

## **Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française**

**Secrétariat :** M.-C. Carruana, Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique)

Tél.-Fax : 32-(0)65-373729, courriel : [sbpm@sbpm.be](mailto:sbpm@sbpm.be), Web : <http://www.sbpm.be>

**Membres d'honneur :** H. Levarlet, W. Servais (†)

**Conseil d'administration :** J.-P. Cazzaro, M. Denis-Pecheur, B. Desaedeleer, P. Dupont, Cl. Festraets-Hamoir, M. Frémal, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, P. Marlier, Ch. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ph. Skilbecq, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler, Ch. Van Hooste

### **Président :**

Ch. Van Hooste, Chemin de Marbisæul  
25, 6120 Marbaix-la-Tour,  
Tél. 071-217793

### **Vice-Président,**

#### **Olympiades Internationales :**

G. Troessaert, Recogne sur le Chêne 58,  
6800 Libramont, Tél. 061-224201

### **Administrateur délégué :**

Ch. Michaux, Rue Brigade Piron 290,  
6061 Montignies-sur-Sambre,  
Tél. 065-354706

### **Commission Congrès, Publicité :**

M. Denis-Pecheur, Rue de la Ferme 11,  
5377 Noisieux (Somme-Leuze),  
Tél. 086-323755

### **Trésorier :**

P. Marlier, Rue de Plainevaux 185/15,  
4100 Seraing, Tél. 04-3374945

### **Secrétaire :**

M. Frémal, Rue W. Jamar 311/51,  
4430 Ans, Tél. 04-2636817

### **Olympiades nationales et site WEB :**

Cl. Festraets-Hamoir, Rue J.B.  
Vandercammen 36, 1160 Bruxelles  
Tél. 02-6739044

### **Contact Presse :**

N. Miewis-Seronveaux, Avenue de Péville  
150, 4030 - Grivegnée  
Tél. 04-3431992

### **Math-Jeunes Junior :**

A. Paternotte, Rue du Moulin 78,  
7300 Boussu, Tél. 065-785064

### **SBPM-Infor :**

R. Gossez, Albert I Laan 13, 1560  
Hoeilaart, Tél. 02-6579892

### **Math-Jeunes Senior :**

G. Noël, Rue du 1<sup>er</sup> Chasseur à cheval  
16/14, 7000 - Mons, Tél. 065-848621

### **Portefeuille de lecture :**

M. Herman, Rue Rafhay 95, 4630 Sou-  
magne, Tél. 087-267023

### **Mathématique et Pédagogie :**

J. Miewis, Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée, Tél. 04-3431992

**Comité de rédaction :** J. Miewis, J. Bair, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, Cl. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, Ch. Michaux, J. Navez, G. Noël, Ph. Skilbecq, N. Vandenabeele, Ch. Van Hooste, Cl. Villers

Photo de couverture : Sphère éclatée, The Berkeley Library, Dublin.



# Mathématique et Pédagogie

## Sommaire

### Articles

- N. Rouche, *Des sources familières de la géométrie* 3
- V. Henry, *Tangentes aux coniques : Méthodes passées, présentes et à venir* 41

### Rubriques

- Ph. Skilbecq, *Le Rallye Mathématique, épreuve I* 77
- Y. Noël-Roch, *Dans nos classes* 85
- C. Festraets, *Problèmes* 91
- C. Festraets, *Olympiades* 95
- P. Marlier, *Le coin du trésorier* 100

## NOTE

- \* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante : Jules Miewis, rédacteur en chef, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée. Courrier électronique : j.miewis@infonie.be
- \* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
- \* Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- \* Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>, Word); les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés. L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
- \* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.  
Pour les livres :  
Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.  
Pour les articles :  
Gribaumont A., *Les structures de programmation, Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
- \* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- \* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Editeur responsable : J. Miewis, Avenue de Péville, 150, B-4030 Grivegnée.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

# Des sources familières de la géométrie

**N. ROUCHE, CREM**

Notre idée est de partir à la découverte des sources de la géométrie non dans les traités, mais dans les actions et les objets quotidiens qui provoquent naturellement la pensée géométrique. Il s'agit d'objets qui se trouvent dans l'environnement et d'actions quotidiennes, mais nous examinerons aussi certains matériels et certaines pratiques scolaires auxquels on recourt pour enseigner la géométrie (essentiellement les polygones en carton et le nouveau logiciel appelé *Apprenti Géomètre*). Bien entendu, nous ne saurions évoquer tout ce qui provoque une première pensée géométrique, et cet exposé n'est pas un inventaire. Nous commencerons par les lignes droites et les surfaces planes, omniprésentes dans l'environnement, surtout dans les directions horizontale et verticale. Puis nous examinerons quelques questions d'orientation qui s'y rattachent, pour en arriver ensuite aux polygones et aux solides familiers. La plus grande partie de l'exposé portera sur des objets et actions simples, qui sollicitent surtout l'intelligence pratique. Nous terminerons toutefois par un coup d'œil sur certains objets déformables, plus difficiles à saisir, et qui conduisent naturellement de la perception et des actions aux définitions et au raisonnement, de l'intelligence pratique à l'intelligence discursive.

Signalons deux frontières de cette étude. Tout d'abord les objets et les actions que nous étudions préparent l'idée de mesure, qu'il s'agisse de longueurs, d'aires ou de volumes. Mais nous n'évoquerons aucune mesure. Le monde d'aujourd'hui est à ce point saturé de mesures que l'on en oublierait presque l'existence de grandeurs non mesurées. Or pour construire l'idée de mesure, on ne saurait la présupposer. Il faut partir d'un univers de grandeurs non encore mesurées. C'est celui que l'on trouvera ci-après.

Ensuite nous nous arrêterons en deçà des constructions aux instruments. Celles-ci mériteraient une étude à part entière. Manier des objets tout faits est en général plus simple, demande d'enchaîner moins d'opérations que de

---

Adresse de l'auteur: Nicolas Rouché, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), 5 rue Émile Vandervelde, B-1400 Nivelles, Belgique ; courriel : [rouche@math.ucl.ac.be](mailto:rouche@math.ucl.ac.be). Cet article a déjà été publié dans la revue *L'Insegnamento delle Matematica*. Nous remercions cette revue pour l'autorisation qui nous a été aimablement donnée de le reproduire.



les fabriquer. C'est pourquoi les constructions aux instruments, qui s'appuient néanmoins sur l'intelligence pratique, offrent une transition entre celle-ci et l'intelligence discursive. Mais ceci est donc une autre histoire.

Tout au long de notre parcours, nous nous efforcerons de montrer en quoi nos observations diffèrent, en particulier et en général, de la géométrie des manuels et des traités, que pour la facilité nous appellerons *géométrie théorique*. Elles en diffèrent, tout en y conduisant !

Divers auteurs se sont efforcés, au cours des siècles, de rattacher la géométrie à ses sources familières. Citons parmi les plus marquants Clairaut [1741], Mach [1922] et Freudenthal [1983].

## 1. Les lignes droites et les surfaces planes

Nous prenons ici les locutions *ligne droite* et *surface plane* au sens de la langue commune. Il ne s'agit donc pas de ces droites et plan infinis et infiniment fins dont parlent la plupart des manuels de géométrie. Toutefois, et pour la facilité du langage, nous dirons ci-après simplement *droite* et *plan*.

### 1.1. Les droites verticales

Un corps pesant, abandonné sans vitesse initiale, tombe verticalement. Le fil à plomb matérialise une droite verticale. On plante les poteaux, on construit les pylônes et les tours verticalement, pour assurer leur stabilité. Les droites verticales abondent dans l'environnement. Elles possèdent deux propriétés remarquables, que les roseaux de la figure 1 suffisent à illustrer : d'une part, *elles sont toutes parallèles*, et de l'autre, *elles sont naturellement orientées*. Sur une droite verticale, il y a un sens de bas en haut, et le sens opposé de haut en bas. Chaque roseau a son pied dans l'eau, en bas, et sa tête en haut.

Deux remarques s'imposent dès maintenant. Tout d'abord, la direction verticale n'a rien à voir avec la géométrie théorique : elle est déterminée par la pesanteur, qui est une cause physique. Si nous vivions dans l'espace interplanétaire, nous n'observerions aucune direction privilégiée. Ensuite, nous découvrons d'emblée que les droites verticales sont orientées, alors que l'on

peut très bien construire une géométrie théorique dans laquelle les droites sont introduites longtemps avant qu'on parle de leur orientation possible.

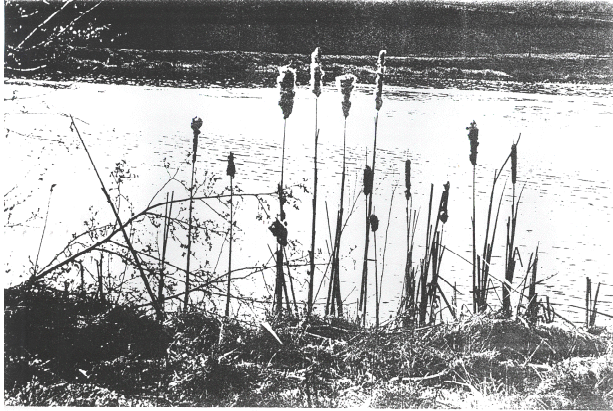


Fig. 1

## 1.2. Les plans et les droites horizontaux

Les plaines que l'on voit en Hollande, la surface d'un étang, le plancher d'une pièce d'habitation sont autant d'exemples de plans horizontaux. Une surface (si elle est solide : nous excluons ici la surface d'un étang !) est un plan horizontal si une bille posée en un quelconque de ses points demeure là où on l'a posée, si elle ne roule pas. Les plans horizontaux ont une propriété remarquable : ils sont tous parallèles. La figure 2 en montre quelques-uns. Notons que, comme les droites verticales, les plans horizontaux ne doivent leur existence qu'à la pesanteur, qui est une donnée physique.

Venons-en maintenant aux droites horizontales, comme par exemple un bâton flottant à la surface d'un étang, les bords d'une table rectangulaire posée sur un sol horizontal, le chemin suivi par une personne qui se dirige en plaine vers un point de son horizon. Contrairement aux droites verticales, les droites horizontales peuvent

soit se couper, comme deux routes droites qui se croisent en plaine ; dans ce cas elles se trouvent toutes deux dans un plan horizontal ;

soit être parallèles, comme les bords opposés d'une table rectangulaire ; dans ce cas, elles se trouvent encore dans un même plan, mais celui-ci n'est pas nécessairement horizontal ; il suffit de penser à une planche rectangulaire dont une arête seulement repose sur le sol ;

soit se croiser sans se toucher, comme les deux lignes de chemin de fer de la figure 3 ; dans ce cas, il est impossible de les imaginer dans un même plan.



Fig. 2

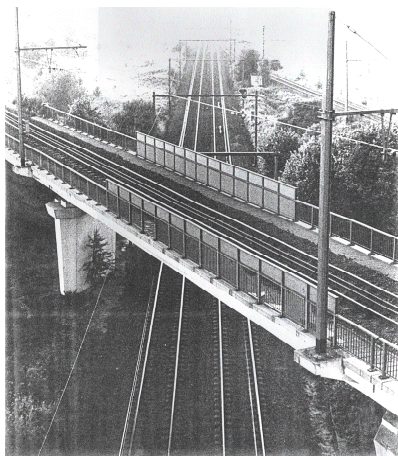


Fig. 3

Contrairement aux droites verticales également, les droites horizontales ne sont pas d'office orientées. Par exemple, une ficelle tendue à l'horizontale n'a pas de direction privilégiée. Par contre, si un être humain avance droit devant lui, il y a un avant et un arrière sur son chemin. L'orientation est ici d'origine biologique : la personne transfère à la droite son orientation propre. D'autres droites sont orientées par convention : tel est le cas lorsqu'une rue rectiligne est déclarée à sens unique.

### 1.3. Bien d'autres droites et plans

Les parements des murs sont le plus souvent des plans verticaux, de même que les tableaux noirs, les portes et les écrans de cinéma. Nous

avons vu que tous les plans horizontaux sont parallèles. Par contre deux plans verticaux peuvent être parallèles ou se couper, et s'ils se coupent, ils le font suivant une droite verticale. L'image d'un album dressé sur une table et dont les feuillets sont écartés en éventail (figure 4) montre que, lorsqu'une droite verticale rencontre un plan horizontal, par le point de rencontre passent une infinité de droites contenues dans le plan. Lorsqu'une droite verticale rencontre un plan horizontal, on dit qu'elle est *perpendiculaire au plan*. Lorsqu'une droite verticale rencontre une droite horizontale, on dit qu'elles sont *perpendiculaires*. Elles forment des angles droits.

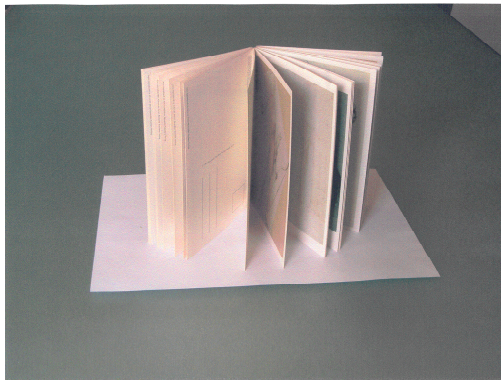


Fig. 4

Jusqu'ici nous avons rencontré des droites et des plans verticaux et horizontaux. Ce sont ceux qui se présentent le plus naturellement à nous, êtres humains qui vivons dans le champ de la pesanteur. Mais il y en a bien d'autres autour de nous, que la géométrie a vocation d'étudier aussi. Donnons-en des exemples.

Une corde tendue peut être tenue dans n'importe quelle direction. Les rayons du soleil tels qu'on les voit filtrer entre deux nuages certains soirs d'orage sont aussi des lignes droites. La ligne de visée du chasseur, qui aligne le cran de mire, le guidon et la cible, est une ligne droite. Lorsque deux plans se coupent, ils le font suivant une droite : c'est le cas par exemple des faces d'une pyramide ou d'un cube.

Il existe de même des plans qui ne sont ni horizontaux ni verticaux. Par exemple les pans d'un toit ou les faces d'une pyramide posée sur sa base.

Une feuille de carton rigide peut être tenue dans une position quelconque. Une lame de scie ou de couteau aussi.

Les bords d'une route droite montante sont des parallèles qui ne sont ni horizontales, ni verticales. Les bords opposés des pages d'un livre sont parallèles, et les bords qui se rencontrent en un même coin de page sont perpendiculaires. Le mât d'un bateau est perpendiculaire au pont, quel que soit le tangage ou le roulis.

Il est intéressant aussi de savoir comment obtenir facilement une ligne droite, un angle droit, des parallèles. Pour obtenir une ligne droite, il suffit de plier une feuille de papier en deux. La règle est un instrument qui matérialise la droite et sert à dessiner des traits droits. On obtient un angle droit en pliant une feuille de papier, puis en repliant le pli sur lui-même. Dès qu'on sait faire un angle droit, on peut obtenir des parallèles, car si deux droites contenues dans un même plan font chacune un angle droit avec une troisième, elles sont parallèles.

Notons enfin deux propriétés remarquables. Tout d'abord, une droite glisse facilement sur une autre sans rompre le contact avec elle. Par exemple, pour autant qu'une tige droite ait un diamètre inférieur au diamètre intérieur d'un tuyau, elle peut glisser longitudinalement à l'intérieur de celui-ci. Ensuite, un plan peut glisser sans contrainte sur un autre. Par exemple, quand un couteau tranche une pomme, le plan de la lame et le plan de coupe coïncident parfaitement.

En résumé, nous percevons le mieux les droites, les plans, les parallèles et les angles droits lorsqu'ils apparaissent en concordance avec les directions verticale et horizontale. Mais, avec un peu d'effort, nous étendons cette connaissance à toutes les directions possibles. Il reste que pour vérifier par exemple si deux droites sont parallèles ou perpendiculaires, nous les amenons spontanément dans la position de meilleure perception, c'est-à-dire dans un plan frontal et dans les directions verticale et horizontale.

Revenons sur ce fait majeur : les droites et les plans que nous observons autour de nous sont beaucoup plus souvent en position verticale ou horizontale que dans d'autres positions. Il contribue à la formation de la pensée géométrique. Imaginons un être humain plongé dans un univers où les droites et les plans apparaîtraient autour de lui dans des positions dues au hasard, c'est-à-dire dans un parfait désordre. Il ne verrait quasiment nulle part de plans ni de droites parallèles ou perpendiculaires. On peut penser qu'un tel être, heureusement hypothétique, développerait une pensée géométrique cohérente beaucoup plus difficilement que l'humanité réelle ne l'a

fait. En réalité, nous vivons dans un univers partiellement ordonné, avec un grand nombre de droites et de plans en position privilégiée. Un tel univers est plus intelligible que s'il était désordonné. Les verticales et les horizontales jouent un rôle important dans la formation de la pensée géométrique, même si la géométrie n'atteint sa maturité théorique qu'en éliminant ces données physiques.

#### 1.4. Une géométrie de sens commun

En considérant d'abord les droites verticales et tout de suite après les plans horizontaux, nous avons situé spontanément notre introduction à la géométrie dans l'espace et non dans le plan. Il n'y a rien d'étonnant à cela, puisque l'être humain vit dans l'espace et non dans un plan. Mais cette façon d'aborder les choses est contraire à l'ordre habituel des traités de géométrie. En effet, dans la plupart de ceux-ci, à commencer par Euclide, la géométrie plane dans sa totalité précède la géométrie spatiale <sup>(1)</sup>.

Les notions auxquelles nous avons recouru jusqu'ici sont empruntées à la pensée commune, ce qui nous a permis de parler sans les définir des droites, des plans, des parallèles et des perpendiculaires, de l'horizontale et de la verticale. Ces notions dérivent de l'expérience et y puisent leur sens. Ce sont des notions non idéalisées. Par exemple, et comme nous l'avons déjà souligné, nous n'avons exigé nulle part que les droites soient non bornées et qu'elles soient extrêmement fines, et pas non plus que les plans soient infinis et dépourvus d'épaisseur. Ces propriétés extrêmes ne deviennent essentielles que si l'on veut assurer d'autres propriétés telles que

deux droites qui se rencontrent se rencontrent en un point et un seul ;

si une droite a un point commun avec un plan, soit elle est tout entière contenue dans le plan, soit elle n'a que ce seul point en commun avec lui.

De telles propositions ont la forme des axiomes d'une géométrie déductive. Mais, on l'a vu, nous avons été capables d'observer beaucoup de choses instructives sans passer par là.

Qui plus est, nous avons accumulé beaucoup d'observations sans donner priorité à certaines d'entre elles. Tel n'est pas le cas des auteurs qui

---

<sup>(1)</sup> En Italie au début du XX<sup>e</sup> siècle, certains défendaient l'idée d'enseigner en même temps la géométrie plane et celle de l'espace. On parlait à cet égard de la fusion des deux enseignements.

élaborent une géométrie déductive. Ceux-là choisissent quelques axiomes et en déduisent tout le reste. Et comme l'a justement observé G. Choquet [1964], dans une telle entreprise, un trop grand nombre d'axiomes serait une source de confusion. Quant à nous, nous pouvons encore ici vivre tranquillement dans un univers où abondent les propriétés de sens commun.

## 2. Quelques questions d'orientation

Nous avons vu que les droites verticales étaient d'office orientées et que les droites horizontales peuvent l'être. Il existe dans l'environnement quotidien quelques autres questions simples d'orientation. Examinons-les.

### 2.1. La gauche et la droite

Le corps d'un être humain regardant droit devant lui est symétrique. Bien sûr, son cœur est à gauche et son foie à droite, mais cela ne se voit pas. Il possède donc, à peu de choses près, un plan de symétrie. Ses yeux, ses oreilles, ses mains sont de part et d'autre. Ce plan contient une verticale orientée : la tête est en haut et les pieds sont en bas. Ce plan contient aussi une horizontale orientée : la personne a les yeux devant et le dos derrière. Par contre, les deux côtés du plan de symétrie sont équivalents : aucun signe visible ne distingue l'un de l'autre. C'est donc par convention qu'un de ses côtés est appelé gauche et l'autre droit.

Si l'être humain avait un grand bras et un petit, de même que le crabe de la figure 5 a une grande pince et une petite <sup>(2)</sup>, il pourrait rattacher son côté gauche (ou droit) à un signe anatomique particulier.

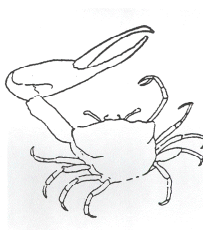


Fig. 5

Cette convention de la gauche et de la droite est liée aux autres orientations : le haut et le bas, l'avant et l'arrière. Pour comprendre cela, regardons

---

<sup>(2)</sup> Cette figure a été empruntée à M. GARDNER [1985].

un adulte montrant la gauche et la droite à un enfant. Ils sont côte à côte, regardant dans la même direction, et l'adulte dit : lève ton bras du même côté que moi : la gauche (ou la droite) c'est par là.

Mais que ferait l'adulte si, comme ce cerf préhistorique de Sardaigne, tout en ayant un haut et un bas, il avait deux avants et pas d'arrière (voir figure 6) ? Il devrait choisir par convention une de ses deux têtes comme tête avant, et l'orner d'une cocarde pour s'en souvenir. Il pourrait ensuite s'occuper de désigner sa gauche et sa droite.

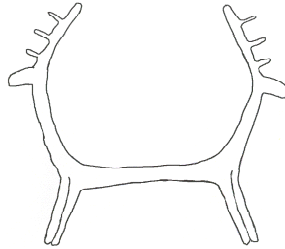


Fig. 6

Il ne suffit pas à l'être humain d'avoir compris ses orientations propres. Encore faut-il qu'il transfère celles-ci aux autres humains, qu'il arrive à reconnaître, par exemple, la gauche et la droite d'une personne qui lui fait face, ou d'une personne couchée. Il y arrive en général en se mettant — fut-ce en pensée — à la place de la personne en question et en se référant alors à sa propre gauche et à sa propre droite. C'est sa façon de passer de la perception subjective de la gauche et de la droite (celle relative à sa propre personne) à une perception objective (relative à un corps quelconque).

Par delà les êtres humains, il y aussi le dessus et le dessous, l'avant et l'arrière ainsi que la gauche et la droite des chiens, des automobiles, des fauteuils, etc. Toutes ces orientations sont déterminées par des causes physiques ou biologiques, la verticale dans tous les cas, le sens de progression pour le chien ou l'auto, la position de la personne assise pour le fauteuil. Au contraire, les questions d'orientation sont traitées, dans la géométrie théorique, de manière abstraite.

## 2.2. Expliquer un chemin

L'avant et l'arrière, ainsi que la gauche et la droite, ne sont pas seulement des propriétés du corps humain intéressantes par elles-mêmes. En effet, elles ont une fonction dans les déplacements. Pour se rendre d'un point à un autre, on se meut normalement en ligne droite et vers l'avant.



Mais pour contourner les obstacles, on tourne de temps en temps vers la gauche ou la droite.

Il y a en gros trois façons d'expliquer un chemin. La première se réfère autant à la personne elle-même qu'aux éléments stables du parcours. On dit par exemple : tu vas tout droit sur telle distance, au carrefour tu prends sur ta droite, au rond-point tu fais trois quarts de tour, etc. La deuxième façon consiste à prendre pour référence le plus souvent les éléments stables du parcours. Par exemple, dans une ville urbanisée comme New York, on dira : tu vas vers le nord jusqu'à ce que tu vois une pharmacie sur un coin, de là tu vas deux blocs vers l'est, etc. La troisième façon consiste à marquer le trajet sur un plan. Elle supprime toute référence à la personne, puisque les seuls éléments de l'explication sont alors les accidents du parcours, notés sur le plan.

Nous voyons à nouveau ici le passage d'une vue subjective à une conception objective. Ce passage ne va pas de soi, comme en témoignent les difficultés qu'éprouvent certaines personnes à lire un plan.

### 2.3. L'orientation des figures et des solides

Nous avons vu ci-dessus que l'être humain, étant symétrique, ne peut désigner que par convention celui de ses côtés qu'il appelle *gauche*, et celui qu'il appelle *droite*. Examinons maintenant une autre propriété des corps ou des objets symétriques.

Commençons par les objets plans, en prenant pour premier exemple la lettre D de la figure 7 (a).

Supposons que cette lettre soit découpée dans du carton et posée sur une table. Dessinons-la en la contournant avec un crayon. Ensuite, soulevons-la, retournons-la et posons-la à nouveau sur la table (figure 7 (b)). Nous n'aurons ensuite aucune peine à la faire glisser (cette fois en évitant de la soulever, mais il faut la tourner) pour l'amener à coïncider avec sa trace dessinée. Si nous essayons de faire de même avec le F de la figure 8 (a), nous n'arriverons pas, après l'avoir retourné (figure 8 (b)), à le superposer à sa trace, quelle que soit la façon dont nous le glisserons sur la table.

Il est assez clair que si une figure possède un axe de symétrie, c'est-à-dire si elle apparaît comme notre D, tout à fait pareille de part et d'autre d'une ligne droite (appelée précisément *axe de symétrie*), alors on peut après retournement la faire coïncider avec sa trace.

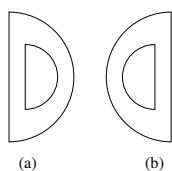


Fig. 7

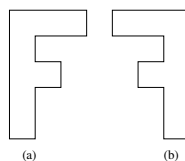


Fig. 8

Réciproquement, si on peut amener une figure à coïncider avec sa trace après retournement, alors cette figure possède un axe de symétrie. Cette propriété réciproque est beaucoup moins évidente que la précédente, et nous ne la démontrerons pas. Ce qui par contre est l'objet d'expériences familières, c'est que certaines figures ont la propriété de pouvoir coïncider avec leur trace après retournement, et que d'autres ne l'ont pas.

Expérience familière soit, mais parfois surprenante. Il est par exemple difficile à dire à l'avance que le parallélogramme de la figure 9 (a) appartient à la première catégorie, et celui de la figure 9 (b) à la seconde. À y regarder de plus près toutefois, on s'aperçoit que celui de gauche possède un axe de symétrie (voir figure 10), tandis que l'autre n'en a pas.

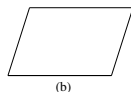
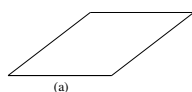


Fig. 9

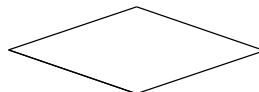


Fig. 10

Ces observations sur les figures en carton que l'on retourne peuvent être interprétées dans un contexte différent si l'on pense à l'effet des miroirs. Passer d'une figure en carton à la même figure retournée a le même effet que passer de cette figure à son image dans un miroir tenu perpendiculairement à la table. Le mécanisme optique par lequel le miroir réalise cela n'est pas évident, mais l'effet est familier : si on pouvait aller derrière le miroir chercher le reflet de la forme en carton, on aurait en main la même chose que la forme en carton retournée.

Ceci dit, voyons maintenant s'il existe dans l'espace comme dans le plan des objets que l'on peut — ou ne peut pas — faire coïncider, après retournement, avec leur trace. Cette question paraît irréaliste, ou même

absurde, pour deux raisons. La première est que l'on imagine difficilement de contourner un objet à trois dimensions pour en conserver la trace. On pourrait néanmoins le reproduire en hologramme... La deuxième est que l'on ne peut pas retourner un objet solide comme on retourne un objet plan. Alors qu'on retourne un objet plan au dessus d'un plan, au dessus de quoi retournerait-on un objet à trois dimensions ? Mais par ailleurs, on peut passer d'un solide à son image dans un miroir.

Reposons alors la question en d'autres termes. Considérons un solide, par exemple celui de gauche à la figure 11. Regardons-le dans un miroir et construisons un objet identique à l'image vue dans le miroir. Ce deuxième objet est celui de droite à la figure 11. Question : peut-on superposer ces deux objets ? Ici aussi, on se heurte à une absurdité : on ne peut pas superposer deux objets à trois dimensions, car ils sont impénétrables. Mais on peut tout de même les superposer en pensée. On peut aussi recourir à une astuce. On utilise, au lieu d'un miroir ordinaire, un miroir semi-transparent, qui est une sorte de vitre-miroir. On construit un objet identique à l'objet de gauche, et on le porte derrière la vitre-miroir. On a alors sous les yeux à la fois le reflet de l'objet de départ et sa copie bien matérielle. Comme le reflet est « pénétrable », on peut vérifier si la copie peut coïncider avec le reflet. Dans le cas de la figure 11, on constate qu'effectivement les deux solides sont superposables. Par contre, les deux solides de la figure 12, bien qu'ils soient exactement de même forme et de même grandeur, ne sont pas superposables.

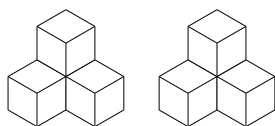


Fig. 11

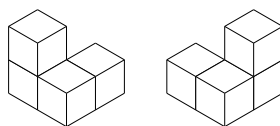


Fig. 12

En conclusion, il existe des objets solides superposables à leur image dans un miroir, et d'autres qui ne le sont pas. Il se fait, mais nous ne nous appesantirons pas ici sur ce point, que ceux de la première catégorie possèdent un plan de symétrie, et les autres non.

Lorsqu'un objet existe ainsi en deux variétés distinctes, images l'une de l'autre dans un miroir, on dit que ces deux variétés sont *énantiomorphes*.

Ce terme savant est moins important que le phénomène très courant qu'il désigne.

Au terme de cette section consacrée aux questions d'orientation, on réalise à nouveau que la géométrie à son début s'enracine dans un univers qui n'est pas seulement géométrique, puisqu'il comprend le corps humain, des animaux, le sens du mouvement et les miroirs.

### 3. Deux familles de polygones simples

Après avoir examiné les droites, les plans et quelques questions d'orientation, venons-en maintenant aux polygones simples. Mais au lieu de les considérer principalement comme des objets d'étude, apprenons à les diviser en parties et à les assembler.

#### 3.1. La famille du carré

Commençons par le carré. Nous expliquerons à la section 3.3 pourquoi nous choisissons celui-ci comme premier polygone à manipuler.

La figure 13 montre diverses façons de diviser un carré par des traits droits en 2, 4 et 8 parties superposables. Ces traits joignent des points très particuliers du carré, à savoir des sommets et des milieux de côtés.

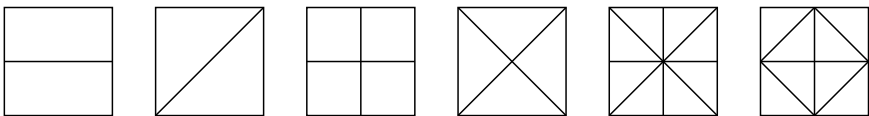


Fig. 13

La figure 14 (a) à (f) montre, outre le carré de départ, un exemplaire de chacune des formes obtenues grâce aux découpages. On a complété cette collection par deux parallélogrammes (figure 14 (g) et (h)). Ceux-ci ont été obtenus en assemblant deux demi-carrés, comme le montre la figure 15, puis en supprimant le côté par lequel ils se touchent. Ces deux dernières figures sont images l'une de l'autre dans un miroir.

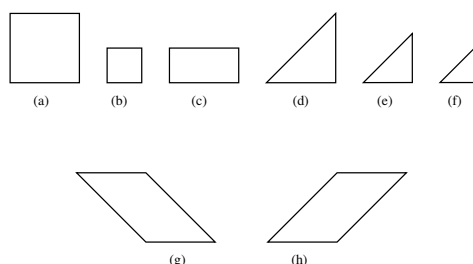


Fig. 14

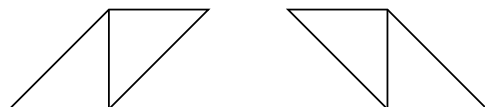


Fig. 15

Les polygones de la figure 14 ont entre eux des liens étroits. Du fait qu'ils sont issus d'un même carré par des divisions et assemblages simples, ils ont entre eux des rapports de longueurs, d'angles et d'aires simples eux aussi. Nous dirons ci-après qu'ils forment la famille du carré.

Il est intéressant ensuite d'explorer les combinaisons extrêmement variées que l'on peut tirer de cette famille en lui appliquant à nouveau les deux opérations de *diviser en parties* et d'*assembler*. On découvre ainsi

toutes les façons d'assembler des carrés identiques 2 par 2, 3 par 3 et 4 par 4 (figure 16), ce qui est un exercice de combinatoire géométrique bien connu,

les façons d'assembler de même des triangles (demi-carrés) 2 par 2 et 3 par 3 (figure 17), ce qui est un exercice analogue de combinatoire géométrique, mais qui, en outre, fait apparaître quelques polygones classiques : deux parallélogrammes énantiomorphes, un carré, un trapèze rectangle, un trapèze isocèle,

les façons de faire des carrés avec des carrés (figure 18) et des triangles avec des triangles (figure 19), ce qui constitue une introduction aux figures semblables et à l'étude des rapports de

longueurs et d'aires dans les similitudes, mais qui peut aussi être une introduction au théorème de Thalès.

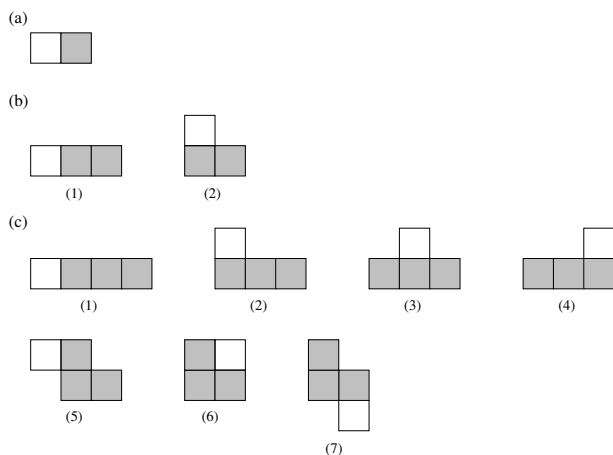


Fig. 16

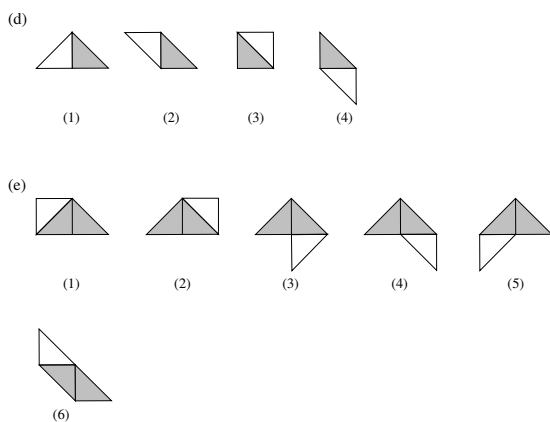


Fig. 17

On découvre des pavages de carrés, de triangles et de parallélogrammes (figure 20). Certains sont familiers, d'autres sont moins communs. Ils invitent à s'intéresser aux pavages non seulement d'un point de vue géométrique,

mais aussi dans l'art décoratif des siècles passés. Les pavages conduisent à la théorie des angles de polygones.

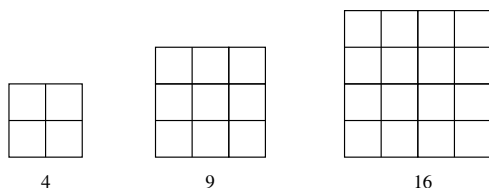


Fig. 18

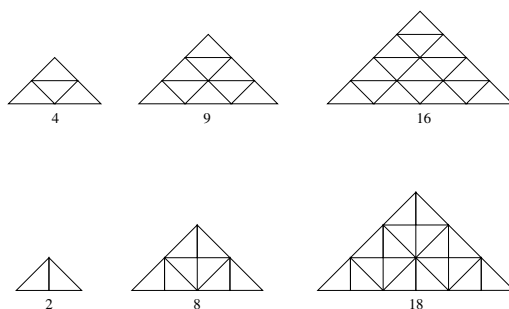


Fig. 19

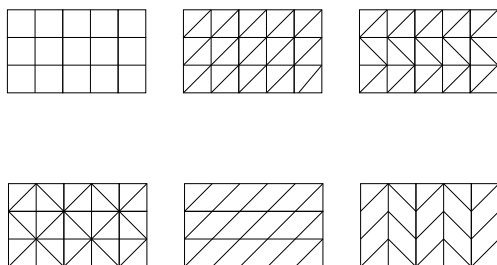


Fig. 20

On apprend à faire deux carrés à partir d'un seul (figure 21), ou en sens inverse, un seul à partir de deux. C'est un problème classique déjà présent

dans le *Ménon*, un célèbre dialogue de Platon, et qui introduit à l'étude de la racine de deux et par là aux nombres irrationnels.

On redécouvre le tangram (figure 22), dont toutes les pièces appartiennent à la famille du carré. Le tangram est un jeu traditionnel chinois d'une extrême ingéniosité. Il est aussi un outil pédagogique intéressant pour l'étude des fractions et des aires.

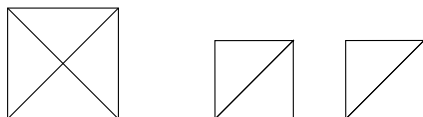


Fig. 21

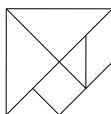


Fig. 22

On peut aussi faire quelques pas vers l'infini en joignant les milieux des côtés du carré pour former un nouveau carré intérieur au premier, puis en joignant les milieux des côtés de celui-ci, et ainsi de suite jusqu'à ce que le nouveau carré à tracer devienne trop petit (figure 23). Il s'agit là d'une suite infinie géométrique, et si on s'intéresse aux aires des carrés successifs, on aboutit à la suite numérique  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  à condition de considérer que l'aire du premier carré est égale à 1.

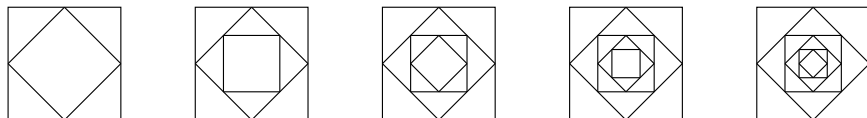


Fig. 23

Avec 2 carrés, on peut former une sorte de cahier à deux feuillets (figure 24 (a)), avec 3 un premier assemblage rigide dans l'espace (figure 24 (b)),



avec 4 une boîte presque complète (figure 24 (c)), avec 5 une boîte sans couvercle (figure 24 (d)) et avec 6 une boîte fermée (figure 24 (e)).

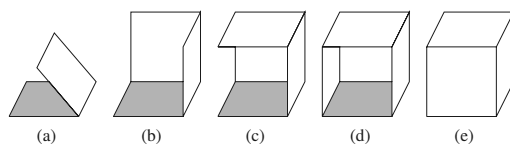


Fig. 24

On peut aussi se convaincre que la figure 25 (a) est bien le développement d'un cube. On peut chercher tous les développements du cube. On peut aussi créer des assemblages de cubes. Et l'imagination peut encore trouver bien d'autres pistes.

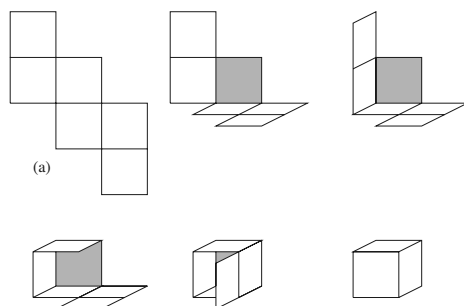


Fig. 25

Nous analyserons à la section 3.3 l'intérêt de la famille du carré et de l'univers des formes que l'on peut en tirer.

## 3.2. La famille du triangle équilatéral

Après avoir manipulé des carrés et des parties de carrés, voyons maintenant ce que nous pouvons faire d'analogue au départ d'un triangle équilatéral.

La figure 26 montre diverses façons de diviser un triangle équilatéral par des traits droits en 2, 3, 4 et 6 parties superposables. On voit sur la figure 26 (b) que les trois traits de division se coupent en un même point,

qu'on appelle le *centre* du triangle. Dans les quatre triangles, les traits de division joignent soit un sommet au milieu du côté opposé, soit dans le cas de la figure 26 (c), le centre du triangle à un sommet, ou encore les milieux de deux côtés.

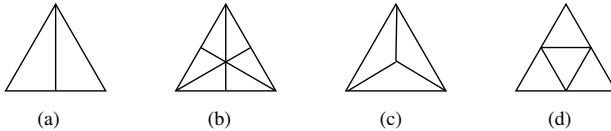


Fig. 26

La figure 27 (a) à (g) montre, outre le triangle de départ, un exemplaire de chacune des formes obtenues grâce aux découpages. On a complété cette collection par un losange, un trapèze et un hexagone (figure 27 (h) à (j)). Ceux-ci ont été obtenus en accolant 2, 3 ou 6 triangles, comme le montre la figure 28, puis en supprimant les côtés par lesquels ils se touchent. Sur la figure 27, les triangles rectangles existent en deux exemplaires, chaque fois images l'un de l'autre dans un miroir.

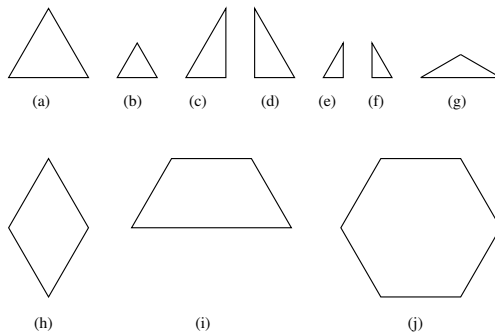


Fig. 27

Comme dans le cas du carré, les polygones de la figure 27 ont entre eux des liens de parenté, avec des rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires. Nous dirons qu'ils forment la famille du triangle équilatéral.

Explorons maintenant les formes que l'on peut tirer de cette famille en soumettant ses membres à de nouvelles opérations de division en parties

et d'assemblage. Les possibilités sont extrêmement nombreuses, aussi nous contenterons-nous de quelques exemples.

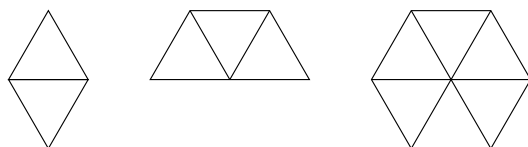


Fig. 28

On peut trouver de nouvelles façons de diviser un triangle (figure 29) ou un hexagone (figure 30), ce qui fait apparaître des figures de deux sortes : certaines ont plusieurs axes de symétrie, alors que d'autres n'en ont pas ; toutes se superposent à elles-mêmes lorsqu'on les tourne d'un tiers de tour (pour les triangles) et d'un sixième de tour (pour les hexagones).



Fig. 29

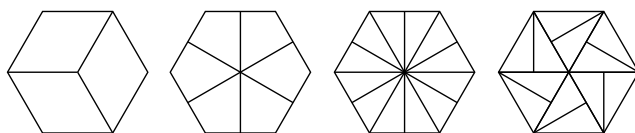


Fig. 30

On peut chercher toutes les façons d'assembler 2 demi-triangles équilatéraux (figure 31). On trouve six combinaisons : un rectangle, deux parallélogrammes, un « cerf-volant », un triangle équilatéral et un triangle isocèle. On peut leur ajouter les deux figures énantiomorphes des deux parallélogrammes.

On peut chercher à faire des triangles avec des triangles (figure 32) et aussi s'apercevoir qu'on n'arrive pas à faire des hexagones avec des hexagones (figure 33).

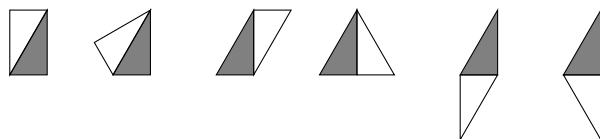


Fig. 31

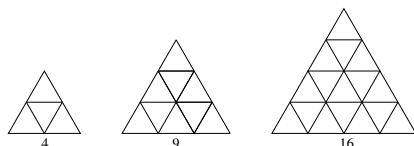


Fig. 32

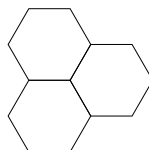


Fig. 33

On peut faire des pavages avec des triangles équilatéraux, des hexagones, des trapèzes (figure 34). Les deux premiers, joints au pavage ordinaire avec des carrés, épuisent la collection des pavages réguliers, ceux qui sont constitués de polygones réguliers identiques à côtés jointifs sur toute leur longueur.

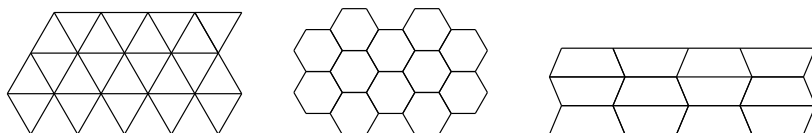


Fig. 34

On peut assembler trois triangles équilatéraux pour former une sorte de cornet à 3 faces. Mais on peut aussi faire un cornet à 4 faces et un à 5 faces (figure 35). Les essais de cornets à six faces conduisent à une figure qui peut être plane : un hexagone régulier.

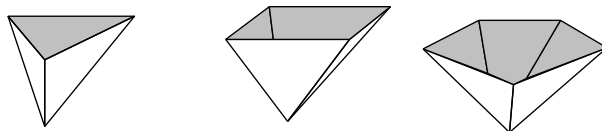


Fig. 35

On peut fermer le cornet à trois faces avec un quatrième triangle, ce qui donne un solide appelé tétraèdre régulier (figure 36). On peut former d'autres solides en accolant deux cornets à 3 faces, deux cornets à 4 faces (figure 37). Ce dernier est un octaèdre régulier. Le cube, le tétraèdre régulier et l'octaèdre régulier constituent les trois premiers polyèdres réguliers, appelés aussi *polyèdres platoniciens*.

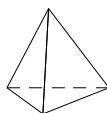


Fig. 36

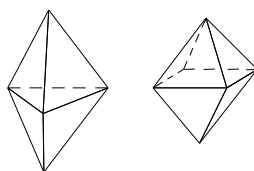


Fig. 37

### 3.3. Pourquoi des familles de polygones ? Pourquoi ces familles ?

Pourquoi, dans les deux sections précédentes, nous sommes-nous occupés au départ de polygones, et non de surfaces limitées par des courbes, telles que les cercles et les ellipses ? D'abord les polygones accrochent le regard sur ces éléments distincts que sont les côtés, les sommets et les angles. Ceux-ci donnent prise à la pensée et au langage. À l'opposé, le regard glisse le long des courbes. De plus, le fait que les côtés des polygones sont droits a deux conséquences pratiques :

d'abord on reconnaît ou on peut fixer sans peine leur direction, par exemple disposer un côté horizontalement ;

ensuite on peut rapprocher deux polygones jusqu'à ce qu'ils aient deux côtés jointifs, ce qui peut créer une situation géométriquement intéressante.

Deuxième question : pourquoi avons-nous choisi de partir du carré ? D'abord, il s'agit d'une figure familière. Ensuite, cette figure a peu de côtés, ce qui en facilite la perception. On objectera peut-être que le triangle équilatéral, notre deuxième figure de base, en a un de moins. Mais le carré a l'avantage d'avoir quatre angles droits, et de ce fait il cadre bien avec les deux directions physiques de base que sont la verticale et l'horizontale.

Tous les carrés sont semblables. Il s'agit donc d'une figure aisément reconnaissable : quelle que soit sa grandeur, elle ne change pas de forme. Tel n'est pas le cas du rectangle, figure elle aussi familière et possédant quatre angles droits <sup>(2)</sup>.

Le carré a des symétries multiples, ce qui a une conséquence majeure : si on part d'un carré de grandeur fixée et si on le soumet aux opérations de base que sont la division en parties superposables, l'assemblage et la fusion, on engendre une famille de formes nouvelles qui ont entre elles des rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires. Et donc, comme nous l'avons vu, si on continue à manipuler ces formes par division, assemblage et fusion, on a une probabilité élevée d'obtenir des résultats intéressants. On entend par là des pièces qui s'ajustent bien entre elles, dont les ajustements sont en appel d'une explication géométrique et qui sont donc porteuses d'un savoir théorique <sup>(3)</sup>. À la section 3.1, nous avons rassemblé, sous le nom de famille du carré, les quelques premières formes issues des manipulations d'un carré, puis nous avons illustré par des exemples l'univers extrêmement riche des formes que l'on peut obtenir en poursuivant les manipulations.

Passons maintenant au triangle équilatéral. Ce que nous en avons fait ressemble à ce que nous avons fait du carré. Il est lui aussi une figure à peu de côtés et très symétrique. Tous les triangles équilatéraux, quelle que soit leur grandeur, ont la même forme. En partant d'un triangle équilatéral de grandeur fixée, on engendre par division, assemblage et fusion, ce que nous avons appelé la famille du triangle équilatéral. Il s'agit à nouveau de formes qui ont entre elles des rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires, et qui, de ce fait, sont porteuses de phénomènes géométriques multiples et intéressants.

---

<sup>(2)</sup> Le carré est aisément reconnaissable, avec toutefois un certain degré d'imprécision, car il est difficile de s'assurer à l'œil que ses quatre côtés sont de même longueur. C'est sans doute une des raisons qui font qu'il est souvent dans le quotidien confondu avec le rectangle.

<sup>(3)</sup> H. Freudenthal [1983] a souligné le rôle de ces ajustements (en anglais *fittings*) dans la formation de la première pensée géométrique.

Par ailleurs, pourquoi avons-nous présenté séparément les deux familles du carré et du triangle équilatéral ? C'est qu'entre ces deux familles, l'entente n'est pas parfaite. Nous avons dit qu'il y avait beaucoup de rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires entre les membres d'une même famille. Tel est beaucoup moins le cas entre les membres des deux familles. Certes, il arrive que les carrés et les triangles équilatéraux, lorsqu'ils ont des côtés de même longueur, s'entendent bien. On le voit par exemple pour les deux pavages de la figure 38. Mais de tels rapports de convenance, porteurs de significations géométriques, sont bien plus nombreux à l'intérieur d'une même famille. Ceci fait que si on explore une famille à la fois, on a bien plus de chances de découvrir des combinaisons intéressantes que si on travaille sur la réunion des deux familles.

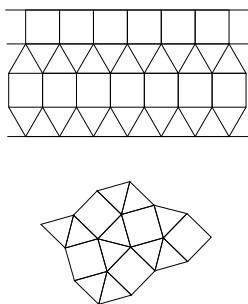


Fig. 38

Un mot d'explication maintenant sur le terme *famille*. En géométrie élémentaire, l'ensemble des trapèzes est parfois appelé *famille des trapèzes*, l'ensemble de parallélogrammes *famille des parallélogrammes*, etc. Mais ces familles sont d'une tout autre nature que celles dont nous avons parlé ci-dessus. Ces sont des familles (des ensembles) qui s'identifient à des concepts et répondent donc à des définitions dépourvues d'ambiguïté. Par contre, ce que nous avons appelé ci-dessus *famille du carré* et *famille du triangle équilatéral* sont des ensembles cernés de façon approximative. On pourrait en ôter ou y ajouter l'un ou l'autre polygone sans qu'elles perdent leur sens, qui est de favoriser l'émergence de phénomènes (de *fittings*). Étant entendu pourtant que les définitions mathématiques sont indispensables, mais que leur fonction est moins de dire ce que sont vraiment les choses définies que d'aider à mettre de l'ordre dans les phénomènes et à les comprendre.

Pourquoi nous sommes-nous bornés à présenter deux familles, et non trois, ou quatre ou davantage ? N'existe-t-il pas aussi par exemple une famille du pentagone régulier, et d'autres analogues ? Il est vrai qu'on pourrait proposer une famille du pentagone régulier, mais elle serait déjà un peu à la limite de notre propos. En effet, le pentagone est une figure beaucoup moins familière que le carré et le triangle équilatéral, le nombre 5 est moins accessible à l'intuition que ne le sont 3 et 4, et en outre les parties du pentagone régulier obtenues par division et assemblage ont entre elles des rapports assez complexes. Deux faits corroborent cette affirmation : d'une part, le nombre d'or, qui n'est pas simple, est le rapport que l'on trouve le plus immédiatement dans les pentagones, et d'autre part il n'existe pas de pavage du plan avec des copies d'un pentagone régulier.

### 3.4. Glisser, tourner, retourner

Voyons maintenant comment on peut s'y prendre pratiquement pour travailler dans la famille du carré ou celle du triangle équilatéral. La chose paraît simple. En partant des polygones de la famille, et pour réaliser l'objectif que l'on se donne, on leur applique dans un ordre judicieux les trois opérations de diviser en parties, assembler et fusionner.

Ces opérations sont toutefois bien distinctes selon le contexte dans lequel on les applique. Pour le montrer, comparons ce qui se passe d'une part lorsqu'on travaille avec des polygones en papier, et d'autre part lorsqu'on utilise un logiciel nouveau appelé *Apprenti Géomètre* (ci-après, nous dirons simplement AG). On trouvera une brève introduction à ce logiciel en appendice à la présente étude.

On divise des polygones en papier en les pliant ou en y traçant des traits à la règle. On peut ensuite les découper. Dans AG, on désigne à la souris les deux extrémités du trait de division, puis on active la commande *découper*.

L'opération d'assembler est plus difficile et plus longue à commenter : nous y viendrons ci-après. Par contre, fusionner est simple dans les deux contextes. Pour fusionner deux polygones en papier jointifs, on les colle au scotch. Pour fusionner deux polygones jointifs à l'écran, on les sélectionne successivement par un clic, puis on active la commande *fusionner*.

En ce qui concerne l'opération d'assembler, expliquons-nous sur un exemple. Supposons d'abord que l'on ait pour consigne de former un lo-



sange en assemblant 4 triangles rectangles en papier (des demi-triangles équilatéraux). Les triangles de départ et le losange sont ceux que montre la figure 39.

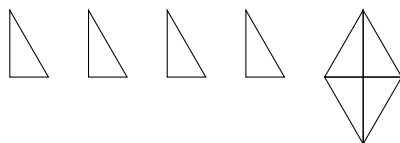


Fig. 39

Supposons d'abord que l'exercice se fasse à partir de triangles en papier. Voici un scénario possible, parmi bien d'autres qui lui ressemblent. Les triangles sont déposés en désordre sur la table, par exemple comme sur la figure 40.

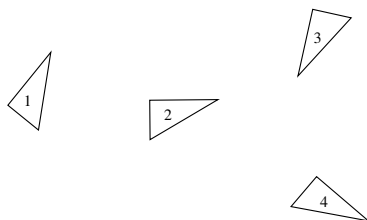


Fig. 40

On rapproche les triangles 1 et 2 en les traînant sur la table (sans les soulever) pour les accoler par un côté. La figure 41 montre les trois résultats possibles. Aucun d'eux ne suggère un « début » de losange.

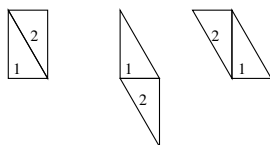


Fig. 41

Une idée est alors de retourner le triangle 2 et de former le triangle équilatéral de la figure 42 (a).

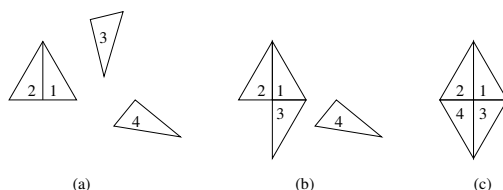


Fig. 42

Ensuite on va chercher le triangle 3 et on le traîne sur la table pour former la figure 42 (b). Et enfin, on amène le triangle 4 en place, toujours en le traînant sur la table (figure 42 (c)).

Voici maintenant un scénario plausible pour répondre à la même consigne, mais en se servant cette fois d'Apprenti Géomètre. La figure 43 donne le film des opérations. Le triangle ombré est dans chaque cas celui qui subit un mouvement.

D'abord on va chercher un triangle dans la famille du triangle équilatéral et on en fabrique 3 autres grâce à la commande *dupliquer*. Ils apparaissent comme sur la figure 43 (a), chacun avec un côté horizontal.

On isole les triangles grâce à la commande *glisser* (figure 43 (b)). Ensuite on essaie d'accoler les triangles 1 et 2. Pour y arriver, on fait d'abord faire un demi-tour au triangle 2, grâce à la commande *tourner* (figure 43 (c)). Ensuite, grâce à la commande *glisser*, on accole ce triangle au triangle 1, ce qui donne l'un des trois résultats que montrent les figures 43 (d), (e) et (f). Rien là qui indique un "début" de losange.

On se ramène alors au cas précédent (figure 44 (a)).

Grâce à la commande *retourner*, on retourne le triangle 2 (figure 44 (b)). On accole ce triangle au triangle 1 grâce à la commande *glisser* (figure 44 (c)). On fait faire un demi-tour au triangle 3 (figure 44 (d)), puis on le fait *glisser* pour l'accoler au triangle 2 (figure 44 (e)). Ensuite, on retourne le triangle 4 (figure 44 (f)), puis on lui fait faire un demi-tour (figure 44 (g)), et enfin on l'amène par glissement en position finale (figure 44 (h)).

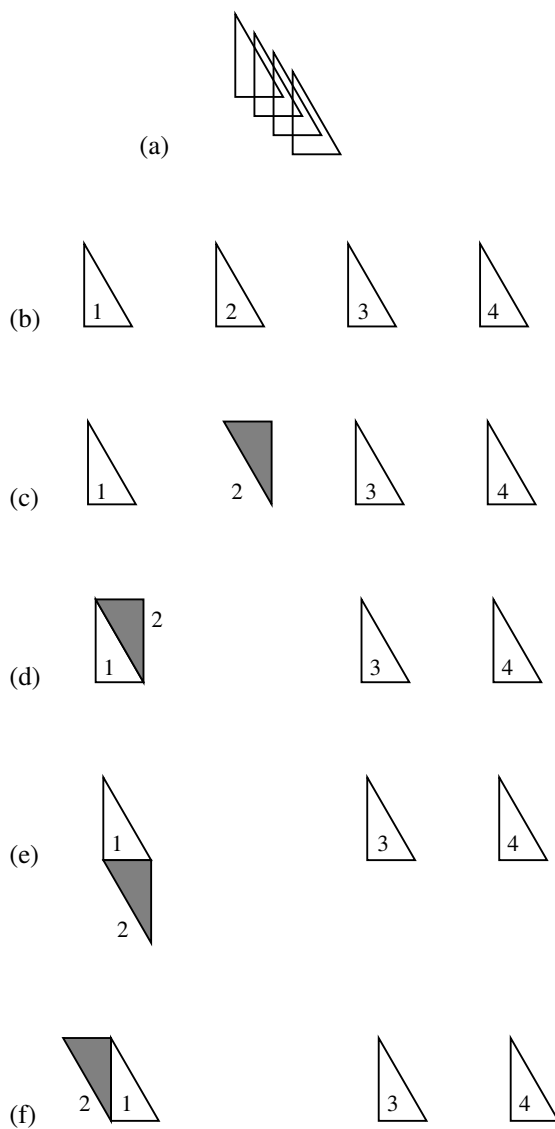


Fig. 43

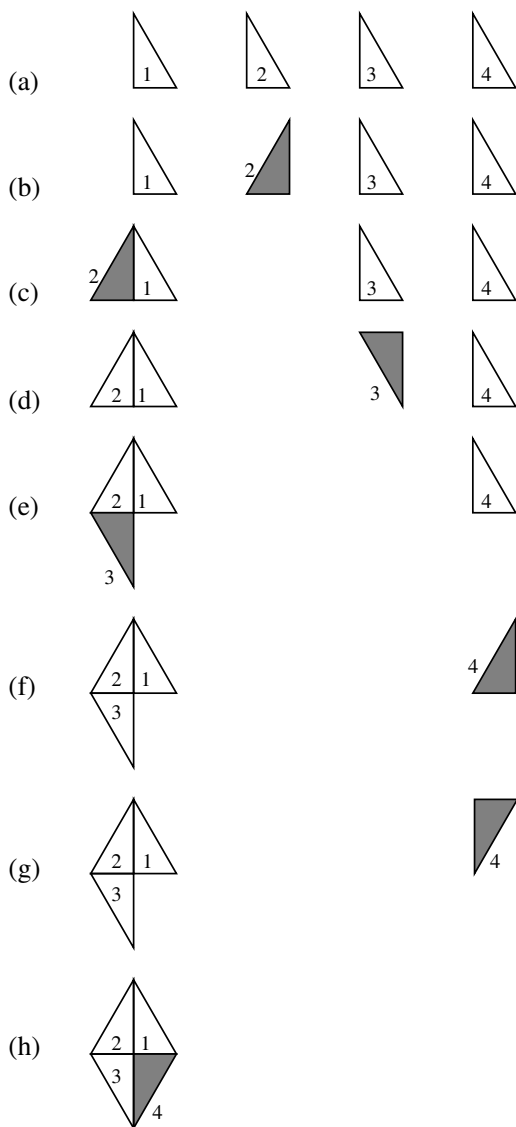


Fig. 44

Voyons maintenant ce qui différencie les deux contextes, celui des triangles — ou plus généralement des polygones — en papier et celui d'Apprenti Géomètre. Les polygones en papier peuvent être déposés sur la table sans être nommés, tandis que ceux d'AG sont amenés à l'écran à l'appel de leur nom dans un menu déroulant. Alors que les figures en papier sont au départ en désordre, celles d'AG apparaissent toujours dans la même orientation (un côté horizontal). Pour modifier celle-ci, il faut une action volontaire : le recours à la commande *tourner*.

Les polygones en papier sortent de la boîte où on les range et tombent sur la table, non seulement en désordre, mais sur une face ou l'autre, au hasard. À l'écran, les polygones apparaissent toujours dans la même variété énantiomorphe (toujours sur la même face pourrait-on dire).

Les actions auxquelles on soumet les polygones en papier peuvent être exécutées sans être nommées, elles peuvent même être mal identifiées et porter sur plusieurs polygones à la fois. Les actions dans AG sont sélectionnées par leur nom, et l'action ne porte jamais que sur un seul objet à la fois.

Les mouvements par lesquels on rapproche deux polygones en papier pour les assembler sont des mouvements libres : on les glisse sur la table en les faisant éventuellement tourner de manière involontaire, on les soulève et ils peuvent retomber au hasard sur l'une ou l'autre face. On peut d'ailleurs en manier plusieurs à la fois. Au contraire, l'utilisateur d'AG doit choisir — consciemment, et donc avec une intention — d'abord le polygone qu'il veut déplacer, puis l'un des trois mouvements *glisser*, *tourner* et *retourner*. N'importe quel changement de position ne peut être obtenu que par un enchaînement judicieux de *glisser*, *tourner* et *retourner* : il doit être construit.

Enfin, deux polygones en papier assemblés ne le sont qu'approximativement, étant donné les tremblements de la main et l'imprécision de la vue. De plus, ils s'écartent l'un de l'autre au moindre courant d'air. Dans AG au contraire, une fonction "magnétique" assure un ajustement précis des polygones les uns aux autres. De plus, deux polygones assemblés ne peuvent être dissociés que par recours à une nouvelle commande.

Dernière différence enfin : les manipulations de polygones en papier peuvent se faire en silence, ou s'accompagner de commentaires dans la langue la plus spontanée. Au contraire, chaque action réalisée sur AG est appelée par son nom, tel qu'il apparaît à l'écran ou dans une bulle d'aide.

Cette comparaison des deux contextes ne vise nullement à montrer la supériorité de l'un des deux. Travailler avec des polygones en papier exerce la motricité fine et oblige à s'orienter dans un univers de mouvements inorganisé a priori, dépourvu de contraintes. Travailler dans AG, c'est accéder à un univers où les objets et leurs relations sont très précisément définis et où les mouvements sont simples et chacun désigné par son nom.

De manière plus générale, on peut dire que, comparé au contexte des polygones en papier, celui d'AG est plus ordonné, plus structuré, avec des mouvements décomposés, ce qui contribue à augmenter son intelligibilité.

Bien sûr, la géométrie théorique ignore les mouvements et ne connaît que les transformations. Dans celles-ci seules comptent les positions de la figure (des points du plan) au départ et à l'arrivée. Les positions intermédiaires ne comptent pas. Les mouvements de base d'AG s'observent au contraire continûment entre le départ et l'arrivée. Ils n'appartiennent pas à la géométrie théorique, mais ils y conduisent.

## 4. Des polygones plus généraux

Nous ne nous avancerons guère plus loin dans notre recherche des sources d'une première géométrie. Contentons-nous de quelques indications sur la découverte de polygones plus généraux que ceux rencontrés jusqu'ici.

Nous avons ci-dessus divisé, assemblé et fusionné des polygones très symétriques, en petit nombre. Soumettons maintenant certains de ceux-ci à d'autres opérations. À titre d'exemple, partons du carré.

Un carré construit en tiges articulées peut par déformation donner tous les losanges de la figure 45, ce qui est assez clair puisque les quatre côtés sont égaux au départ et le demeurent.

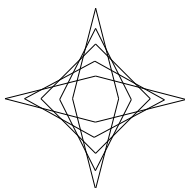


Fig. 45

Deux bandes d'égale largeur croisées à angle droit déterminent un carré. Si on les incline l'une sur l'autre, elles engendrent tous les losanges de la figure 46. Cette propriété est beaucoup moins évidente que la précédente et mérite une démonstration, que nous n'aurons néanmoins pas le loisir de présenter ici.

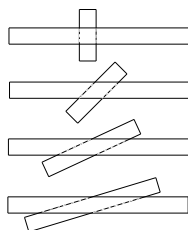


Fig. 46

Si on dispose tous ces losanges les uns sur les autres, on obtient la figure 47.

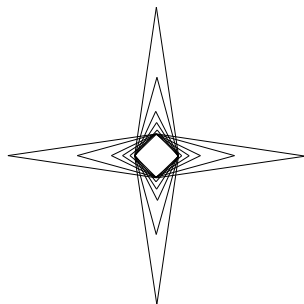


Fig. 47

Partons de deux tiges d'égale longueur articulées en leur milieu et disposées à angle droit. Elles sont les diagonales d'un carré, que l'on peut dessiner en joignant par un trait les extrémités des tiges. En variant l'angle, on obtient tous les rectangles de la figure 48. Il n'est pas trop difficile de voir ici que tous ces rectangles sont inscrits dans un cercle : cela tient à ce que les diagonales des rectangles sont égales et de longueur constante et qu'elles se coupent en leur milieu.

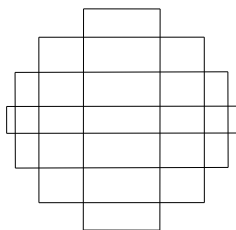


Fig. 48

On noue une ficelle en boucle, puis on la tend entre quatre doigts pour former un carré. On peut alors la déformer en rectangles, et tous les rectangles ainsi formés ont le même périmètre. Ils sont représentés à la figure 49. Le fait que ceux-ci s'inscrivent dans un carré mériterait aussi une démonstration.

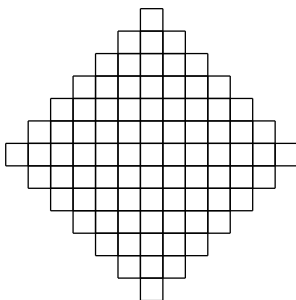


Fig. 49

Chacune de ces quatre façons de déformer un carré engendre une infinité de figures. Une infinité, c'est beaucoup. Et néanmoins, comme on le voit aux figures 45 à 49, on arrive encore à se représenter la totalité des losanges, ou la totalité des rectangles <sup>(4)</sup>. Ceci fait que l'on arrive à saisir intuitivement certaines propriétés du losange et du rectangle, le singulier renvoyant ici à tous les losanges, à tous les rectangles.

Pour s'avancer plus loin dans la géométrie, il faut considérer des figures qui existent dans une telle variété de formes qu'on ne peut plus se les

---

<sup>(4)</sup> La totalité, c'est un peu vite dit : il s'agit de la totalité à similitude près.



représenter dans leur ensemble. Tel est déjà le cas des quadrilatères : ils confondent l'imagination, comme la figure 50 le suggère.

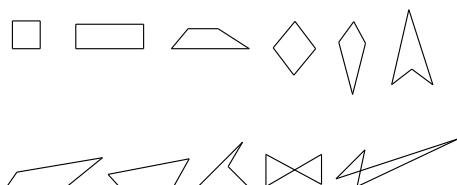


Fig. 50

Et donc si on veut s'assurer de l'une ou l'autre propriété du quadrilatère (un singulier qui renvoie à tous!), comme le regard ne suffit à coup sûr plus, il faut nécessairement raisonner. La démonstration prend ici forcément le relais.

## 5. Pour aller plus loin

Nous avons discerné, aux sources de la géométrie, non seulement des figures, mais des actions sur celles-ci : diviser, assembler, fusionner, articuler, croiser des bandes, nouer et tendre un fil. Il existe un autre type d'actions, générateur d'un savoir géométrique plus avancé : c'est la construction des figures. C'est cette construction qu'il faudrait examiner maintenant pour aller plus loin.

Nous avons aussi trouvé, aux sources de la géométrie, les trois mouvements de glisser, tourner et retourner, qui intervenaient dans les assemblages de figures. Au delà de ces trois mouvements, on trouve les isométries du plan : la translation définie par un segment orienté, la rotation par un centre et un angle, et la symétrie orthogonale par un axe. Et puis il y a les mouvements et les isométries de l'espace.

Et pour aller plus loin encore, il faudrait commencer à mesurer les longueurs, les aires et les volumes.

Mais tout ceci est au delà de notre propos.

## 6. Appendice : L'univers très ordonné du logiciel Apprenti Géomètre

Apprenti Géomètre est un logiciel d'aide à l'apprentissage des mathématiques, conçu par le CREM à la demande du Ministère de l'Enfance de la Communauté française de Belgique. Il est disponible en téléchargement libre sur le site internet <www.enseignement.be/geometre>. Voir aussi, dans la bibliographie, M.-F. Van Troeye [2003], ainsi que N. Rouche et Ph. Skilbecq. Ci-après, nous abrégons Apprenti Géomètre en AG.

Pour les besoins du présent article, il nous suffira de décrire comment, dans ce logiciel, on peut d'abord amener un polygone à l'écran, et ensuite le déplacer <sup>(5)</sup>.

Supposons que l'on veuille amener à l'écran un polygone donné, par exemple un triangle rectangle possédant un angle de  $\pi/3$  (un demi-triangle équilatéral). Il suffit de le sélectionner dans un menu déroulant, ce qui le fait apparaître à l'écran toujours avec la même taille et dans la même position, à savoir avec un côté horizontal comme le montre la figure 51. On sait qu'un tel triangle existe en deux versions, images l'une de l'autre dans un miroir (voir figure 52) : seule la version (a) apparaît à l'écran.



Fig. 51

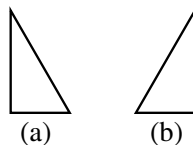


Fig. 52

Il existe trois façons de déplacer ou modifier le triangle.

- 1) On sélectionne le verbe *glisser* <sup>(6)</sup> dans un menu déroulant. Cela permet de traîner le triangle à la souris jusqu'à un endroit quelconque de l'écran. Pendant tout le transport, le triangle conserve son orientation, avec un côté horizontal.

---

<sup>(5)</sup> AG offre à l'utilisateur deux champs d'expérimentation appelés respectivement le *kit standard* et le *kit libre*. Ce qui suit relève uniquement du *kit standard*, celui des deux qui est le mieux adapté aux mathématiques élémentaires.

<sup>(6)</sup> Dans une première version du logiciel, le verbe en question était *déplacer*.

2) On sélectionne le verbe *tourner* dans un menu déroulant. On peut ensuite faire tourner le triangle, à la souris, d'un angle que l'on détermine à vue. Le centre de la rotation est automatiquement le centre de la figure <sup>(7)</sup>, ce qui fait que celle-ci tourne en quelque sorte sur place. L'opérateur ne doit donc pas se soucier de désigner le centre.

3) On sélectionne le verbe *retourner* dans un menu déroulant, puis on clique sur la figure à retourner. Celle-ci subit alors une symétrie orthogonale. L'axe de cette symétrie est invariablement vertical, et passe par le centre de la figure. L'opérateur ne doit pas se soucier de désigner l'axe. La figure se retourne en quelque sorte sur place.

Une combinaison appropriée de ces trois mouvements permet de soumettre la figure à un déplacement ou un retournement quelconque. Chaque mouvement est ainsi nécessairement composé de mouvements élémentaires, on pourrait dire de *mouvements de base*. Il n'existe dans AG aucune possibilité d'emmener librement une figure d'une position à une autre, comme on peut le faire avec un polygone en carton sur une table. Il n'existe aucune possibilité de mouvements "sauvages". En ce sens, AG offre à l'utilisateur un champ d'expériences particulièrement ordonné et intelligible.

Remarquons que si les trois mouvements de *glisser*, *tourner* et *retourner* préfigurent – jusqu'à un certain point – les trois isométries planes de base que sont la translation, la rotation et la symétrie orthogonale, ils ne s'y identifient pas. Nous l'avons dit, le glissement se règle à vue, et l'opérateur ne doit nullement le définir par un vecteur désignant le point d'arrivée d'un point donné de la figure. La rotation s'effectue à vue, l'opérateur n'ayant pas à en désigner le centre et réglant son angle à l'estime. Le retournement est automatique et l'opérateur ne doit pas spécifier la position d'un axe de symétrie. Les transformations en un sens plus technique appartiennent à un stade plus avancé de la géométrie et sont, dans AG, disponibles dans le kit libre.

Merci très amicalement à Thérèse Gilbert pour ses remarques intéressantes sur une première version de cet article, ainsi qu'à Christine Lemaître pour toute l'aide apportée à la mise au point du manuscrit.

---

<sup>(7)</sup> Exactement son centre d'inertie.

## Bibliographie

- [1] A.-C. Clairaut, *Éléments de géométrie*, Paris, 1741 ; rééd. Gauthier-Villars, Paris, 1921.
  - [2] G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris, 1964.
  - [3] H. Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.
  - [4] M. Gardner, *L'univers ambidextre*, Seuil, Paris, 1985.
  - [5] E. Mach, *L'analyse des sensations*, 1922 ; trad. fr. F. Eggers et J. Monnoyer, Éditions Jacqueline Chambon, Nîmes, 1996.
  - [6] M.-F. Van Troeye, coord., *Apprenti Géomètre*, Communauté Française de Belgique et Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), Bruxelles et Nivelles, 2003.
  - [7] N. Rouche et Ph. Skilbecq, *Apprenti Géomètre : un nouveau logiciel, Mathématique et Pédagogie*, n° 149, 2004, pp. 69-84.
- 

## Internet Corner.

Le logiciel allemand **MatheAss** existe à présent en version française. Il peut être téléchargé pour Win 95/98 en version shareware à partir du site

<http://home.t-online.de/home/matheass/download.htm>

D'un emploi facile, il comprend des rubriques d'algèbre classique (nombres premiers, décomposition en facteurs premiers, PGCD et PPCM, conversion de nombres décimaux en fractions et réciproque, équations binômes, calcul avec fractions, calcul avec nombres complexes...); il se débrouille bien en géométrie (triangles rectangles, résolution de triangle, polygones, cercles, systèmes de coordonnées, droite par deux points, plan par trois points, sphère par quatre points, intersection dans le plan et l'espace, distance,...). Côté analyse, on y trouve la division des polynômes, un traqueur de fonctions, les fonctions par segment, les courbes paramétriques et famille de courbes, les développements en série, le calcul intégral... Un menu gère l'algèbre linéaire et un autre les probabilités élémentaires. À découvrir ...

place réservée à la publicité

# Tangentes aux coniques : Méthodes passées, présentes et à venir

**V. HENRY, *Université Paul Sabatier de Toulouse  
et Université de Liège***

## Introduction

En Communauté française de Belgique, le programme officiel de mathématiques dans l'enseignement secondaire général prévoit l'étude des tangentes à une courbe dans plusieurs situations différentes : en troisième et quatrième années lors de l'étude du cercle en géométrie élémentaire, en cinquième année avec le tracé de la représentation graphique d'une fonction en analyse, en dernière année à propos de l'étude des coniques en géométrie analytique.

L'étude des tangentes en un point d'une conique figure explicitement dans le chapitre de géométrie dispensé dans les cours de mathématiques à six périodes hebdomadaires lors de la dernière année du secondaire ; le programme y prévoit comme matière l'étude des coniques : *définitions géométriques et équations cartésiennes réduites, avec notamment comme application la notion de tangente à une conique* ([17], p. 22). Les directives officielles concernant la façon d'enseigner cette dernière matière sont in-existantes ; il est toutefois recommandé, comme compétences à atteindre, de *traiter diverses applications relatives aux coniques en faisant intervenir la géométrie, l'algèbre et l'analyse*. ([17], p. 22)

Dans cette note, nous présentons tout d'abord dix méthodes différentes pour déterminer la tangente en un point d'une conique. Parmi celles-ci, trois sont empruntées à l'histoire et ne sont plus enseignées aujourd'hui mais donnent une idée intuitive intéressante de l'origine des développements actuels. Les six paragraphes suivants concernent des méthodes que l'on peut actuellement trouver dans des livres scolaires ou à vocation d'enseignement.

La dernière est assez récente puisqu'elle s'appuie sur des notions d'analyse non standard.

Toutes ces méthodes seront comparées entre elles et commentées d'un point de vue didactique.

Cette analyse théorique sera prolongée par des expérimentations auprès d'étudiants ainsi que par deux propositions de classement de ces méthodes effectuées par ces étudiants.

## 1. Présentation de différentes méthodes

Les méthodes retenues ont été sélectionnées pour différentes raisons bien précises, mais sans recherche d'exhaustivité en la matière.

Nous avons choisi les méthodes exposées dans les livres scolaires en vigueur à l'heure actuelle en communauté française de Belgique (méthodes  $M_1$  et  $M_2$ ). Nous avons également retenu une méthode qui n'est pas exposée dans l'enseignement secondaire, mais qui est fréquemment utilisée par les économistes (méthode  $M_3$ ). Nous avons encore été rechercher des méthodes présentées dans des ouvrages connus auxquels des professeurs pourraient se référer pour préparer leurs cours (méthodes  $M_4$ ,  $M_5$  et  $M_6$ ). Enfin, nous avons retenu la méthode du microscope développée en analyse classique ou en analyse non standard (méthode  $M_7$ ). Nous terminons par trois méthodes anciennes fort intéressantes d'un point de vue historique et dues à trois illustres mathématiciens du 17<sup>e</sup> siècle, à savoir DESCARTES (méthode  $M_8$ ), FERMAT (méthode  $M_9$ ) et BARROW (méthode  $M_{10}$ ).

Pour chacune des méthodes, nous ferons une présentation succincte que nous illustrerons par un exemple. Afin de faciliter la comparaison entre les diverses façons de travailler, nous traiterons le même exemple dans les différents cas : il s'agit de rechercher la tangente au point  $P(r;s)$  de l'ellipse  $C$  d'équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Ce problème, à la fois classique et simple, est développé dans le livre *Espace-Math* adopté par de nombreux professeurs de l'enseignement secondaire en Communauté française de Belgique et imposé au Grand Duché de Luxembourg; il y est supposé implicitement que  $a$  et  $b$  désignent deux paramètres réels positifs quelconques, avec toutefois  $a > b$  (Adam - Lousberg [1], 2000, pp. 167-168).

## Méthode $M_1$ : dérivation d'une fonction explicite

**Méthode.** A partir d'une équation (sous forme réduite) de la conique, on déduit l'expression analytique d'une fonction explicite en envisageant les différents cas possibles; puis, on dérive cette fonction explicite et on calcule la valeur du coefficient directeur de la tangente recherchée.

(<sup>1</sup>) Nous devons considérer trois cas.

Premier cas :  $s > 0$ . Le point  $P(r; s)$  appartient au graphe  $\mathcal{G}_{f_1}$  de la fonction  $f_1$  définie par

$$f_1(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Le coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{G}_{f_1}$  au point d'abscisse  $r$  est donné par

$$f'_1(r) = -\frac{br}{a\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Or,  $b^2r^2 + a^2s^2 = a^2b^2$ , d'où  $\sqrt{a^2 - r^2} = \frac{as}{b}$  et

$$f'_1(r) = -\frac{b^2r}{a^2s}.$$

Une équation cartésienne de la tangente recherchée est dès lors donnée par

$$y - s = f'_1(r)(x - r) \text{ c'est-à-dire } b^2rx + a^2sy = a^2b^2.$$

Deuxième cas :  $s = 0$ . On a alors  $r = a$  ou  $r = -a$  et la tangente à l'ellipse est perpendiculaire à l'axe focal en les deux sommets  $S_1(a; 0)$  et  $S_2(-a; 0)$ . Les tangentes en ces deux points sont donc les droites :

$$x = a \text{ et } x = -a.$$

Troisième cas :  $s < 0$ . Dans ce cas, le point  $P$  appartient au graphe  $\mathcal{G}_{f_2}$  de la fonction  $f_2$  définie par

$$f_2(x) = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

---

(<sup>1</sup>) Ce raisonnement est repris du livre Espace Math 66, par A. Adam et F. Lousberg [1], 2000, pp. 167-168.



En procédant comme dans le premier cas, on obtient une équation de la tangente recherchée, à savoir

$$y - s = f'_2(r)(x - r) \text{ soit encore } b^2rx + a^2sy = a^2b^2.$$

Rassemblant les trois cas, on constate que la tangente à  $C$  au point  $P$  admet toujours comme équation :

$$b^2rx + a^2sy = a^2b^2.$$

### Méthode $M_2$ : dérivation de fonctions composées

**Méthode.** Il s'agit de dériver, par rapport à la variable  $x$ , les deux membres d'une équation d'une conique, en considérant que  $y$  désigne une fonction de  $x$ , et faire dès lors référence à la théorie de dérivation des fonctions composées. (Boutriaux [8])

Par dérivation des deux membres de l'équation proposée de la conique et en tenant compte du fait que  $y$  dépend de  $x$ , on peut écrire en général :

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0.$$

En particulier, au point  $P(r;s)$ , on a :

$$2b^2r + 2a^2sy'(r) = 0.$$

Si  $s$  n'est pas nul, on en déduit le coefficient directeur  $m$  de la tangente en  $P$ , à savoir

$$m = y'(r) = -\frac{2b^2r}{2a^2s}.$$

La tangente recherchée est donc d'équation

$$y - s = -\frac{b^2r}{a^2s}(x - r).$$

### Méthode $M_3$ : dérivation d'une fonction implicite

**Méthode.** On se propose d'appliquer le théorème de dérivation des fonctions implicites à la fonction des deux variables  $x$  et  $y$  définie par le premier membre de l'équation donnée de la conique étudiée. (Dowling [11], Archinard - Guerrien [4], ...)

Par le théorème de dérivation des fonctions implicites appliqué à l'équation donnée de la conique, on sait que, pour  $F(x; y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$ , l'égalité suivante a lieu (sous réserve que  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ ) :

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2b^2x}{2a^2y}.$$

On conclut comme ci-dessus.

## Méthode $M_4$ pour une conique définie paramétriquement

**Méthode.** On exploite la définition suivante :

Soit  $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée de trajectoire  $C$  et  $A = \gamma(t_0)$  un point de cette trajectoire. Si le vecteur  $\vec{V}(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0))$  n'est pas nul, nous appellerons tangente au point  $A$  à la courbe  $C$  la droite qui passe par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{V}(t_0)$ . La tangente à  $C$  au point  $A$  a donc comme équation cartésienne

$$y'_0(x - x_0) - x'_0(y - y_0) = 0$$

avec  $x'_0 = x'(t_0)$  et  $y'_0 = y'(t_0)$ . (IREM Strasbourg [14], p. 311)

(<sup>2</sup>) Les équations paramétriques de l'ellipse sont données par

$$x = a \cos t \text{ et } y = b \sin t$$

où le paramètre  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$  et est quelquefois appelé 'anomalie excentrique du point considéré  $P(a \cos t; b \sin t)$ . La fonction vectorielle  $t \mapsto \vec{OP}(t)$  est dérivable. Nous savons qu'alors le vecteur  $\frac{d\vec{OP}(t)}{dt}$ , s'il n'est pas nul, est un vecteur directeur de la tangente à  $C$  au point  $P(t)$ . On a

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} = (-a \sin t; b \cos t),$$

d'où

$$\left\| \frac{d\vec{OP}}{dt} \right\|^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t > 0,$$

---

(<sup>2</sup>) Ce raisonnement est tiré d'un ouvrage de l'IREM de Strasbourg [14]

ce qui établit que  $C$  possède une tangente en chaque point. Au point  $P(r;s)$  correspondant à  $t = t_0$ , un vecteur directeur de cette tangente est donné par  $(-\frac{a}{b}s; \frac{b}{a}r)$ , où  $r = acost_0$  et  $s = bsint_0$ . La conclusion s'obtient de la manière habituelle.

## Méthode $M_5$ du point d'intersection double

**Méthode.** On exploite le fait que la tangente à une conique est une droite qui a deux points confondus communs avec la courbe (Lupsin-Graas [16], p. 143) et on recherche, parmi toutes les droites passant par le point de contact  $P(r;s)$ , celle dont l'intersection avec la conique se réduit à un point « double ». Il suffit de remplacer, dans l'équation donnée de la conique, les variables par les coordonnées d'un point courant de la droite considérée définie paramétriquement, puis d'exprimer que cette équation du second degré en le paramètre de la droite possède une solution double. (Lupsin-Graas [16])

En désignant par  $(u;v)$  un vecteur non nul donnant la direction de la droite recherchée, on peut écrire  $x = r + \lambda u$  et  $y = s + \lambda v$ , où  $\lambda$  désigne un paramètre réel. Par substitution, l'équation de l'ellipse livre

$$b^2(r + \lambda u)^2 + a^2(s + \lambda v)^2 = a^2b^2.$$

En tenant compte de l'appartenance du point  $P(r;s)$  à la conique, il vient

$$(b^2u^2 + a^2v^2)\lambda^2 + 2(b^2ru + a^2sv)\lambda = 0.$$

Cette équation du second degré en l'inconnue  $\lambda$  possède une racine double si et seulement si

$$b^2ru + a^2sv = 0.$$

En conséquence, lorsque  $s \neq 0$ , on en déduit le coefficient directeur  $\frac{v}{u}$  de la tangente et l'on conclut comme dans les cas précédents. Si  $s = 0$ , la tangente est verticale, d'équation  $x = r$ .

## Méthode $M_6$ : la limite de sécantes

**Méthode.** Pour déterminer la tangente à une conique en un point  $P(r;s)$ , on considère des points voisins de  $P$  sur la courbe, à savoir des

points de la forme  $P_1(r+h; s+k)$  : la sécante  $PP_1$  à la conique possède comme coefficient directeur le nombre  $\frac{k}{h}$  qui peut être calculé à partir des deux égalités exprimant respectivement l'appartenance des points  $P$  et  $P_1$  à la conique. Géométriquement, la tangente est la limite de telles sécantes lorsque le point  $P_1$  s'approche de  $P$  sur la courbe ; analytiquement, la limite du rapport  $\frac{k}{h}$ , quand  $k$  et  $h$  tendent vers 0, détermine le coefficient directeur  $m$  à la tangente cherchée. (Kindle J.H. [15], p. 84).

Si on remplace, dans l'équation de départ, l'abscisse  $x$  par  $r+h$  et l'ordonnée  $y$  par  $s+k$ , on obtient

$$b^2(r+h)^2 + a^2(s+k)^2 = a^2b^2.$$

Après quelques calculs algébriques et en tenant compte de l'égalité  $b^2r^2 + a^2s^2 = a^2b^2$ , on peut écrire

$$h(2rb^2 + b^2h) = -k(2sa^2 + a^2k),$$

soit encore

$$\frac{k}{h} = -\frac{b^2(2r+h)}{a^2(2s+k)},$$

puis, en passant à la limite pour  $h$  et  $k$  tendant vers 0

$$\lim_{(h;k) \rightarrow (0;0)} \frac{k}{h} = -\frac{rb^2}{sa^2}$$

si  $s \neq 0$  et l'on conclut comme d'habitude.

## Méthode $M_7$ : exploitation de microscopes

**Méthode.** Cette méthode a été présentée en détail dans un article précédent ([13]). Contentons-nous ici de traiter notre exemple-type dans sa version non-standard telle qu'elle a été vue par les étudiants.

Les règles d'extension et de transfert permettent d'écrire :

$$b^2(*x)^2 + a^2(*y)^2 = a^2b^2.$$

En appliquant à cette ellipse le microscope  $\mathcal{M}_\omega^P$ , de puissance  $\omega$  infiniment grande et dirigé vers le point  $P$ , on obtient :

$$b^2\left(r + \frac{*X}{\omega}\right)^2 + a^2\left(s + \frac{*Y}{\omega}\right)^2 = a^2b^2.$$

En tenant compte de l'égalité  $b^2 r^2 + a^2 s^2 = a^2 b^2$  puis en multipliant les deux membres par  $\omega$ , des calculs algébriques élémentaires permettent d'écrire (pour des hyperréels  $*X$  et  $*Y$  limités) :

$$2(b^2 r *X + a^2 s *Y) + \frac{1}{\omega} (b^2 *X^2 + a^2 *Y^2) = 0.$$

En prenant la partie standard des deux membres, puis en notant  $X = \text{st}(*X)$  et  $Y = \text{st}(*Y)$ , on trouve finalement, après simplification par 2 :

$$b^2 r X + a^2 s Y = 0.$$

On obtient ensuite une équation de la tangente :

$$b^2 r(x - r) + a^2 s(y - s) = 0.$$

## Méthode $M_B$ de Descartes

**Méthode.** Pour déterminer la tangente en un point  $P$  d'une courbe  $C$ , Descartes suppose

*la chose desja faite <sup>(3)</sup>*

et cherche à

*tirer une ligne droite par le point  $P$ , qui face avec la courbe des angles droits,*

puis il considère l'intersection  $Q$  de cette « perpendiculaire »  $PQ$  à la courbe avec

*la ligne droite  $GA$ , que je suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne  $C$ .*

---

<sup>(3)</sup> Les passages en caractères italiques sont des extraits du livre *La Géométrie*, Livre II, écrit par Descartes en 1637, réédition Vrin 1196, cités dans la brochure *Des tangentes aux infiniment petits* par D. Gaud, J. Guichard, J.P. Sicre et C. Chrétien [12], IREM de Poitiers, 1998, pp. 24-25. L'orthographe et la ponctuation d'origine ont été respectées; par contre, les notations des différents points considérés et de la courbe ont été quelquefois modifiées pour être adaptées à la situation étudiée.

Il constate ensuite que si ce point  $Q$

*est tel qu'on le désire, le cercle dont il sera le centre, et qui passera par le point  $P$  y touchera la courbe  $C$ , sans la couper : mais que si ce point  $Q$ , est tant soit peu plus proche, ou plus éloigné du point  $A$ , qu'il ne doit, ce cercle coupera la courbe, non seulement au point  $P$ , mais aussi nécessairement en quelque autre.*

La méthode consiste dès lors à considérer un cercle passant par  $P$  et de centre le point  $Q$  qui est situé sur un axe de la conique  $C$ . La tangente au cercle (qui est la droite perpendiculaire au rayon  $PQ$  menée depuis le point  $P$ ) sera la droite recherchée lorsque le cercle et la conique se rencontrent selon un « point double ».

Le centre  $Q$  du cercle en question est le point  $(q;0)$  : il nous faut chercher la valeur de  $q$ . Pour cela, considérons l'équation du cercle centré sur  $Q$  et passant par  $P(r;s)$ , à savoir

$$(x - q)^2 + y^2 = (r - q)^2 + s^2,$$

soit encore

$$x^2 + y^2 - 2qx = r^2 + s^2 - 2rq.$$

Les points  $(x;y)$  de l'intersection du cercle et de l'ellipse doivent vérifier les équations de ces deux courbes. En remplaçant dans cette dernière égalité  $y^2$  par  $b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$ , on obtient aisément

$$a^2b^2 + a^2x^2 - b^2x^2 - 2qa^2x - a^2r^2 - a^2s^2 + 2rqa^2 = 0,$$

soit encore, en posant  $a^2 - b^2 = c^2$  et en tenant compte de l'égalité  $b^2r^2 + a^2s^2 = a^2b^2$ ,

$$c^2x^2 - 2qa^2x - c^2r^2 + 2rqa^2 = 0.$$

Cette équation en la variable  $x$  doit avoir une racine double, ce qui nécessite l'annulation du discriminant de ce trinôme du second degré : on doit donc avoir

$$q^2a^4 - c^2(-c^2r^2 + 2rqa^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(qa^2 - c^2r)^2 = 0.$$

On en tire  $q = \frac{c^2 r}{a^2}$ . En conséquence, la droite  $PQ$  a comme coefficient directeur le nombre

$$\frac{s}{r - \frac{c^2 r}{a^2}} = \frac{sa^2}{a^2 r - c^2 r} = \frac{a^2 s}{b^2 r}.$$

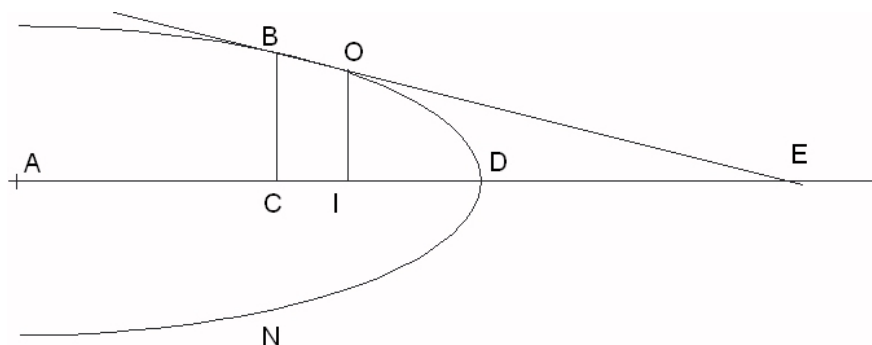
La tangente, qui est la droite perpendiculaire à  $PQ$ , possède bien pour pente

$$\frac{-1}{\frac{a^2 s}{b^2 r}} = -\frac{b^2 r}{a^2 s}.$$

## Méthode $M_9$ de Fermat

**Méthode.** Voici un texte original dans lequel Fermat décrit comment il détermine la tangente à une parabole <sup>(4)</sup>.

*Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (...) de sommet D, de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.*




---

<sup>(4)</sup> Extrait du livre *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum* par Fermat P., 1638, in *Oeuvres*, tome III, pp. 121 - 123, cité dans la brochure *Des tangentes aux infiniment petits* par D. Gaud, J. Guichard, J.P. Sicre et C. Chrétien [12], 1998, p. 98.

---

### Tangentes, vous avez dit tangentes ?

---

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura :

$$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2},$$

puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais

$$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2},$$

à cause de la similitude des triangles. Donc

$$\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}.$$

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc  $CD = d$ , donnée. Posons  $CE = a$  et  $CI = e$ ; on aura

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}.$$

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

« Adégalons » donc (...); on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \sim -a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \sim 2dae.$$

Divisez tous les termes par  $e$  :

$$de + a^2 \sim 2da.$$

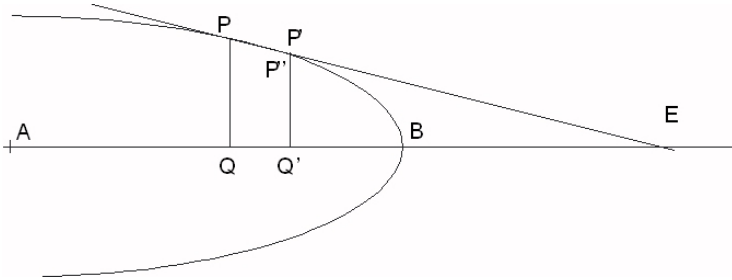
Supprimez  $de$  : il reste  $a^2 = 2da$ , donc :  $a = 2d$ .

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles.



Désignons par  $E$  l'intersection de la tangente en  $P$  cherchée avec le prolongement de l'axe  $AB$  de l'ellipse, par  $Q$  la projection orthogonale de  $P$  sur  $AB$ , par  $P'$  un point « infiniment voisin » de  $P$  situé sur la droite  $PE$ , par  $Q'$  la projection orthogonale de  $P'$  sur la droite  $AB$ , par  $P''$  le point de l'ellipse ayant la même abscisse que  $P'$ .



La similitude des triangles  $PQE$  et  $P'Q'E$  permet d'écrire :

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{QE}}{\overline{Q'E}}.$$

Par la propriété spécifique de l'ellipse (Schneider [19]), c'est-à-dire en exploitant son expression analytique, on sait que

$$\frac{(\overline{PQ})^2}{(\overline{P''Q'})^2} = \frac{\overline{AQ} \times \overline{QB}}{\overline{AQ'} \times \overline{Q'B}}.$$

Or,  $P''$  est infiniment voisin de  $P'$ ; on peut en déduire que  $\overline{P'Q'}$  et  $\overline{P''Q'}$  sont infiniment proches, ce que nous noterons à l'aide du signe  $\sim$ ; nous obtenons ainsi cette adégalité :

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{P''Q'}} \sim \frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{QE}}{\overline{Q'E}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{(\overline{QE})^2}{(\overline{Q'E})^2} \sim \frac{\overline{AQ} \times \overline{QB}}{\overline{AQ'} \times \overline{Q'B}}.$$

En désignant par  $x$  l'abscisse du point  $E$  et en notant  $e$  la distance entre  $Q$  et  $Q'$ , la dernière s'expression s'écrit dans notre cas :

$$\frac{(x-r)^2}{(x-r-e)^2} \sim \frac{a+r}{a+r+e} \times \frac{a-r}{a-r-e} = \frac{a^2-r^2}{a^2-(r+e)^2}.$$

---

### Tangentes, vous avez dit tangentes ?

---

En simplifiant les termes communs de part et d'autre du signe d'adégalité puis en simplifiant les deux membres par  $e$ , il vient :

$$-(x-r)^2 e - 2r(x-r)^2 \sim a^2 e - 2(x-r)a^2 - er^2 + 2(x-r)r^2.$$

Supprimons les termes contenant le facteur  $e$  et transformons ainsi l'adégalité en une égalité :

$$-2r(x-r)^2 = -2(x-r)a^2 + 2(x-r)r^2,$$

ce qui donne après quelques simplifications

$$x = \frac{a^2}{r}.$$

Le coefficient angulaire  $m$  de la droite  $PE$  vaut donc

$$m = \frac{s}{r - \frac{a^2}{r}} = \frac{sr}{r^2 - a^2}.$$

On conclut en remarquant que

$$\frac{sr}{r^2 - a^2} = -\frac{b^2 r}{a^2 s},$$

ce qui donne bien

$$m = -\frac{b^2 r}{a^2 s}.$$

### Méthode $M_{10}$ de Barrow

**Méthode.** Voici, selon Schneider ([19], encadré 5), comment Barrow détermine la tangente en un point d'une parabole.

Barrow assimile, tout comme Fermat, un arc de courbe  $PP'$  au segment  $PQ$  de la tangente, ce qui lui permet de conclure à l'égalité des rapports

$$\frac{a}{e} = \frac{PM}{MN},$$

où  $e = PR$  et  $a = P'R$ ; il assimile donc le triangle  $PP'R$  au triangle  $PQR$ .

Ensuite, il utilise l'équation de la courbe  $y^2 = px$  où il remplace  $x$  par  $(x + e)$  et  $y$  par  $(y + a)$ , ce qui donne :

$$y^2 + 2ay + a^2 = px + pe.$$

Il soustrait  $y^2 = px$  et obtient :

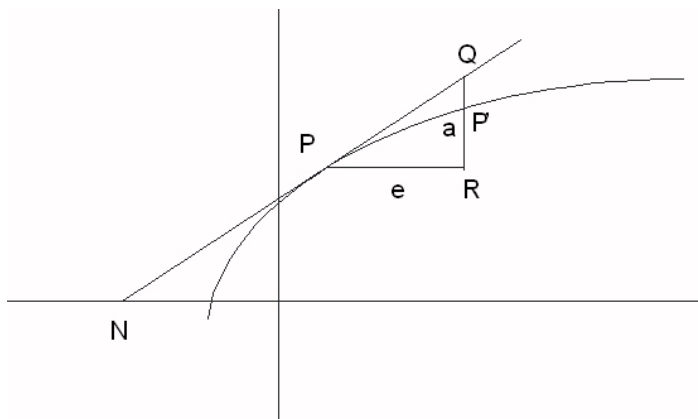
$$2ay + a^2 = pe.$$

En négligeant  $a^2$ , il trouve

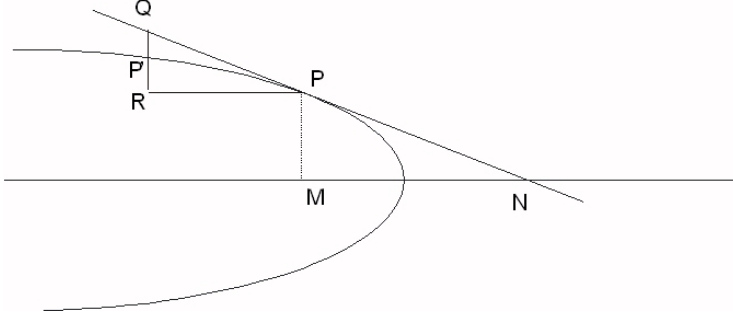
$$\frac{a}{e} = \frac{p}{2y}, \text{ d'où } \frac{PM}{MN} = \frac{p}{2y},$$

ou encore  $\frac{y}{MN} = \frac{p}{2y}$  et aboutit à :

$$MN = \frac{2y^2}{p} = 2x.$$



Choisissons un point  $P'$  sur l'ellipse et « infiniment voisin » de  $P$ ; désignons par  $Q$  le point ayant même abscisse que  $P'$  mais situé sur la tangente à l'ellipse en  $P$ , par  $R$  le point de même abscisse que  $P'$  et de même ordonnée que  $P$ , par  $M$  le point de l'axe horizontal ayant la même abscisse que  $P$  et par  $N$  l'intersection de la tangente  $PQ$  avec l'axe horizontal.



En « assimilant » les triangles  $PP'R$  et  $PQR$  et en posant  $e = \overline{PR}$  et  $d = \overline{P'R}$ , on peut écrire, grâce à la similitude des triangles  $PQR$  et  $NPM$ ,

$$\frac{d}{e} = \frac{\overline{PM}}{\overline{MN}},$$

ce rapport représente le coefficient angulaire  $m$  de la tangente recherchée.

En remplaçant  $r$  par  $r + e$  et  $s$  par  $s + d$  dans l'équation de l'ellipse, on trouve

$$b^2(r + e)^2 + a^2(s + d)^2 = a^2b^2.$$

Comme  $b^2r^2 + a^2s^2 = a^2b^2$ , il reste

$$2b^2re + b^2e^2 + 2a^2ds + a^2d^2 = 0.$$

En négligeant les termes en  $e^2$  et en  $d^2$ , puis en simplifiant par 2, on obtient

$$m = \frac{d}{e} = -\frac{b^2r}{a^2s}.$$

La tangente en  $P$  a donc pour équation

$$y - s = -\frac{b^2r}{a^2s}(x - r).$$

## 2. Analyse a priori des méthodes

Nous nous proposons ici de passer en revue les différentes méthodes, notamment d'un point de vue épistémologique et didactique.

Nous traiterons tout d'abord les trois méthodes les plus anciennes. Ainsi, nous comprendrons mieux comment a évolué le problème étudié au cours du temps et, en corollaire, d'où peuvent provenir les méthodes enseignées de nos jours.

Le marquis de L'HOSPITAL avait déjà évoqué les liens entre les trois méthodes  $M_8$ ,  $M_9$  et  $M_{10}$ ; il écrivait en effet dans son livre sur l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, dont la première édition date de 1696 :

*La Méthode qu'il [DESCARTES] découvrit pour cela [détermination de la tangente en un point d'une courbe], lui parut si belle, qu'il ne fit point de difficulté de dire, que « ce Problème étoit le plus utile & le plus général, non seulement qu'il sçut, mais même qu'il eût jamais désiré sçavoir en Géométrie ». ...Peu de temps après la publication de la méthode de M. DESCARTES pour les tangentes, M. DE FERMAT en trouva une aussi, que M. DESCARTES a enfin avoué lui-même être plus simple en bien des rencontres que la sienne.*

*Il est pourtant vrai qu'elle n'étoit pas encore aussi simple que M. BARROW l'a rendue depuis en considérant de plus près la nature des polygones, qui présente naturellement à l'esprit un petit triangle fait d'une particule de courbe, comprise entre deux appliquées infiniment proches, de la différence de ces deux appliquées, & de celle des coupées correspondantes; & ce triangle est semblable à celui qui se doit former de la tangente, de l'appliquée, & de la sous-tangente : de sorte que par une simple Analogie cette dernière Méthode épargne tout le calcul que demande celle de M. DESCARTES, & que cette Méthode, elle-même, demandoit auparavant. (Gaud - Guichard - Sicre - Chrétien [12], 1998, p. 108.)*

### Méthode $M_8$ de Descartes

Il nous semble que Descartes applique habilement ses connaissances sur la géométrie du cercle au cas des coniques; en effet, il transforme le

problème posé de manière à devoir rechercher la tangente en un point  $P$  d'un cercle de centre  $C$  : il s'agit alors de la droite menée par  $P$  perpendiculairement au rayon  $PC$ .

Il convient de constater que cette conception de la tangente en un point d'un cercle est la première idée de la notion de tangente enseignée très tôt dans la formation géométrique dispensée dans nos régions et qu'elle ne semble malheureusement guère reliée à la conception de la tangente vue ultérieurement dans le cours d'analyse à propos de graphes de fonctions dérivables (Castela [9]).

La méthode de DESCARTES possède la particularité de ne pas faire appel à l'analyse mathématique et se contente de traduire analytiquement des propriétés géométriques élémentaires. De fait, elle consiste à exprimer que l'équation algébrique construite à partir de celles de la courbe et du cercle en question (mais de centre inconnu) possède une racine double de manière à ce que le cercle, qui passe par  $P$  touche la courbe sans la couper <sup>(5)</sup> Cette approche s'avère néanmoins peu commode dans la pratique.

Notons que ce cercle est en fait le cercle osculateur à la courbe au point  $P$ .

### Méthode $M_9$ de Fermat

Comme le signale le marquis de L'HOSPITAL, FERMAT a mis au point une méthode plus simple que celle de DESCARTES. Le grand mérite du toulousain est d'avoir abandonné l'intervention d'un cercle auxiliaire : il raisonne de manière intrinsèque à la conique considérée. A cet effet, il travaille essentiellement sur une « propriété spécifique » de la conique obtenue à partir de son expression analytique; d'après J. Dhombres ([10], 1987), ceci est un caractère novateur de la méthode (Groupe AHA [2], 1999, p. 90). Une autre idée originale qui s'est révélée fort féconde par la suite consiste à « assimiler » une portion de la courbe avec une droite qui n'est rien d'autre que la tangente recherchée : pour déterminer l'équation de celle-ci, il suffit de trouver un point, autre que celui de tangence, par lequel elle passe. Ce remplacement d'une portion de courbe par un segment de droite est à la base de tout raisonnement infinitésimal.

---

<sup>(5)</sup> Descartes, *La Géométrie*, 1637, Livre II, réédition Vrin, 1996, cité dans la brochure *Des tangentes aux infiniment petits* par D. Gaud, J. Guichard, J.P. Sicre et C. Chrétien [12], IREM de Poitiers, 1998, p. 25.

La méthode de FERMAT possède, selon nous, divers avantages :

- son côté algorithmique et systématique;
- ses calculs algébriques élémentaires;
- l'aspect géométrique et intuitif de la démarche suivie;
- l'exploitation de différents ordres de grandeur entre quantités variables avec l'élimination finale des infiniment petits;
- sa grande puissance puisqu'elle se montre également efficace pour résoudre certains problèmes d'optimisation;
- l'argument de FERMAT peut être considéré comme un des pionniers de l'analyse moderne : il semble y exploiter la notion de dérivée qui n'existe pas encore à son époque. Ce dernier point est à rapprocher de la pratique de nos étudiants en économie qui sont avant tout des utilisateurs de techniques mathématiques efficaces et concrètes.

La méthode de FERMAT n'est toutefois pas exempte de reproches. De fait,

- le statut du nombre  $e$ , introduit comme accroissement accordé à la variable, est ambigu puisque  $e$  représente tantôt un nombre non nul par lequel on peut diviser et est tantôt assimilé à zéro pour transformer une adégalité en une égalité;
- la transformation d'une adégalité en une égalité ressemble à un tour de prestidigitation ([3]) difficilement admissible pour un élève rigoureux;
- le raisonnement fait appel à la propriété spécifique de la conique, ce qui restreint évidemment son champ d'application à des courbes algébriques du second degré.

## Méthode $M_{10}$ de Barrow

BARROW a repris l'idée de base de FERMAT consistant à remplacer une portion de la courbe par un morceau de droite, mais il a simplifié considérablement le raisonnement du français en ne cherchant pas un deuxième point pour caractériser la tangente : il calcule le coefficient directeur de celle-ci par un simple jeu de triangles semblables; en d'autres termes, il ne travaille pas uniquement sur la droite tangente comme FERMAT le faisait, mais il privilégie le rôle joué par un triangle dont deux sommets sont des points infiniment proches sur la courbe et qui est dès lors qualifié de « infinitangulaire » par LEIBNIZ lui-même ([12], p. 67) ou encore de « caractéristique » ([12], p. 58). Le raisonnement de BARROW est à la base des méthodes modernes ( $M_1$  à  $M_4$ ) pour calculer le coefficient angulaire de la tangente.

D'un point de vue didactique, cette méthode possède au moins deux inconvénients :

- tout comme FERMAT, BARROW néglige en fin de raisonnement des nombres apparemment non nuls;
- le calcul de la pente de la tangente au moyen du triangle caractéristique semble être un obstacle épistémologique chez certains élèves, pour qui le point de tangence est plus perçu comme le vestige d'un segment que comme celui d'un triangle, seul susceptible d'être porteur de l'idée de pente (Schneider [19], 1991, paragraphe 2).

### Méthode $M_1$ : dérivation d'une fonction explicite

Les approches faisant appel au calcul différentiel, ce qui est le cas pour les méthodes de dérivation d'une fonction explicite, de fonctions composées, d'une fonction implicite ou pour une courbe définie paramétriquement, sont les héritières directes de la théorie de Barrow. Effectivement, si, à l'instar de Leibniz ([12], p. 63), on note  $dx$  et  $dy$  les côtés de l'angle droit dans le triangle caractéristique, on retrouve bien le nombre dérivé  $\frac{dy}{dx}$  comme pente de la tangente.

Ce procédé n'est pas seulement adapté aux coniques, mais bien à tous les graphes de fonctions dérivables; il s'intègre dès lors parfaitement dans un cours élémentaire d'analyse. Néanmoins, on remarque rapidement sur notre exemple-type de l'ellipse la nécessité de considérer plusieurs cas dès que la courbe considérée n'est pas immédiatement le graphe d'une fonction dérivable.

Relevons encore le fait que le raisonnement géométrique de Barrow peut être absent dans la présentation actuelle de  $M_1$  : on définit parfois la tangente en un point  $P(a; f(a))$  à la représentation graphique d'une fonction  $f$  comme étant la droite  $\Delta$  qui passe par  $P$  et dont le coefficient directeur est  $l = f'(a)$ .

Comme déjà signalé précédemment,

*les élèves n'établiraient pas de filiation, en ce qui concerne les pentes, entre l'état final (la tangente) et les états antécédents (les sécantes) (Schneider [19]).*

Relevons encore quelques particularités de  $M_1$  :



- la méthode peut être fastidieuse car plusieurs cas sont susceptibles de se présenter;
- les calculs peuvent être relativement compliqués, car ils concernent la dérivation d'une fonction composée comprenant des radicaux;
- $M_1$  est difficilement applicable pour des équations non réduites;
- en dehors de cas particuliers, le procédé n'est pas généralisable à des courbes algébriques quelconques;
- les tangentes verticales ne sont pas prises en considération;
- les points singuliers éventuels de la courbe ne sont pas pris en charge;
- au niveau du sens, il n'y en a que si l'apprenant a bien assimilé la notion de dérivée d'une fonction explicite;
- la méthode possède l'avantage de faire appel à des notions connues et de relier cette matière de géométrie analytique à ce qui est enseigné dans le chapitre consacré à l'analyse.

### **Méthode $M_2$ : dérivation de fonctions composées**

En passant de la méthode de dérivation d'une fonction explicite à celle de dérivation de fonctions composées, on semble perdre encore un peu plus de sens; en effet, dans le second cas, on se contente de dériver une fonction qui semble exister mais que l'on ne connaît pas de façon explicite. Ainsi, parallèlement à la simplification de la démarche évoquée par le marquis de L'HOSPITAL, on enregistre une perte de sens progressive qui doit mener à une plus grande efficacité.

Voici quelques réflexions supplémentaires à propos de  $M_2$  :

- la méthode est rapide, avec des calculs toujours élémentaires;
- les calculs sont systématiques;
- $M_2$  ne s'applique pas seulement aux formes réduites, et peut même être facilement utilisée pour toute courbe algébrique;
- il existe un lien évident avec le cours d'analyse;
- $M_2$  n'est pas valable pour les tangentes verticales ni pour les points singuliers.

### **Méthode $M_3$ : dérivation d'une fonction implicite**

La perte potentielle de sens déjà enregistrée précédemment se retrouve ici de manière amplifiée : on y dérive (partiellement) une fonction à deux

variables et certains élèves n'établissent pas toujours les liens entre cette fonction bivariée et la fonction explicite (univariée, mais inconnue) dont la représentation graphique coïncide avec la conique dans un voisinage du point considéré.

Par rapport aux observations relatives à  $M_2$ , formulons quelques remarques additionnelles pour  $M_3$  :

- la méthode est souvent exploitée par les économistes, dès les premiers cours à l'Université;
- des dérivées partielles, qui ne figurent pas au programme du secondaire, sont utilisées;
- le théorème des fonctions implicites définit un cadre précis quant à l'existence d'une fonction  $y$  en la variable  $x$ , et donc quant à son application possible;
- la méthode est rapide et simple à utiliser;
- il existe un danger, vu les hypothèses nécessaires, d'utiliser le théorème des fonctions implicites comme une « boîte noire », efficace mais avec peu de sens.

## **Méthode $M_4$ pour une conique définie paramétriquement**

Nous n'insistons guère sur cette approche, car

- cette matière ne figure plus au programme du secondaire en Communauté française de Belgique;
- $M_4$  ne s'applique évidemment qu'aux courbes définies paramétriquement. Or, ce mode de raisonnement n'est guère utilisé par les économistes (au contraire des physiciens, par exemple, pour lesquels les courbes ainsi définies apparaissent tout naturellement);

Nous constatons ainsi que la méthode de BARROW est devenue, au fur et à mesure de son évolution, toujours plus générale, plus facile et systématique à utiliser, en faisant appel à des techniques de l'analyse qui sont davantage sophistiquées que les raisonnements géométrico-algébriques de DESCARTES et FERMAT. Parallèlement est apparu un risque certain de perdre de vue l'interprétation géométrique de la situation étudiée.

## Méthode $M_5$ du point d'intersection double

Parmi les trois méthodes historiques, seule celle de DESCARTES ne fait pas appel à des raisonnements infinitésimaux et repose essentiellement sur des arguments géométriques (relatifs à la tangente à un cercle) et algébriques (pour la recherche d'une racine double).

Ce type de démarche élémentaire a été assez logiquement repris plus tard dans les cours de géométrie analytique plane (Lupsin - Graas [16]), mais de manière simplifiée puisque le cercle y a été remplacé par une droite sécante :  $M_5$  procède algébriquement comme DESCARTES en faisant appel à un paramètre qui intervient dans les équations paramétriques de la droite cherchée et qui est déterminé en annulant le discriminant de l'équation du second degré obtenue.

Cette méthode, qui figurait dans les manuels de géométrie analytique plane de ces dernières décennies lorsque l'essentiel des cours de mathématiques de la rhétorique en section latin-math était consacré à cette discipline, possède divers avantages :

- elle s'appuie sur une interprétation géométrique forte;
- elle ne nécessite aucune connaissance en analyse mathématique;
- elle apparaît comme étant une méthode algorithmique ne faisant intervenir que des calculs algébriques systématiques et simples;
- elle peut être adaptée pour la recherche de la tangente depuis un point extérieur à la courbe.

Relevons, pour terminer, que, bien qu'elle puisse théoriquement être appliquée dans le cas de courbes algébriques de degré supérieur à 2, elle peut alors mener à des calculs lourds.

## Méthode $M_6$ : la limite de sécantes

La méthode  $M_6$  fait essentiellement appel à des considérations géométriques, puis à la notion de limite. Elle est en réalité ancienne, puisqu'elle est présentée en détail comme suit dans l'essai *Sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal* dû à JEAN D'ALEMBERT en 1759 :

Je veux, par exemple, trouver la tangente d'une courbe CAB au point A. Je prends d'abord deux points à volonté A,B, sur cette ligne courbe, et par ces deux points, je tire une ligne droite A, indéfiniment prolongée vers Z et vers X, laquelle coupe la courbe, comme cela est évident; j'appelle cette ligne une "sécante"; j'imaginerai ensuite une ligne fixe CE, placée à volonté dans le plan sur lequel est tracée la courbe, et par les deux points A,B, que j'ai pris sur la courbe, je mène des ordonnées AD,BE, perpendiculaires à cette ligne fixe CE, que pour abrégé j'appelle l'« axe » de la courbe. Il est d'abord évident, que la position de la sécante est déterminée par la distance D des deux ordonnées et par leur différence BO; en sorte que si on connaissait cette distance et cette différence, ou même le rapport de la distance des ordonnées à leur différence, on auroit la position de la sécante.

Imaginons à présent que des deux points A,B, que nous avons supposés sur la courbe, il y en ait un, par exemple B, qui se rapproche continuellement de l'autre point A; et que par cet autre point A, qu'on suppose fixe, on ait tiré une tangente AP à la courbe; il est aisé de voir que la sécante AB, tirée par ces deux points A,B, dont l'un est supposé se rapprocher de plus en plus de l'autre, approchera continuellement de la tangente, et enfin deviendra la tangente même, lorsque les deux points se seront confondus en un seul. La tangente est donc la limite des sécantes, le terme dont elles approchent de plus en plus, sans pour autant y arriver tant qu'elles sont sécantes, mais dont elles peuvent approcher aussi près qu'on voudra. Or nous venons de voir que la position de la sécante se détermine par le rapport de la différence BO des ordonnées, à leur distance DE. Donc si on cherche la « limite » de ce rapport, c'est-à-dire la valeur dont ce rapport approche de plus en plus à mesure que l'une des ordonnées s'approche de l'autre, cette limite donnera la position de la tangente, puisque la tangente est la limite des sécantes (cité Gaud - Guichard - Sicre - Chrétien [12], 1998, pp. 126-127).

Cette citation met bien en évidence le lien naturel existant entre cette méthode et celle du point double, puisque, comme l'a écrit D'ALEMBERT, la sécante deviendra la tangente même, lorsque les deux points se seront confondus en un seul; de plus, elle montre les efforts et précautions déployés par l'auteur pour introduire une tangente comme une limite de sécantes; ces deux points sont parfois escamotés de nos jours.

A la lumière du texte de D'ALEMBERT, repérons à présent des avantages et inconvénients d'une présentation moderne de cette approche.

- La méthode semble bien correspondre à l'idée géométrique qu'ont les élèves d'une tangente (Schneider [19]) et prend donc facilement du sens pour l'apprenant;
- elle ne repose toutefois pas sur une définition claire de ce qu'est « la position limite de sécantes »;
- elle fait quelquefois apparaître une difficulté conceptuelle liée à l'unicité de la tangente : alors qu'une sécante est parfaitement déterminée par deux points distincts situés sur la courbe, la tangente obtenue à la limite peut ne pas être bien définie puisque par un point, à savoir le point-limite de tangence, passent une infinité de droites (Schneider [19]);
- rappelons encore que la détermination de la pente de la tangente comme limite de pentes de sécantes ne semble pas évidente chez certains élèves : ils éprouvent quelque peine à penser la pente d'une tangente comme limite d'une suite de pentes de sécantes (Schneider [19], Sierpiska [20]); le calcul de ce coefficient directeur consiste à lever une indétermination, ce qui nécessite bien sûr la connaissance de certaines techniques d'analyse souvent basées sur le calcul différentiel;
- la limite formelle que l'on doit calculer concerne une fonction à deux variables qui tendent toutes deux vers 0; cette méthode est souvent enseignée avant que n'aient été étudiées les fonctions à plusieurs variables;
- la méthode est moins claire quand l'équation d'une conique n'est pas réduite (à cause du terme en  $xy$  donc en  $hk$ ).

### Méthode $M_7$ : exploitation de microscopes

Les différentes méthodes introduites au cours du temps, ainsi que l'avènement de l'analyse non standard, ont permis de mettre au point la technique du microscope virtuel qui, se basant sur l'histoire ancienne, peut également faire référence à la technologie moderne. Ses avantages paraissent nombreux et peuvent apporter des éléments de solution pour les principales objections relatives aux autres méthodes. Citons-en quelques-uns :

- les approximations dans les méthodes de FERMAT et de BARROW se justifient par un passage à la limite dans une présentation classique, et par la considération des parties standard en analyse non stan-

dard. Alors que l'utilisation d'adégalité n'a rien de naturel et qu'un élève habitué à la rigueur d'aujourd'hui pourrait considérer comme fausse (Schneider [19]), le traitement de ces notions en analyse non standard peut paraître « naturel » à toute personne familiarisée avec les nombres hyperréels;

- la méthode est très géométrique et « visuelle » : elle repose sur l'idée intuitive du marquis de L'HOSPITAL selon laquelle une courbe est constituée d'une infinité de segments de droite infiniment petits;
- le recours à un microscope virtuel peut être visualisé, notamment à l'aide de « zooms » réalisés avec un logiciel adéquat;
- la méthode peut donner naissance à un algorithme très systématique (voir [13]);
- les calculs algébriques sont élémentaires dans le cas d'une conique;
- $M_7$  s'adapte sans aucune difficulté au cas de toute courbe algébrique, quel que soit son degré : dans ce cas, elle ne fait aucunement appel aux techniques de l'analyse et ne fait intervenir que des calculs simples;
- la méthode s'applique à toutes les situations rencontrées avec les courbes algébriques, que la tangente soit unique ou que le point considéré soit singulier, que la tangente soit verticale ou non;
- $M_7$  ne considère que des droites bien définies par deux points distincts; la notion de partie standard garantit l'unicité de la tangente;
- le recours à un microscope pourrait rendre plus clair chez l'élève le passage d'un petit arc de courbe à un segment; sans un tel instrument, cette assimilation n'a encore rien de "naturel", c'est au contraire l'analyse qui nous apprend ce mode d'assimilation en montrant qu'on a le « droit » de le faire, moins un droit formel qu'un droit heuristique, ce qui est plus difficile (Schneider [19]); grâce au microscope, ce droit peut ainsi devenir plus formel sans aucune référence à l'analyse.
- l'utilisation d'un microscope virtuel s'avère efficace non seulement pour la détermination d'une tangente, mais également pour toute question « locale » traitée en analyse à une et à plusieurs variables (Bair - Henry [7]; Bair [6]).

Indépendamment de l'introduction à l'analyse non standard (qui, comme nous l'avons vu dans [13], peut être évitée par le recours à un passage à la limite), l'inconvénient majeur de cette méthode réside, nous semble-t-il, dans le recours à un nouvel outil, à savoir un « microscope virtuel », qui reste inhabituel dans des présentations plus classiques de l'analyse.

Observons enfin l'analogie des calculs réalisés dans les méthodes  $M_5$ ,  $M_6$  et  $M_7$ .

### 3. Résultats expérimentaux

#### 3.1. La tangente en un point d'une conique dans l'enseignement secondaire

En début d'année 2003-2004, les étudiants de 2<sup>e</sup> année en Ingénieur de Gestion à l'Ulg ont été invités à consulter leurs cahiers et livres du secondaire à propos de la détermination de la tangente en un point d'une conique.

Il leur était demandé, en premier lieu, de décrire la façon dont cette matière leur avait été présentée lors de leurs humanités.

Nous avons dépouillé leurs réponses par rapport aux méthodes  $M_1$  à  $M_7$  décrites ci-dessus, aucune autre n'ayant été proposée.

##### 3.1.1. Méthodes vues dans le secondaire

Les résultats enregistrés sont résumés dans le tableau ci-dessous, les premiers nombres indiquent le nombre de fois que les méthodes ont été citées par les élèves au nombre de 70 ce jour-là, tandis que les nombres inscrits entre parenthèses donnent le pourcentage correspondant.

$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_5$	$M_4, M_6$ et $M_7$	aucune
26(37,2%)	21(30%)	1(1,4%)	7(10%)	0(0%)	15 (21,4 %)

Notons que plus d'un étudiant sur cinq affirme que seule la formule donnant une tangente lui a été enseignée, sans aucune explication sous-jacente. Par ailleurs, les ouvrages de Adam - Lousberg ([1]) et Boutriaux ([8]) semblent être les sources préférées, pour cette matière, par une majorité de professeurs de l'enseignement secondaire. Enfin, il est à remarquer que la méthode  $M_5$ , qui était pourtant souvent donnée il y a quelques années encore dans le cadre de la géométrie analytique plane, semble en net recul; elle n'est toutefois pas complètement abandonnée, même si elle ne figure plus dans les livres scolaires contemporains.

### 3.1.2. Intérêt pour cette matière

Les étudiants étaient ensuite invités à répondre à la question :

*Trouvez-vous cette matière intéressante ?*

Majoritairement, ils estiment avoir apprécié cette matière. De manière plus précise

- 51 étudiants (soit 72,9%) jugent cette partie intéressante, certains indiquant spontanément la mention, pourtant non proposée, de « très intéressante »;
- 11 (soit 15,7%) la trouvent « pas intéressante »;
- 4 (soit 5,7%) l'estiment « plus ou moins intéressante »;
- 4 (soit 5,7%) répondent « je ne sais pas » ou ne répondent pas du tout.

Les justifications données aux 72,9% des réponses positives méritent d'être analysées.

- La raison la plus souvent citée concerne les applications concrètes (29 mentions). Des exemples concrets traités dans le secondaire sont d'ailleurs donnés : par exemple, l'utilisation d'une parabole pour la réception de chaînes en télévision, les trajectoires de planètes, des utilisations en architecture (rotonde du Capitole, arche d'un pont, ...), pour la fabrication d'instruments d'optique, en navigation, .... Le sentiment qui prévaut chez de nombreux étudiants est bien exprimé par l'un d'entre eux :

*j'aurais tendance à dire que tout ce qui arrive à expliquer des problèmes de la vie courante est intéressant.*

- Le deuxième argument se réfère aux liens que présente cette matière avec d'autres chapitres vus antérieurement en mathématiques (12 mentions). En effet, comme l'a écrit un étudiant

*le fait de déterminer l'équation de la tangente en un point d'une conique fait intervenir beaucoup de choses différentes qu'il est utile de rassembler, à savoir les équations des droites et des coniques, les dérivées, ...;*

ainsi, comme le fait constater un autre élève, cette théorie



*permet à l'algèbre, la trigonométrie, l'analyse, la géométrie et la physique de se rencontrer.*

- La troisième raison évoquée est l'intérêt de cette théorie (6 mentions). Cette matière semble en effet attractive pour diverses raisons : parce qu'elle change de la théorie des fonctions, ou parce que c'est un chapitre important de la géométrie qui peut être illustré à l'aide du logiciel Cabri. Elle paraît également intéressante au niveau même de l'apprentissage : ainsi, selon un élève

*cette matière m'a appris à réfléchir, à m'ouvrir l'esprit ;  
je pense que la raison est les nombreux liens avec les  
autres matières que les coniques font intervenir ;*

d'après un autre élève,

*l'étude des coniques fut la première matière à être  
vue d'une façon aussi théorique, avec pas mal de  
démonstrations pas toujours faciles à comprendre à  
l'époque ; maintenant, avec de nombreux théorèmes étudiés  
lors de la première candidature, cette matière me semble  
relativement facile à aborder.*

### 3.2. Préférences d'étudiants

Après leurs recherches sur ce qu'ils avaient vu dans le secondaire, les étudiants interrogés ci-dessus ont été invités à étudier de manière approfondie une des sept méthodes  $M_1$  à  $M_7$ . Pour ce faire, ils ont été répartis en 14 groupes comprenant 5 personnes et chaque groupe s'est vu attribué une méthode par tirage au sort. Après une préparation collective d'une semaine, chaque groupe a dû présenter à l'ensemble de la classe la méthode qui lui avait été attribuée : les étudiants devaient préparer un exposé clair et compréhensible pour leurs condisciples qui ne connaissaient pas forcément cette matière ; ils devaient également analyser de manière objective les avantages et inconvénients de la méthode qu'ils présentaient.

De la sorte, chaque méthode a été présentée deux fois, selon des points de vue différents mais souvent complémentaires ; ces présentations furent complétées par le professeur qui a tenu à mettre en évidence les différences et les rapprochements entre les méthodes, ainsi qu'à corriger les éventuelles maladresses commises par les élèves.

A la suite de ce travail d'institutionnalisation, les étudiants paraissaient bien informés sur toutes ces sept méthodes et furent alors invités à exprimer leurs préférences individuelles de manière à dégager un choix collectif. Pour cela, nous leur avons proposé deux méthodes classiques de la théorie de la décision collective, la méthode Borda et la méthode Electre.

Ce travail fut réalisé de façon interactive entre l'enseignant et les apprenants. Un objectif visé par le professeur était de profiter de cette situation concrète pour initier les élèves à la théorie mathématique de la décision collective (Bair [5]), ce problème étant évidemment d'une grande importance pour de futurs ingénieurs en gestion.

### 3.2.1. Choix collectif selon la méthode de Borda

Pour appliquer la première technique, nous avons demandé à chaque étudiant de classer les sept méthodes proposées selon la règle suivante : la méthode considérée comme la meilleure recevait un point, la suivante deux points, et ainsi de suite; les ex-aequo étaient permis : par exemple, si deux méthodes étaient classées premières ex-aequo, elles recevaient chacune la cote de 1 point, tandis que la (ou les) suivante(s) obtenai(en)t la cote de 3 points.

Nous avons ensuite calculé, pour chacune des sept méthodes, la somme des cotes obtenues, ainsi que le nombre de fois où la méthode était classée première (note de 1 point) et dernière (note de 7 points).

Les étudiants étaient au nombre de 63. La tableau ci-dessous reprend les résultats obtenus.

Méthodes	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$M_6$	$M_7$
Somme des notes	162	220	326	338	234	296	151
Premières places	19	8	1	4	9	3	24
Dernières places	1	4	19	24	1	9	0

D'après les sommes des notes, il apparaît que la méthode  $M_7$  arrive en premier lieu des préférences globales, puisqu'elle obtient le plus petit score, juste devant les méthodes  $M_1$  et  $M_2$ ; ces trois méthodes ont été le plus souvent étudiées par les étudiants en première candidature (pour  $M_7$ ) ou dans le secondaire (pour  $M_1$  et  $M_2$ ). Il est à noter que la méthode  $M_5$ , pourtant très peu vue en humanités, obtient un score global presque identique

à  $M_2$ . Les scores globaux obtenus par les autres méthodes sont nettement supérieurs à ceux des quatre premières places.

Si l'attention est portée sur les nombres de premières ou de dernières places, le classement général ne diffère pas du tout en ce qui concerne la première position, toujours occupée par  $M_7$ ; mais on constate que la méthode  $M_5$  vient se placer en troisième position, juste derrière  $M_1$ . Notons la dernière place occupée dans les deux cas par la méthode  $M_3$  pourtant efficace dans les calculs et souvent utilisée en économie.

Les étudiants devaient ensuite justifier brièvement le choix de la méthode classée en première position. Les explications fournies sont fort variées, car les choix ont été effectués selon plusieurs critères. Nous avons regroupé ces justifications en quelques grandes catégories qui peuvent se recouvrir partiellement et ne sont donc pas totalement « indépendantes »; leur ordre de présentation est dicté par le nombre de fois qu'elles ont été citées.

- La justification la plus fréquente a trait à la simplicité : a été classée première la méthode jugée la plus simple, la plus facile (35 mentions). Il convient toutefois d'observer que ces adjectifs sont souvent mentionnés de façon globale, mais sont quelquefois précisés et se réfèrent alors à la compréhension de la méthode (6 mentions) ou à son exploitation, par exemple à son côté systématique (8 mentions).
- La raison donnée en deuxième lieu concerne la généralité, c'est-à-dire l'étendue du champ d'application de la méthode sélectionnée (27 mentions).
- Le troisième argument cité s'appuie sur les connaissances antérieures (26 mentions). Certains étudiants préfèrent une méthode connue depuis longtemps (12 mentions), alors que d'autres privilégient les connaissances les plus récentes (12 mentions), tandis que quelques-uns portent leur choix sur la méthode qu'ils ont découverte cette année avec leur travail de groupe (2 mentions).
- Un critère encore retenu est celui de l'intérêt ou du sens que présentent à leurs yeux les différentes méthodes (13 mentions).
- Un dernier argument cité est relatif à la sophistication de l'outil (8 mentions) : est préférée la méthode qui n'a recours qu'à des calculs algébriques simples ne nécessitant pas l'emploi de techniques d'analyse, comme la notion de dérivée. Il est évident que ce critère aurait pu être mentionné explicitement un plus grand nombre de fois, notamment par certains étudiants qui se sont contentés de ne retenir que celui de simplicité.

### 3.2.2. Choix multicritère selon la méthode ELECTRE

Le choix d'une des sept méthodes est en réalité un problème de décision multicritère. Il peut être résolu par la méthode ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la REalité) développée par B. Roy et ses collaborateurs ([18]).

Les justifications des étudiants énumérées ci-dessus ont donné naissance à des critères permettant de classer (avec possibilité d'ex-aequo) les sept méthodes.

Ces critères seront notés  $C_1$  pour la simplicité,  $C_2$  pour la généralité,  $C_3$  pour les connaissances antérieures,  $C_4$  pour le sens,  $C_5$  pour la sophistication de l'outil; ils se verront attribuer un poids fourni par le nombre de mentions exprimées par les élèves, à savoir respectivement  $p_1 = 35$ ,  $p_2 = 27$ ,  $p_3 = 26$ ,  $p_4 = 13$  et  $p_5 = 8$ . De manière à les rendre objectifs, ils ont été traduits par les classements suivants :

- $C_1$  : Le critère de simplicité est très subjectif, ainsi que le montrent les réponses des étudiants : l'idée de facilité varie d'un individu à l'autre. Pour tenter de la rendre objective, nous avons établi un classement des méthodes basé sur le nombre de fois que chaque méthode a été jugée la plus simple; l'ordre <sup>(6)</sup> est alors le suivant (les nombres inscrits entre parenthèses indiquant les nombres de fois que la méthode a été choisie) :

$$M_7(24) >_1 M_1(19) >_1 M_5(9) >_1 M_2(8) >_1 M_4(4) >_1 M_6(3) >_1 M_3(1).$$

- $C_2$  : Il est possible de ranger les méthodes d'après leur champ d'application. De fait, les méthodes  $M_1$  et  $M_4$  ne s'appliquent qu'aux coniques décrites par une équation réduite et ne livrent pas les tangentes verticales;  $M_2$ ,  $M_3$  et  $M_6$  ne permettent pas encore de traiter les tangentes verticales, mais prennent en charge toutes les coniques (réduites ou non);  $M_5$  et  $M_7$  concernent tous les cas. En conclusion, on obtient le classement suivant :

$$M_5 =_2 M_7 >_2 M_2 =_2 M_3 =_2 M_6 >_2 M_1 =_2 M_4.$$

---

<sup>(6)</sup> Tous les classements seront donnés par préférences décroissantes. Nous noterons  $\geq_i$  le préordre retenu pour le critère  $C_i$ ; de même, le préordre collectif déterminé par la méthode ELECTRE sera désigné par  $\geq_E$ .

---

- $C_3$  : Comme les avis des étudiants à propos des connaissances antérieures divergent, nous avons tenu compte, pour objectiver ce critère, du premier instant où la théorie nécessaire pour développer la méthode a été vue dans le programme officiel de la Communauté française de Belgique. La méthode  $M_5$  peut être dispensée dès que les connaissances algébriques de base sont connues; la méthode  $M_7$  réclame en plus la connaissance des limites pour les fonctions à une seule variable dans la présentation standard; les méthodes  $M_1$  et  $M_2$  nécessitent la connaissance des dérivées pour les fonctions univariées;  $M_4$  fait de plus appel à la notion de vecteur dérivé;  $M_3$  et  $M_6$  reposent sur le calcul différentiel pour des fonctions à deux variables, cette matière ne figurant pas au programme de l'enseignement secondaire. Ainsi, le classement se présente comme suit :

$$M_5 >_3 M_7 >_3 M_1 =_3 M_2 >_3 M_4 >_3 M_3 =_3 M_6.$$

- $C_4$  : Pour essayer de rendre quelque peu objectif le critère de sens accordé aux différentes méthodes, nous partons d'une analyse de M. Schneider selon laquelle

*la pente d'une tangente semble bien seconde, dans le chef des élèves, par rapport à la tangente elle-même; il s'agit pour eux de déterminer d'abord la tangente, ensuite sa pente, plutôt que le contraire.* (Schneider [19], 1991, p. 66)

En basant notre classement selon cette conception, nous placerons ex-aequo en dernière position  $M_1, M_2$  et  $M_3$  qui se contentent de calculer analytiquement la pente de la tangente; ces trois méthodes sont précédées par  $M_6$  qui, elle aussi, donne la pente de la tangente mais avec une vision plus géométrique du résultat. A l'autre extrémité du classement vient  $M_7$  qui est la seule méthode à fournir comme réponse une droite (parallèle à la tangente cherchée). Les deux méthodes  $M_4$  et  $M_5$  se placent juste derrière  $M_7$  puisqu'elles livrent un vecteur donnant la direction de la tangente, ce qui peut être considéré comme intermédiaire entre les déterminations de la droite et de la pente. Selon ce critère, le classement se présente donc de cette façon :

$$M_7 >_4 M_4 =_4 M_5 >_4 M_6 >_4 M_1 =_4 M_2 =_4 M_3$$

- $C_5$  : Pour pouvoir prendre en charge les sept méthodes, nous avons comparé la longueur des calculs à effectuer pour trouver la tangente en un point régulier d'une ellipse donnée par son équation réduite (cfr l'exemple développé ci-dessus). La méthode classée en premier lieu est

bien entendu celle pour laquelle les calculs sont les plus courts. De la sorte, on construit le classement suivant :

$$M_3 >_5 M_2 >_5 M_4 >_5 M_5 =_5 M_6 =_5 M_7 >_5 M_1.$$

Ces cinq rangements ont été approuvés unanimement par les étudiants lors d'un débat collectif. En tenant compte des poids attribués aux cinq critères, on peut calculer, pour tout couple  $(x, y)$  composé de deux méthodes  $(x, y \in \{M_1, \dots, M_7\})$  distinctes, le niveau de concordance  $c(x, y)$  qui est défini comme étant la somme des poids  $p_i$  relatifs aux indices  $i$ , compris entre 1 et 5, tels que la méthode  $x$  est jugée meilleure au sens large (donc avec possibilité d'ex-aequo) que la méthode  $y$  pour le critère  $C_i$  (Bair [5]).

Les données ci-dessus permettent de construire le tableau ci-contre donnant les niveaux de concordance :

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$M_6$	$M_7$
$M_1$	—	74	74	101	35	61	—
$M_2$	74	—	101	96	8	96	8
$M_3$	48	48	—	35	8	61	8
$M_4$	48	13	74	—	21	82	8
$M_5$	74	101	101	101	—	109	61
$M_6$	48	40	101	27	8	—	8
$M_7$	109	101	101	101	83	109	—

Dès que le seuil de concordance est au plus égal à 83, la méthode  $M_7$  surclasse toutes les autres : elle sera dès lors déclarée la « meilleure » par cette technique d'ELECTRE.

Pour fixer les idées, adoptons 70 comme valeur raisonnable du seuil de concordance. Construisons ensuite le graphe  $G = (A, S)$  dont l'ensemble  $A$  des sommets est composé des actions potentielles (ici les 7 méthodes), un arc reliant un sommet  $x$  à un sommet  $y$  quand  $x$  est surclassé par  $y$  au seuil retenu, c'est-à-dire lorsque  $c(y, x) \geq 70$ .

Ce graphe  $G$  est caractérisé par sa matrice booléenne (dont les lignes et les colonnes se réfèrent aux méthodes  $M_1$  à  $M_7$ , dans l'ordre).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux sommets  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent à une même composante fortement connexe de  $G$ ; en conséquence, ils seront classés *ex-aequo*. Une répartition en niveaux des sommets du condensé  $G^*$  de  $G$  conduit alors au préordre final suivant :

$$M_7 >_E M_5 >_E M_1 =_E M_2 >_E M_4 >_E M_6 >_E M_3.$$

### Conclusions

Si l'on compare les classements obtenus par les deux méthodes envisagées, on observe plusieurs similitudes :

- La méthode  $M_7$  arrive en premier lieu dans les deux cas;
- Les trois places suivantes sont tenues chaque fois par les méthodes  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_5$ , mais dans un ordre différent.
- Le classement des premières places de la méthode Borda est presque identique à celui de la méthode ELECTRE; seules les méthodes  $M_5$  et  $M_1$  sont inversées.

On observe finalement la formation de trois groupes :

- La méthode  $M_7$  se retrouve isolée en première place;
- Les méthodes  $M_1, M_2$  et  $M_5$  occupent les trois places du milieu et correspondent aux méthodes utilisant des notions vues dans le secondaire.
- Les méthodes  $M_3, M_4$  et  $M_6$  se retrouvent en queue de peloton; elles font intervenir des techniques peu ou pas pratiquées dans le secondaire.

Enfin, nous terminons en rappelant que ces rangements restent dépendants des critères choisis ainsi que des classements proposés pour chacun des critères et que les résultats obtenus doivent être considérés dans cette optique.

## Bibliographie

- [1] ADAM A. - LOUSBERG F., *Espace Math* 54, De Boeck - Wesmael, Bruxelles, 1998.
- [2] AHA, *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse, guide méthodologique*, De Boeck Wesmael, Bruxelles, 1999.
- [3] ANTIBI A., *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions.*, Thèse doctorale en Didactique des Mathématiques, Université Paul Sabatier de Toulouse, IREM de Toulouse, 1988.

- [4] ARCHINARD G. - GUERRIEN B., *Analyse mathématique pour économistes*, 3<sup>e</sup> édition, Economica, Paris, 1988.
- [5] BAIR J., *Théorie des graphes*, Editions Point de Vue, Liège, 1995.
- [6] BAIR J., *Compléments en analyse non standard*, Editions de l'Université de Liège, 2004.
- [7] BAIR J. - HENRY V., *Analyse mathématique avec des nombres hyperréels infiniment petits ou grands*, en préparation.
- [8] BOUTRIAU-PHILIPPE E. - BOUTRIAU J. - LIEVENS J., *Savoir et savoir-faire en mathématique 6b*, Editions Dessain, Liège, 1992.
- [9] CASTELA C., *Apprendre avec et contre ses connaissances, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 15 (1), 1995, pp. 7-47.
- [10] DHOMBRES J., *Nombre, mesure et continu*, Nathan, Paris, 1978
- [11] DOWLING E.T., *Mathématiques pour l'économiste*, Série Schaum, McGraw-Hill Inc., Paris, 1990.
- [12] GAUD D. - GUICHARD J. - SICRE J.P. - CHRETIEN C., *Des tangentes aux infiniment petits : réflexions et travaux pour la classe IREM de Poitiers*, 1998.
- [13] HENRY V., Nouvelle approche pour introduire la notion de tangente à une courbe, *Mathématique et Pédagogie*, n° 145, pp. 65-79, 2004.
- [14] IREM de Strasbourg, *Mathématiques - Terminales C et E - Géométrie et Algèbre - Programme officiel 1983*, Editeur Istra, Paris, 1983.
- [15] KINDLE J.H., *Analytic Geometry*, Schaum's outline series, Schaum Publishing, New York, 1977.
- [16] LUPSIN G. - GRAAS R., *Géométrie analytique plane*, Editions La Procure, Namur - Bruxelles, 1942.
- [17] Ministère de la Communauté française, *Programme d'études du cours de mathématiques - enseignement secondaire général et technique de transition : troisième degré*, document 40/2000/240, Bruxelles, 2000.
- [18] ROY B. - BOUYSSOU D., *Aide Multicritère à la décision : Méthodes et Cas*, Economica, Paris, 1993.
- [19] SCHNEIDER M., Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, *Repères-IREM*, 5, 1985, pp. 65-82.
- [20] SIERPINSKA A., Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 6, n° 1, pp. 5-67, 1985.





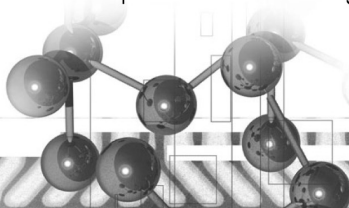
POLYTECH.MONS

# Faculté Polytechnique de Mons

Sciences de l'Ingénieur : **INGENIEUR CIVIL**

**Formation universitaire** Bachelier (3 ans) • Master (2 ans)

Architecture • Chimie et Science des matériaux • Electricité  
Informatique et gestion • Mécanique • Mines et Géologie



## Inscription à l'examen d'admission 2005

*Pour la 1ère session,  
avant le 29 juin de 8 à 12 h  
(sauf le mercredi : de 14 à 16 h)*

*Pour la 2ème session,  
avant le 31 août de 8 à 12 h*

**NOUVEAU**  
**à Charleroi**

**dès septembre 2005 : 1<sup>ère</sup> année du grade de  
Bachelier. Formation identique à celle de Mons.**

### Inscriptions et renseignements :

Secrétariat des Etudes • 9, rue de Houdain • 7000 MONS • Tél.: 065/37 40 30 à 32  
Fax: 065/37 40 34 • [secretu@fpms.ac.be](mailto:secretu@fpms.ac.be) • <http://www.fpms.ac.be>

*La Polytech est membre de l'Académie Universitaire Wallonie-Bruxelles*

## Le Rallye Mathématique, épreuve I

Ph. Skilbecq

Du 17 janvier au 4 février dernier, les classes inscrites au Rallye Mathématique participaient à la première des deux épreuves qualificatives du premier Rallye en Communauté française de Belgique. Les copies devaient parvenir au secrétariat de la SBPMef pour le 11 février. Le dépouillement des courriers, le tri par question et les corrections étaient alors dévolus aux équipes de correcteurs. Ces corrections ont eu lieu dans le courant du mois de février à partir des critères de correction établis lors de la préparation des épreuves. Ces critères sont identiques pour tous les pays participant au Rallye.

Chaque problème est coté sur une échelle de 0 à 4. Tant la réponse que sa justification ou que les explications des démarches interviennent dans cette cotation. Pour exemple, les critères d'attribution des points à la première question <sup>(1)</sup> — Les autocollants — étaient :

- 4 points : réponse correcte (Oscar) avec explications détaillées permettant de dire qui a le plus d'autocollants (somme des autocollants de chacun avec additions, nombres d'enveloppes et de feuilles, dessins précis...).
- 3 points : réponse correcte (Oscar) avec des explications peu claires ou sommes de chacun avec explications complètes, mais sans dire qui en a le plus.
- 2 points : réponse correcte avec explications incomplètes (par exemple sans avoir effectué tous les échanges nécessaires) ou une erreur de calcul avec une réponse cohérente.
- 1 point : début de recherche ou réponse (Oscar) sans aucune explication, (qui pourrait se baser par exemple sur le nombre des enveloppes seulement)
- 0 point : incompréhension du problème, réponse « la même chose » à partir de la somme des objets...

Nous insistons régulièrement sur l'importance des justifications des réponses. D'abord, parce que cela répond à un questionnement du Rallye et donc qu'une absence de justification enlève des points à la question. Mais ensuite, et surtout, parce que nous espérons que cette amorce d'explication et de justification se prolongera dans les activités de classe. En effet, de nombreuses recherches <sup>(2)</sup> ont montré qu'expliquer sa ou ses démarche(s)

---

Toute communication concernant cette rubrique sera adressée à PHILIPPE SKILBECQ, Rue de la Chapelle, 36, 6542 Sars-La-Buissière où à l'adresse courriel : [phskilbecq@cfwb.be](mailto:phskilbecq@cfwb.be)

<sup>(1)</sup> Voir les questions de l'épreuve I ci-après.

<sup>(2)</sup> Notamment CHEVALIER, A. et SAUTER, M., [1992], *Narration de recherche*, IREM, Université de Montpellier II.

et justifier sa ou ses réponse(s) est un exercice favorable à l'acquisition des concepts et à la structuration des démarches de résolution de problèmes.

Dans le *Mathématique et Pédagogie* n° 151, nous vous avons présenté l'épreuve d'essai envoyée en novembre 2004. Suite à de nombreuses demandes des enseignants du fondamental, nous avons publié sur le site Internet du Rallye Mathématique <sup>(3)</sup> les réponses aux problèmes et quelques analyses de résolution, ainsi que des propositions d'exploitation en classe. Prochainement, ces réflexions feront l'objet d'une publication plus complète. D'autres publications, concernant les deux épreuves qualificatives accompagnées des analyses des réponses des élèves, feront également l'objet de publications. Mais ceci c'est pour l'avenir, dans l'immédiat voici les questions de l'épreuve I.



***Rallye Mathématique***

13<sup>e</sup> édition  
Épreuve I  
©ARMT2005

### **Catégorie 3 - Les autocollants**

Les autocollants que Julie et Oscar collectionnent se vendent dans des enveloppes. Dans chaque enveloppe, il y a dix feuilles d'autocollants. Sur chaque feuille, il y a dix autocollants. Aujourd'hui, Julie et Oscar comptent leurs autocollants. Julie a 4 enveloppes complètes, 24 feuilles complètes hors des enveloppes et 12 autocollants séparés. Oscar a 6 enveloppes complètes, 3 feuilles complètes hors des enveloppes et 31 autocollants séparés,

**Qui a le plus d'autocollants ?**

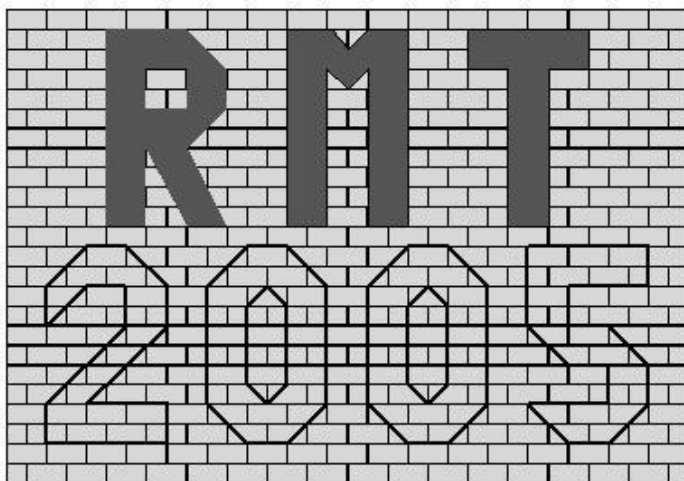
**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

### **Catégories 3, 4 - RMT 2005**

Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005. Sophie va peindre, le « 2 » et le premier « 0 ». Marc peindra l'autre « 0 » et le « 5 ».

---

<sup>(3)</sup> [http : www.enseignement.be/rallyemaths bpm](http://www.enseignement.be/rallyemaths bpm)



**Qui utilisera le plus de peinture ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

**Catégories 3, 4, 5 - Livrez les commandes**

Une fleuriste a préparé cinq bouquets de fleurs pour cinq de ses clientes :

- un bouquet d'œillets rouges ;
- un bouquet d'œillets jaunes ;
- un bouquet de tulipes rouges ;
- un bouquet de tulipes jaunes ;
- un bouquet de marguerites blanches.

On sait que :

- Mme Andrey achète uniquement des fleurs rouges ;
- Mme Basset habite à Lussy ;
- Mme Carillo et Mme Dardel veulent des fleurs jaunes ;
- Mme Lamartine et Mme Carillo veulent seulement des œillets !

**À quelle cliente chacun de ces bouquets est-il destiné ?**

**Notez vos explications.**

**Catégories 3, 4, 5 - Les belles colonnes**

Écrivez un nombre dans chaque case en respectant les consignes suivantes :

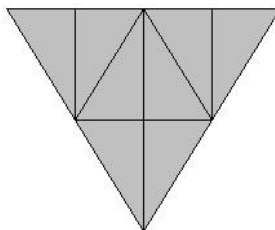
- Vous utilisez seulement les nombres 1, 2, 3, 4, 5 mais autant de fois que vous le voulez.
- Dans chaque ligne, tous les nombres sont différents.
- Dans chaque colonne, tous les nombres sont différents.
- Pour chaque colonne, le nombre écrit dans le triangle est la somme des trois autres nombres.

9	7	12	11	6
		4		1
1	4			

**Complétez les colonnes et expliquez votre raisonnement.**

**Catégories 3, 4, 5 - Le foulard de grand-mère**

Voici le dessin du foulard de grand-mère. Camille, sa petite fille, le trouve très beau parce qu'il a beaucoup de triangles. Elle essaie de les compter tous, mais elle a du mal à le faire et n'est jamais sûre de sa réponse.



**Selon vous, combien de triangles peut-on voir dans ce dessin ? Désignez-les précisément pour qu'on puisse comprendre facilement comment vous les avez comptés.**

**Catégories 4, 5, 6 - Les trois lapins**

Trois lapins mangent des légumes dans mon potager.

Le lapin blanc mange chaque soir une carotte.

Le lapin brun mange chaque soir un navet ou, s'il n'y en a plus, 3 carottes.

Le lapin noir mange chaque soir un chou ou, s'il n'y en a plus, 3 navets ou, s'il n'y en a plus non plus, 5 carottes.

Ce matin, j'ai récolté une partie des légumes de mon potager. J'ai laissé pour les lapins 45 carottes, 21 navets, 5 choux.

**Pendant combien de jours vont-ils pouvoir se nourrir tous les trois ? Expliquez comment vous avez trouvé.**

Ce problème a dans l'ensemble été assez bien réussi par les classes de 6<sup>e</sup> année, la moyenne étant de 2,96 pour un écart-type de 1,54. En ce qui concerne les classes de 5<sup>e</sup>, la moyenne est de 2,18 pour un écart-type de 1,63. Cependant, la moyenne n'est que de 1,59 pour un écart-type de 1,72 en 4<sup>e</sup> année primaire.

Une démarche assez récurrente est la suivante. D'abord, additionner les carottes pouvant être mangées quotidiennement par les trois lapins, soit  $1+3+5 = 9$ . Ensuite, diviser le nombre total de carottes (45) par le nombre de carottes ingurgitées chaque jour, pour obtenir le nombre de jours durant lesquels les lapins peuvent manger des carottes, soit  $45 \div 9 = 5$  jours. Et ainsi de suite pour les navets et les choux. Cette démarche ne tient cependant pas compte du fait que tous les lapins ne mangent pas des carottes quotidiennement, en tout cas pas dans les premiers jours.

Voici un exemple de résolution d'une classe de 6<sup>e</sup> année — en changeant de couleur pour chaque ligne! —.

1. Il n'y a plus de choux après cinq jours mais il reste 40 carottes et 16 navets.
2. Après 6 jours, il reste 39 carottes et 12 navets.
3. Après 9 jours, il reste 36 carottes et plus de navets.
4. Par jour, le lapin blanc mange 1 carotte, le lapin brun mange 3 carottes et le lapin noir mange 5 carottes.  
 $1 + 3 + 5 = 9$   
Comme il reste 36 carottes, on fait  $36 : 9 = 4$ .
5. On ajoute 4 jours aux 9  $\rightarrow$  13 jours.

Nous pouvons observer que dans ce cas, le calcul du nombre de carottes mangées chaque jour ( $1 + 3 + 5 = 9$ ) est utilisé à bon escient.

### Catégories 4, 5, 6 - La plaque de voiture

La police recherche la voiture d'un voleur.

- un premier témoin a constaté que le numéro de la plaque a cinq chiffres, tous différents,
- un deuxième témoin se souvient que le premier chiffre est 9,
- un troisième témoin a noté que le dernier chiffre est 8,
- un quatrième témoin, qui a 22 ans, a remarqué que la somme des cinq chiffres de la plaque est égale à son âge.

**Quel peut être le numéro de la plaque de la voiture que la police recherche?**

**Écrivez toutes les possibilités et expliquez comment vous les avez trouvées.**

**Catégories 5, 6 - Pour qui sonne l'horloge ?**

Pierre possède une horloge qui sonne :

– un coup à la demie de chaque heure,

– le nombre de coups indiqués par la petite aiguille à chaque heure pile.

Lorsqu'il est midi ou minuit, elle sonne 12 coups. Lorsqu'il est midi et demi, elle sonne 1 coup. Lorsqu'il est 13h, elle sonne 1 coup parce qu'il est une heure de l'après-midi.

Pierre remonte le mécanisme de l'horloge tous les jours entre midi et midi et demie.

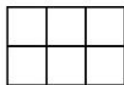
**Combien de coups l'horloge sonne-t-elle entre deux interventions de Pierre ?**

**Montrez clairement comment vous avez trouvé.**

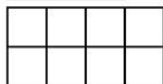
**Catégories 5, 6 - Grille d'allumettes <sup>(4)</sup>**



Pour construire cette figure, il a fallu 12 allumettes.



Pour cette deuxième figure, il a fallu quelques allumettes de plus !



Et pour cette troisième figure, encore davantage d'allumettes !

**En continuant à construire des figures de la même façon, combien d'allumettes seront nécessaires à la construction de la 100<sup>e</sup> ?**

**Justifiez votre réponse.**

Voici pour ce problème, une démarche de résolution qui nous particulièrement étonnée par sa clarté.

Nombre de constructions à réaliser (sans la 1<sup>re</sup>) : 99.

Nombre d'allumettes utilisées à la 1<sup>re</sup> construction : 12.

Nombre d'allumettes ajoutées à chaque construction : 5.

Nombres d'allumettes utilisées à la 10<sup>e</sup> construction :

$$\underbrace{(99 \times 5)}_{495} + 12 = 507.$$

Et une autre pour son originalité :

---

<sup>(4)</sup> Ce problème et les suivants concernent également le début de l'enseignement secondaire.

À la 3<sup>e</sup> figure, il y a 4 carrés en-dessous et (4 carrés) au-dessus.

À la 4<sup>e</sup> figure, il y a 5 carrés en-dessous et au-dessus.

À la 100<sup>e</sup> figure, il y a 101 carrés en-dessous et au-dessus.

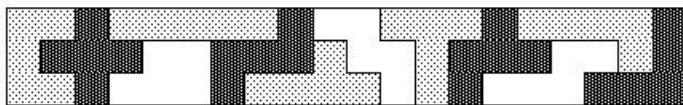
La ligne du milieu = 101 allumettes. Celles du haut et du bas = 202.

Les lignes verticales (sic) du dessus et du dessous sont de  $102 + 102 = 204$ .

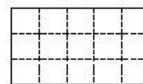
Nous additionnons le tout :  $101 + 202 + 204 = 507$ .

### Catégories 5, 6 - Avec des pentaminos

Un pentamino est une figure formée de cinq carrés égaux. Il y a 12 pentaminos différents avec lesquels on peut former un rectangle de « 3 × 20 » :



Éric joue avec ses 12 pentaminos et cherche à faire un rectangle de « 3 × 5 ». Il prend une des 12 pièces et s'aperçoit qu'il n'arrivera pas à finir son rectangle.



**Quelles pièces Éric n'arrivera jamais à utiliser pour son rectangle ? Expliquez pourquoi.**

### Catégories 6 - Les champignons

Mon oncle et ses quatre enfants, Anna, Bruno, Céline et Daniel, sont allés aux champignons.

- Ils ont cueilli 30 champignons en tout.
- Chacun a récolté au moins deux champignons.
- Anna et Céline ont, ensemble, moins de 8 champignons.
- Ce n'est pas Anna qui a récolté le moins de champignons.
- Le nombre de champignons de Céline est le tiers du nombre de ceux de Bruno.
- Daniel, à lui seul, a récolté autant de champignons que mon oncle et Anna.

**Combien chacun a-t-il pu récolter de champignons ?**

**Justifiez vos réponses.**



**Catégories 6 - Les biscuits d'Émilie**

Émilie a confectionné des petits biscuits, entre 300 et 500. Elle réfléchit à la façon dont elle pourrait les emballer dans plusieurs sachets contenant le même nombre de biscuits :

- si elle met 9 biscuits par sachet, il lui en restera 5,
- si elle met 8 biscuits par sachet, il lui en restera 7,
- si elle met 12 biscuits par sachet, il lui en restera 11,
- si elle met 16 biscuits par sachet, il lui en restera 15.

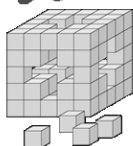
**Combien de biscuits Émilie a-t-elle faits ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé.**

---

Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

*Le Rallye Mathématique...*  
*j'y participe !*



$$20 \times 2 + 16 \times 2 + 4 = 76$$

<http://www.enseignement.be/rallyemathsbpn>

La deuxième épreuve du Rallye Mathématique a eu lieu du 14 au 25 avril 2005. Après correction de cette épreuve, nous avons déterminé les quatre classes finalistes pour chacune des quatre catégories. Celles-ci seront convoquées pour la finale francophone du samedi 7 mai, à la Haute École P. H. Spaak, rue Émile Vandervelde à Nivelles. De nombreux prix sont prévus tant pour les classes finalistes que pour les classes gagnantes.

Chaque classe participante recevra un certificat de participation et un diplôme individuel pour chaque élève. Les résultats de ce premier Rallye Mathématique en Communauté française de Belgique paraîtront dans une prochaine édition de *Mathématique et Pédagogie*.

## Dans nos classes

Y. Noël-Roch

### Deviner un nombre, cinq nombres !

## 1. Des lettres

J'ai déjà évoqué à plusieurs occasions la possibilité de jouer au magicien pour motiver l'introduction du calcul algébrique. Pour ne reprendre que deux exemples, le magicien peut

- soit « deviner » un nombre initial caché à partir d'un résultat annoncé,
- soit affirmer à un moment donné que le nombre initial est retrouvé.

### 1.1. Exemple 1

- Faire noter un nombre caché.
- Ajouter 30.
- Multiplier par 4.
- Soustraire 100.
- Diviser par 2.
- Soustraire 10.
- Annoncer le résultat final.

### 1.2. Exemple 2

- Faire noter un nombre caché.
- Multiplier par 2.
- Ajouter 5 au résultat.
- Multiplier par 5.
- Multiplier par 4.
- Soustraire 100.
- Diviser par 40.

Dans le premier cas, le professeur se contentera de prendre la moitié du résultat annoncé. Dans le second, il pourra affirmer que chaque élève a retrouvé le nombre qu'il avait initialement choisi.

De tels algorithmes peuvent varier à l'infini. Ils intriguent les élèves du premier degré. Dans le cas où chaque élève opère avec un nombre qui lui est propre, le professeur peut compter sur une (des) erreur(s) de calcul pour que la solution proposée soit mise en doute. C'est alors que l'analyse du processus acquiert sens et poids dans un travail collectif qui peut déboucher sur des schémas fléchés résumant ces situations :

$$\begin{array}{ccccccc}
 a & \xrightarrow{+30} & a + 30 & \xrightarrow{\times 4} & 4a + 120 & \xrightarrow{-100} & 4a + 20 \\
 & & & & & \xrightarrow{:2} & 2a + 10 \\
 & & & & & & \xrightarrow{-10} & 2a
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccc}
 a & \xrightarrow{\times 2} & 2a & \xrightarrow{+5} & 2a + 5 & \xrightarrow{\times 20} & 40a + 100 \\
 & & & & & \xrightarrow{-100} & 40a \\
 & & & & & & \xrightarrow{:40} & a
 \end{array}$$

## 2. Arrondis et Classes Modulo un naturel

Dans les exemples qui précèdent, j'ai pris soin de n'introduire que des divisions pour lesquelles le quotient est un naturel. Sans cette précaution, les choses sont moins immédiates si on limite le travail au domaine des naturels. Dans cet esprit, compliquons un peu l'exemple 1 :

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"><li>– Chaque élève choisit un nombre (inconnu du professeur) et applique successivement les consignes suivantes au nombre choisi puis aux résultats successifs :</li><li>– Multiplier par 3.</li><li>– Diviser par 2, conserver le</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>quotient s'il est entier, sinon, prendre l'entier immédiatement supérieur.</li><li>– Multiplier par 3.</li><li>– Diviser par 2, toujours en conservant le quotient s'il est entier, sinon, arrondir à l'entier supérieur.</li><li>– Donner ce dernier résultat.</li></ul> |
|--|---|

Ici comme plus haut, le professeur « devine » les nombres cachés par les élèves mais l'algorithme de décryptage est moins élémentaire. Sa recherche met en évidence la répartition des naturels en classes modulo 4.

Une première approche peut être de rechercher les cas où aucun arrondi ne complique le déroulement des calculs. Comme les multiplications par 3 n'introduisent aucun facteur 2 et que le processus amène deux divisions par 2, il faut que le nombre initial soit multiple de 4. Ainsi, si nous désignons par  $4a$  le nombre initial, les consignes successives produisent l'enchaînement suivant :

$$4a \xrightarrow{\times 3} 12a \xrightarrow{:2} 6a \xrightarrow{\times 3} 18a \xrightarrow{:2} 9a$$

Le nombre caché s'obtient facilement en divisant le résultat par 9, puis en multipliant ce produit par 4 ...

Et si le nombre caché n'est pas multiple de 4 mais seulement multiple de 2 ? Il s'écrit sous la forme  $2a$  où  $a$  est impair, soit  $a = 2b + 1$ . Le nombre initial peut donc s'écrire  $4b + 2$  et cela donne

$$4b + 2 \xrightarrow{\times 3} 12b + 6 \xrightarrow{:2} 6b + 3 \xrightarrow{\times 3} 18b + 9 \xrightarrow{:2} 9b + 5$$

Dans tous les autres cas, le nombre initial est impair et nous obtenons

$$2a + 1 \xrightarrow{\times 3} 6a + 3 \xrightarrow{:2} 3a + 2 \xrightarrow{\times 3} 9a + 6 \longrightarrow ?$$

après avoir appliqué les trois premières étapes mais la suite dépend de la parité de  $9a + 6$ . Elle est la même que celle de  $a$  : si  $a$  est pair, le dernier quotient est entier) tandis que si  $a$  est impair, le dernier quotient doit être arrondi à l'entier supérieur.

Comme

–  $a$  pair revient à écrire  $a = 2b$ , donc  $2a + 1 = 4b + 1$

–  $a$  impair revient à écrire  $a = 2b + 1$ , donc  $2a + 1 = 4b + 3$

nous pouvons reprendre le déroulement précédent en le complétant de manière adéquate dans les deux cas :

$$4b + 1 \xrightarrow{\times 3} 12b + 3 \xrightarrow{:2} 6b + 2 \xrightarrow{\times 3} 18b + 6 \xrightarrow{:2} 9b + 3$$

$$4b + 3 \xrightarrow{\times 3} 12b + 9 \xrightarrow{:2} 6b + 5 \xrightarrow{\times 3} 18b + 15 \xrightarrow{:2} 9b + 8$$

Belle occasion de sensibiliser les élèves au classement des nombres naturels en classes modulo 4 et de les amener à une synthèse du genre :

Domaine du nombre initial	$4\mathbb{N}$	$4\mathbb{N} + 1$	$4\mathbb{N} + 2$	$4\mathbb{N} + 3$
Domaine du résultat final	$9\mathbb{N}$	$9\mathbb{N} + 3$	$9\mathbb{N} + 5$	$9\mathbb{N} + 8$

Ce tableau dévoile tout le mystère du décryptage : le résultat sera

- soit multiple de 9
- soit (multiple de 9) +3
- soit (multiple de 9) +5
- soit (multiple de 9) +8

Le magicien devra donc déterminer dans quel cas il se trouve. Et, en fonction de cela, appliquer au résultat connu l'enchaînement approprié :

- soit diviser par 9, puis multiplier par 4.
- soit soustraire 3, diviser par 9, multiplier par 4 et enfin ajouter 1.
- soit soustraire 5, diviser par 9, multiplier par 4 et enfin ajouter 2.
- soit soustraire 8, diviser par 9, multiplier par 4 et enfin ajouter 3.

### 3. Factorisations, inégalités

Toujours plus performant, le magicien peut deviner cinq nombres naturels, chacun de ceux-ci étant notés secrètement par cinq élèves !

Voici le processus suivi :

- Cinq élèves notent chacun un nombre naturel.
- Après concertation entre eux, chacun inscrit le produit de son nombre par la somme des quatre autres.
- L'élève qui a obtenu le produit le plus grand ne communique rien, les quatre autres donnent les produits obtenus.
- Le magicien est capable de trouver les cinq nombres initiaux en précisant par qui chaque choix a été fait.

Par exemple, si les nombres cachés sont 1, 5, 10, 8 et 20, les produits communiqués sont 43, 195, 340 et 288.

Le magicien peut immédiatement classer les élèves dans l'ordre croissant de leurs choix parce que l'ordre des produits donnés est le même que celui des choix initiaux. Pour le prouver, appelons  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  les nombres cachés et supposons  $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ .

Comme les nombres sont tous naturels, les inégalités se traitent sans complication :

$$a(b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae \leq ba + bc + bd + be = b(a + c + d + e)$$

$$b(a + c + d + e) \leq ca + cb + cd + ce = c(a + b + d + e)$$

... de même pour les autres inégalités.

Pour découvrir les nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ , le magicien commence par globaliser les sommes inconnues, comme dans le tableau suivant :

Produit connu	Calcul caché	Factorisation cherchée
43	$a(b + c + d + e)$	$aw$
195	$b(a + c + d + e)$	$bx$
288	$c(a + b + d + e)$	$cy$
340	$d(a + b + c + e)$	$dz$

Dans les quatre factorisations de la dernière colonne,

- le premier facteur est inférieur ou égal au deuxième ( $a \leq w$ ,  $b \leq x$ , ...)
- les deux facteurs ont même somme, celle des cinq nombres cachés ( $a + w = b + x = c + y = d + z = a + b + c + d + e$ ).

Dès lors, le nombre **premier** 43 est très intéressant : sa seule factorisation possible est  $1 \times 43$ . Elle fournit le nombre le plus petit 1 et la somme des cinq nombres à découvrir 44. (44).

La factorisation adéquate de 195 est moins immédiate. Partant de  $195 = 1 \times 3 \times 5 \times 13$ , on découvre  $195 = 5 \times 39$  avec  $5 + 39 = 44$  ... et nous vous laissons le plaisir de terminer le décryptage, de voir ce qui se passe dans d'autres cas ...

- Plusieurs élèves peuvent penser un même nombre.
- Un espiègle peut espérer piéger le magicien en choisissant 0.
- Il n'y aura pas nécessairement un produit premier
- ...

## 4. Conclusion

Les notions mises en œuvre, l'éventail de difficulté qu'il est possible de rencontrer avec ce style de problèmes permettent une adaptation à tous les degrés du secondaire. Le rédacteur de la revue serait très heureux de recevoir des échos de jeux vécus avec des élèves.

Si ces jeux vous plaisent, vous en trouverez beaucoup d'autres, sur des sujets très variés, en consultant notamment le numéro spécial (auquel ont collaboré plusieurs auteurs) consacré aux Jeux Mathématiques :

« Bibliothèque Tangente-hors série n° 40 »

(site internet : <http://www.poleditions.com/catalogue.php>).

Les publications de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef.

— Les brochures signalées par \* sont de publication récente.

— Le prix « adhérent » concerne l'A.P.M.E.P. et la S.B.P.M.ef.



N°	Titres des brochures [PORT : cf. bas du tableau]	Prix, en €, sans port	
		public	adhérent
	<u>Collège</u>		
*503	La jubilation en mathématiques		
	Fichiers Evariste : 480 problèmes tirés de différents tournois et rallyes mathématiques	4,90	<b>3,80</b>
98/132	2 tomes :	21,35	<b>15,25</b>
502	EXCEL-Classe, CD-Rom (Version individuelle)	16,75	<b>16,75</b>
55	Géométrie expérimentale avec CABRI	13,40	<b>12,65</b>
119	Jeux 5 (Des activités mathématiques au collège)		
	Série EVAPM : Evaluation 6 <sup>e</sup> (première chez nous!)	11	<b>7,60</b>
112/118	2 fascicules : Analyses et résultats & Dossier professeur	17,50	<b>12,15</b>
352	Tableur et mathématiques au Collège	12,20	<b>9,90</b>
451	Concours Australien de mathématiques	15,85	<b>11</b>
250/	Panoramas de compétitions mathématiques		
*251	Panoramath 96 & Panoramath 2	25,90	<b>12,50</b>
	<u>Lycée</u>		
*138	Statistiques en classe de seconde	8,70	<b>6</b>
*120	Classeur informatisé de documents math. - 12 disquettes		
	Version 10 installations, port compris	45,95	<b>30,50</b>
	Version 26 installations, port compris	91,45	<b>61</b>
	CD-Rom de mise à jour	10,65	<b>7,60</b>
90/	Série EVAPM : Evaluation 1 <sup>re</sup> (cinquième chez nous!)		
107/108	3 fascicules	21,35	<b>14,50</b>
*305	GALION-Thèmes Seconde : 10 thèmes programme 2000	11,45	<b>9,90</b>
*450	MathÉvasion : 46 activités en bandes dessinées	7,60	<b>5,35</b>
	Avec CABRI, faire de la géométrie en jouant		
124/125	2 tomes déjà paru	17,55	<b>10,65</b>
*129	Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaires	9,90	<b>6,85</b>
121	Maths en scène : Commentaires des 22 thèmes de l'expo « Mathématiques 2000 » utilisable indépendamment	11,00	<b>7,60</b>
402	Jeux du Scientific American	20,60	<b>14,50</b>

PORT (prix indicatif) : 1 brochure : 2,50 € ; 2 ou 3 brochures : 4,00 € et au-dessus de 3 : 6,50 €

Serveur de l'APMEP : <http://www.apmep.asso.fr>

# Problèmes

Claudine Festraets <sup>(1)</sup>

## Harmonie

Problème n° 301 de Mathématique et Pédagogie n° 249

Démontrer que la mesure en radian d'un angle aigu est strictement inférieure à la moyenne harmonique de son sinus et de sa tangente.

**Solution de J. OOMS de Chimay**

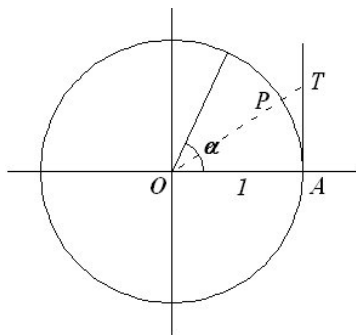
La moyenne harmonique de  $\sin \alpha$  et de  $\operatorname{tg} \alpha$  vaut

$$\begin{aligned} \left( \frac{\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}{2} \right)^{-1} &= \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha}{2 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} \right)^{-1} \\ &= \frac{2 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} \\ &= \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha + 1} \\ &= \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &= 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Reste à démontrer que

$$\alpha < 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ ou que } \frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Ce qui résulte du fait que l'aire du secteur circulaire  $AOP$  est strictement inférieure à l'aire du triangle  $AOT$ .



<sup>(1)</sup> Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be



Bonnes solutions de A. Paternotte de Boussu, J. Rasse de Méan, J. Anseeuw de Roeselaere, P. Bronsztein de Maisons-Laffitte, J. Finoulst de Diepenbeek et C. Villers de Hyon.

**Minimum**

Problème n° 302 de *Mathématique et Pédagogie* n° 149

Les nombres réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont strictement positifs et tels que  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . Démontrer que la somme

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}$$

admet un minimum et déterminer la valeur de ce minimum.

**Solution de P. LECOMTE de Liège**

Puisque la somme des nombres  $a_j$  vaut 1, l'expression à minimiser est

$$s = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2 - a_i}.$$

La fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{x}{2 - x}$$

est convexe dans l'intervalle  $]0, 1[$ . C'est évident sur son graphe qui est une hyperbole équilatère d'asymptotes verticale d'équation  $x = 2$  et horizontale d'équation  $y = -1$ . La branche concernée par l'intervalle est celle de gauche; elle varie de 0 à  $+\infty$  dans l'intervalle et a sa concavité effectivement tournée vers le haut. (Du reste, la dérivée seconde de  $f$  est positive dans l'intervalle donné.)

On peut donc lui appliquer l'inégalité de JENSEN : pour toute combinaison convexe  $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$  des nombres  $a_i \in ]0, 1[$ , on a

$$\alpha_1 f(a_1) + \dots + \alpha_n f(a_n) \geq f(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n). \quad (1)$$

En particulier, si les  $a_i$  sont tous égaux, forcément à  $1/n$ , cela donne

$$f(a_1) + \dots + f(a_n) \geq nf\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right).$$

Enfin, si la somme des  $a_i$  vaut 1, il vient

$$f(a_1) + \dots + f(a_n) \geq nf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}.$$

On a donc

$$s \geq \frac{n}{2n-1}$$

l'égalité étant atteinte quand les  $a_i$  sont tous égaux.

**Rappel 1.** Une combinaison est convexe quand ses coefficients  $\alpha_i$  sont positifs ou nuls et de somme égale à 1. Chacun est alors compris entre 0 et 1.

**Rappel 2.** L'inégalité de JENSEN (1) est évidente. Elle traduit en effet le fait que les points intérieurs aux polygones dont les sommets sont sur le graphe d'une fonction convexe  $f$  sont situés au-dessus de ce graphe.

J. Ooms de Chimay, J. Anseeuw de Roeselaere, P. Bronshtein de Maisons-Laffitte, J. Finoulst de Diepenbeek et J. Rasse de Méan ont aussi envoyé de bonnes solutions.

p.g.c.d.
----------

Problème n° 303 de Mathématique et Pédagogie n° 149

$m$  et  $n$  sont des entiers positifs et  $m$  est impair. Quel est le plus grand commun diviseur de  $2^m - 1$  et  $2^n + 1$  ?

**Solution de S. DESCHAUER de Dresde (Allemagne)**

Soit  $d$  le plus grand commun diviseur de  $2^m - 1$  et  $2^n - 1$ . Ces deux nombres sont impairs, donc  $d$  est impair.

$d$  est un diviseur de  $2^{mn} - 1$ , car on a  $1 + 2^m + (2^m)^2 + \dots + (2^m)^{n-1} = \frac{2^{mn} - 1}{2^m - 1}$ .

$d$  est un diviseur de  $2^{mn} + 1$ , car,  $m$  étant impair, on a  $1 + (-2^n) + (-2^n)^2 + \dots + (-2^n)^{m-1} = \frac{(-2^n)^m - 1}{-2^n - 1} = \frac{2^{mn} + 1}{2^n + 1}$ .

D'où  $d$  divise  $(2^{mn} + 1) - (2^{mn} - 1) = 2$ . Il s'ensuit que  $d = 1$ .

Bonnes solutions, mais un peu plus longues, de J. Ooms de Chimay et de J. Rasse de Méan. Solution correcte de P. Bronshtein de Maisons-Laffitte

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir pour le 1<sup>er</sup> novembre 2005 au plus tard. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier LaTeX ou à défaut au format .doc ou .txt.

### 310. Aire du triangle

Le point  $P$  est intérieur au triangle  $ABC$ . Les droites  $AP$ ,  $BP$  et  $CP$  coupent les côtés  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$  respectivement en  $D$ ,  $E$  et  $F$ . Sachant que  $|AP| = 6$ ,  $|BP| = 9$ ,  $|PD| = 6$ ,  $|PE| = 3$  et  $|CF| = 20$ , trouver l'aire du triangle  $ABC$ .

### 311. Limite

Soient  $a_n$ ,  $b_n$  des entiers positifs satisfaisant la relation

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^n$$

pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  existe et déterminer cette limite.

### 312. Polyglottes

Une compagnie internationale possède 70 employés. Si  $X$  et  $Y$  sont deux quelconques d'entre eux, il y a une langue parlée par  $X$  et non par  $Y$  et une autre parlée par  $Y$  et non par  $X$ . Quel est le nombre minimum de langues parlées par les employés?

# Olympiades

Claudine Festraets <sup>(1)</sup>

Voici les solutions des trois derniers problèmes de l'Olympiade Internationale de Mathématique 2004. La première est celle d'un étudiant qui a obtenu la note maximum.

## Problème 4

Soit  $n \geq 3$  un entier. Soit  $t_1, t_2, \dots, t_n$  des réels strictement positifs tels que

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Montrer que  $t_i, t_j, t_k$  sont les longueurs des côtés d'un triangle pour tous  $i, j, k$  tels que  $1 \leq i < j < k \leq n$ .

**Solution de David Frenay, élève du Collège Ste Marie à Mouscron**

Par l'absurde, on va démontrer que s'il existe  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tels que  $i \neq j \neq k \neq i$  et  $t_i + t_j \leq t_k$ , alors

$$\sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \geq n^2 + 1$$

Pour  $n = 3$ , sans perte de généralité, on pose  $t_3 \geq t_1 + t_2$ .

$$\sum_{i=1}^3 t_i \sum_{i=1}^3 \frac{1}{t_i} = 3 + t_3 \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) + \frac{t_1 + t_2}{t_3} + \frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1}$$

Par les inégalités moyenne arithmétique-moyenne géométrique et moyenne arithmétique-moyenne harmonique, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 t_i \sum_{i=1}^3 \frac{1}{t_i} &\geq 3 + \frac{4t_3}{t_1 + t_2} + \frac{t_1 + t_2}{t_3} + 2 \\ &\geq 3 + 2 + \frac{3t_3}{t_1 + t_2} + 2 \end{aligned}$$

---

<sup>(1)</sup> Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

$$\geq 3 + 2 + \frac{3t_3}{t_3} + 2 = 10 = 3^2 + 1$$

Supposons la propriété vraie pour  $n-1$  et démontrons qu'elle l'est pour  $n$ .

Notons  $x_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} t_i$  et  $y_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{t_i}$ .

Il s'agit de démontrer que

$$n^2 + 1 \leq (x_{n-1} + t_n)(y_{n-1} + \frac{1}{t_n}) = x_{n-1}y_{n-1} + t_n y_{n-1} + \frac{1}{t_n} x_{n-1} + 1$$

$$\text{Or, } x_{n-1}y_{n-1} + t_n y_{n-1} + \frac{1}{t_n} x_{n-1} \geq (n-1)^2 + 1 + \frac{t_n(n-1)^2}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{t_n}.$$

$$\text{Donc, il faut démontrer que } 1 + \frac{t_n(n-1)^2}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{t_n} \geq 2n-1 \quad (1).$$

Mais  $\sum_{i=1}^{n-1} t_i \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{t_i}$  est homogène, on peut poser  $x_{n-1} = 1$ . l'inégalité (1) devient alors

$$t_n + t_n^2(n-1)^2 + 1 \geq (2n-1)t_n, \text{ ou encore } (t_n(n-1) - 1)^2 \geq 0, \text{ ce qui est toujours vrai.}$$

La proposition est ainsi démontrée.

### Problème 5

Dans un quadrilatère convexe  $ABCD$ , la diagonale  $BD$  n'est, ni la bissectrice de l'angle  $\widehat{ABC}$ , ni la bissectrice de l'angle  $\widehat{CDA}$ . Un point  $P$  est intérieur à  $ABCD$  et vérifie

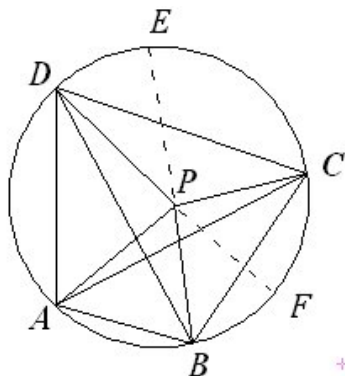
$$\widehat{PBC} = \widehat{DBA} \text{ et } \widehat{PDC} = \widehat{BDA}$$

Montrer que le quadrilatère  $ABCD$  est inscriptible si et seulement si  $AP = CP$ .

### Solution

1. Soit  $ABCD$  un quadrilatère inscriptible.

Les droites  $BP$  et  $DP$  coupent le cercle circonscrit au quadrilatère en  $E$  et  $F$  respectivement.



$\widehat{ADB} = \widehat{FDC}$ , d'où  $|AB| = |FC|$  et  $BF \parallel AC$ .

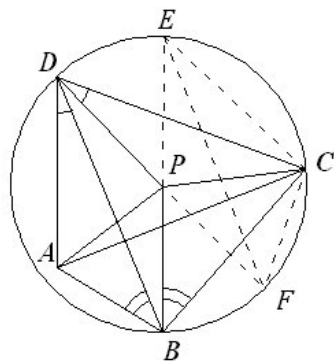
$\widehat{ABD} = \widehat{ECB}$ , d'où  $|AD| = |EC|$  et  $DE \parallel AC$ .

On a ainsi  $BF \parallel DE \parallel AC$ .

Les arcs  $\widehat{BAD}$  et  $\widehat{FCE}$  ayant même longueur, on a  $|BD| = |FE|$ . Donc  $BDEF$  est un trapèze isocèle, son axe de symétrie passe par le centre du cercle, passe par le point  $P$  d'intersection des diagonales du trapèze et est perpendiculaire aux côtés parallèles  $DE$  et  $BF$  (et  $AC$ ). D'où cet axe est la médiatrice de  $[AC]$  et on a bien  $|PA| = |PC|$ .

2. Supposons que l'on a  $|PA| = |PC|$  et considérons le cercle circonscrit au triangle  $BCD$ .

Soient  $E$  et  $F$  les points d'intersection respectifs de  $BP$  et  $DP$  avec ce cercle.



$\widehat{BDF} = \widehat{BEF}$ , car ils interceptent le même arc  $\widehat{BF}$ .

$\widehat{DBE} = \widehat{DFE}$ , car ils interceptent le même arc  $\widehat{DE}$ .

Les triangles  $PBD$  et  $PFE$  sont semblables et leur rapport de similitude vaut  $r = \frac{|BD|}{|FE|}$ .

$\widehat{ADB} = \widehat{FDC}$  (par hypothèse);  $\widehat{FDC} = \widehat{FEC}$  (interceptent le même arc  $\widehat{FC}$ ), d'où  $\widehat{ADB} = \widehat{FEC}$ .

$\widehat{ABD} = \widehat{EBC}$  (par hypothèse;  $\widehat{EBC} = \widehat{EFC}$  (interceptent le même arc  $\widehat{EC}$ ), d'où  $\widehat{ABD} = \widehat{EFC}$ .

Les triangles  $DAB$  et  $ECF$  sont semblables et leur rapport de similitude vaut  $r = \frac{|BD|}{|FE|}$ .

D'où les quadrilatères  $ABPD$  et  $CFPE$  sont semblables et leur rapport de similitude vaut  $r = \frac{|BD|}{|FE|}$ , mais ce rapport vaut aussi  $\frac{|AP|}{|CP|} = 1$ .

Ces deux quadrilatères sont donc isométriques, leur axe de symétrie est la bissectrice de l'angle  $\widehat{BPF}$ . Puisque  $BFCED$  est inscriptible, son image  $FBADE$  l'est aussi, donc  $A$  appartient au cercle circonscrit au triangle  $BCD$ .

### Problème 6

Un entier strictement positif est dit *alternant* si deux chiffres consécutifs quelconques de son écriture décimale ont des parités différentes.

Trouver tous les entiers strictement positifs  $n$  dont un multiple est alternant.

### Solution

1. Si  $n$  est multiple de 20, tout multiple de  $n$  a 0 comme chiffre des unités et 2, 4, 6 ou 8 comme chiffre des dizaines. Il n'est en aucun cas un nombre alternant.

Restent à considérer les nombres de la forme  $2^k \cdot N$ ,  $5^k \cdot N$  et  $2 \cdot 5^k \cdot N$  avec  $k$  entier positif et  $N$  entier strictement positif premier avec 10.

2. Démontrons par récurrence qu'il existe un nombre alternant  $A_k = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}$  tel que la plus haute puissance de 2 divisant  $A_{2i-1}$  soit  $2^{2i-1}$  et celle divisant  $A_{2i}$  soit  $2^{2i+1}$ .

$A_2 = a_2 a_1 = 72$  convient.

Supposons l'hypothèse vraie pour  $A_{2n}$  et posons  $A_{2n} = 2^{2n+1} B_{2n}$ ,  $B_{2n}$  est impair.

Pour  $a_{2n+1} = 4$ , on a

$$A_{2n+1} = 4 \cdot 10^{2n} + A_{2n} = 2^{2n+2} \cdot 5^{2n} + 2^{2n+1} B_{2n} = 2^{2n+1} (\underbrace{2 \cdot 5^{2n} + B_{2n}}_{\text{impair}})$$

La plus haute puissance de 2 qui divise  $A_{2n+1}$  est bien  $2^{2n+1}$ . Posons  $A_{2n+1} = 2^{2n+1} B_{2n+1}$ ,  $B_{2n+1}$  est impair.

$$\begin{aligned} A_{2n+2} &= a_{2n+2} \cdot 10^{2n+1} + A_{2n+1} \\ &= 2^{2n+1} (a_{2n+2} \cdot 5^{2n+1} + B_{2n+1}) \\ &\equiv a_{2n+2} \cdot 5 + B_{2n+1} \pmod{8} \end{aligned}$$

Il existe certainement dans l'ensemble  $\{1, 3, 5, 7\}$  une valeur de  $a_{2n+2}$  telle que  $a_{2n+2} \cdot 5 + B_{2n+1} \equiv 4 \pmod{8}$ . D'où  $2^{2n+3}$  est la plus haute puissance de 2 qui divise  $A_{2n+2}$ .

Et dès lors tout nombre de la forme  $2^k$  admet un multiple alternant.

3. De manière analogue, on démontre qu'il existe un nombre alternant  $B_k = b_k b_{k-1} \dots b_2 b_1$  tel que  $5^k$  divise  $B_k$  pour tout naturel non nul  $k$ . Il en découle que  $2 \cdot 5^k$  divise  $10B_k = \overline{b_k b_{k-1} \dots b_2 b_1 0}$  pour tout naturel non nul  $k$ .
4. Soit  $n$  un entier strictement positif non multiple de 20, par exemple de la forme  $2^k \cdot N$  (resp.  $5^k \cdot N$ ,  $2 \cdot 5^k \cdot N$ ), avec  $N$  premier avec 10. Soit  $A_k$  un nombre alternant de  $2m$  chiffres multiple de  $2^k$  (resp.  $5^k$ ,  $2 \cdot 5^k$ ). Formons le nombre alternant

$$\underbrace{A_k A_k \dots A_k}_{t \text{ fois}} = A_k (1 + 10^{2m} + \dots + 10^{2(t-1)m}) = A_k \cdot x_t$$

Donnons à  $t$   $N+1$  valeurs consécutives  $1, 2, \dots, N, N+1$ . Parmi les nombres  $x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}$ , il y en a au moins deux qui ont le même reste modulo  $N$ , soit  $x_p$  et  $x_q$  (avec  $p > q$ ) et dans ce cas

$$A_k(x_p - x_q) = \underbrace{A_k A_k \dots A_k}_{p \text{ fois}} - \underbrace{A_k A_k \dots A_k}_{q \text{ fois}} = \underbrace{A_k A_k \dots A_k}_{p-q \text{ fois}} \cdot 10^{2qm}$$

est divisible par  $N$ . Or  $N$  est premier avec 10, donc  $\underbrace{A_k A_k \dots A_k}_{p-q \text{ fois}}$  est un

nombre alternant divisible par  $N$ . Comme d'autre part, il est divisible par  $2^k$  (resp.  $5^k$ ,  $2 \cdot 5^k$ ), il est divisible par  $n$ .



## Le coin du trésorier

P. Marlier

### Tarifs (Janvier 2005)

#### Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :

- Cotisation ordinaire : 20 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 28,50 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 50 € (non PRIOR), 60 € (PRIOR)

Autres pays : 62 € (non PRIOR), 75 € (PRIOR)

#### Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 26 €.

Europe : 42 € (non PRIOR), 43 € (PRIOR).

Autres pays : 48 € (non PRIOR), 54 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2002 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.

Années 2003 ou 2004 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 5 €.

#### Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

- Abonnements groupés à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 4 €.

Europe : 7 € (non PRIOR), 9 € (PRIOR).

Autres pays : 10 € (non PRIOR), 14 € (PRIOR).

- Abonnements groupés aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 7 €.

Europe : 13 € (non PRIOR), 17 € (PRIOR).

Autres pays : 15 € (non PRIOR), 20 € (PRIOR).

### Abonnements individuels.

- Abonnements à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 6 €.

Europe <sup>(1)</sup> : 13 € (non PRIOR), 16 € (PRIOR).

Autres pays : 15 € (non PRIOR), 21 € (PRIOR).

- Abonnements aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 11 €.

Europe : 16,50 € (non PRIOR), 20,50 € (PRIOR).

Autres pays : 20 € (non PRIOR), 25 € (PRIOR).

### Anciens numéros :

Avant 2002-2003 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.

Année 2003-2004 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

### Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 43 €. Ils recevront le Bulletin de l'APMEP, le BGV (Bulletin à Grande Vitesse) et PLOT.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP; ils bénéficient du prix « adhérents »..

### Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

### Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

**Si vous habitez en Belgique :** Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

**Si vous habitez en France :** Compte CCP Lille 10 036 48 5 de SBPMef.

**Si vous habitez ailleurs :** Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :

CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429

BIC BPOTBEB1

ou CCP LILLE : IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8502 683

BIC PSSTFRPLIL

## Le coin du trésorier

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
<b>Séries RENOVER</b>			
Série 1 (n° 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n° 7 à n° 11 et n° 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
<b>Dossiers d'exploration didactique</b>			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 6 (Statistiques)	7,40 €	6 €	voir ci-dessous
Dossier 7 (Vers les infiniement petits)			
<b>Simone Trompler et Guy Noël</b>	6 €		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire)			
<b>Claude Villers et alii</b>	9 €		T3
<b>Jacques Bair, Mathématique et Sport</b>	5 €	3,70 €	T1
<b>François Jongmans</b>			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12 €	9,50 €	T2
<b>G. Robert, CD-Rom, logiciels mathématiques</b>	5 €	/	T1
<b>Recueils de questions des OMB</b>			
Tome 5	6 €		voir ci-dessous

### Frais d'expédition en non PRIOR

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	6,50 €	10 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions en **PRIOR**,  
consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe »,  
voir les tarifs postaux.

Pour tout problème,  
consulter le secrétariat.

### Exemples de tarification pour commandes groupées

Brochures OMB (5) ou dossier 6

Dossier 8 (Démonstration...)

1 ex.	T1
2 ou 3 ex.	T2

4 à 6 ex.	T3
7 à 12 ex.	T4

1 ex.	T2	3 à 4 ex.	T4
2 ex.	T3		

Au-delà, consulter le secrétariat