, il y a un cercle solution ;
— si $OA > 2r$, il y a zéro cercle solution.

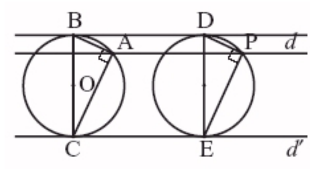
Énoncé II

d et d' sont deux droites parallèles et A un point du plan entre d et d'. Construire un triangle ABC, rectangle en A, avec B sur d et C sur d', de telle sorte que la droite (BC) soit perpendiculaire à d.

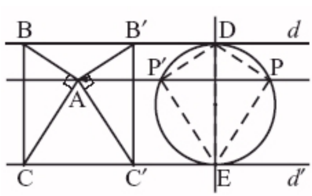
● **Analyse**.

Le couple de droites (d, d') est *invariant* par toute translation de vecteur de même direction qu'elles. D'où l'idée de construire la figure demandée, abstraction faite de la position du point A sur la parallèle à d qui passe par A, puis de relier cette figure réalisée à la figure demandée au moyen d'une translation.

Si ABC existe, soit D un point de d et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$; soient $E = t(C)$ et $P = t(A)$.
D étant fixé, P appartient à deux lieux : le cercle de diamètre $[DE]$ et la droite parallèle à d qui passe par A.



● **Réciproque**.
On part de d, d', A et de $[DE]$ perpendiculaire à d. La parallèle à d en A coupe le cercle de diamètre $[DE]$ en deux points P et P'. Alors,



— Avec t', translation de vecteur $\overrightarrow{PA}$, $t'(D) = B$ et $t'(E) = C$, le triangle ABC est rectangle en A. Il convient.
— Même travail avec t'', translation de vecteur $\overrightarrow{P'A}$. D'où $AB'C'$.

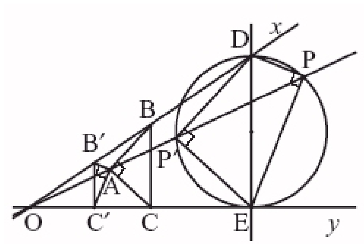
• **Conclusion** : le problème admet deux solutions.

Nous avons choisi cette méthode dynamique parce qu'elle fait provisoirement disparaître la contrainte sur A, en déplaçant la figure, dans le même esprit que la construction d'un carré inscrit dans un triangle, plusieurs méthodes faisant intervenir un homothétie étant possibles.

• **Note** : Une autre méthode consiste à construire d'abord le milieu O de $[BC]$; si l'on appelle D la droite des milieux de la bande de plan et $2a$ la largeur de cette bande, O est dans l'intersection de D et du cercle de centre A et de rayon a. On retrouve les deux solutions.

• ***Un énoncé dans le même esprit*** :

A est un point situé à l'intérieur d'un angle aigu de côtés $[Ox)$ et $[Oy)$. Construire un triangle ABC rectangle en A, avec B sur $[Ox)$ et C sur $[Oy)$, et tel que la droite (BC) soit perpendiculaire à la droite $[Oy)$.



Ici les droites (Ox) et (Oy) sont invariantes dans les homothéties de centre O. Nous laissons au lecteur le plaisir de mettre en oeuvre une homothétie pour l'analyse, et de réaliser la construction ci-dessus pour obtenir les deux solutions à l'aide de deux nouvelles homothéties.

Énoncé III

Soit un segment $[AB]$ et M un point quelconque du plan. Tracer la perpendiculaire à (MA) en A et la perpendiculaire à (MB) en B. Lorsque ces deux droites sont sécantes, on appelle P leur point d'intersection et I le milieu du segment $[MP]$.

1. Pour quelles positions de M le point P existe-t-il ?
2. Quel est le lieu géométrique de I ?
3. Quel est le lieu géométrique de P lorsque M décrit une droite d perpendiculaire à (AB) ?

1. - Existence de P.

P existe si et seulement si les perpendiculaires aux droites (MA) et (MB) ne sont pas parallèles, c'est-à-dire si les points A, M et B ne sont pas alignés. P existe donc si et seulement si M n'appartient pas à la droite (AB).

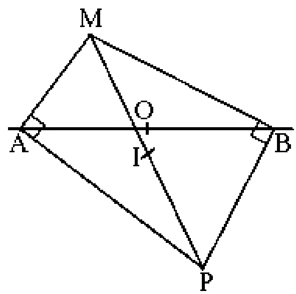
2. - Lieu géométrique de I.

- **Le support du lieu (analyse)**.

En considérant les deux triangles rectangles AMP et BMP, l'hypoténuse commune est $[MP]$ et :

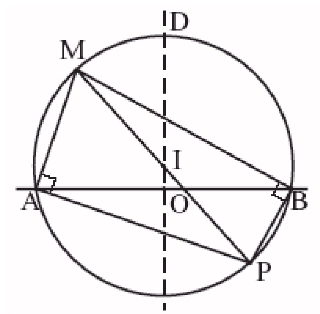
$$IA = IM = IP = IB;$$

donc I appartient à la médiatrice D de $[AB]$.



- **Réciproque (synthèse)**.

Soit I un point quelconque de D.
Construction : le cercle (I) de centre I qui passe par A, passe aussi par B. Soit un point M quelconque de (I) et P le point diamétralement opposé.
I convient-il ? Les triangles MAP et MBP, inscrits dans des demi-cercles, sont rectangles. Donc I convient et il lui correspond une infinité de couples de points (M, P).



- **Conclusion**.

Le lieu géométrique de I est la droite D en entier.

3. - Lieu géométrique de P.

- **La figure**.

En séquence, construction d'une droite d perpendiculaire à (AB), de M sur d, puis P, puis I. Notons m l'intersection de d et de (AB) ; d'après le point 1., P existe si et seulement si $M \neq m$. Notons p la projection de P sur (AB).

- **Conjecture**.

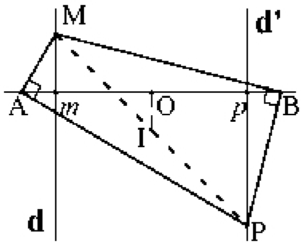
Le logiciel `CABRI` propose comme lieu géométrique de P une perpendiculaire d' à (AB) privée de son intersection p avec (AB). L'observation de plusieurs positions de d nous incite à penser que p est le point symétrique de m par rapport au milieu O de $[AB]$ (voir la figure ci-dessous).

- **Note**.

Une erreur consisterait à utiliser le fait que d' est la droite symétrique de d par rapport à I pour obtenir directement le lieu ; en effet, I est variable.

- **Le support du lieu (analyse)**.

La projection orthogonale de I sur la droite (AB) est O (voir le point 2.), celle de M est m et celle de P est p ; or I est le milieu du segment $[MP]$; ainsi, par projection, O est le milieu de $[mp]$.



- **Conclusion**.

P appartient à d', droite perpendiculaire à (AB) en p, point symétrique de m par rapport à O.

- **Réciproque (synthèse)**.

Soit P un point quelconque de d'.

<u>Construction</u> : traçons les perpendiculaires en A à (PA) et en B à (PB).

— Si $P = p$, ces droites sont parallèles ; M n'existe pas.
— Si $P \neq p$, ces droites sont sécantes en un point M.

Soit I le milieu du segment $[PM]$. En séquence, nous avons donc construit P, puis M, puis I.

P convient-il ? pour tout point P de d', distinct de p, en inversant les rôles de P et M dans l'étude qui précède (c'est-à-dire l'analyse), on démontre que M appartient à la droite d. Donc P convient.

- **Conclusion**.

Le lieu géométrique de P est la droite d' privée du point p (voir l'annexe pour un complément).

Énoncé IV

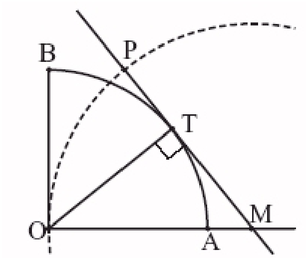
> (O) est un quart de cercle de centre O et d'extrémités A et B. Pour tout point T de (O) distinct de B, la tangente en T à (O) coupe la demi-droite $[OA)$ en M. P est le point de la demi-droite $[MT)$ tel que $MP = MO$. Trouver le lieu géométrique de P lorsque T décrit (O).

- **La figure**.

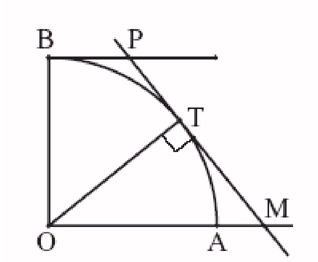
Après la mise en place de (O), la séquence de construction est T, M, P.

- **Conjecture (avec `CABRI`)**.

En déplaçant T sur (O), on peut observer les comportements limites de P aux extrémités d'un segment qui pourrait être le côté $]BI]$ du carré $AOBI$.



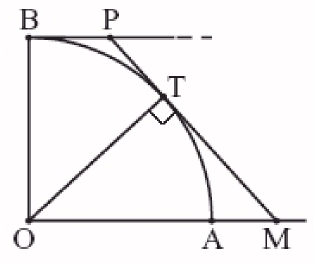
construction



conjecture

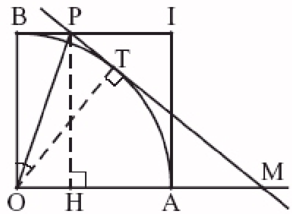
- **Note**.

La figure réalisée en commençant par construire M sur $[OA)$, puis T, puis P apporte une information originale pour B qui semble exclu du lieu.



- **Explication.**
`CABRI` n'utilise pas de point à l'infini dans le tracé de lieux.

- **Le support du lieu (analyse).**



Soit I le quatrième sommet du carré $AOBI$ et H la projection de P sur (OA). Montrons d'abord que le point P appartient à la demi-droite $[BI)$.

Démonstration

— Par hypothèse, P est dans le demi-plan de frontière (OM) qui contient T.
— D'une part, P appartient à la droite (BI) ; en effet :
Une première méthode : dans le triangle OMP isocèle en M, les hauteurs $[PH]$ et $[OT]$ sont isométriques, donc $PH = OT$.
Par suite, $PH = OB$, donc, avec (PH) et (OB) parallèles et $\overrightarrow{HP}$ et $\overrightarrow{OB}$ de même sens, $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{OB}$. P est l'image de H par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$. Donc P appartient à (BI) transformée de (OA).
Une deuxième méthode : avec des considérations angulaires, les triangles OBP et OTP sont isométriques (deuxième cas), donc le triangle OBP est rectangle en B ; donc les droites (BP) et (BI) sont confondues.
— D'autre part, dans la construction de P, le cercle $(M; MO)$ est dans le demi- plan de frontière (BO) qui contient M.

Ainsi, P appartient à la demi-droite $[BI)$ qui est située dans ce demi-plan.

- **Réciproque (synthèse).**

Construction : soit P un point de la demi-droite $[BI)$ et T le point symétrique de B par rapport à (OP). Alors $\widehat{TOB} = 2\widehat{POB}$.

– Si $P = B$, $T = B$ et M n'existe pas.
– Si $P \neq B$ et P extérieur à $]BI]$, comme $\widehat{POB} > 45°$, $\widehat{TOB} > 90°$; donc P ne convient pas.

Ainsi, il **faut** que P appartienne au segment $]BI]$: le lieu de P est donc inclus dans $]BI]$. **Est-ce suffisant** ?

Soit P un point de $]BI]$; par symétrie par rapport à (OP), la droite (PT), tangente en T au quart de cercle (O), coupe (OA) en M. En séquence, nous avons donc construit P, puis T, puis M.

<u>P convient-il</u> ?

<u>Une première méthode</u> : on établit que $OT = OB$ (symétrie) et que

$PH = OB$ (rectangle $BPOH$). De ce fait, dans le triangle MPO, $MO = MP$ (on peut, entre autres, utiliser deux calculs de l'aire du triangle).

<u>Une deuxième méthode</u> : les angles en O et P du triangle MOP sont égaux (symétrie par rapport (OP) et angles alternes-internes en P et en O) ; donc $MO = MP$.

- **Conclusion**.

P convient, donc $]BI]$ est inclus dans le lieu de P. Ainsi le lieu géométrique de P est le segment $]BI]$.

Annexe ([1])

Notre étude se proposait d'insister sur les deux aspects complémentaires (étude directe - étude réciproque ; analyse - synthèse) des problèmes de lieux et de constructions. Indépendamment de ce thème, revenons sur l'énoncé III pour en souligner la richesse.

- Une étude analytique dans un repère orthonormal, à partir de $\left(O, \overrightarrow{OB}\right)$ par exemple, permet de la deviner :

soit $M(x, y)$ et $P(X, Y)$. Alors $X = -x$, puis, (MA) ayant pour équation $y = m(x+1)$ (avec (MA) non perpendiculaire à (AB)), une équation de (PA) est $Y = -\frac{1}{m}(X+1)$, d'où

$$Y = \frac{x^2 - 1}{y}.$$

([1]) D'après une suggestion — étoffée — de Jean-Pierre Friedelmeyer

On conçoit, dès lors, que, Γ étant le lieu de M et Γ' celui de P, le choix de Γ puisse poser problème pour identifier Γ'.

- Ainsi lorsque Γ est une droite Δ sécante à (AB) :
  - si Δ passe par A (resp. B), Γ' a pour support la droite fixe perpendiculaire à Δ en A (resp. B) ;
  - si Δ est perpendiculaire à (AB), nous avons déjà traité le problème ;
  - mais, hors de ces deux cas, Γ ayant pour équation $y = m(x+a)$, avec $a \neq 1$ et $a \neq -1$ et m constant, Γ' relève de l'équation

$$Y = \frac{X^2 - 1}{m(a - X)}.$$

- Lorsque Γ est un cercle de centre O :
  - si son diamètre est AB, la réponse pour Γ' est quasi-immédiate puisque P est sur le même cercle ;
  - sinon, avec un rayon a ($a \neq 1$), Γ' relève de l'équation

$$Y^2(a^2 - X^2) = (X^2 - 1)^2.$$

- Lorsque Γ est une parallèle à (AB), distincte de (AB) :

  $y = a$, constant, et Γ' relève de l'équation

$$Y = \frac{1}{a}(X^2 - 1),$$

qui est une équation de parabole ...

Réciproquement, la relation entre les deux points étant involutive ...

- On conçoit qu'un logiciel dynamique, comme CABRI, peut alors être d'un grand secours pour explorer à plaisir des situations, simples pour le choix de Γ, donnant pour Γ' des identités de plus en plus complexes... *Un feu d'artifice de courbes !*

Bibliographie

[1] Georges Polya, *La découverte des mathématiques*, Dunod.

[2] Georges Glaeser, *Analyse-Synthèse*, Brochure APMEP.

Ce texte a fait l'objet d'une première édition dans la rubrique *Dans nos classes* du *Bulletin* 450 (Janvier-Février 2004) et est reproduit ici avec l'aimable autorisation de l'APMEP.

Les publications de l'**A**ssociation des **P**rofesseurs de **M**athématiques de l'**E**nseignement **P**ublic (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.
— Les brochures signalées par * sont de publication récente.
— Le prix « *adhérent* » concerne l'A.P.M.E.P. **et la S.B.P.M.ef**.

N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix, en € , *sans port*	
	Collège	public	adhérent
*503	La jubilation en mathématiques		
	Fichiers Evariste : 480 problèmes tirés de différents tournois et rallyes mathématiques	4.90	**3.80**
98/132	*2 tomes :*	21,35	**15,25**
502	EXCEL-Classe, CD-Rom (Version individuelle)	16.75	**16.75**
55	*Géométrie expérimentale avec CABRI*	13.40	**12.65**
119	Jeux 5 (Des activités mathématiques au collège)		
	Série EVAPM : Evaluation 6^{e} (première chez nous !)	11	**7.60**
112/118	2 fascicules : Analyses et résultats & Dossier professeur	17.50	**12.15**
352	Tableur et mathématiques au Collège	12,20	**9,90**
451	Concours Australien de mathématiques	15,85	**11**
250/	Panoramas de compétitions mathématiques		
*251	*Panoramath 96 & Panoramath 2*	25,90	**12,50**
	Lycée		
*138	Statistiques en classe de seconde	8.70	**6**
*120	Classeur informatisé de documents math. - 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	45,95	**30,50**
	Version 26 installations, port compris	91,45	**61**
	CD-Rom de mise à jour	10,65	**7,60**
90/	Série EVAPM : Evaluation 1re (cinquième chez nous !)		
107/108	3 fascicules	21.35	**14.50**
*305	GALION-Thèmes Seconde : 10 thèmes programme 2000	11,45	**9,90**
*450	MathÉvasion : 46 activités en bandes dessinées	7,60	**5,35**
	Avec CABRI, faire de la géométrie en jouant		
124/125	*2 tomes déjà paru*	17,55	**10,65**
*129	Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaires	9.90	**6.85**
121	Maths en scène : Commentaires des 22 thèmes de l'expo « Mathématiques 2000 » utilisable indépendamment	11,00	**7,60**
402	Jeux du Scientific American	20.60	**14.50**

$\boxed{\text{PORT}}$ (prix indicatif) : 1 brochure : 2,50 € ; 2 ou 3 brochures : 4,00 € et au-dessus de 3 : 6,50 €

L'addition est-elle infiniment associative ?

P. DUPONT, *H.E.C. Liège*

Il est bien connu que l'addition des réels jouit de la propriété d'associativité : pour tous a, b et $c \in \mathbb{R}$,

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

L'associativité générale s'en déduit aisément (par induction) : quel que soit le naturel n et quels que soient les réels a_1, a_2, …, a_n, tous les parenthésages de la somme

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

auront la même valeur.

Mais qu'en est-il dans une somme d'une infinité de termes, lorsque la somme devient une série ? Les choses ne sont plus si simples, comme nous le verrons. Il est cependant nécessaire d'abord de préciser un certain nombre de notions et de notations.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{R}$. La *série associée* à cette suite, ou (de manière légèrement impropre) la *série de terme général* u_n, est la nouvelle suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Pour la désigner, nous utiliserons l'une des notations

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \qquad \text{ou} \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \tag{1}$$

« pour rappeler son mode de construction » ([1, p. 249]).

Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, nous dirons que la série *converge* et que s est sa *somme* ; nous noterons alors

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Adresse de l'auteur: Pascal Dupont, Rue du Stampia, 77, 1390 Grez-Doiceau
Courriel : `p.dupont@math.ucl.ac.be`

Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ ou si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas, nous dirons que la série *diverge* ; le symbole $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est dans ce cas dépourvu de sens.

Remarquons qu'il est aussi absurde de confondre une série et sa somme que de confondre une suite et sa limite. Voilà pourquoi nous distinguons soigneusement

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

La question de l'associativité de l'« addition infinie » est donc la suivante : est-il permis d'introduire des groupements de termes dans une série ? Par exemple,

$$u_1 + (u_2 + u_3 + u_4) + (u_5 + u_6) + u_7 + \cdots \tag{2}$$

est-elle convergente si et seulement si (1) l'est, et dans ce cas leurs sommes coïncident-elles ? Il importe de se rendre compte que (2) désigne en fait une nouvelle série, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$, avec $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 + u_3 + u_4$, $v_3 = u_5 + u_6$, etc… Précisons que nous ne considérerons ici que des groupements « de niveau 1 », c'est-à-dire sans parenthèses emboitées. Mais une construction telle que

$$(u_1 + ((u_2 + u_3) + u_4)) + ((u_5 + u_6) + u_7 + u_8) + u_9 + \cdots$$

peut être étudiée par simple itération des résultats ci-dessous.

Une chose est d'ores et déjà claire ; la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ peut être convergente sans que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne le soit : c'est le cas dans l'

Exemple 1 :

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$$

est la série nulle, donc elle converge, et cependant elle est obtenue par groupements à partir de la série divergente

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1}.$$

(Cette série est divergente, parce que ses sommes partielles, qui valent alternativement 1 et 0, n'ont pas de limite.)

Le moment est venu de nous placer dans un cadre général. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ une série et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ une série obtenue en y effectuant des groupements de termes. Pour chaque n, notons j_n le nombre (non nul) de termes dans le n^e groupe (autrement dit dans v_n) et k_n l'indice du premier terme de ce n^e groupe. (Remarquons au passage que les k_n se déduisent des j_n : $k_n = 1 + \sum_{l=1}^{n-1} j_l$; en particulier, $k_1 = 1$.) Ainsi,

$$v_n = \sum_{l=k_n}^{k_{n+1}-1} u_l. \tag{3}$$

En d'autres termes, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ est la série

$$(\underbrace{u_1 + \cdots + u_{k_2-1}}_{j_1 \text{ termes}}) + (\underbrace{u_{k_2} + \cdots + u_{k_3-1}}_{j_2 \text{ termes}}) + (\underbrace{u_{k_3} + \cdots + u_{k_4-1}}_{j_3 \text{ termes}}) + \cdots \tag{4}$$

Convenons enfin de noter t_n les sommes partielles de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$:

$$t_n = \sum_{l=1}^{n} v_l.$$

L'observation-clé pour tout le reste du raisonnement est la suivante : *La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une sous-suite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.* (La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une *sous-suite* de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'il existe une injection croissante f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout n, $b_n = a_{f(n)}$; cela revient à ce qu'il existe une partie P de $\mathbb{N}^*$ (en fait, $P = \operatorname{im} f$) telle que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (a_n)_{n\in P}$.) Ici, $t_n = s_{k_{n+1}-1}$.

Voici maintenant trois résultats positifs.

Proposition 1 *Si $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est convergente, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ est convergente et*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Proposition 2 *Si tous les termes de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ sont positifs, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ sont simultanément convergentes ou divergentes et, dans le premier cas,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Proposition 3 *Si*

(a) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;

(b) *La suite* $(j_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *des longueurs des groupes est majorée;*

alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ *sont simultanément convergentes ou divergentes et, dans le premier cas,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

La proposition 1 résulte tout simplement de ce que, lorsqu'une suite converge, toutes ses sous-suites convergent vers la même limite.

La proposition 2 se justifie, elle, en observant que pour une série à termes positifs, la suite des sommes partielles est croissante. Or, une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée (auquel cas sa limite et son suprémum coïncident) et, si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est également car, pour tout n, il existe n' tel que $s_n \leqslant t_{n'}$.

Voici enfin une démonstration de la proposition 3. Compte tenu de la proposition 1, il reste à montrer que, sous les hypothèses (a) et (b), si $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, alors $\lim_{n\to\infty} s_n = t$, c'est-à-dire que

$$(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall\, m \geqslant n)\ |s_m - t| < \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$.

- Comme $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $m \geqslant n_1$, $|t_m - t| < \varepsilon/2$.
- Par l'hypothèse (b), il existe j tel que $j \geqslant j_n$ pour tout n; puisque les j_n ne sont pas nuls, j ne l'est pas non plus; par l'hypothèse (a), il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_m| < \varepsilon/(2j)$ pour tout $m \geqslant n_2$.

Posons alors $n = \max\{k_{n_1+1}, n_2 + j\}$. Soit $m \geqslant n$. Ainsi, $k_{n_1+1} \leqslant n \leqslant m$. Soit m' le numéro du groupe auquel appartient u_m : autrement dit, m' est tel que $k_{m'} \neq m < k_{m'+1}$. Comme n_1+1 est le numéro du groupe contenant $u_{k_{n_1+1}}$, il suit que $n_1 + 1 \neq m'$. Alors,

$$\begin{aligned}
|s_m - t| &= |u_1 + \cdots + u_m - t| \\
&= |u_1 + \cdots + u_{k_{m'}-1} + u_{k_{m'}} + \cdots + u_m - t| \\
&= |v_1 + \cdots + v_{m'-1} + u_{k_{m'}} + \cdots + u_m - t| \\
&= |t_{m'-1} - t + u_{k_{m'}} + \cdots + u_m| \\
&\leqslant |t_{m'-1} - t| + |u_{k_{m'}}| + \cdots + |u_m| \ ;
\end{aligned}$$

puisque $m' - 1 \geqslant n_1$, le premier terme est strictement inférieur à $\varepsilon/2$; en outre, puisque $u_{k_{m'}}, \ldots, u_m$ appartiennent tous au même groupe, le nombre des termes $|u_{k_{m'}}|, \ldots, |u_m|$, égal à $m - k_{m'} + 1$, est inférieur à j. Donc, $k_{m'} \geqslant m - j + 1 > m - j \geqslant n - j \geqslant n_2$, et puisque $k_{m'}, \ldots, m \geqslant n_2$, chacun de ces derniers termes est strictement inférieur à $\varepsilon/(2j)$. Finalement,

$$|s_m - t| \leqslant |t_{m'-1} - t| + |u_{k_{m'}}| + \cdots + |u_m| < \frac{\varepsilon}{2} + j \times \frac{\varepsilon}{2j} = \varepsilon.$$

■

L'exemple 1 montre que l'hypothèse (a) ne peut être omise dans la proposition 3. L'hypothèse (b) ne peut pas l'être non plus, ainsi que le montre l'

Exemple 2. Soit la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + \cdots \ ;$$

si nous y groupons les termes de la manière suivante :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = (1 - 1) + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots,$$

nous obtenons la série nulle, convergente ; cependant, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ elle-même est divergente, car les sommes partielles

$$\begin{aligned}
&1 - 1,\\
&1 - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2},\\
&1 - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4},\\
&\ldots
\end{aligned}$$

sont toutes nulles (ce sont précisément celles qui font partie de la sous-suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$), tandis que les sommes partielles

$$\begin{aligned}
&1,\\
&1 - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2},\\
&1 - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4},\\
&\ldots
\end{aligned}$$

valent toutes 1.

Une autre manière d'aborder le problème est de considérer, non plus *un* groupement de termes, mais *plusieurs* simultanément. Soit donc Λ un ensemble quelconque d'indices, fini ou infini.

Si, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $(j_n^\lambda)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans $\mathbb{N}^*$, posons $k_n^\lambda = \sum_{l=1}^n j_l^\lambda$ et notons, comme en (3), $v_n^\lambda = \sum_{l=k_n^\lambda}^{k_{n+1}^\lambda - 1} u_l$. Considérons alors la famille des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n^\lambda$. Soit encore $K = \left\{k_n^\lambda : \lambda \in \Lambda, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Proposition 4 *Si $\mathbb{N}^* \setminus K$ est fini et si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\sum_{n=1}^\infty v_n^\lambda = s$, alors $\sum_{n=1}^\infty u_n = s$.*

En effet, si les sous-suites $(a_{f_\lambda(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ (pour $\lambda \in \Lambda$) d'une même suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes vers une même limite a, et si $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{im}(f_\lambda)$ recouvre « presque tout » $\mathbb{N}^*$ (en ce sens que $\mathbb{N}^* \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{im}(f_\lambda)$ est fini), alors $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe et vaut a.

■

Exemple 3 : Si

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6) + (u_7 + u_8) + \cdots$$

et

$$(u_1 + u_2 + u_3) + (u_4 + u_5) + (u_6 + u_7) + (u_8 + u_9) + \cdots$$

convergent et ont la même somme s, alors $\sum_{n=1}^\infty u_n = s$. En effet, $K = \{1, 3, 5, 7 \ldots, 1, 4, 6, 8, \ldots\}$, et $\mathbb{N}^* \setminus K = \{2\}$ est bien fini.

Nous venons d'étudier ce qui se passe lorsque *différents* schémas de groupement des termes sont considérés dans *une* série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$. Étudions maintenant, au contraire, le résultat d'*un* schéma particulier de groupement des termes dans *différentes* séries. Nous obtenons alors une réciproque partielle de la proposition 3 :

Proposition 5 *Soit $(j_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de naturels non nuls. Si, quelle que soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de limite nulle, la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ qui s'en déduit par le processus* (3) *entraine celle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ elle-même, alors la suite $(j_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.*

Pour prouver cette proposition, supposons la suite $(j_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ non bornée et construisons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de limite nulle telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ soit convergente et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ divergente. L'idée de cette construction est, pour l'essentiel, celle qui se trouve dans l'exemple 2.

Puisque $(j_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non bornée, elle admet une sous-suite $(j_n)_{n\in P}$ qui croît vers $+\infty$. Les u_j qui se trouvent dans un groupe dont le numéro n'appartient pas à P sont choisis nuls. En ce qui concerne ceux qui se trouvent dans un groupe dont le numéro, n, appartient à P, nous prendrons les termes de la première moitié du groupe égaux à $1/j_n$ et ceux de la seconde moitié égaux à $-1/j_n$; si la longueur du groupe est impaire, le terme du milieu est laissé nul. Plus explicitement,

$$u_m = \begin{cases} 1/j_n & \text{si } k_n \leqslant m \leqslant k_n + \lfloor j_n/2 \rfloor - 1 \text{ et } n \in P \ ; \\ -1/j_n & \text{si } k_n + \lfloor (j_n+1)/2 \rfloor \leqslant m \leqslant k_n + j_n - 1 \text{ et } n \in P \ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, dans la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$, la suite des sommes partielles d'indices $k_n + \lfloor j_n/2 \rfloor - 1$ tend vers $\frac{1}{2}$, tandis que la suite des sommes partielles d'indices $k_n - 1$ est nulle. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ est la série nulle.

■

Par exemple, si la suite des longueurs donnée pour les groupes est

$$(2, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 5, \ldots),$$

nous pouvons prendre $P = 2\mathbb{N}^*$, ce qui donne

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + 0 + 0 + \tfrac{1}{3} + 0 - \tfrac{1}{3} + 0 + 0 + \cdots \ ;$$

alors,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n =$$

$$= (0+0) + (0) + (0+0) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) + (0+0) + \left(\tfrac{1}{3} + 0 - \tfrac{1}{3}\right) + (0+0) + \cdots$$

est bien la série nulle.

Bibliographie

[1] Jean Mawhin, *Analyse — Fondements, techniques, évolution*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1992.

La trajectoire des planètes autour du soleil

M. ROELENS,

Lerarenopleiding secundair onderwijs groep 1, Katholieke Hogeschool Limburg, Diepenbeek ; Maria Boodschaplyceum, Brussel.

1. Introduction ([1])

Le 14 mars 1964, le célèbre physicien et Prix Nobel RICHARD FEYNMAN (1918-1988) a donné, pour un public d'étudiants de première année de l'université, une conférence remarquable sur « le mouvement des planètes autour du soleil ». Dans cette conférence, FEYNMAN a démontré que la forme elliptique de la trajectoire d'une planète découle des lois de NEWTON et de la nature de la force de gravité.

A cet effet, il ne s'est appuyé que sur la géométrie euclidienne ; la démonstration ne contient donc pas de dérivées ni d'équations différentielles.

Il s'agit donc d'une démonstration « élémentaire », ce qui ne veut pas dire pour autant que le raisonnement soit simple.

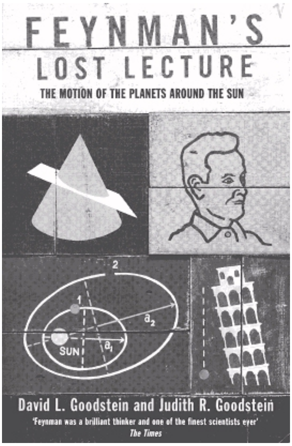
Tandis que toutes les autres conférences de FEYNMAN datant de la même période avaient été publiées (voir [2]), on croyait celle-ci perdue. Environ trente ans plus tard, après la mort de FEYNMAN, on a retrouvé quelques croquis faits par l'orateur en préparation de sa conférence, ainsi qu'une bande sonore. Sur base de ce matériel, le couple GOODSTEIN a réussi à déchiffrer la conférence et à la reconstituer en détails. Ce qui a donné lieu à ce petit livre délicieux.

Adresse de l'auteur: Michel Roelens, Blijde Inkomststraat 49, 3000 - Leuven.
courriel : `Michel.Roelens@ler.khlim.be`

([1]) Cet article est la traduction par l'auteur de sa recension du livre [1] publiée dans *Uitwiskeling* 19/3 (2003), p. 43-48. ROBERT HAINE a eu la gentillesse de relire la traduction et d'y apporter quelques corrections.

2. Histoire de la description du système solaire

Le livre commence par un chapitre succinct mais très bien écrit sur l'histoire de la description du système solaire : d'Aristote à Newton en passant par Ptolémée, Copernic et Kepler.



Kepler (17^e siècle) a déduit des données précises rassemblées par Tycho Brahe, que la trajectoire d'une planète est une ellipse avec le soleil en un des foyers (1re loi de Kepler). De plus, il a constaté que la vitesse d'une planète varie en fonction de sa distance au soleil (2^e loi de Kepler ou loi des aires : le segment reliant la planète au soleil parcourt des aires égales en temps égaux) et qu'il existe une belle relation entre la période d'une planète (le temps requis pour un tour complet autour du soleil) et sa distance moyenne au soleil (3^e loi de Kepler).

Newton (fin du 17^e siècle) a démontré que ces lois de Kepler sont une conséquence logique de sa théorie de la gravité (la force de gravité que deux corps exercent l'un sur l'autre est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux corps) et des lois de la dynamique (notamment :

1. en l'absence de force, un corps poursuit un mouvement rectiligne à vitesse constante ;

2. la force égale la masse multipliée par l'accélération ;

3. l'action égale la réaction).

Quoique Newton était lui-même l'inventeur du calcul différentiel, il a démontré tout ceci sans s'appuyer sur ces techniques « nouvelles » de calcul. La démonstration de Feynman pour la loi des aires correspond à celle de Newton. Pour démontrer que la trajectoire d'une planète est elliptique, Feynman a élaboré un autre raisonnement que celui de Newton, plus facile à comprendre.

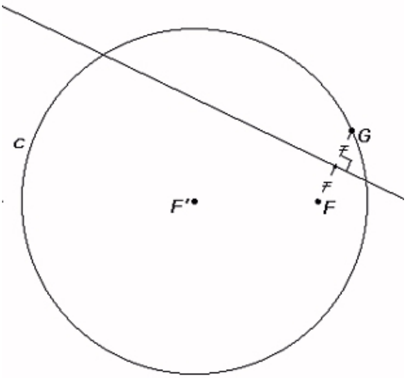
Résumons ci-dessous les raisonnements de Feynman.

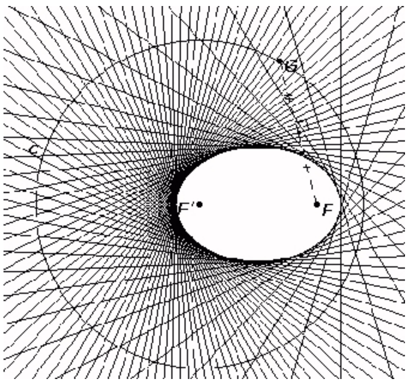
3. Plusieurs façons de définir une ellipse

On peut définir une ellipse comme une section plane d'un cône ou comme le lieu des points P tels que la somme des distances à deux points fixes (les foyers) F et F' soit constante. Mais la démonstration de Feynman s'appuie sur une troisième façon de définir une ellipse. Cette façon correspond au « pliage » d'une ellipse (voir également [4], p. 37) :

> Dessiner ([2]) sur une feuille de papier un cercle de centre F' et marquer à l'intérieur du cercle un point F. Plier la feuille de telle façon qu'un point G du cercle coïncide avec le point F. Ouvrir la feuille et recommencer l'opération une vingtaine de fois, chaque fois avec un autre point G du cercle. On voit apparaître une ellipse, dont tous les plis sont des tangentes.

Ce « pliage » peut facilement être simulé en **Cabri**. On dessine un cercle c de centre F' et un point F à l'intérieur du cercle. On prend un point G du cercle c. Pour plier G sur F, le pli est la médiatrice de $[FG]$. On effectue une animation pendant laquelle le point G parcourt le cercle et le pli laisse une trace.

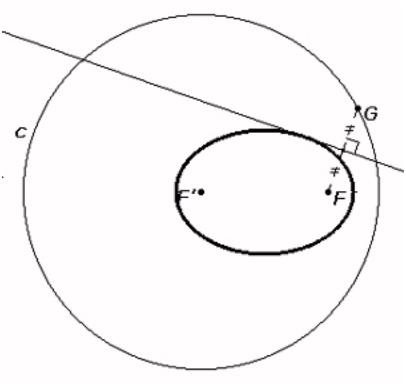


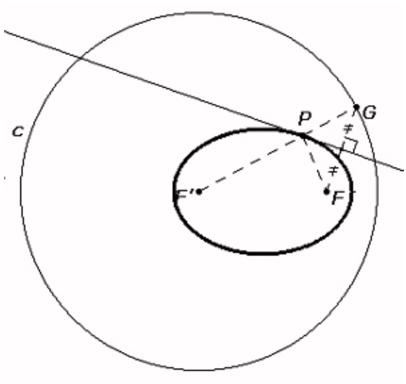


Au lieu de l'animation, on peut demander à **Cabri** de dessiner le « lieu » du pli (déterminé par le mouvement du point G sur le cercle). On voit alors apparaître l' « enveloppe » de toutes ces tangentes, donc l'ellipse. Sur cette

([2]) Ce procédé a également été développé par Cl. Festraets dans *Mathématique et Pédagogie* n° 68 et repris dans *Mathématique et Pédagogie* n° 142 (note de l'éditeur).

figure, on voit bien que le point de tangence du pli n'est pas le milieu de $[FG]$, mais bien le point d'intersection du pli avec $F'G$.





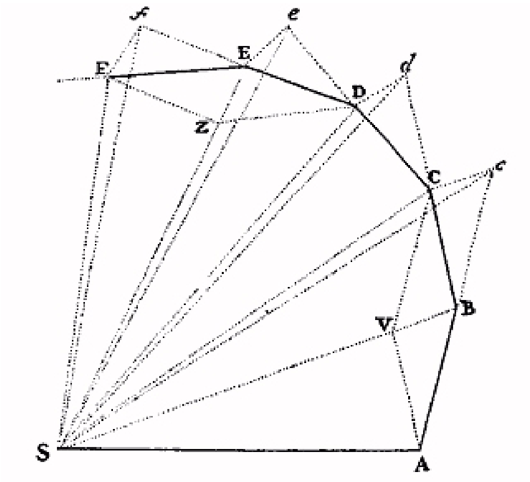
On voit bien que $|F'P| + |PF| = |F'G|$ et ceci est le rayon (constant) du cercle c. Le point P se déplace donc effectivement sur une ellipse. En outre, le pli est la tangente en P, car pour tout autre point Q de cette droite, on a $|F'Q| + |QF| = |F'Q| + |QG| > |F'G|$, de sorte que Q est à l'extérieur de l'ellipse.

4. Démonstration de la loi des aires

Une planète tourne autour du soleil S. Supposons que le soleil ne bouge pas et négligeons l'interaction avec les autres planètes. Nous faisons une approximation « discrète », c'est à dire que nous découpons le mouvement en petits intervalles de temps égaux et nous imaginons que dans chacun des ces intervalles de temps, la planète décrit un mouvement rectiligne. Dans le premier intervalle, la planète va de A à B (voir la figure page 51, de *Principia mathematica philosophiae naturalis* de 1687).

Si nous prenons comme unité de temps la durée d'une intervalle, nous pouvons considérer comme le vecteur vitesse de la planète au point A. Si aucune force n'intervenait, la planète irait, dans l'intervalle suivant, de B à c (première loi de Newton).

Mais le soleil attire la planète avec une force dirigée de B à S. La deuxième loi de Newton dit que la force est proportionnelle avec l'accélération, c'est à dire avec la *différence* de vitesse. Au vecteur $\overrightarrow{Bc}$ est donc additionné un vecteur $\overrightarrow{BV}$ dirigé vers le soleil (voir la figure ci-dessous), de sorte que la planète ne va pas au point c mais au point C (en effet, $\overrightarrow{Bc} + \overrightarrow{BV} = \overrightarrow{BC}$).

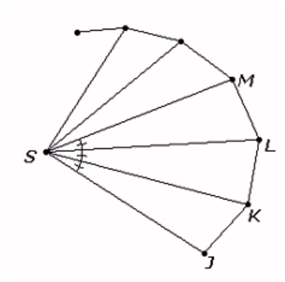


Afin de démontrer la loi des aires (la 2[e] loi de Kepler), nous devons tout simplement prouver que les triangles SAB et SBC ont la même aire. Mais ceci est manifestement le cas, car ils ont la même base $[SB]$ et leurs hauteurs sont égales (A et c, et donc également A et C, se trouvent à même distance de la droite SB).

5. Démonstration de la trajectoire elliptique

Feynman effectue ici une autre approximation discrète. Cette fois, il découpe le mouvement en petits morceaux non de temps égaux mais d'angles égaux au soleil. La planète va donc de J à K, de K à L, etc. et les angles en S sont égaux.

La deuxième loi de Newton dit que la force est proportionnelle à l'accélération, donc, dans notre approximation discrète, à $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ (l'augmentation de vitesse par unité de temps). La loi des aires dit que Δt est proportionnelle à l'aire des triangles SJK, SKL, etc (voir la figure de la page 52). D'autre part, la force de gravité est inversement proportionnelle au carré de la distance au soleil. Ceci donne :



$$\frac{1}{\text{distance}^2} \sim F \sim \frac{\Delta v}{\Delta t} \sim \frac{\Delta v}{\text{aire}}.$$

L'aire du triangle est proportionnelle au carré de la distance au soleil (en effet, l'aire de SJK est égale à

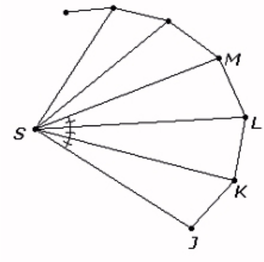
$$\frac{1}{2}|SJ| \cdot |SK| \cdot \sin\alpha$$

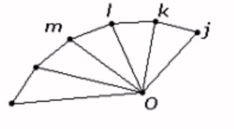
où α est l'angle constant au soleil et $|SK|$ ne diffère pas beaucoup de $|SJ|$ puisque l'angle α est supposé tout petit ; dans le livre, les auteurs donnent un argument plus géométrique). Donc, Δv est constante !

A ce point, Feynman dessine un *hodographe* : un diagramme des vecteurs vitesses aux points J, K, L, … dessinés avec une même origine O. Le vecteur Oj est parallèle à JK, Ok est parallèle à KL, et ainsi de suite. Puisque les angles au soleil sont égaux et non les intervalles de temps, nous ne pouvons pas supposer que les longueurs des vecteurs vitesse soient proportionnelles à $|JK|$, $|KL|$, … Les extrémités de l'hodographe constituent un polygone $jklm\ldots$. Les côtés de ce polygone sont les différences (vectorielles) des vitesses, par exemple :

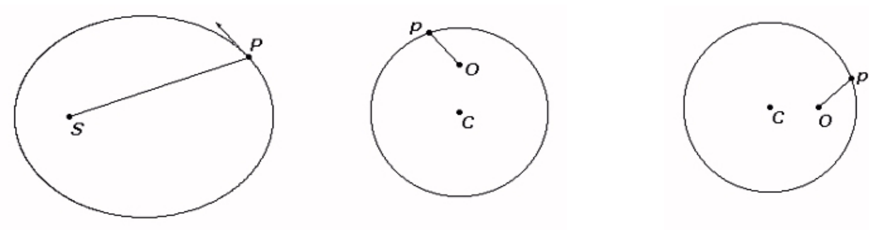
$$\overrightarrow{jk} = \overrightarrow{Ok} - \overrightarrow{Oj} = \overrightarrow{v_k} - \overrightarrow{v_j}.$$

Puisque Δv est constante, les côtés de ce polygone sont égaux. Et puisque les angles en S sont égaux et $kj \,/\!/\, KS$, $kl \,/\!/\, LS, \ldots$ (les différences des vitesses sont dirigées vers le soleil), les angles de ce polygone sont égaux. Le polygone $jklm\ldots$ est donc un polygone régulier ! Remarquons que le point O n'en est pas le centre.





Maintenant, Feynman réduit les angles en S de plus en plus de sorte que la trajectoire $JKLM\ldots$ de la planète se fait courbe et le polygone régulier $jklm\ldots$ devient un cercle (au centre dans la figure ci-dessous). Lorsque la planète P tourne autour du soleil S, la tangente à la trajectoire en P reste toujours parallèle à Op puisque $\overrightarrow{Op}$ représente le vecteur vitesse. Ensuite, Feynman tourne l'hodographe de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (à droite dans la figure ci-dessous). A présent, la tangente à la courbe en P est perpendiculaire à Op.



Mais l'hodographe tourné est la même figure que la figure de gauche de la page 49 (C et O s'appelaient F' et F) ! La médiatrice de $[Op]$ est le pli ; pour toute position de p sur le cercle, le pli est tangent à un ellipse dont C et O sont les foyers ! Par conséquent, la trajectoire de P sur la figure de gauche doit être une ellipse, car la trajectoire est déterminée par le « point de départ » J et la direction de la vitesse en chaque point ([3]).

Bibliographie

[1] D.L. Goodstein, J.R. Goodstein, *Feynman's lost lecture. The motion of the planets around the sun*, Vintage (London), 1997, ISBN 0-09-973621-7

[2] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman lectures on fysics*, 3 volumes, Addison-Wesley (Reading), 1963-1965.

[3] `http://www.lostlecture.host.sk/LostLecture.htm` (site de l'édition slovaque, avec des applets !)

[4] M. Roelens e.a., Toestellen voor wiskundelessen, *Uitwiskeling* (Leuven), 1994.

([3]) A mon avis, ceci est le maillon le moins « élémentaire » du raisonnement de Feynman. Il s'agit en fait de l'unicité de la solution d'une équation différentielle étant donné la condition initiale (le « point de départ » de la trajectoire).

Les problèmes du premier degré : des méthodes de fausse position à la résolution algébrique

M. BALLIEU & M.-F. GUISSARD, *CREM*

Avant-propos

Dans toutes les branches des mathématiques et de diverses autres sciences, le problème qui se pose le plus souvent et le plus concrètement est de trouver des solutions d'équations. C'est l'algèbre qui permet de réaliser cela et, à ce titre, c'est une discipline fort ancienne. On trouve en effet des résolutions d'équations dans des tablettes mésopotamiennes et des papyrus égyptiens datant de plus de deux mille ans avant notre ère.

Dans les *Éléments* d'EUCLIDE, qui datent du troisième siècle avant Jésus-Christ, il y a également une forme d'algèbre en ce sens qu'on y trouve des méthodes générales de résolution d'équations, par des procédés géométriques. Chez DIOPHANTE D'ALEXANDRIE, que les historiens situent entre 250 et 350 de notre ère, on trouve également de l'algèbre; mais, tout comme les tablettes babyloniennes et les papyrus égyptiens, le texte de DIOPHANTE consiste en un recueil de problèmes particuliers avec solutions et ne peut donc être considéré comme un traité théorique qui aurait pour souci de donner une méthode générale de résolution.

Quant aux méthodes dites « de fausse position » (simple ou double), qui ont été utilisées pendant des siècles, elles fournissent des méthodes générales de résolution des problèmes du premier degré, mais par des procédés purement arithmétiques.

Il est admis par les spécialistes d'histoire des mathématiques que l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline avec un nom, des objets, des outils, des algorithmes, des preuves et des domaines d'application, a été la publication d'un petit ouvrage intitulé *Muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr* ([1])

([1]) Al-ǧabr *(qui a donné naissance au mot* algèbre*) et* al-muqābala *sont les deux principales opérations qui permettent de réduire les équations algébriques à une des formes canoniques dont la solution est donnée dans le traité.*

wa l-muqābala (*Abrégé de calcul par le ǧabr et la muqābala*). Ce texte est l'œuvre du savant d'origine persane Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwarizmī ([2]) (vers 780 - vers 850) qui travaillait à Baġdād, dans la Maison de la Sagesse, fondée par le calife abbasside al-Ma'mūn. La dédicace au calife, qui régna jusqu'en 833, permet de situer l'œuvre dans le temps.

1. La fausse position simple chez les Égyptiens

1.1. Introduction

L'une des méthodes utilisées depuis la plus haute Antiquité est ce qu'on appelle la méthode de fausse position (simple). Elle consiste à donner une valeur à l'inconnue, à opérer les calculs décrits dans l'énoncé puis, en fonction de l'erreur qui apparaît, à ajuster la valeur donnée *a priori* à l'inconnue.

Nous nous proposons ici d'analyser cette méthode à partir du problème 24 du *Papyrus mathématique Rhind* conservé au *British Museum* (où il est catalogué sous les numéros BM 10057 et BM 10058). Ce papyrus est l'une des principales sources d'information sur les connaissances mathématiques égyptiennes. Outre des tables de multiplication, on y trouve quelque quatre-vingt sept problèmes d'arithmétique et de géométrie, avec les solutions.

1.2. Problème 24

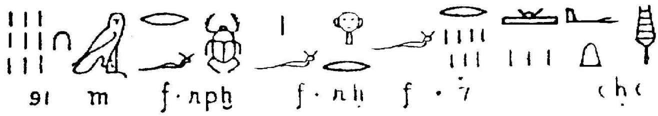
Voici l'énoncé du problème 24 tel qu'il apparaît sur le papyrus. Il s'agit d'un texte en écriture hiératique qui est l'écriture cursive du scribe.

Les égyptologues qui ont étudié le manuscrit l'ont transcrit en hiéroglyphes, plus faciles à décrypter.

Notons que le texte du papyrus Rhind est écrit de droite à gauche.

([2]) Comme son nom l'indique, il est originaire du Ḫwarizm, région au sud de la mer d'Aral.

Cette transcription en hiéroglyphes est donnée ci-dessous :



Une traduction littérale en est :

Une quantité, un septième d'elle sur elle devenir elle en tant que 19,

ce que nous écririons aujourd'hui

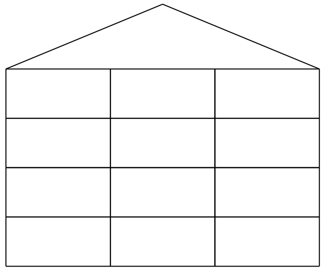
$$x + \frac{1}{7}x = 19.$$

Le problème est résolu par la méthode de fausse position simple. Le scribe suppose au départ que la quantité cherchée vaut 7, nombre qui permet d'éviter l'apparition trop rapide de fractions. Il calcule alors la quantité et son septième : $7 + 1 = 8$.

Ce résultat est faux puisqu'il aurait dû trouver 19. Le raisonnement qu'il tient alors est le suivant : la proportion de 19 à 8 est la même que celle de la quantité cherchée à 7, nombre qu'il avait choisi au départ pour des raisons de facilité. Il est ainsi amené à diviser 19 par 8, c'est-à-dire qu'il recherche par combien il faut multiplier 8 pour obtenir 19.

Ce rapport de la proportion, que nous noterions $\frac{19}{8}$, le scribe égyptien qui utilise essentiellement des fractions de numérateur 1, le note $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$, nombre qu'il multiplie ensuite par 7. Il obtient ainsi la solution $16\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$. Le scribe termine en vérifiant qu'en ajoutant à cette quantité son septième, qui vaut $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$, on obtient bien 19. Notons que le scribe multiplie $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ par 7 et non 7 par $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$. Or, dans l'esprit de la méthode de fausse position, lorsqu'on a trouvé le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de 8 à 19 (dans le second membre), il serait logique de multiplier ensuite 7 (la fausse position) par ce même coefficient. Cette inversion de l'ordre des facteurs, qui simplifie le calcul, semble indiquer que les Égyptiens avaient une connaissance intuitive de la commutativité de la multiplication.

Le raisonnement qui sous-tend cette méthode de résolution peut être condensé dans le tableau de proportionnalité suivant



où on passe de la deuxième à la troisième ligne en multipliant par le facteur $2\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$. Le principe de la méthode se base sur la proportionnalité de x et $x+\frac{x}{7}$.

La fausse position simple a été utilisée très longtemps. On la retrouve notamment dans les textes arabes, dans le *Liber abaci* de Leonardo Fibonacci (XIII^e siècle) et dans *La summa* de Luca Pacioli (XV^e siècle). Notons que l'inconnue peut être calculée à partir d'un rapport interne du tableau, comme c'est le cas ici, mais également à partir du rapport externe, comme nous le verrons à la page 62.

2. La double fausse position chez les Arabes

2.1. Introduction

Ying buzu (excédent et déficit), *al-ẖaṭa'ayn* (les erreurs), *regula duarum falsarum positionum*, *regola delle doi false positioni*, *règle des plateaux de la balance*. Ce sont là quelques appellations qui, toutes, désignent un même procédé permettant de résoudre des problèmes exprimables par des équations linéaires à une inconnue ou par des systèmes linéaires à deux inconnues.

Cette fameuse règle des deux fausses positions était sans doute connue à Baġdād à l'époque de l'algébriste al-H̱warizmī dans la première moitié du neuvième siècle. Nous l'illustrerons par un extrait d'un manuscrit traduit de l'arabe en latin, intitulé *Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ex eo quod sapientes Indi posuerunt quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit*, c'est-à-dire le *Livre sur l'agrandissement et la diminution nommé le calcul de la conjecture d'après ce* *que les sages de l'Inde ont établi et qu'Abraham a rassemblé et composé selon le livre appelé indien.*

L'auteur arabe de cet ouvrage est inconnu ; certains historiens pensent ou ont pensé qu'il pourrait s'agir d'Abū Kāmil Šuga ibn Aslam ibn Muḥammad al-ḥāsib al-Misrī, qui florissait vers les années 900. D'autres attribuent le texte, ou du moins sa traduction en latin, au juif espagnol Abraham ibn Ezra. Le titre pourrait laisser croire que la paternité de la règle revient aux savants indiens. Cependant la ressemblance de la terminologie avec les expressions chinoises *ying* (excédent) et *buzu* (déficit) donne à penser que cette règle, connue bien avant en Chine (3), ait pénétré dans la littérature arabe par un chemin qui est passé par l'Inde ou par la « route de la soie ». Il faut en effet constater que, dans les ouvrages mathématiques indiens connus à ce jour, qui sont antérieurs au douzième siècle, on ne trouve pas trace de cette règle.

Ce procédé de résolution d'équations linéaires se perpétue chez de nombreux auteurs arabes comme al-Karağī (mort vers 1025) et en Europe, chez Leonardo Pisano Fibonacci au treizième siècle et chez Luca Pacioli au quinzième.

Le principe en est le suivant. On donne à l'inconnue deux valeurs « quelconques (4) » qui se révèlent le plus souvent être de fausses valeurs et, à partir de là, il est possible de calculer la solution vraie. Trois cas évidemment se présentent :

- Les deux fausses valeurs sont plus petites que l'inconnue.
- Les deux fausses valeurs sont plus grandes que l'inconnue.
- L'inconnue se situe entre les deux fausses valeurs.

Le texte qui suit illustre la résolution d'un problème par la méthode de double fausse position dans le cas où l'inconnue se situe entre les deux fausses valeurs.

2.2. Un problème linéaire

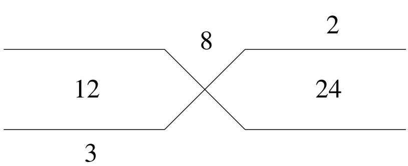
Voici une traduction d'un extrait de l'ouvrage en latin attribué à Abraham ibn Ezra.

(3) Voir à ce sujet le chapitre sept du *Jiuzhang Suanshu* [6], titre généralement traduit par les *Neuf Chapitres sur l'Art du Calcul*, qu'on peut dater d'un peu avant le début de notre ère.
(4) En fait, elles sont généralement « bien choisies » pour simplifier les calculs.

Après la louange à Dieu, voici ce qu'il est dit. J'ai écrit ce livre selon ce que les sages de l'Inde ont découvert à propos du calcul de la conjecture, en examinant attentivement et en étudiant ce qui est utile en soi, en persévérant dans cette direction et en en saisissant l'application pratique. De cela donc, voici ce qu'il vient : soit un census ([5]) duquel on ôte un tiers et un quart et il reste huit. Que vaut le census ? Pour aborder son calcul, suppose un plateau de balance de douze dont on considère un tiers et un quart ; tu ôtes ce tiers et ce quart qui font sept, il restera cinq. Compare alors à huit, à savoir le reste du census et il t'apparaîtra clairement que tu as fait une erreur de trois en déficit : mets cela de côté et suppose ensuite que tu places sur le plateau de la balance une seconde quantité, qui est divisée par la première, que ce soit vingt-quatre, et ôte le tiers et le quart qui font quatorze, il restera dix. Compare alors cela à huit, à savoir le reste du census. Et c'est ainsi qu'il t'apparaîtra clairement que tu as commis une erreur de deux en plus. Multiplie donc l'erreur du dernier plateau de la balance qui vaut deux par le premier plateau qui vaut douze et il viendra 24. Et multiplie l'erreur du premier plateau, erreur qui vaut trois, par le dernier plateau, qui vaut 24, et on obtiendra 72. Additionne donc 24 et 72, et cela car l'une des erreurs est par défaut et l'autre par excès. Mais si les deux étaient par défaut ou par excès, tu soustrairais la plus petite de la plus grande. Donc après avoir ajouté vingt-quatre et septante-deux, le résultat sera nonante-six ; ensuite ajoute les deux erreurs qui valent trois et deux, il viendra cinq ; ensuite donc nonante-six par cinq qui est ce à quoi on est arrivé, il te viendra dix-neuf drachmes et un cinquième de drachme.

Par cette règle, il s'ensuit que tu poses douze pour la chose inconnue et tu ôtes son tiers et son quart et il restera cinq ; comment récupérer douze ? La chose effectivement inconnue. Il faut en fait deux et deux cinquièmes : multiplie donc deux et deux cinquièmes par huit et il viendra dix-neuf et un cinquième.

Remarquons tout d'abord que, même s'il est question de *census*, ce problème est en fait un problème du premier degré. L'auteur nous explique la règle des plateaux de la balance, ilustrée par la figure ci-dessous.



([5]) Terme désignant le carré de l'inconnue recherchée.

La première fausse position qu'il choisit est 12. C'est une valeur dont il est facile de soustraire le tiers et le quart. On trouve 5, c'est-à-dire qu'il y a un déficit de 3 par rapport à la valeur 8 qu'il faudrait obtenir. On place ce 3 en-dessous du plateau de la balance qui contient la valeur 12, comme le montre la figure. On recommence l'opération pour la seconde fausse position, dont la valeur choisie est 24. Le résultat 10 présente un excès de 2 par rapport à la valeur attendue 8. Cette valeur 2 est placée au-dessus du deuxième plateau. Il faut ensuite effectuer l'opération suivante :

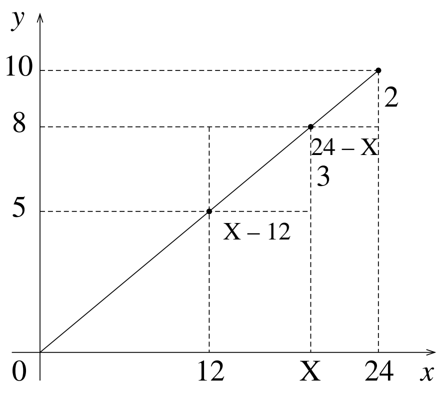
$$\frac{2 \times 12 + 3 \times 24}{2 + 3} = \frac{96}{5}.$$

La traduction moderne du problème nous donne l'équation

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 8 \qquad \text{ou} \qquad \frac{5x}{12} = 8 \ (*) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x = \frac{96}{5}.$$

Nous constatons que la réponse obtenue par la méthode de fausse position est bien celle que nous trouvons en résolvant l'équation (*). Comment pouvons-nous expliquer cela ?

Représentons graphiquement la fonction linéaire $y = \frac{5x}{12}$ qui correspond au premier membre de l'équation (*).



Comme le montre la figure ci-dessus, la valeur de cette fonction est

$$5 \text{ pour } x = 12,$$
$$10 \text{ pour } x = 24,$$

La valeur cherchée est celle, notée X, pour laquelle la fonction prend la valeur 8. La figure montre deux triangles rectangles semblables, dont les bases sont respectivement $X-12$ et $24-X$, et dont les hauteurs sont 3 et 2. Les relations de proportionnalité entre les mesures des côtés de deux figures semblables nous permettent d'écrire

$$\frac{X-12}{24-X}=\frac{3}{2}.$$

Résolvons cette équation sans effectuer les multiplications,

$$2\times(X-12)=3\times(24-X),$$

$$2X-2\times 12=3\times 24-3X,$$

$$2X+3X=2\times 12+3\times 24 \qquad (3+2)X=2\times 12+3\times 24,$$

et finalement

$$X=\frac{2\times 12+3\times 24}{2+3}.$$

Nous retrouvons ainsi la formule de la double fausse position.

L'auteur tente de convaincre le lecteur de la généralité de sa méthode en multipliant les exemples. Il justifie à chaque fois le résultat obtenu en traitant le problème d'une autre manière. Ainsi, dans le dernier paragraphe, il termine son exposé en résolvant l'équation par la méthode de fausse position simple.

La fausse position choisie est 12, ce qui donne 5 pour la valeur de $x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}$. Il se demande alors par combien il faut multiplier 5 pour retrouver 12 ; il cherche donc le facteur qui permet de passer de la deuxième colonne du tableau ci-dessous à la première. Il trouve $2\frac{2}{5}$, qu'il multiplie par 8 pour trouver la solution $19\frac{1}{5}$. Remarquons que comme dans le problème 24 du papyrus Rhind, l'ordre des facteurs est inversé.

x	$x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}$
12	5
$19\frac{1}{5}$	8

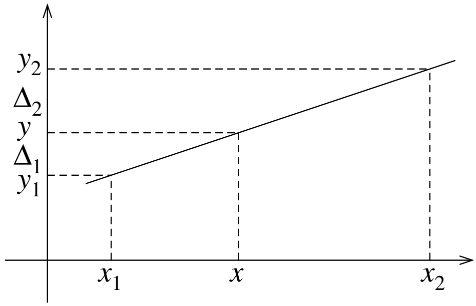
$$\overleftarrow{\times 2\tfrac{2}{5}}$$

Voici donc un exemple de fausse position simple où l'inconnue est calculée à partir du rapport externe du tableau de proportionnalité.

La règle peut être appliquée aux problèmes généraux du premier degré. Soit l'équation

$$ax + b = y.$$

Considérons les deux fausses positions x_1 et x_2 qui produisent les deux valeurs y_1 et y_2.



$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \\ \Delta_1 &= |y_1 - y| \\ \Delta_2 &= |y_2 - y| \end{aligned}$$

Dans la figure ci-dessus, qui illustre le cas où la valeur cherchée est située entre les deux fausses positions, nous avons

$$\Delta_1 = |y_1 - y| = y - y_1 = a(x - x_1),$$

$$\Delta_2 = |y_2 - y| = y_2 - y = a(x_2 - x).$$

De l'expression de la proportion $\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$, on peut tirer la valeur de x qui vaut

$$x = \frac{x_2\Delta_1 + x_1\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}.$$

Ceci montre que la valeur de x obtenue par la règle de la balance peut encore être interprétée comme le barycentre des deux fausses positions x_1 et x_2, munies des poids Δ_2 et Δ_1.

Un raisonnement similaire permet d'établir la formule dans les cas où les deux fausses positions sont, soit plus petites, soit plus grandes que l'inconnue. Nous obtenons

$$x = \frac{x_2\Delta_1 - x_1\Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{x_1\Delta_2 - x_2\Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1},$$

en tenant compte du fait que toutes les quantités qui interviennent dans le calcul sont nécessairement positives (« Mais si les deux étaient par défaut ou par excès, tu soustrairais la plus petite de la plus grande… » nous indique Abraham ibn Ezra).

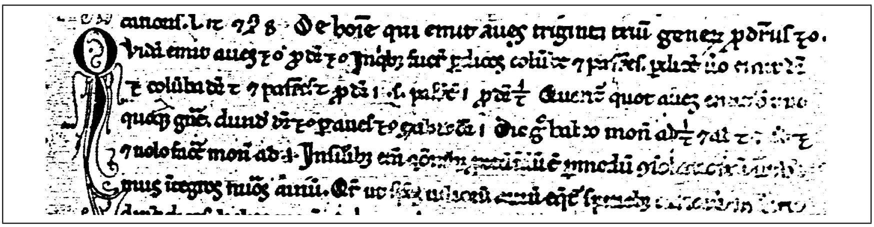
3. Les combinaisons linéaires chez Léonard de Pise

3.1. Introduction

On possède peu de renseignements sur Léonard de Pise, autres que ceux qu'il nous livre dans le prologue du *Liber abaci* : son père était *publicus scriba*, scribe pour les commerçants de Pise, à la douane de Bougie, en Algérie. Il fit venir auprès de lui le jeune Léonard afin de lui faire apprendre au contact des Arabes, les méthodes de calcul au moyen de figures indiennes (ce que nous appelons « chiffres arabes »). Plus tard, Fibonacci parcourut tout le bassin méditerranéen (Égypte, Syrie, Grèce, Sicile, Provence) pour étancher sa soif de savoir. Il a contribué à répandre en Occident l'arithmétique basée sur la numération de position (chiffres indo-arabes).

Dans le chapitre onze du *Liber abaci*, Fibonacci introduit la notion de « compensation » des monnaies ; ce sont des problèmes de proportionnalité qui montrent comment calculer le nombre de livres-monnaie qu'on peut battre à partir d'un certain nombre de livres-poids d'argent, lorsqu'on se fixe un taux d'argent dans l'alliage de la livre-monnaie. La technique de résolution qu'il expose à cette occasion lui permet, plus loin dans le chapitre, de résoudre des équations diophantiennes (dans l'ensemble des entiers positifs) indéterminées. Voici le texte d'un de ces problèmes où l'auteur utilise des combinaisons linéaires pour rechercher des solutions.

3.2. Le problème des oiseaux



De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis 30

Voici la traduction du texte original en latin.

De l'homme qui a acheté trente oiseaux de trois espèces pour 30 deniers

Quelqu'un a acheté 30 oiseaux pour 30 deniers, parmi lesquels il y a des perdrix, des colombes et des moineaux. En fait, il a acheté les perdrix pour 3 deniers, les colombes pour 2 et 2 moineaux pour 1 denier, à savoir 1 moineau pour $\frac{1}{2}$ denier. On demande combien d'oiseaux de chaque espèce il a achetés. Divise 30 deniers par 30 oiseaux, il viendra 1 denier. Je dis donc que j'ai de l'argent-monnaie à $\frac{1}{2}$ et à 2 et à 3; et je veux faire de l'argent-monnaie à 1. En effet, dans de semblables questions, nous devons procéder par la méthode des compensations, puisque nous avons un nombre entier d'oiseaux. C'est pourquoi, pour que l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères, tu dois dire : j'ai de l'argent-monnaie à $\frac{1}{2}$ et à 2 et à 3 et je veux faire de l'argent-monnaie à 1, c'est-à-dire j'ai de l'argent-monnaie à 1 et à 4 et à 6 et je veux faire de l'argent-monnaie à 2. Fais des moineaux et perdrix une première compensation et il y aura 5 oiseaux pour 5 deniers, à savoir 4 moineaux et 1 perdrix; et, des moineaux avec les colombes, fais-en une seconde; et tu auras 3 oiseaux pour 3 deniers, à savoir 2 moineaux et 1 colombe. Ensuite, pour avoir 30 oiseaux compensés, tu prendras trois fois la première compensation dans laquelle il y aura 12 moineaux et 3 perdrix. Et il restera 15 oiseaux compensés, pour lesquels tu prendras cinq fois la seconde compensation et tu auras 10 moineaux et 5 colombes. Et ainsi, en ce qui concerne les 30 oiseaux dont il a été question auparavant, il y aura 22 moineaux et 5 colombes et 3 perdrix, comme il est montré en marge. Et tu dois savoir que, de ce qui est suscrit, tu peux avoir autant d'oiseaux qu'on voudra pour la même quantité de deniers au-delà de 15, mais en deçà, ce n'est pas possible, si ce n'est pour 13 et 11 et 8. En vérité, dans le cas des 13 oiseaux, la première compensation apparaîtra deux fois et la seconde, une fois. Et pour 11 oiseaux, la seconde compensation apparaîtra deux fois et la première, une fois. Et pour 8 oiseaux, chacune des compensations apparaîtra une fois.

Le système linéaire qui traduit ce problème est

$$\begin{cases} 3x + 2y + \dfrac{z}{2} & = 30, \\ x + y + z & = 30. \end{cases}$$

Fibonacci *observe* tout *d'abord que*, pour acheter 30 oiseaux pour 30 deniers, il faut constituer des ensembles de n oiseaux pour n deniers de manière que *l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères*. Réaliser une telle égalité avec trois espèces d'oiseaux semble difficile ; une manière de simplifier le problème consiste à rechercher des combinaisons de deux espèces d'oiseaux dans la même proportion.

Fibonacci *observe que*

$$1 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 5,$$

ce qui lui fournit un *ensemble de cinq* oiseaux (une perdrix et quatre moineaux) pour *cinq* deniers (ensemble E_1 du tableau ci-dessous).

Il *observe encore que*

$$1 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3,$$

ce qui lui *donne cette* fois un *ensemble de trois* oiseaux (une colombe et deux moineaux) pour *trois* deniers (ensemble E_2 du tableau ci-dessous).

En *considérant* une combinaison linéaire convenable des deux relations qui précèdent, il obtiendra alors *trente* oiseaux pour *trente* deniers. Cette combinaison linéaire consiste à prendre trois fois le premier ensemble de volatiles et cinq fois le second ($E = 3E_1 + 5E_2$).

	Perdrix (3 deniers)	Colombes (2 deniers)	Moineaux ($\frac{1}{2}$ deniers)	nombre d'oiseaux	coût
E_1	1		4	5	$1 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 5$
E_2		1	2	3	$1 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3$
E	3	5	22	30	$3 \times 3 + 5 \times 2 + 22 \times \frac{1}{2} = 30$

L'ensemble $E = 3E_1 + 5E_2$ fournit bien une solution du problème, puisqu'il s'agit d'un ensemble de 30 oiseaux, de trois espèces différentes pour une somme de 30 deniers.

L'auteur termine en nous signalant qu'il est possible de trouver des combinaisons linéaires qui réalisent des ensembles de n'importe quel nombre n d'oiseaux pour n deniers, si n est supérieur à 15. Mais pour n inférieur à 15, il affirme que le problème n'est possible que pour 8, 11 et 13 oiseaux, et il décrit la combinaison qui fournit la solution dans chacun des cas.

On peut obtenir

16 oiseaux pour 16 deniers par la combinaison $2E_1 + 2E_2$,

17 oiseaux pour 17 deniers par la combinaison $1E_1 + 4E_2$,

18 oiseaux pour 18 deniers par la combinaison $3E_1 + 1E_2$,

et à partir de là, on obtient 19, 20 et 21 oiseaux en ajoutant $1E_2$ à chacune des combinaisons précédentes, et ainsi de suite.

On peut aussi obtenir 14 oiseaux pour 14 deniers par la combinaison $1E_1 + 3E_2$, solution que Fibonacci a oubliée.

Quelques réactions d'élèves

Ces différentes méthodes de résolution de problèmes linéaires ont été exposées à des classes de quatrième année de l'enseignement général.

Les élèves ont été stupéfaits d'apprendre que les méthodes de résolution anciennes n'étaient pas « exactes ». Le fait qu'il fallait supposer une valeur (qui avait toutes les chances d'être fausse) pour la réponse afin de la corriger ensuite leur paraît une démarche beaucoup plus lourde que l'algèbre d'aujourd'hui.

Ils ont été surpris de voir que les problèmes de mathématique pouvaient être résolus en langage courant, par un texte dépourvu de formules, mais que c'était « encore plus compliqué qu'avec des maths ». Après avoir constaté les difficultés et la lourdeur de ce mode d'expression, ils acceptent mieux le formalisme actuel dont l'utilité leur paraît plus évidente.

Ils sont étonnés d'apprendre que les méthodes de résolution des équations sont le fruit d'une évolution, qu'on n'a pas toujours procédé comme actuellement.

Ils estiment qu'il faudrait plus souvent introduire les chapitres du cours de mathématique par un peu d'histoire, pour mieux en percevoir la portée.

Bibliographie

[1] Ballieu, M. [1993], Le liber abbaci de Léonard de Pise : ce qu'on y trouve effectivement ..., *Nouvelles tendances en histoire et philosophie des sciences*, p. 123-133. Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Comité National de Logique, d'Histoire

et de Philosophie des Sciences. R. Halleux & A.-C. Bernès coordinateurs, Bruxelles.

[2] Boyer, C.B. et Merzbach, U.C. [1989], *A History of Mathematics*, Wiley, New York.

[3] Chace, A.B., Bull, L., Manning, H.P., et Archibald, R.C. [1927-1929], *The Rhind Mathematical Papyrus* (2 vol.), Mathematical Association of America, Providence, RI. Rééd. 1979.

[4] CREM [2002], *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur pour l'enseignement de mathématiques*, Centre de recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles. Rapport final août 2002.

[5] Fibonacci, Leonardo Pisano, *Liber abbaci*,
– Manuscrit I72 SUP, Biblioteca Ambrosiana, Milano.
– Manuscrit *Conversi Soppressi C.1.* n° *2616 codice Magliabechiano, Badia Fiorentina)*, Biblioteca Nazionale, Firenze.
– *Codici Gaddiani Reliqui* n° XXXVI, Biblioteca Laurenziana, Firenze.
– *Codice Riccardiano* n° *783*, Biblioteca Riccardiana, Firenze.

[6] Kangshen, S., Crossley, J. N., et Lun, A. W.-C. [1999], *The Nine Chapters on the Mathematical Art, Companion & Commentary*, Oxford University Press.

[7] Libri, G. [1838-1841], *Histoire des sciences mathématiques en Italie (vol. I)*, G. Olms Hildesheim. Rééd. 1967.

[8] Lüneburg, H. [1993], *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*, B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim.

[9] Pacioli, Luca, [1494] *Summa de Arithmetica*, édition fac-similé du cinq centième anniversaire, Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, Roma. Rééd. 1994.

En juillet, les courbes des ventes des lunettes solaires et des ventes de crème glacée à la côte sont méchament corrélatives ...

Si l'on prend comme unité le siècle, il y a une bonne corrélation entre l'augmentation de la consommation du tabac et l'augmentation de l'espérance de vie ...

Dans nos classes

Th. Gilbert

La différence de deux carrés

1. Stimuler l'argumentation

Le texte suivant relate une activité inspirée par la lecture d'une première version d'un article de Christian Aebi et John Steinig [1] paru dans la revue suisse *Math École*. L'article en question décrit notamment une recherche proposée dans une classe de neuvième année (notre troisième année du secondaire).

Depuis cette lecture, j'ai proposé maintes fois cette recherche à des étudiants de régendat option mathématiques et à des professeurs de mathématiques. Presque chaque fois, de nouvelles pistes de résolution ont été découvertes. J'en livre une partie ci-dessous. Il me semble que ce problème constitue une excellente occasion pour les élèves (peut-être déjà de deuxième année du secondaire ?), d'utiliser les connaissances arithmétiques et algébriques visées par les programmes, mais aussi et surtout de conjecturer, d'argumenter, de confronter leurs idées et enfin de démontrer.

2. Énoncé

> Quels sont les entiers positifs pouvant s'écrire sous la forme d'une différence de deux carrés de nombres entiers ?

3. Quelques pistes

Pour faciliter la formulation des arguments, décidons que, *dans le cadre de cette recherche*, un nombre *constructible* est un nombre entier positif

Adresse de l'auteur: Thérèse Gilbert, GEM et Institut Supérieur de Pédagogie Galilée, Rue de la Limite, 89, 1490 - Court-Saint-Étienne
courriel : **theresegilbert@tiscalinet.be**

pouvant s'écrire sous la forme d'une différence de deux carrés de nombres entiers.

Piste 0. Essais

Trouver une conjecture à partir d'essais (c'est-à-dire par induction).

Piste 1. Une piste algébrique

Calculer

$$2^2 - 1^2 =$$

$$3^2 - 2^2 =$$

$$4^2 - 3^2 =$$

$$5^2 - 4^2 =$$

Généraliser.

> On obtient successivement les nombres impairs 3, 5, 7 et 9. De façon générale, on a $(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$. Lorsque m parcourt $\mathbb{N}$, $2m+1$ parcourt l'ensemble des nombres impairs.

Conclusion : tout impair est constructible.

Considérer un écart de 2 entre a et b dans $a^2 - b^2$ et essayer de se ramener à un des cas précédents.

> On a $(m+2)^2 - m^2 = 4m + 4$. Lorsque m parcourt $\mathbb{N}$, $4m+4$ parcourt l'ensemble des multiples de 4 non nuls.
> Par ailleurs, $0 = 1^2 - 1^2$.

Conclusion : tout multiple de 4 est constructible.

Considérer un écart quelconque entre a et b dans $a^2 - b^2$ et essayer de se ramener à un des deux cas précédents.

Exemple d'un écart « quelconque » :

$$7^2 - 4^2 = (7^2 - 6^2) + (6^2 - 5^2) + (5^2 - 4^2).$$

Si l'écart est impair, on obtient une somme d'un nombre impair de nombres impairs, c'est-à-dire un impair (dont on sait déjà qu'ils sont tous constructibles). Rien de neuf.
Et si l'écart est pair ? Exemple :

$$7^2 - 3^2 = (7^2 - 5^2) + (5^2 - 3^2).$$

Si l'écart est pair, on obtient une somme de multiples de 4, c'est-à-dire un multiple de 4 (dont on sait déjà qu'ils sont tous constructibles). Rien de neuf.

Conclusion et solution du problème : un nombre entier positif s'écrit sous la forme de la différence de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est impair ou multiple de 4.

Prolongement : puisque $7^2 - 4^2$ est un nombre impair, à savoir 33, il est aussi la différence de deux carrés de nombres consécutifs : $17^2 - 16^2$. Possède-t-il d'autres décompositions en différence de deux carrés ?

Piste 1 bis. Reste de la division par 4

Supposons que l'on ait déjà montré que tout nombre impair et tout multiple de 4 sont constructibles. Il reste donc à voir si d'autres nombres peuvent être écrits sous la forme de la différence de deux carrés.
Ces autres nombres sont de la forme $4m + 2$.
Quel peut être le reste de la division par 4 d'un carré ? Et quel peut être le reste de la division par 4 de la différence de deux carrés ?

Le reste de la division par 4 d'un nombre N est soit 0, soit 1, soit 2, soit 3.
Le reste de la division par 4 de son carré N^2 est 0 ou 1.
Le reste de la division par 4 de la différence de deux carrés ne peut être que 0, 1 ou 3, mais pas 2 !

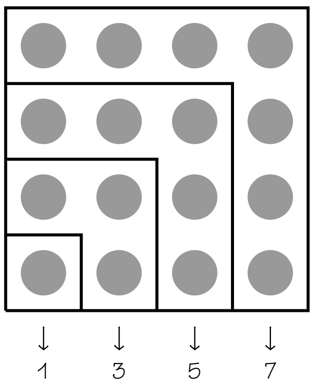
Conclusion et solution du problème : un nombre entier positif s'écrit sous la forme de la différence de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est impair ou multiple de 4.

Piste 2. Nombres figurés

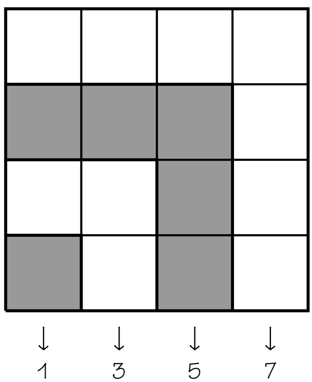
Comment Pythagore représentait-il les carrés, les nombres impairs ? Quel(s) lien(s) y a-t-il entre ceux-ci et ceux-là ?

Se souvenir de ce que donne une somme des premiers nombres impairs successifs jusqu'à 3, 5, 7, ... et la représenter.

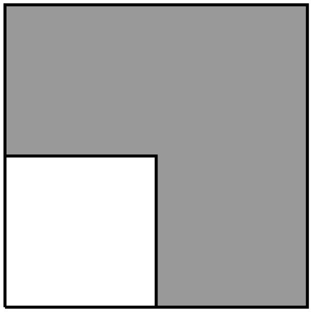
> La somme des premiers nombres impairs successifs jusqu'à 7 est représentée ci-dessous. Les unités sont repésentées par des « cailloux ». Elle est égale au carré de 4.



> On peut aussi remplacer ces cailloux par de petits carrés.



La différence de deux carrés peut être représentée par un *coude* comme ci-dessous.



Quand le *coude* a une épaisseur de 1, nous appellerons cela un *gnomon*. Un coude peut être composé de plusieurs gnomons successifs. Donc un nombre est constructible si et seulement il peut être représenté par un gnomon ou un emboîtement de plusieurs gnomons successifs.

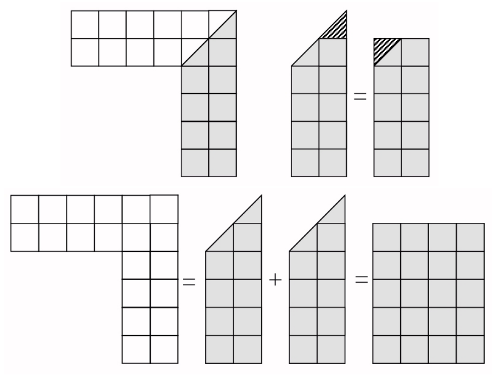
Les nombres impairs peuvent-ils être représentés par un coude ? Plus précisément par un gnomon ?

Les gnomons successifs sont exactement les nombres impairs successifs. Une manière d'exprimer 47, par exemple, sous la forme de la différence de deux carrés, consiste à le représenter par un gnomon, bordant donc un carré de côté égal à $\frac{47-1}{2} = 23$. On peut donc écrire $47 = 24^2 - 23^2$.

Conclusion : tout nombre impair est constructible.

Et les nombres pairs ?

Un nombre pair est constructible car il est la somme d'un nombre pair de gnomons successifs. Or la somme de deux gnomons successifs est multiple de 4, comme le montrent les figures suivantes.



La somme d'un nombre pair de gnomons successifs est donc également un multpile de 4. De plus, la suite des coudes d'épaisseur 2 correspond exactement à la suite des mutiples de 4 non nuls. Par ailleurs $0 = 1^2 - 1^2$.

Conclusion et solution du problème : un nombre entier positif s'écrit sous la forme de la différence de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est impair ou multiple de 4.

Commentaire : la piste des nombres figurés offre (comme d'autres) plusieurs chemins d'entrée dans la résolution du problème.

On peut partir de la représentation par un coude et chercher des caractéristiques de tous les nombres ainsi représentés : ils sont impairs ou multiples de 4. On établit ainsi une condition nécessaire pour qu'un nombre soit constructible. Il reste alors à montrer que *tous* les nombres impairs et *tous* les multpiles de 4 sont représentables de cette façon. Ceci fait, la condition nécessaire devient aussi suffisante.

Un autre chemin, également naturel, consiste à commencer par chercher *des* nombres qui peuvent être représentés par des coudes : les nombres impairs sont vite trouvés. Cette caractéristique constitue une première condition suffisante pour qu'un nombre soit constructible. On se demande alors s'il y a d'autres nombres qui peuvent être ainsi représentés. On trouve encore tous les multpiles de 4. Être impair ou multiple de 4 constitue donc une nouvelle condition suffisante, plus large. Il reste alors à montrer qu'il n'y a *pas d'autres* nombres constructibles et la condition suffisante devient ainsi également nécessaire.

Ces deux démarches sont sensiblement différentes d'un point de vue de la logique.

Prolongement : la représentation par un coude donne une piste de réflexion sur la question du nombre de décompositions en différence de deux carrés.

Il est utile pour cela de remarquer qu'un assemblage d'un nombre impair n de gnomons successifs est un multiple de n (et inversement ??).

Par exemple, le nombre 33, s'écrivant $\mathbf{1} \times 33$ et $\mathbf{3} \times 11$, possède exactement deux décompositions en différence de deux carrés. Est-ce généralisable ?

Et pour les multiples de 4 ? Le nombre 36, par exemple, s'écrivant $4 \times (\mathbf{1} \times 9)$ et $4 \times (\mathbf{3} \times 3)$, possède également deux décompositions en différence de deux carrés...

Piste 3. Identités remarquables

Écrire la différence de deux carrés sous la forme $a^2 - b^2$...

> On a $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$.
> Exprimer un nombre sous la forme de la différence de deux carrés revient donc à l'exprimer sous la forme du produit ci-dessus. Or tout nombre N s'écrit sous la forme d'un produit, fût-il $1 \cdot N$.

Si $a - b = 1$. L'égalité $N = 1 \cdot N$ permet-elle (toujours) d'écrire N sous la forme de la différence de deux carrés ? Il faudrait pour cela trouver a et b tels que $a - b = 1$.

> Dans ce cas, les nombres a et b vérifient $a - b = 1$ et $a + b = N$. Ils sont donc consécutifs et $a + b = N$ est impair. Ce cas particulier où $a - b = 1$ nous permettra peut-être de résoudre le problème pour les nombres impairs. Cette décomposition aboutit-elle effectivement à une solution pour tous les nombres impairs ? Oui, car ceux-ci sont tous la somme de deux nombres consécutifs (nos a et b). Par exemple,
>
> $$9 = 1 \cdot 9 = (5 - 4)(5 + 4) = 5^2 - 4^2.$$
>
> D'une façon générale, si N est impair, il suffit de prendre $a = \frac{N+1}{2}$ et $b = \frac{N-1}{2}$.

Conclusion : tout impair est constructible.

Si un nombre N est pair, l'écriture $1 \cdot N$ ne permet pas d'écrire N sous la forme de la différence de deux carrés, comme nous l'avons fait ci-dessus pour tous les nombres impairs. Par contre, on peut écrire $N = 2 \cdot M$. Poser alors $a - b = 2$ et examiner la parité de $(a + b)$.

> Si $a - b = 2$, c'est que a et b sont deux impairs consécutifs ou deux pairs consécutifs. Dans les deux cas, $a + b$ est pair et $(a - b)(a + b)$ est multiple de 4.

Plus généralement, quelle relation y a-t-il entre la parité de $a - b$ et celle de $a + b$?

Finalement, que dire de $(a - b) \cdot (a + b)$?

> $(a - b)$ et $(a + b)$ ont la même parité. Donc soit $(a - b)(a + b)$ est impair, soit il est mulptiple de 4 !

Conclusion : un nombre constructible est soit impair, soit multiple de 4. Par ailleurs, tous les nombres impairs sont constructibles.

Le problème est-il résolu ? Non, il reste à voir que tout multiple de 4 est constructible, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire $(a - b)(a + b)$.

> Reprenons le cas particulier où $a - b = 2$. Dans ce cas, $a + b = 2b + 2$ et $(a - b)(a + b) = 4b + 4$. De cette façon, nous obtenons en fait tous les multiples de 4 non nuls.
> Et cette relation permet de trouver b en fonction du nombre de départ N : on obtient $b = \frac{N}{4} - 1$.
> Par exemple, pour $N = 16$, on obtient $b = \frac{16}{4} - 1 = 3$. D'où
>
> $$16 = (5 - 3)(5 + 3) = 5^2 - 3^2.$$

Conclusion et solution du problème : un nombre entier positif s'écrit sous la forme de la différence de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est impair ou multiple de 4.

Piste 4. Autre piste algébrique

La différence de deux carrés peut s'écrire $(a + n)^2 - a^2$ où a et n sont des entiers naturels. Développer.

On obtient

$$\begin{aligned}(a+n)^2 - a^2 &= a^2 + 2an + n^2 - a^2 \\ &= 2an + n^2 \\ &= (2a+n)\cdot n.\end{aligned}$$

Examiner la parité de chaque facteur du dernier produit.

> Si n est impair, alors $2a+n$ aussi et le produit est impair.
> Si n est pair, alors $2a+n$ aussi et le produit est multiple de 4.

<u>Conclusion</u> : un nombre constructible est soit impair, soit multiple de 4.

Le problème est-il résolu ? Peut-on atteindre ainsi tous les impairs ? Tous les multiples de 4 ?

> Pour voir que l'on peut atteindre tous les impairs, il suffit de remplacer n par 1 dans $(2a+n)\cdot n$. Cela donne $2a+1$, qui prend bien comme valeurs tous les impairs lorsque a parcourt l'ensemble $\mathbb{N}$.
> Pour voir que l'on peut atteindre tous les multiples de 4, il suffit de remplacer n dans $(2a+n)\cdot n$ par 2. Cela donne $4a+4$, qui prend bien comme valeurs tous les multiples de 4 non nuls. Par ailleurs 0 est également atteint puisque $0 = 1^2 - 1^2$.

<u>Conclusion et solution du problème</u> : un nombre entier positif s'écrit sous la forme de la différence de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est impair ou multiple de 4.

<u>Commentaire</u> : par l'argumentation précédente, on établit d'abord une condition nécessaire, puis on démontre qu'elle est aussi suffisante. C'était aussi le cas des argumentations relatives aux pistes 2 et 3, contrairement à celle de la piste 1.

<u>Prolongement</u> : cette piste peut également être exploitée dans le problème du nombre de décompositions en différence de deux carrés, la lettre n représentant la différence des nombres élevés au carré.

4. Avec des étudiants

Les pistes mentionnées ci-dessus mènent toutes vers la solution. Pourtant, en classe, il est rare que des étudiants suivent leur piste et rien qu'elle jusqu'au bout. En effet, une première mise en commun permet d'échanger les idées. Il arrive que ceux qui ont exploité la piste des nombres figurés pour prouver une partie de leur conjecture, l'abandonnent au profit d'une piste plus algébrique, et vice versa.

D'autres idées fructueuses peuvent apparaître. Par exemple, l'idée de distinguer d'emblée les nombres de départ (dont on prend la différence des carrés) selon leur parité : on développe alors

$$(2m)^2 - (2n)^2,$$
$$(2m+1)^2 - (2n+1)^2,$$
$$(2m+1)^2 - (2n)^2,$$
$$(2n)^2 - (2m+1)^2.$$

En général, les pistes nouvelles, même celles qui n'aboutissent pas tout de suite à la solution, donnent lieu à des résultats intermédiaires souvent intéressants, par exemple sur le lien entre la parité d'un nombre et de son carré, sur la représentation géométrique d'une différence, d'un produit...

5. Mathématiques utilisées, compétences travaillées

Ce problème présente à mes yeux plus d'un atout.

Tout d'abord, il suscite une démarche spontanée de recherche. Chacun peut commencer à chercher. Chacun peut trouver une idée.

Ensuite, comme on l'a vu aux paragraphes précédents, les idées sont nombreuses et fructueuses. Elles peuvent être échangées, débattues, adaptées.

Au niveau du début du secondaire, le problème permettrait aussi d'appliquer des connaissances fraîchement acquises en arithmétique et en algèbre : nombres figurés, somme des n premiers nombres impairs, identités remarquables, factorisation simple, écriture algébrique d'un nombre pair, impair, reste d'une division, parité...

Enfin, le problème provoque l'argumentation, et sa solution se termine par une démonstration. Lors de la confrontation des idées, les étudiants sont presque toujours amenés à distinguer ce dont ils sont sûrs de ce qui reste à prouver et à souligner la différence entre une implication et sa réciproque, deux points importants dans l'apprentissage de la démonstration.

D'autres compétences interviennent dans cette recherche, telles que conjecturer, illustrer une conjecture par des exemples ou l'infirmer par un contre-exemple, envisager des cas particuliers, simplifier le problème, représenter une situation, s'exprimer, confronter ses arguments...

6. L'avenir du problème et son histoire

Problème gratuit, tout juste bon à amuser quelques professeurs ? Pas vraiment. La proposition démontrée, et surtout le type de raisonnement employé pour la démontrer, peuvent être réinvestis dans la recherche de triplets pythagoriciens et dans d'autres problèmes d'arithmétique. Pour des exemples de tels problèmes, le lecteur pourra consulter l'article de Christian Aebi et John Steinig [1] mentionné en début d'article.

Par ailleurs la problématique de la différence de deux carrés fut étudiée par Pierre de Fermat dans le cadre de la recherche d'une méthode pour factoriser de grands nombres. Cette méthode est décrite dans l'article cité.

Bibliographie

[1] Christian Aebi & John Steinig, Activité autour des « identités remarquables »et « Factorisation des entiers : la méthode de Fermat », *Math École* n° 210.

Merci à Christian Aebi et Nicolas Rouche pour leurs commentaires qui ont contribué à améliorer ce texte.

Olympiades

C. Festraets

Voici les énoncés et solutions des problèmes des finales « MIDI » et « MAXI » de l'Olympiade Mathématique Belge de 2004. Les solutions proposées ont été choisies parmi les meilleures rédigées par les élèves participant à cette finale.

VINGT-NEUVIEME OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE
MIDI FINALE 2004

1. Parmi tous les entiers positifs multiples de 2004, quels sont ceux qui ont exactement 20 diviseurs positifs ?

   Solution de Thomas Gueuning, élève de 4e au Collège Notre-Dame à Tournai.

   On a : $2\,004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$

   Nous savons que le nombre de diviseurs est égal au produit des exposants, chacun augmenté de 1, donc 2004 a $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ diviseurs.

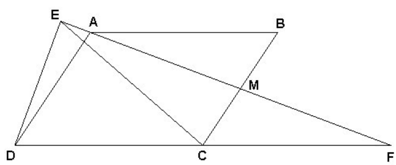
   Pour arriver à 20 diviseurs, il faut trouver un produit d'au moins trois entiers positifs (et différents de 1) qui soit égal à 20. La seule possibilité est $2 \cdot 2 \cdot 5$.

   Le seul entier positif multiple de 2004 qui a exactement 20 diviseurs est donc $2^{5-1} \cdot 3^{2-1} \cdot 167^{2-1} = 2^4 \cdot 3 \cdot 167 = 8\,016$.

2. Dans le parallélogramme $ABCD$, le point M est le milieu de $[BC]$. Le point E est le pied de la perpendiculaire à MA issue de D. Démontrer que $|CD| = |CE|$.

   Solution de Florence Peeters, élève de 3e au Collège Sainte Croix à Hannut.

   Prolongeons $[DC]$ et $[AM]$, les droites DC et AM se coupent en F.



Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse courriel : **hamoircl@brutele.be**

Les triangles ABM et MCF sont isométriques car

$$\begin{cases} \widehat{M_1} = \widehat{M_2} & \text{(angles opposés par le sommet)} \\ \widehat{B_1} = \widehat{C_1} & \text{(angles alternes internes)} \\ |MC| = |MB| & \end{cases}$$

D'où $|AB| = |CF|$, or $|AB| = |DC|$ car $ABCD$ est un parallélogramme, et donc $|CF| = |DC|$ et C est le milieu de $[DF]$.

Le triangle EDF est rectangle en E et est donc inscriptible dans un demi-cercle de diamètre $[DF]$; comme C est le milieu de $[DF]$, le centre de ce cercle est C.

Puisque C est le centre du cercle et que D, E, F sont des points du cercle, $[CD]$ et $[CE]$ sont des rayons du cercle, d'où $|CD| = |CE|$ car tous les rayons d'un cercle ont même longueur.

3. 2004 bougies seront disposées sur un gâteau à étages. Sur l'étage du haut se trouvent n bougies, et chaque autre étage comporte k bougies de plus que l'étage immédiatement supérieur ($k > 0$).

   (a) Trouver le nombre maximum d'étages d'un tel gâteau.

   (b) Pour ce nombre maximum, déterminer toutes les valeurs possibles des nombres naturels n et k.

Solution de Alexis Gottcheiner, élève de 4[e] au Lycée Emile Jacqmain à Bruxelles

Soit x le nombre d'étages.

Il y a $n+(n+k)+(n+2k)+\ldots+(n+(x-1)k) = nx+k(1+2+\ldots+(x-1)) = nx + k \cdot \frac{x(x-1)}{2}$ bougies sur le gâteau.

$$\frac{2nx + x(x-1)}{2} = 2\,004 \Leftrightarrow 2nx + x(x-1k) = 4\,008 = 8 \cdot 3 \cdot 167$$

Si $x \geqslant 167$, alors $x(2n + (x-1)k) \geqslant 167 \cdot 166 > 4\,008$; donc $x < 167$.

La plus grande valeur de x qui respecte cette condition est 24 et alors $2n + 23k = 167$.

k est impair car $2n + 23k$ est impair.

Si $k = 1$, alors $2n + 23 = 167$ d'où $n = 72$.
Si $k = 3$, alors $2n + 69 = 167$ d'où $n = 49$.
Si $k = 5$, alors $2n + 115 = 167$ d'où $n = 26$.
Si $k = 7$, alors $2n + 161 = 167$ d'où $n = 3$.
Si $k \geqslant 9$, alors il n'existe pas de valeur positive pour n.

4. Un jeu de 2004 cartes est déposé en un paquet sur la table, dans un ordre que nous qualifierons d'initial. L'opération suivante lui sera appliquée plusieurs fois :

   Prendre la carte A située tout en haut et la carte B située tout en bas, placer A au dessus de B puis remettre ces deux cartes entre la n^e et la $(n+1)^e$ carte des cartes restantes du paquet ($1 \leqslant n \leqslant 2001$).

   Cette opération est répétée avec la même valeur de n en prenant chaque fois les cartes situées alors aux extrémités du paquet comme A et B.

   (a) Est-il certain que les 2004 cartes retrouveront à un moment l'ordre initial ? Si oui, pour la première fois après combien d'opérations ?

   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de n ce nombre d'opérations sera-t-il minimum, et pour quelle(s) valeur(s) de n ce nombre sera-t-il maximum ?

Solution de Sébastien Doedraene, *élève de 4^e^* au Collège Saint Julien à Ath

Soit C l'ensemble (dont l'ordre est pris en compte) des cartes du paquet.

$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{2004}\}$. Numérotons les cartes de telle manière que, initialement, $c_i = i$.

Chaque opération est une permutation P de l'ensemble C telle que

$$P = \left(\begin{array}{cccccccc:ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n & & n+1 & \ldots & 2002 & 2003 & 2004 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & 1 & & 2004 & \ldots & 2001 & 2002 & 2003 \end{array} \right)$$

En fait, P est la composée de deux permutations P_1 de longueur n et P_2 de longueur $2004-n$ qui sont des cycles :

$P_1 = (1, 2, 3, \ldots, n-1, n)$ et $P_2 = (2004, 2003, 2002, \ldots, n+2, n+1)$.

Toutes les n opérations, les n premiers nombres de C auront retrouvé leur ordre initial et toutes les $2004-n$ opérations, les $2004-n$ derniers nombres de C auront retrouvé leur ordre initial.

(a) De sorte que l'ensemble C retrouvera son ordre initial toutes les x opérations où x est le plus petit commun mutiple de n et $2004-n$.

(b) Le ppcm de n et $2004-n$ est supérieur ou égal à 1002 ; $x = 1002$ si et seulement si $n = 1002$, le minimum est donc obtenu pour $n = 1002$.

Pour un x maximum, il faut trouver les deux $n = 1002 \pm i$ avec $i \in \mathbb{N}$ et i le plus petit possible pour que le ppcm de n et $2004 - n$ soit égal à $n(2004 - n)$. Il ne faut pas chercher loin puisque le ppcm de 1001 et 1003 est égal à $1001 \cdot 1003$ en effet, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ et $1003 = 17 \cdot 59$. Le maximum pour x est donc $1001 \cdot 1003 = 1004003$ et est obtenu pour $n = 1001$ ou $n = 1003$.

VINGT-NEUVIEME OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE MAXI FINALE 2004

1. (a) Existe-t-il un polynôme p à coefficients entiers tel que $p(2) = 0$ et $p(0) = 4$?
   (b) Existe-t-il un polynôme p à coefficients entiers tel que $p(1) = 7$ et $p(8) = 9$?
   (c) Pour quelles valeurs de l'entier n existe-t-il un polynôme p à coefficients entiers tel que $p(1) = 7$ et $p(8) = n$?

Solution de Marie Coutelier, *élève de 5^e^ année au Collège Saint Michel à Etterbeek*

Posons $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$.

(a) $p(0) = a_0 = 4$.
Il reste à trouver $q(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x$ avec $q(2) = -4$; il suffit que $a_1 = -2$ et $a_i = 0$ $\forall i \in \{2, 3, \ldots n\}$.
$p(x) = -2x + 4$.

(b) Non. Si c'était le cas, on aurait
$$\begin{cases} 8^n a_n + 8^{n-1} a_{n-1} + \ldots 8a_1 + a_0 = 9 \\ a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 2 \end{cases}$$
En soustrayant les deux égalités :
$(8^n - 1)a_n + (8^{n-1} - 1)a_{n-1} + \ldots + (8 - 1)a_1 = 2.$
Or on sait que $x^n - y^n$ est toujours divisible par $x - y$, donc le premier membre de l'égalité précédente est divisible par 7, c'est toujours un entier multiple de 7 et il ne peut être égal à 2.

(c) Si $p(1) = 7$ et $p(8) = n$, on a :
$$\begin{cases} 8^n a_n + 8^{n-1} a_{n-1} + \ldots 8a_1 + a_0 = n \\ a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 7 \end{cases}$$
En soustrayant les deux égalités :
$(8^n - 1)a_n + (8^{n-1} - 1)a_{n-1} + \ldots + (8 - 1)a_1 = n - 7.$

Le premier membre est multiple de 7, donc il faut que $n-7$ soit multiple de 7 : $n-7=7t$, d'où $n=7(1+t)$ (avec t entier positif), n doit être multiple de 7.

Est-ce que cela suffit (peut-on trouver $p(x)$ pour tout $n=7k$?)

S'il existe un tel polynôme, il peut être représenté par une courbe comprenant $(1,7)$ et $(8,n)$. Il existe toujours une droite de pente entière passant par ces deux points.

En effet, sa pente sera $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{n-7}{8-1}=\frac{7k-7}{7}=k-1$.

Le terme indépendant sera lui aussi entier : si on a une droite $y=ax+b$ où a, x et y ont des valeurs entières, alors $b=y-ax$ est entier.

Il existe donc un polynôme p à coefficients entiers tel que $p(1)=7$ et $p(8)=n$ pour tout n multiple de 7.

2. Combien existe-t-il d'entiers compris entre 10 000 et 99 999 comportant un nombre pair de chiffres pairs ?

Solution de Guillaume Bruniau, élève de 6e année au Collège Saint Stanislas à Mons

Dans ces nombres de 5 chiffres, le premier peut prendre 9 valeurs différentes dont 5 sont impaires et 4 sont paires, les autres chiffres peuvent prendre 10 valeurs différentes dont 5 sont impaires et 5 sont paires. Ce qui peut se résumer comme suit :

Probabilité pour le chiffre n°	1	2	3	4	5
d'être pair	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
d'être impair	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Etudions deux cas.

(a) Si le premier chiffre (1 du tableau) est impair.

Trois cas sont possibles pour avoir un nombre pair de chiffres pairs :

i. tous les autres chiffres sont impairs, la probabilité est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

ii. deux des autres chiffres sont pairs, la probabilité est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot N$ où N est le nombre de permutations possibles dans les chiffres 2 à 5. Cherchons ce N : six cas sont possibles pour deux chiffres pairs et deux chiffres impairs PPII, PIPI, PIIP, IPPI, IPIP, IIPP. La probabilité est donc $\frac{6}{16}$.

iii. les quatre autres chiffres sont pairs, la probabilité est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

Au total : $\frac{1}{16} + \frac{6}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$.

(b) Si le premier chiffre (1) du tableau) est pair.

Deux cas sont possibles pour avoir un nombre pair de chiffres pairs :

i. un seul autre chiffre est impair, la probabilité est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 4 = \frac{4}{16}$ (car 4 positions possibles).

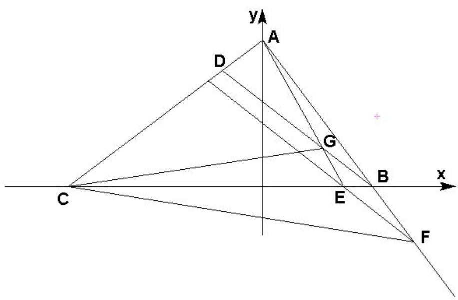
ii. un seul autre chiffre est pair, la probabilité est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 4 = \frac{4}{16}$ (car 4 positions possibles).

Au total : $\frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{1}{2}$.

Il reste à multiplier les probabilités de ces deux cas par leur fréquence d'apparition et en faire la somme : $\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Donc la moitié des nombres de 5 chiffres, c'est-à-dire 45 000, ont un nombre pair de chiffres pairs.

3. Dans le triangle ABC, le point D appartient à $[AC]$ et est tel que $|BD| = |CD|$. Une droite parallèle à BD coupe le segment $[BC]$ en E et coupe la droite AB en F. Le point d'intersection des droites AE et BD est G.
Démontrer que les angles $\widehat{BCG}$ et $\widehat{BCF}$ ont même amplitude.

Solution de Mathieu Lessinnes, élève de 6^e^ année à l'Athénée Vauban à Charleroi



Plaçons sur CB l'axe des abscisses d'un repère orthogonal, l'axe des ordonnées comprenant A. Nous pouvons poser $B(1,0)$ et $A(0,1)$ car le repère n'est pas forcément orthonormé. Appelons k l'abscisse de C. Dès lors, nous avons tout de suite

$$AB \equiv y = -x + 1 \text{ et } AC \equiv y = \frac{-x + k}{k}$$

De plus, comme $|BD| = |CD|$, D se situe sur la médiatrice de $[BC]$ (d'équation $x = \frac{1+k}{2}$) et sur AC. D'où $D\left(\frac{1+k}{2}, \frac{k-1}{2k}\right)$ et le coefficient angulaire de BD vaut $\frac{k-1}{2k} \cdot \frac{2}{k-1} = \frac{1}{k}$.

Posons $BD \equiv y = \frac{x}{k} + p$. Comme $B \in BD$, on a $0 = \frac{1}{k} + p$ et $BD \equiv \frac{x-1}{k}$.

Par conséquent, EF, qui a le même coefficient angulaire que BD, a pour équation $y = \frac{x+\lambda}{k}$ où λ est un paramètre réel tel que EF coupe $[BC]$.

On a ainsi les coordonnées de E : $(-\lambda, 0)$. Par ailleurs, F étant l'intersection de AB et de EF, sa coordonnée vérifie les équations de ces deux droites :

$$\begin{cases} y = \frac{x+\lambda}{k} \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+\lambda}{k} = -x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k-\lambda}{k+1} \\ y = \frac{\lambda+1}{k+1} \end{cases}$$

De même, G étant l'intersection des droites AE et BD, sa coordonnée vérifie leurs équations

$$\begin{cases} y = \frac{x+\lambda}{\lambda} \\ y = \frac{x-1}{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda(k+1)}{\lambda-k} \\ y = \frac{\lambda+1}{\lambda-k} \end{cases}$$

Nous pouvons à présent calculer les coefficients angulaires des droites GC et FC et constater qu'ils sont opposés :

$$m_{FC} = \frac{\lambda + 1}{k + 1} \cdot \frac{k + 1}{k - \lambda - k(k + 1)} = -\frac{\lambda + 1}{\lambda + k^2}$$

$$m_{GC} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - k} \cdot \frac{\lambda - k}{\lambda + k^2} = \frac{\lambda + 1}{\lambda + k^2}$$

Finalement, comme ces deux coefficients angulaires sont opposés, les droites CG et FC forment le même angle avec l'axe des abscisses BC. Les angles $\widehat{BCG}$ et $\widehat{BCF}$ ont par conséquent même amplitude.

4. Une liste initiale contient tous les entiers de 1 à 2004 dans un ordre quelconque. L'opération suivante lui sera appliquée de manière répétée : *Si la première valeur de la liste est le nombre k, les k premières valeurs sont récrites dans l'ordre inverse de celui où elles étaient (les autres valeurs sont inchangées). Notons que si $k = 1$, la liste n'est pas modifiée.*

(a) Existe-t-il une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération quatre fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?

(b) Existe-t-il une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération dix-sept fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?

(c) Existe-t-il, pour tout naturel n tel que $1 \leqslant n \leqslant 2004$, une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération n fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?

(d) Pour toute liste initiale, existe-t-il nécessairement un naturel n tel qu'après avoir appliqué l'opération à la liste n fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position ?

Solution, pour (a), (b), (c), de Julien Coppe, élève de 6e année à l'Institut Jean XXIII à Jemelle, et pour (d), de David Colino Llamas, élève de 6e année à l'Ecole Européenne de Luxembourg

(a) (b) (c) Si on montre que pour tout naturel n tel que $1 \leqslant n \leqslant 2004$, il existe une liste initiale telle qu'après avoir appliqué l'opération n fois successivement, le nombre 1 apparaît en première position, on l'aura montré pour $n = 4$ et $n = 17$.

On peut trouver une liste initiale, comme décrite ci-dessous, pour tout n tel que $1 \leqslant n \leqslant 2004$.

i. Pour $1 \leqslant n \leqslant 2003$, cette liste est la suivante :

$$2, 3, 4, \ldots, n, n+1, 1, n+2, \ldots, 2004.$$

(Remarque : si $n = 2002$, cette liste s'écrit

$$2, 3, 4, \ldots, 2002, 2003, 1, 2004$$

et si n=2003, elle s'écrit

$$2, 3, 4, \ldots, 2003, 2004, 1).$$

Après la 1re opération : $3, 2, 4, \ldots, n, n+1, 1, n+2, \ldots, 2004.$
Après la 2e opération : $4, 2, 3, \ldots, n, n+1, 1, n+2, \ldots, 2004.$
$\vdots$ $\qquad\qquad\vdots$
Après la n^e opération : $1, \ldots, n+1, n+2, \ldots, 2004.$

Entre 1 et $n+1$ se situent les nombres de 2 à n inclus dans un ordre qui importe peu.

ii. Pour $n = 2004$, cette liste est la suivante :

$$2, 2004, 3, 4, \ldots, 2002, 1, 2003.$$

Après la 1re opération :	$2004, 2, 3, 4, \ldots, 2002, 1, 2003.$
Après la 2^{e} opération :	$2003, 1, 2002, \ldots, 4, 3, 2, 2004.$
Après la 3^{e} opération :	$2, 3, 4, \ldots, 2002, 1, 2003, 2004.$

Il reste 2001 opérations comme ci-dessus pour que le nombre 1 soit en 1re position, donc en tout $3 + 2\,001$ opérations.

(d) Supposons qu'il n'existe pas nécessairement de naturel n tel qu'après avoir appliqué l'opération n fois le nombre 1 apparaisse en première position.

Si la supposition est vraie, alors il existe un ensemble

$$E \subset \{2, 3, \ldots, 2004\}$$

comprenant α éléments ($\alpha < 2004$) qui à partir d'un certains nombre d'opérations sont les seuls à apparaître en première position. E est un ensemble fini, donc il contient un élément e tel que e est plus grand que tous les autres éléments de E.

Si e apparaît, après une certaine opération, en première position, alors après l'opération suivante, il atteindra une position d'un rang égal à sa valeur et puisque c'est l'élément le plus grand, il ne pourra plus changer de position (car l'opération ne l'atteindra plus).

Donc, il existera un ensemble E' fini comprenant un élément en moins que E et contenant tous les éléments qui apparaissent en première position. Si on continue ce raisonnement, on aboutit à un ensemble F, tel que $F = \emptyset$, qui contient tous les élément apparaissant en première position.

Ceci est contradictoire puisqu'il y a toujours un élément en première position, donc la supposition du début est fausse et il existe nécessairement un naturel n tel que, après avoir appliqué l'opération à la liste n fois de suite, le nombre 1 apparaisse en première position.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets

En librairie

Problème n° 295 de *Mathématique et Pédagogie* n° 147.

Pendant l'année 2003, dans cette librairie ouverte 7 jours par semaine, on a vendu au moins un livre chaque jour, et au total 600 livres sur l'année. Montrer qu'il y a eu une période de jours consécutifs pendant laquelle on a vendu exactement 129 livres.

Des lecteurs, ayant une meilleure mémoire que la mienne, m'ont fait remarquer que ce problème avait déjà été posé dans le numéro 122 de cette revue. Cependant, il est possible que certains ne disposent pas de ce numéro aussi voici à nouveau une solution.

Solution de J. ANSEEUW de Roeselare

Soit b_i le nombre total de livres qui ont été vendus jusqu'au i^e jour inclus. Nous pouvons écrire :

$$1 \leqslant b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_i < \cdots < b_{365} = 600. \quad (1)$$

Augmentons chaque terme de 129, on obtient :

$$129 \leqslant b_1 + 129 < b_2 + 129 < b_3 + 129 < \cdots < b_i + 129 < \cdots < b_{365} + 129 = 729. (2)$$

Nous avons à présent au total 730 nombres dans l'intervalle $[1, 729]$, ce qui implique qu'au moins deux de ces nombres sont égaux.

Comme tous les nombres des inégalités (1) sont différents et de même pour les inégalités (2), il doit exister deux indices i et j tel que $b_i = b_j + 129$. Ceci signifie qu'entre le jour $j + 1$ et le jour i inclus on a vendu exactement 129 livres.

J. OOMS de Chimay a envoyé **une solution un peu plus longue**.

Pas de solution

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse courriel : `hamoircl@brutele.be`

Problème n° 296 de *Mathématique et Pédagogie* n° 147.

Démontrer qu'il n'existe pas d'entiers a, b, c, d non tous nuls vérifiant l'équation

$$a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0$$

Solution de P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte

Soient a, b, c, d des entiers vérifiant $a^2+5b^2-2c^2-2cd-3d^2 = 0$, (1) c'est-à-dire $a^2 + 5b^2 - 3d^2 = 2c^2 + 2cd$.
Par suite $a^2+5b^2-3d^2$ est pair.

Comme x et x^2 ont même parité, cela conduit à $a+b+d$ pair. Par conséquent, soit ces trois entiers sont pairs, soit exactement l'un d'entre eux est pair.

1. Si a est pair et b, d impairs :
   On a $x^2 \equiv 1 (\text{mod } 4)$ si x est impair et $x^2 \equiv 0 (\text{mod } 4)$ si x est pair, par suite $a^2 + 5b^2 - 3d^2 \equiv 2 (\text{mod } 4)$. Mais d'un autre côté, $2c^2+2cd \equiv 2c^2+2c \equiv 2c(c+1) \equiv 0 (\text{mod } 4)$, car $c(c+1)$ est forcément pair. Par conséquent, $a^2 + 5b^2 - 3d^2 \not\equiv (2c^2 + 2cd) (\text{mod } 4)$, ce qui contredit (1).
2. Si b est pair et a, d impairs : on obtient exactement la même contradiction.
3. Si d est pair et a, b impairs : Cette fois $2c^2+2cd+3d^2 \equiv 2c^2 (\text{mod } 4)$ et $a^2+5b^2 \equiv 2 (\text{mod } 4)$, d'où c est impair.
   Posons $d = 2n$.
   Si x est impair, on a $x^2 \equiv 1 (\text{mod } 8)$, donc $a^2+5b^2-2c^2 \equiv 4 (\text{mod } 8)$.
   Par suite, d'après (1), $2cd+3d^2 = 4cn+12n^2 = 4n(c+3n) \equiv 4 (\text{mod } 8)$, d'où $n(c+3n)$ est impair. Mais alors n et $c+3n$ sont impairs, ce qui implique que c est pair. Contradiction.

Dès lors, si a, b, c, d vérifient (1), alors a, b, d sont tous trois pairs. Posons $a = 2x$, $b = 2y$ et $d = 2t$.

L'équation (1) devient $4x^2+20y^2-2c^2-4ct-12t^2 = 0$, ce qui conduit à c^2 pair et donc $c = 2z$ est pair.

L'équation (1) s'écrit alors $x^2 + 5y^2 - 2z^2 - 2zt - 3t^2 = 0$ et (x, y, z, t) est également une solution.

Ainsi, si (a, b, c, d) est une solution de (1), alors a, b, c, d sont pairs et $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{d}{2})$ est également une solution de (1).

On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les entiers a, b, c, d sont tous divisibles par 2^n. Cela entraîne clairement que $a = b = c = d = 0$ (qui réciproquement fournit bien une solution).

Finalement la seule solution de (1) est $(0, 0, 0, 0)$.

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare, P. DASSY de Liège, J. FINOULST de Diepenbeek, J. OOMS de Chimay et J. RASSE de Méan.

Impuissance

Problème n° 297 de *Mathématique et Pédagogie* n° 147.

Démontrer que $2^p + 3^p$, où p désigne un nombre premier, n'est une puissance d'un entier pour aucune valeur de p.

Solution de P. DASSY de Liège

Si $p = 2$, seul nombre premier pair, $2^p + 3^p = 4 + 9 = 13$ et n'est pas une puissance d'un entier.

Si p est premier et impair, on a

$$\begin{aligned} 2^p + 3^p &= 2^p + (5-2)^p \\ &= 2^p + 5^p - C_p^1 2 \cdot 5^{p-1} + C_p^2 2^2 \cdot 5^{p-2} - \cdots + C_p^{p-1} 2^{p-1} \cdot 5 - 2^p \\ &= 5\left(5^{p-1} - C_p^1 2 \cdot 5^{p-2} + C_p^2 2^2 \cdot 5^{p-3} - \cdots + C_p^{p-1} 2^{p-1}\right) \end{aligned}$$

Si cette expression est une puissance d'un entier, alors c'est une puissance de 5. Tous les termes contenus dans les parenthèses doivent donc être multiples de 5, il faut donc que $p \cdot 2^{p-1}$ soit multiple de 5 (condition nécessaire mais non suffisante), p étant premier, on a forcément $p = 5$.

Dans ce cas, $2^p + 3^p = 32 + 243 = 275 = 5^2 \cdot 11$ qui n'est pas une puissance d'un entier. Donc si p est premier, $2^p + 3^p$ n'est jamais une puissance d'un entier.

J. ANSEEUW de Roeselare, P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, J. FINOULST de Diepenbeek, J. OOMS de Chimay et J. RASSE de Méan ont envoyé des **solutions similaires**.

Voici trois nouveaux problèmes livrés à votre sagacité. Les solutions doivent me parvenir avant le 1er mai 2005.

304. Trois bases

En base 10, $361 = 19^2$. Trouver au moins trois autres bases pour lesquelles 361 est un carré parfait.

305. Exponentielles

On considère les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous x, y réels, on a

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

Démontrer que

- s'il existe un réel pour lequel f n'est pas nulle, alors f est non nulle partout ;
- s'il existe un réel pour lequel f est continue, alors f est continue partout ;
- les seules fonctions f qui sont continues et non nulles en 0 sont les exponentielles.

306. Polynôme

Démontrer que , si a est un entier non multiple de 5, alors le polynôme $x^5 - x + a$ n'est jamais le produit de deux polynômes à coefficients entiers.

L'Olympiade Mathématique Belge recrute ...

Nous recherchons des professeurs imaginatifs, qui pourraient nous aider à la création et à la rédaction de questions pour les Olympiades. Cet avis concerne tout particulièrement des professeurs motivés par les olympiades mini et midi car c'est essentiellement à ces niveaux qu'un « renouvellement des cadres » se fait pressant.

L'essentiel du « travail » se gère par courrier et courriel. Intéressé(e) ? Contactez Claudine Festraets, 36, Rue Vandercammen, 1160 - Bruxelles, courriel : `hamoircl@brutele.be`

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Janvier 2005)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :
- Cotisation ordinaire : 20 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 28,50 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 50 € (non **PRIOR**), 60 € (**PRIOR**)
Autres pays : 62 € (non **PRIOR**), 75 € (**PRIOR**)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 26 €.
Europe : 42 € (non **PRIOR**), 43 € (**PRIOR**).
Autres pays : 48 € (non **PRIOR**), 54 € (**PRIOR**).

Anciens numéros :

Avant 2002 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.
Années 2003 ou 2004 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 5 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

- Abonnements groupés à <u>une</u> des revues : (3 numéros)
  Belgique : 4 €. Europe : 7 € (non **PRIOR**), 9 € (**PRIOR**).
  Autres pays : 10 € (non **PRIOR**), 14 € (**PRIOR**).
- Abonnements groupés <u>aux deux</u> revues : (6 numéros)
  Belgique : 7 €. Europe : 13 € (non **PRIOR**), 17 € (**PRIOR**).
  Autres pays : 15 € (non **PRIOR**), 20 € (**PRIOR**).

Abonnements individuels.

- Abonnements à <u>une</u> des revues : (3 numéros)

Belgique : 6 €. Europe ([1]) : 13 € (non **PRIOR**), 16 € (**PRIOR**).
Autres pays : 15 € (non **PRIOR**), 21 € (**PRIOR**).

- Abonnements <u>aux deux</u> revues : (6 numéros)

Belgique : 11 €. Europe : 16,50 € (non **PRIOR**), 20,50 € (**PRIOR**).
Autres pays : 20 € (non **PRIOR**), 25 € (**PRIOR**).

Anciens numéros :

Avant 2002-2003 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.
Année 2003-2004 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 43 €. Ils recevront le *Bulletin de* l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.
Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP; ils bénéficient du prix « adhérents »..

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.
Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 BIC BPOTBEB1
ou CCP LILLE : IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (n^o 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n^o 7 à n^o 11 et n^o 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n^o 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 6 (Statistiques)	7,40 €	6 €	voir ci-dessous
Dossier 7 (Vers les infiniment petits) **Simone Trompler et Guy Noël**	6 €		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire) **Claude Villers et alii**	9 €		T3
Jacques Bair, Mathématique et Sport	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12 €	9,50 €	T2
G. Robert, CD-Rom, logiciels mathématiques	5 €	/	T1
Recueils de questions des OMB Tome 5	6 €		voir ci-dessous

Frais d'expédition en non PRIOR

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	6,50 €	10 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions en PRIOR, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.

Exemples de tarification pour commandes groupées

Brochures OMB (5) ou dossier 6

1 ex.	T1
2 ou 3 ex.	T2
4 à 6 ex.	T3
7 à 12 ex.	T4

Dossier 8 (Démonstration...)

1 ex.	T2
2 ex.	T3
3 à 4 ex.	T4

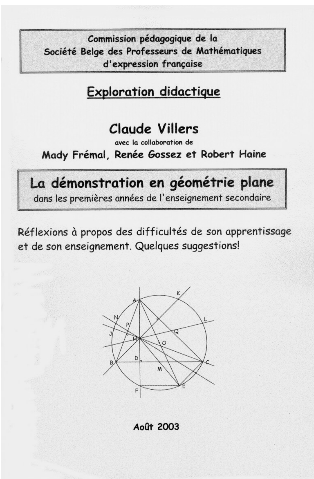
Au-delà, consulter le secrétariat

Dossier Statistique : à nouveau disponible ...

Le succès rencontré par notre dossier pédagogique n° 6 a rapidement mené à l'épuisement de notre deuxième tirage.

Bonne nouvelle : le fascicule est à nouveau disponible aux conditions habituelles précisées dans « Le coin du trésorier » en fin de revue.

Dossier 8 : La démonstration ...



Commission pédagogique de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française

Exploration didactique

Claude Villers
avec la collaboration de
Mady Frémal, Renée Gossez et Robert Haine

La démonstration en géométrie plane
dans les premières années de l'enseignement secondaire

Réflexions à propos des difficultés de son apprentissage et de son enseignement. Quelques suggestions!

Août 2003

Les auteurs ont souhaité que le document s'inscrive dans la perspective d'une exploration didactique. Ils vous soumettent ici leurs réflexions à propos des difficultés de l'apprentissage et de l'enseignement de la démonstration en même temps qu'ils vous soumettent de nombreuses suggestions pour la préparation et la pratique de la démonstration dans la classe. Plus de 150 exercices - résolus pour la moitié - illustrent leur propos.