

**Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française**

Secrétariat : *M.-C. Carruana*, Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique)
Tél.-Fax : 32-(0)65-373729, c.él. : sbpm@sbpm.be, Web : <http://www.sbpm.be>

Membres d'honneur : *H. Levarlet, W. Servais* (†)

Conseil d'administration : *J.-P. Cazzaro, M. Denis-Pecheur, B. Desaedeleer, P. Dupont, Cl. Festraets-Hamoir, M. Frémal, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, P. Marlier, Ch. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ph. Skilbecq, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler, Ch. Van Hooste*

Président :

Ch. Van Hooste, Chemin de
Marbiscœur 25, 6120 Marbaix-la-Tour,
Tél. 071-217793

Vice-Président,

Olympiades Internationales :

G. Troessaert, Recogne sur le Chêne
58, 6800 Libramont, Tél. 061-224201

Administrateur délégué :

Ch. Michaux, Rue Brigade Piron
290, 6061 Montignies-sur-Sambre,
Tél. 065-354706

Commission Congrès,

Publicité :

M. Denis-Pecheur, Rue de la Ferme
11, 5377 Noisieux (Somme-Leuze),
Tél. 086-323755

Trésorier :

R. Scrève, Rue du Corbeau 146,
6200 Châtelet, Tél. 071-402734

Secrétaire :

M. Frémal, Rue W. Jamar 311/51,
4430 Ans, Tél. 04-2636817

Olympiades nationales, site

WEB :

Cl. Festraets-Hamoir, Rue J.B.
Vandercammen 36, 1160 Bruxelles
Tél. 02-6739044

Contact Presse :

N. Miewis-Seronveaux, Avenue de
Péville 150, 4030 - Grivegnée
Tél. 04-3431992

Math-Jeunes Junior :

A. Paternotte, Rue du Moulin 78,
7300 Boussu, Tél. 065-785064

SBPM-Infor :

R. Gossez, Albert I Laan 13, 1560
Hoeilaart, Tél. 02-6579892

Math-Jeunes Senior :

G. Noël, Rue du 1^{er} Chasseur à cheval
16/14, 7000 - Mons, Tél. 065-848621

Portefeuille de lecture :

M. Herman, Rue Rafhay 95, 4630
Soumagne, Tél. 087-267023

Mathématique et Pédagogie :

P. Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau, Tél. 010.84.11.99

Comité de rédaction : *J. Miewis, J. Bair, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, Cl. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, Ch. Michaux, J. Navez, G. Noël, Ph. Skilbecq, N. Vandenabeele, Ch. Van Hooste, Cl. Villers*



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

- *P. Dupont, Éditorial* 3

Articles

- *G. Malaty, La formation des enseignants en mathématiques en Finlande* 5
- *Yves Crama, Trente ans de recherche opérationnelle et d'optimisation mathématique* 23
- *Francisco Bellot Rosado, Un théorème peu connu : le théorème des transversales* 41

Rubriques

- *C. Festraets, Problèmes* 57
- *C. Festraets, Olympiades* 65
- *R. Scrève, Le coin du trésorier* 73

NOTE

- * Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante :

Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.

Courrier électronique : `pascal.dupont@ulg.ac.be`

- * Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, etc.
- * Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- * Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence encodés sur une disquette (3,5") ou par courrier électronique. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant ($\text{\LaTeX}$ 2 _{ϵ} , Word) ; les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. A défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.
L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
- * La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
Pour les articles :
Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
- * Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- * MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Éditorial

P. DUPONT

Chers lecteurs,

Après cinq ans de loyaux et —surtout— épuisants services, Jules Miewis m'a transmis le flambeau de *Mathématique & Pédagogie*.

Durant ce lustre, inlassablement, il a lu les articles qui lui étaient proposés, les a parfois dactylographiés, les a mis en page. Il a constamment innové pour élever la qualité de votre revue à un niveau presque inimaginable, compte tenu des couts de fabrication que nous sommes prêts à supporter. Petit à petit, pour l'assister dans sa tâche, il a construit un magnifique ensemble d'outils L^AT_EX. C'est à présent une mécanique de précision qui compose les volumes que vous attendez avec impatience.

Mais il n'en reste pas moins que la tâche est redoutable, et redoutable surtout par son caractère itératif, comme dans le vieux mythe grec de Sisyphe. Jules mérite donc toute notre admiration et tous nos remerciements. Les miens, les vôtres. Je pense que c'est ici la meilleure place pour les lui exprimer, et je m'en charge très volontiers, en tant qu'interprète de tout le lectorat.

Bien sûr, Jules a reçu de l'aide, à commencer par celle de son épouse Nicole, dont le dynamisme est bien connu de tout qui a déjà participé à l'un de nos congrès. Cristina Carruana, au secrétariat de la Société, a toujours été plus qu'une courroie de transmission : elle tient un rôle actif et essentiel. Guy Noël, maitre T_EXnologue, a aussi plus d'une fois prêté main forte. À eux aussi, nous devons des remerciements admiratifs. Et si je commets ici l'impair d'oublier l'un ou l'autre, c'est que, plus discrète, son action m'a échappé ; je le prie de m'en excuser.

Cependant, l'efficace mais délicat mécanisme mis au point par Jules s'est très légèrement grippé lors de son déménagement en terre brabançonne. Il m'a fallu plusieurs mois pour l'installer confortablement chez moi et pour apprendre à l'utiliser de manière plus ou moins satisfaisante. Vous constaterez que ce numéro de transition n'a pas le poli auquel mon prédécesseur nous avait habitués. J'espère pouvoir m'améliorer au fil des mois pour vous procurer une revue aussi agréable que ce qu'elle a été.

Et, autre défaut, ce numéro 153 sort de presse avec un retard certain. C'est encore une conséquence d'une passation de pouvoirs à laquelle je m'étais insuffisamment préparé. Mon objectif est maintenant d'arriver à résorber ce retard.

Pour tous ces inconvénients, dont je suis seul responsable, je vous présente mes humbles excuses, chers lecteurs. Et je les présente également à nos annonceurs, dont les plans de publication ont été bousculés.

N'oubliez pas de renouveler votre cotisation pour l'année 2006.
Et profitez-en pour convaincre un nouveau collègue de se
joindre à nous...

La formation des enseignants en mathématiques en Finlande

G. MALATY, *Université de Joensuu, Finlande*

1. Les écoles finlandaises et la formation des enseignants

La formation des enseignants en Finlande pourrait constituer un modèle idéal pour les spécialistes de l'éducation. Cependant un bon nombre de formateurs d'enseignants de mathématiques et de mathématiciens ne sont pas satisfaits de la formation donnée aujourd'hui. Nous donnerons au début de cet article un relevé des facteurs qui satisfont les spécialistes de l'éducation et nous terminerons l'article par une discussion sur les facteurs qui ne satisfont pas les spécialistes de l'éducation mathématique et les mathématiciens.

Pourquoi la formation des enseignants semble-t-elle idéale ? la Finlande représente une sorte d'état providence. Le gouvernement offre, le plus souvent gratuitement, toutes sortes de services, en particulier aux enfants et aux jeunes. Cet intérêt pour la formation des enfants et des jeunes confère aux enseignants un très grand respect. La position sociale élevée des enseignants rend les études qui conduisent à l'enseignement particulièrement attrayantes, en particulier celles qui forment les instituteurs primaires, dans lesquelles les méthodes d'enseignement de la lecture et de l'écriture sont particulièrement remarquables depuis environ 150 ans. Non seulement l'éducation est gratuite en Finlande, mais elle est convenablement subventionnée. Les écoles offrent chaque jour aux enfants un repas chaud gratuit

Adresse de l'auteur: George Malaty, Université de Joensuu, Finlande

Courriel : george.malaty@joensuu.fi

Texte publié dans *Mathematics Teacher Training in Finland, International Monographs on Mathematics, teaching Worldwide : Monograph 2*, July 2004, p. 83-105

La traduction de l'anglais a été réalisée pour le compte des cahiers du CeDoP (Urem-ULB) par Charlotte Bouckaert, Avenue Forton, 6, 1950 - Kraainem

Courriel : charlotte.bouckaert@scarlet.be

Nous la remercions vivement de nous autoriser à reprendre quelques extraits significatifs de cette première publication. Les personnes intéressées par la version complète de cet article peuvent la contacter ou contacter le CeDop.

et les soins médicaux. Il y a un accès libre aux ordinateurs et aux imprimantes et tous les ordinateurs sont reliés à Internet. Les étudiants ont accès à l'ordinateur tous les jours et peuvent, entre autres choses, vérifier leurs e-mails. Les enseignants n'ont pas de limitation dans le nombre de photocopies qu'ils distribuent aux élèves. Le matériel, comme par exemple celui nécessaire pour les cours d'art, est distribué gratuitement.

L'intérêt que porte l'état à la formation des enfants et des jeunes conduit ces derniers à postuler pour des études d'enseignants. Cet intérêt pour l'enfance et la jeunesse est sans doute lié au fait que la population finlandaise n'est pas importante par rapport à la superficie et aux ressources ⁽¹⁾. La faible densité de population ne suffit pas à justifier l'intérêt pour l'éducation. Celui-ci est plus lié à des facteurs historiques et des traditions. L'attention accordée aux enfants et aux jeunes a rendu les écoles un environnement de travail recherché par beaucoup de jeunes.

Il nous faut maintenant expliquer en détail la vie quotidienne dans les écoles finlandaises pour explorer les éléments qui donnent aux écoles un environnement de travail particulièrement attrayant. Tout d'abord, les locaux sont bien meublés et bien équipés. Les écoles sont des lieux ouverts, tant dans le contexte physique que social. Il n'y a pas de murs qui entourent les écoles, et les visiteurs peuvent entrer dans l'école par n'importe laquelle de ses portes. Et pourtant, le travail des enseignants n'est soumis à aucune forme d'inspection régulière.

Quelques détails liés à des facteurs mineurs de la vie quotidienne à l'école donneront au lecteur une bonne image de ce qu'est l'école en Finlande. Chaque salle de classe comporte un lavabo et un rouleau de papier pour se laver les mains. Les salles de classes, les corridors, les auditoriums, les salles de sport et les salles de bains sont toujours propres et chauds. C'est la raison pour laquelle les élèves se promènent en chaussettes à l'intérieur de l'école, ce qui leur donne l'impression d'être à la maison. Chaque matin, l'enseignant trouve les tableaux bien nettoyés.

Dans les écoles finlandaises, il n'y a pas de rapports formels ni dans la manière de s'habiller, ni dans les relations entre professeurs et élèves. Néanmoins, il y a un grand respect pour les enseignants, en particulier dans les écoles primaires. Les écoles finlandaises ne sont pas bruyantes, surtout dans les salles de classes. Les directeurs d'écoles peuvent entrer en contact avec tous les élèves et les professeurs grâce aux hauts parleurs présents dans

⁽¹⁾ Selon l'Institut de statistique finlandais [9] la population en 2002 était de 5 206 000 habitants, ce qui donne une densité de population de 17,2 personnes au kilomètre carré.

chaque salle de classe. Cela signifie que de temps en temps, le directeur peut demander aux enfants et aux enseignants de cesser leurs activités pour un moment afin d'entendre une information urgente. Ceci arrive assez rarement.

Le système éducatif en Finlande aujourd'hui émane de la réforme des années 1970. La réforme la plus importante a été celle qui a établi le système des écoles intégrées (*comprehensive schools*) suite à la loi sur le système éducatif de 1968. La constitution des écoles intégrées pour les niveaux 1 à 9 (de 7 à 15 ans) a été un facteur essentiel qui a placé la formation des instituteurs primaires sous la responsabilité de l'Université. L'effet du système des écoles intégrées sur la formation des enseignants sera discuté en détail plus tard dans cet article, mais il nous faut dire un mot sur les écoles intégrées et l'enseignement obligatoire en Finlande. Tous les enfants qui résident de manière permanente en Finlande sont soumis à l'éducation obligatoire pendant une période de dix ans. Cet enseignement obligatoire commence l'année du septième anniversaire de l'enfant. L'enseignement obligatoire prend fin quand l'étudiant atteint l'âge de 17 ans, ou quand il ou elle a achevé le programme de l'enseignement intégré. Le réseau des écoles intégrées couvre tout le pays. Le maillage des écoles qui offrent l'instruction des 6 premiers niveaux est particulièrement serré pour éviter aux enfants de longs trajets. Si la distance du domicile à l'école excède 5 kilomètres, le trajet en taxi est offert gratuitement. Les écoles intégrées fournissent gratuitement les manuels, les cahiers, les crayons, etc.

Les écoles intégrées offrent ce qu'on appelle en Finlande **l'éducation de base**. D'après l'acte sur l'éducation de base de 1998, le principal objectif de l'éducation de base est de

Soutenir le développement des élèves pour qu'ils deviennent des membres de la société humainement et éthiquement responsables et leur fournir les connaissances et les compétences nécessaires dans la vie... L'instruction doit promouvoir l'égalité dans la société et les compétences des élèves à participer à leur éducation et à se développer durant leur vie... ([6] 628/1998)

Le programme de l'éducation de base comporte au moins les sujets suivants : langue maternelle et littérature (Suédois ou Finnois), langues étrangères, étude de l'environnement, éducation civique, religion ou morale, histoire, éducation sociale, mathématiques, physique, chimie, biologie, géographie, éducation physique, musique, arts visuels, travaux manuels et économie domestique. Les objectifs nationaux ainsi que le temps imparti aux différentes matières, aux groupes de matières et à l'orientation des élèves

sont décidés par le gouvernement. Le conseil national de l'Éducation décide des objectifs et des contenus essentiels de l'instruction en confirmant le programme essentiel connu sous le nom de « fondements du programme scolaire » (School Curriculum Basics). C'est sur la base de ces fondements que chaque fournisseur d'éducation prépare un programme local. Le programme local est fait par les municipalités et les écoles.

L'école intégrée comporte deux niveaux : le niveau élémentaire pour les classes 1 à 6 et le niveau avancé pour les classes 7 à 9. Au niveau élémentaire, c'est-à-dire l'école primaire, l'instituteur enseigne tous les sujets à la classe, tandis qu'au niveau avancé, c'est-à-dire l'enseignement secondaire inférieur, les enseignants sont spécialisés.

Les enfants qui ont terminé leur éducation à l'école intégrée peuvent poursuivre leurs études dans une école secondaire supérieure (niveau Lycée) ou dans une école professionnelle pour les classes 10 à 12 (de 16 à 18 ans) et ces deux filières peuvent conduire à l'enseignement supérieur. Les enseignants des écoles secondaires supérieures et des écoles professionnelles sont spécialisés. La grande différence entre les écoles secondaires supérieures et les écoles intégrées, c'est que les élèves doivent acheter leurs manuels et que l'école n'est plus responsable du transport des élèves, parce que l'école secondaire supérieure ne fait plus partie de l'enseignement obligatoire.

Nous limiterons notre discussion à l'enseignement général et nous n'aborderons pas l'éducation professionnelle. Il faut cependant noter que les enseignants de mathématiques de l'école professionnelle ont la même éducation que ceux qui enseignent les mathématiques à l'école secondaire. Nous n'inclurons pas non plus les enseignants qui travaillent dans les centres de jour (école maternelle) mais il faut signaler que le nombre d'heures consacré aux mathématiques et à l'éducation mathématique est légèrement moindre que pour les instituteurs de l'école primaire. Nous ne discuterons pas non plus de la formation des maîtres de l'enseignement spécial.

Sur le plan administratif, toutes les écoles sont des écoles communales et seules les écoles normales (c'est-à-dire les écoles d'application) sont des écoles de l'État. En effet, chaque école normale fait partie d'une Université et les Universités sont des organisations d'état.

En Finlande, tous les enseignants sont formés à l'Université. Actuellement, à une exception près, tout enseignant doit avoir obtenu une maîtrise. Seuls les enseignants de l'école maternelle en sont dispensés ⁽²⁾. La forma-

(2) Les écoles maternelles portent le nom de « Centres de jour » en Finlande.

tion comporte deux cycles : le baccalauréat et la maîtrise. À partir de 2005, la formation des enseignants sera adaptée pour rencontrer les exigences de la déclaration de Bologne signée en 1999 par 29 pays dont la Finlande. L'enseignement supérieur est bien subventionné de même que la formation des enseignants. Pendant 9 mois, chaque étudiant reçoit une bourse de 259 euros par mois ainsi qu'une allocation de logement de 170 euros par mois. Les étudiants peuvent gagner 505 euros par mois et cette somme est triplée (1515 euros par mois) pendant les trois mois des vacances d'été. De plus chaque étudiant peut recevoir un prêt de 220 euros par mois. On peut emprunter sans frais les livres nécessaires dans les bibliothèques de l'Université et les étudiants ont accès à la littérature électronique en ligne, ce qui signifie qu'ils ont peu de frais à engager.

2. La formation des enseignants autrefois et aujourd'hui

Pour comprendre le système éducatif de formation des enseignants aujourd'hui, son organisation et le sens de la formation des enseignants en Finlande, il faut parcourir brièvement l'histoire de la formation des enseignants et son organisation.

En Finlande, les origines de la profession d'enseignant remontent au 16^e siècle. L'éducation essentiellement religieuse était administrée par des clercs. Les premières écoles secondaires ont été fondées au 17^e siècle. Les enseignants de ces écoles étaient des diacres et des diplômés de ces écoles. Au 18^e siècle, l'enseignement dans les écoles secondaires était dispensé par des diplômés de l'Université dont certains étaient professeurs d'Université. Les changements intervenus dans la formation des enseignants au 19^e siècle constituent les fondations sur lesquelles le système actuel s'est développé. C'est à ce moment-là qu'on a instauré une chaire d'éducation à l'Université et qu'on a fondé les instituts de formation des maîtres de l'école primaire ainsi que les écoles d'application. C'est en théologie en 1825 qu'il y eut la première chaire en éducation. Les instituts de formation des instituteurs primaires étaient s'appelaient des séminaires et ont conservé ce nom jusqu'en 1974. Les écoles d'application pour les écoles secondaires s'appelaient « Normaalityseo », c'est-à-dire écoles normales secondaires. À la fin du 19^e siècle et au début du 20^e l'éducation s'est étendue et a pris en charge l'éducation des femmes. Celle-ci a eu un effet sur l'augmentation du nombre d'enseignantes ([8], 94-112). Il est remarquable qu'en 1863, la première école

normale de Finlande ait été établie à Jyväskylä, une ville du centre de la Finlande et que déjà à cette époque, il comportait un département féminin et un département masculin ([5], 79-80). 1921 est l'année de la loi sur l'éducation primaire obligatoire et suite à cette loi, chaque village a ouvert une école primaire ([7], 10).

La seconde moitié du 20^e siècle a vu les débuts du transfert vers les Universités de la formation des maîtres de l'école primaire. Il y a d'abord eu une recommandation de la commission de préparation des enseignants en 1967. La commission envisageait cette recommandation comme un moyen d'établir les écoles intégrées ([5], 96). En 1969 le rapport du comité de la formation des enseignants de l'école intégrée a donné plus de détails sur les écoles intégrées et la formation des maîtres ([5], 97). Ce comité proposait entre autres d'offrir des études post-graduées aux enseignants des écoles intégrées. En 1974, la formation des enseignants de l'école primaire a été entièrement confiée aux Universités ([11], 96).

En 1979, le diplôme des enseignants de l'école primaire devint la maîtrise en éducation ([11], 96). C'est depuis lors que les études pour devenir instituteur sont devenues extrêmement populaires. Le nombre de candidats est beaucoup trop élevé. D'après l'Institut de statistique finlandais [9], en 2002 pour 693 postes, il y avait 13579 candidats, c'est-à-dire près de vingt candidats par poste. Ce n'est malheureusement pas le cas pour le recrutement des enseignants en mathématiques ! La même année, 2002, le nombre de candidats pour étudier les mathématiques, la physique et la chimie était de 8372 pour 1416 places, c'est-à-dire près de six candidats par poste [9]. La plupart de ces étudiants avaient choisi la filière « éducation ». La formation mathématique des enseignants en mathématiques est encore sous la responsabilité des mathématiciens, comme depuis 200 ans. La formation didactique est assurée par la Faculté d'Éducation. Cette formation peut se prolonger par un doctorat, mais cette option n'est pas très populaire parmi les enseignants en mathématiques, alors l'intérêt des instituteurs primaires pour des études post-graduées en Éducation va croissant.

3. Qui coordonne la formation des enseignants ?

En Finlande, les Universités ont une large autonomie. Le budget de la Faculté d'Éducation fait partie du budget de l'Université et le budget de l'Université fait partie du budget du Ministère de l'Éducation.

Le Ministère de l'Éducation a institué différentes commissions et groupes de travail pour coordonner la formation des enseignants dans les différentes Universités et soutient le développement de la formation des enseignants. Le Conseil d'État est l'organe responsable de constituer les comités ad hoc, afin de préparer des tâches importantes à long terme ou sur le plan social. De plus le Ministère de l'Éducation et le Conseil national de l'Éducation mettent en place des groupes d'experts ([2],1)

Les conclusions des groupes de travail, des commissions et des comités aident à la coordination entre les Universités dans leur planification de la formation des enseignants.

Le décret de 1979 sur la maîtrise en Éducation pour la formation des enseignants de l'école primaire est un modèle de coordination et d'autonomie ([3], 21). Ce décret précise que la maîtrise comporte 160 crédits mais ne spécifie pas le nombre de « crédits » attribué à un cours spécifique. Cette décision est du ressort de chaque Faculté. Il en va de même pour décider du nombre d'heures nécessaires pour obtenir un crédit dans une matière spécifique. Jusqu'à présent la coordination a rendu la formation des enseignants de l'école primaire plus harmonisée qu'auparavant, mais il y a encore suffisamment d'éléments pour lesquels les Universités peuvent exercer leur autonomie. L'un de ces éléments est lié à la liberté des enseignants. Le contenu de chaque cours est approuvé par la faculté/le département sur base d'une proposition du titulaire du cours. Concernant l'organisation de la formation des enseignants, chaque Université hormis celle de Kuopio a une Faculté d'Éducation. Chaque Faculté d'Éducation a un ou deux départements de formation des enseignants. Chaque année, le budget de chaque département est calculé en fonction du nombre d'étudiants qui ont obtenu la maîtrise l'année précédente et du nombre d'étudiants qui ont obtenu des titres les plus élevés : Lisentiate et Doctorate. Lisentiate est une option intermédiaire entre la maîtrise et le doctorat. Depuis 2003-2004, la formation des enseignants à l'Université d'Helsinki a une nouvelle organisation administrative. Les départements de la Faculté d'Éducation ont été absorbés par la Faculté des sciences du comportement (Faculty of Beha-

vioural Sciences). À l'Université de Joensuu, le département de formation des enseignants s'appelle désormais le département d'Éducation appliquée et il en va de même à l'Université d'Helsinki.

4. L'accès aux études est-il contrôlé ?

Oui, le nombre d'étudiants qui peuvent faire des études d'enseignant est limité. D'après le projet d'évaluation KATU (diplôme en Éducation, guidance et suivi du projet EDDE) de 1976, on recommande pour chaque département un nombre d'étudiants admissibles ([11], 129). Cette recommandation est toujours en vigueur dans chaque département de formation des enseignants. Au cours des années 1990-2000, on a enrôlé en moyenne 70 étudiants dans le programme de formation des instituteurs dans chaque département d'Éducation. Le nombre exact varie d'année en année, et de département à département. Ces changements reflètent le nombre probable de postes disponibles dans les écoles. Au cours des années 2001-2003 le nombre de postes a été augmenté pour compenser le nombre élevé de départs à la retraite.

L'enseignement des mathématiques, physique et chimie est confronté à un problème plus difficile. Vers 2010, 45% des enseignants en fonction actuellement auront atteint l'âge de la retraite. Cette situation est partiellement liée à la distribution de la population en Finlande. D'après l'office de statistique, la population appartenant à la tranche d'âge 50-54 s'élève à 414 266 personnes, ce qui est le nombre le plus élevé pour une tranche de 5 ans. Par exemple, la tranche d'âge 0-4 comporte 283 195 personnes [9]. La surreprésentation de la tranche d'âge 50-54 est liée au baby boom de l'après-guerre. La pénurie d'enseignants en mathématiques, physique, chimie est due au déclin d'intérêt des étudiants pour ces études. Dans les années 1990, par exemple, les Universités avaient déjà beaucoup de mal à remplir les quotas dans ces disciplines-là. En 1999, seulement 65% du quota était rempli.

5.1. La formation des instituteurs (niveaux 1 à 6)

Les enseignants des niveaux 1 à 6 sont responsables de l'enseignement de toutes les matières dans une même classe. Dans les grandes implantations, il y a des enseignants qui n'enseignent qu'au niveau 1 ou au niveau 2. La forma-

tion initiale de la majorité des enseignants comporte une spécialisation pour enseigner aux deux premiers niveaux. Dans les implantations plus grandes, certains enseignants enseignent uniquement à deux niveaux : les niveaux 3 et 4, ou les niveaux 5 et 6. Il arrive que certains enseignants enseignent aux trois derniers niveaux : 4 à 6. La situation la plus courante est celle d'enseignants spécialisés dans les niveaux 1 et 2 tandis que les autres enseignent du niveau 3 au niveau 6. Un enseignant monte de niveau avec ses élèves. Dans les implantations plus grandes, il y a un professeur spécialisé dans l'enseignement d'une langue étrangère, et un ou plusieurs enseignants spécialisés dans l'enseignement des cours d'art et d'éducation physique.

La formation des instituteurs représente une part substantielle du travail des Facultés d'Éducation. Comme on le sait déjà, ce sont les études les plus populaires en Finlande. Ceux qui ne réussissent pas à être admis de la première fois postulent généralement l'année suivante. Certains candidats postulent même plus de deux fois. En vue de se préparer à l'enseignement, les candidats essaient souvent d'avoir un stage comme assistant dans une classe.

Près de 80% des candidats sont de sexe féminin. En ce qui concerne les examens de mathématiques au GCE ⁽³⁾, seuls 25% des candidats choisissent l'épreuve de mathématiques correspondant au « cours approfondi », 55% choisissent l'épreuve de mathématiques correspondant au « petit cours » et 20% ne présentent aucune épreuve de mathématiques. Ceci est dû au fait qu'il n'y a que 4 matières obligatoires aux examens GCE : langue maternelle (finnois ou suédois), deuxième langue nationale (suédois ou finnois), langue étrangère, mathématiques ou un certain nombre de matières regroupées dans la rubrique « real » : religion, morale, philosophie, psychologie, histoire, géographie, physique, chimie, et biologie. Si un étudiant choisit de présenter un examen en « real », il ou elle devra répondre à des questions sur deux matières de son choix. Les étudiants peuvent présenter des examens sur plus de quatre matières. Dans ce cas, les étudiants peuvent présenter un examen en mathématiques et en « real ». La plupart des candidats aux études d'instituteurs s'intéressent plus particulièrement à l'art et/ou à l'éducation physique, la musique étant la discipline la plus appréciée.

Les études dans les Universités finlandaises sont organisées en « crédits » et pas en années d'études. Le nombre de crédits pour des études d'instituteurs est de 160, y compris la thèse de maîtrise. Ces études prennent environ

⁽³⁾ GCE : General Certificate of Education, correspond au baccalauréat français, autorise l'accès à une Université.

5 ans. Un crédit correspond à une étude d'à peu près 20 périodes de 45 minutes. Plus de la moitié des 160 crédits sont consacrés à la pédagogie. Il y a 9 matières ainsi qu'une « mineure » appelée études pluridisciplinaires qui ne comporte que 35 crédits. Les mathématiques et la didactique des mathématiques sont l'une des 9 matières à qui sont allouées 3,5 crédits (environ 70 périodes de 45 minutes). Chaque étudiant doit choisir une ou deux matières spécialisées. Si l'étudiant ne choisit qu'une matière, il/elle doit lui consacrer 35 crédits. S'il choisit deux matières spécialisées, il doit consacrer de 15 à 35 crédits à chacune des matières. Ces matières spécialisées ont un statut mineur et peuvent être liées à n'importe quelle matière ou à la pédagogie. L'une des matières de spécialisation les plus populaires est « l'enseignement aux débutants », c'est-à-dire l'enseignement aux niveaux 1 et 2. Cette matière de spécialisation comporte 1 ou 2 crédits consacrés à l'enseignement des mathématiques. L'instituteur termine ses études par une thèse de maîtrise. Seules 5% de celles-ci sont consacrées aux mathématiques.

5.2. Les mathématiques et l'enseignement des mathématiques chez les instituteurs

L'enseignement des mathématiques et de la didactique des mathématiques aux futurs instituteurs varie d'une Université à l'autre. Il dépend essentiellement de la personne responsable de l'enseignement.

La formation en mathématiques et en didactique des mathématiques se déroule en général de la manière suivante : deux crédits (30-40 périodes de 45 minutes) sont consacrés à l'étude des mathématiques et il en va de même pour la didactique des mathématiques. Chacun des deux sujets est divisé en deux parties d'égale importance : une partie consacrée aux cours et une autre consacrée aux exercices. Les séances d'exercices se font par groupes de 15 à 20 étudiants. Le contenu du cours de mathématiques peut comporter l'étude de la logique mathématique, des ensembles, des relations et des fonctions, ne traiter que du contenu du cours de mathématiques à l'école primaire, ou avoir une position intermédiaire. Il peut aussi comporter l'étude de la nature des mathématiques, des mathématiques en tant que partie intégrante de la culture et du développement des idées mathématiques.

La formation en didactique des mathématiques est elle aussi très variable. Elle peut comporter l'étude des principales théories psychologiques en relation avec la didactique mathématique. Elle peut être centrée sur les jeux et la résolution de problèmes. Elle peut s'attacher à l'étude d'objets

d'enseignement mathématique et de la manière de les faire comprendre. Elle peut se concentrer sur l'usage des technologies de l'information dans l'enseignement des mathématiques. La littérature scientifique associée est chaque cours est fournie aux étudiants, mais son statut est lui aussi très variable. Dans certains cas, elle est obligatoire, ce qui signifie que les examens comportent des questions qui s'y réfèrent. Dans d'autres cas, la littérature est donnée comme une source supplémentaire de connaissances.

5.3. Spécialisation en mathématiques pour les instituteurs

En 1996, le Ministère de l'Éducation a lancé le programme national conjoint d'action pour le développement des mathématiques et des sciences (LUMA). L'un des objectifs de ce projet est d'offrir 15 crédits en mathématiques ou en science à environ 15% des futurs instituteurs ([4],41). Ce pourcentage est près d'être atteint dans la majorité des Universités. Dans le cas de l'Université de Joensuu, près de 80% des futurs instituteurs choisissent les mathématiques comme spécialisation pour 15 crédits, et la moitié d'entre eux approfondissent jusqu'à 35 crédits. L'Université de Joensuu a joué un rôle essentiel dans le développement de l'éducation mathématique en Finlande. C'est à ce titre que l'Université a été désignée en 1994 comme centre d'excellence en éducation des enseignants en mathématiques.

Les 15 crédits de spécialisation diffèrent d'un département à l'autre. Dans le cas de l'Université de Joensuu, ces 15 crédits incluent 4 ou 5 crédits consacrés à un cours spécial sur les mathématiques à l'école primaire. Ce cours comporte : constructions géométriques (1 crédit), géométrie expérimentale (2 crédits), apprentissage des nombres (1 crédit), apprentissage à l'aide de l'ordinateur (1 crédit). Les 10 autres crédits sont consacrés aux mathématiques pures pertinentes de la formation des instituteurs : arithmétique et algèbre (3 crédits), nature des mathématiques (2 crédits), mathématiques discrètes (3 crédits), introduction à l'analyse (3 crédits).

6. La formation des enseignants en mathématiques (niveaux 7 à 12)

Les cours de mathématiques de l'enseignement secondaire (niveaux 7 à 12) sont assurés par des enseignants spécialisés qui ont reçu leur formation

dans la Faculté de mathématiques et de sciences naturelles, désignée par le nom de Faculté des sciences. Dans la plupart des cas, les étudiants suivent une formation pour enseigner les mathématiques et la physique et/ou les technologies de l'information. De plus, ils/elles peuvent suivre une formation pour enseigner la chimie. Les mathématiques ne sont pas nécessairement la discipline la plus importante (major) dans la formation des futurs enseignants, surtout pour ceux qui se destinent à l'enseignement des niveaux 7 à 9 (secondaire inférieur ou niveau collège). Les mathématiques peuvent être la deuxième discipline, voire la troisième.

Quand les étudiants choisissent les mathématiques comme première discipline de spécialisation, ils doivent prendre au moins 60 crédits en mathématiques. Si ce n'est pas le cas, leurs études peuvent comporter 35 crédits et dans certains cas 15 crédits. Comme la majorité des professeurs de mathématiques ont pris de 35 à 60 crédits, cela signifie qu'ils ont eu entre 1200 et 700 périodes d'enseignement de 45 minutes. Moins de 25% des professeurs de mathématiques ont pris seulement 15 crédits (300 périodes). D'autres part, tous les professeurs de mathématiques ont pris 35 crédits en éducation en Faculté d'éducation. Ces 35 crédits comporte une modeste part d'éducation mathématique de 3 crédits. Ces 35 crédits comportent aussi 3 crédits pour des séminaires qu'on peut lier à l'éducation mathématique. Lors de ces séminaires, l'étudiant doit développer une sorte de recherche, souvent une étude qualitative de portée limitée. Tous les étudiants ont 10 crédits de pratique de l'enseignement. L'un de ces crédits est consacré à l'enseignement de la discipline qui n'est pas la plus importante et 2 crédits se déroulent dans les écoles en dehors de l'Université. Ces deux crédits peuvent se dérouler dans une école communale ou dans une autre école du pays ou à l'étranger.

Les études pour devenir enseignant en sciences se clôturent par une thèse de maîtrise dans la discipline principale (12 crédits). Depuis quelques années, certaines Facultés de sciences reconnaissent l'équivalence des thèses de maîtrise en didactique mathématique avec les thèses de maîtrise en mathématiques.

Les sujets abordés en mathématiques sont : analyse, algèbre linéaire, logique, équations différentielles, géométrie, géométrie métrique, analyse complexe, matrices, probabilités, mathématiques discrètes, topologie, analyse fonctionnelle, analyse complexe et informatique mathématique.

7. Les écoles d'application

Les écoles d'application ont un statut spécial en Finlande. Depuis 1860, ces écoles ont existé sous différents noms sans que leur objectif principal, la formation des enseignants, ait changé. Avant 1974, il y avait deux types d'écoles d'application : les écoles de formation d'enseignants spécialisés dans une ou plusieurs matières, appelées « Normallyseo » et les écoles de formation d'instituteurs primaires appelées « écoles d'application ». En 1974, on a supprimé ces deux types d'écoles au profit d'une école normale unifiée faisant partie de la Faculté d'Éducation. L'appellation française d'« écoles normales » était utilisée au 19^e siècle pour les instituts de formation des maîtres de l'école primaire ; le mot « normales » faisait référence aux normes (objectifs) que l'éducation devait fournir au grand public. En France, ces normes n'incluaient pas le développement des aptitudes, mais bien l'amélioration des conditions de vie désignées par les autorités [1]. En Finlande, on considère les écoles normales comme un environnement nécessaire pour intégrer la théorie et la pratique de l'éducation.

8. Problèmes dans la formation des enseignants : discussion, propositions et questions

Dans notre article, nous avons discuté des différents aspects de la formation des enseignants liés à l'éducation mathématique en Finlande. Cette discussion présente les faits relatifs à la formation des enseignants en Finlande, pays dans lequel la profession d'enseignant est très populaire. Tous les enseignants sont formés dans les Universités et obtiennent le diplôme de maîtrise. Le nombre de candidats est bien supérieur au nombre de postes disponibles. La formation des enseignants fait intervenir les écoles d'application des Universités dans lesquelles tout est mis en œuvre pour que la théorie et la pratique conduisent aux meilleures pratiques d'enseignement. La vie à l'école est un environnement de travail apprécié et c'est ce qui amène les jeunes à choisir la profession d'enseignant. Alors, y a-t-il des problèmes dans la formation des enseignants ? la réponse est qu'il y a de sérieux problèmes, et que les résoudre ne sera pas tâche facile. Le problème le plus sérieux est lié au contenu du programme de la formation des instituteurs primaires et en particulier la formation en mathématiques.

8.1. Les problèmes de la formation des instituteurs

Pour devenir instituteurs, les étudiants font des études d'environ 5 ans qui conduisent à un diplôme de maîtrise. Cependant, si l'on analyse le programme, on se rend compte que la formation en mathématique et en didactique mathématique se réduit à 10 jours de 8 heures d'études pour 5 années d'études. Même s'il n'y avait que 6 heures de cours par jour, ce qui est courant, le nombre de jours consacrés aux mathématiques n'excéderait pas 13.

L'analyse détaillée du programme de formation des instituteurs montre que ce programme est plus un programme de formation de chercheur en éducation qu'un programme de formation d'enseignant. Pour obtenir la maîtrise en éducation, il faut 160 crédits dont au moins 75, c'est-à-dire 47%, sont consacrés à l'éducation.

En plus de ces 75 crédits qui conduisent à un « major » en éducation, les étudiants peuvent choisir 30 à 35 crédits en éducation comme « minor » de spécialisation. Cette spécialisation peut même être « la formation des adultes ».

Le grand problème de la formation des instituteurs est donc d'être plus axée sur la formation de chercheurs en éducation que sur la formation des enseignants. Ceci était justifié par la « formation académique » des futurs instituteurs ! Dans le passé, la formation était centrée sur les matières à enseigner à l'école primaire et pas sur l'étude de l'éducation. C'est maintenant le contraire, depuis que la formation des instituteurs est assurée par les Universités. Les études comme elles sont conçues aujourd'hui n'ont de sens que pour ceux qui ont l'intention de poursuivre leurs études en tant que chercheurs en éducation. Est-il raisonnable de sacrifier la formation des instituteurs pour obtenir des spécialistes en éducation ? Nous devons aussi nous poser la question « pour qui et pour quoi préparons-nous ces spécialistes ? ».

Qu'en est-il de l'avenir ? D'après la déclaration de Bologne, la formation universitaire doit conduire à un Bachelor degree en 3 ou 4 ans. En théorie, on pourrait donc envisager la formation des instituteurs comme un Baccalauréat en Sciences. En pratique, c'est difficile à réaliser. Le programme de formation des instituteurs s'appuie sur une tradition vieille de trente ans. Il a engendré un grand nombre de spécialistes de l'éducation, qui dirigent toutes les activités dans les Facultés d'Éducation, y compris la formation des instituteurs. Il est donc difficile de demander aux spécialistes de l'éducation d'abandonner le programme qu'ils ont eux-mêmes conçu et utilisé dans la

formation des instituteurs. C'est difficile de changer ce qui est devenu une tradition.

Un autre problème des mathématiques dans la formation des instituteurs est lié au prestige très modeste de celles-ci comparé à l'art ou à l'éducation physique. **L'éducation artistique, l'éducation physique, c'est-à-dire les arts visuels, la musique, les activités manuelles, et éducation physique, disposent de 4 fois plus de crédits que les mathématiques.**

Dans l'enquête de l'UNESCO de 1986, les données recueillies dans 27 pays européens ont montré qu'en ce qui concerne les mathématiques à l'école, la Finlande y consacrait moins de temps que n'importe quel pays européen ([10], 35 et 61-71). Malgré différentes tentatives pour relever le nombre d'heures consacrées aux mathématiques dans les écoles, il n'y a pas eu de changement significatif à cet égard. Établir des « classes mathématiques » ou des classes pour des étudiants avec un potentiel intellectuel élevé est une tâche impossible en Finlande. Ceci est lié aux traditions dont on trouve l'influence dans la loi sur l'éducation de base. On trouve dans cette loi une idée spéciale de l'égalité :

L'instruction doit promouvoir l'égalité dans la société et les aptitudes des élèves à prendre part à leur éducation et à poursuivre leur développement au cours de leur vie [6]

Alors que l'on accepte les compétitions entre enfants pour l'admission dans les classes musicales, l'idée de « classes mathématiques » n'est pas bienvenue. La loi sur l'éducation de base ne met pas l'accent sur les mathématiques et les sciences dans les écoles intégrées (niveaux 1 à 9). L'objectif essentiel est de

Soutenir la croissance des élèves pour qu'ils deviennent des membres de la société humainement et éthiquement responsables et leur fournir les connaissances et les compétences nécessaires dans la vie [6]

Aucun spécialiste de l'éducation ne peut rejeter cet objectif, mais le problème est l'idée sous-jacente qui exclut de mettre l'accent sur l'éducation en mathématiques et en sciences.

Concernant les spécialisations, avant le début des années 1990 près de 100% des étudiants choisissaient comme spécialisation mineure une ou plusieurs des disciplines suivantes : arts visuels, musique, activités manuelles,

éducation physique. À l'époque, environ 2% choisissaient les mathématiques comme spécialisation mineur. Actuellement, près de 15% choisissent les mathématiques comme domaine de spécialisation. Idéalement, il faudrait autoriser la spécialisation dans deux disciplines différentes, l'une dans le groupe des disciplines artistiques et l'éducation physique et l'autre dans les autres disciplines comme les mathématiques.

8.2. Les problèmes de la formation des enseignants en mathématiques

Le problème des professeurs de branche est lié au nombre de crédits rattachés à l'éducation mathématique : 3 crédits ou 60 périodes d'enseignement ; 2 crédits pour aspects spéciaux de l'enseignement et de l'apprentissage et 1 crédit pour aspects éducationnels spéciaux pour l'enseignement et l'apprentissage.

Le programme en sciences de l'éducation pour un professeur de branche est le même que celui d'un instituteur pour les premiers 35 crédits des 75 crédits obligatoires dans la formation des instituteurs. Les crédits sont donc enseignés à de plus grands groupes qui comportent de futurs instituteurs et de futurs professeurs de branche, quel que soit leur sujet de spécialisation. Ceci indique que le centre d'intérêt de ces 35 crédits est lié à des problèmes généraux en éducation.

Un autre grand problème de la formation des enseignants en mathématiques est qu'elle prépare les enseignants à enseigner les mathématiques et un ou plusieurs autres sujets. La situation la plus courante est d'enseigner les mathématiques la physique et la chimie, en particulier pour les niveaux 7 à 9. Même quand il y a trois professeurs dans une même école, chacun enseigne les trois sujets à un ou plusieurs groupes d'étudiants. Cela rapproche l'enseignement au secondaire inférieur (niveaux 7 à 9) de celui de l'enseignement primaire. Cela ne permet pas de concentrer ou de développer l'enseignement par branche. En particulier, cela ne permet pas de vérifier les stratégies d'enseignement d'un sujet particulier à un plus grand nombre de groupes d'étudiants. Il y a aussi un problème de tradition. Autrefois, les écoles étaient de petite taille et faisaient donc de la publicité pour un poste d'enseignant en mathématiques, physique et chimie. Maintenant, même dans le cas de grandes implantations, les écoles font toujours de la publicité de la même manière.

Le troisième problème résulte des deux premiers déjà mentionnés. Les professeurs qui ont choisi le « major » en physique ou en chimie, n'ont eu aucun crédit en éducation mathématique. Ces enseignants ont eu 35 crédits consacrés à des considérations générales en éducation et aucun crédit en éducation mathématique ; la plupart du temps, ils ont eu tout au plus un crédit pour la pratique de l'enseignement des mathématiques.

La formation des enseignants en mathématiques est aussi confrontée au problème des abandons. Seule la moitié des étudiants qui entament des études pour devenir professeur de mathématiques les termine. Ceci montre que la profession d'enseignant en mathématiques n'attire pas suffisamment d'étudiants de bon niveau et qu'un changement dans le style d'enseignement des mathématiques est nécessaire pour les étudiants.

9. La formation en cours de carrière

La formation des enseignants en cours de carrière est bien organisée en Finlande. Différentes organisations fournissent différents types de formation en cours de carrière. Par exemple, le Ministère de l'Éducation et le Conseil National de l'Éducation fournissent différents types de formation en cours de carrière pour les mathématiques. Les autorités locales de différents niveaux fournissent elles aussi des formations en cours de carrière pour l'école obligatoire. Les Universités et les associations d'enseignants fournissent des formations en cours de carrière sur l'enseignement des mathématiques ; ces associations fournissent des formations en cours de carrière à différents niveaux : local et national. Chaque Université a un centre de formation continuée et chaque province a une Université d'été. Ces deux organisations proposent différents types de formations y compris des formations en cours de carrière. Il y a aussi ce qu'on appelle des « Instituts libres » et des « Instituts civils » qui peuvent proposer des formations en cours de carrière aux enseignants. Nous avons mentionné ici les principales organisations qui proposent des formations en cours de carrière aux enseignants, mais cette liste est incomplète. La formation en cours de carrière est parfois gratuite, mais il arrive que les enseignants reçoivent des subsides de leur établissement scolaire pour y participer. Il est cependant remarquable que dans certains cas les enseignants paient eux-mêmes les formations qui les intéressent. Ceci indique combien les enseignants en Finlande s'intéressent à leur profession et à son développement.

Bibliographie

- [1] Dottrens, R. & al., *Éduquer et Instruire*. Unesco, Paris, 1966.
- [2] Hytönen, J., The Development of Modern Finnish Teacher Education, *Teacher Education in Finland : Present and Future Challenges. Studia Pedagogica*, 11, p. 1-10. Department of Teacher Education, University of Helsinki, Helsinki, 1996.
- [3] Kohonen, V. & Niemi, H., Developing and Evaluating teacher Education in Finland : Current trends and Future Challenges, *Teacher Education in Finland : Present and Future Challenges. Studia Pedagogica*, 11, p. 11-43. Department of Teacher Education, University of Helsinki, Helsinki, 1996.
- [4] Ministry of Education, *Finnish Knowledge in Mathematics and Science in 2002*. Ministry of Education, Helsinki, 1999.
- [5] Nurmi, V., *Maamme koulujärjestelmä*. Helsinki : WSOY, 1974.
- [6] Perusopetuslaki 628/1998.
[http://finlex1.edita.fi/dynaweb/stp/stp/1998sd/@ebt-link?showtoc=false;target=IDMATCH\(id,19980628.sd\)](http://finlex1.edita.fi/dynaweb/stp/stp/1998sd/@ebt-link?showtoc=false;target=IDMATCH(id,19980628.sd))
- [7] Päivänsalo, P., *Suomen ja sen naapurimaiden koululaitoksista*. Oy Gaudeamus Ab, Helsinki, 1973 .
- [8] Raivola, R. *Opettajan ammatin historia : Opettajuus ja professionalismi*. Tampereen yliopisto, Kasvatustieteen laitos, Tampere, 1989.
<http://sokl.joensuu.fi/aineistot/aidinkieli/kipinat2/sorvali.pdf>
- [9] Statistics of Finland. http://www.stat.fi/index_en.html
- [10] Unesco, *The Place of Science and Technology in School Curricula : A Global Survey*. Paris, Unesco, 1986.
- [11] Vuorenpää, J., *Yliopistollisen opettajankoulutuksen kehittyminen Suomessa 1970-luvulta 2000-luvulle*, Ph. D. Thesis. Turun yliopisto, Turku, 2003.

Trente ans de recherche opérationnelle et d'optimisation mathématique

YVES CRAMA, *Université de Liège*

1. Préambule

En entamant la rédaction de cet article, je m'étais fixé pour objectif de présenter un aperçu de l'évolution de la recherche opérationnelle au cours des trente dernières années. Très vite, cependant, il m'est apparu excessivement ambitieux de vouloir arpenter, même à grandes enjambées, toute l'étendue d'un territoire aussi diversifié et aussi dynamique que celui-là. Par pragmatisme, j'ai donc choisi de restreindre l'exploration à une partie du domaine qui m'est plus particulièrement familière et dont l'évolution est représentative, dans une certaine mesure, de celle de l'ensemble de la RO. Je me contenterai ainsi de retracer quelques-uns des faits saillants qui ont marqué l'évolution de *la programmation linéaire* et de *l'optimisation combinatoire* depuis 1970, en excluant par exemple des pans de la discipline aussi imposants que la programmation non linéaire, la simulation numérique ou les processus stochastiques. Encore s'agira-t-il d'un portrait sous forme de touches impressionnistes, nécessairement marqué par les choix personnels et les idiosyncrasies de l'auteur.

L'article est structuré comme suit. La Section 2 rappelle brièvement l'objet et les caractéristiques essentielles de la recherche opérationnelle ; elle décrit aussi quelques modèles classiques d'optimisation qui serviront à illustrer la suite de la discussion. La Section 3 présente plusieurs concepts fondamentaux de complexité algorithmique apparus, pour l'essentiel, au début des années 70. Malgré mes efforts de vulgarisation, cette section reste relativement technique, et peut-être même indigeste. Pourtant, elle vaut la peine d'être lue et comprise dans la mesure où les notions qu'on y découvre jouent un rôle central en informatique théorique et en mathématiques discrètes.

Cette section permet également de mieux replacer les sections suivantes dans leur contexte historique et logique. En effet, on peut légitimement prétendre que les progrès algorithmiques enregistrés en programmation mathématique et en optimisation combinatoire depuis le début des années 80 ont été initialement motivés par des considérations de complexité théorique ; ces progrès seront évoqués dans les Sections 4 et 5, respectivement.

Enfin, la Section 6 montrera l'impact qu'a eu l'évolution des méthodes d'optimisation sur les logiciels intégrés d'aide à la décision, en particulier au cours des dix dernières années. Cette section complètera donc la trajectoire allant des considérations purement théoriques de complexité algorithmique aux développements numériques et aux applications de gestion.

2. Recherche opérationnelle et optimisation

L'objet de la *recherche opérationnelle* (RO), parfois appelée science du management ou science de la décision, est d'aider les gestionnaires à prendre des décisions basées sur l'utilisation de modèles et de méthodes mathématiques appropriés. La finalité de la RO est donc la *prise de décision*, plutôt que la *description* ou *l'explication* de phénomènes observés. La première étape dans une telle démarche consiste à exprimer le problème rencontré sous forme d'un modèle mathématique connu ; ensuite les méthodes de résolution associées à ce modèle peuvent être appliquées pour obtenir une ou plusieurs solutions du problème.

Outre l'arsenal classique de l'analyse mathématique, la RO fait un usage intensif des mathématiques discrètes (par opposition aux mathématiques du continu) et de l'algorithmique. La popularité croissante des méthodes de RO est d'ailleurs indissociablement liée à la percée fulgurante de l'informatique (en particulier, de la micro-informatique) dans le monde de la gestion. Des outils aussi puissants et aussi complexes que la programmation linéaire, les algorithmes de graphes, l'optimisation combinatoire, ou la simulation sont ainsi disponibles "au bout des doigts" d'innombrables utilisateurs et permettent de résoudre des problèmes d'une taille et d'une complexité inimaginables voici quelques années encore.

Les questions auxquelles s'intéresse la RO peuvent être classées en différentes catégories (pas nécessairement exclusives), selon les caractéristiques des situations visées, des modèles utilisés pour les représenter et des techniques de résolution utilisées. Nombre de modèles de RO, en particulier,

peuvent être formulés comme des *problèmes d'optimisation* dont l'objet est de sélectionner la valeur de certaines *variables de décision* (investissements à réaliser, volumes de production à planifier, niveaux de stocks à atteindre, etc.) de façon à optimiser une *fonction économique* dépendant des décisions prises (rendement espéré, profit total, coût encouru, etc.) tout en respectant un ensemble de *contraintes* imposées (budget disponible, niveau de risque tolérable, satisfaction de la demande, ressources utilisables, etc.).

Mathématiquement, un problème d'optimisation générique peut s'écrire sous la forme

$$\text{minimiser } F(x) \text{ sous la contrainte } x \in S \quad (1)$$

où x représente les variables de décision, S est un ensemble de solutions dites *réalisables* et F est une *fonction de coût* définie sur X et à valeurs réelles.

Comme mentionné plus haut, cet article considérera principalement deux grandes classes de problèmes d'optimisation. Il s'agit d'une part du modèle de *programmation linéaire* :

$$\begin{aligned} &\text{minimiser} && F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j && (2) \\ &\text{sous les contraintes} && \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m), && (3) \end{aligned}$$

bien connu des étudiants en gestion et en économie ainsi que des praticiens pour ses nombreuses applications industrielles.

L'article traitera d'autre part de problèmes *d'optimisation combinatoire*, c'est-à-dire de problèmes de la forme (1) possédant un nombre *fini* de solutions réalisables (S est donc ici un ensemble fini). Par exemple, le modèle de *programmation linéaire en variables binaires*, obtenu en ajoutant les contraintes

$$x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4)$$

au modèle de programmation linéaire (2)-(3), est un modèle d'optimisation combinatoire (chacune des n variables ne prend que 2 valeurs distinctes et il ne peut donc y avoir plus de 2^n solutions réalisables).

Un autre problème classique d'optimisation combinatoire est celui du *voyageur de commerce* :

“Étant données n villes et la matrice D des distances inter-villes (où d_{ij} représente la distance entre les villes i et j), trouver

un circuit qui visite chaque ville une et une seule fois et dont la longueur totale est minimale”.

Ici, les solutions réalisables sont les circuits qui visitent chaque ville exactement une fois : il y a un grand nombre de tels circuits, mais ils sont néanmoins en nombre fini (il y en a $(n - 1)!$).

Pour résoudre des problèmes d’optimisation ou d’autres problèmes mathématiques, on utilise des *algorithmes*, c’est-à-dire des séquences d’opérations (additions, multiplications, comparaisons, etc.) bien définies. Intuitivement, un algorithme peut être vu comme un programme informatique. Dans la section suivante, nous aborderons la question de la complexité algorithmique de certains problèmes mathématiques, ou encore de l’efficacité des algorithmes capables de résoudre ces problèmes.

3. Complexité algorithmique

Les nombres $n_1 = 281472829095937$ et $n_2 = 9007199254740881$ sont-ils des nombres premiers? Voilà une question simple à formuler, mais dont la réponse n’est pas vraiment évidente à déterminer. En l’occurrence, la réponse est “Non” pour n_1 et “Oui” pour n_2 . Pour vérifier mon affirmation dans le cas de n_1 , il suffit d’observer que $n_1 = 131071 \times 2147483647$. Par contre, je n’ai pas d’argument concis pour convaincre le lecteur que n_2 est effectivement premier (mais c’est vrai!). Le cas du nombre n_1 illustre de façon claire un principe général, à savoir que *découvrir la solution* d’un problème est souvent plus difficile que *vérifier la validité* d’un argument ou d’une preuve proposés pour sa solution. Ce principe s’applique par exemple à la recherche d’un chemin dans un labyrinthe, à la solution d’équations, etc.

S’appuyant sur cette observation élémentaire, Stephen Cook [5] proposa en 1971 de distinguer entre deux classes de problèmes algorithmiques, ultérieurement baptisées P et NP . Sans vouloir donner une définition rigoureuse de ces concepts, disons simplement que la classe P contient les *problèmes de décision* (c’est-à-dire les problèmes formulés sous forme de questions admettant “Oui” ou “Non” comme réponses possibles) pouvant être résolus par un *algorithme efficace* (c’est-à-dire, un algorithme dont le temps de calcul n’augmente pas trop rapidement avec la taille du problème à résoudre). La lettre “ P ” choisie pour désigner cette classe indique, plus

précisément, que le nombre d'opérations effectuées par l'algorithme ne peut pas croître plus vite qu'une fonction *polynomiale* de la taille du problème.

La classe NP , quant à elle, contient les problèmes de décision possédant la propriété suivante : lorsque la réponse au problème est “Oui”, il existe une preuve permettant de vérifier la validité de cette réponse efficacement (c'est-à-dire, ici encore, en effectuant un nombre d'opérations polynomial en la taille de l'instance). La preuve évoquée dans cette définition est souvent appelée *certificat*.

Il est important de noter que la définition de NP n'exige pas que le certificat de validité puisse être *découvert* efficacement : il suffit que ce certificat existe et qu'un dieu omniscient, ou un professeur bienveillant, ou un heureux effet du hasard le révèle et permette de le *vérifier*. Le nom de la classe fait d'ailleurs référence à l'éventualité où le certificat est découvert par hasard, puisqu'il constitue l'abréviation de “non-deterministic polynomial”.

Notons encore que la définition de NP est *asymétrique* par rapport aux réponses “Oui” et “Non”. On dira donc qu'un problème est dans $coNP$ s'il existe un certificat pouvant être vérifié efficacement lorsque la réponse au problème est “Non”.

Ces concepts peuvent évidemment paraître étranges ou déconcertants à première lecture, mais ont amplement démontré leur pertinence et leur intérêt depuis 30 ans. Quelques exemples devraient permettre de les clarifier davantage.

Exemple 1. “Déterminer si l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, où a , b et c sont des entiers, possède une solution entière” est un problème dans NP . En effet, pour convaincre un sceptique que la réponse est affirmative pour des valeurs données des paramètres a , b et c , il suffit de lui présenter un nombre entier (certificat) x^* et de lui laisser vérifier que x^* est bien solution de l'équation. Le problème est également dans P , puisque l'algorithme de résolution des équations quadratiques bien connu de tous les élèves du secondaire fournit immédiatement la réponse à cette question (il suffit de calculer $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$).

Notons que la même question formulée pour une équation de degré 20 est également dans NP , avec la même justification, mais qu'elle n'est pas dans P ⁽¹⁾. □

⁽¹⁾ Il n'existe pas d'algorithme — polynomial ou non — pour calculer les solutions entières des équations algébriques de degré supérieur à 10 ; voir [17]

Exemple 2. “Décider si un nombre entier est premier” n’est pas, à première vue, un problème dans NP : en effet, comme on l’a observé plus haut pour le nombre n_2 , il n’est pas simple de démontrer la primalité d’un nombre sans passer par l’énumération fastidieuse de tous ses diviseurs potentiels. Remarquons que cette énumération ne constitue pas un algorithme polynomial en la taille du problème : par exemple, dans le cas du nombre n_2 , le problème est de petite taille (une seule donnée numérique), mais la procédure d’énumération brutale requiert de considérer 9007199254740881 diviseurs possibles (ou, un peu plus intelligemment, $\sqrt{n_2} \approx 94906266$ diviseurs).

Par contre, le problème est dans $coNP$ puisqu’il suffit de produire une factorisation de n en deux facteurs pour certifier une réponse négative (comme nous l’avons fait pour n_1 en début de section).

Notons enfin qu’il est possible de décider en temps polynomial si un nombre entier est premier, et que ce problème (ainsi que son opposé) est donc dans P . Mais il s’agit-là d’un résultat difficile que les spécialistes n’ont pu établir que très récemment (voir [2]). $\square$

Exemple 3. Le problème d’optimisation générique (1) n’est pas un problème de décision puisque la solution attendue est un élément de S qui minimise F , plutôt qu’une simple réponse “Oui” ou “Non”. Mais il est facile de lui associer un problème de décision en le reformulant par exemple sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\text{“Étant donné une valeur cible } v, \\ &\text{existe-t-il une solution } x \in S \text{ telle que } F(x) \leq v ?” \end{aligned} \quad (5)$$

En répondant successivement à cette question pour plusieurs valeurs de v , on peut déterminer la valeur optimale de (1) avec une précision croissante.

Sous des conditions assez générales, le problème de décision (5) est dans NP : en effet, pour certifier une réponse affirmative, il suffit d’exhiber une solution particulière $x^* \in S$ et de vérifier que $F(x^*) \leq v$. Par contre, il n’est généralement pas dans $coNP$: en effet, si il n’existe *pas* de solution $x \in S$ telle que $F(x) \leq v$, cela peut être difficile à vérifier efficacement. Par exemple, dans le cas du problème du voyageur de commerce, comment le planificateur peut-il convaincre le voyageur qu’il n’existe pas de circuit de longueur inférieure à v *sans énumérer tous les circuits possibles* (ce qui requiert un nombre exponentiel d’opérations) ?

Notons cependant que, dans le cas du modèle de programmation linéaire (2)-(3), la théorie de la dualité (plus précisément, le théorème de dualité forte; voir [6]) permet de valider efficacement une réponse négative : le problème de programmation linéaire est donc dans NP et dans $coNP$.

Plus généralement, le problème (5) peut être ou ne pas être dans P , selon sa définition exacte. On reviendra sur ce point par la suite. $\square$

La discussion précédente suggère que tout problème de P est également dans NP et dans $coNP$ (si un algorithme résout efficacement le problème, alors cet algorithme fournit automatiquement les certificats requis par les classes NP et $coNP$). On a donc l'inclusion

$$P \subseteq NP \cap coNP. \quad (6)$$

La définition des classes P , NP et $coNP$ avait en fait été esquissée par d'autres auteurs avant Cook (notamment Jack Edmonds [8, 9], qui avait explicitement mis en évidence l'intérêt des classes P et NP). La contribution fondamentale de Cook [5] est donc à trouver ailleurs. C'est à lui, en effet que l'on doit l'introduction d'un sous-ensemble remarquable de la classe NP : il s'agit de la classe NPC des problèmes dits *NP-complets*. NPC contient, par définition, les problèmes les plus difficiles de NP : intuitivement, un problème Q est *NP-complet* si $Q \in NP$ et si tout autre problème de NP peut être exprimé comme un cas particulier de Q . Un algorithme qui résout Q peut donc également être utilisé pour résoudre n'importe quel autre problème de NP .

L'existence de problèmes *NP-complets* est loin d'être évidente. Il revient à Cook d'avoir démontré que de tels problèmes existent. Dans l'article [5], Cook a établi qu'un problème fondamental de logique propositionnelle, appelé problème de *satisfaisabilité*, est *NP-complet*.

Bien que les classes de complexité algorithmique ainsi décrites relèvent, à proprement parler, du domaine de l'informatique théorique, leur pertinence pour l'analyse des problèmes de recherche opérationnelle fut rapidement mise en évidence. Cook [5] avait déjà indiqué la voie dans cette direction et Karp [14], plus particulièrement, démontra qu'un grand nombre de problèmes d'optimisation combinatoire sont *NP-difficiles* (on dit que le problème d'optimisation (1) est *NP-difficile* si sa version décisionnelle (5) est *NP-complète*).

La liste de Karp fut par la suite étendue à plusieurs centaines d'autres problèmes de décision, parmi lesquels on trouve notamment le problème du voyageur de commerce, le problème de programmation linéaire en variables binaires, de nombreux modèles de gestion de production ou de logistique, etc. Tous ces problèmes NP -complets sont donc de difficulté "équivalente" (chacun pouvant être vu comme un cas particulier de l'autre) et sont au moins aussi difficiles que tout autre problème de NP . Ces problèmes étaient, pour la plupart, connus depuis longtemps pour leur difficulté "pratique", mais c'est le cadre d'analyse proposé par Cook qui permet aujourd'hui de donner un support théorique rigoureux à cette observation empirique.

La monographie de Garey et Johnson [10] contribua énormément à diffuser la notion de problème NP -complet et NP -difficile dans le monde de la recherche opérationnelle. Elle popularisa notamment une conjecture célèbre, souvent résumée en une seule expression :

$$P \neq NP? \tag{7}$$

Au vu de la discussion qui précède, il semble extrêmement peu probable que P soit identique à NP . En effet, P ne contient par définition que des problèmes pouvant être résolus efficacement, alors que NP contient des problèmes notoirement difficiles comme le problème du voyageur de commerce. Pour montrer que $P = NP$, il suffirait de développer un algorithme efficace (polynomial) pour n'importe quel problème NP -complet, mais personne n'a pu réaliser un tel tour de force et l'écrasante majorité des chercheurs pensent que cela est purement et simplement impossible. Il est donc très vraisemblable que P est effectivement différent de NP . À ce jour, cependant, la conjecture (7) résiste à tous les assauts et reste une des plus célèbres questions ouvertes en mathématiques discrètes et en informatique théorique ⁽²⁾.

4. Programmation linéaire et extensions

Parmi les questions les plus intrigantes soulevées par le travail de Stephen Cook, celle de la complexité du problème de programmation linéaire resta ouverte pendant une dizaine d'années. Comme mentionné brièvement

⁽²⁾ Pour célébrer le passage au deuxième millénaire, le Clay Mathematics Institute de Cambridge (Massachusetts) a sélectionné sept problèmes mathématiques classiques et offre 1 million de dollars pour la solution de chacun de ces problèmes. La question $P \neq NP$ se trouve sur la liste. Voir <http://www.claymath.org/millennium>.

dans la section précédente, il est en effet facile de constater que la programmation linéaire est dans $NP \cap coNP$. D'autre part, l'algorithme du simplexe proposé vers 1947 par George Dantzig (voir [6]) pour la résolution des programmes linéaires avait amplement fait la démonstration de son efficacité pratique et avait d'ailleurs largement contribué, dès les années 50 et les premiers balbutiements de l'informatique, à bâtir la réputation des équipes de recherche opérationnelle dans le monde des entreprises. Ces observations suggéraient donc lourdement que le problème de programmation linéaire est dans P (cf. (6)).

Mais de façon assez inattendue, Klee et Minty [16] observèrent que la méthode du simplexe (du moins, dans une de ses versions les mieux connues) peut effectuer un nombre exponentiel d'itérations sur certains exemples et *n'est donc pas* un algorithme polynomial. L'existence d'un algorithme *théoriquement efficace* pour la programmation linéaire resta ouverte jusqu'à ce que Khachiyan [15] démontre, en 1979, que l'algorithme des ellipsoïdes (une méthode originellement conçue pour traiter des problèmes de programmation non linéaire) résout les programmes linéaires en temps polynomial. Cette percée était d'un intérêt théorique majeur et retint donc instantanément l'attention de la communauté scientifique (ainsi, d'ailleurs, que de journaux et de magazines "grand public" comme le New York Times qui fit de la découverte de Khachiyan un compte-rendu resté célèbre pour son inexactitude). Par contre, les tests numériques révélèrent bientôt que l'algorithme des ellipsoïdes était d'une grande inefficacité pratique et ne représentait en aucune façon une concurrence sérieuse pour la méthode du simplexe, qui conservait ainsi son statut apparemment immuable de "numéro 1 mondial" de la programmation linéaire. ⁽³⁾.

Rapidement, pourtant, une nouvelle famille de challengers, dites *méthodes de points intérieurs*, vint contester cette suprématie absolue. Contrairement à l'algorithme du simplexe qui parcourt une suite de solutions situées à la frontière du polyèdre des solutions réalisables, les méthodes de points intérieurs, comme leur nom l'indique, décrivent une trajectoire contenue à l'intérieur de ce polyèdre. C'est à Karmarkar [13] que revint le mérite de reconnaître, en premier, l'intérêt de ce type de méthode pour la programmation linéaire. L'algorithme de Karmarkar, comme celui de Khachiyan, est un algorithme polynomial. Mais à l'inverse de ce dernier, l'algorithme de

⁽³⁾ Triste coïncidence : ces deux géants de la programmation linéaire que furent Leonid Khachiyan et George Dantzig sont décédés récemment à quelques semaines d'intervalle, le 29 avril et le 13 mai 2005 respectivement

Karmarkar apparut vite comme une méthode potentiellement efficace pour la résolution de problèmes industriels réels.

Au cours des 20 années écoulées depuis la publication de l'algorithme de Karmarkar, ces développements basés initialement sur des considérations de nature purement théorique (existe-t-il un algorithme polynomial pour les problèmes de programmation linéaire ?) ont donné lieu à une remise en question fondamentale des acquis antérieurs et à une véritable renaissance des recherches en programmation linéaire.

D'une part, inspirés par les découvertes encourageantes de Karmarkar, plusieurs chercheurs ont proposé de nouvelles méthodes de points intérieurs dotées de propriétés théoriques intéressantes ou capables de résoudre efficacement des problèmes de programmation linéaire de très grande taille. D'autre part, stimulées par cette compétition inattendue, des améliorations successives apportées aux implémentations de l'algorithme du simplexe ont amené cette méthode à un niveau de performance inimaginable voici 20 ans. À l'heure actuelle, les méthodes de points intérieurs et du simplexe sont souvent vues comme complémentaires en ce sens que chacune d'entre elles peut surpasser les autres pour la résolution de certains types de modèles. Les logiciels commerciaux intègrent donc fréquemment les deux familles de méthodes.

Au-delà des avancées *algorithmiques*, il est évidemment impossible d'ignorer l'influence que l'évolution du *matériel* informatique a pu avoir sur les progrès qui viennent d'être évoqués. Dans un article intéressant, Bixby [4] estime que, entre 1987 et 2002, l'amélioration des performances des ordinateurs de bureau a contribué à accélérer l'algorithme du simplexe par un facteur de l'ordre de 500 à 1000, et les méthodes de points intérieurs par un facteur de plus de 10 000. Mais sur la même période, le facteur de réduction des temps de calcul attribuable aux *progrès algorithmiques*, plutôt qu'à la seule *puissance de calcul* des machines utilisées, est lui aussi de l'ordre de 1000 à 2000. Grâce à l'effet cumulé de ces facteurs "hardware" et "software", on peut donc raisonnablement estimer que le temps de résolution des programmes linéaires a été divisé par *un million* depuis 1987, et que certains modèles qui n'auraient pas pu être résolus en *un an de temps de calcul* à cette époque peuvent aujourd'hui être résolus en moins d'une minute. En particulier, des modèles comportant plusieurs dizaines de milliers de variables et de contraintes ne présentent plus aucune difficulté pour les logiciels modernes. Bixby [3, 4] présente une multitude d'informations concernant l'évolution de la programmation linéaire au cours des dernières décennies.

Les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation NP -difficiles en variables binaires ont également connu des améliorations remarquables durant la même période. Sans vouloir entrer dans des considérations détaillées (voir par exemple Wolsey [21]), mentionnons simplement que ces améliorations capitalisent, pour une part, sur les progrès enregistrés en programmation linéaire, mais qu'elles sont également attribuables à de nombreux autres développements algorithmiques : reformulation automatique des modèles basée sur la description de polyèdres associés (méthodes de coupes), stratégies d'énumération efficaces, heuristiques, etc. Dans la section suivante, le rôle des méthodes heuristiques sera brièvement évoqué.

5. Méthodes heuristiques

Au vu des considérations exposées dans la Section 3 et en particulier de la conjecture $P \neq NP$, il semble peu vraisemblable qu'un algorithme polynomial soit jamais mis au point pour résoudre les problèmes d'optimisation NP -difficiles qui se posent pourtant régulièrement en pratique. Cette conclusion a progressivement amené les chercheurs opérationnels à développer de nombreuses méthodes permettant d'obtenir en un temps de calcul raisonnable des solutions de bonne qualité, mais pas nécessairement optimales, pour les problèmes de grande taille les plus difficiles. Ces méthodes de résolution approchée sont communément appelées *heuristiques*.

Les heuristiques offrent un compromis pragmatique entre la qualité des solutions produites et le temps de calcul consacré à leur obtention. Pour les problèmes de très grande taille que l'on peut fréquemment rencontrer dans le contexte industriel (ordonnancement de lignes de production, construction d'emplois du temps de personnel, conception de tournées de distribution,...), elles constituent souvent la seule approche applicable en pratique pour générer automatiquement des solutions réalistes et de faible coût.

Depuis le début des années 80, en particulier, plusieurs "canevas" génériques ont été proposés pour la conception d'heuristiques d'optimisation combinatoire. Ces canevas, souvent appelés *métaheuristiques*, permettent de développer des heuristiques efficaces pour chaque problème spécifique par application de quelques principes de base : amélioration progressive des solutions par exploration locale de leur voisinage, diversification de l'exploration, perturbations aléatoires, procédures d'arrondi, etc. Parmi les plus puissantes de ces métaheuristiques, on mentionnera : le *recuit simulé*, l'*ex-*

ploration tabou, les *algorithmes génétiques*, l'*exploration à profondeur variable*, etc. (Voir par exemple [1], [11], [12].)

D'un point de vue théorique, cependant, il est généralement impossible de garantir *a priori* la qualité des solutions fournies par les approches métaheuristiques les plus puissantes, et donc les plus complexes. De nombreuses recherches ont donc porté sur l'analyse d'heuristiques comparativement plus simples et pour lesquelles il est possible de démontrer que la valeur de la solution calculée n'est *jamais* très éloignée de la valeur optimale. Un exemple classique est fourni par l'heuristique de Christofides pour le problème du voyageur de commerce. Si la matrice des distances D respecte les *inégalités triangulaires*

$$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj} \quad \text{pour toutes les villes } i, j, k, \quad (8)$$

alors cette heuristique fournit toujours un circuit dont la longueur n'excède pas de plus de 50 % la longueur du circuit optimal (voir par exemple [1]). Une telle garantie de qualité n'est pas nécessairement satisfaisante en pratique (des heuristiques plus sophistiquées fournissent systématiquement des solutions à 1 % ou 2 % de la valeur optimale), mais présente cependant un certain attrait intellectuel. Il est intéressant de remarquer, par contraste, qu'en l'absence des inégalités (8) et à moins que $P = NP$, *aucune* heuristique polynomiale ne peut *garantir* l'obtention d'un circuit de longueur inférieure à r fois la longueur optimale, *quel que soit* le facteur r que l'on est prêt à tolérer (on ne peut donc pas garantir, par exemple, de toujours obtenir un circuit qui soit, dans le pire des cas, 1000 fois plus long que le circuit optimal).

L'analyse théorique et empirique de la performance des heuristiques est un domaine de recherche fructueux et de grande actualité, riche à la fois en défis intellectuels et en applications concrètes.

6. Systèmes d'aide à la décision intégrés

Les méthodes de recherche opérationnelle ont trouvé une place sans cesse croissante dans une grande diversité de systèmes d'aide à la décision, dans des secteurs aussi variés que la conception de puces électroniques, d'ateliers de production, de systèmes de distribution ou de télécommunications, la construction d'horaires d'écoles ou de rotations de personnel, l'ordonnement des opérations d'usinage de pièces mécaniques ou d'assemblage de

circuits imprimés, la découpe de pièces métalliques, de tissu ou de verre, l'optimisation de recettes de production dans l'industrie agro-alimentaire, sidérurgique ou pétrochimique, la gestion de fonds de pension et l'optimisation de portefeuilles financiers, etc. Sans vouloir entrer dans le détail de ces multiples problématiques, on évoquera seulement deux domaines d'application particulièrement fructueux.

L'environnement complexe et concurrentiel de l'industrie aéronautique, tout d'abord, a toujours constitué un terrain particulièrement fertile pour les méthodes de recherche opérationnelle. Par exemple, de nombreuses compagnies aériennes utilisent aujourd'hui des logiciels d'aide à la décision spécialisés lorsqu'il s'agit de planifier l'affectation des équipages aux routes aériennes. Au cœur de ces logiciels, on trouve des modèles d'optimisation mathématique de taille gigantesque, en variables continues ou en variables entières, résolus par des algorithmes sophistiqués combinant des techniques de programmation linéaire et des heuristiques efficaces. Les plans proposés par ces logiciels sont fréquemment meilleurs, sur de nombreux critères de performance, que les affectations construites manuellement. Ils permettent par exemple de réduire les effectifs nécessaires ou les nuits d'hôtel inutiles passées par les équipages en transit loin de leur base, et respectent souvent mieux les règles complexes de constitution d'un équipage (priorités, seniorité, sécurité, préférences individuelles, etc.). Par ailleurs, les plannings sont développés plus rapidement (en quelques minutes au lieu de plusieurs jours), ce qui procure une réactivité accrue face aux inévitables aléas opérationnels. Desrosiers [7] ou Yu et al. [22] sont des sources d'information intéressantes sur ce sujet.

La RO joue également un rôle essentiel au sein des logiciels de gestion des réservations des grandes compagnies aériennes. Ces compagnies organisent plusieurs milliers de vols par jour et autorisent les réservations plusieurs mois avant la date de départ. Il est donc crucial pour elles de pouvoir répondre, à chaque instant, à la question suivante : vaut-il mieux vendre une place maintenant, au prix que les clients sont prêts à payer, ou conserver cette place en espérant la vendre plus tard à un prix plus élevé ? Les approches de recherche opérationnelle permettent de modéliser ce problème complexe, à l'interface du marketing et de la gestion des stocks, et de déterminer ainsi le "meilleur" prix des sièges de façon dynamique en fonction des réservations déjà enregistrées et des prévisions de demande future. Les mêmes techniques de "yield management" ont été transposées avec succès à d'autres secteurs d'activité similaires, notamment dans les sociétés de transport ferroviaire ou les grandes chaînes hôtelières (voir Smith et al. [19]).

Un autre domaine où la recherche opérationnelle assume un rôle de premier plan est celui des systèmes de gestion des flux, connus aujourd'hui sous le nom de systèmes ERP (Enterprise Resource Planning) et qui ont connu une diffusion impressionnante dans le secteur industriel au cours des deux dernières décennies. À l'origine des systèmes ERP, on trouve les systèmes MRP (Material Requirement Planning) de planification de la production et de gestion des stocks. La logique MRP incorpore des modèles d'optimisation des stocks et de regroupement des lots d'approvisionnement qui ont fait l'objet, dès les années 70, de développements algorithmiques très poussés (cf. Silver et Peterson [18]). Il faut bien reconnaître, cependant, que l'utilisation de ces techniques en milieu industriel est probablement restée très limitée durant de longues années, les praticiens se contentant souvent d'utiliser les systèmes MRP pour faciliter la gestion des données de production sans recourir à leurs fonctionnalités d'optimisation. Cette vision des MRP comme systèmes d'information s'est renforcée avec leur évolution vers les ERP qui visent à intégrer, au sein d'un seul système, la gestion des données et des transactions de production, de distribution, de personnel, financières, comptables, commerciales, etc.

Plus récemment, enfin, les développeurs de systèmes ERP ont ajouté à leur panoplie des modules de type APS (*Advanced Planning Systems*) qui, couplés à des logiciels de programmation mathématique ou à des heuristiques suffisamment flexibles et performantes, apportent aux ERP les fonctionnalités d'optimisation qui leur manquaient jusqu'alors. Les modules APS permettent par exemple de formuler et d'optimiser la conception des réseaux de distribution ainsi que les plans de production à moyen terme ou à court terme (voir par exemple Stadtler et Kilger [20]).

On peut probablement considérer que cette évolution récente, qui fournit enfin aux planificateurs un véritable environnement d'optimisation de leurs décisions, est le résultat de deux processus convergents. D'une part, de nombreuses firmes industrielles et commerciales disposent aujourd'hui, grâce aux ERP, des systèmes d'information performants et fiables qui constituent le prérequis indispensable au déploiement de tout système d'aide à la décision. D'autre part, comme expliqué dans les sections précédentes, les progrès remarquables des logiciels d'optimisation permettent de résoudre efficacement les modèles de très grande taille rencontrés dans l'industrie, modèles qui restaient inabordables voici quelques années encore.

7. Conclusion

En conclusion, on peut certainement affirmer que la recherche opérationnelle en général, et les méthodes d'optimisation en particulier, constituent un domaine dynamique et en évolution constante, riche en développements théoriques et pratiques dont la pertinence pour le monde de la gestion est démontrée au quotidien dans des milliers d'entreprises et d'organisations.

Paradoxalement, peut-être, l'intégration étroite des méthodes de RO au sein des systèmes de planification et d'aide à la décision tend parfois à occulter aux yeux de l'utilisateur le travail complexe qu'elles exécutent en coulisses, alors qu'elles cèdent le devant de la scène aux interfaces conviviales ⁽⁴⁾. Plutôt qu'un handicap, j'y vois pour ma part une confirmation supplémentaire de la symbiose réussie entre les méthodes de modélisation mathématique et les systèmes d'information utilisés par différentes fonctions de l'entreprise. Il semble d'ailleurs facile de prédire que cette symbiose n'ira qu'en s'améliorant et que les méthodes de la RO seront appelées à jouer un rôle plus important encore dans la gestion des entreprises de demain.

Remerciements. Une première version de cet article a été publiée dans l'ouvrage collectif :

J. Bair and V. Henry (éds.), *Regards Croisés sur les Méthodes Quantitatives de Gestion*, Éditions de l'Université de Liège, 2004.

Je remercie Jacques Bair et Valérie Henry de m'avoir fourni l'opportunité de rédiger cet article, ainsi que les Éditions de l'Université de Liège pour leur aimable autorisation de le reproduire dans *Mathématique et Pédagogie*.

Bibliographie

- [1] E. Aarts et J.K. Lenstra, *Local Search in Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, New York, 1997.

⁽⁴⁾ Dans une récente campagne de promotion d'INFORMS (The Institute for Operations Research and the Management Sciences), un chercheur estime que la recherche opérationnelle est "the world's most important *invisible* profession"; voir <http://www.orchampions.org/>

- [2] M. Agrawal, N. Kayal and N. Saxena, PRIMES is in P , *Annals of Mathematics* 160(2) (2004) 781-793.
<http://www.cse.iitk.ac.in/users/manindra/>
- [3] R.E. Bixby, Progress in linear programming, *INFORMS Journal on Computing* 6 (1994) 15-22.
- [4] R.E. Bixby, Solving real-world linear programs : A decade and more of progress, *Operations Research* 50 (2002) 3-15.
- [5] S.A. Cook, The complexity of theorem-proving procedures, in : *Proceedings of the Third ACM Symposium on the Theory of Computing*, 1971, pp. 151-158.
- [6] G.B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [7] J. Desrosiers, Air Canada reaches "Altitude", *OR/MS Today* 28(2), Avril 2001.
- [8] J. Edmonds, Paths, trees, and flowers, *Canadian Journal of Mathematics* 17 (1965) 449-467.
- [9] J. Edmonds, Minimum partition of a matroid into independent subsets, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, B69 (1965) 67-72.
- [10] M.R. Garey et D.S. Johnson, *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman, New York, 1979.
- [11] F. Glover et M. Laguna, *Tabu Search*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, 1997.
- [12] D.E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.
- [13] N. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica* 4 (1984) 373-395.
- [14] R. Karp, Reducibility among combinatorial problems, in : R.E. Miller et J.W. Thatcher (eds.), *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, New York, 1972, pp. 85-103.
- [15] L. Khachiyan, A polynomial algorithm in linear programming, *Soviet Mathematics Doklady* 20 (1979) 191-194.
- [16] V. Klee and G.J. Minty, How good is the simplex algorithm ?, in : O. Shisha (ed.), *Inequalities III*, Academic Press, New York, 1972, pp. 159-175.

- [17] Yu. Matiyasevich, *Le Dixième Problème de Hilbert. Son Indécidabilité*, Masson Editeur, Paris, 1995.
- [18] E. Silver et R. Peterson, *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*, Wiley & Sons, New York, 1985.
- [19] B.C. Smith, D.P. Günther, B.V. Rao et R.M. Ratliff, E-Commerce and operations research in airline planning, marketing, and distribution, *Interfaces* 31 (2001) 37-55.
- [20] H. Stadtler et C. Kilger, *Supply Chain Management and Advanced Planning*, Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [21] L.A. Wolsey, *Integer Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [22] G. Yu, M. Argüello, G. Song, S.M. McCowan et A. White, A new era for crew recovery at Continental Airlines, *Interfaces* 33 (2003) 5-22.



POLYTECH.MONS

Faculté Polytechnique de Mons

Découverte des études et des métiers
de l'ingénieur civil

PORTES OUVERTES 2006

Sciences de
l'Ingénieur

Bachelier (3 ans)
Master (2 ans)

Ingénieur civil

A MONS : le 15 février de 9 à 17 h
le 11 mars et le 20 mai de 9 à 13 h

A CHARLEROI : le 26 avril de 14 à 18 h
en collaboration avec l'UMH

Architecture • Chimie et Science des matériaux • Electricité
Informatique et gestion • Mécanique • Mines et Géologie



**NOUVEAU
à Charleroi**

1^{ère} année du grade de Bachelier.
Formation identique à celle de Mons.

Inscriptions et renseignements :

Secrétariat des Etudes • 9, rue de Houdain • 7000 MONS • Tél.: 065/37 40 30 à 32
Fax: 065/37 40 34 • secretu@fpms.ac.be • <http://www.fpms.ac.be>

La Polytech est membre de l'Académie Universitaire Wallonie-Bruxelles

Un théorème peu connu : le théorème des transversales

FRANCISCO BELLOT ROSADO,

*Rédacteur en chef de la
Revista Escolar de la OIM*

Dans la bibliographie anglo-saxonne sur la géométrie synthétique que j'ai pu consulter, je n'ai trouvé aucune référence sur un curieux résultat qui établit des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une droite qui coupe deux côtés d'un triangle passe par un des points remarquables du triangle.

Ce théorème, dont la première référence semble être roumaine, est le *théorème des transversales* d'Ion Cristea [4, p. 19], qu'on peut trouver aussi dans des publications bulgares ; mais en dehors de ces deux références balkaniques, il ne se trouve pas dans les manuels géométriques d'autres nationalités. De plus, pour étrange que cela puisse paraître, il semble avoir échappé aux géomètres français du XIX^e siècle : dans les *Exercices de Géométrie Moderne*, de Georges Papelier, qui a un chapitre entier consacré aux transversales des triangles et des quadrilatères, il ne se trouve pas. Il ne se trouve pas, non plus, dans les *Exercices de Géométrie* de F.G.M. ni dans les 2000 *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, d'Antoine Dalle. Je ne l'ai pas non plus trouvé dans ma collection de *Mathesis*, assez vaste mais pas complète. La plupart des résultats qui vont suivre sont issus de plusieurs articles du Prof. roumain Nicolae Oprea ([6], [7]), publiés dans la magnifique revue scolaire *Gazeta Matematica* et aussi de l'article [3] de C. Chiser.

1. Le théorème des transversales

L'approche la plus simple pour démontrer le théorème est probablement celle du Prof. Dan Branzei (Univ. de Iași, Roumanie), dans son livre [2].

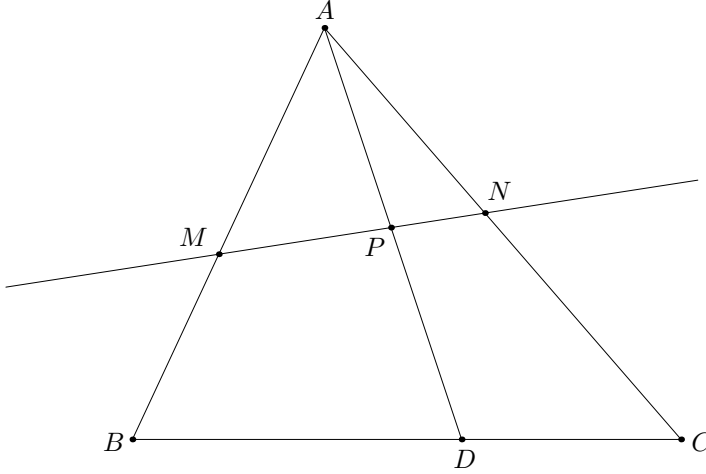
Théorème des transversales *Dans le triangle ABC , soit $D \in (BC)$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (AD)$. Alors, la condition nécessaire et*

Adresse de l'auteur: Calle Dos de Mayo 16-8¹/₄ dcha., E-47004 Valladolid (Espagne);
courriel : franciscobellot@gmail.com.

suffisante pour que P soit sur MN est

$$DC \cdot \frac{MB}{MA} + BD \cdot \frac{NC}{NA} = BC \cdot \frac{PD}{PA}. \quad (1)$$

Démonstration. Nous prouverons premièrement le théorème direct. On suppose que $P \in MN$.



Par les points B et C , menons des parallèles à la céviene AD , qui coupent MN en K et L , respectivement. Des similitudes de triangles assez évidentes nous permettent d'écrire

$$\frac{MB}{MA} = \frac{KB}{PA} \quad \text{et} \quad \frac{NC}{NA} = \frac{LC}{PA}, \quad (2)$$

et ainsi l'égalité proposée (1) se transforme en

$$DC \cdot KB + DB \cdot LC = BC \cdot PD, \quad (3)$$

qui concerne le trapèze $BCLK$ et la parallèle DP à ses bases.

Soit $Q = BL \cap PD$. La proportionnalité entre les côtés des triangles semblables BDQ et BCL nous permet d'écrire

$$BD \cdot LC = BC \cdot QD. \quad (4)$$

D'autre part, de la similitude des triangles PLQ et KLB et du théorème de Thalès dans BCL , on trouve (la similitude donne $\frac{PQ}{KB} = \frac{QL}{BL}$ et le

théorème de Thalès donne $\frac{QL}{BL} = \frac{CD}{BC}$) :

$$\frac{PQ}{KB} = \frac{QL}{BL} = \frac{DC}{BC},$$

donc

$$DC \cdot KB = BC \cdot PQ. \quad (5)$$

En utilisant (4) et (5), (3) devient, après simplification par BC , l'égalité évidente

$$PQ + QD = PD.$$

Prouvons maintenant la réciproque.

Soit le triangle ABC et les points $D \in (BC)$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (AD)$, satisfaisant la relation (1). Nous voulons démontrer que $P \in MN$.

Nous appelons $P' = AD \cap MN$. Par le théorème direct, nous avons

$$DC \cdot \frac{MB}{MA} + BD \cdot \frac{NC}{NA} = BC \cdot \frac{P'D}{P'A}. \quad (1')$$

Si on compare (1) avec (1'), nous avons $\frac{PD}{PA} = \frac{P'D}{P'A}$, et comme le point qui divise un segment dans un rapport donné est unique, on a $P' = P$. ■

Dans l'article en roumain [6], de N. Oprea, la démonstration est légèrement différente : on projette orthogonalement *sur la céviennne* AD les points B , C , M et N , et après avoir démontré préalablement l'égalité

$$\frac{AM}{AB} \cdot \frac{AC}{AN} \cdot \frac{PN}{PM} \cdot \frac{DB}{DC} = 1,$$

qu'on obtient facilement en multipliant les rapports qui découlent de similitudes de triangles rectangles, on obtient le résultat.

Une autre démonstration, en projetant orthogonalement dans ce cas sur la transversale, se trouve dans l'article bulgare [5] de S. Edreva, T. Kieva et H. Lesov.

2. Premières applications

1) Soit G le barycentre de ABC , et les points $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Alors $G \in MN$ si et seulement si

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1.$$

(Ce résultat, dans la bibliographie roumaine, est connu comme théorème d'Eugen Rusu). En effet, en prenant (1) quand D est le point milieu de BC et $P = G$, on a

$$\frac{BD}{1} = \frac{DC}{1} = \frac{BC}{2} \quad \text{et} \quad \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}.$$

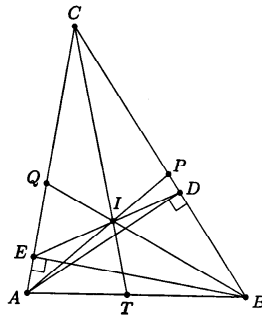
2) Soit le triangle ABC , et I le centre de son cercle inscrit. Soit $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Alors $I \in MN$ si et seulement si

$$b \cdot \frac{MB}{MA} + c \cdot \frac{NC}{NA} = a.$$

En effet, en prenant pour D le pied de la bissectrice intérieure de l'angle A et $P = I$, en utilisant le théorème de la bissectrice et le fait bien connu que $\frac{ID}{IA} = \frac{a}{b+c}$, si on fait la substitution dans (1) on obtient la relation cherchée.

3) L'exemple suivant fut un beau problème proposé en 1997 pour l'Olympiade Internationale de Mar del Plata (je n'ai pas la référence du pays d'origine), mais il ne fut pas choisi.

Dans le triangle acutangle ABC , AD et BE sont des hauteurs, et AP , BQ des bissectrices intérieures. Si I et O sont, respectivement, le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit de ABC , démontrer que D , E et I sont alignés si et seulement si P , Q et O sont alignés



Les trois solutions données au Jury étaient très longues et assez compliquées. Le délégué de l'Inde, Shailesh Shirali, a obtenu une solution très courte, mais en utilisant les coordonnées trilinéaires (proportionnelles aux

distances d'un point aux trois côtés du triangle de référence), un instrument qui transforme de difficiles problèmes de colinéarité en exercices d'annulation de déterminants. Elle n'a pas plu au Jury, pas plus que ma solution, que voici :

Solution : Étant donné que AD et BE sont des hauteurs,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c \cdot \cos B}{b \cdot \cos C} \quad \text{et} \quad \frac{AE}{EC} = \frac{c \cdot \cos A}{a \cdot \cos C} \quad (6)$$

et comme AP et BQ sont des bissectrices,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{c}{a}. \quad (7)$$

D'autre part, la condition nécessaire et suffisante pour que la droite ED passe par le centre I du cercle inscrit à ABC est

$$\frac{EA}{EC} \cdot a + \frac{DB}{DC} \cdot b = c \quad (8)$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que la transversale PQ passe par le centre O du cercle circonscrit au triangle acutangle ABC est

$$\frac{QA}{QC} \sin 2A + \frac{PB}{PC} \sin 2B = \sin 2C. \quad (9)$$

En retournant au problème, si nous faisons les substitutions dans (8) et (9) on a, respectivement

$$(8) \Leftrightarrow \frac{\cos A}{\cos C} + \frac{\cos B}{\cos C} = 1$$

$$(9) \Leftrightarrow \frac{\sin C \sin A \cos A}{\sin A \sin C \cos C} + \frac{\sin C \sin B \cos B}{\sin B \sin C \cos C} = 1$$

(par le théorème des sinus) qui sont clairement équivalents. ■

4) Soit ABC un triangle arbitraire et u, v deux nombres réels positifs. On considère $E \in (AB)$ et $F \in (AC)$ tels que

$$u \cdot \frac{EB}{EA} + v \cdot \frac{FC}{FA} = 1.$$

i) Démontrer que la droite EF passe par un point fixe L .

ii) Préciser les valeurs de u et v quand L est le point de Gergonne ou celui de Lemoine.

Solution :

i) Nous déterminerons d'abord le point $D \in (BC)$ tel que

$$\frac{DC}{u} = \frac{BD}{v} = \frac{a}{u+v},$$

et ensuite le point $L \in (AD)$ tel que $LA = (u+v)LD$. Le théorème de la transversale fait le reste.

ii) Dans le cas du point de Gergonne, c'est-à-dire le point d'intersection des céviennes qui joignent chaque sommet au point de contact du cercle inscrit sur le côté opposé, on doit avoir

$$\frac{u}{p-c} = \frac{v}{p-b} \quad \text{et} \quad a(p-a) = (u+v)(p-b)(p-c).$$

Si on résout par rapport à u et v , on a

$$u = \frac{p-a}{p-b}, \quad v = \frac{p-a}{p-c}.$$

Le point de Lemoine est le point d'intersection des symédianes, qui sont les symétriques des médianes par rapport aux bissectrices intérieures. Dans ce cas on a

$$\frac{u}{b^2} = \frac{v}{c^2} \quad \text{et} \quad b^2 + c^2 = a^2(u+v).$$

De là on trouve

$$u = \frac{b^2}{a^2}, \quad v = \frac{c^2}{a^2}.$$

Ce problème du livre de Branzei [2] est important car il permet démontrer rapidement une généralisation du théorème de la transversale.

3. Céviennes de rang k

Si, dans le triangle ABC , on prend sur le côté BC un point D tel que

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^k,$$

on dit que AD est une céviennne de rang k .

Par exemple, la médiane est une céviennne de rang 0, car si D est le point milieu de BC , on a

$$\frac{BD}{DC} = 1 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^0.$$

La bissectrice est une céviennne de rang 1 ; la symédiane est de rang 2, car on a

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

L'antibissectrice (isotomique de la bissectrice, c'est-à-dire que son pied D est le symétrique du pied de la bissectrice par rapport au milieu du côté BC) est une céviennne de rang -1 ; et l'isogonale de l'antibissectrice est de rang 3 (Théorème de Maurice d'Ocagne, 1883).

4. Généralisation du théorème de Cristea

Théorème *Si, dans un triangle quelconque ABC , le point Q est le point d'intersection de trois céviennnes de rang k , et que $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, alors la droite MN passe par Q si et seulement si*

$$b^k \cdot \frac{MB}{MA} + c^k \cdot \frac{MC}{MA} = a^k.$$

Démonstration. En utilisant le problème (4), la généralisation se démontre rapidement en écrivant l'égalité à démontrer sous la forme

$$\frac{b^k}{a^k} \cdot \frac{MB}{MA} + \frac{c^k}{a^k} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

et en appliquant la définition des céviennnes de rang k . ■

Dans l'article d'Oprea, la démonstration est directe, mais plus longue.

5. Autres conséquences

Théorème 1 *Dans tout triangle, le point de Nagel, le centre du cercle inscrit et le barycentre sont alignés. (La droite qui les porte passe*

aussi par le point de Spieker, qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle médial du triangle initial.)

Théorème 2 *Dans tout triangle, le point de Gergonne, celui de Nagel et celui d'Ocagne (point d'intersection des antebissectrices) sont alignés.*

Nous prouverons les deux théorèmes de manière simultanée.

Nous avons vu que si EF passe par le point de Gergonne, on a

$$\frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{EB}{EA} + \frac{p-a}{p-c} \cdot \frac{FC}{FA} = 1,$$

qui peut se transformer, à l'aide d'une des innombrables formules du triangle, en

$$\frac{EB}{EA} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \frac{FC}{FA} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Dans le cas du point de Nagel, la relation est

$$\frac{p-b}{p-a} \cdot \frac{EB}{EA} + \frac{p-c}{p-a} \cdot \frac{FC}{FA} = 1,$$

ou bien

$$\frac{EB}{EA} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \frac{FC}{FA} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Nous allons prouver le théorème 1 : Soit N le point de Nagel et supposons que la droite IN coupe AB en E et AC en F . Comme EF passe par N ,

$$(p-b) \cdot \frac{EB}{EA} + (p-c) \cdot \frac{FC}{FA} = p-a ;$$

ceci peut s'écrire sous la forme

$$p \cdot \left(\frac{EB}{EA} + \frac{FC}{FA} \right) - \left(b \cdot \frac{EB}{EA} + c \cdot \frac{FC}{FA} \right) = p-a ;$$

comme EF passe par le centre du cercle inscrit, $b \cdot \frac{EB}{EA} + c \cdot \frac{FC}{FA} = a$, et ainsi on a

$$\frac{EB}{EA} + \frac{FC}{FA} = 1,$$

donc par la réciproque du théorème de Rusu, EF passe par le barycentre G .

Le fait que cette droite passe par le point de Spieker, c'est-à-dire le centre du cercle inscrit dans le triangle médial de ABC , peut se démontrer à l'aide des coordonnées trilineaires.

Maintenant nous prouverons le théorème 2 : Soit Γ le point de Gergonne. Si la droite ΓN coupe AB en E et AC en F , comme EF passe par Γ , on aura

$$\frac{EB}{EA} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \frac{FC}{FA} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

et comme elle passe aussi par N ,

$$\frac{EB}{EA} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \frac{FC}{FA} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} ;$$

en ajoutant membre à membre, on obtient

$$\frac{EB}{EA} \cdot \frac{\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} + \frac{FC}{FA} \cdot \frac{\sin^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sin B} \cdot \frac{EB}{EA} + \frac{1}{\sin C} \cdot \frac{FC}{FA} = \frac{1}{\sin A},$$

et par le théorème des sinus,

$$\frac{EB}{EA} + \frac{1}{c} \cdot \frac{FC}{FA} = \frac{1}{a} ;$$

finalemt, comme les antibissectrices sont céviennes de rang -1 , la droite EF passe par le point d'intersection de ces céviennes, qui est le point de Ocagne. ■

Théorème 3 *Dans tout triangle, le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit, le point de Nagel et l'orthocentre sont les sommets d'un trapèze, de bases IO et HN , et le barycentre est le point d'intersection des diagonales du trapèze.*

Ne donnerons pas la démonstration de ce résultat, que se trouve au moins dans deux publications récentes : le livre [8] de Y. et R. Sortais et l'article [1] de P. Baptist. Dans son article, Baptist prouve les expressions suivantes pour les longueurs des côtés et des diagonales du trapèze :

$$\begin{aligned} OI^2 &= R(R - 2r) \\ HN^2 &= 4R(R - 2r) \\ ON &= R - 2r \\ IH^2 &= 4(R + r)^2 - (ab + bc + ca) \\ OH^2 &= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \\ IN^2 &= 9r^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3p^2 \end{aligned}$$

6. Inégalités déduites du théorème de Rusu

Si on applique l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique dans le théorème de Rusu :

$$1 = \frac{EB}{EA} + \frac{FC}{FA} \geq 2\sqrt{\frac{EB}{EA} \cdot \frac{FC}{FA}} \Rightarrow \frac{EB}{EA} \cdot \frac{FC}{FA} \leq \frac{1}{4}$$

(ceci fut un problème de *Gazeta Matematica 1994*, qui fut proposé dans la phase nationale de l'Olympiade Mathématique Espagnole en 1995) ; il y en a deux variantes plus compliquées. En effet, on peut montrer que

$$\left(\frac{EB}{EA}\right)^4 + \left(\frac{FC}{FA}\right)^4 \geq \frac{1}{8},$$

et aussi

$$\left(\frac{EB}{EA} + \frac{EA}{EB}\right)^4 + \left(\frac{FC}{FA} + \frac{FA}{FC}\right)^4 \geq \frac{25}{2},$$

qui est la version géométrique de l'inégalité 2.35 du livre de Mitrinovic *Elementary Inequalities*.

7. Le théorème des transversales via le théorème de Ménélaüs

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la transversale passe par des points remarquables du triangle peuvent s'obtenir au moyen du théorème de Ménélaüs. Cristian Chiser, dans [3], procède ainsi, en précisant en plus quelques cas non étudiés par N. Oprea. Le résultat principal est le suivant :

Second théorème des transversales *Soit le triangle ABC et les céviennes AD, BE et CF, concourantes en P. Soit de plus $k_1 = BD/CD$, $k_2 = CE/AE$. Sur les côtés AB et AC, on considère les points M et N, respectivement. Alors :*

$$M, N, P \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} + k_1 \cdot \frac{NC}{NA} = k_1 \cdot k_2.$$

Démonstration. Nous allons prouver seulement la nécessité, car la suffisance se démontre sans difficulté de manière analogue à ce qui a été fait dans le premier théorème des transversales.

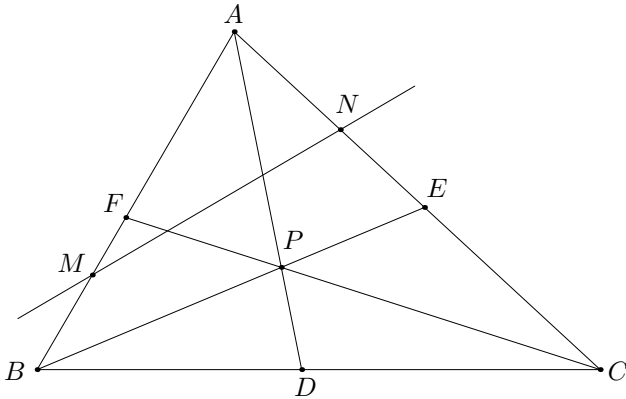
On va distinguer deux cas :

a) MN est parallèle à BC . Dans ce cas on a

$$\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{k_1 k_2}{1 + k_1}$$

et la relation à prouver en découle immédiatement.

b) MN n'est pas parallèle à BC . Soit $T = MN \cap BC$.



Par le théorème de Ménélaüs dans les triangles ABD et ACD , avec la transversale MN , nous avons :

$$\frac{MB}{MA} = \frac{TB}{TD} \cdot \frac{PD}{PA} \quad (*)$$

et

$$\frac{NC}{NA} = \frac{TC}{TD} \cdot \frac{PD}{PA}. \quad (**)$$

Une autre application du théorème de Ménélaüs dans ABC nous donne

$$\frac{AF}{BF} = \frac{1}{k_1 k_2}. \quad (***)$$

D'autre part, par la relation de Van Aubel, on a

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_2} = \frac{1 + k_1}{k_1 k_2}. \quad (****)$$

En récapitulant, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{MB}{MA} + k_1 \cdot \frac{NC}{NA} &= \frac{TB}{TD} \cdot \frac{k_1 k_2}{1 + k_1} + k_1 \cdot \frac{TC}{TD} \cdot \frac{k_1 k_2}{1 + k_1} \\ &= \frac{k_1 k_2}{1 + k_1} \cdot \frac{1}{TD} \cdot (TB + k_1 TC) \\ &= \frac{k_1 k_2}{1 + k_1} \cdot \frac{1}{TD} \cdot TD (1 + k_1) \\ &= k_1 k_2. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

8. Relation entre les deux théorèmes

Si on compare les seconds membres des égalités des deux théorèmes, on voit que nous devons prouver

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = \frac{BC}{DC} \cdot \frac{PD}{PA}.$$

Comme

$$\frac{BC}{DC} = \frac{BD + DC}{DC} = \frac{BD}{DC} + 1,$$

il faut vérifier que

$$\left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) \cdot \frac{PD}{PA} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE}$$

et le second membre de cette égalité, par le théorème de Ceva, est égal à

$$\frac{FB}{AF};$$

ainsi nous devons vérifier que

$$\left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) \cdot \frac{PD}{PA} = \frac{FB}{AF} \Leftrightarrow \left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{PA}{PD}$$

qui, par la relation de Van Aubel, peut s'écrire comme

$$\left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}.$$

Ceci équivaut à poser

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{AF}{FB} + \frac{AF}{FB} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC},$$

qui n'est autre que

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC},$$

et ceci est vrai, par le théorème de Ceva.

Si on applique le second théorème des transversales aux points remarquables du triangle *qui sont intérieurs*, nous retrouvons les résultats obtenus auparavant. Les cas de l'orthocentre H et du centre O du cercle circonscrit, qui peuvent être extérieurs au triangle, ont besoin d'une étude plus soigneuse. Nous rappelons, pour terminer cet exposé, les résultats de Chiser dans son article :

Corollaire 1 *Soit ABC un triangle non rectangle, et les points $M \in AB$, $N \in AC$, distincts des sommets. Soit H l'orthocentre de ABC . Alors la droite MN passe par H si et seulement si*

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A} + \lambda \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A} = \mu,$$

où $(\lambda, \mu) =$

$$= \begin{cases} (1, 1) & \text{si } ABC \text{ est acutangle ou obtusangle et } M \in (AB), N \in (AC) \\ (-1, 1) & \text{si } ABC \text{ est obtusangle et } M \in (AB), N \notin [AC] \\ (1, -1) & \text{si } ABC \text{ est obtusangle et } M \notin [AB], N \notin [AC] \\ (-1, -1) & \text{si } ABC \text{ est obtusangle et } M \notin [AB], N \in (AC). \end{cases}$$

Corollaire 2 *Dans les conditions du corollaire 1, si O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , la droite MN passe par O si et seulement si*

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{\sin 2B}{\sin 2A} + \lambda \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{\sin 2C}{\sin 2A} = \mu,$$

où $(\lambda, \mu) =$

$$= \begin{cases} (1, 1) & \text{si } ABC \text{ est acutangle ou obtusangle et } M \in (AB), N \in (AC) \\ (-1, 1) & \text{si } ABC \text{ est obtusangle et } M \in (AB), N \notin [AC] \\ (1, -1) & \text{si } ABC \text{ est obtusangle et } M \notin [AB], N \notin [AC] \\ (-1, -1) & \text{si } ABC \text{ est obtusangle et } M \notin [AB], N \in (AC). \end{cases}$$

9. Observations finales

Dans l'article de Bogdan Stan et Sebastian Burciu [9], on généralise les résultats de Cristea au cas des points intérieurs à un tétraèdre.

Dans *Cruz Mathematicorum*, mars 2005, probl. 3017, Toshio Seimiya propose le résultat suivant, qui clairement peut être considéré comme une généralisation du théorème des transversales au cas du quadrilatère :

Dans le quadrilatère $ABCD$, soit P, Q, R, S des points sur les côtés AB, BC, CD, DA respectivement, tels que

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1 \quad (*)$$

et soit $O = PR \cap QS$. Démontrer que

$$DS \cdot \frac{AP}{PB} + AS \cdot \frac{DR}{RC} = AD \cdot \frac{SO}{OQ}.$$

Dans la revue anglaise *The Mathematical Gazette*, 2005, on donne une méthode pour construire des points P, Q, R, S qui vérifient la condition du problème :

Si $M = AB \cap CD$, $N = AD \cap BC$, alors des droites arbitraires par M et par N déterminent sur les côtés du quadrilatère des points P, Q, R, S pour lesquels la relation (*) est vraie. Le résultat pour un quadrilatère cyclique peut être démontré par le théorème des sinus, et dans le cas général, en utilisant des birapports.

Bibliographie

- [1] P. Baptist : *Über ein Trapez aus merkwürdigen Punkten des Dreiecks*. Elemente der mathematik, vol. 40, nr. 2, 1985
- [2] D. Branzei, S. Anitza, A. Anitza : *Competentza si performantza in Geometrie*. MINIED, Iași, Roumanie 1992
- [3] C. Chiser : *Conditzii necesare si suficiente ca o dreapta sa treaca prin puncte importante dintr-un triunghi*. Gazeta Matematica 2000/9 (en roumain)
- [4] I. Cristea, *Asupra problemei 1301*, Gazeta Matematica 1/1956

- [5] S. Edreva, T. Kieva, H. Lesov : *Une droite qui passe par des points fameux du triangle*. Matematyka & Informatika 1990/6 (en bulgare)
- [6] N. Oprea : *Céviennes de rang k* . Gazeta Matematica 1989/8 (en roumain)
- [7] N. Oprea : *Colinéarité de quelques points fameux*. Gazeta matematica 1991/4 (en roumain)
- [8] Y. Sortais, R. Sortais : *La géométrie du triangle*. Hermann, Paris 1987
- [9] B. Stan, S. Burciu : *Caracterizarea a trei puncte colineare prin teorema lui Cristea*. Gazeta matematica 1993/1 (en roumain)

place réservée à la publicité

Problèmes

Claudine Festraets ⁽¹⁾

Trois bases

problème n° 304 de Mathématique et Pédagogie n° 249

En base 10, $361 = 19^2$. Trouver au moins trois autres bases pour lesquelles 361 est un carré parfait.

Solution de P. Le GALL de Metz

Un entier a répond à la question s'il satisfait aux deux conditions :

$3a^2 + 6a + 1$ est un carré parfait et a est supérieur ou égal à 7 (car le chiffre 6 est utilisé dans la base).

Il faut donc qu'il existe un entier b tel que $3a^2 + 6a + 1 = b^2$, donc tel que $3(a+1)^2 - b^2 = 2$.

La résolution du problème passe donc par la recherche de solutions de l'équation diophantienne : (1) $X^2 - 3Y^2 = -2$

L'énoncé nous indique que pour $a = 10$, $b = 19$. Effectivement le couple $(19, 11)$ est solution de l'équation (1).

Plaçons-nous dans l'ensemble $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ des réels de la forme $a + b\sqrt{3}$ avec (a, b) entiers. On définit l'application q de $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ dans $\mathbf{Z}$ par $q(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$. Nous cherchons donc des éléments de $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ pour lesquels q prend la valeur -2 .

Montrons un résultat intermédiaire :

$$q((a + b\sqrt{3})(a' + b'\sqrt{3})) = q(a + b\sqrt{3})q(a' + b'\sqrt{3})$$

En effet :

$$q((a + b\sqrt{3})(a' + b'\sqrt{3})) = q((aa' + 3bb') + (ab' + a'b)\sqrt{3})$$

donc

$$q((a + b\sqrt{3})(a' + b'\sqrt{3})) = (aa' + 3bb')^2 - 3(ab' + a'b)^2$$

soit

$$q((a + b\sqrt{3})(a' + b'\sqrt{3})) = a^2a'^2 + 9b^2b'^2 - 3a^2b'^2 - 3a'^2b^2$$

et

$$q(a + b\sqrt{3})q(a' + b'\sqrt{3}) = (a^2 - 3b^2)(a'^2 - 3b'^2) = a^2a'^2 + 9b^2b'^2 - 3a^2b'^2 - 3a'^2b^2$$

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

Donc si on multiplie un élément de $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ pour lequel q prend la valeur -2 par un élément pour lequel q prend la valeur 1 , on obtient un élément pour lequel q prend la valeur -2 .

On a $q(2 + \sqrt{3}) = 1$. Donc, d'après la propriété établie ci-dessus, $q((2 + \sqrt{3})^n) = 1$, quel que soit l'entier naturel n .

Donc $q((19 + 11\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n) = -2$, quel que soit l'entier naturel n .

Posons $(19 + 11\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, les suites (a_n) et (b_n) sont définies par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$$

avec $a_0 = 19$ et $b_0 = 11$.

Nous calculons les premiers termes de cette suite.

n	a_n	b_n	Base a	361 carré de ...
0	19	11	10	19
1	71	41	40	71
2	265	153	152	265
3	989	571	570	989
4	3691	2131	2130	3691
5	13775	7953	7952	13775
6	51409	29681	29680	51409
7	191861	110771	110770	191861
8	716035	413403	413402	716035
9	2672279	1542841	1542840	2672279
10	9973081	5757961	5757960	9973081

Remarque :

Il resterait à établir que cette suite permet de trouver toutes les solutions. Pour cela il faut montrer que les seuls éléments de $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$, avec a et b positifs, pour lesquels q prend la valeur 1 sont les nombres $(2 + \sqrt{3})^n$.

C'est effectivement le cas, car si on suppose l'existence de $x + y\sqrt{3}$ avec $x^2 - 3y^2 = 1$, tel que : $(2 + \sqrt{3})^n < x + y\sqrt{3} < (2 + \sqrt{3})^{n+1}$, alors on a :

$$(2 + \sqrt{3})^n(2 - \sqrt{3})^n < (x + y\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n < (2 + \sqrt{3})^{n+1}(2 - \sqrt{3})^n$$

Or $q(2 - \sqrt{3}) = 1$, et

$$(2 + \sqrt{3})^n(2 - \sqrt{3})^n = 1, \text{ et}$$

$$(2 + \sqrt{3})^{n+1} = (2 - \sqrt{3})^n = 2 + \sqrt{3}.$$

$(x + y\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n$ est un nombre $(x' + y'\sqrt{3})$ de $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ pour lequel q prend la valeur 1 et ce nombre vérifie : $1 < x' + y'\sqrt{3} < 2 + \sqrt{3}$. Les seuls éléments de $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$, avec a et b positifs respectant cette inégalité sont $1 + \sqrt{3}$ et 2, mais ils ne respectent pas $q(a + b\sqrt{3}) = 1$.

Nous avons donc trouvé toutes les solutions.

Deux lecteurs (P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte et A. PATERNOTTRE de Boussu) ont interprété cet énoncé comme suit : trouver une base b telle que $361 = xb^2 + yb + z$ et le nombre $\overline{xyz}$ carré parfait. Voici quelques une des solutions ainsi trouvées.

$$361 = 1 \times 9^2 + 4 \times 9 + 1 = (441)_9 = (21^2)_9$$

$$361 = 1 \times 17^2 + 4 \times 17 + 4 = (144)_{17} = (12^2)_{17}$$

$$361 = 1 \times 18^2 + 2 \times 18 + 1 = (121)_{18} = (11^2)_{18}$$

J. ANSEEUW de Roeselaere, J. FINOULST de Diepenbeek, J. OOMS de Chimay, J. RASSE de Méan et J.G. SEGERS de Liège ont envoyé de bonnes solutions obtenues soit en utilisant un petit programme, soit par la résolution d'équations simples.

Exponentielles

problème n° 305 de Mathématique et Pédagogie n° 149

On considère les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous x, y réels, on a

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y).$$

Démontrer que

- s'il existe un réel pour lequel f n'est pas nulle, alors f est non nulle partout ;
- s'il existe un réel pour lequel f est continue, alors f est continue partout ;
- les seules fonctions f qui sont continues et non nulles en 0 sont les exponentielles.

Solution de P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte

1) Si f n'est pas la fonction nulle, par l'absurde, supposons qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Alors, pour tout réel x , on a :

$$f(x) = f((x - \alpha) + \alpha) = f(x - \alpha)f(\alpha) = 0$$

Mais alors f est la fonction nulle : contradiction.

Donc, si f n'est pas la fonction nulle, alors f ne s'annule jamais.

2) Si f est continue en α :

Evidemment, si f est la fonction nulle, elle est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose donc que f n'est pas la fonction nulle. D'après 1), elle ne s'annule donc pas, et en particulier $f(\alpha) \neq 0$.

La continuité de f en α donne $\lim_{h \rightarrow 0} [f(\alpha + h) - f(\alpha)] = 0$.

Or $f(\alpha + h) - f(\alpha) = f(\alpha)[f(h) - 1]$. Et comme $f(\alpha)$ est une constante non nulle, c'est que $\lim_{h \rightarrow 0} [f(h) - 1] = 0$.

Soit x un réel.

Pour tout réel h , on a : $f(x + h) - f(x) = f(x)[f(h) - 1]$.

Par suite, $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x + h) - f(x)] = 0$, et donc f est continue en x .

Comme x est arbitraire, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Si $f(0) \neq 0$ et f est continue en 0, d'après 1) et 2), on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que f ne s'annule pas. Par suite, elle garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ et puisque $f(0) = f(0 + 0) = [f(0)]^2 > 0$, c'est donc que $f(x) > 0$ pour tout réel x .

Soit alors $g : x \mapsto \ln f(x)$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tous x, y réels, $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

On reconnaît l'équation de Cauchy dont il est bien connu que les solutions continues sont exactement les applications linéaires. Ainsi, il existe une constante c telle que, pour tout réel x , on ait $g(x) = cx$.

Il en résulte que, pour tout réel x , on a $f(x) = e^{cx}$, ce qui assure que f est une exponentielle.

Réciproquement, il est clair que les exponentielles sont bien des solutions qui sont continues et non nulles en 0.

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselaere, J. FINOULST de Diepenbeek, J. OOMS de Chimay et J. RASSE de Méan.

Polynômes

problème n° 306 de Mathématique et Pédagogie n° 149

Démontrer que , si a est un entier non multiple de 5, alors le polynôme $x^5 - x + a$ n'est jamais le produit de deux polynômes à coefficients entiers.

Solution de J. ANSEEUW de Roeselaere

Par l'absurde, supposons que $x^5 - x + a$ est le produit de deux facteurs à coefficients entiers et démontrons qu'alors a est multiple de 5.

1) Pour tout entier k , 5 est un diviseur de $k^5 - k = k(k^4 - 1)$.

En effet, soit k est multiple de 5 et donc 5 divise $k(k^4 - 1)$, soit k est premier avec 5, et par le petit théorème de Fermat, 5 divise $k^4 - 1$, donc aussi $k(k^4 - 1)$.

2) Soit $f(x) = x^5 - x + a = (x - p)g(x)$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $g(x)$ est un polynôme à coefficients entiers.

On a $f(p) = 0$, d'où $a = -p^5 + p$ et en vertu du 1), a est multiple de 5.

3) Soit $f(x) = x^5 - x + a = (x^2 + bx + c)h(x)$, où $b, c \in \mathbb{Z}$ et $h(x)$ est un polynôme à coefficients entiers.

Le reste de la division de $x^5 - x + a$ par $x^2 + bx + c$ est

$$r(x) = (b^4 - 3b^2c + c^2 - 1)x + (b^3c - 2bc^2 + a)$$

Ce reste doit être identiquement nul :

$$\begin{cases} b^4 - 3b^2c + c^2 - 1 = 0 \\ b^3c - 2bc^2 + a = 0 \end{cases}$$

d'où $b(b^4 - 3b^2c + c^2 - 1) + 3(b^3c - 2bc^2 + a) = b^5 - b - 5bc^2 + 3a = 0$.

$b^5 - b$ et $5bc^2$ sont multiples de 5, donc $3a$ est multiple de 5, donc a est multiple de 5.

Bonnes solutions de P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, J. FI-NOULST de Diepenbeek, J. OOMS de Chimay et J. RASSE de Méan.

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir pour le 1^{er} février 2006 au plus tard. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier L^AT_EX ou à défaut au format .doc ou .txt.

313. Inégalités

x, y et z sont des réels tels que $x + y + z = 5$ et $yz + zx + xy = 3$. Démontrer que $-1 \leq z \leq \frac{13}{3}$.

314. Système

Quel est le plus grand entier n pour lequel il existe un réel x satisfaisant le système d'inéquations

$$k < x^k < k + 1, \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots, n$$

315. Perpendiculaires

Dans le triangle ABC , soient L, M, N les pieds des perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur les côtés opposés. Démontrer que les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur MN, LN, LM respectivement sont concourantes.

place réservée à la publicité

place réservée à la publicité

Olympiades

Claudine Festraets ⁽¹⁾

Voici tout d'abord les énoncés des problèmes proposés lors de la finale de l'Olympiade Mathématique Belge 2005. Les solutions paraîtront dans les prochains numéros de *Mathématique et Pédagogie*.

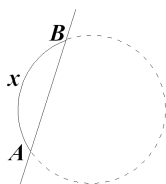
Vous trouverez ensuite les énoncés du 23^e Annual American Invitational Mathematics Examination (AIME). Y ont participé 5 étudiants de 4^e année, 15 étudiants de 5^e année et 24 étudiants de 6^e année. Ils disposaient de 3 heures pour répondre aux 15 questions. Le meilleur résultat est 8/15 et est obtenu par Xavier Gonze, élève de 5^e année à l'Institut de la Providence à Wavre. Les questions 8, 13 et 14 n'ont été résolues par aucun élève. Je recevrai avec plaisir vos solutions à chacun de ces petits problèmes, je vous rappelle que les réponses finales sont des entiers compris dans l'intervalle $[0, 999]$.

TRENTIEME OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE MINI FINALE 2005

1. Déterminer tous les nombres premiers de quatre chiffres distincts ayant les trois propriétés suivantes :
 - (a) le nombre formé des deux premiers chiffres et le nombre formé des deux derniers chiffres sont premiers ;
 - (b) la somme des deux premiers chiffres vaut 10 et la somme des deux derniers chiffres vaut 10 ;
 - (c) le chiffre des unités et le chiffre des dizaines sont premiers.
2. Un journal organise un sondage auprès de ses abonnés. Il détermine le sexe, l'état civil et la profession de 1 000 lecteurs et obtient les résultats suivants : 312 hommes, 470 personnes mariées, 525 étudiants ou étudiantes, 42 étudiants de sexe masculin, 147 étudiants ou étudiantes mariés, 86 hommes mariés et 25 étudiants de sexe masculin mariés. Mon copain affirme qu'il doit y avoir une erreur dans ces résultats. A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.
3. Une fraction est telle que, multipliée par 5, elle reste plus petite que 1, tandis que, multipliée par 6, elle dépasse 1. Les deux termes de cette fraction sont des nombres naturels et le numérateur est un nombre de deux chiffres différents.

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

- (a) Montrez qu'il existe plusieurs fractions satisfaisant ces conditions et donnez un exemple d'une telle fraction.
 - (b) Parmi ces fractions, quelle est celle qui a le plus petit dénominateur ?
 - (c) Parmi ces fractions, quelle est celle qui a le plus grand dénominateur ?
4. Un cercle de rayon 5 est partagé en quatre arcs de même longueur par les points A, B, C, D . Appelons x, y, z, t les arcs $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$.



Soit x' l'arc symétrique de x par rapport à la droite AB , y' l'arc symétrique de y par rapport à la droite BC , z' l'arc symétrique de z par rapport à la droite CD , t' l'arc symétrique de t par rapport à la droite DA .

- (a) Que vaut l'aire de la figure limitée par $x'yz't'$?
- (b) Que vaut l'aire de la figure limitée par $x'y'z't'$?

MIDI FINALE 2005

1. Quelles sont toutes les listes d'entiers naturels consécutifs dont la somme vaut 2005 ?
2. Dans un billard rectangulaire $ABCD$, une bille est lancée à partir du coin A ; elle rebondit selon les lois de la réflexion sur le côté CD , puis sur le côté BC , puis sur le côté BA et termine sa course dans le coin D . Quelle est la longueur du trajet du centre de la bille sachant que le diamètre de la bille est 6 cm et que les dimensions du billard sont $|AD| = |BC| = 156$ cm et $|AB| = |CD| = 306$ cm ?
3. La finale d'une compétition mathématique comporte quatre problèmes. Pour chacun des problèmes les notes possibles sont 0, 1, 2, 3 et 4 points. Après la compétition, le jury constate que pour n'importe quelle paire de participants, ces deux participants n'ont pas eu le même nombre de points sur plus d'un problème. Quel est le nombre maximal de participants ?

4. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe n'ayant aucun angle droit et dont les quatre sommets appartiennent à un même cercle. Désignons par P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées de D respectivement sur AB et BC . Désignons par R et S les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement de B sur AD et CD . Le quadrilatère convexe formé par les quatre points P, Q, R, S
- (a) est-il nécessairement un trapèze ?
 - (b) a-t-il nécessairement deux côtés égaux ?

MAXI FINALE 2005

1. Dans l'expression
- $$(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_1x_n + 2x_2x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n$$
- les nombres réels non nuls $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ne sont pas tous positifs. Existe-t-il des valeurs de ces nombres réels qui rendent le nombre de doubles produits positifs égal au nombre de doubles produits négatifs
- (a) si $n = 4$?
 - (b) si $n = 2005$?

Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que le nombre de doubles produits positifs soit égal au nombre de doubles produits négatifs.

2. Dans l'espace de dimension 3, existe-t-il deux points P et Q à coordonnées rationnelles tels que $|PQ| = \sqrt{7}$?
3. Dans le triangle ABC , les droites AE et CD sont les bissectrices intérieures des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ respectivement ; E appartient à BC et D appartient à AB . Pour quelles amplitudes de l'angle $\widehat{ABC}$ a-t-on certainement
- (a) $|AD| + |EC| = |AC|$?
 - (b) $|AD| + |EC| > |AC|$?
 - (c) $|AD| + |EC| < |AC|$?
4. La suite infinie

1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7, ...

ne comprend que des nombres appartenant à l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ et est construite de la manière suivante : après le quatrième nombre, chaque nouveau nombre est formé du chiffre des unités de la somme des quatre nombres précédents.

- (a) Les nombres 2, 0, 0, 5 apparaissent-ils de manière consécutive dans cette suite ?
- (b) Les nombres 1, 2, 3, 4 apparaissent-ils une deuxième fois de manière consécutive dans cette suite ?

**23th Annual
American Invitational Mathematics Examination
2005 (AIME)**

1. Un jeu comporte un paquet de n cartes distinctes, où n est un nombre entier supérieur ou égal à 6. Le nombre d'ensembles possibles de 6 cartes qui peuvent être extraites du paquet est 6 fois le nombre d'ensembles possibles de 3 cartes qui peuvent être extraites. Déterminez n .
2. Un hôtel a emballé un petit déjeuner pour chacun de trois clients. Chaque petit déjeuner aurait dû contenir trois types de gâteaux roulés, un aux noisettes, un au fromage et un aux fruits. La personne qui l'a préparé a enveloppé chacun des neuf roulés. Une fois enveloppés, les roulés étaient indiscernables. Elle a ensuite placé au hasard trois roulés dans un sac pour chacun des clients. Etant donné que la probabilité que chaque client ait obtenu un roulé de chaque type est m/n , où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux. Déterminez $m + n$.
3. La somme d'une série géométrique infinie est 2005. Une nouvelle série, obtenue en élevant au carré chaque terme de la série originale, a une somme qui vaut 10 fois la somme de la série originale. La raison de la série originale est m/n , où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux. Déterminez $m + n$.
4. Trouvez le nombre d'entiers positifs qui sont des diviseurs d'au moins un des nombres 10^{10} , 15^7 , 18^{11} .
5. Déterminez le nombre de paires ordonnées (a, b) d'entiers tels que $\log_a b + 6 \log_b a = 5$, $2 \leq a \leq 2005$ et $2 \leq b \leq 2005$.
6. Les cartes d'un paquet de $2n$ cartes sont numérotées consécutivement de 1 à $2n$ du dessus au dessous. Les n cartes du dessus sont retirées, conservées en ordre, et forment la pile A . Les cartes restantes forment la pile B . Les cartes sont maintenant empilées à nouveau en une seule

pile en prenant une à une les cartes alternativement des dessus de la pile B et de la pile A respectivement. Dans ce processus, la carte numéro $(n + 1)$ est la carte du dessous de la nouvelle pile, la carte numéro 1 est par-dessus cette carte, et ainsi de suite, jusqu'à ce que les piles A et B soient épuisées. Si, après le processus de remise en place, au moins une carte de chaque pile occupe la même position qu'elle occupait dans le paquet original, le paquet est qualifié de *magique*. Par exemple, huit cartes forment un paquet *magique* parce que les cartes numéro 3 et numéro 6 conservent leurs positions originales. Trouvez le nombre de cartes dans le paquet magique où la carte numéro 131 conserve sa position originale.

7. Soit

$$x = \frac{4}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt[4]{5} + 1)(\sqrt[8]{5} + 1)(\sqrt[16]{5} + 1)}.$$

Déterminez $(x + 1)^{48}$.

8. Les cercles C_1 et C_2 sont tangents extérieurement et sont tous deux tangents intérieurement au cercle C_3 . Les rayons de C_1 et C_2 sont respectivement 4 et 10 et les centres des trois cercles sont colinéaires. Une corde de C_3 est aussi une tangente extérieure commune de C_1 et C_2 . Etant donné que la longueur de la corde est $m\sqrt{n}/p$, où m, n et p sont des entiers positifs, m et p sont premiers entre eux et n n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier, déterminez $m + n + p$.
9. Pour combien d'entiers positifs n inférieurs ou égaux à 1000 l'expression

$$(\sin(t) + i \cos(t))^n = \sin(nt) + i \cos(nt)$$

est-elle vraie pour toute valeur réelle de t ?

10. Etant donné que O est un octaèdre régulier, que C est le cube dont les sommets sont les centres des faces de O et que le rapport du volume de O à celui de C est m/n , où m et n sont des entiers positifs premiers entre-eux, trouvez $m + n$.
11. Soit m un entier positif et soit $a_0, a_1, \dots, a_m$ une suite de nombres réels telle que $a_0 = 37$, $a_1 = 72$, $a_m = 0$ et

$$a_{k+1} = a_{k-1} - \frac{3}{a_k}$$

pour $k = 1, 2, \dots, m - 1$. Trouvez m .

12. Le carré $ABCD$ a un centre O , $AB = 900$, E et F sont sur le segment $\overline{AB}$ avec $AE < BF$ et E entre A et F . L'angle $\angle EOF$ mesure 45 degrés et $EF = 400$. Etant donné que $BF = p + q\sqrt{r}$, où p, q et r sont des entiers positifs et r n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier, trouvez $p + q + r$.
13. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers qui satisfait à $P(17) = 10$ et $P(24) = 17$. Etant donné que l'équation $P(n) = n + 3$ a deux solutions entières distinctes n_1 et n_2 , trouvez le produit $n_1 \cdot n_2$.
14. Dans le triangle ABC , $AB = 13$, $BC = 15$ et $CA = 14$. Le point D est sur le segment $\overline{BC}$, avec $CD = 6$. Le point E est sur le segment $\overline{BC}$ de sorte que les angles $\angle BAE$ et $\angle CAD$ aient même mesure. Etant donné que $BE = p/q$, où p et q sont des entiers positifs premiers entre eux, trouvez q .
15. Notons ω_1 et ω_2 les cercles d'équations $x^2 + y^2 + 10x - 24y - 87 = 0$ et $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 153 = 0$, respectivement. Soit m la plus petite valeur positive de a pour laquelle la droite d'équation $y = ax$ contient le centre d'un cercle tangent intérieurement à ω_1 et tangent extérieurement à ω_2 . Etant donné que $m^2 = p/q$, où p et q sont des entiers positifs premiers entre eux, trouvez $p + q$.

Solutions

(1 ; 013)(2 ; 079)(3 ; 802)(4 ; 435)(5 ; 054)(6 ; 392)(7 ; 125)(8 ; 405)
(9 ; 250)(10 ; 011)(11 ; 889)(12 ; 307)(13 ; 418)(14 ; 463)(15 ; 169)

place réservée à la publicité

place réservée à la publicité

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2005)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :

- Cotisation ordinaire : 24 €
- Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 65 € (non PRIOR), 72 € (PRIOR)

Autres pays : 70 € (non PRIOR), 79 € (PRIOR)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 30 €.

Europe : 50 € (non PRIOR), 54 € (PRIOR).

Autres pays : 53 € (non PRIOR), 58 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2005 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.

Année 5 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,80 €, Europe : 4,50 €, Autres pays : 6 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

- Abonnements groupés à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 4 €.

- Abonnements groupés aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 8 €.

Abonnements individuels.

- Abonnements à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 6 €. Europe ⁽¹⁾ : 18 € (non PRIOR), 20 € (PRIOR).
Autres pays : 19 € (non PRIOR), 22 € (PRIOR).

- Abonnements aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 12 €. Europe : 24 € (non PRIOR), 26 € (PRIOR).
Autres pays : 25 € (non PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2002–2003 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.

Année 2003–2004 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 44 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents »..

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :

CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429

BIC BPOTBEB1

ou CCP LILLE : IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683

BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n° 7 à n° 11 et n° 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 7 (Vers les infiniment petits)			
Simone Trompler et Guy Noël	6 €		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Dossier 9 (Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Jacques Bair , Mathématique et Sport	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12 €	9,50 €	T2
G. Robert , CD-Rom, logiciels mathématiques	5 €	/	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €		voir ci-dessous

Frais d'expédition en non PRIOR			
	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	6,50 €	10 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions en PRIOR, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.