

Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique)
Tél.-Fax : 32-(0)65-373729, courriel : sbpm@sbpm.be, Web : <http://www.sbpm.be>

Membres d'honneur : H. Levarlet, W. Servais (†)

Conseil d'administration : J.-P. Cazzaro, M. Denis-Pecheur, B. Desaedeleer, P. Dupont, Cl. Festraets-Hamoir, M. Frémal, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, P. Marlier, Ch. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ph. Skilbecq, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler, Ch. Van Hooste

Président :

Ch. Van Hooste, Chemin de Marbisæul
25, 6120 Marbaix-la-Tour,
Tél. 071-217793

Vice-Président,

Olympiades Internationales :

G. Troessaert, Recogne sur le Chêne 58,
6800 Libramont, Tél. 061-224201

Administrateur délégué :

Ch. Michaux, Rue Brigade Piron 290,
6061 Montignies-sur-Sambre,
Tél. 065-354706

Commission Congrès, Publicité :

M. Denis-Pecheur, Rue de la Ferme 11,
5377 Noiseux (Somme-Leuze),
Tél. 086-323755

Trésorier :

P. Marlier, Rue de Plainevaux 185/15,
4100 Seraing, Tél. 04-3374945

Secrétaire :

M. Frémal, Rue W. Jamar 311/51,
4430 Ans, Tél. 04-2636817

Olympiades nationales et site WEB :

Cl. Festraets-Hamoir, Rue J.B.
Vanderammen 36, 1160 Bruxelles
Tél. 02-6739044

Contact Presse :

N. Miewis-Seronveaux, Avenue de Péville
150, 4030 - Grivegnée
Tél. 04-3431992

Math-Jeunes Junior :

A. Paternotte, Rue du Moulin 78,
7300 Boussu, Tél. 065-785064

SBPM-Infor :

R. Gossez, Albert I Laan 13, 1560
Hoeilaart, Tél. 02-6579892

Math-Jeunes Senior :

G. Noël, Rue du 1^{er} Chasseur à cheval
16/14, 7000 - Mons, Tél. 065-848621

Portefeuille de lecture :

M. Herman, Rue Rafhay 95, 4630 Sou-
magne, Tél. 087-267023

Mathématique et Pédagogie :

J. Miewis, Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée, Tél. 04-3431992

Comité de rédaction : J. Miewis, J. Bair, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, Cl. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, Ch. Michaux, J. Navez, G. Noël, Ph. Skilbecq, N. Vandenabeele, Ch. Van Hooste, Cl. Villers



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

Articles

- P. Lecomte, *Où sont les orthocentres d'un triangle?* 3
- G. Noël et P. Tilleuil, *D'où sort la méthode des moindres carrés?* 17
- A. Gaggero, *Les réglettes de Neper* 45
- J.-P. Houben, *Cabri-Géomètre et les sections* 55

Rubriques

- Ph. Skilbecq, *Le Rallye Mathématique* 60
- J. Miewis, *Dans nos classes* 68
- C. Festraets, *Olympiades* 76
- C. Festraets, *Des problèmes et des jeux* 82
- J. Miewis, *Bibliographie* 86
- P. Marlier, *Le coin du trésorier* 89

NOTE

- * Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
- * Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
- * Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- * Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (L^AT_EX 2_ε, Word); les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés. L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
- * La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
Pour les articles :
Gribaumont A., *Les structures de programmation, Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
- * Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- * MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Où sont les orthocentres d'un triangle ?

P. LECOMTE, *ULg*

1. Introduction

Sous un titre paradoxal, ce texte aborde une question tout à fait sérieuse. On peut l'envisager selon plusieurs points de vue. Initialement, je l'ai présentée à mes étudiants dans le but d'illustrer la notion d'espace affine euclidien. Il s'agissait alors de faire voir de façon frappante à quel point les notions métriques sont tributaires du produit scalaire définissant la structure euclidienne. Dans cette optique, assez abstraite, on se donne un triangle Δ_0 d'un plan affine \mathcal{E} . On fait alors observer que, pour chaque structure euclidienne de \mathcal{E} , c'est-à-dire pour chaque produit scalaire g de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ sur lequel \mathcal{E} est modelé, Δ_0 possède un orthocentre H_g dont la position varie avec g . On se demande alors s'il est possible de déterminer le lieu décrit par H_g quand g balaye l'ensemble des produits scalaires de $\vec{\mathcal{E}}$. Dans le même registre, on examine la possibilité de choisir g pour donner à Δ_0 une forme particulière. On en profite pour faire toucher du doigt le fait que l'ensemble des produits scalaires est un convexe de l'ensemble des formes bilinéaires sur $\vec{\mathcal{E}}$.

On peut considérer les choses autrement, en fixant une fois pour toute un produit scalaire g_0 sur \mathcal{E} et en étudiant les positions relatives de l'orthocentre des triangles Δ de l'espace euclidien (\mathcal{E}, g_0) . Par convention, la position relative d'un point par rapport à un triangle Δ est décrite par les coordonnées barycentriques du point par rapport aux sommets de Δ ⁽¹⁾.

Voyons comment faire le pont entre les deux approches. Pour tout triangle Δ , il existe une affinité \mathbf{a} de \mathcal{E} qui applique Δ_0 sur Δ (unique si, comme nous le supposons, les sommets des triangles sont ordonnés et si \mathbf{a} respecte cet ordre, voir la note en bas de page (1)). Dans cette affinité, il y

Adresse de l'auteur: Pierre Lecomte, Department de Mathématique, Ulg, Grande Traverse, 12 (B37) 4000 Sart-Tilman (Liège). courriel : plecomte@ulg.ac.be

⁽¹⁾ Dans ce texte, un triangle est donné par trois sommets et un ordre sur ceux-ci. Cela dit, les expressions que nous trouverons seront symétriques en les coordonnées barycentriques

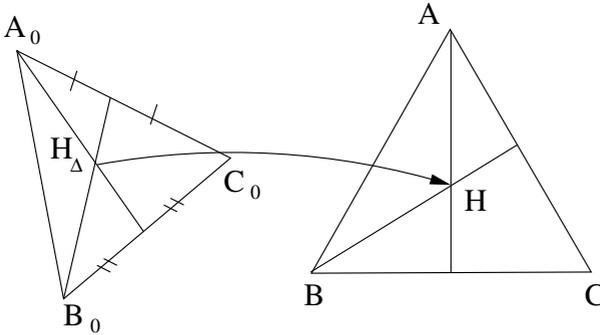


FIG. 1 — Rendre équilatéral un triangle... L'affinité \mathbf{a} applique Δ_0 sur un triangle équilatéral Δ .

a un point H_Δ qui est appliqué sur l'orthocentre H de Δ et, les coordonnées barycentriques étant préservées, la position relative de H_Δ par rapport à Δ_0 est la même que celle de H par rapport à Δ (voir figure 1). En même temps, la formule

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_0(\vec{\mathbf{a}}\mathbf{u}, \vec{\mathbf{a}}\mathbf{v}),$$

où $\vec{\mathbf{a}}$ est l'application linéaire induite par \mathbf{a} sur $\vec{\mathcal{E}}$, définit un produit scalaire g de $\vec{\mathcal{E}}$ et, par construction, $\mathbf{a} : (\mathcal{E}, g) \rightarrow (\mathcal{E}, g_0)$ est une isométrie. En conséquence, $H_\Delta = H_g$ et on voit qu'en laissant varier Δ ou en laissant varier g , on décrit le même ensemble de points relativement à Δ_0 .

Les deux points de vue considérés sont donc équivalents.

Forme des triangles Incidemment, nous venons de répondre à une question posée ci-dessus : en choisissant convenablement le produit scalaire, on peut donner à Δ_0 une forme arbitraire. Par exemple, on peut en faire un triangle isocèle, rectangle, etc. en choisissant Δ de la forme correspondante. Ici, nous considérons que deux triangles ont même forme s'ils sont isométriques. C'est un peu plus faible comme notion que ce qu'on pourrait imaginer plus naturellement, à savoir ne pas distinguer deux triangles semblables. A l'autre extrémité, on pourrait parler de la forme affine d'un triangle, c'est-à-dire ne pas distinguer deux triangles images l'un de l'autre par une affinité : il n'y aurait alors qu'une seule forme affine de triangle. La notion de forme dépend finalement du groupe des transformations qui laisse invariante les propriétés définissant cette notion : définir un type de forme revient à choisir ce groupe. Au surplus, plus ce groupe est petit et plus riche est l'ensemble

des formes qui lui sont associées. L'ensemble des formes invariantes sous l'action d'un groupe donné G est ainsi le quotient \mathcal{T}/G de l'ensemble \mathcal{T} des triangles de \mathcal{E} par l'action de G . Lorsqu'on prend pour G le groupe des affinités, on obtient un seul point dans \mathcal{T}/G : « le » triangle affine. Lorsque G est le groupe des isométries, on obtient l'ensemble de ce que nous avons appelé les « formes de triangles » ci-dessus. Nous venons de voir qu'il est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{H}_+(\vec{\mathcal{E}})$ des produits scalaires de $\vec{\mathcal{E}}$. Les traditionnels « cas d'égalité » des triangles en donnent d'autres descriptions : par exemple, chaque forme peut être décrite par trois nombres. Deux nombres positifs $b \leq c$ et un troisième α pris dans $]0, \pi[$: les deux premiers mesurent deux côtés qui forment un angle dont le troisième est la mesure. Plus symétriquement, on peut aussi la décrire par trois nombres positifs $a \leq b \leq c$ qui sont chacun plus petit que la somme des deux autres, et qui mesurent les côtés des triangles de la forme décrite.

Il n'est généralement pas facile de modéliser ce quotient, c'est-à-dire de trouver un modèle raisonnable de chaque classe d'équivalence. Pour un exemple détaillé, le lecteur est invité à lire le texte « Le triangle des triangles » disponible à l'adresse suivante :

<http://www.ulg.ac.be/geothalg/Triangles/index.html>

Il correspond au cas où on ne distingue pas deux triangles semblables, c'est-à-dire au cas où G est le groupe des similitudes. Il s'agit donc de $\mathcal{H}_+(\vec{\mathcal{E}})/\mathbb{R}^+$ puisque deux triangles dont les côtés sont proportionnels sont semblables. Le triangle des triangles en donne un modèle plus géométrique.

Le présent texte doit beaucoup au fructueux échange qui s'est déroulé sur le Forum M@TH en Ligne (<http://www.forum.math.ulg.ac.be>) sous l'intitulé « Quels sont les orthocentres d'un triangle? » posté le 15/11/2003 dans la rubrique « Divertissement ». Merci aux contributeurs MICHEL B. et LOLO!

2. Comment rendre un triangle équilatéral?

Considérons un triangle Δ de \mathcal{E} . Nous notons (A, B, C) ses sommets. Lorsque \mathcal{E} est un espace euclidien, nous notons aussi a, b, c les mesures de ses côtés et α, β, γ celles de ses angles, conformément à la figure 2.

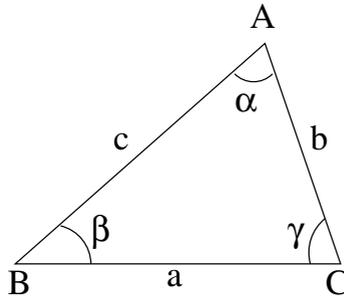


FIG. 2 – Notations.

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} étant linéairement indépendants, ils forment une base de \mathcal{E} qui est de dimension 2. Un produit scalaire g de \mathcal{E} est entièrement déterminé par les nombres

$$p = g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}), \quad q = g(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}), \quad r = g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \quad (1)$$

Signification de p , q et r Il est clair que

$$c = \sqrt{p}, \quad b = \sqrt{q}, \quad r = bc \cos \alpha. \quad (2)$$

En particulier,

Proposition 2.1 *On peut toujours choisir g pour donner à $b > 0$, $c > 0$ et $\alpha \in]0, \pi[$ des valeurs arbitraires et on ne peut le faire que d'une seule manière.*

Voyons alors comment calculer le troisième côté du triangle. On a

$$a^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 = g(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = p + q - 2r = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (3)$$

vu (1). Nous retrouvons ainsi le théorème de PYTHAGORE généralisé. Avec les relations précédentes, celle-ci montre également que

Proposition 2.2 *Lorsqu'on multiplie un produit scalaire par le carré d'un nombre positif, les mesures des côtés du triangles sont multipliées par ce nombre.*

À cette formule, nous pouvons encore ajouter celles donnant les angles β et γ de Δ .

$$\cos \beta = \frac{p-r}{\sqrt{p}\sqrt{p+q-2r}}, \quad \cos \gamma = \frac{q-r}{\sqrt{q}\sqrt{p+q-2r}}. \quad (4)$$

On obtient par exemple la première en écrivant

$$\cos \beta = \frac{g(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}{|BA||BC|} = \frac{1}{ca}g(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{ca}(-r+p).$$

Convexité de l'ensemble des produits scalaires Pour que des nombres (réels) p, q, r définissent un produit scalaire grâce aux formules (1), il faut et il suffit que la matrice symétrique

$$G_g = \begin{pmatrix} p & r \\ r & q \end{pmatrix}$$

soit définie positive. Cela signifie exactement que $p > 0$ et $pq - r^2 > 0$.

Ceci nous donne une représentation géométrique de $\mathcal{H}_+(\vec{\mathcal{E}})$ dans \mathbb{R}^3 qui illustre de façon claire que c'est un cône convexe ⁽²⁾. En particulier, si $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{H}_+(\vec{\mathcal{E}})$ et si la somme des nombres positifs a_1, \dots, a_n est 1, alors

$$a_1 g_1 + \dots + a_n g_n$$

est aussi un produit scalaire sur $\vec{\mathcal{E}}$. Voici une illustration de cette propriété. D'après la Proposition 2.1, si X est un sommet d'un triangle, il existe un unique produit scalaire g_X pour lequel le triangle est rectangle en X et les deux côtés issus de X sont de longueurs 1. D'après le théorème de PYTHAGORE, l'hypothénuse mesure alors $\sqrt{2}$.

Proposition 2.3 *A multiple positif près, il n'y a qu'un produit scalaire pour lequel le triangle de sommets (A, B, C) est équilatéral, à savoir*

$$g = \frac{1}{3}g_A + \frac{1}{3}g_B + \frac{1}{3}g_C.$$

Preuve. On a

$$3g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = g_A(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) + g_B(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) + g_C(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}).$$

⁽²⁾ Un cône convexe d'un espace vectoriel est un ensemble qui contient toutes les combinaisons $ru + sv$ de ses éléments, où $r, s \geq 0$ ne sont pas tous les deux nuls. La vérification directe du fait que $\mathcal{H}_+(\vec{\mathcal{E}})$ est un cône convexe est facile.

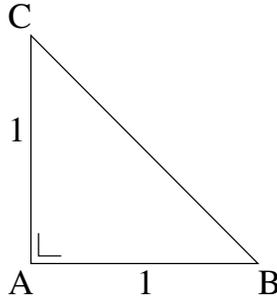


FIG. 3 – Forme du triangle Δ dans (\mathcal{E}, g_A) .

Pour g_A et pour g_B , la mesure du côté $[A, B]$ est 1, tandis que pour g_C , ce côté mesure $\sqrt{2}$ car c'est l'hypothénuse. Par conséquent, dans (\mathcal{E}, g) le triangle est équilatéral puisque ses côtés mesurent tous

$$\sqrt{g(\overline{AB}, \overline{AB})} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

D'après la Proposition 2.2, lorsqu'on multiplie g par $3\ell^2/4$, où ℓ est un nombre positif quelconque, le triangle reste équilatéral mais la taille de ses côtés devient ℓ . D'après la Proposition 2.1, $(3\ell^2/4)g$ est le seul produit scalaire pour lequel le triangle est de cette forme. D'où la propriété.

Mesure d'aire

Lorsqu'on s'intéresse seulement aux formes de triangles semblables, on ne s'intéresse pas aux longueurs des côtés. On peut donc convenir de normaliser le triangle en fixant une grandeur qui lui est associée. On peut par exemple fixer à 1 le rayon du cercle circonscrit ou imposer l'aire du triangle.

Proposition 2.4 L'aire du triangle Δ dans (\mathcal{E}, g) est donnée par

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\det G_g} = \frac{1}{2} \sqrt{pq - r^2}. \quad (5)$$

Preuve. En effet, d'après nos souvenirs de l'école primaire, S est « la moitié du produit de la base par la hauteur ». Considérons la hauteur issue de C . Elle vaut $b \sin \alpha$. Comme $\sin \alpha > 0$,

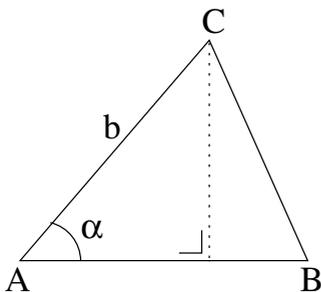


FIG. 4 – Hauteur issue de C.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2 c^2}}.$$

Donc,

$$2S = bc \sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2 c^2}} = \sqrt{b^2 c^2 - r^2} = \sqrt{pq - r^2}.$$

L'équation $pq - r^2 = 4S^2$ définit un hyperboloïde à deux nappes de \mathbb{R}^3 . En ajoutant la condition $p > 0$, on en sélectionne une nappe, qui représente donc l'ensemble des produits scalaires pour lesquels l'aire du triangle Δ vaut S (on suppose que le nombre S est positif).

La formule de Héron A ce stade, il est facile d'obtenir une expression de S à l'aide des mesures des côtés. On l'appelle la *formule de HÉRON*.

Proposition 2.5 Notons p la moitié du périmètre $a + b + c$ du triangle Δ de (\mathcal{E}, g) . On a

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

La notation p pour le demi-périmètre est classique. Elle entre en conflit avec la signification donnée à p ci-dessus. Comme elle n'intervient que dans cette proposition, nous tolérerons cette ambiguïté.

Preuve. D'après le théorème de PYTHAGORE généralisé, $4r^2 = a^2 - b^2 - c^2$. Donc

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4b^2 c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2 \\ &= (2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2) \\ &= [a^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - a^2] \\ &= (a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a) \\ &= 16p(p-a)(p-b)(p-c). \end{aligned}$$

3. Orthocentres

Coordonnées barycentriques des pieds de médianes ⁽³⁾

⁽³⁾ On nomme *médiane* toute droite qui part du sommet d'un triangle pour se limiter au côté opposé. JEAN CÉVA était un mathématicien milanais (1648-1734).

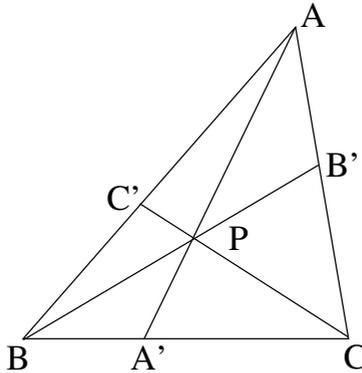


FIG. 5 – AA', BB' et CC' sont les médianes passant par P .

Notons (u, v, w) les coordonnées barycentriques d'un point P de \mathcal{E} par rapport au triangle Δ : on a $u + v + w = 1$ et

$$P = uA + vB + wC.$$

Les coordonnées barycentriques des pieds A', B', C' des médianes passant par P sont alors données par

$$\begin{cases} A' = \frac{v}{v+w}B + \frac{w}{v+w}C \\ B' = \frac{w}{w+u}C + \frac{u}{w+u}A \\ C' = \frac{u}{u+v}A + \frac{v}{u+v}B \end{cases} \quad (6)$$

Il suffit de vérifier la première. Les autres seront vraies par symétrie. Le point A' ainsi décrit appartient au segment $[B, C]$ puisqu'il est combinaison affine de ses extrémités B et C . D'autre part, puisque

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{v+w}\overrightarrow{AP},$$

A' appartient aussi à la médiane AP .

Coordonnées barycentriques d'un orthocentre Déterminons à présent les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H du triangle Δ relatif à un produit scalaire g .

Proposition 3.1 Les coordonnées barycentrique de l'orthocentre du triangle Δ de (\mathcal{E}, g) sont

$$\left(\frac{(p-r)(q-r)}{pq-r^2}, \frac{r(q-r)}{pq-r^2}, \frac{r(p-r)}{pq-r^2} \right) = (\cot \beta \cot \gamma, \cot \gamma \cot \alpha, \cot \alpha \cot \beta).$$

Preuve. Pour les expressions (u, v, w) en termes des nombres p, q, r , on observe d'abord que $u + v + w = 1$. Ensuite, on vérifie directement que chaque cévienne passant par le point ayant les coordonnées (u, v, w) proposées est perpendiculaire au côté opposé au sommet dont elle est issue. Il suffit même de le vérifier pour deux, par exemple BB' et CC' . En utilisant (1) et les relations (6), il vient

$$g(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{AC}) = \frac{w}{w+u} g(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) + \frac{u}{w+u} g(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \frac{w(q-r) - ur}{w+u} = 0.$$

Ainsi, $BB' \perp AC$. Vu la symétrie des expressions en p et q , on a alors automatiquement $CC' \perp AB$.

Il reste à exprimer (u, v, w) au moyen des angles de Δ . On utilise pour cela les formules (2), (4) et (5). Illustrons le calcul dans le cas de u , les autres étant analogues :

$$u = \frac{(ac \cos \beta)(ab \cos \gamma)}{4S^2} = \frac{a^2 bc \cos \beta \cos \gamma}{(ac \sin \beta)(ab \sin \gamma)} = \cot \beta \cot \gamma$$

puisque $2S = ac \sin \beta = ab \sin \gamma$. D'où la propriété.

Le lieu des orthocentres

Proposition 3.2 Le point P de coordonnées barycentriques (u, v, w) par rapport à Δ est un orthocentre de Δ si et seulement si P est un des sommets de Δ ou $uvw > 0$.

Comme on l'a expliqué dans l'introduction, ceci est équivalent à la propriété suivante.

Proposition 3.3 Soit un produit scalaire g de $\vec{\mathcal{E}}$. Les positions relatives des orthocentres des triangles de (\mathcal{E}, g) sont décrites par les coordonnées barycentriques $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ correspondant aux triangles rectangles, ainsi que par les coordonnées barycentriques (u, v, w) vérifiant $uvw > 0$.

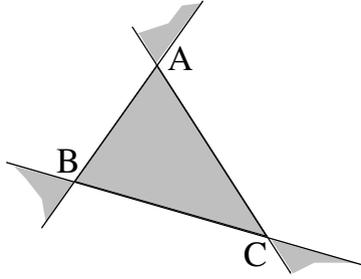


FIG. 6 – Le lieu des orthocentres du triangle (A, B, C) est représenté en gris. Il comprend les sommets du triangle.

Preuve. (De 3.2.) Vu la Proposition 3.1, les coordonnées barycentriques d'un orthocentre de Δ vérifient $uw \geq 0$. De plus, ce produit est nul si et seulement si $r = 0$, $q = r$ ou $p = r$, c'est-à-dire si et seulement si Δ est rectangle en A , B ou C respectivement. Inversement, si les coordonnées barycentriques (u, v, w) vérifient $uw > 0$, alors il existe un produit scalaire g pour lequel

$$\begin{cases} u = \frac{(p-r)(q-r)}{pq-r^2} \\ v = \frac{r(q-r)}{pq-r^2} \\ w = \frac{r(p-r)}{pq-r^2} \end{cases}$$

Ces relations impliquent en effet que

$$p = \left(1 + \frac{u}{v}\right)r, \quad q = \left(1 + \frac{u}{w}\right)r.$$

Les coordonnées (u, v, w) étant homogènes en p, q et r , ces derniers ne sont définis qu'à un multiple près (conformément au fait que la position relative de l'orthocentre est invariante par similitude). Les valeurs de p et q ci-dessus conviennent donc à condition de pouvoir choisir r pour que p, q, r vérifient les conditions $p > 0$ et $pq - r^2 > 0$. Elles garantissent en effet que les formules (1) définissent un produit scalaire. La condition $p > 0$ détermine le signe de r , qui ne peut être nul. D'autre part, avec les valeurs de p et de q ci-dessus, on a

$$pq - r^2 = \frac{u}{vw}r^2 > 0.$$

D'où la thèse.

Le lieu des orthocentres du triangle Δ est illustré à la figure 6. Pour rappel, en effet, les signes des coordonnées barycentriques sont distribués comme indiqués sur la figure 7.

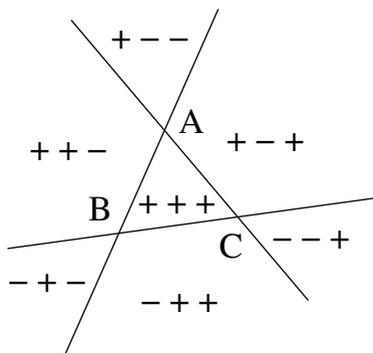


FIG. 7 – Le signe des coordonnées barycentriques par rapport à (A, B, C) .

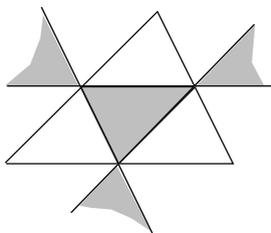


FIG. 8 – Le lieu du centre des cercles circonscrits au triangle est dessiné en gris.

Les points intérieurs au triangle correspondent aux orthocentres des triangles acutangles et les sommets de Δ aux triangles rectangles. Enfin, les autres positions sont relatives aux triangles ayant un angle obtus : Δ est obtus en A dans la région $(+ - -)$, etc.

Corollaire 3.4 Le lieu du centre des cercles circonscrits au triangle Δ est formé des milieux des côtés de Δ et des points de coordonnées barycentriques (u, v, w) vérifiant $(1 - 2u)(1 - 2v)(1 - 2w) > 0$.

Preuve. En effet, le centre de gravité de Δ est indépendant du produit scalaire. Il est par ailleurs le centre d'une homothétie, de rapport $-1/2$, qui applique l'orthocentre sur le centre du cercle circonscrit. Elle applique aussi les sommets du triangle sur les milieux des côtés opposés. Si les coordonnées barycentriques de l'orthocentre sont (u, v, w) , le centre O du cercle circonscrit s'écrit alors

$$O = u \frac{B+C}{2} + v \frac{C+A}{2} + w \frac{A+B}{2}.$$

Ses coordonnées barycentriques sont donc $((v+w)/2, (w+u)/2, (u+v)/2)$. La conclusion est aisée.

Où il est question du nombre d'or

Rappelons que g_X désigne le produit scalaire pour lequel un triangle donné est rectangle en son sommet X , les côtés issus de ce sommet étant de longueur 1.

L'ensemble des produits scalaires de \vec{C} étant convexe, nous obtenons une famille de produits scalaires en posant

$$g_t = (1-t)g_B + tg_C$$

avec $t \in [0, 1]$. Cette famille décrit le segment $[g_B, g_C]$ contenu dans $\mathcal{H}_+(\vec{C})$. Cependant, ce dernier étant ouvert, il contient un plus grand segment de la droite joignant g_B à g_C .

Proposition 3.5 La forme bilinéaire $g_t = (1-t)g_B + tg_C$ est un produit scalaire de \vec{C} si et seulement si $t \in]-1/\varphi, \varphi[$, où

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

est le nombre d'or.

Preuve. En utilisant les formules (2), (3) et (4), nous voyons immédiatement que

$$G_{g_B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } G_{g_C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$G_{g_t} = \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix}.$$

Cette matrice représente un produit scalaire si et seulement si $1 + t > 0$ et $\det G_{g_t} > 0$. Cette dernière condition s'écrit $t^2 - t - 1 < 0$. Elle signifie que t est strictement compris entre les racines de l'équation $t^2 - t - 1 = 0$, qui sont $-1/\varphi$ et φ . Comme $-1/\varphi > -1$, la propriété est démontrée.

Vu les formules (4), on voit que, dans (\mathcal{E}, g_t) , le triangle Δ est obtus en B si $t < 0$ et en C si $t > 1$.

Proposition 3.6 *Le lieu de l'orthocentre de Δ lorsque t décrit $] -1/\varphi, \varphi[$ est une branche d'hyperbole. Cette hyperbole admet les directions de BC et de la médiane AA' de Δ comme directions conjuguées ⁽⁴⁾. Son centre est le point*

$$A + \frac{1}{5} \overrightarrow{AA'}$$

et elle coupe AA' en A et en

$$A + \frac{2}{5} \overrightarrow{AA'}$$

Elle passe par B et par C .

Preuve. En remplaçant p, q, r par les valeurs $1 + t, 2 - t, 1$ dans l'expression des coordonnées barycentriques de l'orthocentre, on obtient une description paramétrique du lieu. En passant au repère d'origine A et de base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on en déduit des équations paramétriques cartésiennes :

$$x = \frac{1 - t}{-t^2 + t + 1} \quad \text{et} \quad y = \frac{t}{-t^2 + t + 1}.$$

L'élimination est facile et conduit à l'équation cartésienne

$$x^2 + 3xy + y^2 - x - y = 0$$

qu'on analyse facilement.

⁽⁴⁾ Le milieu de $[B, C]$ est noté A' .

place réservée à la publicité

D'où sort la méthode des moindres carrés ?

G. NOËL ET P. TILLEUIL,
UMH et Collège Ste Marie, Mouscron

1. Introduction

Dans l'introduction de sa *Théorie analytique des probabilités*, [9], Pierre-Simon LAPLACE (1749–1827) écrit

[...] la théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul; elle fait apprécier avec exactitude ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte.



Laplace

Si l'on considère [...] l'extension qu'elle a reçue et qu'elle peut recevoir encore par son application aux questions les plus importantes de la Philosophie Naturelle et des Sciences Morales; si l'on observe [...] qu'elle donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugements, et qu'elle apprend à se garantir des illusions qui souvent nous égarent, on verra qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique.

Cent-cinquante ans plus tard, la théorie des probabilités faisait son entrée dans les programmes de l'enseignement secondaire. Mais il en résulte des problèmes pédagogiques non négligeables, comme le constate — à demi-mots — un praticien reconnu de cet enseignement :

Depuis quelques années déjà, la statistique et les probabilités ont envahi la plupart des domaines de l'activité humaine; ...

C'est en 1971 qu'elles ont fait leur entrée en force dans les programmes de l'enseignement secondaire.

Cette innovation allait poser quelques problèmes aux professeurs.

Jacques BOUTRIAU,

Inspecteur de mathématique (préface à [1]).

Cette double constatation de la nécessité d'inclure des notions de probabilités et de statistique à la formation de tout citoyen et des difficultés de cet enseignement a amené la réalisation — dans de nombreux pays — de recherches qui explorent les différentes facettes du problème. Ce sont ainsi les aspects didactiques, mais aussi psychologiques, historiques et épistémologiques qui sont tour à tour pris en compte. Ces recherches se concrétisent par la tenue de congrès mondiaux (la première « International Conference on Teaching Statistics » (ICOTS 1) eut lieu à Sheffield en 1982), par des publications nombreuses parmi lesquelles une revue spécialisée : *Teaching Statistics* (URL : www.blackwellpublishers.co.uk).

C'est dans ce courant que se situe le présent texte. Les auteurs ont voulu déterrer les racines historiques de la méthode des moindres carrés. Ce sujet figure explicitement dans les programmes belges de l'enseignement secondaire. Il constitue probablement une des applications les plus fréquentes et les plus élémentaires de la théorie des probabilités.

Commençons par un rappel.

2. Écart-type *versus* Écart moyen absolu

Lors de l'enseignement des premières notions de statistique, on est amené à introduire divers paramètres pouvant être associés à une « série statistique », c'est-à-dire une suite finie de nombres. Nous supposons que cette série a déjà été écrite sous forme d'un tableau (x_1, \dots, x_n) ordonné par valeurs croissantes, mais non recensé. Il peut donc contenir des répétitions.

Les paramètres statistiques sont répartis en deux catégories :

– les paramètres de position qui évaluent une « valeur centrale ». Les plus courants sont

– la moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$,

– le mode : M est la valeur de x_i qui est la plus fréquente ,

– la médiane : $\mu = \begin{cases} x_{m+1} & \text{si } n = 2m + 1 \text{ est impair,} \\ \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1}) & \text{si } n = 2m \text{ est pair.} \end{cases}$

– les paramètres de dispersion qui évaluent l'étendue de la série. Les plus courants sont

– l'écart absolu moyen : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$,

– l'écart-type : $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$,

- l'écart inter-quartile : $|v - u|$ où v et u sont deux réels tels que un quart des valeurs x_i soient supérieures à v , et un quart inférieures à u .

Comme chacun sait, le carré de l'écart-type s'appelle la variance et un calcul assez simple permet de vérifier que cette variance vaut la différence entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

Avant de poursuivre, il est certainement bon de rappeler que le choix des paramètres de position et de dispersion est susceptible de varier selon la situation à analyser. Par exemple si on désire se faire une idée du niveau de vie des habitants d'un pays, le revenu médian de ceux-ci pourrait avoir plus de signification que leur revenu moyen. Nous ne poursuivrons pas plus loin ces réflexions qui ont été traitées avec grand soin dans le *Dossier d'explorations didactiques* n°6 de la *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* (voir [11]).

Revenant aux considérations théoriques, constatons que, une fois les définitions posées, on concentre généralement l'attention sur la moyenne et l'écart-type. Avec une hésitation toutefois : si, malgré ce qui a été écrit ci-dessus, le choix de la moyenne comme paramètre de position semble assez naturel, on se sent obligé de justifier le choix de l'écart-type comme paramètre de dispersion alors que le calcul de ce paramètre — comportant la racine carrée d'une somme de carrés — est plus compliqué que celui de l'écart moyen absolu — qui ne comporte qu'une somme.

Paradoxalement, on s'en tire souvent par une phrase, à tout le moins peu convaincante puisqu'affirmant tout simplement le contraire : *pour des raisons de commodité de calcul!*

Incontestablement, la question mérite une meilleure réponse! Aussi, il importe de remarquer un fait fondamental :

L'écart-type est inséparable de la moyenne, comme l'écart moyen absolu est inséparable de la médiane.

Expliquons-nous.

Considérons un paramètre de dispersion, par exemple l'écart-type :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Le paramètre σ mesure la dispersion de la série statistique AUTOUR DE LA MOYENNE \bar{x} . Mais dans cette formule, nous pourrions remplacer ce paramètre \bar{x} par n'importe quel réel x , et envisager la dispersion autour de x :

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2}$$

Il est assez normal de choisir pour x , qui joue le rôle de paramètre de position, la valeur qui rend la dispersion la plus petite possible. Il revient au même de minimiser $\sigma^2(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2x \sum_{i=1}^n x_i + nx^2$, ce qui utilise selon les préférences de chacun, soit les propriétés des fonctions du second degré, soit une dérivation par rapport à x . Quelle que soit la méthode utilisée (heureusement!), on constate que le minimum de σ^2 (et σ) est atteint pour $x = \bar{x}$. Ainsi, choisir l'écart-type comme paramètre de dispersion, c'est déjà appliquer une méthode des moindres carrés.

Procédons de la même manière pour le choix de l'écart moyen absolu comme paramètre de dispersion.

Il s'agit cette fois de minimiser une fonction de graphique polygonal :

$$p(x) = \frac{1}{n} (|x_1 - x| + \dots + |x_n - x|)$$

Puisque nous considérons un problème statistique, cette expression comporte normalement un nombre assez grand de termes (on ne « fait » pas de statistiques sur une série de 5 nombres!). Pour raisonner sereinement, examinons la variation de p sur un seul intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. Par exemple, choisissons $k = 3$. Puisque les nombres x_i sont rangés dans l'ordre croissant, nous pouvons affirmer que, pour $x_3 \leq x \leq x_4$, on a

$$\begin{array}{ll} |x_1 - x| = x - x_1 & |x_4 - x| = x_4 - x \\ |x_2 - x| = x - x_2 & \text{et} \quad \vdots \\ |x_3 - x| = x - x_3 & |x_n - x| = x_n - x \end{array}$$

Entre x_3 et x_4 , p est donc une fonction du premier degré en x , et, au facteur $\frac{1}{n}$ près, le coefficient de x vaut $3 - (n - 3)$, soit $6 - n$. De la même façon, pour $x_4 \leq x \leq x_5$, le coefficient de x vaut $8 - n$ et pour $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, il vaut $2k - n$ (toujours au facteur $\frac{1}{n}$ près). La fonction p est donc décroissante pour $k < \frac{n}{2}$ et croissante pour $k > \frac{n}{2}$.

Conclusion :

1. Si $n = 2m$ est pair, la fonction p est strictement décroissante sur l'intervalle $[x_1, x_m]$ et strictement croissante sur $[x_{m+1}, x_n]$. Elle est minimale et constante sur l'intervalle médian $[x_m, x_{m+1}]$.
2. Si $n = 2m+1$ est impair, alors p est strictement décroissante sur l'intervalle $[x_1, x_{m+1}]$ et strictement croissante sur $[x_{m+1}, x_n]$. Elle atteint son minimum en x_{m+1} .

On peut arriver au même résultat par une dérivation : puisque la dérivée de $|x|$ vaut $+1$ pour $x > 0$ et -1 pour $x < 0$, la fonction p est dérivable en tout x différent de x_1, \dots, x_n . Sa dérivée en un réel $x \in]x_k, x_{k+1}[$ est la somme de k termes égaux à $+1$ et de $n - k$ termes égaux à -1 et vaut donc $2k - n$. On termine comme précédemment (par exemple, la dérivée vaut 0 si $k = \frac{n}{2}$).

Nous venons d'établir que

- la fonction $\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2}$ atteint son minimum pour $x = \bar{x}$
- la fonction $p(x) = \frac{1}{n} (|x_1 - x| + \dots + |x_n - x|)$ atteint son minimum pour $x = \mu$.

Ces résultats nous amènent à deux remarques :

1. Puisque la fonction $p(x) = \frac{1}{n} (|x_1 - x| + \dots + |x_n - x|)$ atteint son minimum pour $x = \mu$ et non pour $x = \bar{x}$, l'écart-moyen absolu, tel qu'il a été défini plus haut, est un paramètre peu intéressant. Si on veut utiliser comme paramètre de dispersion un écart moyen absolu, celui-ci doit être calculé par rapport à la médiane et non par rapport à la moyenne. D'après Breny, [2], la valeur $\frac{1}{n} (|x_1 - \mu| + \dots + |x_n - \mu|)$ porte le doux nom de *écart médio-moyen*.
2. Il ne s'agira donc pas dans la suite d'expliquer pourquoi on utilise l'écart-type comme paramètre de dispersion plutôt que l'écart moyen absolu, mais bien d'expliquer pourquoi le choix du couple de paramètres (moyenne, écart-type) est — souvent — un meilleur choix que le couple (médiane, écart médio-moyen).

Venons-en à l'historique de la méthode des moindres carrés.

3. Des problèmes nautico-astronomiques

Avec le développement du commerce maritime au dix-huitième siècle, il devient impératif de fournir aux marins des techniques leur permettant de déterminer avec précision leur position en mer. L'observation des astres leur est à cet égard indispensable. Encore faut-il que les trajectoires de ceux-ci soient elles-mêmes connues avec une approximation suffisante. Heureusement, la mécanique newtonienne, élaborée au siècle précédent, fournit aux astronomes l'outil théorique nécessaire et le développement des instruments d'optique leur permet de réaliser des observations ... trop d'observations ont dû parfois penser certains d'entre eux.

Par exemple, en 1750, Tobias MAYER (1723—1762) a besoin pour déterminer la longitude d'un lieu — problème nettement plus compliqué que la détermination de la latitude — d'établir des tables du mouvement de la lune qui tiennent compte des faibles perturbations dues à la présence d'autres corps célestes que la terre ou encore de la non sphéricité de celle-ci. Mayer est ainsi amené à étudier le phénomène de libration de la lune : le fait que, contrairement à une affirmation courante, la lune ne présente pas toujours exactement le même hémisphère à la terre (du fait de la libration, environ 60% de la surface de la lune peuvent être observés depuis la terre, en un temps suffisamment long). Un des effets de la libration est que les cratères de la lune n'apparaissent pas toujours exactement à la même position sur le disque lunaire. Mayer va donc s'efforcer de déterminer la position exacte de l'un d'entre eux par rapport à un système de coordonnées lunaires fixe.

Mayer ramène le problème à la détermination des valeurs de trois paramètres α , β et θ . De plus il établit une équation entre ces inconnues et d'autres paramètres g , h et k , qui varient avec le temps mais peuvent être mesurés lors d'une séance d'observation :

$$\beta - (90^\circ - h) = \alpha \sin(g - k) - \alpha \sin \theta \cos(g - k)$$

Cette équation est linéaire en α , β et $\alpha \sin \theta$, de sorte qu'il suffit de trois observations pour obtenir un système de trois équations en trois inconnues et par conséquent déterminer celles-ci. Mais Mayer effectue des observations durant 27 jours au lieu de trois. Il a donc un système de 27 équations en trois inconnues, il n'a aucune raison d'en retenir trois

particulières et, bien entendu, du fait des erreurs d'observation, ces 27 équations sont incompatibles.

Pour obtenir néanmoins des valeurs (dont il sait très bien qu'elles ne seront qu'approchées) pour les inconnues, Mayer décide de répartir les 27 équations en trois groupes de 9 et de sommer membre-à-membre les équations de chaque groupe. Il constitue les groupes empiriquement, mais pas tout à fait arbitrairement : les équations du premier groupe sont celles où on trouve les plus grands coefficients de α et les équations du deuxième groupe sont celles où on trouve les plus petits coefficients de α .

Mayer obtient ainsi un système de 3 équations en 3 inconnues qu'il résout sans problème et trouve $\alpha = 1^{\circ}30'$. De plus, il procède à un calcul d'erreur. Appelant ε celle-ci, on peut écrire la valeur exacte sous la forme $1^{\circ}30' \pm \varepsilon$. Mayer constate aussi que s'il n'avait considéré que les équations 9, 16 et 19, il aurait obtenu $1^{\circ}40'$, l'erreur aurait donc été de $10' \pm \varepsilon$. Comme les valeurs $1^{\circ}30'$ et $1^{\circ}40'$ ont été obtenues respectivement à partir de 27 équations et de 3 équations, la première doit être 9 fois plus précise que la seconde. Il écrit donc une proportion

$$\frac{\pm \varepsilon}{1/27} = \frac{10 \pm \varepsilon}{1/3}$$

Il en déduit $\varepsilon = \frac{30}{24} = 1'25$.

Nous savons que le raisonnement de Mayer n'est pas correct : l'erreur maximale sur la moyenne d'une suite de mesures n'est pas inversement proportionnelle au nombre de mesures mais à la racine carrée de ce nombre. Il faudra encore attendre longtemps avant que ce principe soit mis en évidence.

Au passage, remarquons aussi que confronté à un système surdéterminé, Mayer le remplace par un nouveau système dont toutes les équations sont des combinaisons linéaires du précédent. Ce principe sera toujours appliqué dans la suite (y compris dans la méthode qui s'est finalement imposée : celle des moindres carrés), tout le problème étant de savoir comment construire ces combinaisons linéaires.

C'est ainsi que, voulant en 1785 expliquer les irrégularités des mouvements de Jupiter et de Saturne suivant la théorie de Newton, Laplace doit résoudre un système de 24 équations à 4 inconnues. Il construit alors un (nouveau) système de 4 équations à 4 inconnues :

- la somme des 24 équations,

- la différence entre la somme des équations 1 à 12 et la somme des équations 13 à 24,
- la combinaison linéaire des équations, notée $-1 + 3 + 4 - 7 + 10 + 11 - 14 + 17 + 18 - 20 + 23 + 24$,
- la combinaison linéaire des équations, notée $+2 - 5 - 6 + 8 + 9 - 12 - 13 + 15 + 16 - 19 + 21 + 22$.

4. Les extensions de la méthode de Mayer

Ruggero BOSCOVICH (1711–1787) et Christopher MAIRE (1697–1767) s'attaquent entre 1755 et 1770 à la mesure de la « figure de la terre », (nous dirions « la mesure de l'aplatissement de l'ellipsoïde terrestre ») à partir de la longueur d'un arc de 1° de latitude.

Boscovich doit résoudre un système de 5 équations à 2 inconnues : la longueur d'un arc de 1° de l'équateur et la différence entre les longueurs de deux arcs de 1° de méridien pris l'un au pôle, l'autre à l'équateur.

Confronté, comme Mayer l'avait été avant lui, à un système surdéterminé (comportant plus d'équations que d'inconnues), il choisit en 1755 d'étudier les $\binom{5}{2} = 10$ systèmes à 2 inconnues qu'il peut en extraire et il calcule la moyenne des solutions. Mais il n'est pas satisfait, estimant que l'écart entre cette moyenne et les valeurs individuelles est trop grand pour être compatible avec la théorie newtonienne. Aussi, en 1760, il reprend le même problème à partir de deux principes :

- la somme des erreurs positives doit égaler la somme des erreurs négatives,
- la somme des erreurs, indépendamment de leur signe, doit être minimale.

Boscovich montre alors l'existence d'une solution à son problème d'une manière géométrique.

Ainsi Boscovich introduit l'idée de minimiser une somme de valeurs absolues d'erreurs. Cet apport est essentiel : pour la première fois, on propose un critère pour déterminer quand une solution approchée d'un système d'équations surdéterminé est meilleure qu'une autre. Un seuil conceptuel a donc été franchi.

En cette seconde moitié du XVIII^e siècle, un second seuil va être franchi : l'idée d'une « loi des erreurs ».

5. Une loi pour la distribution des erreurs

En 1755, Thomas SIMPSON (1710–1761) rédige une lettre, [12], au Comte de Macclesfield intitulée « *On the Advantage of Taking the Mean of a Number of Observations in Practical Astronomy* ». Ce titre est clair et ne nécessite aucune explication. Il montre que le calcul de la moyenne de plusieurs observations était une pratique courante mais dont la valeur était contestée. Le but de Simpson est de montrer que l'erreur commise sur la moyenne d'une suite de mesures d'une même grandeur est généralement inférieure à celle commise sur une mesure isolée.

L'idée de Simpson consiste à supposer connues les erreurs possibles sur une valeur observée, ainsi que la probabilité de chacune de ces erreurs. Autrement dit, il part d'une distribution de probabilité des erreurs en admettant, ET C'EST CELA QUI EST IMPORTANT, que cette distribution est indépendante de la « vraie valeur ».

Pour mettre son idée en pratique, Simpson considère plusieurs types de lois d'erreurs possibles. Se plaçant dans un cas discret, il considère que les erreurs peuvent prendre un nombre fini de valeurs en progression arithmétique centrée sur 0,

$$-v, -v + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, v - 1, v$$

avec des probabilités proportionnelles soit aux éléments de la suite géométrique

$$r^{-v}, \dots, r^{-1}, 1, r, \dots, r^v \tag{1}$$

soit à ceux de la suite

$$r^{-v}, 2r^{-v+1}, \dots, vr^{-1}, v + 1, vr, \dots, 2r^{v-1}, r^v \tag{2}$$

Dans ces deux dernières suites, le nombre r est un réel positif quelconque.

Ces distributions de probabilité ne sortent pas du néant. On constate en effet que Simpson s'intéresse surtout (lorsqu'il traite un exemple) au cas $r = 1$. Dans ce cas, la distribution (1) est une distribution uniforme. Quant

à la distribution (2), c'est une distribution triangulaire qui correspond à la somme de deux variables aléatoires uniformes indépendantes.

Par exemple si les erreurs de mesure de deux grandeurs peuvent valoir $-5, -4, \dots, 0, 1, \dots, 5$, les erreurs sur la somme de ces mesures peuvent varier de -10 à $+10$. Le nombre de façons d'obtenir une somme donnée peut se lire dans le tableau suivant :

-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Pour justifier l'intitulé de sa lettre, Simpson considère une distribution d'erreurs de type (2), proportionnelle à la suite $1, 2, \dots, 5, 6, 5, \dots, 1$ (nous noterons E la variable aléatoire correspondante) et calcule la distribution d'une moyenne de 6 erreurs de ce type (et nous notons \bar{E} la variable aléatoire associée). Il compare alors $\mathbb{P}(|E| \leq h)$ et $\mathbb{P}(|\bar{E}| \leq h)$ pour $h = 1$ et $h = 2$, dressant ainsi le tableau suivant :

h	$\mathbb{P}(E \leq h)$	$\mathbb{P}(\bar{E} \leq h)$
1	0,444	0,725
2	0,667	0,967

Il en conclut

[...] the taking of the mean of a number of observations, greatly diminishes the chances for all the smaller errors, and cuts off almost all possibility of any great ones, which last consideration, alone seems sufficient to recommend the use of the method, not only to astronomers, but to all others concerned in making of experiments of any kind.

Non seulement Simpson introduit le concept de distribution d'erreurs mais en plus, en calculant la distribution de probabilité d'une somme (d'un petit nombre) de variables aléatoires uniformes indépendantes, il fait un premier pas en direction du théorème central-limite : le chemin commence à se dessiner qui aboutira à la loi normale.

À partir de 1772, Laplace s'intéresse aussi à la distribution des erreurs. Sa recherche se concrétise en plusieurs mémoires ([5],[6]) où il adopte le point de vue de Boscovich, cherchant à minimiser la somme des valeurs absolues des erreurs.

Laplace s'attaque alors au choix du paramètre de position (qu'il appelle le « milieu ») susceptible de représenter au mieux un certain nombre d'observations. Comme précédemment, il s'agit d'observations astronomiques, en l'occurrence de mesures de temps. Nous parlerons dans la suite d'« instants ». Pour éviter des difficultés techniques, il se limite à trois observations a , b et c . Il pose le problème :

Déterminer le milieu v que l'on doit prendre entre trois observations données d'un même phénomène.

Comme Simpson, Laplace fait dépendre ce milieu du choix d'une courbe $y = \varphi(x)$ de distribution des erreurs et il suppose que la probabilité d'une observation x ne dépend pas de la valeur de v mais seulement de la différence $x - v$.

Procédant de façon quasi-axiomatique, Laplace ne choisit pas immédiatement la fonction φ , mais en énonce des propriétés qu'il juge indispensables :

1. la courbe doit être symétrique autour de la vraie valeur v ,
2. elle doit tendre vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$,
3. l'aire sous la courbe doit être l'unité.

Sans préciser plus la fonction, il démontre alors l'égalité de deux valeurs, qu'il appelle respectivement le milieu de probabilité et le milieu d'erreur ou milieu astronomique.

Le milieu de probabilité est ce que nous appellerions la médiane de la distribution :

l'instant tel qu'il soit également probable que le véritable instant du phénomène tombe avant ou après

Le milieu d'erreur est

l'instant tel qu'en le prenant pour milieu, la somme des erreurs à craindre, multipliées par leur probabilité soit un minimum.

En d'autres termes, Laplace démontre que la médiane est la valeur de x qui minimise l'espérance de la valeur absolue de l'erreur, c'est-à-dire de $\varphi(a-x)|a-x| + \varphi(b-x)|b-x| + \varphi(c-x)|c-x|$.

Cette propriété de minimum ne constitue pas en soi une justification de ce que la médiane est le « meilleur milieu possible ». Aussi dans son mémoire de 1781, [6], Laplace s'efforce de justifier le choix de la médiane :

[...] cette condition est que, en fixant à ce point l'instant du phénomène, l'erreur qui en résulte soit un minimum; or comme dans la théorie ordinaire des hasards, on évalue l'avantage en faisant une somme des produits de chaque avantage à espérer, multiplié par la probabilité de l'obtenir, de même ici l'erreur doit s'estimer par la somme des produits de chaque erreur à craindre, multipliée par sa probabilité; le milieu qu'il faut choisir doit donc être tel que la somme de ces produits soit moindre que pour tout autre instant.

Ce sont donc les jeux et l'espérance de gain qui servent à cette époque de modèle à Laplace pour choisir le milieu d'un ensemble d'observations.

Il restait à choisir explicitement une courbe d'erreurs. Pour ne pas être totalement arbitraire, ce choix devait s'inspirer de l'une ou l'autre considération théorique. Dans ses mémoires de 1774 et 1781, Laplace effectue des choix différents.

En 1774, il exclut assez rapidement de choisir soit une distribution uniforme, soit une distribution triangulaire. Mais le calcul des probabilités ayant toujours été jusqu'alors basé sur un principe d'équiprobabilité, il fallait trouver quelque chose qui soit constant. Il écrit alors

Comme nous n'avons aucune raison de supposer une loi différente pour les ordonnées et pour leurs différences, il résulte que nous devons, en tenant compte des règles des probabilités, supposer que le rapport de deux différences consécutives infiniment petites est égal à celui des ordonnées correspondantes.

Autrement dit, Laplace décide que le rapport $\frac{D\varphi(x)}{\varphi(x)}$ doit être constant, ce qui l'amène à la fonction $\varphi(x) = Ce^{-m|x|}$, où m est une constante positive (puisque la courbe doit être décroissante). La constante C est choisie de façon à avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$. Ainsi, $\varphi(x) = \frac{m}{2}e^{-m|x|}$.

Si on détaille les calculs de calculer la médiane associée à cette distribution d'erreurs, on comprend alors pourquoi Laplace s'est borné à une suite de trois observations. Tout en commettant une erreur qu'il ne détecte pas, il arrive au bout de ses calculs mais se rend compte que sa méthode est inutilisable en pratique.

En 1776, un mémoire de Joseph-Louis LAGRANGE (1736–1813), [4], l'amène à reprendre la question. Laplace est en désaccord avec Lagrange qui ne s'occupait que de la moyenne arithmétique. Dans des mémoires de

1777 et 1781, il propose une autre loi de distribution des erreurs :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a} \log \frac{a}{|x|}$$

où a est une borne supérieure des erreurs possibles.

Dans les années qui suivirent, Laplace allait mettre au point la technique connue sous le nom de « Transformation de Laplace » et l'appliquer au calcul des probabilités. Il allait aussi établir le théorème « central-limite » qui généralise le théorème de De Moivre concernant l'approximation normale de la loi binomiale. Lorsqu'il publia dans [7] la démonstration du théorème central-limite, Laplace ignorait encore une publication antérieure de Gauss. Comme on le verra plus loin, ce travail de Gauss allait permettre à Laplace de revenir encore sur le sujet et quasiment le « tuer ». Mais entretemps, Legendre avait décrit la MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

6. Legendre et les moindres carrés

La méthode des moindres carrés est explicitée pour la première fois par Adrien-Marie LEGENDRE (1752–1833) en 1805, [10]. Legendre s'exprime comme suit :

Dans cette circonstance [...] où l'on cherche à déterminer quelques éléments importants, il entre nécessairement de l'arbitraire dans la distribution des erreurs, et on ne doit pas s'attendre que toutes les hypothèses conduiront exactement aux mêmes résultats; mais il faut surtout faire en sorte que les erreurs extrêmes, sans avoir égard à leurs signes, soient renfermées dans les limites les plus étroites qu'il est possible.

De tous les principes qu'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exact, ni d'une application plus facile, que celui [...] qui consiste à rendre minimum la somme des carrés des erreurs. Par ce moyen, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui, empêchant les extrêmes de prévaloir, est très propre à faire connaître l'état du système le plus proche de la vérité.

La méthode décrite par Legendre est opérationnelle : nous pouvons effectivement calculer les valeurs des inconnues qui minimisent la somme des carrés des erreurs, y compris dans le cas général.

En effet, si x est une solution approchée du système $Ax = b$, la somme des carrés des erreurs est $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j - b_i \right)^2$, (c'est-à-dire le carré de la norme du vecteur $Ax - b$). En annulant les dérivées partielles par rapport à chacune des variables x_j , on obtient un système $p \times p$ d'équations (dites normales) que l'on résout en effet normalement :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{i1} \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j - b_i \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n a_{i2} \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j - b_i \right) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ip} \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j - b_i \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Remarquons au passage que toutes les équations de ce système sont des combinaisons linéaires de celles du système $Ax = b$. Apparemment donc la question est résolue. Mais Legendre se contente d'affirmer que cette méthode est la plus générale, la plus exacte. Avait-il raison? EN QUOI sa méthode est-elle meilleure que les autres?

7. Intervention de Gauss

Dans [3], Carl-Friedrich GAUSS (1777–1855) introduit une nouvelle fonction comme distribution de probabilité des erreurs : la « loi normale » (comme par hasard, souvent appelée « loi de Gauss »). Cette fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

était connue depuis Abraham DE MOIVRE (1667–1754) qui l'avait utilisée pour calculer des valeurs approchées de sommes de coefficients binômiaux. La suite de l'histoire devait montrer qu'en réalité, De Moivre avait montré que lorsque le nombre d'épreuves tend vers l'infini, une distribution binômiale tend toujours vers une distribution normale.

Comme Laplace, Gauss impose des axiomes à la distribution de probabilité des erreurs. Mais à la différence de Laplace, il ne finit pas par sortir de sa poche la fonction qu'il choisit, il la détermine à partir de ses axiomes. Ceux-ci ressemblent fort à ceux de Laplace :

En notant $\varphi(\Delta)$ la probabilité qu'une erreur Δ soit commise lors de la mesure d'une grandeur z , alors la fonction φ doit vérifier les conditions suivantes :

1. $\varphi(\Delta)$ est maximale pour $\Delta = 0$ (ce qui correspond à la valeur exacte de z).
2. $\varphi(-\Delta) = \varphi(\Delta)$
3. $\varphi(\Delta)$ est analytique
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = 1$

Pour déterminer une distribution de probabilité des erreurs, Gauss se pose le problème suivant :

Admettons que la grandeur z ait fait l'objet de n mesures de résultats x_1, \dots, x_n . Nous allons choisir la moyenne $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ comme valeur approchée de z . Comment choisir la distribution de probabilité des erreurs de façon que cette valeur moyenne soit la valeur la plus probable de z ?

Un tel énoncé doit faire l'objet d'une modélisation.

La valeur exacte de z étant notée ... z , les erreurs qui affectent les mesures x_1, \dots, x_n sont $z - x_1, \dots, z - x_n$. Clairement, le nombre $\varphi(z - x_i)$ est la probabilité d'obtenir la valeur x_i en mesurant z . Les différentes mesures étant supposées indépendantes, la probabilité d'obtenir les n mesures x_1, \dots, x_n vaut

$$\varphi(z - x_1)\varphi(z - x_2) \cdots \varphi(z - x_n)$$

La valeur de z est inconnue, mais nous voulons que $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ en soit la valeur la plus probable. Cela signifie que la probabilité d'obtenir les n mesures x_1, \dots, x_n doit être maximum pour $z = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Une fois cette modélisation admise, le reste n'est plus qu'une question de calcul. Pour fixer les idées, choisissons $n = 3$. Puisque la fonction φ est supposée analytique, nous pouvons rechercher les maxima possibles de $\varphi(z - x_1)\varphi(z - x_2) \cdots \varphi(z - x_n)$ par dérivation.

On obtient facilement l'équation

$$\frac{\varphi'(z - x_1)}{\varphi(z - x_1)} + \frac{\varphi'(z - x_2)}{\varphi(z - x_2)} + \frac{\varphi'(z - x_3)}{\varphi(z - x_3)} = 0$$

En posant $u_i = z - x_i$ et $F(u) = \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$, il vient $F(u_1) + F(u_2) + F(u_3) = 0$. Vu la relation $\varphi(-u) = \varphi(u)$, on a $F(u) = -F(-u)$, de sorte que l'équation

devient

$$F(u_1) + F(u_2) = F(-u_3)$$

Nous voulons que le maximum de $\varphi(z - x_1)\varphi(z - x_2) \cdots \varphi(z - x_n)$ soit atteint pour $z = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ donc pour $u_1 + u_2 + u_3 = 0$. La fonction F doit donc vérifier la condition

$$F(u_1) + F(u_2) = F(u_1 + u_2)$$

et cela quels que soient u_1 et u_2 . On sait que les seules fonctions continues ayant une telle propriété sont les homothéties : $F(u) = Cu$ où C est une constante quelconque.

Ainsi la fonction φ vérifie l'équation différentielle $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = Cu$ dont on connaît les solutions : $\varphi(u) = Ae^{C \frac{u^2}{2}}$ où A est une seconde constante quelconque. Comme l'intégrale de φ entre $-\infty$ et $+\infty$ doit converger, la constante C est nécessairement négative, nous la noterons $-h^2$ et comme cette intégrale doit valoir 1, il vient $A = \frac{h}{\sqrt{2\pi}}$.

Ainsi

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-h^2 \Delta^2 / 2}$$

De cette formule, Gauss déduit alors le principe des moindres carrés. Car à présent, il peut écrire que la probabilité d'obtenir les mesures x_1, \dots, x_n vaut

$$\left(\frac{h}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^n (z - x_i)^2}$$

et clairement, cette quantité est maximale si la somme $\sum_{i=1}^n (z - x_i)^2$ est minimale.

Gauss vient de montrer que la seule distribution de probabilités des erreurs envisageable est la distribution normale ... si on considère que la moyenne d'une série de mesures est la « meilleure approximation de la valeur exacte ». Mais ceci est-il bien établi? Laplace reviendra bientôt sur le sujet et le règlera définitivement.

Auparavant, notons encore que dans son mémoire [3], Gauss relève un défaut a priori inattendu dans la méthode de Boscovich-Laplace :

Laplace se sert, pour la résolution d'équations linéaires en nombre plus grand que les inconnues, d'un autre principe, proposé d'abord par Boscovich,

savoir, que la somme des valeurs absolues des différences devienne minimum. On peut facilement démontrer que le système des valeurs des inconnues trouvé par ce seul principe doit nécessairement ... satisfaire à autant d'équations, prises parmi les proposées qu'il y a d'inconnues, de sorte que les autres équations ne sont employées que pour décider le choix que l'on doit faire.

Cette affirmation n'est pas démontrée dans le texte de Gauss. Considérons un cas très particulier, celui d'un système d'équations en une seule inconnue, tous les coefficients de celle-ci valant 1 :

$$\begin{cases} x = b_1 \\ \vdots \\ x = b_n \end{cases}$$

Appliquer la méthode de Boscovich revient à chercher une valeur de x pour laquelle la somme $|x - b_1| + \dots + |x - b_n|$ est minimum. Le résultat est la médiane, et nous savons très bien que la médiane d'une suite finie de nombres est un d'entre eux. Une des équations est donc satisfaite exactement.

Dans le cas général, il convient de montrer que étant donné un système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où $n > p$, le minimum de la fonction erreur absolue totale

$$e(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^n |a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p - b_i|$$

est atteint en au moins un point (x_1, \dots, x_p) qui, par ailleurs, vérifie EXACTEMENT p des équations données.

Nous nous limiterons ici au cas de la résolution d'un système de n équations à 2 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \vdots \\ a_ix + b_iy = c_i \\ \vdots \\ a_nx + b_ny = c_n \end{array} \right. \quad (4)$$

mais le cas général se traite de façon analogue.

Pour tout i , nous poserons $f_i(x, y) = a_ix + b_iy - c_i$ et, en utilisant la notation vectorielle, nous écrirons parfois $\vec{p} = (x, y)$, et $f_i(\vec{p}) = f_i(x, y)$. L'erreur absolue totale sera donc donnée par

$$e(\vec{p}) = e(x, y) = \sum_{i=1}^n |f_i(x, y)|$$

Nous devons montrer que son minimum est atteint en au moins un point qui vérifie deux des équations (4).

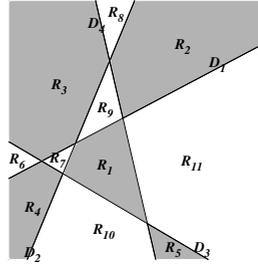
Notons D_i la droite d'équation $f_i(x, y) = a_ix + b_iy - c_i = 0$. Les n droites découpent dans le plan un certain nombre N de régions ($N \leq \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$). Nous noterons R_1, \dots, R_N ces régions.

Dans chacune des régions R_j , chacune des fonctions f_i garde un signe constant (à ceci près quelle s'annule sur l'intersection $D_i \cap R_j$ qui est soit vide, soit une partie du bord de R_j). Nous poserons $\varepsilon_{ij} = +1$ si f_i est positive à l'intérieur de R_j et $\varepsilon_{ij} = -1$ si f_i est négative à l'intérieur de R_j . De cette façon, quels que soient i et j , à l'intérieur de la région R_j , on a $|f_i(x, y)| = \varepsilon_{ij}f_i(x, y)$. De plus, cette formule est encore vraie sur le bord de R_j . Par conséquent, dans R_j :

$$\begin{aligned} e(x, y) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}f_i(x, y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}(a_ix + b_iy - c_i) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}a_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}b_i \right) y - \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}c_i \right) \\ &= A_jx + B_jy - C_j \end{aligned}$$

Nous avons ainsi établi un premier point : sur chaque région R_j , la fonction $e(x, y)$ est une fonction affine.

Considérons à présent une des régions R_j . C'est une intersection de demi-plans. Son bord est donc une ligne polygonale qui peut être fermée (la ligne est alors un polygone, la région R_j est bornée) et qui peut être ouverte (la région R_j n'est pas bornée). Le graphique ci-contre est un exemple correspondant au cas $n = 4$.



Quelles soient bornées ou non, toutes les régions R_j sont des ensembles convexes puisque ce sont des intersections de demi-plans. Cette remarque constitue le second point de notre argumentation.

Nous faisons fonctionner ensemble les deux informations obtenues en nous rappelant que sur un segment de droite, toute fonction affine atteint son maximum en une extrémité et son minimum en l'autre. Par exemple, considérons un segment $[\vec{p}_1, \vec{p}_2]$ inclus à une des régions R_j . Non seulement tout point $\vec{p} = (x, y)$ de ce segment appartient à R_j , mais de plus \vec{p} peut s'écrire comme une combinaison convexe de \vec{p}_1 et \vec{p}_2 : on a

$$\vec{p} = s \cdot \vec{p}_1 + (1 - s) \cdot \vec{p}_2$$

pour une valeur de s comprise entre 0 et 1. En coordonnées, nous écrirons

$$\begin{cases} x = sx_1 + (1 - s)x_2 \\ y = sy_1 + (1 - s)y_2 \end{cases}$$

Mais alors :

$$\begin{aligned} e(x, y) &= A_j x + B_j y - C_j \\ &= A_j (sx_1 + (1 - s)x_2) + B_j (sy_1 + (1 - s)y_2) - (sC_j + (1 - s)C_j) \\ &= se(x_1, y_1) + (1 - s)e(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Comme $0 \leq s \leq 1$, on en déduit $e(x, y) \in [e(x_1, y_1), e(x_2, y_2)]$.

Il résulte de tout cela que le minimum de la fonction $e(x, y)$ sur R_j est atteint en un des sommets de R_j :

1. Ce minimum ne peut être atteint en un point intérieur à R_j puisqu'un tel point \vec{p} appartient à un segment $[\vec{p}_1, \vec{p}_2]$ où \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont des points de la ligne polygonale constituant le bord de R_j .
2. Supposons qu'un segment $[\vec{p}_1, \vec{p}_2]$ soit un côté de R_j . Alors le minimum de $e(x, y)$ sur ce côté est atteint en une de ses extrémités, qui est un sommet de R_j .

3. Supposons qu'une demi-droite d est un côté de R_j . Alors le minimum de $e(x, y)$ sur d est atteint en l'origine de d puisque toute fonction affine tend vers l'infini lorsque (x, y) tend vers l'infini. L'origine de d est aussi un sommet de R_j .
4. Le minimum de $e(x, y)$ sur R_j est donc le minimum de $e(x, y)$ sur les sommets de R_j . Comme ces sommets sont en nombre fini, le minimum est atteint en un sommet de R_j .

Il reste à recoller les régions R_j : le minimum de $e(x, y)$ (sur tout le plan) est le minimum des minima atteints sur les régions R_j . C'est donc le minimum des valeurs prises par $e(x, y)$ en tous les sommets de toutes les régions R_j . Comme les n droites D_i ont au maximum $\frac{n(n-1)}{2}$ points d'intersection deux à deux, le minimum de $e(x, y)$ est atteint en l'un d'entre eux (au moins), ce qui entraîne, comme l'annonçait Gauss, que (au moins) deux des équations (4) sont satisfaites exactement au point où le minimum de $e(x, y)$ est atteint.

8. Le théorème central-limite

En 1810, Laplace présente à l'Académie un mémoire, [7] dans lequel il établit le théorème « central-limite ». D'après [13] ⁽¹⁾, il n'a pas encore pris connaissance à cette date du travail de Gauss, bien que celui-ci soit daté de 1809. Peu après, il découvre ce travail et rédige en hâte un « Supplément » à son article précédent, [8]. Lorsqu'en 1812, il publiera la première édition de son ouvrage fondamental, [9], le théorème central-limite constituera la première partie d'un chapitre intitulé *De la probabilité des résultats moyens d'un grand nombre d'observations et des résultats moyens les plus avantageux*, ce qui montre l'utilité principale que Laplace accordait alors à son résultat.

En langage moderne, le théorème central-limite s'énonce comme suit :

Si $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et de variance finie, alors lorsque n tend vers l'infini, la distribution de probabilité de la somme $X_1 + \dots + X_n$ converge vers une distribution normale.

Laplace ne s'exprime évidemment pas de cette manière. La notion générale de variable aléatoire lui est inconnue, *a fortiori* celle de « variables aléatoires

⁽¹⁾ Au passage, mentionnons le fait que l'ouvrage de Stigler a constitué une des principales sources exploitées pour la rédaction de cet article.

indépendantes ». Quant à la variance... De plus, il reste dans un cadre discret. Lisons les dix premières lignes du livre II, chapitre IV de [9] :

Considérons maintenant les résultats moyens d'un grand nombre d'observations dont on connaît la loi de facilité ⁽²⁾ des erreurs. Supposons que, pour chaque observation, les erreurs puissent être également

$$-n, -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1, n$$

La probabilité de chaque erreur sera $\frac{1}{2n+1}$. Si l'on nomme s le nombre des observations, le coefficient de $e^{\ell\pi i}$ ⁽³⁾ dans le développement du polynôme

$$(e^{-n\pi i} + e^{-(n-1)\pi i} + e^{-(n-2)\pi i} + \dots + e^{-\pi i} + 1 + e^{\pi i} + \dots + e^{n\pi i})^s$$

sera le nombre des combinaisons dans lesquelles la somme des erreurs est ℓ .

Laplace calcule alors le coefficient de $e^{\ell\pi i}$ et trouve

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1)2s\pi}} e^{-\frac{\frac{3}{2}\ell^2}{n(n+1)s}}$$

Il n'est pas nécessaire d'avoir les mêmes capacités calculatoires que Laplace pour interpréter cette expression : la variable aléatoire uniforme X , utilisée par Laplace, représente l'erreur d'observation, la somme de s variables aléatoires indépendantes et distribuées comme X représente donc la somme des erreurs. Nous savons alors que la variance de X est $\sigma^2(X) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n k^2 = \frac{n(n+1)}{3}$ et que celle de S est $\sigma^2(S) = s\sigma^2(X) = \frac{n(n+1)s}{3}$. Laplace a donc établi la formule que nous écririons

$$\mathbb{P}(S = \ell) = \frac{1}{\sigma(S)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ell/\sigma(S))^2}$$

Moyennant le changement de variable $\ell = \sqrt{2t}\sigma(S)$, on obtient $\mathbb{P}(S = \ell) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{\sqrt{2}\sigma(S)} = t\right) = \frac{1}{\sigma(S)\sqrt{2\pi}} e^{-t^2}$. La probabilité pour que la somme des erreurs soit comprise dans les limites $+\sqrt{2T}\sigma(S)$ et $-\sqrt{2T}\sigma(S)$ s'obtient alors en

⁽²⁾ On note ici l'usage du mot *± facilité* au lieu de *± probabilité*.

⁽³⁾ Laplace n'utilise ni la lettre i pour l'unité imaginaire, qu'il note $\sqrt{-1}$, ni la lettre e pour la constante 2.71828... qu'il note c . Nous utiliserons néanmoins les notations modernes.

sommant le membre de droite pour les valeurs de t comprises entre $-T$ et T , le paramètre t variant d'après sa définition par pas de $\frac{1}{\sigma(s)\sqrt{2}}$:

$$\mathbb{P}(-\sqrt{2}T\sigma(s) \leq s \leq +\sqrt{2}T\sigma(s)) = \sum_{|t| \leq T} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma(s)\sqrt{2}} e^{-t^2}$$

Le facteur $\frac{1}{\sigma(s)\sqrt{2}}$ étant la distance entre deux valeurs consécutives de t , lorsque s tend vers l'infini, le membre de droite tend vers l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-T}^T e^{-t^2} dt$ qu'il écrit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt$$

De plus, Laplace ajoute immédiatement

Cette expression a lieu encore dans le cas de n infini.

Cette fois, il effectue un autre passage à la limite en considérant que la distribution de probabilité d'erreurs initiale est continue et uniforme sur un intervalle $[-a, a]$.

Il lui reste enfin à étendre son théorème au cas des distributions de probabilités d'erreurs non uniformes, ce qui ne lui pose aucun problème, bien qu'implicitement, il suppose finies les intégrales $\int \varphi(x) dx$ et $\int x^2 \varphi(x) dx$, calculées sur le domaine de définition de la fonction φ , distribution de probabilité des erreurs. Le théorème central-limite est ainsi établi dans toute la généralité qu'il pouvait avoir à l'époque. Laplace va l'utiliser pour justifier la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire pour expliquer pourquoi cette méthode fournit le résultat « le plus avantageux ».

9. La justification de la méthode des moindres carrés

Donnons d'abord la parole à Laplace (voir [9]) :

Lorsque l'on veut corriger un élément déjà connu à fort peu près, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, on forme des équations de condition [...]

Quand on n'a qu'un élément à déterminer, cette méthode ne laisse aucun embarras; mais lorsque l'on doit corriger à la fois plusieurs éléments,

il faut avoir autant d'équations finales formées par la réunion de plusieurs équations de condition, et au moyen desquelles on détermine par l'élimination les corrections des éléments. Mais quelle est la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition, pour former les équations finales? C'est ici que les observateurs s'abandonnaient à des tâtonnements arbitraires, quoique déduits des mêmes observations.

Pour éviter ces tâtonnements, M. Legendre eut l'idée simple de considérer la somme des carrés des erreurs des observations, et de la rendre un minimum, ce qui fournit directement autant d'équations finales, qu'il y a d'éléments à corriger. [...] M. Gauss, dans sa Théorie du mouvement elliptique, a cherché à rattacher cette méthode à la Théorie des Probabilités, en faisant voir que la même loi des erreurs des observations, qui donne généralement la règle du milieu arithmétique entre plusieurs observations, admise par les observateurs, donne pareillement la règle des moindres carrés des erreurs des observations, et c'est ce qu'on a vu dans le n° 23.

Mais, comme rien ne prouve que la première de ces règles donne le résultat le plus avantageux, la même incertitude existe par rapport à la seconde.

Laplace rappelle ensuite le principe appliqué déjà par Mayer : remplacer le système de n équations en p inconnues ($n > p$) par un système de p équations qui sont toutes des combinaisons linéaires des équations du système initial. Il s'agit donc de montrer pourquoi et en quoi le choix résultant de la méthode de Legendre est meilleur que tout autre choix de ces combinaisons linéaires. Le paragraphe suivant montre qu'il va exploiter le théorème central-limite.

[...] il est visible qu'il faut choisir les systèmes de facteurs ⁽⁴⁾, de sorte que l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur chaque élément soit un minimum; l'erreur moyenne étant la somme des produits de chaque erreur par sa probabilité. Lorsque les observations sont en petit nombre, le choix de ces systèmes dépend de la loi des erreurs de chaque observation. Mais, si l'on considère un grand nombre d'observations, ce qui a lieu le plus souvent dans les recherches astronomiques, ce choix devient indépendant de cette loi, et [...] l'Analyse conduit alors directement aux résultats de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations.

Ainsi cette méthode qui n'offrait d'abord que l'avantage de fournir sans tâtonnement les équations finales nécessaires à la correction des éléments, donne en même temps les corrections les plus précises, du moins lorsqu'on

⁽⁴⁾ c'est-à-dire les combinaisons linéaires.

ne veut employer que des équations finales qui soient linéaires, condition indispensable, lorsque l'on considère à la fois un grand nombre d'observations; autrement, l'élimination des inconnues et leur détermination seraient impraticables.

Il s'agit de résoudre approximativement un système surdéterminé. Laplace ne traite explicitement que les cas où le nombre d'inconnues est soit 1, soit 2, tout en ajoutant à la fin il est visible que l'analyse précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'éléments. Nous allons schématiser sa démarche dans le cas de deux inconnues, et donner quelques détails dans le cas d'une inconnue.

Le système surdéterminé à résoudre est constitué de s équations linéaires en z et z' :

$$\begin{cases} p^{(0)}z + q^{(0)}z' = \alpha^{(0)} \\ \vdots \\ p^{(s-1)}z + q^{(s-1)}z' = \alpha^{(s-1)} \end{cases}$$

Les seconds membres de ces équations, $\alpha^{(0)}, \dots, \alpha^{(s-1)}$ sont des valeurs expérimentales, les coefficients de z et z' sont connus. Les différences

$$\varepsilon^{(0)} = p^{(0)}z + q^{(0)}z' - \alpha^{(0)}, \dots, \varepsilon^{(s-1)} = p^{(s-1)}z + q^{(s-1)}z' - \alpha^{(s-1)}$$

sont les erreurs d'observation.

Le système d'équations peut s'écrire

$$\begin{cases} \varepsilon^{(0)} = 0 \\ \vdots \\ \varepsilon^{(s-1)} = 0 \end{cases}$$

Le problème consiste à expliquer en quoi la méthode des moindres carrés fournit une meilleure approximation que n'importe quel autre choix de deux combinaisons linéaires des équations de ce système.

Pour répondre à une telle question, la première chose à faire est de déterminer un critère qui permette de savoir quand une approximation est meilleure qu'une autre. C'est ce que fait Laplace : il décide de rechercher

deux combinaisons linéaires

$$\left\{ \begin{array}{l} m^{(0)}\varepsilon^{(0)} + \dots + m^{(s-1)}\varepsilon^{(s-1)} = 0 \\ \vdots \\ n^{(0)}\varepsilon^{(0)} + \dots + n^{(s-1)}\varepsilon^{(s-1)} = 0 \end{array} \right.$$

telles que « l'erreur à craindre sur chaque élément z et z' soit minimum ».

En termes modernes, nous dirions que Laplace considère les erreurs sur z et z' comme des variables aléatoires, au même titre que les $\varepsilon^{(i)}$, et qu'il veut choisir les paramètres $m^{(i)}$ et $n^{(i)}$ de façon telle que leurs espérances mathématiques soient les plus faibles possibles.

Pour la lisibilité de la suite, restreignons-nous au cas d'une seule inconnue.

Le système des équations de condition s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{(0)} = p^{(0)}z - \alpha^{(0)} = 0 \\ \vdots \\ \varepsilon^{(s-1)} = p^{(s-1)}z - \alpha^{(s-1)} = 0 \end{array} \right.$$

Laplace en considère une combinaison linéaire quelconque :

$$\sum_{i=0}^{n-1} m^{(i)}\varepsilon^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} m^{(i)}(p^{(i)}z - \alpha^{(i)}) = 0$$

dont la solution est

$$\frac{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)}\alpha^{(i)}}{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)}p^{(i)}}$$

Cette solution n'étant qu'une solution approchée, Laplace note u l'erreur

$$z - \frac{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)}\alpha^{(i)}}{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)}p^{(i)}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} m^{(i)}\varepsilon^{(i)}}{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)}p^{(i)}}$$

et entreprend de déterminer la probabilité de cette erreur, lorsque les observations sont en grand nombre.

Utilisant les mêmes méthodes que dans la démonstration du théorème central-limite, il montre que, si s est grand, la probabilité pour que l'erreur

u soit comprise entre les limites 0 et u_0 est donnée par la formule

$$\mathbb{P}(0 \leq u \leq u_0) = \frac{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)} p^{(i)}}{2a\sqrt{\frac{k''\pi}{k} \sum_{i=0}^{s-1} (m^{(i)})^2}} \cdot \int_0^{u_0} e^{-\frac{ku^2 \left(\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)} p^{(i)} \right)^2}{4k''a^2 \sum_{i=0}^{s-1} (m^{(i)})^2}} du$$

où a , k , et k'' sont des constantes liées à la densité de probabilité φ des erreurs d'observation $\varepsilon^{(i)}$:

- a est la valeur maximum des erreurs $\varepsilon^{(i)}$ (φ est définie sur $[-a, a]$)
- $k = 2 \int_0^a \varphi(x) dx$
- $k'' = \int_0^a x^2 \varphi(x) dx$

Moyennant le changement de variable

$$u = 2at\sqrt{\frac{k''}{k} \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{s-1} (m^{(i)})^2}}{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)} p^{(i)}}}$$

on obtient

$$\mathbb{P}\left(0 \leq u \leq 2at_0\sqrt{\frac{k''}{k} \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{s-1} (m^{(i)})^2}}{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)} p^{(i)}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} e^{-t^2} dt$$

... et voici la loi normale !

N'oublions pas que les quantités $m^{(i)}$ figurant dans cette formule sont les paramètres que nous cherchons à déterminer pour que l'erreur u affectant le résultat z soit la plus petite possible. Notre intérêt est donc que

- pour une probabilité fixée, c'est-à-dire pour un t_0 fixé, l'intervalle

$$\left[0, 2at_0\sqrt{\frac{k''}{k} \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{s-1} (m^{(i)})^2}}{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)} p^{(i)}}}\right] \text{ soit le plus petit possible,}$$

- pour un intervalle $\left[0, 2at_0\sqrt{\frac{k''}{k} \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{s-1} (m^{(i)})^2}}{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)} p^{(i)}}}\right]$ fixé, la probabilité soit la plus grande possible, c'est-à-dire t_0 le plus grand possible.

Dans les deux cas, notre intérêt est que la fraction

$$F(m^{(0)}, \dots, m^{(s-1)}) = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{s-1} (m^{(i)})^2}}{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)} p^{(i)}}$$

ait la plus petite valeur possible. Or

$$\frac{\partial F}{\partial m^{(j)}} = \frac{m^{(j)} \sum_i m^{(i)} p^{(i)} - p^{(j)} \sum_i (m^{(i)})^2}{\sqrt{\sum_i (m^{(i)})^2} (\sum_i m^{(i)} p^{(i)})}$$

de sorte que l'annulation des dérivées partielles fournit les conditions

$$m^{(j)} \sum_i m^{(i)} p^{(i)} = p^{(j)} \sum_i (m^{(i)})^2$$

Il en résulte que les paramètres $m^{(j)}$ doivent être choisis proportionnels aux $p^{(j)}$:

$$\frac{m^{(0)}}{p^{(0)}} = \dots = \frac{m^{(s-1)}}{p^{(s-1)}} = \mu$$

et par conséquent

$$z = \frac{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)} \alpha^{(i)}}{\sum_{i=0}^{s-1} m^{(i)} p^{(i)}} = \frac{\sum_{i=0}^{s-1} p^{(i)} \alpha^{(i)}}{\sum_{i=0}^{s-1} (p^{(i)})^2}$$

Si maintenant, nous appliquons la méthode des moindres carrés à la situation considérée, nous minimisons l'expression $\sum_{i=0}^{s-1} (p^i z - \alpha^{(i)})^2$ ce qui nous fournit l'équation $2 \sum_{i=0}^{s-1} (p^i z - \alpha^{(i)}) p^{(i)} = 0$ d'où à nouveau

$$z = \frac{\sum_{i=0}^{s-1} p^{(i)} \alpha^{(i)}}{\sum_{i=0}^{s-1} (p^{(i)})^2}$$

Conclusion : Laplace a démontré que la méthode des moindres carrés est celle qui fournit la valeur approchée pour laquelle l'erreur est la plus faible pour une probabilité donnée, et cela quelle que soit la distribution de probabilité des erreurs élémentaires, mais pour autant que le nombre d'observations soit suffisamment grand pour que l'on puisse utiliser la loi normale.

Bien sûr Laplace traite aussi complètement le cas de deux inconnues et arrive à la même conclusion. Ceci clôt la discussion : la méthode des moindres carrés est complètement légitimée. Mais de plus, Laplace calcule l'erreur absolue moyenne relative à z . Il ne se contente donc pas de justifier la méthode des moindres carrés, il fournit aussi un moyen d'évaluer la précision du résultat obtenu.

Bibliographie

- [1] Joseph Adam. *Éléments de la Théorie Mathématique des Assurances*. Union Professionnelle des Entrerises d'Assurances, Bruxelles, 1976.
- [2] Henri Breny. *Introduction élémentaire aux Principes et Méthodes de la Théorie des Probabilités y compris l'Analyse Statistique*. Presses Universitaires de Bruxelles, 1969.
- [3] Carl Friedrich Gauss. *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conics Solum Ambientium*. Hamburg, 1809.
- [4] Joseph-Louis Lagrange. Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière. *Miscellanea Taurinensia*, 5 : 167–232, 1776.
- [5] Pierre-Simon Laplace. Mémoire sur la probabilité des causes par les événements. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, VI : 621–656, 1774.
- [6] Pierre-Simon Laplace. Mémoire sur les probabilités. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, pages 227–232, 1781.
- [7] Pierre-Simon Laplace. Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1^{re} série, 10 : 353–415, 1810.
- [8] Pierre-Simon Laplace. Supplément au mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1^{re} série, 10 : 559–565, 1810.
- [9] Pierre-Simon Laplace. *Théorie analytique des probabilités*. Courcier, Paris, 1820. Tome 7 des Oeuvres complètes, Gauthier-Villars, 1886.
- [10] A.-M. Legendre. *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. 1805.
- [11] SBPMef. *Statistiques*. SBPMef, Mons, 1996. Dossier d'explorations didactiques n° 6.
- [12] Thomas Simpson. On the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy. 1755.
- [13] Stephen Stigler. *The History of Statistics*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.

Les réglettes de Neper

A. GAGGERO, HEP-BEJUNE

1. Un peu d'histoire

JOHN NAPIER (1550 - 1617) est né à Merchiston Castle, près d'Édimbourg en 1550 et fréquentera l'Université de Saint-Andrews en Écosse. Son nom sera francisé en NEPER. À la fin du 16^e siècle, les sciences, comme l'astronomie, la navigation maritime et les techniques bancaires sont en plein essor. NEPER est sensibilisé par le fait que le progrès scientifique est en quelque sorte freiné par des calculs numériques longs et pénibles auxquels les savants doivent se plier pour parvenir à des résultats. Ainsi, NEPER concentra toutes ses forces au développement de méthodes susceptibles d'abrégier les calculs. En 1614, après 20 ans de recherche, il publie son système de logarithmes dans l'ouvrage *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Cet ouvrage fut suivi par *Mirifici logarithmorum canonis constructio* qui reprend le premier traité et décrit les procédés de construction des tables de logarithmes. Des logarithmes de base e que l'on appellera en français logarithmes népériens, (« $\ln(x)$ » sur les calculatrices), pour les distinguer des logarithmes en base dix, (« $\log(x)$ » sur les calculatrices).

On attribue donc à NEPER l'invention des logarithmes, mais il faut relever toutefois la contribution dans ce domaine du Suisse BÜRGI ⁽¹⁾ qui calcula une table de logarithmes entre 1603 et 1611, à Prague, mais qu'il ne publia que bien plus tard dans ses *Progress Tabulen* en 1620.

Au niveau des calculs, le passage par les logarithmes permet de remplacer les multiplications par des additions (et les divisions par des soustrac-

Adresse de l'auteur: Antoine Gaggero, Chemin de la Ciblerie, 45, 2503-Bienne. Formateur en didactique des mathématiques à la Haute École Pédagogique des cantons de BERN, JUra et NEuchâtel, courriel : antoine.gaggero@hep-bejune.ch

⁽¹⁾ JOOST (ou JOBST) BÜRGI (1552-1632), était horloger du Duc GUILLAUME IV de Hesse de 1579 à 1592. Dès 1588, il développa l'idée d'une table de logarithme. À la mort de son protecteur, il se rendit à Prague où il devint l'assistant de KEPLER. C'est là qu'il compila sa table de logarithme (en base dix) près de 10 ans avant celle de NEPER. On doit également à BÜRGI des contributions importantes aux développements des écritures décimales et des notations exponentielles. Voir *Math-Ecole* 194 (octobre 2000, pp. 24 - 31), l'article de Lucia Grugnetti : Histoire des mathématiques en Suisse.

tions) puisque le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes de chaque facteur, propriété traduite, en langage mathématique par la relation :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b.$$

Lorsque les nombres sont représentés par des segments, sur une échelle logarithmique, la relation précédente conduit à une addition de longueurs. C'est ce principe qui est à l'origine de la règle à calculer. Cet outil de calcul, avec une règle centrale coulissante fut imaginé, en 1657, par SETH PATRIDGE. Nous l'avons bien connu et utilisé, il n'y a pas si longtemps, et l'avons abandonné, vers les années 1970, dès que l'usage de la calculatrice s'est généralisé.

À l'époque de NEPER, on disposait en Europe, de l'algorithme de « multiplication musulmane » ou « per gelosia ». La multiplication per gelosia venait d'Orient et plus précisément du mathématicien arabe AL KASHI au 15^e siècle. Voici au travers d'un exemple : 642×307 , comment on s'organise pour employer cet algorithme de calcul.

	6	4	2	
1	1	1	0	3
9	0	0	0	0
7	4	2	1	7
	0	9	4	

- On prépare une grille de 3 x 3 cases (car chacun des facteurs est un nombre de 3 chiffres).
- On inscrit les deux facteurs sur les bords de la grille, l'un en haut, de gauche à droite, l'autre à droite, de haut en bas.

- Dans les cases, on écrit les produits partiels en faisant appel à son répertoire mémorisé de multiples.
- On additionne les nombres des demi-cases, partagées par leurs diagonales en commençant par la droite. S'il y a une retenue, on note le chiffre des unités et l'on transfère celui des dizaines dans la diagonale de gauche.
- Le produit est le nombre formé par les chiffres en gras, d'où $642 \times 307 = 197\,094$.

Au vu de ses avantages et de sa simplicité, cet algorithme revient à la mode actuellement comme alternative à la « multiplication en colonnes ».

2. Les réglettes de NEPER

En 1617, NEPER publie la *Rabdologia*, ouvrage dans lequel il présente, entre autres, une méthode de calcul avec des réglettes pour réduire l'effort du calculateur dans les multiplications. Cette méthode sera en usage jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle.

NEPER construit un dispositif qui permet de simplifier encore plus l'algorithme de multiplication. En effet, si, par rapport à l'algorithme « en colonnes », la technique « per gelosia » affranchit son utilisateur des problèmes de retenues dans les produits partiels, elle demande à son utilisateur de connaître ses « livrets », c'est-à-dire d'avoir mémorisé les produits de la table de multiplication jusqu'à 9×9 .

NEPER a l'idée de disposer sur des réglettes les neuf premiers multiples des nombres de 1 à 9. De cette manière, l'utilisateur doit juste savoir effectuer des additions de nombres d'un seul chiffre, tirés des multiples inscrits sur les baguettes, sans faire appel à des résultats mémorisés. Cette technique de calcul sera beaucoup utilisée jusqu'au début du 19^e siècle.

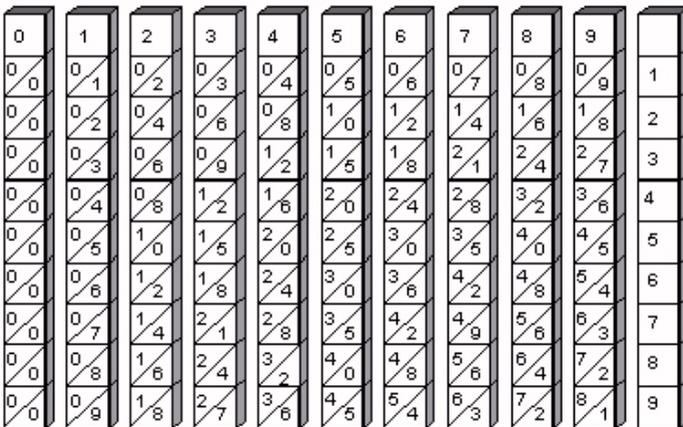


Fig 1 : Réglettes de NEPER à une face.

Pratiquement, les réglettes de Neper se présentent sous la forme d'un bâtonnet ou prisme à base carrée. Sur chacune de ses faces latérales, on peut disposer, en haut, un nombre de 1 à 9 et, au-dessous et dans

l'ordre, ses neuf premiers multiples, écrits avec le chiffre des dizaines dans la partie supérieure gauche et le chiffre des unités en bas à droite. Pour la face « 0 » on peut écrire des chiffres « 0 » ou laisser les cases vides. Une réglette supplémentaire indique le rang des multiples.

La figure 1 de la page 47 montre une représentation des réglettes de NEPER où seule une face est remplie. (En utilisant toutes les faces des bâtonnets - avec des faces différentes pour une même réglette - on peut disposer de quatre faces « 0 », quatre faces « 1 », etc., ce qui sera utile pour les multiplications où l'un des facteurs comprend plusieurs fois le même chiffre.)

3. Exemples d'utilisation

		2	9	5
1	0	2	0	0
2	0	4	1	0
3	0	6	2	1
4	0	8	3	2
5	1	0	4	3
6	1	2	5	4
7	1	4	6	5
8	1	6	7	6
9	1	8	8	7

1) Calculer 295×7 .

On place côte à côte les réglettes « 2 », « 9 » et « 5 ».

On repère la ligne « 7 » par la réglette des rangs des multiples.

On additionne en diagonales les chiffres repérés, en commençant par la droite :

5 devient le chiffre des unités, $3 + 3 = 6$ donne le chiffre des dizaines, $6 + 4 = 10$ donne « 0 » comme chiffre des centaines, avec une retenue de 1 pour la diagonale suivante, $1 + 1 = 2$, donne le chiffre des milliers.

Résultat : $295 \times 7 = 2065$.

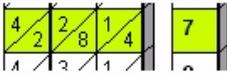
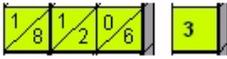
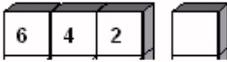
		8	0	8	9
1	0	8	0	0	9
2	1	6	0	1	8
3	2	4	0	2	7
4	3	2	0	3	6
5	4	0	0	4	5
6	4	8	0	4	4
7	5	0	1	5	3

2) Calculer 6×8089 .

Le chiffre des unités est 4.

$5 + 8 = 13$, je note 3 pour les dizaines et je retiens 1, $1 + 4 + 0 = 5$, chiffre des centaines, $0 + 8 = 8$, chiffre des milliers, 4 est le chiffre des dizaines de milliers.

Résultat : $6 \times 8089 = 48534$.



3) Calculer 37×642 .

La ligne « 3 » donne : $3 \times 642 = 1926$

La ligne « 7 » donne : $7 \times 642 = 4494$

Il faut rassembler ces deux résultats partiels en tenant compte que l'on a 3 dizaines et 7 unités : $19260 + 4494 = 23754$.

Une autre solution est de recopier les deux lignes en position adjacentes et constituer un tableau correspondant à l'algorithme per gelosia. (Voir plus loin)

4. Utilisation des réglettes de Neper en classe

(Voici un extrait du compte rendu de deux de mes étudiants, VIRGINIE ZWAHLEN et NICOLAS VARIN, sur une pratique des réglettes de NEPER lors de leur stage dans une classe de 4^e :

Le programme de mathématiques de 4P ⁽²⁾ comporte un chapitre intitulé *Des problèmes pour connaître la multiplication*. Une partie de ce thème prévoit d'aborder la technique dite « per gelosia », qui consiste à disposer les facteurs du produit, horizontalement et verticalement puis d'additionner, en diagonale, les cases avec les multiples correspondants.

Afin d'aborder cette nouvelle notion, nous avons décidé d'employer du matériel manipulable : les bâtons de NEPER, une sorte d'ancienne calculatrice formée traditionnellement par des bâtons en bois.

Les bâtonnets de bois ($20 \times 2 \times 2$ cm) ont été découpés par les adultes, qui ont aussi tracé les diagonales et les différents traits présents sur le matériel. Les enfants se sont contentés d'inscrire les différents multiples, tout d'abord au crayon de papier, et, après vérification, ils ont pu écrire au propre par-dessus. Ensuite, nous avons expliqué aux enfants le principe des bâtons de NEPER, qu'ils ont tout de suite compris.

Par groupes de 4, ils pouvaient essayer librement toutes les multiplications qui leur venaient à l'esprit. Pour terminer,

⁽²⁾ En suisse, l'organisation scolaire est du ressort des cantons. Dans le canton de Berne, les élèves de 4P auront tous dix ans révolus dans le courant de cette quatrième année primaire.

les élèves ont pu appliquer la stratégie sur des fiches entraînant la technique « per gelosia », qui est similaire à celle employée avec le matériel conçu. Cela a permis aux enfants d'acquérir rapidement cette technique et de découvrir une alternative intéressante à la multiplication traditionnelle en colonne.

Voici le genre d'exercices proposés aux élèves. Ceux qui ont choisi les réglettes de NEPER ont assemblé les bons bâtons, puis copié la ligne 8 et enfin appliqué l'algorithme expliqué ci-dessus. Les autres ont compris le système et utilisé leurs connaissances du calcul réfléchi et des livrets :

×	5	7	0	9
8				

Donc

$$8 \times 5\,709 = \underline{\hspace{2cm}}$$

5. Réglettes de NEPER et algorithme « per gelosia »

Effectuer le produit $83 \times 2\,719$ avec les réglettes de NEPER et « per gelosia » :

avec les réglettes de NEPER

×	2	7	1	9
8	1 6	5 6	0 8	7 2
3	0 6	2 1	0 3	2 7

« per gelosia »

	2	7	1	9	
2	1 6	5 6	0 8	7 2	8
2	0 6	2 1	0 3	2 7	3
	5	6	7	7	

Voici la situation selon que l'élève prend l'option de calculer avec les réglettes de NEPER ou avec la méthode « per gelosia ».

- S'il choisit « per gelosia », il appliquera la méthode comme le montre le tableau ci-dessus.
- S'il choisit les réglettes de NEPER, il va sélectionner les bâtons 2, 7, 1, 9, puis recopier les lignes significatives 8 et 3. Que va-t-il faire ensuite ?
 - Il peut accoler ces deux lignes dans un tableau et se ramener à une situation qu'il connaît, à savoir la méthode « per gelosia ». Cette option est illustrée ci-dessus.
 - Par contre s'il prend l'option de traiter chaque ligne de manière indépendante, alors il obtiendra les deux résultats partiels suivants : $8 \times 2\,719 = 21\,752$ et $3 \times 2\,719 = 8\,157$.

En prenant ce chemin, l'élève va devoir montrer qu'il a compris notre système de numération car il devra compléter son opération de la manière suivante :

$$83 \times 2\,719 = (80 \times 2\,719) + (3 \times 2\,719) = 217\,520 + 8\,157 = 225\,677.$$

6. Calculatrice et algorithme « per gelosia »

Une extension astucieuse de la méthode « per gelosia » permet de calculer des produits de grands nombres donnant tous les chiffres du résultat alors que la calculatrice nous donne un résultat en notation scientifique dès que ce nombre compte plus de 12 chiffres. Au lieu de prendre les deux facteurs chiffre par chiffre, on les découpe en tranches de trois chiffres. Les calculs intermédiaires sont plus simples : des multiplications de nombres de trois chiffres et des additions, faisables à la calculatrice, « per gelosia » ou « à la main ».

En voici un exemple : Calculer $6\,345\,641 \times 298\,107 =$

	6	345	641	×	
1	1	102	191		298
	788	810	018		
891	0	36	68		107
	642	915	587		
	680	001	587		

On obtient ainsi : $6\,345\,641 \times 298\,107 = 1\,891\,680\,001\,587$.

7. Quelques remarques didactiques

Les réglettes de NEPER ne sont pas un objet d'enseignement, mais un simple instrument de calcul qui a été largement utilisé à une certaine époque. Cet article n'a pas d'autre but que de montrer son intérêt historique, son fonctionnement et ses liens avec l'algorithme « per gelosia », comme enrichissement de la collection d'outils qui permettent d'effectuer des multiplications.

À ce propos, il faut rappeler que, en résolution de problème, c'est le choix de l'opération qui a la priorité absolue. Ce n'est que lorsque l'élève a identifié l'opération lui permettant d'arriver à la solution, lorsqu'il a déterminé quels sont les nombres à prendre en compte, qu'il peut passer à la phase de calcul et choisir l'instrument ou l'algorithme le plus adéquat : la calculatrice, l'algorithme « classique » de la multiplication « en colonne », la méthode « per gelosia », ou d'autres algorithmes personnels. Les réglettes de NEPER ne vont pas entrer en concurrence avec les autres méthodes mais, au cas où on les introduirait, comme curiosité technique, on peut y voir des liens avec les précédents.

- Il s'agit d'une « machine » au même titre que la calculatrice, pratique pour les multiplications dont un des facteurs a un seul chiffre : plutôt que de presser, sur le clavier, les touches correspondant au facteur de plusieurs chiffres, on dispose les réglettes, dans le même ordre ; plutôt que de presser la touche « \times » et celle du deuxième facteur, on observe la ligne correspondante sur les réglettes. La différence est dans la lecture du résultat : immédiat sur la calculatrice après la touche « = », un peu plus délicat sur les baguettes car il demande des additions intermédiaires, de deux termes, avec d'éventuelles retenues. Dans un cas comme dans l'autre, on n'utilise pas son répertoire multiplicatif. C'est la « machine » qui le fournit. La nouveauté de la manipulation de ces réglettes et l'imaginaire de l'enfant font qu'il s' imagine posséder un outil de calcul vraiment performant.
- Le lien entre les réglettes de NEPER et l'algorithme « per gelosia » a été mis en évidence dans un des paragraphes précédents : lorsque les deux facteurs ont plus d'un chiffre, il suffit de reporter les lignes des réglettes - qui correspondent aux chiffres du deuxième facteur - dans un tableau, à condition de respecter l'ordre des chiffres. Ce n'est pas un gain de temps pour qui a mémorisé ses « livrets », mais ça peut être un moyen de contrôle. Pour la lecture, il faudra effectuer

une série d'additions de plus de deux termes, qui peut nécessiter des retenues.

- Les réglettes de NEPER permettent de trouver les différentes lignes de l'algorithme traditionnel « en colonnes » qui sont des produits d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre. Ces résultats partiels demandent d'effectuer mentalement les retenues d'un produit sur l'autre dans l'algorithme traditionnel, avec les réglettes, tous les chiffres de tous les produits partiels apparaissent. (Dans le premier exemple d'utilisation des réglettes donné précédemment : $295 \times 7 = 2065$, il n'y a des retenues que dans une des additions, $6 + 4$; par l'algorithme traditionnel, il y en a entre les trois produits :
 $5 \times 7 = 35$, je retiens 3 et je note 5,
 $9 \times 7 = 63$, j'ajoute la retenue 3,
j'obtiens 66, je note 6 et je retiens 6,
 $2 \times 7 = 14$, j'ajoute la retenue 6, j'obtiens 20 et je note les deux chiffres car c'est le dernier produit.)

La question du décalage des lignes ou de l'ajout de « 0 » reste une difficulté, dans un cas comme dans l'autre.

D'une manière générale, la réflexion sur le fonctionnement des réglettes est une bonne occasion de revoir les propriétés de notre système de numération, de se rendre compte qu'un répertoire multiplicatif mémorisé est encore plus économe en écriture et en temps et, finalement, de faire appel au calcul réfléchi pour justifier les résultats.

Ce texte a fait l'objet d'une première édition dans *Math-École* 211 (Juin 2004) et est reproduit ici avec l'aimable autorisation du rédacteur F. JAQUET.



POLYTECH.MONS

Découverte des études et des métiers de l'ingénieur civil à la Faculté Polytechnique de Mons

PORTES OUVERTES 2005

À CHARLEROI : le 29 janvier de 10 à 16 h

boulevard Joseph II, 64

À MONS : le 16 février de 9 à 17 h
le 12 mars et le 14 mai de 9 à 13 h

Amphithéâtre FPMs, rue du Joncois, 53

Sciences de
l'Ingénieur

Bachelier (3 ans)
Master (2 ans)

Ingénieur civil

Architecture | Chimie et Science des matériaux | Electricité
Informatique et gestion | Mécanique | Mines et Géologie

Concours Jeunes Bâtisseurs

(construction de maquettes de ponts en carton)

Premier Prix : un ordinateur portable

Infos sur www.jeunes-batisseurs.be

NOUVEAU !

Dès septembre 2005 :

**1^{ère} année du grade de Bachelier à Charleroi,
comme à Mons**

Inscriptions et renseignements :

Secrétariat des Etudes • 9, rue de Houdain • 7000 MONS

Tél.: 065/37 40 30 à 32 • Fax: 065/37 40 34 • secretu@fpm.ac.be • <http://www.fpm.ac.be>



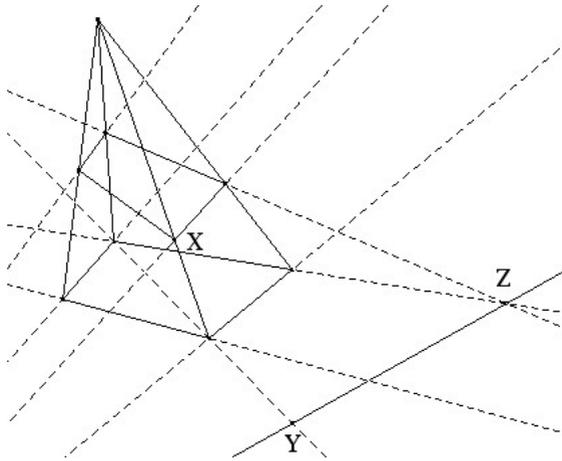
Cabri-Géomètre et les sections

J.-P. HOUBEN, *Université Catholique de Louvain*

Mots-clés : Cabri-Géomètre, Sections.

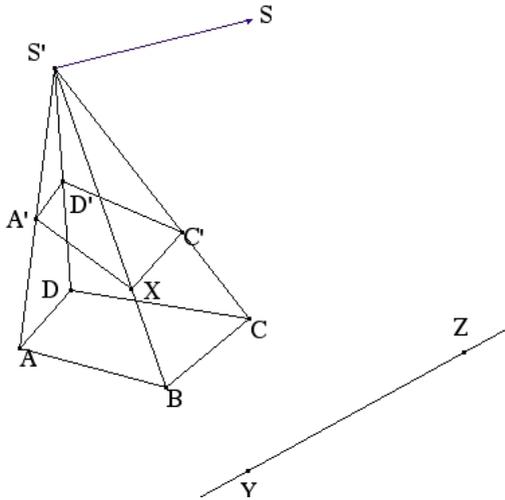
Dans l'article du numéro 147 de mai-juin 2004, nous avons construit les sections dans un parallélépipède. Nous allons maintenant construire un éclaté d'une section. Prenons, pour changer, la section produite par un plan dans une pyramide.

Supposons que nous ayons la section suivante obtenue par le plan XYZ avec YZ une droite du plan de la base de la pyramide et le point X un point d'une des arêtes :



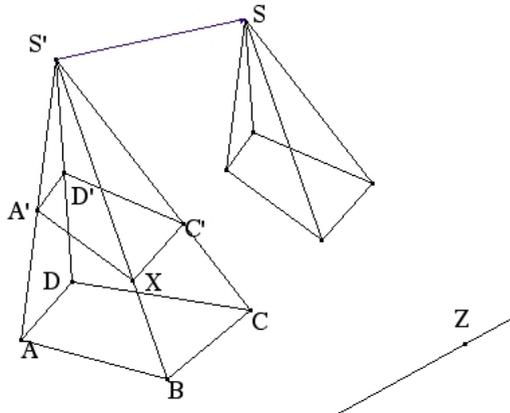
Dans cette figure, les constructions pour obtenir la section ont été tracées en pointillés. Les segments qui déterminent la section ont été tracés en dernier lieu en traits pleins. Ce sont les trois points X, Y et Z qui déterminent la section.

Prenons maintenant le sommet de la pyramide, noté provisoirement S , comme origine d'un vecteur et dont l'extrémité S' sera la position finale du sommet après l'éclaté. Cachons les constructions et nous avons :

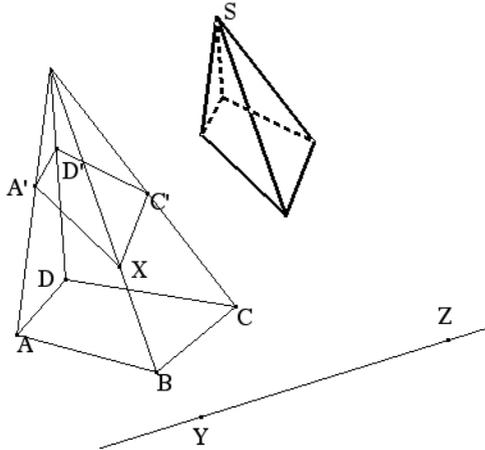


Traçons les segments $S'A', S'B', S'C'$ et $S'D'$ que nous déplaçons en utilisant la translation définie par le vecteur $S'S$. Faisons de même pour les segments de la base à savoir : $A'B', B'C', C'D'$ et $D'A'$. Au point S , il y a maintenant un deuxième point : l'image de S' pour la translation. Cachons cette image, de sorte que le seul point accessible pour un déplacement soit le point S .

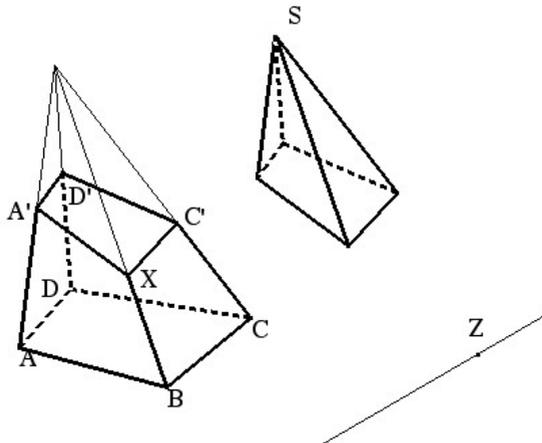
Nous sommes maintenant en présence de la figure :



Dans cette figure, cachons le point S' et le vecteur $S'S$. Traçons ensuite en traits gras pleins et en gras pointillés les arêtes de l'éclaté pour marquer les vus et les cachés. Nous avons ainsi la figure :

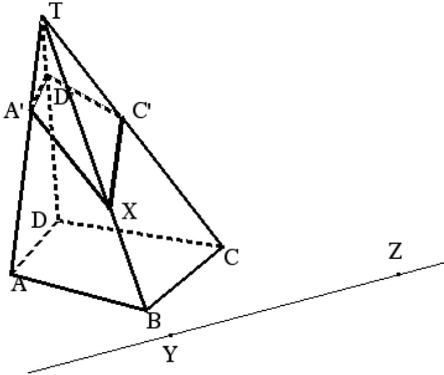


Si nous mettons le tronc de pyramide en traits gras pleins et en gras pointillés pour faire aussi apparaître les vus et les cachés, nous avons la figure finale qui donne l'éclaté :



Nous pouvons maintenant saisir le sommet S et le déplacer dans le plan et l'amener au sommet de la pyramide.

Remarquons, qu'à tout moment, nous pouvons changer la section en déplaçant les points qui définissent le plan de section (dans les limites de la construction initiale).



On trouvera sur le site de la SBPMef : <http://www.sbpme.be> le fichier ECLATE.FIG donnant l'éclaté des sections construites dans cet article.

Vive le danois...

Un honorable collègue germaniste m'a appris que les Danois disent **tre** pour 3 et **tres** pour 60 où **tres** est l'abréviation de **tresindstyve** « trois fois vingt », la forme brève **tres** étant pour eux suffisamment explicite.

Ce goût du non-dit se retrouve, cette fois avec beaucoup plus d'audace, dans **halvtres** « 50 ». On y reconnaît **tres** « soixante », précédé de **halv** qui signifie « moitié ». Mais la moitié de soixante n'a jamais été cinquante, me direz-vous! Il faut en fait comprendre qu'il s'agit de la moitié de la troisième vingtaine, en tenant implicitement pour acquises les deux premières, d'où : **halvtres** = trois vingtaines, auxquelles on retranche la moitié de la troisième vingtaine.

Cette façon de compter en anticipant sur l'étape suivante se retrouve dans l'indication de l'heure : **Klokken er halv seks** : il est la moitié de six heures, donc cinq heures et demie. J'espère que vous m'avez bien suivi...

Les publications de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

- Les brochures signalées par * sont de publication récente.
- Le prix « adhérent » concerne l'A.P.M.E.P. et la S.B.P.M.ef.



N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix, en € , sans port	
		public	adhérent
	<u>Collège</u>		
*503	La jubilation en mathématiques		
	Fichiers Evariste : 480 problèmes tirés de différents tournois et rallyes mathématiques	4,90	3,80
98/132	2 tomes :	21,35	15,25
502	EXCEL-Classe, CD-Rom (Version individuelle)	16,75	16,75
55	Géométrie expérimentale avec CABRI	13,40	12,65
149	Jeux 5 (Des activités mathématiques au collège)		
	Série EVAPM : Evaluation 6 ^e (première chez nous!)	11	7,60
112/118	2 fascicules : Analyses et résultats & Dossier professeur	17,50	12,15
352	Tableur et mathématiques au Collège	12,20	9,90
451	Concours Australien de mathématiques	15,85	11
250/	Panoramas de compétitions mathématiques		
*251	Panoramath 96 & Panoramath 2	25,90	12,50
	<u>Lycée</u>		
*138	Statistiques en classe de seconde	8,70	6
*120	Classeur informatisé de documents math. - 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	45,95	30,50
	Version 26 installations, port compris	91,45	61
	CD-Rom de mise à jour	10,65	7,60
90/	Série EVAPM : Evaluation 1 ^{re} (cinquième chez nous!)		
107/108	3 fascicules	21,35	14,50
*305	GALION-Thèmes Seconde : 10 thèmes programme 2000	11,45	9,90
*450	MathÉvasion : 46 activités en bandes dessinées	7,60	5,35
	Avec CABRI, faire de la géométrie en jouant		
124/125	2 tomes déjà paru	17,55	10,65
*129	Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaires	9,90	6,85
121	Maths en scène : Commentaires des 22 thèmes de l'expo « Mathématiques 2000 » utilisable indépendamment	11,00	7,60
402	Jeux du Scientific American	20,60	14,50

PORT (prix indicatif) : 1 brochure : 2,50 €; 2 ou 3 brochures : 4,00 € et au-dessus de 3 : 6,50 €

Le Rallye Mathématique

Ph. Skilbecq

Comme annoncé dans *Mathématique et Pédagogie* n° 148, la SBPMef a décidé d'organiser le Rallye Mathématique en Communauté française de Belgique. À cette fin, un courrier de présentation a été envoyé à l'ensemble des directions de l'enseignement primaire, du corps d'inspection de l'enseignement fondamental et des Échevins concernés ⁽¹⁾. Ce courrier contenait, outre un descriptif de ce concours de mathématique, un bulletin d'inscription à renvoyer au secrétariat de notre société pour recevoir une épreuve d'essai à réaliser en classe. L'organisation de celle-ci en classe devait permettre à l'enseignant et aux élèves à la fois de se familiariser avec cette procédure particulière de résolution de problèmes ⁽²⁾ et de décider de leur participation à ce rallye. Près de 250 inscriptions à cette épreuve d'essai furent réceptionnées. Un deuxième envoi a donc quitté la rue de la Halle vers les écoles, contenant cette-fois, l'épreuve d'essai – que vous trouverez en détail ci-après – et le bulletin d'inscription définitif au Rallye Mathématique. À la clôture des inscriptions, un peu plus de 150 classes avaient répondu favorablement à notre invitation de participation au Rallye Mathématique. Elles ont reçu début janvier, la première épreuve qualificative que vous retrouverez dans un prochain numéro de *Mathématique et Pédagogie*.

L'épreuve d'essai envoyée cette année est en fait l'épreuve I du Rallye 2003/2004. Dans les pages qui suivent, nous y avons ajouté quelques commentaires personnels et quelques résultats fournis par le comité international ⁽³⁾. Les réponses à ces problèmes sont disponibles au téléchargement sur le site du Rallye Mathématique : <http://www.enseignement.be\rallyemaths bpm>

Bonne lecture ... et bons problèmes.

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à PHILIPPE SKILBECQ, Rue de la Chapelle, 36, 6542 Sars-La-Buissière où à l'adresse courriel : phskilbecq@cfwb.be

⁽¹⁾ La SBPMef organise le Rallye Mathématique uniquement pour l'enseignement primaire. Cependant les enseignants du début du secondaire pourront trouver dans la revue *Math-école*, des problèmes pour les deux premières années de leur niveau d'enseignement.

⁽²⁾ Pour rappel, les apprenants doivent résoudre un nombre déterminé de problèmes en 50 minutes, en groupe et non individuellement.

⁽³⁾ L'ARMT est l'Association du Rallye Mathématique Transalpin qui organise ce concours à un niveau européen et coordonne les travaux des différentes sections européennes.

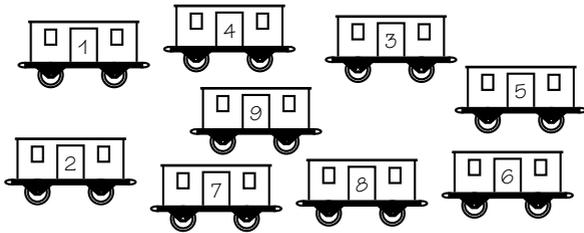


Rallye Mathématique

13^e édition
Épreuve d'essai
©ARMT2005

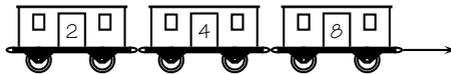
Catégorie 3 - Les trains de Marie

Marie a beaucoup de wagons. Sur chaque wagon, il y a un nombre de 1 à 9 .



Marie s'amuse à former des trains de 2 wagons, 3 wagons, 4 wagons, ...
Le nombre écrit sur un wagon doit toujours être la moitié de celui du wagon qui est devant lui.

Voici un train correct de 3 wagons (2 est la moitié de 4, et 4 est la moitié de 8) :



Mais ces deux autres trains ne sont pas justes, parce que :

5 n'est pas la moitié de 8

3 est la moitié de 6, mais 6 n'est pas la moitié de 9



Combien Marie peut-elle former de trains en tout ?

Notez clairement tous les trains pour être sûrs qu'il n'y en a pas d'autres.

Catégorie 3, 4 - Dés de couleur

Alice a trois dés de couleurs : un rouge, un bleu et un vert. Sur leurs faces, il y a 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 points. Elle les lance tous ensemble et additionne les points obtenus sur chacun d'eux.

Un première fois, elle obtient 3 sur le dé rouge, 2 sur le dé bleu et 2 sur le dé vert : au total 7 points.

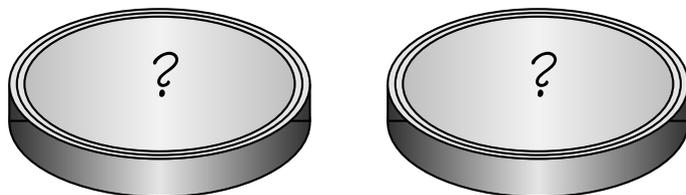
Elle aurait aussi pu obtenir 7 points avec 2 sur le dé rouge, 3 sur le bleu et 2 sur le vert... ou avec 1 sur le rouge, 4 sur le bleu et 2 sur le vert, ou...

Mais Alice aimerait obtenir 6 comme somme des points de ses dés, alors elle recommence.

De combien de manières peut-elle obtenir 6 points avec ses 3 dés? Indiquez clairement toutes les manières possibles.

Catégorie 3, 4 - Nombre inconnu

Thomas a deux nombres, d'un seul chiffre, écrits chacun sur un jeton comme le montre le dessin ci-dessous.



Thomas s'aperçoit que

- lorsqu'il additionne ces deux nombres, il trouve 11,
- lorsqu'il place les deux jetons l'un à côté de l'autre, il lit un nombre de deux chiffres,
- lorsqu'il échange les places des deux jetons, il lit un second nombre de deux chiffres qui est plus petit que le premier,
- la différence entre le premier nombre de deux chiffres et le second nombre de deux chiffres est 45.

Quel est le premier nombre de deux chiffres que Thomas a lu?

Expliquez comment vous avez fait pour le trouver.

Notre commentaire : il nous semble que ce problème contient différentes difficultés incluses dans la consigne en elle-même. D'abord dans la distinction entre nombre et chiffre qui n'est certainement pas encore bien installée chez

les apprenants de ce niveau. Ensuite dans les nombreuses manipulations de ces concepts qui ne possède pas toujours la même « valeur » mathématique. En effet, quelques fois, le nombre n'a qu'un chiffre, quelques fois le nombre possède deux chiffres. La quantité de critères dont il faut tenir compte doit aussi impliquer plusieurs erreurs de la part des apprenants de troisième.

Des résultats : seules 2 classes – quatrième année – sur 57 ont trouvé la réponse correcte – 83 possibilités de réaliser 6 avec les 3 dés – avec justification dont voici copie d'une de ces deux classes : « D'abord nous avons pris le plus grand et le plus petit nombre qui en les additionnant faisaient 11 sans prendre le nombre à 2 chiffres. Nous avons pris d'abord le 9 et le 2, quand nous les mettions ensemble, cela faisait 29 et 92. Mais ils n'avaient pas 45 de différence. Alors nous avons pris 8 et 3, ça faisait 38 et 83 et ça faisait 45 de différence ». 21 classes – 18 de quatrième et 3 de troisième – ont également fourni la réponse correcte mais sans y adjoindre de justification. La réponse était accompagnée d'une vérification du type : « $8 + 3 = 11$; $38 + 45 = 83$ ». Il faut noter que 27 classes n'ont pu répondre correctement à ce problème. Commentaires ARMT : « Pour que toutes les classes puissent s'approprier la situation [...] il faudrait vraisemblablement donner un exemple avec les deux chiffres et les nombres qu'on peut former avec eux [...] il y a un travail important à mener en troisième année dans le domaine de la numération : chiffres et nombres, effet de la position des chiffres sur le nombre... ».

Catégorie 3, 4, 5 - Chiffres... qui manquent

Monsieur Attack doit coller des chiffres sous les 116 crochets du vestiaire de la salle de gymnastique, pour les numéroter de 1 à 116.

Il prend avec lui 25 exemplaires de chaque chiffre de « 0 » à « 9 » et commence par coller un chiffre « 1 » sous le premier crochet, un chiffre « 2 » sous le deuxième crochet, un chiffre « 3 » sous le troisième, etc.

Pour le dixième crochet, Monsieur Attack colle un chiffre « 1 » et un « 0 », pour le onzième, il colle deux chiffres « 1 », etc.

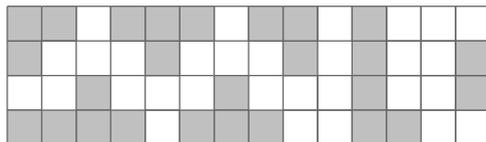
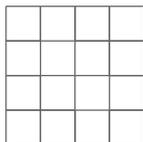
À un certain moment, il remarque qu'il doit aller rechercher des chiffres « 1 » car il n'en a plus.

Combien Monsieur Attack devra-t-il encore prendre de chiffres « 1 » pour arriver à finir son travail et numéroter ainsi tous les crochets jusqu'au numéro 116 ?

Écrivez votre solution et expliquez votre raisonnement.

Catégorie 3, 4, 5 - Carré à découvrir

Jean veut recouvrir entièrement ce carré avec des pièces choisies parmi celles présentées ci-dessous en gris.



Avec quelles pièces pourra-t-il recouvrir son carré ?

Dessinez vos solutions pour qu'on distingue bien les différentes pièces.

Catégorie 4, 5, 6 - L'anniversaire de maman



André, Anne, Annelise et Albert ont respectivement 11, 9, 6 et 2 ans. Aujourd'hui, ils fêtent l'anniversaire de leur maman qui a 40 ans.

Annelise dit à sa maman :

« Quand j'aurai 40 ans, tu en auras beaucoup plus, je ne pourrai jamais te rattraper! »

« Tu as raison », répond sa mamn, « mais dans quelques années, en additionnant vos quatre âges vous me rattraperez! »

Dans combien d'années les enfants auront-ils, ensemble, le même âge que leur maman ?

Indiquez votre solution et expliquez votre raisonnement.

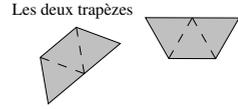
Catégorie 4, 5, 6 - Monsieur Trapèze

Monsieur Trapèze a un nouveau passe-temps : construire des figures toutes différentes avec ces deux trapèzes, constitués chacun de trois triangles équilatéraux (triangles qui ont trois côtés égaux).

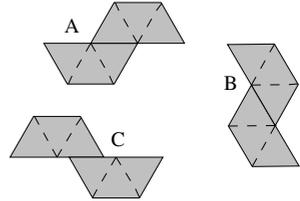
Dans chacune des figures que Monsieur Trapèze construit, les deux trapèzes ne se recouvrent pas et ont un ou deux côtés entiers de triangle en commun.

Voici trois exemples,

- la figure A est une solution acceptable,
- la figure B est correcte, mais on peut la superposer à la figure A en la retournant. Elle ne compte donc pas car elle n'est pas différente de la figure A,
- la figure C n'est pas correcte car les trapèzes n'ont pas un ou deux côtés entiers de triangles en commun.

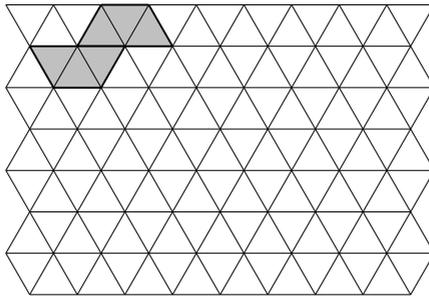


Trois exemples de construction possibles



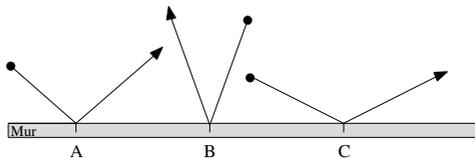
Combien de figures différentes Monsieur Trapèze peut-il former avec ses deux trapèzes?

Dessinez toutes les possibilités dans la grille ci-dessous où la figure A est déjà recopiée.



Catégorie 5, 6 - Balle au rebond

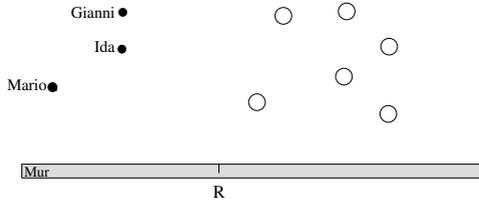
De la fenêtre de sa chambre, André regarde ses amis Gianni, Ida et Mario jouer en faisant rouler leurs balles jusqu'au mur de sa maison. André observe comment les balles rebondissent, une fois en A, une fois en B et une fois en C. André suggère à ses amis de placer des quilles sur le terrain et de faire rouler leurs balles contre le mur, en visant le point B, pour que, en rebondissant, ces balles fassent tomber des quilles.



Le Rallye Mathématique

Sur la figure suivante, vous pouvez voir comment sont disposées les quilles, notées a, b, c, d, e, f et les positions des balles de Gianni, Ida et Mario.

Chaque enfant, à son tour, fait rouler sa balle, de son point indiqué, et la fait rebondir contre le mur au point R.



**Quelles quilles tomberont et qui les fera tomber ?
Justifiez votre réponse.**

Notre commentaire : nous avons quelque peu modifié la première phrase de la consigne pour qu'elle soit plus rapidement compréhensible par les élèves. Il ne s'agit là que d'aménagement au niveau du trait de surface de l'énoncé. Nous n'en avons pas changé le contenu. Voici comment elle était écrite : « André regarde jouer ses amis, Gianni, Ida et Mario de la fenêtre de sa chambre ». De plus, dans la version initiale toujours, le premier dessin était avant le début de l'énoncé du problème. Il nous semble que cela peut en induire une première représentation erronée. En effet, cette représentation des rebonds de balle peut très bien être « lue » comme l'image de rebonds « verticaux » et non « horizontaux » comme on peut le comprendre par la suite à la lecture de la consigne. Nous avons donc préféré inverser l'ordre d'apparition de ces deux éléments, la consigne écrite précédant le dessin. Le lecteur peut donc s'appuyer ainsi sur le dessin pour traduire la consigne et en vérifier la compréhension.

Catégorie 5, 6 - Dés de couleur

Alice a trois dés de couleurs : un rouge, un bleu et un vert. Sur leurs faces, il y a 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 points. Elle les lance tous ensemble et additionne les points obtenus sur chacun d'eux.

Un première fois, elle obtient 3 sur le dé rouge, 2 sur le dé bleu et 2 sur le dé vert : au total 7 points.

Elle aurait aussi pu obtenir 7 points avec 2 sur le dé rouge, 3 sur le bleu et 2 sur le vert... ou avec 1 sur le rouge, 4 sur le bleu et 2 sur le vert,

ou...

Mais Alice aimerait obtenir 9 comme somme des points de ses dés, alors elle recommence.

**De combien de manières peut-elle obtenir 9 points avec ses 3 dés?
Indiquez clairement toutes les manières possibles.**

Catégorie 5, 6 - Le champagne de minuit

16 personnes fêtent ensemble le nouvel an.

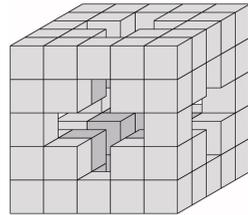
À minuit précise, chacun choquera son verre de champagne contre celui de tous les autres.

**Combien de tintements de verre va-t-on entendre?
Expliquez votre raisonnement.**

Catégorie 6 - Le cube de Kubi

Kubi a offert un cube à son ami Rubik, comme celui qui est représenté sur la figure ci-contre, avec un forage central en forme de croix.

Rubik a beaucoup aimé le cadeau et s'amuse à compter le nombre de petits cubes qui manquent dans le grand cube.



**Quel est ce nombre?
Expliquez comment vous l'avez trouvé?**

Catégorie 6 - Le tableau volé

L'inspecteur Derrick doit découvrir les responsables du vol d'un célèbre tableau du XVI^e siècle. Les suspects sont quatre personnages bien connus de la police : les frères Augusto et Dante, Bernard le balaféré et le clochard Karl.

L'inspecteur les interroge tous les quatre et recueille leurs déclarations :

- Augusto : Bernard n'a pas volé le tableau.
- Karl : le vol n'a pas été commis par Dante.
- Bernard : le voleur est l'un des deux frères.
- Dante : ce n'était pas moi.

L'inspecteur sait qu'un seul d'entre eux a menti.

Qui a volé le tableau?

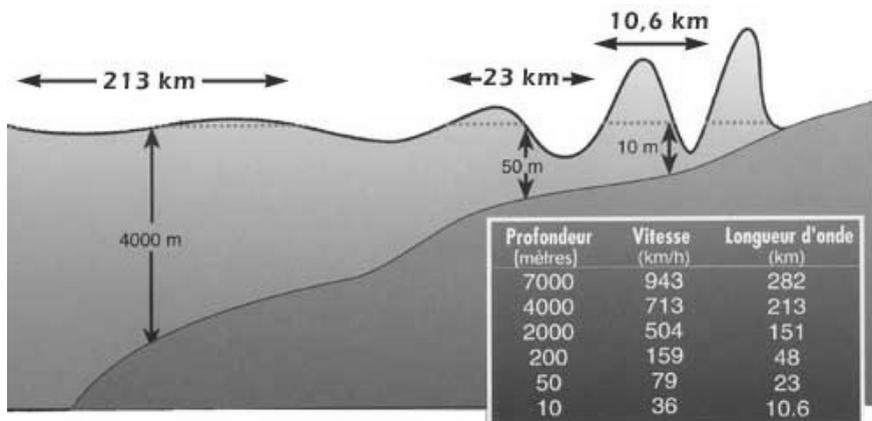
Donnez votre réponse et justifiez votre raisonnement.

Dans nos classes

J. Miewis

津波

Un tsunami est étymologiquement une vague arrivant dans un port (du japonais *tsu* : port et *nami* : vague). Nul n'ignore plus ce nom désormais depuis la catastrophe du 26 décembre 2004. Que ce soit par des dossiers spéciaux dans la presse ou par les nombreux sites internet consacrés au sujet, les élèves se sont retrouvés parfois confrontés à des tableaux ou des graphiques. C'est l'un de ces tableaux entouré de quelques explications techniques que je vous propose d'exploiter.



Cette vague peut être due à un tremblement de terre ou tout autre événement pouvant y être associé : subduction de plaques sous-marines, glissements de terrains, éruption volcanique sous-marine, mouvement de très grande masse se déversant dans la mer (débris volcaniques), explosion nucléaire, chute d'un météorite, etc. D'une façon générale les tsunamis sont habituellement générés par de grands tremblements de terre sous-marins (magnitude > 7) très peu profonds (profondeur < 50 km). L'intensité du tsunami dépendra à la fois de la magnitude et de la profondeur du séisme : plus ce dernier est superficiel, plus il a des chances de générer un important tsunami. Il n'y a pas de règle absolue sur la relation tsunami - magnitude du tremblement de terre ; ce sont des lois empiriques propres à chaque région géographique. Une vague de

tsunami est donc générée par des effets de gravité tandis qu'une vague classique est générée par l'action du vent.

Le tsunami voyage avec une vitesse proportionnelle à la racine carrée de la profondeur de l'océan si bien qu'en océan profond sa vitesse peut être de l'ordre de plusieurs centaines de km/h (dans des régions où la profondeur de l'océan atteint plus de 6000 mètres, les vagues imperceptibles du tsunami peuvent se déplacer à la vitesse d'un avion, approximativement 900 km/h, et peuvent traverser le Pacifique en moins d'un jour !)

La longueur d'onde du tsunami est de l'ordre de plusieurs centaines de kilomètres et son amplitude en océan profond est très faible (de l'ordre du mètre). C'est pour cela qu'il est difficile de détecter la formation du tsunami en haute mer.

- Est-il possible de vérifier à partir des données du tableau que la vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la profondeur?

S'il est vrai que la vitesse (v) est proportionnelle à la racine carrée de la profondeur (p), alors la profondeur peut s'exprimer proportionnellement au carré de la vitesse : on doit avoir : $p = kv^2$. Un graphique représentant en abscisse v^2 et en ordonnée p permet d'estimer la valeur de la constante k . En quatrième année, l'étude de l'équation du second degré est donc parfaitement illustrée par ce problème. Les valeurs à représenter sont

carré de la vitesse v^2	profondeur p
1 296	10
6 241	50
25 281	200
254 016	2 000
508 369	4 000
889 249	7 000

La représentation graphique fait apparaître les points quasiment alignés ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Les nombreux sites consultés qui clônent à l'envi ce tableau ne donnent jamais son origine (en tout cas nous ne l'avons pas trouvée). Il est donc possible qu'il ne s'agisse pas là de données expérimentales, mais de valeurs obtenues par application d'une formule mathématique; ce qui justifierait l'apparition d'un coefficient de corrélation record! Remarquons que ceci n'enlève à priori rien à la valeur du travail proposé aux élèves.

1. En utilisant les deux points extrêmes, on trouve une approximation de k :

$$k = \frac{7\,000 - 10}{889\,249 - 1\,296} \simeq 0,0079,$$

d'où l'on déduit la relation $p = 0,0079v^2$.

2. Au second degré de l'enseignement technique, il est possible d'utiliser la droite de MAYER : le point moyen des 3 premières données est

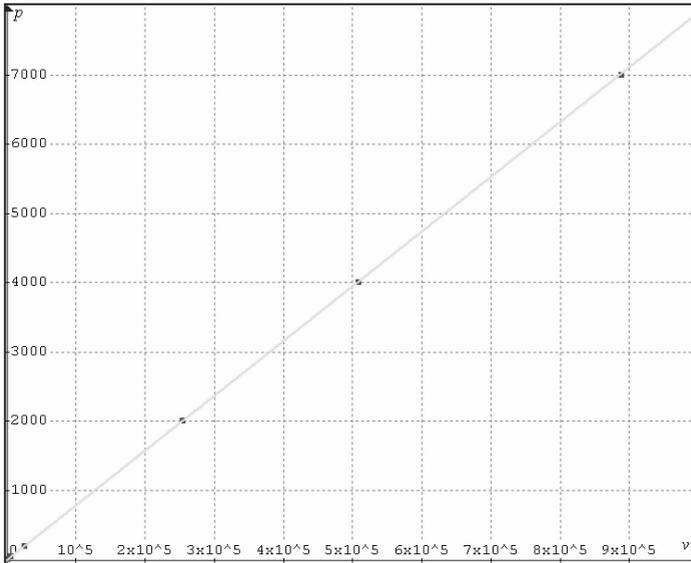
$$\frac{(1\,296 + 6\,241 + 25\,281, 10 + 50 + 200)}{3} = (10\,939,3; 86,6).$$

Quant au point moyen des trois dernières données, il vaut

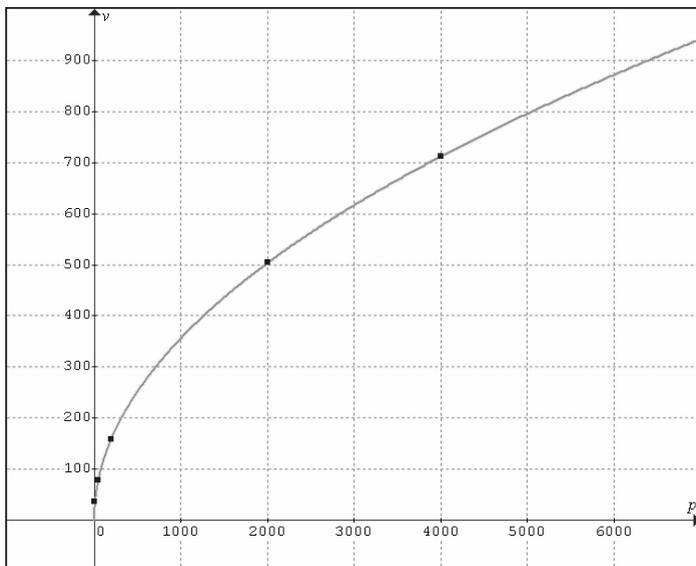
$$\frac{(254\,016 + 508\,369 + 889\,249, 2\,000 + 4\,000 + 7\,000)}{3} \\ = (550\,544,6; 4\,333,3).$$

le coefficient angulaire de la droite de MAYER est :

$$\frac{86,6 - 4\,333,3}{10\,939,3 - 550\,544,6} \simeq 0,0079.$$



Une autre vérification – accessible à des élèves du 3^e degré – consiste à représenter les 6 couples (profondeur-vitesse) sur un graphique et de rechercher une interpolation à l'aide d'une fonction puissance de type $y = ax^b$. En utilisant le logiciel **Graphmatica**, on trouve $y = 11,3x^{0,4995}$, ce qui est suffisamment proche de $f(x) = 11,3\sqrt{x}$ pour que l'on puisse admettre que les vitesses sont bien proportionnelles aux profondeurs.



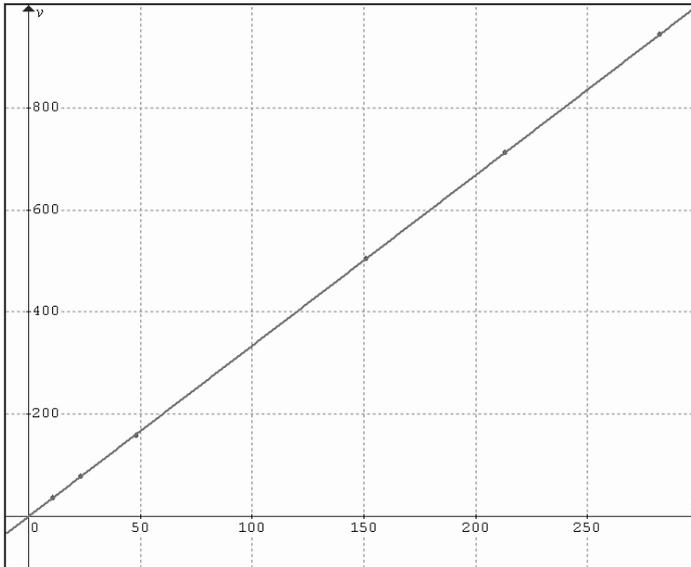
● La période T du tsunami est la durée que met la vague pour « voyager » d'une distance égale à sa longueur d'onde ℓ . Ainsi $\ell = v \cdot T$. Peut-on estimer la valeur de cette période en utilisant les valeurs données dans le tableau ?

De la définition de la période, on tire que $T = \frac{\ell}{v}$. Sur un graphique, on porte les longueurs d'onde (ℓ en km) en abscisse et les vitesses (v en km/h) en ordonnée. Ici aussi les points paraissent alignés et confirment l'hypothèse de proportionnalité entre les longueurs d'onde et les vitesses.

La recherche du coefficient de proportionnalité en utilisant les points extrêmes conduit au calcul

$$T = \frac{943 - 36}{282 - 10,6} \simeq 3,34.$$

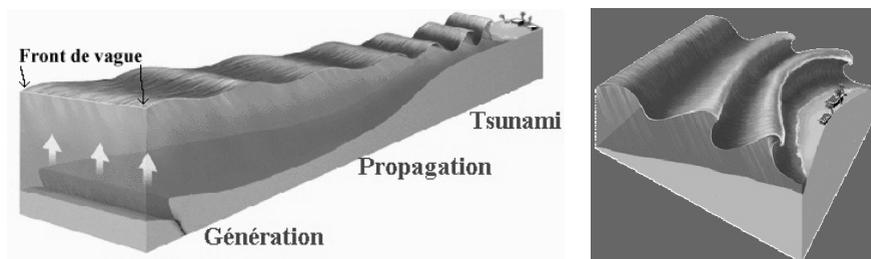
où T est exprimé en heures. Ici aussi, la méthode de MAYER donne sensiblement le même résultat.



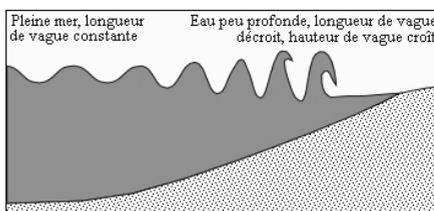
L'énergie de la vague de tsunami va de la surface au fond de la mer, même dans les eaux les plus profondes. Cette énergie correspond à l'énergie mécanique (ou énergie totale) qui est la somme de l'énergie cinétique (de vitesse) et de l'énergie potentielle (liée à la hauteur des vagues). En haute mer (mer profonde) la vitesse est très importante, donc l'énergie cinétique est très grande et l'énergie potentielle très faible. A l'approche des côtes, les vagues sont ralenties par les effets de fond et il se produit un échange entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. L'énergie cinétique (la vitesse de propagation descend jusqu'à 36 km/h) et en contrepartie l'énergie potentielle augmente (la hauteur de la vague peut atteindre plusieurs dizaines de mètres). En outre, la période de la vague reste constante, et donc « plus d'eau » se trouve emprisonnée entre deux crêtes successives de la vague, ce qui augmente la hauteur de la vague ⁽²⁾.

⁽²⁾ Il ne s'agit pas d'une conservation de la masse au sens des masses solides : aucune masse d'eau précise ne s'est transportée de la haute mer jusqu'à la côte. L'augmentation de la hauteur de la vague est une conséquence de la conservation de l'énergie (loi de GREEN montrant que la hauteur de vague est inversement proportionnelle à la racine quatrième de la profondeur d'eau); néanmoins l'approximation décrite ici est « raisonnable » pour le public auquel elle s'adresse.

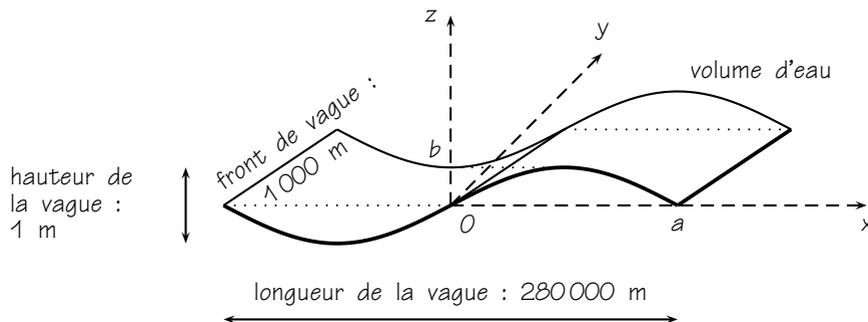
Au fur et à mesure qu'un tsunami se rapproche des côtes, il se produit donc une réaction inversement proportionnelle : la vitesse de la vague diminue, alors que son amplitude augmente jusqu'à 10, 15, 20 ou 30 mètres de hauteur. L'avant de la vague se trouve, en effet, freiné en raison de la diminution de la profondeur, tandis que l'arrière le rattrape. Se forme alors un véritable mur d'eau qui s'abat sur le rivage avec une incroyable puissance.



• Bien que l'explication scientifique du phénomène repose sur des considérations d'échange d'énergies, nous pouvons considérer un front de vague d'une certaine largeur (disons 1 kilomètre pour fixer les idées) et d'une longueur égale à la longueur d'onde.



Le texte nous dit qu'en haute mer, la vague a une longueur d'onde de 282 km et une hauteur de l'ordre d'un mètre.



Sur ce dessin, l'axe Ox est orienté dans la direction de déplacement de la vague, l'axe Oy est perpendiculaire et dans le plan du niveau moyen de la mer, l'axe Oz indique la hauteur d'eau.

On peut considérer le volume « critique » de l'eau (la demi-vague qui dépasse en hauteur le niveau moyen de la mer) comme responsable de l'apport d'eau supplémentaire qui provoquera l'inondation. Assimilons la forme de la vague dans le plan Oxz à une sinusoïde définie par $z = f(x)$: si la demi-vague est de longueur a et que sa demi-hauteur est b , alors on a

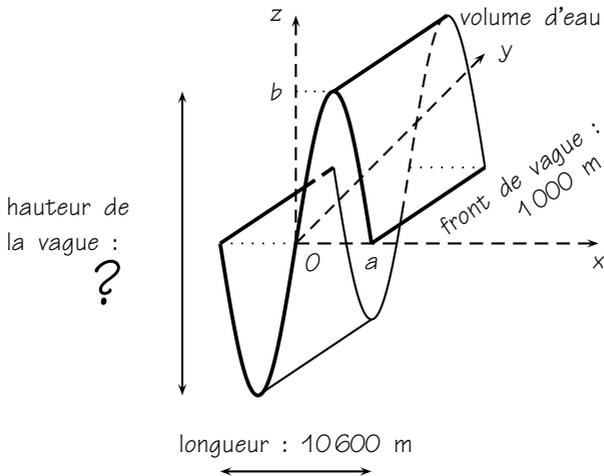
$$f(x) = b \sin \frac{\pi}{a} x.$$

Le volume d'eau (en m^3) est alors de

$$1\,000 \int_0^a b \sin \frac{\pi}{a} x \, dx.$$

puisqu'il s'agit d'un exemple de volume de solide de section connue dans le cas particulier où cette section est constante.

Près de la côte, le tableau nous dit que la vague a une longueur d'onde de 10,6 km. Nous recherchons la hauteur de cette vague en admettant que nous avons à faire au même volume critique d'eau.



Il est facile de montrer que l'intégrale

$$\int_0^a b \sin \frac{\pi}{a} x \, dx$$

vaut

$$\frac{2ab}{\pi}.$$

On en déduit que le volume d'eau est de $\frac{2000ab}{\pi}$.

En haute mer, la demi-longueur de la vague est $a = 141\,000$ m et sa demi-hauteur est $b = 0,5$ m ; ainsi le volume critique est de $V = 44\,881\,694$ m³. À la côte, la demi-longueur de la vague est $a = 5\,300$ m pour un même volume d'eau.

On a

$$b = \frac{\pi V}{2000a} = 13,30 \text{ m.}$$

C'est approximativement la hauteur du tsunami constaté sur certaines côtes de Sumatra...

Remarquons que la longueur de front de vague n'intervient pas vraiment dans le calcul et que l'on peut se contenter d'intégrale d'aire plane.

Quelques références :

http://www.prevention2000.org/cat_nat/risques/tsunami/

[echelle_tsunami.htm](#)

<http://php.educanet2.ch/gymorgas/2004tm/7/www/tsu.htm>

<http://www.chez.com/deuns/sciences/ondes/ondes2.html>

<http://www.fluidmech.net/tutorials/ocean/tsunami.htm>

<http://www.tulane.edu/~sanelson/geol204/tsunami.htm>

Suite à un concours de circonstances liées à de trop brefs délais dans la parution, l'article de M. Pascal Dupont paru dans le *Mathématique et Pédagogie* n° 150 a été malencontreusement amputé d'une phrase où l'auteur remerciait Mme Nicole Vast pour ses suggestions, qui ont notamment permis d'améliorer la démonstration de la proposition 3. Que Mme Vast et M. Dupont veuillent trouver ici les regrets du rédacteur de la revue pour cet incident.

Olympiades

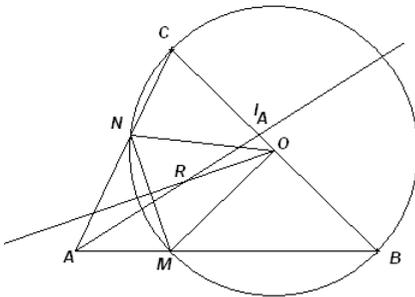
C. Festraets

Voici les solutions des trois premiers problèmes de l'Olympiade Internationale de Mathématique 2004. Les deux premières sont celles d'étudiants qui ont obtenu la note maximum.

Problème 1

Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus et dans lequel $AB \neq AC$. Le cercle de diamètre BC rencontre les côtés AB et AC respectivement en M et N . On note O le milieu du côté BC . Les bissectrices des angles \widehat{BAC} et \widehat{MON} se coupent en R . Montrer que les cercles circonscrits aux triangles BMR et CNR se rencontrent en un point du côté BC .

Solution de David Frenay, élève du Collège Ste Marie à Mouscron



Soit I_A le point d'intersection de BC avec la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{BAC} .

On sait que $|MO| = |NO|$, donc la perpendiculaire abaissée de O sur MN est la médiatrice du segment $[MN]$. Or il est connu que, dans un triangle, la bissectrice d'un angle coupe la médiatrice du côté opposé en un point du cercle circonscrit au triangle.

Dans le cas présent, en considérant le triangle MAN , la bissectrice de l'angle \widehat{MAN} coupe la médiatrice de $[MN]$ en R , d'où ce point est sur le cercle circonscrit au triangle AMN . Le quadrilatère $AMRN$ est donc cyclique et on a $\widehat{ARN} = \widehat{AMN} = \pi - \widehat{NMB} = \widehat{NCB}$ (car $MNCB$ est cyclique).

Les triangles ANR et ACI_A sont donc semblables, d'où $\widehat{NRI_A} = \pi - \widehat{NCI_A}$ et $\widehat{CNR} = \pi - \widehat{CI_AR}$. Autrement dit, $CNRI_A$ est cyclique.

De la même manière, on obtient $BMRI_A$ cyclique.

Les cercles circonscrits aux triangles BMR et CNR se coupent en I_A et I_A est sur BC .

Problème 2

Trouver tous les polynômes $P(x)$ à coefficients réels qui vérifient l'égalité

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c) \quad (1)$$

$$\text{pour tous réels } a, b, c \text{ tels que } ab+bc+ca=0 \quad (2).$$

Solution de Timothée Marquis, élève de l'Institut des Dames de Marie à Woluwé-St-Lambert

1. $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ et $(a, b, c) = (0, 0, x)$ satisfont à (2) et donnent respectivement $P(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(-x)$.

$$\text{D'où } P(x) \text{ est de la forme } P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_2x^2 \quad (3)$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$, pour $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

2. $(a, b, c) = (6x, 3x, -2x)$ satisfait à (2) et en récrivant à l'aide de (1) : $P(3x) + P(5x) + P(8x) = 2P(7x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou en utilisant (3)

$$\sum_{i=1}^n a_{2i}(3^{2i} + 5^{2i} + 8^{2i} - 2 \cdot 7^{2i})x^{2i} = 0.$$

Cette égalité est vraie quel que soit x appartenant à \mathbb{R} ,

d'où $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a soit $a_{2i} = 0$, soit $3^{2i} + 5^{2i} + 8^{2i} = 2 \cdot 7^{2i}$.

3. Or $3^2 + 5^2 + 8^2 = 98 = 2 \cdot 7^2$, $3^4 + 5^4 + 8^4 = 4802 = 2 \cdot 7^4$, mais $3^6 + 5^6 + 8^6 = 278598 > 2 \cdot 7^6 = 235388$.

Prouvons par récurrence que $\forall n \geq 3$, on a $3^{2n} + 5^{2n} + 8^{2n} > 2 \cdot 7^{2n}$.

C'est vrai pour $n = 3$; supposons le résultat vrai pour n et démontrons-le pour $n + 1$.

$$3^{2n+2} + 5^{2n+2} + 8^{2n+2} > 2 \cdot 7^{2n+2} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{2n} + 25 \cdot 5^{2n} + 64 \cdot 8^{2n} > 98 \cdot 7^{2n},$$

or $9 \cdot 3^{2n} + 9 \cdot 5^{2n} + 9 \cdot 8^{2n} > 18 \cdot 7^{2n}$ par l'hypothèse de récurrence,

reste à démontrer que $16 \cdot 5^{2n} + 48 \cdot 8^{2n} > 80 \cdot 7^{2n}$ ou encore

$$2 \cdot 5^{2n} + 6 \cdot 8^{2n} > 10 \cdot 7^{2n}.$$

Or, par l'hypothèse de récurrence, $10 \cdot 7^{2n} < 5 \cdot 3^{2n} + 5 \cdot 5^{2n} + 5 \cdot 8^{2n}$, il

suffit donc de démontrer que $5 \cdot 3^{2n} + 5 \cdot 5^{2n} + 5 \cdot 8^{2n} < 2 \cdot 5^{2n} + 6 \cdot 8^{2n}$,

ou que $8^{2n} > 5 \cdot 3^{2n} + 3 \cdot 5^{2n}$ (4).

Or $5 \cdot 3^{2n} + 3 \cdot 5^{2n} < 5 \cdot 5^{2n} + 3 \cdot 5^{2n} = 8 \cdot 5^{2n} < 8^{2n}$ car $\forall n \geq 3$, on a

bien $5^{2n} < 8^{2n-1}$ et l'inégalité (4) est vraie.

4. En conclusion, $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = kx^2 + tx^4$ avec k, t réels.

Vérifions que tout polynôme de cette forme vérifie bien les conditions

initiales.

$$k((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) + t((a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4) = 2k(a+b+c)^2 + 2t(a+b+c)^4$$

Les termes en $a^2, b^2, c^2, a^4, b^4, c^4$ se simplifient dans les deux membres et par hypothèse $ab+bc+ca=0$, l'égalité précédente équivaut successivement à

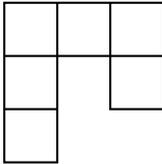
$$t(-4 \sum_{cycl} a^3b + 6 \sum_{cycl} a^2b^2) = 2t(2 \sum_{cycl} a^2b^2)$$

$$\sum_{cycl} a^2b^2 - 2 \sum_{cycl} a^3b = 0$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2a^2(ab+ac) - 2b^2(bc+ba) - 2c^2(ca+bc) = 0$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2b^2ca + 2c^2ab = (ab+bc+ca)^2 = 0.$$

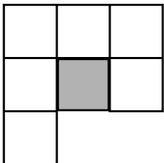
Problème 3



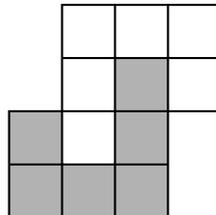
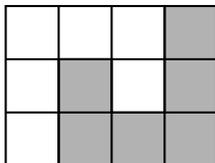
On appelle *crochet* une figure constituée de six carrés unité disposée comme ci-contre ou toute figure obtenue à partir de celle-ci par rotations et réflexions. Trouver tous les rectangles de taille $m \times n$ vérifiant

- un tel rectangle est recouvert par des crochets sans trou et sans chevauchement;
- aucun crochet ne sort du rectangle.

Solution



Quelle que soit la manière de recouvrir le rectangle $m \times n$, le carré intérieur ombré dans la figure ci-dessous doit être recouvert par un autre crochet. Il n'y a que deux manières de procéder qui nous donnent une figure rectangulaire ou une figure en forme de Σ :



Nous les appellerons « briqueR » et « briqueS ».

L'aire d'une brique est 12, donc 12 est un diviseur de mn .

1. Si m et n sont pairs mais non multiples de 4, considérons le rectangle $m \times n$ dont une partie est représentée ci-dessous, dans les cases des lignes et des colonnes n° 4, 8, 12, ... on écrit la suite de nombres 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, ...

Quelle que soit la position d'un briquer, elle couvre des nombres dont la somme est 7 ou 3 et quelle que soit la position d'une briqueS, elle couvre des nombres dont la somme est 7 ou 5.

			1				1				1	
			1				1				1	
			1				1				1	
1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1
			1				1				1	
			1				1				1	
			1				1				1	
1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1
			1				1				1	
			1				1				1	
			1				1				1	
1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1
			1				1				1	

m et n sont pairs et non multiples de 4, donc la somme totale des nombres écrits dans le rectangle est paire, et donc il faut un nombre pair de briques pour le recouvrir. Or l'aire de deux briques est 24, d'où 24 est un diviseur de mn .

Ce qui entraîne que forcément m ou n est multiple de 4, d'où contradiction.

2. Puisque 12 est un diviseur de mn , on a soit 4 divise m , soit 4 divise n . Supposons que 4 divise m .

Si 3 divise n , alors il est évident que le rectangle peut être recouvert par des briques R .

Si 3 ne divise pas n , alors 12 divise m ; n ne peut pas valoir 1, 2 ou 5 et donc est une combinaison linéaire de 3 et 4, soit $n = 3k + 4t$.

Le rectangle $m \times n$ peut être décomposé en deux rectangles $m \times 3k$ et $m \times 4t$. Ces deux rectangles ont une dimension multiple de 3 et l'autre multiple de 4 et peuvent donc être recouverts de briques R en respectant les conditions de l'énoncé.

Voici une solution du problème 10 de l'AIME 2004 dont les énoncés sont parus dans *Mathématique et Pédagogie* n° 148.

Un cercle de rayon 1 est placé au hasard sur un rectangle $ABCD$ de côtés 15 et 36, de telle sorte que le cercle se trouve entièrement à l'intérieur du rectangle. Supposons que la probabilité que le cercle ne touche pas la diagonale \overline{AC} soit m/n , où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Trouver $m + n$.

Solution de J. Rasse de Méan

Les dimensions du rectangle $EFGH$ sont $(36 - 2)$ et $(15 - 2)$, donc son aire vaut $34 \times 13 = 442$. C'est la surface représentant toutes les positions du centre d'un cercle inscrit dans le rectangle $ABCD$.

Pour que le cercle ne touche pas la diagonale AC , son centre doit se trouver dans les triangles IJF ou KHL (la distance des droites IJ et LK à la droite AC vaut 1).

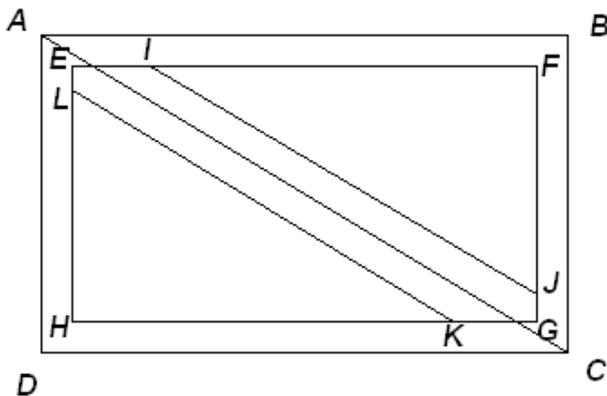
Les triangles ABC et IJF sont homothétiques. Le centre de l'homothétie est le centre commun des cercles inscrits et le rapport d'homothétie est le rapport des rayons de ces cercles.

$$\text{Pour } ABC, AC = \sqrt{15^2 + 34^2} = 39.$$

L'aire du triangle étant égale au produit du demi-périmètre par le rayon r du cercle inscrit, on a

$$r = \frac{\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 36}{\frac{1}{2}(15 + 36 + 39)} = 6.$$

Pour IJF , $r' = 6 - 1 = 5$.



Le rapport de aires est le carré du rapport de similitude, d'où

$$\text{aire}_{IJF} = \text{aire}_{ABC} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 270 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 187,5.$$

$$\text{Aire}_{IJF} + \text{aire}_{KHL} = 375.$$

La probabilité $\frac{m}{n}$ recherchée est égale à $\frac{375}{442}$, donc $m + n = 817$.

Des problèmes et des jeux

C. Festraets

Un peu d'arithmétique

Problème n° 298 de Mathématique et Pédagogie n° 248

Déterminer tous les nombres entiers positifs n divisibles par tous les entiers inférieurs à \sqrt{n} .

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek

Nous admettrons que « inférieur » signifie « inférieur ou égal » et que les entiers sont non nuls.

On peut distinguer deux cas.

1. n est un carré parfait : $n = a^2$ et $\sqrt{n} = a$.

Si $a = 1$, alors $n = 1$.

Si $a > 1$, n est-il divisible par $a - 1$? On peut écrire $n = a^2 - 1 + 1 = (a - 1)(a + 1) + 1$ et n n'est divisible par $a - 1$ que si $a - 1 = 1$, d'où $n = 4$.

2. n n'est pas un carré parfait.

Soit a la partie entière de la racine carrée de n .

Les seuls entiers supérieurs à a^2 et divisibles par a sont $a^2 + a$ et $a^2 + 2a$.

Si $a = 1$, nous trouvons $n = 2$ et $n = 3$.

Pour $n > 3$,

si $n = a^2 + a = (a^2 - 1) + (a - 1) + 2$, n est divisible par $a - 1$ ssi $a - 1 = 1$ (et $n = 6$) ou $a - 1 = 2$ (et $n = 12$);

si $n = a^2 + 2a = (a^2 - 1) + 2(a - 1) + 3$, n est divisible par $a - 1$ ssi $a - 1 = 1$ (et $n = 8$) ou $a - 1 = 3$ (et $n = 24$).

Les seules valeurs possibles de n sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

On peut vérifier que ces nombres sont bien divisibles par tous les entiers inférieurs ou égaux à leur racine carrée.

Bonnes solutions de P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, A. PATERNOTTE de Boussu et J. RASSE de Méan.

Un peu d'algèbre

Problème n° 299 de *Mathématique et Pédagogie* n° 148

G est un groupe fini d'élément neutre e . G contient des éléments a et b tels que $a^5 = e$ et $aba^{-1} = b^2$. Quel est l'ordre de b ?

Solution de P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte

Evidemment, rien n'empêche que $b = e$ auquel cas l'ordre de b est 1.

On suppose donc que $b \neq e$ et donc que l'ordre de b , disons ω , est strictement supérieur à 1.

On prouve par récurrence sur n que $a^n b a^{-n} = b^{2^n}$.

Les hypothèses du problème nous donnent directement le résultat pour $n = 1$.

Supposons cette égalité vraie pour un certain $n \geq 1$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned} a^{n+1} b a^{-(n+1)} &= a(a^n b a^{-n})a^{-1} \\ &= ab^{2^n} a^{-1} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \underbrace{(aba^{-1})(aba^{-1}) \dots (aba^{-1})}_{2^n \text{ paquets}} \\ &= \underbrace{b^2 \cdot b^2 \dots b^2}_{2^n \text{ termes}} \\ &= b^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Or, puisque $a^5 = a^{-5} = e$, on a alors $b = a^5 b a^{-5} = b^{32}$, d'où $b^{31} = e$. Ce qui assure que ω divise 31. Mais puisque $\omega > 1$ et que 31 est premier, c'est donc que $\omega = 31$.

Ce problème n'a sans doute pas inspiré mes lecteurs, car c'est la seule solution que j'ai reçue.

Un peu de géométrie

Problème n° 300 de *Mathématique et Pédagogie*° 148

ABC est un triangle quelconque. Les points D, E, F appartiennent respectivement aux droites BC, CA, AB . Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles AEF, BDF et CDE ont un point commun.

Solution de A. PATERNOTTRE de Boussu

Désignons par $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ l'amplitude des angles intérieurs du triangle ABC et désignons par P le point commun aux cercles Γ_1 et Γ_2 circonscrits respectivement aux triangles AEF et BDF .

Le quadrilatère $AEPF$ est inscrit dans Γ_1 , d'où $\widehat{FPE} = 180^\circ - \hat{A}$.
Le quadrilatère $BFPD$ est inscrit dans Γ_2 , d'où $\widehat{FPD} = 180^\circ - \hat{B}$.

Dès lors

$$\begin{aligned}\widehat{DPE} &= 360^\circ - (180^\circ - \hat{A}) - (180^\circ - \hat{B}) \\ &= \hat{A} + \hat{B} \\ &= 180^\circ - \hat{C}.\end{aligned}$$

Le quadrilatère $EPDC$ est donc inscrit dans le cercle Γ_3 circonscrit au triangle EDC .

Les trois cercles circonscrits ont en commun le point P .

Le raisonnement reste le même quelle que soit la position des points D, E, F sur les droites BC, CA et AB .

Solutions similaires de P. BORNSTZEIN de Maisons-Laffitte, J. FINOULST de Diepenbeek, J. RASSE de Méan, M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles et C. VILLERS de Hyon.

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir pour le 1^{er} septembre 2005 au plus tard.

307. Hexagone inscrit

Un hexagone régulier $ABCDEF$ est inscrit dans un cercle. Le point P étant situé sur le plus petit des arcs BC , démontrer que $|PE| + |PF| = |PA| + |PB| + |PC| + |PD|$.

308. Factorielle et nombres premiers

Le nombre naturel n est impair et strictement supérieur à 1. Démontrer que n et $n + 2$ sont tous deux premiers si et seulement si $(n - 1)!$ n'est divisible ni par n ni par $n + 2$.

309. Inégalités

a, b et c sont des réels tels que

$$-1 \leq ax^2 + bx + c \leq 1 \quad \text{pour} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Démontrer que

$$-4 \leq 2ax + b \leq 4 \quad \text{pour} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Voyage à deux mille pieds. par PASCAL KAESER

Héron, Héron n'est pas un patapon,
Ni l'oiseau long qui crâne sur les ponts.
Au premier rang de nos peux géomètres,
Il inscrit le semi-périmètre
Du triporteur, trigone ou trilatère
Dans sa formule aboutissant à l'aire,
Pour peu qu'on sache extraire une racine,
Dont les vertus troublent la médecine.
Héron, Héron, ouvrons les Metrica,
C'est un ouvrage au rythme délicat.

La suite sur

http://www.tribunes.com/tribune/alliage/43/kaeser_43.htm

Bibliographie

J. Miewis

J. Monhonval, M.-C. Destrée, A. Baetmans, G. Poisseroux, *Le nouveau MATHBASE - 3^e professionnelle*, Érasme, Namur, 2004, ISBN: 2-87127-859-8.

Il s'agit d'une refonte de la collection « MATHBASE » pour mieux l'adapter aux réalités de l'enseignement professionnel. Nous avons pu consulter le livre à destination des 3^e année. L'éditeur prépare le livre pour la 4^e ainsi qu'un mémento utilisable pendant tout le cursus scolaire.

Les objectifs poursuivis sont d'assurer une adéquation aux réalités pédagogiques en constante évolution et de lier au mieux les exercices et les apprentissages aux quatre domaines du programme (économie, transport, habitat et santé) ainsi qu'à la réalité quotidienne ou professionnelle. L'ordre des chapitres est indicatif et l'enseignant reste maître de sa méthodologie.

Chaque chapitre indique clairement les synthèses, règles ou formules à retenir ainsi que le thème auquel se rapporte chaque partie de matière. On y trouve des exercices résolus à titre d'exemple, des exercices à résoudre sur une feuille ou dans un cahier et des exercices de dépassement.

Aperçu de la table des matières.

Calcul numérique.

I. Unités de mesure.

- A. Volume.
- B. Temps.

II. Proportionnalité.

- A. Rapport.
- B. Proportion.
- C. Grandeurs proportionnelles.
- D. Pourcentage.
- E. Intérêt simple.
- F. Echelle.
- G. Masse volumique et densité.
- H. Vitesse.
- I. Pente.

III. Fractions.

- A. Addition et soustraction.
- B. Multiplication.
- C. Division.
- D. Puissances.
- E. Fractions généralisées.
- F. Fractions et thèmes.

Géométrie.

I. Figures planes.

- A. Trapèze.
- B. Losange.
- C. Quadrilatères.
- D. Quadrilatères et thèmes.

II. Solides géométriques.

- A. Parallélépipède rectangle.
- B. Cube.

R. Delord et G. Vinrich, *Maths 1^{er} degré (2 manuels : Nombres et Géométrie)*, Hachette - Érasme, Namur, 2004, ISBN: 2-87127-795-8 et 2-87127-796-6.

Auteurs de l'adaptation belge : **R. Midavaine, S. Dereppe, A. Henrioul, C. Vandenberghe.**

Les intentions et choix pédagogiques des auteurs sont ainsi définis :

- ▷ Travailler au premier degré en assurant une continuité des apprentissages (rappels de notions rencontrées à l'école primaire, QCM permettant d'identifier les acquis et certaines lacunes des élèves...)
- ▷ S'appuyer sur une véritable activité mathématique de l'élève, gérée par le professeur.
- ▷ Une démarche construite autour de la résolution de problèmes. (Une rubrique « De quoi s'agit-il ? » dont les réponses permettent d'aborder l'ensemble du programme et une rubrique « Retenir » où l'on trouve les énoncés et les illustrations des savoirs et des méthodes liées aux compétences exigibles du programme.
- ▷ Des exercices différenciés en deux parties « Appliquer le cours » et « S'exercer et approfondir ».
- ▷ Un logo spécifique indique l'obligation d'un calcul mental ou la nécessité d'utiliser une calculatrice ou un ordinateur.
- ▷ Des exercices spécifiques conduisant à la compréhension des énoncés et à l'apprentissage de la rédaction d'une solution.

▷ Une page « Math-Info » où l'on trouve des énigmes à résoudre, des défis, des jeux, une rubrique prenant appui sur l'histoire des mathématiques ou sur les mathématiques dans la vie quotidienne.

Signalons que les ouvrages distinguent un sommaire, un mini-dico et un index. Une icône distingue les matières de 1^{re} année de celles de 2^e.

Aperçu des tables des matières.

Manuel « Nombres ».

1. Les nombres décimaux.
2. La divisibilité.
3. Les nombres relatifs.
4. Les fractions.
5. Algèbre.
6. Traitement de données.

Manuel « Géométrie ».

1^{re} partie - **Les polygones.**

1. Figures géométriques élémentaires. (équerres et compas)
2. Figures géométriques élémentaires. (rapporteur)
3. Périmètres et aires.
4. Descriptions, constructions, justifications.
5. Angles d'un triangle; triangles particuliers.
6. Distances.
7. Triangles (médiatrices, bissectrices).
8. Angles et parallèles.
9. Quadrilatères.

2^e partie - **Les solides.**

10. Dans l'espace.
11. Perspectives et volumes.

3^e partie - **Transformations du plan.**

12. Isométries.
13. Symétrie orthogonale.
14. Symétrie centrale.
15. Translations.
16. Rotations.
17. Projections parallèles (agrandissements, réductions).
18. Transformations.

Le coin du trésorier

P. Marlier

Tarifs (Janvier 2005)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :

– Cotisation ordinaire : 20 €

– Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 28,50 €

– Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 50 € (non PRIOR), 60 € (PRIOR)

Autres pays : 62 € (non PRIOR), 75 € (PRIOR)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 26 €.

Europe : 42 € (non PRIOR), 43 € (PRIOR).

Autres pays : 48 € (non PRIOR), 54 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2002 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.

Années 2003 ou 2004 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 5 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

● Abonnements groupés à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 4 €.

Europe : 7 € (non PRIOR), 9 € (PRIOR).

Autres pays : 10 € (non PRIOR), 14 € (PRIOR).

● Abonnements groupés aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 7 €.

Europe : 13 € (non PRIOR), 17 € (PRIOR).

Autres pays : 15 € (non PRIOR), 20 € (PRIOR).

Abonnements individuels.

- Abonnements à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 6 €. Europe (¹) : 13 € (non PRIOR), 16 € (PRIOR).
Autres pays : 15 € (non PRIOR), 21 € (PRIOR).

- Abonnements aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 11 €. Europe : 16,50 € (non PRIOR), 20,50 € (PRIOR).
Autres pays : 20 € (non PRIOR), 25 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2002-2003 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.

Année 2003-2004 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 43 €. Ils recevront le Bulletin de l'APMEP, le BGV (Bulletin à Grande Vitesse) et PLOT.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP; ils bénéficient du prix « adhérents »..

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 5 de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :

CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429

BIC BPOTBEB1

ou CCP LILLE : IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8502 683

BIC PSSTFRPPLL

Le coin du trésorier

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n° 7 à n° 11 et n° 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 7 (Vers les infiniment petits)			
Simone Trompler et Guy Noël	6 €		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Jacques Bair , Mathématique et Sport	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12 €	9,50 €	T2
G. Robert , CD-Rom, logiciels mathématiques	5 €	/	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €		voir ci-dessous

Frais d'expédition en non PRIOR			
	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	6,50 €	10 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions en **PRIOR**, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.

Exemples de tarification pour commandes groupées							
Brochures OMB (5)				Dossier 8 (Démonstration...)			
1 ex.	T1	4 à 6 ex.	T3	1 ex.	T2	3 à 4 ex.	T4
2 ou 3 ex.	T2	7 à 12 ex.	T4	2 ex.	T3		

Au-delà, consulter le secrétariat

Colloque International à Mons



Colloque organisé par le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, en collaboration avec l'Institut de mathématique de l'Université de Mons-Hainaut.

Le colloque se tiendra dans les locaux de l'Université de Mons-Hainaut, Bâtiment des Grands Amphithéâtres, 6 Avenue du Champ de Mars, B 7000 Mons, Belgique, du 7 au 9 juillet 2005.

Tous les détails d'organisation de cet important rendez-vous des mathématiques en Belgique vous ont été proposés dans le SBPM-Infor n° 136 que vous avez reçu début février.

Tous renseignements complémentaires peuvent être obtenus sur le site du CREM :

<http://www.profor.be/crem>

Congrès 2005 de la SBPMef

Tous nos enfants font des mathématiques

Nous serons particulièrement heureux de vous accueillir du mardi 23 au jeudi 25 août 2005 à Tournai, à l'ISEP (école normale), rue des Carmes, 19b. Le logement se fera à l'Internat de la Communauté française, rue des Carmes, 13-15 (juste à côté de l'école).

Ne manquez pas le n° 137 « spécial Congrès » de SBPM-Infor qui paraîtra en juin.