Photo de couverture : *Égalité ?*, Bruxelles, 09 aout 2003 — photo P. Dupont

*Mathématique
et
Pédagogie*

Sommaire

N° 154 Novembre–Décembre 2005

NOTE

- Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse :
  Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.
  Courrier électronique : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles encodés sur un CD-rom ou par courrier électronique. L'usage de LaTeX est vivement recommandé ; d'autres traitements de texte (Word p. ex.) ne devraient être utilisés que pour des textes ne comportant pas de formules ; le format « texte seul » est finalement encore préférable ; les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. À défaut, les textes seront dactylographiés ; dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés. *Les textes devant être réencodés risquent de voir leur délai de parution allongé de manière appréciable.*
  L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
- La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
  Pour les livres :
  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
  Pour les articles :
  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
- Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Éditorial

G. TROESSAERT

Les membres du conseil d'administration de la SBPMef vous présentent leurs meilleurs vœux pour l'année 2006.

Comme vous pouvez le constater, cet éditorial n'est pas signé par Christian Van Hooste qui a souhaité être déchargé de ses fonctions de président de notre société lors du conseil d'administration du 22 novembre 2005.

Depuis plusieurs années, Christian préside aux destinées de la SBPMef. Il s'est impliqué sans retenue dans toutes les activités de celle-ci et n'a pas ménagé ses efforts pour dynamiser le travail de notre petit groupe. Nous l'en remercions vivement et espérons le voir participer régulièrement à nos activités futures.

En tant que vice-président, j'ai accepté d'assurer la transition jusqu'à l'élection d'un nouveau président qui se fera lors de l'assemblée générale prévue début mai 2006. Michel Herman a accepté le poste de vice-président et je l'en remercie.

Une organisation comme la nôtre ne peut pas vivre sans le soutien de ses membres. Ce soutien peut prendre de nombreuses formes comme le paiement de la cotisation, la publicité auprès de nouveaux collègues, la participation au congrès, l'inscription de vos étudiants à l'OMB ou au rallye transalpin, la prise d'abonnements pour math-jeunes, mais aussi la rédaction d'articles pour math-jeunes et/ou pour Mathématique & Pédagogie, la participation aux travaux de la commission pédagogique...

Si vous voulez vous impliquer dans une de nos activités, si vous voulez partager votre expérience de l'enseignement des mathématiques, venez nous rejoindre afin que la somme de votre dynamisme et de notre dynamisme permette d'enrichir notre modeste contribution à l'enseignement des mathématiques en Communauté française.

N'oubliez pas —si par exraordinaire ce n'est pas encore fait— de renouveler votre cotisation pour l'année 2006. Et profitez-en pour convaincre un nouveau collègue de se joindre à nous...

Vos avantages

- Une taille humaine : accès facile aux assistants et aux professeurs.
- Une équipe de chercheurs reconnus internationalement.
- Un accompagnement intégré à l'horaire.
- Un cours de « Mathématique Élémentaire » pour faciliter la transition secondaire-université.
- De nombreux documents en ligne (`http://math.umh.ac.be/an/etudiants.php`).

Stages

Si vous hésitez quant au choix de vos études ou simplement voulez découvrir les mathématiques autrement, nous vous offrons la possibilité d'effectuer un stage au sein de notre institut. Veuillez nous contacter si vous êtes intéressé(e).

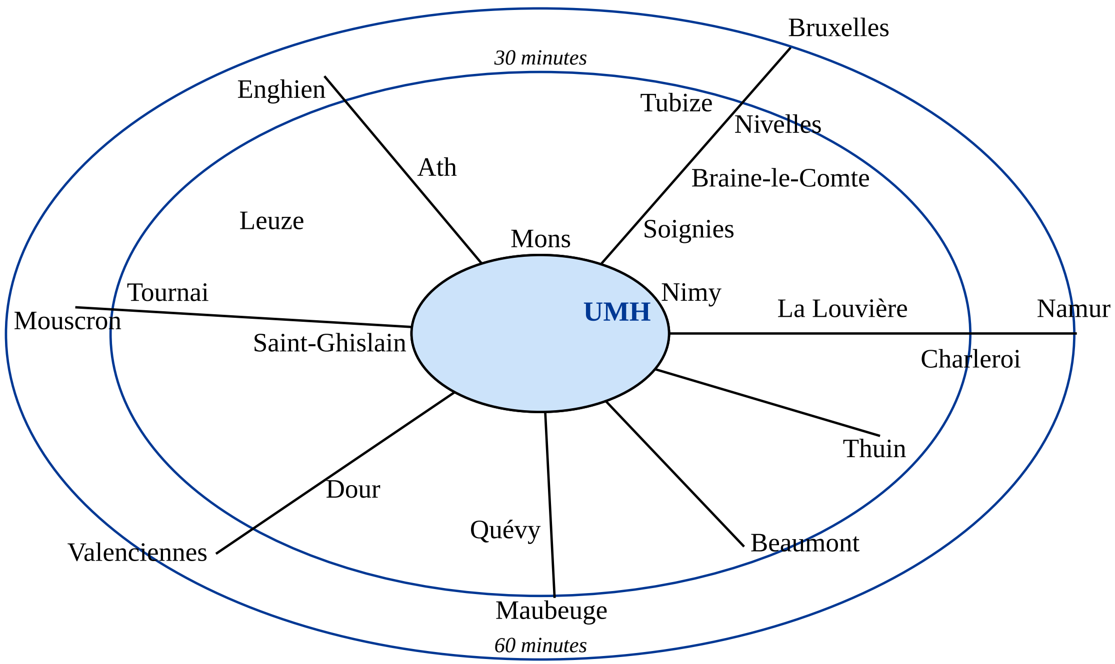
Nous contacter

Institut de Mathématique,
Université de Mons-Hainaut
Bâtiment « Le Pentagone »,
Avenue du Champ de Mars 6
B-7000 Mons (Belgique)

- email : `math@umh.ac.be`
- tél/rép : 065 37 34 12
- fax : 065 37 34 59 et 065 37 33 18
- web : `http://math.umh.ac.be/`

L'UMH est proche de chez vous !

L'UMH est proche de chez vous !



ACADÉMIE UNIVERSITAIRE
WALLONIE-BRUXELLES

Mathématique à Mons

Master

- ***Mathématique finalité métiers de la recherche***
- ***Mathématique finalité métiers de l'informatique***
- ***Mathématique finalité métiers de la finance***
- ***Mathématique finalité métiers de l'enseignement***

In memoriam

Les enfants de Frédérique...

Écris, les mots sont comme des oiseaux morts...

Un hommage à Frédérique se doit d'être, source de vie et de création.

La mémoire n'est pas une archive mais une semence.

Le plus grand hommage que nous puissions rendre à Frédérique est de persévérer dans sa volonté de faire réfléchir les enfants, de les aider à se dépasser, de leur communiquer la joie de faire de la mathématique, de croire en eux, de rendre à la mathématique sa beauté, sa musique cristalline et sa clarté, d'utiliser tous les moyens pédagogiques de notre temps et d'échanger nos expériences en toute sérénité.

Frédérique Lenger

Née le 8 décembre 1921 à Arlon, décédée le 1er septembre 2005 à Bruxelles.

Après des études gréco-latines à l'Athénée Royal d'Arlon, elle obtient en 1943 sa licence et en 1946 son agrégation en mathématiques à l'Université Libre de Bruxelles. Après avoir été assistante du Professeur Paul Libois et chargée de cours à Decroly, elle retourne en 1950 pour professer à Arlon et devient préfète du Lycée et directrice de l'École Normale d'Arlon.

Frédérique participe à la fondation de la SBPM en 1953 et reste membre du comité jusqu'en 1969. Elle a contribué de façon significative à *Mathematica & Pædagogia* en assurant durant plusieurs années une rubrique intitulée « Connaissance des élèves ».

En 1960, son mariage avec le Professeur Georges Papy, l'amène à l'École Normale Berkendael de Bruxelles.

Son calme, ses qualités pédagogiques exceptionnelles, son humanisme ont marqué toute une génération d'enseignants à travers le monde.

Son esprit ouvert, sa faculté de maîtriser ses sentiments, son esprit d'analyse, portant à la fois sur les êtres humains et la mathématique, lui ont permis de mettre en place une présentation pédagogique de concepts mathématiques abstraits et de donner à la mathématique un rôle thérapeutique pour certains.

Elle a transmis la joie de la découverte à des enfants de tout âge, des plus favorisés aux plus démunis. Elle a captivé les enseignants qui l'ont vue en classe. Elle a montré que la mathématique a le pouvoir de fasciner tout être humain.

Sa personnalité a interpellé la réforme de l'enseignement de la mathématique en Belgique.

Que la disparition de Frédérique, encourage ceux qui ont vécu ses expériences ou les ont suivies à diffuser quelques-uns de ses travaux sur la toile.

De nombreux enseignants de par le monde sont demandeurs.

Frédérique est née trop tôt... À nous, ses enfants, de transmettre son œuvre toujours actuelle.

Une ébauche de site se met déjà en place grâce aux liens que la disparition de Frédérique a retissés entre quelques amis de la mathématique :
`http://homepages.ulb.ac.be/~kennes/frederique/index.htm`

Les mathématiques, hier, aujourd'hui & surtout demain

LUC LEMAIRE
Université libre de Bruxelles &
Cabinet de la Ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche scientifique et des Relations internationales

Quelques sujets mathématiques, quelques histoires mêlant le passé, le présent, l'avenir, combinant l'amusement du chercheur et l'application à la vie de tous les jours, quelques promenades mathématiques à décrire sur un bout de papier ou simplement en agitant les mains, voilà ce qu'est ce texte.

1. Nombres

Parlant de mathématique, pourquoi ne pas commencer par les nombres entiers ?

Je vais écrire trois courtes formules, qui ne demanderont pas d'effort exagéré de compréhension.

La **première formule** n'emploie aucun ingrédient compliqué, uniquement les nombres naturels 1, 2, 3, …. Écrivons :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = A.$$

Si j'arrête la somme après trois, ou quatre, ou un nombre fini de termes, il est facile de calculer la somme, par calcul de fractions ou avec une calculette.

Mais les quelques points à la fin signifient que la somme continue indéfiniment, qu'on additionne une infinité de termes.

Adresse de l'auteur : Luc Lemaire, Cabinet de la Ministre Marie-Dominique Simonet, Cellule recherche, Rue Belliard 9–13, 1040 Bruxelles. ; courriel : `llemaire@ulb.ac.be`.
Ce texte a été exposé lors de la proclamation des résultats de l'Olympiade mathématique belge, à l'U.L.B., le 14 mai 2005.

Ceci ne doit pas faire peur, nous connaissons d'autres sommes d'une infinité de termes donnant un nombre fini, par exemple

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = 0{,}3333\ldots = \frac{1}{3}.$$

Dans la première formule, la somme donne également un nombre fini, que j'appelle A.

La **deuxième formule** fait appel à des ingrédients plus compliqués : les nombres premiers.

Rappelons qu'un nombre naturel $\geqslant 2$ est **premier** s'il n'a comme diviseur que 1 et lui-même. Ainsi, 6 n'est pas premier car $6 = 2 \times 3$, mais 7 est premier car il n'a pas de telle décomposition en produit de nombres entiers.

Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Les nombres premiers ont toujours fasciné les mathématiciens, et Euclide a démontré il y a 24 siècles qu'il y en a une suite infinie.

Sa démonstration est tellement simple et élégante qu'elle reste la meilleure possible après 24 siècles. De plus, elle peut servir d'introduction et de modèle pour l'idée générale d'une démonstration logique.

Considérons maintenant le produit infini

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\left(1 - \frac{1}{11^2}\right)\cdots$$

utilisant tous les nombres premiers.

On peut démontrer que ce produit infini fournit un nombre fini, et poser :

$$B = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\cdots}.$$

La **troisième formule** provient d'un tout autre domaine : la géométrie classique. Comme nous le savons tous, la longueur d'un cercle de rayon R vaut $2\pi R$, où la constante π a comme valeur approchée :

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$$

Écrivons

$$C = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour résumer, nous avons écrit trois nombres sans aucune relation, provenant de domaines différents des mathématiques. Et pourtant, on peut montrer que

$$\boldsymbol{A = B = C} \ :$$

il s'agit trois fois du même nombre.

Il faut s'arrêter un moment (faites-le !) pour voir que ceci devrait être impossible. Cette égalité signifie notamment qu'un dieu facétieux des mathématiques a caché la longueur du cercle dans la liste des nombres premiers — qui n'a aucune relation imaginable avec le cercle.

Dans l'appendice à la fin de cet article, le lecteur acharné trouvera la démonstration de $A = B$ et une idée de celle de $A = C$.

Nous en tirons déjà trois conclusions :

1. *Il y a de la beauté et de la magie dans les mathématiques*
2. *Les mathématiques ne s'attachent pas à un domaine, comme l'algèbre, la géométrie ou l'analyse, mais établissent des liens entre des sujets qui semblaient ne pas en avoir. Les méthodes d'un domaine s'appliquent dès lors aux problèmes des autres.*
3. *Les notions et les démonstrations très anciennes sont aussi valides aujourd'hui qu'il y a 24 siècles.*

Allons plus loin. Peut-on dans les formules ci-dessus remplacer les carrés par des cubes ? On a encore

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^3})(1 - \frac{1}{3^3})(1 - \frac{1}{5^3}) \cdots},$$

mais ce n'est pas égal à une fraction fois π^3.

De même, pour une puissance $x > 1$, on a :

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^x})(1 - \frac{1}{3^x})(1 - \frac{1}{5^x}) \cdots}.$$

Ce nombre est maintenant une fonction de x, appelée la fonction zêta de Riemann, $\zeta(x)$.

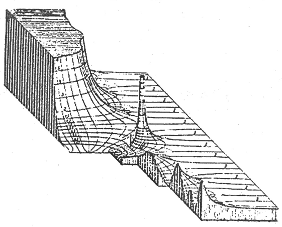
Dans un article prodigieux de 1859, Bernhard Riemann analyse cette fonction et montre ses relations profondes avec la théorie des nombres, et la distribution des nombres premiers.

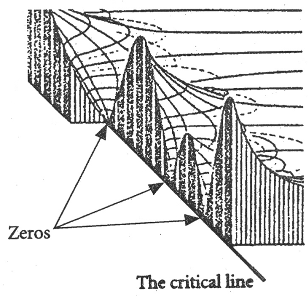
Pour cela, il montre que la fonction peut être étendue au cas où $x < 1$ et même aux valeurs complexes c'est-à-dire aux nombres de la forme $z = x + \sqrt{-1} \cdot y$.

Il affirme que les zéros de ζ, c'est-à-dire les nombres complexes z tels que $\zeta(z) = 0$ sont soit les zéros « faciles » -2, -4, -6, $\ldots$, soit situés sur la droite des nombres de la forme $z = \frac{1}{2} + \sqrt{-1} \cdot y$, pour certaines valeurs de y.

Il ne peut pas démontrer ce résultat, et l'accepte comme une « hypothèse », laissant à d'autres le soin de la démontrer.

L'« hypothèse de Riemann », toujours pas démontrée, est considérée par beaucoup comme le problème ouvert le plus important en mathématique aujourd'hui.





Pourquoi cette question assez obscure sur une fonction très spécifique est-elle tellement importante ?

Des formules ci-dessus, nous entrevoyons que la fonction zêta est liée aux nombres premiers. En fait, des dizaines de théorèmes de théorie des nombres et d'informatique théorique ont été démontrés en supposant vraie l'hypothèse de Riemann, sans qu'on puisse les démontrer autrement pour l'instant. Donc, quand (ou si) l'hypothèse est démontrée, ces dizaines d'autres résultats seront prouvés en même temps.

En 1900, le grand mathématicien allemand David Hilbert a proposé une liste visionnaire de 23 problèmes qui ont orienté une partie des développements mathématiques du vingtième siècle.

L'hypothèse de Riemann figure dans cette liste, et est le seul problème spécifique non résolu après un siècle.

En 2000, la fondation Landon Clay a publié une liste de sept problèmes mathématiques et, les temps ayant changé, a offert un prix d'un million de dollars pour la solution de chacun d'eux. L'hypothèse de Riemann en fait évidemment partie.

L'effet principal de s'acharner à résoudre des problèmes aussi difficile est de développer de nouvelles théories et de nouveaux résultats — même lorsqu'on ne résout pas le problème. Aujourd'hui, la question de Riemann est au centre d'un réseau de théories mathématiques qui se trouvent ainsi reliées entre elles.

Et la physique a rejoint ce réseau : Michael Berry a relié les zéros de la fonction de Riemann à du chaos quantique, et Alain Connes aux valeurs propres d'un opérateur, similaires au spectre d'absorbtion d'une étoile.

Mais tout ceci est-il uniquement un amusement de théoricien, sans lien avec des applications concrètes ?

G. H. Hardy, qui a montré en 1914 que la fonction de Riemann a une infinité de zéros sur la droite indiquée, considérait que la beauté, caractéristique essentielle des mathématiques de qualité, était reliée à leur inutilité : l'absence de lien avec une réalité banale était pour lui un atout de l'imagination.

Eh bien, Hardy se trompait : vous employez tous des nombres premiers dans la vie de tous les jours, mais sans le savoir.

En effet, lorsque vous utilisez une machine bancaire, ou faites un paiement par internet, vos données bancaires sont cryptées par un code secret. Et le seul système vraiment sûr aujourd'hui utilise des nombres premiers.

En simplifiant un peu, voici comment ça marche.

Toute personne (ou compagnie) qui veut recevoir des messages secrets choisit deux très grands nombres premiers — par exemple de 100 chiffres. Elle ne révèlera à personne ces deux nombres, sa « clé secrète ».

Mais elle calcule le produit de ces deux nombres, obtenant un nombre de 200 chiffres qu'elle annonce librement : c'est sa « clé publique ».

En utilisant de très jolies mathématiques (disponibles dans un logiciel), toute personne qui veut lui envoyer un message peut le crypter avec sa clé publique, et le lui envoyer sans aucun souci. En effet, seule la connaissance de la clé secrète (les deux nombres premiers) permet de décoder le message de départ.

C'est le principe de la cryptographie RSA, créée en 1977 par Rivest, Shamir et Adleman (et un peu plus tôt par Ellis, Cocks et Williamson qui, travaillant pour les services secrets britanniques, l'ont gardé secret).

Mais, pourriez-vous objecter, le nombre de 200 chiffres se factorise de manière unique en les deux nombres premiers. Ne peut on pas simplement les calculer ? La réponse est que tous les ordinateurs actuels travaillant ensemble mettraient plusieurs siècles pour le faire, à cause de la taille des nombres.

Nous obtenons deux autres conclusions sur les mathématiques.

4. *Des notions anciennes mènent encore à des questions ouvertes extrêmement importantes.*
5. *Les mathématiques « pures » étudiées pour leur beauté et leur élégance, trouvent des applications commerciales ou industrielles inattendues. En citant le physicien Eugène Wiegner, c'est l'« efficacité déraisonnable des mathématiques appliquées aux sciences naturelles ».*

2. Équations

Depuis la création du calcul différentiel et intégral par Newton et Leibniz, les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles sont un outil central des applications des mathématiques aux sciences — d'abord l'astronomie et la physique, puis la chimie, la biologie, et maintenant l'économie et la finance.

C'est une sujet extrêmement vaste, aussi bien fondamental qu'appliqué.

Pour ne prendre qu'un exemple, je vais considérer les équations de Navier-Stokes. Elles forment un système d'équations aux dérivées partielles qui décrivent le mouvement des fluides. Elles ont été écrites par Navier en 1822 et justifiées plus précisément par Stokes quelques années après.

Presque deux siècles plus tard, nous n'avons pas de formule générale donnant leurs solutions, et même pas de théorie satisfaisante sur l'existence et les propriétés de ces solutions.

En fait, leur étude mathématique fait l'objet d'un des sept problèmes de la Fondation Clay.

Elles sont pourtant utilisées dans de nombreuses applications, comme le dessin des voitures, des avions, la représentation du mouvement du sang dans le système cardiovasculaire et de nombreux autres problèmes.

Je vais décrire brièvement une application développée à l'Institut Fraunhofer de mathématique appliquée à Kaiserslautern en Allemagne : la conception d'airbags pour les voitures.

Pendant longtemps, ce fut une idée irréalisable : en cas d'accident l'airbag doit se gonfler en moins d'un vingtième de seconde ou ce sera trop tard.

Tout compte : la forme du sac, la façon dont il est plié, la manière dont le gaz est injecté.

La manière la plus efficace (et la moins couteuse par la même occasion) de trouver la meilleure forme est par un modèle mathématique traité par un ordinateur. Les chercheurs de Kaiserslautern ont développé un programme informatique qui permet de tester la forme du sac, la manière dont il est plié et l'entrée du gaz sans devoir réaliser un airbag réel sauf à la fin. Pour un cout minime, ils peuvent faire des centaines d'« expériences » sur la forme et les plis pour trouver le meilleur airbag possible.

Et la comparaison du déroulement du programme et de la réalisation matérielle de l'airbag faite à la fin montre combien leur programme est précis.

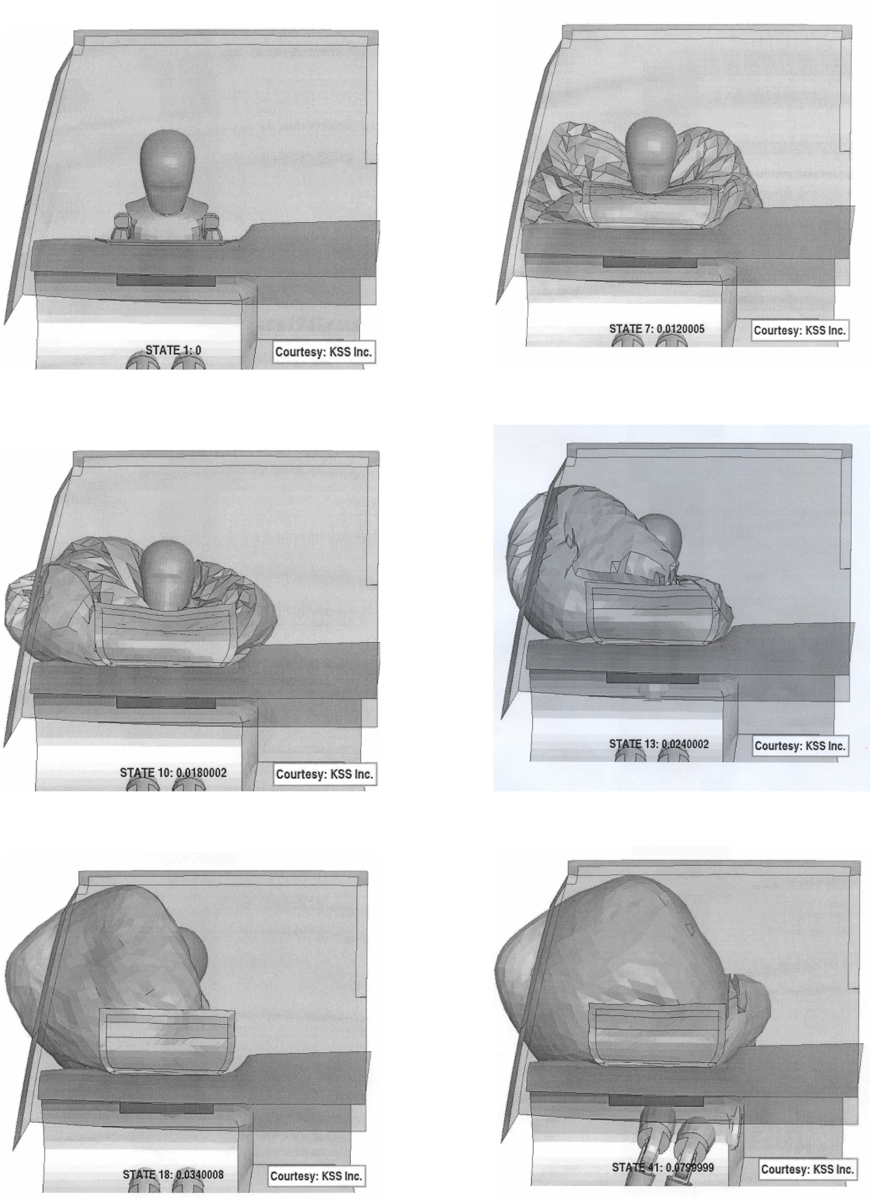
Mais ce succès a demandé le développement de nouvelles mathématiques.

En effet, la manière classique d'approximer des équations aux dérivées partielles sur un domaine de l'espace est de le quadriller par des points assez serrés et d'approximer les dérivées par des différences des fonctions entre ces points. Ce quadrillage, choisi au départ en fonction de la précision souhaitée, est fixe.

Mais ici, le domaine des équations est l'intérieur de l'airbag, qui varie très rapidement justement à cause du gaz qu'on étudie. Il a donc fallu développer de nouvelles méthodes sans quadrillage.

3. Images

Lorsque vous regardez une photo ou une vidéo sur votre écran d'ordinateur, vous utilisez également sans le savoir des théories mathématiques


STATE 1: 0
Courtesy: KSS Inc.
STATE 7: 0.0120005
Courtesy: KSS Inc.
STATE 10: 0.0180002
Courtesy: KSS Inc.
STATE 13: 0.0240002
Courtesy: KSS Inc.
STATE 18: 0.0340008
Courtesy: KSS Inc.
STATE 41: 0.0799999
Courtesy: KSS Inc.

intéressantes, anciennes, nouvelles ou en cours de développement. Ce sera notre troisième exemple de progrès récents combinant théorie et application.

Une image perçue par l'œil peut être vue comme quelques fonctions de deux variables décrivant l'intensité des couleurs de base aux différents points de l'image. Pour la reproduire sur un écran après l'avoir transmise, par exemple par le réseau internet, il faut la traduire par un message composé de nombres, le plus limité possible.

Un très bon appareil photo numérique aujourd'hui a environ 6 mégapixels c'est-à-dire que l'image est décomposée en six millions de points, chacun d'entre eux faisant l'objet par exemple de trois informations de couleur. Pour transmettre une photo en un temps raisonnable, il faut réduire énormément le nombre d'informations, en veillant à ce que la différence ne soit pas visible à l'œil.

Le système standard s'appelle JPEG. Il consiste d'abord à découper l'image en petits carrés, qui seront analysés séparément. Dans l'analyse classique de Fourier, au 19^{e} siècle, les fonctions sur un intervalle sont écrites comme sommes infinies de sinus et de cosinus, les coefficients placés devant ces termes étant les coefficients de Fourier. Un exemple est donné dans l'appendice. Ici, dans chaque carré il y a un nombre fini de points étudiés (les pixels) et en chacun de ces points on mesure la densité des différentes couleurs. On écrit alors un analogue discret des séries de Fourier pour ces fonctions sur les points. Parmi les « coefficients de Fourier » obtenus, on ne garde par exemple que les 5 % plus grands, et tant qu'on ne doit pas trop agrandir l'image l'approximation est invisible à l'œil.

Une photo donnée au départ par 15 millions d'octets peut être compressée en un demi-million d'octets sans perte visible.

Le système JPEG a été amélioré en remplaçant les décompositions de Fourier par des décompositions en « ondelettes », des fonctions mieux adaptées qui remplacent les sinus et cosinus. Au lieu d'un découpage et d'une approximation uniforme de l'image, les ondelettes décrivent d'abord la forme générale, puis se concentrent sur les endroits de l'image où il y a beaucoup de détails.

Le système obtenu est appelé JPEG 2000.

Pour certaines applications, une nouvelle amélioration vient d'être inventée par quatre mathématiciens français, qui ont eu les idées théoriques et ont également créé la société *Let it wave* qui commercialise le système.

L'idée de base de Stéphane Mallat et ses comparses vient de progrès récents en neuroscience, améliorant notre compréhension du fonctionnement de l'œil et du cerveau.

En fait, l'œil ne se contente pas de regarder point par point une image pour envoyer le tout en vrac au cerveau mais il effectue une première analyse des lignes générales de l'image. Pour cela, certaines cellules de la rétine ne réagissent qu'à la présence de lignes de contraste faisant un angle donné avec l'horizontale. Si nous regardons un personnage, en première analyse, nous voyons la ligne qui le sépare de l'arrière-plan.

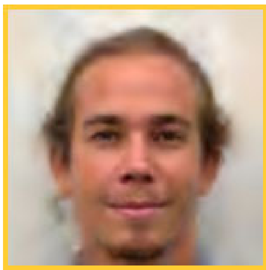
Ces informations fragmentées par les différentes cellules de la rétine sont envoyées au cerveau qui par un programme de calcul spécifique reconstitue l'image. Les spécialistes ont d'ailleurs montré que ce processus de calcul est déjà installé dans le cerveau à la naissance.

Ce procédé semble (*a posteriori*) normal et efficace. L'œil détermine d'abord les grandes lignes de l'image, puis remplit les détails.

C'est cette approche qui est suivie par le logiciel *Let it wave*. Les lignes principales de l'image sont sélectionnées et, au lieu des rectangles habituels, on inclut ces lignes dans des rectangles minces appelés « bandelettes ». On analyse ensuite les détails dans ces bandelettes comme dans le cas des ondelettes.

JPEG, 500 bytes

JPEG2000, 500 bytes



Let It Wave, 500 bytes

La première application commerciale de cette idée concerne les photos d'identité. Partant de la forme générale du visage pour suivre par cette analyse en bandelettes, le système encode une photo d'identité reconnaissable dans 500 octets seulement, c'est-à-dire une quantité d'information stockable dans un code barre. On peut par exemple imprimer ce code barre sur un passeport — et un petit appareil reconstitue à volonté la photo.

L'avenir dira si le processus *Let it wave* envahira progressivement tout le web.

4. Pour l'honneur de l'esprit humain

Les trois exemples de ce texte montrent que les mathématiques développées pour leur valeur esthétique mènent plus tard à des applications concrètes et inattendues.

Mais il ne faut pas oublier pour autant l'aspect culturel des mathématiques qui font partie de l'idée de civilisation et qui se pratiquent, selon les termes de Carl Jacobi, « pour l'honneur de l'esprit humain ».

Les mathématiques, comme l'art, la philosophie et la science font partie de la civilisation qui nous a été transmise par les Grecs de l'antiquité, par l'intermédiaire de la civilisation arabe. Et la renaissance est née de la redécouverte de ces valeurs en Italie.

La civilisation ne se réduit pas à des termes économiques, ou elle perd sa véritable nature.

Il me semble que les mathématiques abstraites —distinctes des calculs concrets— apparaissent de façon naturelle au début de la civilisation humaine.

Les mathématiques avaient certainement d'abord une portée purement pratique : compter des têtes de bétail, calculer la surface d'un champ, le volume de pierre pour construire une pyramide.

Mais si l'esprit humain s'arrêtait là, pourquoi Euclide s'occupait-il de démonstrations géométriques et de nombres premiers ? Pourquoi les Égyptiens avaient-ils développé une curieuse arithmétique des fractions ?

Sur un os, trouvé par l'anthropologue belge Jean de Heinzelin à Ishango en Afrique, une série de lignes grattées donne un début de table de multiplication et quelques nombres premiers. S'agit-il d'un hasard, ou d'une très ancienne apparition de mathématique abstraite, entre 7000 et 20 000 ans avant notre ère ?

Je pense que l'esprit humain, tôt dans son évolution, a comme caractéristique de penser en termes abstraits, et que les mathématiques apparaissent à ce moment.

Enfin, pourquoi les mathématiciens font-ils des mathématiques ?

Pourquoi Michel-Ange sculptait-il ? Pourquoi Beethoven composait-il ?

Tous pour la même raison : parce qu'ils en éprouvent le besoin. Comme Hilbert l'a dit en 1930 : « *Wir müssen wissen, wir werden wissen.* » (« Nous devons savoir, nous allons savoir. »).

Quand on lui demandait pourquoi il s'obstinait à tenter d'escalader l'Everest, l'alpiniste George Mallory répondit : « Parce qu'il est là. ».

De même, les mathématiciens s'attaquent à leur Everest (comme l'hypothèse de Riemann) parce qu'il est là.

Et en mathématique, chaque sommet escaladé simplifie le chemin pour les autres chercheurs, et ouvre la vue sur un nouveau paysage et de nouvelles montagnes, qu'il faut gravir.

Parce qu'elles sont là.

5. Appendice

Pour les plus acharnés, voici une idée de la démonstration des identités du premier paragraphe.

Montrons d'abord que $A = B$, dans le cas général de l'exposant x.

Posons :

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \cdots$$

où $x > 1$, ce qui fait que la série converge. Nous avons :

$$\frac{1}{2^x}\zeta(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{8^x} + \frac{1}{10^x} + \cdots$$

et donc

$$\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = 1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} + \cdots$$

Nous avons donc retiré tous les multiples de 2 de la somme.

Passons à 3, le nombre premier suivant 2. Nous avons :

$$\frac{1}{3^x}\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{15^x} + \frac{1}{21^x} + \cdots$$

et

$$\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = 1+\frac{1}{5^x}+\frac{1}{7^x}+\frac{1}{11^x}+\frac{1}{13^x}+\cdots$$

Dans cette somme, tous les multiples de 2 et de 3 ont été enlevés. Nous continuons avec 5, le nombre premier suivant, et

$$\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = 1+\frac{1}{7^x}+\frac{1}{11^x}+\frac{1}{13^x}+\cdots$$

On peut continuer ainsi, le nombre premier suivant apparaissant toujours juste après le 1 dans le membre de droite.

Comme la série de $\zeta(x)$ converge, la somme de la fin de la suite tend vers zéro et il en découle (en notant p_n le n^{e} nombre premier) :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)\cdot\zeta(x) = 1,$$

d'où la formule.

Pour montrer que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, nous faisons appel aux propriétés des séries de Fourier.

Pour une fonction f périodique de période 2π et C^1 par morceaux, la série de Fourier de f est définie par :

$$F(f)(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx)$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ny\,dy$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin ny\,dy$$

sont les coefficients de Fourier de f.

On démontre alors qu'en tout point x, la série $F(f)(x)$ converge vers la moyenne en x des limites à gauche et à droite de f.

Appliquons ceci à la fonction périodique qui vaut x^2 sur $]0,2\pi[$. Par un exercice d'intégration par parties, on trouve sur $]0,2\pi[$:

$$F(f)(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right).$$

En $x = 0$, la moyenne entre $(2\pi)^2$ et 0 vaut $2\pi^2$, d'où :

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ comme annoncé.

Cette formule peut être démontrée par d'autres méthodes, mais il est intéressant d'observer que les séries de Fourier, développées pour résoudre des équations aux dérivées partielles telles que celles du paragraphe 2, apparaissent comme outil dans les autres sujets traités ici. Les méthodes d'un sujet s'appliquent vraiment aux autres.

Références

L'histoire passionnante de l'hypothèse de Riemann fait l'objet de plusieurs livres de vulgarisation récents. Mon préféré est :
John Derbyshire : *Prime obsession*, Plume/Penguinbooks, 2004 (paperback).

Pour une histoire de la cryptographie et des codes secrets, on lira le remarquable :
Simon Singh : *Histoire des codes secrets*, Le livre de poche 15097 (1999).

Le procédé de compression d'images décrit au paragraphe 3 est présenté sur le site web de la société qui l'a inventé : `http ://www.letitwave.fr`.

Petite étude des fractions continues et leur application à l'équation de Pell-Fermat

PIERRE PAQUAY
HEL - Département pédagogique

1. Introduction

Le mathématicien J. Wallis fut le premier à utiliser le terme de fraction continue dans son *Arithmetica Infinitorum* (1653) ; cependant on pourrait faire remonter l'idée des fractions continues aussi loin que l'algorithme d'Euclide puisque nous allons voir que de simples manipulations algébriques des étapes de cet algorithme permettent de faire apparaître des fractions continues.

Dans cet article nous verrons que les fractions continues qui semblent n'être rien de plus que des curiosités mathématiques sont en fait très utiles pour donner une écriture beaucoup plus naturelle des nombres rationnels et même irrationnels. À savoir, une écriture limitée pour les nombres rationnels et illimitée périodique pour les nombres irrationnels quadratiques.

Nous terminerons avec une application historiquement très importante, l'équation de Pell-Fermat ($x^2 - dy^2 = 1$), que l'on peut résoudre élégamment par fractions continues. Pour illustrer l'importance de l'équation de Pell--Fermat, nous étudierons le problème des « Bœufs du Soleil » d'Archimède dont nous verrons que la solution est tout sauf triviale.

L'étude proposée dans cet article n'est en aucun cas exhaustive : les fractions continues et l'équation de Pell-Fermat possèdent encore beaucoup de propriétés très intéressantes. Notre but dans cet article est, en toute modestie, de fournir un survol de ces théories fascinantes et peut-être de donner l'envie au lecteur de prolonger cette étude.

Adresse de l'auteur : Haute École de la Ville de Liège, Département Pédagogique, Rue Jonfosse 80, 4000 Liège ; courriel : `p.paquay@linuxaddict.be`.

2. Un petit problème de géométrie

Avant d'aborder les fractions continues d'un point de vue plus formel, considérons, en guise de mise en bouche, le petit problème géométrique suivant.

Comment diviser le rectangle suivant dont la longueur est de 16 *unités et la largeur est de* 9 *unités en un nombre exact de carrés non tous égaux au carré unité ?*

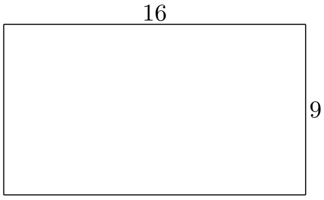


Fig. 1 – *Un problème simple ?*

À première vue, il n'est pas clair que ce problème ait un quelconque rapport avec les fractions continues ; pourtant nous allons constater que le simple fait de résoudre ce problème d'une manière tout à fait naturelle met en évidence des fractions continues.

Commençons par faire apparaître un premier carré de côté 9 unités.

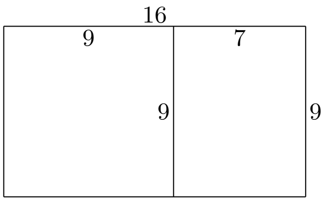


Fig. 2 – *Première étape*

Nous pouvons traduire cela algébriquement par

$$\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9},$$

puisque les côtés de ce rectangle sont dans un ratio $16/9$; en fait cela pourrait s'interpréter par la phrase « on peut mettre une fois et $7/9$ de fois la largeur dans la longueur ».

Cela ne nous avance guère, mais si nous prolongeons ce raisonnement, nous constatons alors que nous pouvons diviser le rectangle de longueur 9 unités et de largeur 7 unités en un carré de côté 7 unités et un rectangle de longueur 7 unités et de largeur 2 unités.

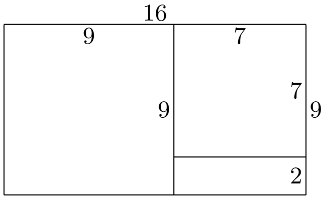


FIG. 3 – *Deuxième étape*

Ce qu'ici encore nous pouvons écrire par

$$\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9} = 1 + \frac{1}{\frac{9}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}}.$$

En continuant ce processus, on obtient finalement un nombre exact de carrés, à savoir $1 + 1 + 3 + 2 = 7$ carrés, qui divisent notre rectangle de départ. Ce qui constitue bien entendu une solution au problème.

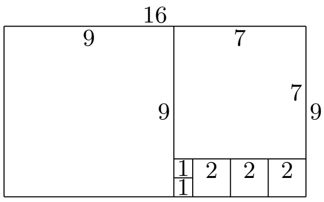


FIG. 4 – *Une solution au problème*

Algébriquement cela s'interprète par

$$\frac{16}{9} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}},$$

que l'on qualifiera dans la suite de *fraction continue simple finie.*

Cependant ce problème avec les dimensions proposées n'est nullement un cas particulier : il est possible de refaire le même raisonnement pour tout rectangle de dimensions entières ([1]).

3. Définitions et propriétés fondamentales

Pour fixer les idées, il est indispensable de donner une définition précise d'une fraction continue.

Définition 1 Une *fraction continue finie* est une expression de la forme suivante :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

où $n \geq 0$ et $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

Si les $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $0 \leq i \leq n$ et $a_i > 0$ pour $0 < i \leq n$, alors la fraction continue est dite *simple*.

On peut encore écrire cette expression sous la forme plus compacte $[a_0, a_1, \cdots, a_n]$. Les nombres réels a_i sont appelés *quotients partiels* de la fraction continue et les nombres $c_k = [a_0, a_1, \cdots, a_k]$ avec $0 \leq k \leq n$ sont appelés *convergents* de la fraction continue.

Nous savons maintenant ce qu'est une fraction continue, il est clair que l'intérêt de ces objets mathématiques resterait vraiment limité si les expressions du type donné ci-dessus n'apparaissaient que rarement dans la nature. En fait, nous allons voir qu'il est possible d'écrire tout nombre rationnel sous la forme d'une fraction continue. Quelle est la procédure à suivre pour se rendre compte de ce fait, allons-nous devoir utiliser une méthode lourde et compliquée issue de développements récents en théorie des nombres ?

La réponse à cette question est non, et en fait l'algorithme d'Euclide (300 ACN) est la procédure à utiliser ; de plus cette méthode va nous permettre de trouver une écriture sous forme de fraction continue simple de tout nombre rationnel. Comme un exemple vaut parfois mieux qu'un long discours, voici l'écriture du nombre rationnel $24/13 = 1{,}846\,15\ldots$.

([1]) Cela reste vrai aussi si les dimensions sont rationnelles.

Utilisons l'algorithme d'Euclide avec les nombres 24 et 13 ; nous obtenons successivement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 24 &= 1 \times 13 + 11 \\ 13 &= 1 \times 11 + 2 \\ 11 &= 5 \times 2 + 1 \\ 2 &= 2 \times 1 + 0, \end{aligned}$$

ce qui nous assure entre autres que $\text{PGCD}(24, 13) = 1$; il est alors clair que $24/13 = [1, 1, 5, 2]$. Non ? D'accord, voici une étape supplémentaire :

$$\frac{24}{13} = 1 + \frac{11}{13} = 1 + \frac{1}{\frac{13}{11}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{11}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}}.$$

Remarquons alors que l'écriture traditionnelle, en base 10, du nombre 24/13 est un nombre décimal illimité périodique ; or, puisque l'algorithme d'Euclide fonctionne pour tout entier et se termine toujours, il n'est pas difficile de se rendre compte que les fractions continues nous donnent le moyen d'écrire tout nombre rationnel sous une forme qui est limitée.

À ce niveau de notre exposé, nous sommes capables de donner un algorithme efficace permettant de déterminer l'écriture sous forme de fraction continue simple de tout nombre rationnel.

Algorithme 2 (Fractions continues) *Soit $q \in \mathbb{Q}$; les quotients partiels de la fraction continue finie*

$$q = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$$

peuvent être trouvés grâce aux formules de récurrence suivantes

$$\theta_k = \begin{cases} q & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{1}{\theta_{k-1} - a_{k-1}} & \text{si } 0 < k \leq n \end{cases}$$

et

$$a_k = \lfloor \theta_k \rfloor$$

avec $0 \leq k \leq n$ et n le plus petit naturel tel que $\theta_n = a_n$.

La notation $\lfloor x \rfloor$ ($x \in \mathbb{R}$) désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x. L'algorithme ci-dessus résulte simplement d'une reformulation de l'algorithme d'Euclide.

4. Approximation des nombres rationnels à l'aide des convergents

Nous allons maintenant voir que le terme « convergent » a été bien choisi et que ces convergents constituent bien une façon d'approcher un nombre rationnel. Pour faciliter le calcul des convergents, on dispose des formules de récurrence suivantes.

Proposition 3 *Si on définit les entiers $p_0, p_1, \cdots, p_n$ et $q_0, q_1, \cdots, q_n$ par*

$$p_k = \begin{cases} a_0 & si\ k = 0 \\ a_0 a_1 + 1 & si\ k = 1 \\ a_k p_{k-1} + p_{k-2} & si\ 2 \leq k \leq n \end{cases}$$

et

$$q_k = \begin{cases} 1 & si\ k = 0 \\ a_1 & si\ k = 1 \\ a_k q_{k-1} + q_{k-2} & si\ 2 \leq k \leq n, \end{cases}$$

alors on a

$$c_k = \frac{p_k}{q_k}$$

pour $0 \leq k \leq n$. De plus, on a

$$p_k q_{k+1} - q_k p_{k+1} = (-1)^{k+1}$$

pour $0 \leq k \leq n$. En particulier, on a $\mathrm{PGCD}(p_k, q_k) = 1$ *pour $0 \leq k \leq n$.*

Prouvons d'abord la première affirmation en procédant par récurrence. Si $k = 0$, alors $p_0/q_0 = a_0 = c_0$ et si $k = 1$, alors $p_1/q_1 = a_0 + 1/a_2 = c_1$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour k et montrons qu'il reste valide pour $k+1$. Il vient

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}] &= \left[a_0, a_1, \cdots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right] \\
&= \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} \\
&= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\
&= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}},
\end{aligned}$$

par l'hypothèse de récurrence, ce qui suffit.

Procédons également par récurrence pour la seconde partie. Si $k = 0$, alors

$$p_0 q_1 - q_0 p_1 = -1.$$

Supposons maintenant ce résultat vrai pour k et montrons qu'il reste valide pour $k+1$. On a

$$\begin{aligned} p_{k+1}q_{k+2} - q_{k+1}p_{k+2} &= p_{k+1}(a_{k+2}q_{k+1} + q_k) - q_{k+1}(a_{k+2}p_{k+1} + p_k) \\ &= -(p_k q_{k+1} - q_k p_{k+1}) \\ &= (-1)^{k+2}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la seconde partie de l'énoncé. De plus, il suffit de remarquer que si d divise p_k et q_k, alors d divise aussi $p_k q_{k+1} - q_k p_{k+1} = (-1)^{k+1}$, ce qui revient à exiger que $d = 1$. ■

Dès lors, si on reprend l'exemple précédent avec 24/13 et si on utilise les formules de récurrence (2) ci-dessus, on constate que les convergents valent respectivement

$$c_0 = \frac{1}{1}, c_1 = \frac{2}{1}, c_2 = \frac{5 \times 2 + 1}{5 \times 1 + 1} = \frac{11}{6} \text{ et } c_3 = \frac{2 \times 11 + 2}{2 \times 6 + 1} = \frac{24}{13},$$

ce qui donne $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1{,}833\,3...$ et $c_3 = 1{,}846\,15...$, ce qui constitue effectivement une suite d'approximations de 24/13.

5. Approximation des nombres irrationnels à l'aide des convergents

5.1. Fractions continues infinies

Jusqu'ici nous nous sommes contenté de donner l'écriture de nombres rationnels sous forme de fractions continues (simples) et nous avons constaté que cette écriture est finie, mais qu'en est-il des nombres irrationnels, est-il possible de leur donner une écriture sous forme de fraction continue ?

(2) Remarquons que ces formules font apparaître que les convergents sont toujours des nombres rationnels.

La réponse à cette question est encore positive, cependant cette écriture ne sera évidemment plus finie. Voici donc un premier problème : une fraction continue infinie a-t-elle un sens ? Pour résoudre ce problème, il est nécessaire d'avoir la proposition suivante.

Proposition 4 *Si $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers tels que $a_m > 0$ pour $m > 0$, alors la suite $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$c_m = \frac{p_m}{q_m} = [a_0, a_1, \cdots, a_m]$$

est convergente.

Nous pouvons alors donner du sens à la notion de fraction continue infinie grâce à la définition suivante.

Définition 5 Soit $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers tels que $a_m > 0$ pour $m > 0$; on appelle *fraction continue infinie (simple)* toute expression de la forme

$$\lim_{m\to\infty}[a_0, a_1, \cdots, a_m].$$

On écrit encore cette expression sous la forme $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Comme dans le cas fini, les nombres a_m sont appelés les *quotients partiels* et les nombres $c_m = [a_0, a_1, \cdots, a_m]$ sont appelés les *convergents* de la fraction continue.

On peut alors prouver qu'il est possible d'écrire tout nombre irrationnel comme une fraction continue infinie. Tout se passe alors pour le mieux et on constate que les convergents ont exactement la signification attendue, à savoir qu'ils convergent vers la fraction continue infinie. Cependant, comment donner une écriture sous forme de fraction continue infinie à un nombre irrationnel ? La solution est encore donnée par l'algorithme d'Euclide, mais appliqué cette fois à des nombres non rationnels ; l'arrêt de l'algorithme n'est alors plus garanti.

Pour mieux visualiser cela essayons de donner l'écriture sous forme de fraction continue du nombre $\sqrt{3}$. Utilisons l'algorithme d'Euclide avec les nombres $\sqrt{3}$ et 1 :

$$\sqrt{3} = \underbrace{\lfloor\sqrt{3}\rfloor}_{=1} \times 1 + (\sqrt{3} - 1)$$

$$\begin{aligned}
1 &= \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor}_{=1} \times(\sqrt{3}-1) + \underbrace{(1 - 1\times(\sqrt{3}-1))}_{=2-\sqrt{3}} \\
\sqrt{3}-1 &= \underbrace{\left\lfloor \frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}} \right\rfloor}_{=2} \times(2-\sqrt{3}) + \underbrace{(\sqrt{3}-1-2\times(2-\sqrt{3}))}_{=3\sqrt{3}-5} \\
2-\sqrt{3} &= \underbrace{\left\lfloor \frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5} \right\rfloor}_{=1} \times(3\sqrt{3}-5) + \underbrace{(2-\sqrt{3}-1\times(3\sqrt{3}-5))}_{7-4\sqrt{3}} \\
3\sqrt{3}-5 &= \underbrace{\left\lfloor \frac{3\sqrt{3}-5}{7-4\sqrt{3}} \right\rfloor}_{=2} \times(7-4\sqrt{3}) + (3\sqrt{3}-5-2\times(7-4\sqrt{3})) \\
7-4\sqrt{3} &= \cdots
\end{aligned}$$

On a alors le développement suivant :

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5}}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3\sqrt{3}-5}{7-4\sqrt{3}}}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\cdots}}}},$$

ce qui donne que $\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$. Bien sûr, nous aurions pu trouver les quotients partiels en faisant appel à l'algorithme 2, mais l'utilisation de l'algorithme d'Euclide est plus visuelle ([3]).

([3]) En fait, ces deux algorithmes sont presque identiques, et au XVIII[e] siècle, la méthode par les fractions continues fut préférée à celle d'Euclide. Par exemple Gauss ignore complètement Euclide dans ses *Disquisitiones Arithmeticæ* (1801) et réfère exclusivement à un algorithme par fractions continues.

Les lecteurs attentifs auront sans doute remarqué que le développement en fraction continue de $\sqrt{3}$ présente un motif répétitif, une *période*, qui serait dans notre cas $1, 2$; pour attirer l'attention sur ce fait, on écrit la fraction continue par

$$\sqrt{3} = \left[1, \overline{1, 2}\right].$$

Voici un détail intéressant, qui est cependant peut-être le fruit du hasard ; examinons pour fixer les idées le développement en fractions continues du « nombre d'or » $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. On obtient, après un développement similaire à celui de $\sqrt{3}$ que

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \left[1, \overline{1}\right].$$

Si on calcule les p_k et q_k pour φ, on voit apparaître

$$p_k = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... \text{ et } q_k = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...,$$

que l'on reconnaît comme étant des nombres de Fibonacci.

Pour le nombre φ aussi, on détecte une période : avons-nous trouvé une écriture périodique des nombres irrationnels ? Malheureusement, ce n'est pas le cas, en fait il est possible de prouver que l'on peut donner une écriture semblable pour tout nombre irrationnel quadratique, c'est-à-dire tout nombre irrationnel solution d'une équation du second degré à coefficients entiers. Ce qui est le cas de $\sqrt{3}$ qui est solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$ et de φ qui est solution de $x^2 - x - 1 = 0$.

5.2. Nombres irrationnels non quadratiques

Dans le cas de nombres irrationnels non quadratiques, le développement en fraction continue ne présente malheureusement plus de structure particulière ; cependant, les fractions continues ne sont pas inutiles pour la cause et plus particulièrement, les convergents permettent de donner des approximations rationnelles pour ces nombres irrationnels.

Traitons le cas du nombre π qui est bien sûr un irrationnel non quadratique ([4]) ; nous trouvons facilement que

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, \ldots],$$

([4]) En fait, le nombre π est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers ; c'est le cas aussi du nombre e.

qui ne présente plus aucun caractère périodique. Calculons alors les premiers convergents de cette fraction continue. Nous trouvons que

$$c_0 = \frac{3}{1}, c_1 = \frac{22}{7}, c_2 = \frac{333}{106}, \cdots .$$

Nous remarquons ainsi que l'approximation classique du nombre π par la fraction $22/7$ n'est pas fortuite. Nous pouvons même voir que $\frac{333}{106} < \pi < \frac{22}{7}$ et cela reste vrai pour tous les convergents ; en fait, le nombre π est toujours compris entre deux convergents consécutifs.

À titre d'information, voici le développement en fraction continue du nombre e,

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, \ldots],$$

et voici les premiers convergents

$$c_0 = \frac{2}{1}, c_1 = \frac{3}{1}, c_2 = \frac{8}{3}, c_3 = \frac{11}{4}, \cdots .$$

6. Une application : l'équation de Pell-Fermat

6.1. Un peu d'histoire

Les ancients Grecs ont rencontré l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ dans leurs efforts pour comprendre le nombre $\sqrt{2}$, la diagonale du carré unité, dont ils savaient qu'il était irrationnel. À cette époque, ils avaient trouvé une méthode pour produire des solutions arbitrairement grandes $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots$ de cette équation. Ils avaient ainsi à leur disposition des fractions x_i/y_i qui approximaient $\sqrt{2}$. En effet, si $x_i^2 - 2y_i^2 = 1$, alors on a

$$\frac{x_i^2}{y_i^2} = 2 + \frac{1}{y_i^2} \to 2$$

lorsque $y_i \to \infty$.

Les Grecs ont découvert les solutions (x_i, y_i) parmi les « nombres transversaux » s_i et les « nombres diagonaux » d_i définis par

$$s_1 = 2, s_{i+1} = d_i + s_i$$

et

$$d_1 = 3, d_{i+1} = d_i + 2s_i.$$

Ils ont ainsi remarqué que les couples impairs $(d_1, s_1), (d_3, s_3), (d_5, s_5), \cdots$ vérifient l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.

6.2. L'équation de Pell-Fermat générale

Une équation de Pell-Fermat est une équation de la forme $x^2 - dy^2 = 1$ où $d \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré parfait. Nous cherchons ici, tout comme les Grecs ci-dessus, les solutions entières de cette équation. Attirons l'attention sur le fait que si le problème était de trouver les solutions rationnelles de cette équation, cela ne présenterait pas de grosse difficulté, il suffirait de remarquer que

$$x = \frac{r^2 + d}{r^2 - d} \text{ et } y = \frac{2r}{r^2 - d}$$

constituent des solutions de $x^2 - dy^2 = 1$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Cependant lorsque les solutions cherchées sont entières, ce problème devient beaucoup plus délicat et les fractions continues deviennent alors très utiles. On peut montrer que

$$\sqrt{d} = \left[a_0, \overline{a_1, \cdots, a_{n-1}, 2a_0}\right]$$

avec $n \geq 1$. Dès lors, une solution de l'équation $x^2 - dy^2 = 1$ est donnée par (p_{n-1}, q_{n-1}) lorsque n est pair et par (p_{2n-1}, q_{2n-1}) lorsque n est impair.

Donnons l'idée de la preuve de ce fait. Nous allons montrer que, avec les notations habituelles, on a

$$p_{kn-1}^2 - dq_{kn-1}^2 = (-1)^{kn}$$

pour $k \geq 1$. En effet, si on pose $r_{kn} = \left[2a_0, \overline{a_1, \cdots, a_{n-1}, 2a_0}\right]$, alors on a

$$\sqrt{d} = [a_0, a_1, \cdots, a_{kn-1}, r_{kn}].$$

Cependant, on peut voir $\sqrt{d}$ comme étant le $(kn)^{\text{e}}$ convergent ; dès lors, on peut écrire que

$$\sqrt{d} = \frac{r_{kn}p_{kn-1} + p_{kn-2}}{r_{kn}q_{kn-1} + q_{kn-2}} \ ;$$

or, on constate que $r_{kn} = a_0 + \sqrt{d}$ et ainsi, il vient

$$\sqrt{d}(a_0 q_{kn-1} + q_{kn-2} - p_{kn-1}) = a_0 p_{kn-1} + p_{kn-2} - dq_{kn-1}.$$

Comme $\sqrt{d}$ est irrationnel, on obtient

$$a_0 q_{kn-1} + q_{kn-2} - p_{kn-1} = 0 \text{ et } a_0 p_{kn-1} + p_{kn-2} - dq_{kn-1} = 0 \ ;$$

en multipliant la première égalité par p_{kn-1} et la seconde par $-q_{kn-1}$ et en additionnant, il vient

$$p_{kn-1}^2 - dq_{kn-1}^2 = -(q_{kn-1}p_{kn-2} - p_{kn-1}q_{kn-2}) = (-1)^{kn}.$$

Donc si n est pair, alors

$$p_{n-1}^2 - dq_{n-1}^2 = 1.$$

Par contre si n est impair, alors le nombre $2n$ est pair et ainsi

$$p_{2n-1}^2 - dq_{2n-1}^2 = 1,$$

ce qui suffit. ∎

Traitons un exemple. Cherchons des solutions entières de $x^2 - 23y^2 = 1$. On trouve facilement que

$$\sqrt{23} = \left[4, \overline{1, 3, 1, 8}\right],$$

la période est donc $n = 4$ qui est un nombre pair et ainsi $(p_3, q_3) = (24, 5)$ est solution de l'équation de départ.

En fait, une équation de Pell-Fermat admet une infinité de solutions et on peut générer celles-ci à partir de la solution minimale trouvée avec la méthode ci-dessus. Cela est rendu possible grâce à la règle de composition de Brahmagupta (600 ACN) ; cette règle affirme que si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont solutions de l'équation de Pell-Fermat, alors

$$(x_3, y_3) = (x_1x_2 + dy_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

est aussi solution. Une simple vérification permet de s'assurer de ce fait. On peut alors munir l'ensemble des solutions d'une structure de groupe infini avec le neutre $(1, 0)$, la loi de composition de Brahmagupta et en prenant l'inverse d'une solution (x, y) comme étant $(x, -y)$. On peut même prouver que ce groupe des solutions est cyclique et que le générateur de ce groupe n'est rien d'autre que la plus petite solution positive ; dès lors, toute solution est une puissance (selon la loi de Brahmagupta) de la solution minimale positive et c'est bien sûr cette solution qui nous est donnée par la méthode des fractions continues.

Reprenons alors l'exemple précédent ; nous avons trouvé que $(24, 5)$ est solution de l'équation $x^2 - 23y^2 = 1$. En calculant les puissances de la solution $(24, 5)$ selon Brahmagupta, nous pouvons générer la suite de solutions suivante :

$$(24, 5), (1151, 240), (55224, 11515), (2649601, 552480), \ldots.$$

6.3. Les « Bœufs du Soleil » d'Archimède

Il y a vingt-deux siècles, Archimède écrivit une lettre à Ératosthène qui proposait un problème concernant du bétail aux étudiants d'Alexandrie ([5]). Voici une traduction de ce problème qui était écrit à l'origine en vers.

> *Si tu es diligent et sage, Ô étranger, calcule le nombre des bœufs du Soleil. Ce bétail est divisé en quatre troupeaux de différentes couleurs, l'un blanc laiteux, l'autre noir luisant, le troisième brun et le dernier tacheté. Dans chaque troupeau se trouvent des taureaux, en nombre imposant, suivant ces proportions : Comprends étranger, que les taureaux blancs étaient égaux à la moitié et au tiers des noirs avec l'entièreté des bruns, alors que les noirs étaient égaux à un quart et un cinquième des tachetés avec, encore une fois, l'entièreté des bruns. Remarque encore que les taureaux restants, les tachetés, étaient égaux à un sixième et un septième des blancs avec tous les bruns. Ceci étaient les proportions des vaches : Les blanches étaient précisément égales à un tiers et un quart du troupeau entier des noirs ; alors que les noires étaient égales à un quart et un cinquième des tachetées, quand tous, taureaux inclus, vont pâturer ensemble. Maintenant les tachetées étaient égales en nombre à un cinquième et un sixième du troupeau brun. Finalement les brunes étaient en nombre égales à un sixième et un septième du troupeau blanc.*
>
> *Quand les taureaux blancs mélangent leur nombre avec les noirs, ils tiennent bon, égaux en profondeur et en largeur. À nouveau, quand les taureaux bruns et tachetés sont rassemblés en un troupeau ils se tiennent d'une telle manière que leur nombre, commençant par un, grandisse doucement jusqu'à ce qu'il complète une figure triangulaire, aucun taureau d'une autre couleur n'étant présent parmi eux ni aucun d'entre eux ne manquant.*

Pour résoudre ce problème, notons W, X, Y et Z les nombres de taureaux blancs, noirs, bruns et tachetés et w, x, y et z les nombres de vaches blanches,

([5]) Ce problème a refait surface en 1773 lorsque Gotthold Ephraim Lessing publia le texte grec de cet épigramme en vingt-quatre vers, traduit d'un manuscrit arabe.

noires, brunes et tachetées. Ces variables vérifient les équations suivantes.

$$\begin{aligned} W &= (1/2+1/3)X+Y \quad \text{et} \quad X = (1/4+1/5)Z+Y,\\ Z &= (1/6+1/7)W+Y \quad \text{et} \quad w = (1/3+1/4)(X+x),\\ x &= (1/4+1/5)(Z+z) \quad \text{et} \quad z = (1/5+1/6)(Y+y),\\ y &= (1/6+1/7)(W+w). \end{aligned}$$

De plus, $W+X$ est un carré parfait et $Y+Z$ est un nombre triangulaire.

Une solution du système linéaire est donnée très facilement par le logiciel *Mathematica* et on obtient en posant $z = 3\,515\,820v$ avec $v \in \mathbb{N}$ que

$$W = 10\,366\,482v, X = 7\,460\,514v, Y = 4\,149\,387v, Z = 7\,358\,060v,$$

et

$$w = 7\,206\,360v, x = 4\,893\,246v, y = 5\,439\,213v, z = 3\,515\,820v.$$

Au minimum, Archimède a maintenant 50 millions de têtes de bétail. N'oublions pas qu'en plus le nombre $W+X = 17826996v$ doit être un carré parfait, et puisque

$$17\,826\,996 = 2^2 \times 3 \times 11 \times 29 \times 4657v,$$

cela revient à exiger que $v = 3 \times 11 \times 29 \times 4657s^2 = 4\,456\,749s^2$, dès lors on obtient que

$$W = 46\,200\,808\,287\,018s^2, X = 33\,249\,638\,308\,986s^2,$$

$$Y = 18\,492\,776\,362\,863s^2, Z = 32\,793\,026\,546\,940s^2,$$

et

$$w = 32\,116\,937\,723\,640s^2, x = 21\,807\,969\,217\,254s^2,$$

$$y = 24\,241\,207\,098\,537s^2, z = 15\,669\,127\,269\,180s^2.$$

Finalement, il reste à imposer que $Y+Z$ soit un nombre triangulaire, c'est-à-dire que

$$Y+Z = 51\,285\,802\,909\,803s^2 = \frac{n(n+1)}{2},$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Si on multiplie cette équation par 8 et qu'on ajoute 1, l'équation devient

$$410\,286\,423\,278\,424s^2 + 1 = (2n+1)^2,$$

si on pose $t = 2n + 1$, nous pouvons conclure que résoudre ce problème revient à trouver une solution de l'équation

$$t^2 - 410\,286\,423\,278\,424 s^2 = 1,$$

qui est bien sûr une équation de Pell-Fermat. Le logiciel *Mathematica* nous donne la solution pour le nombre total d'individus

$$W + X + Y + Z + w + x + y + z = 7\,760\,271\,40 \ldots 26\,719\,455\,081\,800,$$

où les points de suspension cachent en fait plus de 200 000 chiffres. Le nombre total d'individus est en fait un nombre à 206 545 chiffres ; si on écrivait ce nombre en entier, à raison de 80 caractères par ligne et 72 lignes par page, il faudrait plus de 35 pages.

Cela nous donne le sentiment que le problème posé par Archimède n'avait pas été résolu à l'époque, ou alors qui sait ?...

7. Annexe

Nous proposons dans cette section, sans démonstration, les énoncés des résultats utilisés dans cet article ; le lecteur intéressé pourra se procurer les preuves de ces résultats classiques sans difficulté, par exemple dans [2] .

Théorème 6 *Si q est un nombre rationnel, alors il existe une fraction continue finie $[a_0, a_1, \cdots, a_n]$ telle que*

$$q = [a_0, a_1, \cdots, a_n].$$

Lemme 7 *Soit $q = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$ une fraction continue finie. Si c_{2k} pour $0 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$ et c_{2k+1} pour $0 \le k \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ sont les convergents pairs et impairs respectivement, alors*

1. *$c_0 < c_2 < c_4 < \cdots$ et $c_1 > c_3 > c_5 > \cdots$.*
2. *$c_{2k} < c_{2l+1}$ pour $0 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$ et $0 \le l \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor$.*
3. *$q > c_{2k}$ et $q < c_{2k+1}$ pour $k \ge 0$ et $q = c_{2l}$ avec $n = 2l$ si n est pair et $q = c_{2l+1}$ avec $n = 2l + 1$ si n est impair.*

Lemme 8 *Si $q = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$ est une fraction continue finie, alors on a*

$$\left| q - \frac{p_k}{q_k} \right| \le \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

pour tout $0 \leq k < n$.

Proposition 9 *Si* $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'entiers tels que* $a_m > 0$ *pour* $m > 0$*, alors la suite* $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$c_m = \frac{p_m}{q_m} = [a_0, a_1, \cdots, a_m]$$

est convergente.

Proposition 10 *La valeur d'une fraction continue infinie est un nombre irrationnel.*

Théorème 11 *Pour tout nombre irrationnel* x*, il existe une fraction continue infinie* $[a_0, a_1, \ldots]$ *telle que*

$$x = [a_0, a_1, \ldots].$$

Théorème 12 *Si la fraction continue de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est périodique, alors* α *est un irrationnel quadratique.*

Théorème 13 (Lagrange) *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est un irrationnel quadratique, alors la fraction continue de* α *est périodique.*

Théorème 14 *Si* $d \in \mathbb{N}$ *n'est pas un carré parfait, alors on a*

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \cdots, a_{n-1}, 2a_0}]$$

pour $n \geq 1$.

Bibliographie

[1] De Koninck J.-M., Mercier A., *Introduction à la théorie des nombres*, Modulo, 1994.

[2] Hardy G. H., Wright E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1979.

[3] Knuth D. E., *The Art of Computer Programming Vol. 2 Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley, 1998.

[4] Stillwell J., *Elements of Number Theory*, Springer-Verlag, 2003.

[5] Stillwell J., *Mathematics and its History*, Springer-Verlag, 2001.

[6] `http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Statement.html`.

Évaluation de la culture mathématique dans PISA 2003 — Un regard neuf sur les compétences des élèves de 15 ans

ISABELLE DEMONTY & ANNICK FAGNANT
Service de Pédagogie expérimentale
Université de Liège, Belgique

1. Qu'est-ce que l'étude PISA ?

Le programme PISA, Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves, est une initiative des pays membres de l'OCDÉ. Ces pays ont décidé de mettre au point une évaluation commune afin d'étudier les acquis des jeunes de 15 ans dans trois disciplines : la lecture, les mathématiques et les sciences. Afin d'assurer un suivi dans le recueil des données, des cycles d'évaluation de trois ans, envisageant chaque fois les trois disciplines, sont organisés. L'évaluation de 2000 était centrée principalement sur la lecture, celle de 2003 a approfondi l'évaluation de la culture mathématique et celle de 2006 accordera une place plus importante à la culture scientifique ([1]).

Contrairement à d'autres épreuves internationales et aux évaluations externes interréseaux organisées en Communauté française de Belgique, le programme PISA ne se focalise pas sur des classes regroupant des élèves d'un niveau scolaire donné, mais sur des élèves d'un âge donné (plus précisément,

Adresses des auteurs : Isabelle Demonty, Annick Fagnant, Service de Pédagogie expérimentale, B32 - FAPSE, Boulevard du Rectorat 5, 4000 Liège / Sart Tilman ; courriel : `isabelle.demonty@ulg.ac.be`, `afagnant@ulg.ac.be`.
Cet article est issu d'un travail mené par une équipe de chercheurs du Service de pédagogie expérimentale de l'Université de Liège (A. Baye, I. Demonty, A. Fagnant, A. Matoul, C. Monseur) sous la coordination de D. Lafontaine.

([1]) En 2003, en plus des trois domaines récurrents, la capacité à résoudre des problèmes a également été évaluée. Cette évaluation ne portait pas directement sur les mathématiques mais envisageait plutôt des compétences transdisciplinaires.

entre 15 et 16 ans, c'est-à-dire les jeunes nés en 1987 pour PISA 2003), et ceci quelle que soit l'année d'étude, la filière ou le type d'enseignement fréquenté. Cet âge a été choisi parce qu'il correspond à la fin de la scolarité obligatoire à temps plein ou à temps partiel dans la plupart des pays.

Le programme PISA ne se fonde pas directement sur les programmes scolaires nationaux et ne vise pas à analyser le rendement spécifique de l'enseignement secondaire à un moment précis du parcours scolaire. PISA se place dans une vision plus large et plus « citoyenne » : l'objectif est d'évaluer des compétences essentielles pour la vie future des jeunes. Les épreuves portent donc sur l'utilisation d'un bagage de mathématiques, de lecture et de sciences, bagage nécessaire à tout citoyen pour comprendre en profondeur et résoudre des situations qu'un adulte peut rencontrer dans sa vie privée, publique ou professionnelle.

Au printemps 2003, 30 pays membres de l'OCDÉ et 11 pays partenaires ont pris part à la campagne d'évaluation. En Belgique, les trois Communautés y ont participé. Chaque pays teste un échantillon représentatif d'élèves de 15 ans (minimum 150 écoles et 5000 élèves par pays). Pour assurer la neutralité de cette opération, les échantillons sont tirés en dehors du pays. Le programme PISA met en place nombreuses autres mesures visant à assurer la qualité du dispositif : vérification internationale des traductions nationales des tests, harmonisation et contrôles des procédures d'administration des évaluations, correction des épreuves par des spécialistes formés, évaluation de la fidélité des correction sur un plan international, etc. Toujours dans un souci de rigueur, un prétest de grande ampleur est organisé avant la mise en place de l'épreuve définitive, ce qui permet notamment de sélectionner les questions les plus pertinentes. À titre indicatif, 225 items ont été prétestés pour l'épreuve de mathématiques et 85 d'entre eux ont été choisis pour l'épreuve définitive. Tous les élèves des pays participants passent des épreuves identiques traduites dans les différentes langues. Les questions sont présentées sous divers formats : un tiers de questions à choix multiple, un tiers de questions ouvertes à réponse brève et un tiers de questions ouvertes à réponse construite. L'évaluation proprement dite dure environ 2 heures ; elle est complétée par des questionnaires contextuels qui sont soumis aux élèves et aux chefs d'établissement. Ces informations aident à comprendre et à relativiser les performances entre les pays, ainsi qu'à l'intérieur des différents systèmes éducatifs (contexte socioéconomique, motivation pour l'école en général et pour le domaine évalué, climat de l'école, organisation du système et des établissements scolaires, etc.).

En Communauté française de Belgique, 2940 élèves de 15 ans issus de 103 établissements ont passé l'épreuve (2). Dans l'échantillon, les différents réseaux sont représentés dans des proportions équivalentes à celles qu'ils occupent dans l'ensemble de la population scolaire en Communauté française. Il en va de même en ce qui concerne la représentativité de l'enseignement spécialisé. De plus, l'échantillon comporte des écoles de tailles différentes, de manière à représenter tant les petits que les gros établissements. Le schéma suivant présente l'échantillon de la Communauté française : la diversité des parcours (retards scolaires et filières d'enseignement différenciées) est un paramètre dont il faut tenir compte lors de l'interprétation des résultats (voir section 3).

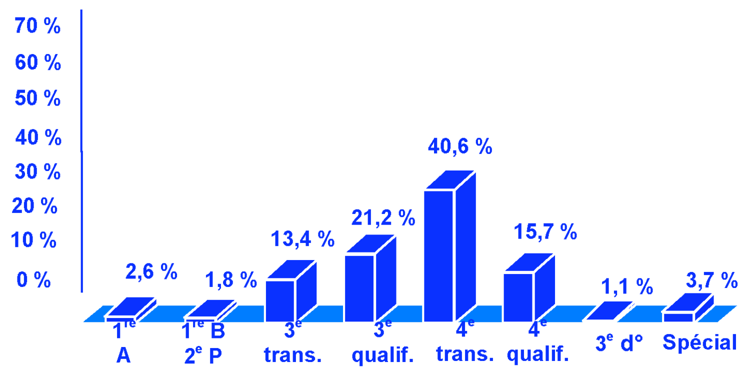


Fig. 1 – Pourcentages d'élèves testés par année et filière d'études fréquentées en Communauté française (3)

(2) Bien que le minimum d'écoles participantes soit fixé à 150, la Belgique a soumis l'épreuve à plus de 250 écoles : environ 150 écoles en Communauté flamande, 103 en Communauté française et 12 en Communauté germanophone (c'est-à-dire toutes les écoles de cette communauté). Ce sur-échantillonnage est nécessaire pour pouvoir obtenir des données représentatives de chaque communauté belge.

(3) Les élèves du deuxième degré de l'enseignement secondaire (qui sont majoritaires dans l'enquête) ont été répartis en deux filières. La *filière de transition* regroupe les élèves de l'*enseignement général* et de l'*enseignement technique et artistique de transition*. Ce choix se justifie dans la mesure où les programmes d'études sont sensiblement les mêmes dans ces types de formation et parce que les élèves y sont soumise au même référentiel de compétences terminales. La *filière qualifiante* regroupe les élèves de l'*enseignement technique et artistique de qualification* et ceux de l'*enseignement professionnel*, soumis tous deux au même référentiel de compétences terminales.

2. PISA 2003 : Les mathématiques au cœur de l'évaluation

Avant d'analyser plus précisément quelques résultats concernant l'enquête de 2003 où les mathématiques étaient mises à l'honneur, il est essentiel de décrire les choix qui ont été réalisés par les concepteurs des épreuves quant aux facettes des compétences mathématiques mises en lumière à travers cette évaluation (voir [6] pour une présentation détaillée de la culture mathématique).

2.1. La culture mathématique au centre des préoccupations

Le programme PISA ne s'intéresse pas en priorité à des compétences susceptibles d'être maîtrisées à une étape clé de la scolarité, comme le proposent les évaluations externes inter-réseaux, par exemple. PISA ne porte pas non plus sur des défis mathématiques peu familiers aux élèves, voire inédits, à l'instar des olympiades mathématiques. La vision développée par le programme est plus prospective : il s'agit de voir dans quelle mesure les jeunes de 15 ans parviennent à se servir d'un bagage mathématique qu'ils ont acquis au cours de leur scolarité pour résoudre des problèmes variés. C'est donc bien une certaine culture mathématique qui est au cœur des préoccupations. Le programme PISA définit cette culture comme « l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de la vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi » [15, p. 27]. Elle implique la capacité des élèves à analyser, raisonner et communiquer de manière efficace lorsqu'ils posent, résolvent et interprètent des problèmes mathématiques dans une variété de situations impliquant des quantités, des concepts spatiaux, probabilistes ou autres.

2.2. La culture mathématique et l'enseignement des mathématiques en Communauté française : deux mondes à part ?

Développer, au travers du cours de mathématiques, des compétences citoyennes est un objectif qui ressort également des référentiels de compétences en Communauté française, comme l'illustrent les deux extraits suivants :

> La formation mathématique s'élabore au départ d'objets, de situations vécues et observées dans le réel, de questions à propos de faits mathématiques (...).
> C'est par la résolution de problèmes que l'élève développe des aptitudes mathématiques, acquiert des connaissances profondes, ... [13, p. 23].

> Une formation mathématique réaliste et équilibrée (...) contribue à asseoir des compétences nécessaires au citoyen pour traiter, par exemple, les questions ordinaires de consommation, les systèmes électoraux, les sondages et enquêtes d'opinions, les jeux de hasard, la lecture de plans et de cartes, les représentations en perspectives, etc. [12, p. 8].

Des divergences apparaissent cependant entre les deux approches. Dans l'enseignement de transition (général, technique et artistique), il est clair que le cours de mathématiques ne s'attache pas uniquement à la résolution de problèmes proches de la vie réelle. Une partie essentielle du programme est également consacrée à des mathématiques plus « abstraites » (algèbre, géométrie, trigonométrie, ...) où des approches de résolution de problèmes assez différentes de celles évaluées ici peuvent être mises en œuvre (comme par exemple, résoudre des problèmes de généralisation en algèbre). Dans l'enseignement qualifiant (technique, artistique ou professionnelle), une place plus grande est accordée aux mathématiques plus concrètes. Celles-ci peuvent alors prendre deux versants complémentaires : la résolution de problèmes relevant de la vie courante (démarche essentielle à tout citoyen — en accord avec la notion de culture mathématique prônée dans PISA) et la résolution de problèmes présentant un lien plus direct avec les spécificités des professions auxquelles les élèves se préparent.

3. Quelques résultats

Les analyses présentées ici portent uniquement sur les mathématiques (voir [2] et [3] pour des résultats portant sur l'ensemble de la campagne 2003 ([4])). Quatre axes sont proposés : le premier porte sur les comparaisons internationales au départ des scores moyens attribués aux différents pays participants, le deuxième s'intéresse à la présentation des différents niveaux de performance de l'échelle de mathématiques ainsi qu'à la répartition des élèves sur cette échelle ; le troisième pointe les différences de résultats en fonction du sexe et enfin, le dernier axe met en évidence le côté particulièrement inéquitable du système scolaire en Communauté(s) française (et flamande) de Belgique.

3.1. Comment peut-on situer les résultats de la Communauté française sur l'échelle internationale ?

En mathématiques, le score moyen de la Communauté française de Belgique est très proche de la moyenne des pays de l'OCDÉ (500). Dans le tableau 1, les résultats sont présentés en trois groupes de pays. Dans chaque case du tableau, les pays sont classés par ordre décroissant au niveau de leur score moyen. Il convient d'être prudent quant aux comparaisons de ces scores moyens et se garder de se focaliser sur des rangs précis occupés par les pays sur l'échelle internationale. La présentation en trois groupes de pays s'avère plus rigoureuse qu'un palmarès qui, s'il paraît plus accrocheur aux yeux du grand public, n'est pas très solide sur un plan scientifique. En effet, les écarts de scores sont parfois trop faibles pour être significatifs : la constitution des groupes de pays présentés ci-dessous tient compte des différentes erreurs de mesure liées au fait que PISA teste des échantillons d'élèves, et non l'ensemble de la population scolaire d'un âge donné.

Les scores moyens des pays n'ont qu'un intérêt limité dans la mesure où ils masquent la diversité des résultats propres à chaque pays, comme notamment la répartition des élèves à l'intérieur des différents niveaux de compétences. Les analyses de l'échelle de mathématiques et des différents niveaux de compétences font l'objet du point suivant.

([4]) Voir aussi le numéro spécial des Cahiers du Service de Pédagogie expérimentale ([11]) pour une présentation plus exhaustive et détaillée de la campagne PISA 2003.

TAB. 1 – Scores moyens des pays participants à PISA 2003 en mathématiques (5) (6)

	Par rapport à la Communauté française, l'ensemble des pays présentés ci-dessous…			
	se distingue significativement (+)	ne se distingue pas significativement		se distingue significativement (−)
Mathématiques	C. flamande (553) *Hong Kong (550)* Finlande (544) Corée (542) Pays-Bas (538) *Lichtenstein (536)* Japon (534) Canada (532)	*Macao (527)* Suisse (527) Australie (524) Nlle Zélande (523) R. tchèque (516) Islande (515) C. germanophone (515) Danemark (514) France (511) Suède (509) Autriche (506) Allemagne (503) Irlande (503)	**OCDÉ(500)** C. française (498) R. slovaque (498) Norvège (495) Luxembourg (493) Pologne (490) Hongrie (490) Espagne (485) *Lettonie (483)* USA (483) *Russie (468)* Portugal (466) Italie (466)	Grèce (445) *Serbie & Monténégro (437)* Turquie (423) *Uruguay (422)* *Thaïlande (417)* Mexique (385) *Indonésie (360)* *Tunisie (359)* *Brésil (356)*

3.2. Les niveaux de performance sur l'échelle combinée de mathématiques

Le modèle statistique (modèle IRT) utilisé par PISA permet de positionner les questions et les élèves sur une même échelle de compétences. Chaque échelle est constituée de plusieurs niveaux de compétences (six pour l'échelle combinée de mathématiques) qui correspondent à des niveaux de performance hiérarchisés ou, autrement dit, à un ensemble de tâches de complexité croissante. Chaque élève ayant participé à l'évaluation de PISA 2003 a été positionné à un niveau de l'échelle en fonction de son niveau de performance, estimé grâce au modèle statistique sur base des réponses qu'il a fournies à l'ensemble des questions qui lui ont été soumises. Un élève situé

(5) Les pays indiqués en italique sont des pays qui n'appartiennent pas à l'OCDÉ (pays partenaires).

(6) La comparaison simultanée des performances moyennes de plusieurs pays implique l'utilisation du coefficient de Bonferroni dans les analyses, ce qui augmente l'intervalle de confiance autour des moyennes et réduit le nombre de différences statistiquement significatives par rapport à des comparaisons pairées entre pays. Le recours au coefficient de Bonferroni garantit que, dans cette comparaison multiple, les différences seront pointées comme significatives s'il y a moins de cinq chances sur cent pour que la différence observée soit due au hasard ($p < 0{,}05$).

à un niveau donné a une probabilité de réussir 50 % des questions se situant à ce niveau de l'échelle. Plus précisément, on peut considérer qu'un élève situé au niveau 2, par exemple, est capable de réussir au minimum 50 % des questions situées à ce niveau ; il a une probabilité supérieure à 50 % de réussir les questions situées au niveau 1 et une probabilité inférieure à 50 % de réussir celles situées aux niveaux 3, 4, 5 et 6.

Aux niveaux les plus élémentaires de l'échelle (niveaux 1 et 2), les problèmes sont proposés dans des contextes familiers, ils demandent des interprétations limitées de la situation et visent l'application de procédures élémentaires. Aux niveaux intermédiaires (niveaux 3 et 4), les contextes sont un peu moins familiers, les tâches nécessitent la mise en relation de diverses représentations, le développement de raisonnements impliquant plusieurs étapes et/ou la communication de ce raisonnement. Aux niveaux les plus élevés de l'échelle (niveaux 5 et 6), les problèmes se complexifient encore, faisant appel à des contextes de moins en moins familiers et faisant intervenir de plus en plus d'éléments. Les niveaux élevés se distinguent également par la créativité nécessaire dans les raisonnements et par la nécessité de développer des argumentations. Pour une description plus détaillée des différents niveaux de l'échelle et pour des exemples de questions s'y rapportant, nous invitons le lecteur à consulter le document édité par le Ministère de la Communauté française, Service général du pilotage du système éducatif [6].

Le tableau 2 présente la répartition des élèves entre les différents niveaux de l'échelle combinée de mathématiques de manière globale pour notre Communauté ainsi qu'en fonction de l'année d'études et de la filière d'enseignement fréquentées ([7]).

Un premier examen de la répartition des élèves entre les différents niveaux, toutes années et filières confondues, fait apparaître une dispersion importante des compétences des jeunes de 15 ans. En Communauté française, une minorité d'élèves (16 %) sont capables de performances complexes ; 61 % des élèves sont à des niveaux intermédiaires et 23 % des élèves ne dépassent pas un niveau « élémentaire ». Cette répartition est proche de ce que l'on observe en moyenne dans les pays de l'OCDÉ : 15 % aux niveaux supérieurs, 64 % dans les niveaux intermédiaires et 21 % aux niveaux élémentaires.

([7]) Seuls les niveaux des élèves fréquentant le deuxième degré de l'enseignement secondaire sont présentés ici ; ceux des premier et troisième degrés (ainsi que les élèves de l'enseignement spécialisé) sont en effet trop peu nombreux pour permettre ce type d'analyse.

Tab. 2 – Répartition des élèves sur les niveaux de l'échelle combinée en mathématiques

	Pourcentage d'élèves situés à chacun des niveaux				
	Toutes années & filières confondues	Filière qualifiante		Filière de transition	
		3e année	4e année	3e année	4e année
Niveau 6	4 %	—	—	1 %	10 %
Niveau 5	12 %	—	4 %	6 %	24 %
Niveau 4	19 %	4 %	13 %	20 %	32 %
Niveau 3	22 %	16 %	26 %	35 %	23 %
Niveau 2	20 %	30 %	35 %	26 %	9 %
Niveau 1	13 %	31 %	17 %	10 %	2 %
Sous le niveau 1	10 %	19 %	5 %	2 %	—

Une analyse plus détaillée montre qu'une hiérarchie nette se dégage entre les filières d'enseignement et, au sein de chaque filière, entre les années d'étude. Les élèves de la filière qualifiante se trouvent en grande difficulté face aux problèmes proposés : le niveau de « culture mathématique » d'un nombre beaucoup trop important d'entre eux est réellement préoccupant ! Près de 50 % des élèves de 3e année et plus de 20 % des élèves de 4e n'atteignent pas le niveau 2, considéré comme élémentaire. Les constats sont plus rassurants dans la filière de transition où les élèves sont nettement moins nombreux à se situer sous ce seuil de base en 3e année (environ 10 %) et où l'on ne trouve pratiquement plus aucun élève dans cette situation en 4e (moins de 2 %). En 4e année, une proportion non négligeable atteint même des performances d'un niveau élevé (34 % des élèves sont situés aux niveaux 5 et 6).

3.3. Les différences entre les filles et les garçons

Dans la plupart des pays, les garçons obtiennent de meilleures performances que les filles en mathématiques. L'écart moyen pour les pays de l'OCDÉ est de 11 points, mais varie considérablement d'un pays à l'autre (jusqu'à 23 points en faveur des garçons pour la Corée ([8])). L'Islande est le seul pays de l'OCDÉ où l'avantage est en faveur des filles. Dans tous les autres pays de l'OCDÉ, les différences sont en faveur des garçons et sont significatives dans 23 des 29 pays concernés. Cette différence en faveur des garçons ne se retrouve pas en Communauté française de Belgique, comme l'indique le graphique de la figure 2.

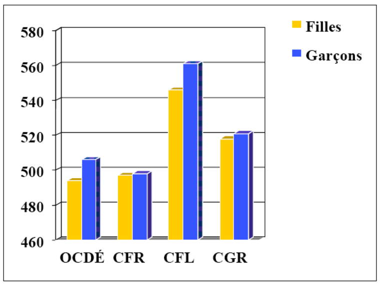


Fig. 2 – Les différences filles / garçons au niveau du score global en mathématiques

Pourquoi la Communauté française ne présente-t-elle pas de différence significative en faveur des garçons ? La question peut surprendre : pourquoi s'inquiéter d'une égalité d'acquis entre les sexes alors que c'est un résultat que l'on pourrait attendre en terme d'équité ? Une autre question surgit d'emblée : faut-il se réjouir de la performance des filles ou s'inquiéter à l'inverse de la contre-performance des garçons ?

Lorsque l'on examine les résultats de PISA, il faut être attentif aux principes théoriques qui ont guidé la conception de l'outil d'évaluation. Tout d'abord, PISA a choisi d'évaluer les mathématiques dans un contexte de résolution de problèmes ancrés dans la vie réelle. Pour résoudre des problèmes, la lecture intervient indéniablement dans la construction d'une représentation de la situation (d'un modèle de situation). La construction d'une représentation adéquate est essentielle pour construire un modèle mathématique approprié et pour mobiliser les outils mathématiques adéquats à la résolution du problème. De plus, les questions ouvertes sont plus nombreuses dans PISA que dans d'autres enquêtes internationales. Or, dans le domaine de la lecture, les garçons présentent des performances plus

([8]) Les extrêmes mentionnés ici concernent les pays de l'OCDÉ. L'écart en faveur des garçons est également très important dans deux pays partenaires : le Liechtenstein où l'on note une différence de 29 points (presque un demi-niveau de l'échelle combinée de mathématiques) et Macao (Chine) où l'on note une différence de 21 points.

faibles que les filles dans la plupart des pays de l'OCDÉ, et ceci est particulièrement marqué en Communauté française.

Pour interpréter les différences entre les filles et les garçons, il convient aussi de prendre en considération les différences de parcours scolaire des élèves : les garçons sont plus nombreux que les filles dans les filières d'enseignement professionnel, ils sont moins nombreux dans le général, plus nombreux dans le spécialisé, plus nombreux à être en situation de redoublement, ...

Complémentairement au graphique présenté ci-avant, qui se base sur une comparaison des scores moyens en fonction du sexe, il est intéressant d'observer la répartition des élèves sur les différents niveaux de l'échelle combinée de mathématique. C'est ce que nous proposons dans le graphique suivant :

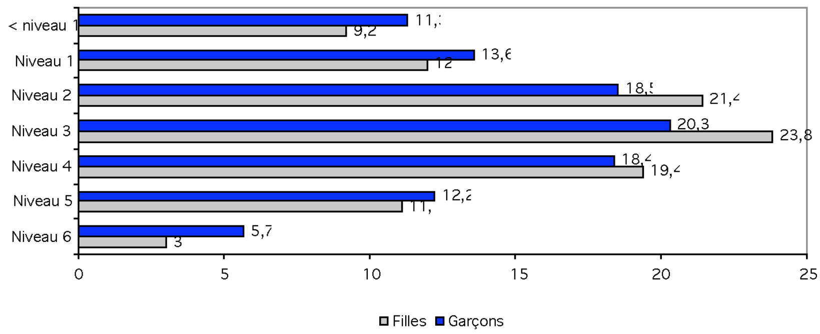


FIG. 3 – Répartition des filles et des garçons sur les différents niveaux de l'échelle combinée de mathématiques en Communauté française de Belgique

L'analyse de la répartition des filles et des garçons à différents niveaux de compétences indique que les garçons sont un peu plus nombreux aux niveaux faibles (niveaux 1 et en dessous) ainsi qu'aux niveaux supérieurs (niveaux 5 et 6). Les garçons présentent donc un profil plus contrasté que les filles du même âge, davantage représentées dans les niveaux intermédiaires.

3.4. L'équité (ou plutôt l'inéquité) du système éducatif

La réduction des différences liées à l'origine socioéconomique est l'un des défis majeurs qu'ont à relever les systèmes éducatifs. Dans tous les pays, les élèves issus de milieux plus aisés obtiennent de meilleures performances, mais le fossé entre les mieux et les moins bien nantis varie considérablement d'un pays à l'autre.

Le tableau suivant illustre de façon synthétique le risque qu'encourent certaines catégories d'élèves de 15 ans de se retrouver parmi les élèves en grande difficulté face aux mathématiques. Les différentes variables analysées dans les pages qui précèdent sont reprises dans le tableau, tout en étant complétées par quelques variables supplémentaires.

TAB. 3 – Estimation du risque de se retrouver parmi le quart d'élèves dont les performances en mathématiques sont les plus faibles en fonction des caractéristiques des élèves et de leur environnement familial

Catégories d'élèves	Moyenne OCDÉ	Comm. française	Comm. flamande	Comm. germanophone
Elèves non natifs	1,6	2,5	2,4	1,7
Élèves ne parlant pas habituellement une des langues nationales à la maison	1,6	2,2	3,2	1,0
Élèves issus des 25 % de familles les moins favorisées sur le plan du statut socioprofessionnel des parents	2,2	2,3	2,7	2,3
Élèves issus des 25 % des familles les moins favorisées sur le plan socioéconomique et culturel (variable groupée) (9)	2,7	3,1	3,0	2,1

Le tableau parle de lui-même : les Communautés française et flamande de Belgique s'avèrent plus inégalitaires que la moyenne OCDÉ pour toutes les variables envisagées. La Communauté germanophone présente un profil plus contrasté, se montrant tantôt plus, tantôt moins inégalitaire que la moyenne des pays de l'OCDÉ. Autrement dit, si la Communauté flamande obtient des résultats significativement plus élevés que ceux de la Communauté française, toutes deux obtiennent une « mauvaise note » en ce qui concerne le caractère inéquitable de l'enseignement. Ce constat est grandement préoccupant ! Les conclusions tirées suite à PISA 2000 sont malheureusement encore valables :

(9) Cette variable groupée reprend le statut socioprofessionnel des parents, le niveau d'éducation des parents, les ressources éducatives disponibles à la maison et le nombre de livres.

> Une des faiblesses caractéristiques de notre système serait son impuissance à effacer les difficultés auxquelles doivent faire face les familles vulnérables ou, en d'autres termes, à compenser les inégalités sociales de départ. Dit schématiquement, les élèves issus de milieux familiaux où le soutien par rapport à l'école peut s'organiser, compte tenu des ressources de ce milieu (économiques, éducatives, linguistiques, ...), s'en sortent assez bien dans notre système. En revanche, ceux, plus « vulnérables », ne disposant pas de ces ressources dans leur entourage familial, semblent en subir, plus que dans d'autres systèmes éducatifs, les conséquences négatives [10, p. 93].

Peut-on concilier efficacité et équité ? Le graphique suivant (Fig. 4) présente la situation contrastée de quelques pays en termes d'efficacité (définie en fonction des performances moyennes en mathématiques) et d'équité (définie en fonction de la part de la variation des résultats en fonction de facteurs socioéconomiques).

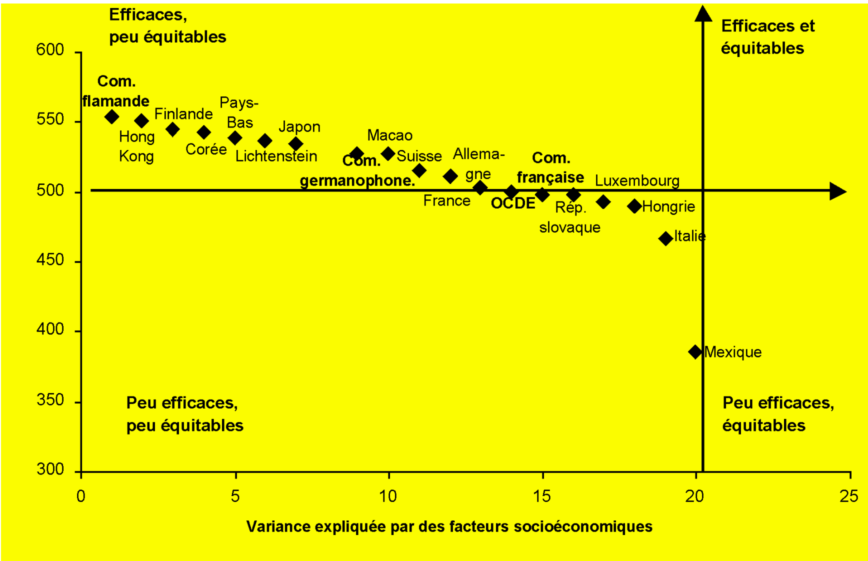


FIG. 4 – Lien entre efficacité et équité

Les exemples de l'Australie, du Canada, de la Finlande, de Hong Kong, de l'Islande et du Japon montrent qu'il est tout à fait possible de concilier efficacité et équité : ces systèmes éducatifs combinent des performances moyennes supérieures à la moyenne OCDÉ et un moindre impact des facteurs socioéconomiques sur les résultats des élèves. Par contraste, des pays comme la Belgique, l'Allemagne, la République slovaque et la Hongrie se révèlent très inéquitables. La France, la Suisse, la Pologne sont aussi efficaces —voire davantage— que la Communauté française, mais sont sensiblement plus équitables. Il est donc possible de se montrer plus équitable sans rien perdre en efficacité. C'est l'un des enseignements majeurs de PISA.

4. Quelques pistes à poursuivre suite aux premiers résultats de PISA 2003

Suite à ces premiers constats, quels prolongements pourraient être apportés à cette vaste enquête sur les mathématiques ? En guise de conclusion, nous esquissons différentes pistes de prolongement.

Un premier champ d'exploration pourrait tenter de mieux comprendre ce qui distingue la Communauté française des pays les plus performants : comment ces performances peuvent-elles s'expliquer et quelle sont les particularités de ces systèmes éducatifs ? En ce qui nous concerne, la comparaison avec la Communauté flamande suscite un réel intérêt : en effet, ce système éducatif dispose de structures d'enseignement ayant des caractéristiques communes avec notre Communauté (organisation de filières dès le début du secondaire et taux de redoublement important notamment). Il serait utile de mieux comprendre ce phénomène : pourquoi les scores en mathématiques sont-ils si contrastés ? En plus d'essayer de comprendre ces différences d'un point de vue socioéconomique et socioculturel, diverses analyses pourraient porter plus directement sur des questions didactiques : la comparaison des programmes d'enseignement, l'influence de courants didactiques visant à développer des approches plus réalistes des mathématiques (voir les travaux menés à la KUL, [16] ; voir aussi l'influence de la « Realistic Mathematics Education », développée aux Pays-Bas, [9]).

L'objectif de cette exploration est avant tout de mieux comprendre les écarts de performances. Il serait cependant périlleux de vouloir implanter directement, dans notre système éducatif, des pratiques qui paraissent particulièrement efficaces ailleurs. De telles attitudes risquent en effet de sous-estimer les aspects systémiques et culturels liés aux différents systèmes éducatifs.

Un deuxième volet de recherche pourrait s'intéresser à l'impact de la lecture sur les résultats en mathématiques. En effet, les questions posées dans le cadre du programme PISA présentent souvent une facette « lecture » non négligeable : l'amorce même de la question amène le jeune à se plonger dans un contexte réaliste avant d'envisager des aspects plus directement liés aux mathématiques. Dans quelle mesure cette dimension influence-t-elle les résultats en mathématiques ? Les faibles performances en mathématiques des élèves situés dans les niveaux les plus bas de l'échelle sont-elles le reflet d'une maîtrise trop partielle de compétences mathématiques fondamentales ou s'expliquent-elle principalement par des difficultés en compréhension de l'écrit ?

Une autre piste, actuellement investiguée, se centre sur les difficultés des élèves « à risques », qui, en Communauté française de Belgique se trouvent principalement en troisième année de l'enseignement professionnel. Comment expliquer ces résultats si faibles ? Sont-ils moins motivés que les autres ? Abandonnent-ils directement ? Sont-ils si peu familiers à une évaluation centrée sur la résolution de problèmes qu'ils en perdent véritablement leurs moyens ? Plusieurs indices nous amènent à penser que ces jeunes ont des lacunes importantes à combler dans le domaine des mathématiques.

- Une épreuve externe interréseaux, centrée sur les programmes d'études de ces jeunes, a été menée en octobre 2004. Les constats obtenus dans cette enquête corroborent tout à fait les constats de PISA : ils montrent de façon très claire des lacunes importantes tant au niveau de la maîtrise de techniques mathématiques que de la résolution de problèmes ([10]).
- Des interviews approfondies, réalisées autour de questions particulièrement mal réussies issues de ces deux enquêtes (voir [5], pour plus d'informations), montrent que les faibles taux de réussite ne s'expliquent pas uniquement par une rupture de contrat entre ce qu'ils ont l'habitude de faire en classe et ce type d'évaluation : lorsqu'on les accompagne en leur apportant des soutiens aux différentes étapes de la démarche, on constate non seulement des difficultés qui s'expriment à tous les niveaux (modélisation mathématique du problème, mobilisation d'une technique mathématique, interprétation de la solution) mais aussi des possibilités de progressions lorsqu'un soutien spécifique, en cours de réflexion, leur est apporté.

Dans le but de proposer des outils pédagogiques aux enseignants de ces sections professionnelles, une recherche actuellement en cours et commanditée par le Ministère de la Communauté française (réseau Communauté

([10]) Plus d'informations concernant cette épreuve externe interréseaux et ses principaux résultats, peuvent être obtenues à l'adresse suivante :
`http://www.enseignement.be/@librairie/documents/EVAL/EXT/200410_3S/`

française) réunit chercheurs et enseignants de ces sections autour d'une préoccupation commune : élaborer et essayer dans les classes des situations d'apprentissages d'une véritable démarche de résolution de problèmes. Il s'agit d'amener ces jeunes à disposer d'outils pour mieux se représenter les problèmes et mobiliser ainsi de façon plus judicieuse les contenus mathématiques élémentaires. L'apprentissage est ici axé sur des situations proches de leur option professionnelle (service aux personnes, électricité, travaux de bureau, mécanique, ...) ou des situations qu'ils pourraient rencontrer dans leur vie de citoyen (analyse plus éclairée de la publicité, organisation d'un déplacement, gestion d'un budget, analyse de cartes et de plans, ...). À terme, cette recherche-action poursuit l'objectif de proposer un outil didactique, à l'usage des enseignants de mathématiques de ces sections, proposant un large panel de situations d'apprentissages exploitables dans ces classes.

Bibliographie

[1] Baye, A., Demonty, I., Fagnant, A., Matoul, A., Monseur, C. - Coordination : D. Lafontaine, *PISA 2003 : quels défis pour notre système éducatif*, `http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/A007/index.asp`, 2004.

[2] Baye, A., Demonty, I., Fagnant, A., Matoul, A., Monseur, C. - Coordination : D. Lafontaine, PISA 2003 : au-delà des moyennes, des constats qui forcent à l'action. *Les infos de l'Agers - Tables rondes*, **1**, 2–5, 2005.

[3] Baye, A., Demonty, I., Fagnant, A., Matoul, A., Monseur, C. - Coordination : D. Lafontaine, Les résultats de PISA 2003 en Communauté française : tout ne va pas mal ... mais des changements s'imposent. *Éduquer. Tribune Laïque*, **50**, 4–6, 2005.

[4] Blondin, C. & Lafontaine, D., Les profils des filles et des garçons en sciences et en mathématiques. Un éclairage basé sur les études internationales. In : M. Demeuse, A. Baye, M. H. Straeten, J. Nicaise & A. Matoul (Éds.). *Vers une école juste et efficace. 26 contributions sur les systèmes d'enseignement et de formation* (pp. 317–336). Bruxelles : De Boeck, 2005.

[5] Demonty, I., Le dispositif d'appréciation dynamique : un outil pour mieux comprendre les difficultés des élèves de l'enseignement profes-

sionnel en résolution de problèmes mathématiques. *Actes du colloque de l'Adméé-Europe. Comment évaluer ? Outils, dispositifs et acteurs.* Reims, du 24 au 26 octobre 2005.

[6] Demonty, I. & Fagnant, A., PISA 2003. *Évaluation de la culture mathématique des jeunes de 15 ans.* Document à l'attention des professeurs de mathématiques des 1er et 2e degrés de l'enseignement secondaire. Ministère de la Communauté française. Service général du pilotage du système éducatif.
`http://www.enseignement.be/@librairie/documents/eval/inter/PISA2003`

[7] Demonty, I. & Fagnant, A., *PISA 2003, et après ? Quelques réflexions sur la diffusion des résultats et sur les suites à y apporter en Communauté française de Belgique.* Revue du Comité Scientifique des IREM (à paraître).

[8] Demonty, I., Vlassis,J. & Libon, C., *L' enseignement mathématique en 3e et 4e années de l'enseignement professionnel : premières approches de la résolution de problèmes au deuxième degré de l'enseignement professionnel.* Liège : Service de Pédagogie Expérimentale de l'Université, document non publié, 2005.

[9] Gravemeijer, K., Mediating between concrete and abstract. In : T. Nunes et P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 315-345). Hove, East Sussex : Psychology Press Ltd, 1997.

[10] Lafontaine, D., Baye, A., Burton, R., Demonty, I., Matoul, A. & Monseur Ch., Les compétences des jeunes de 15 ans en Communauté française en lecture, en mathématiques et en sciences. Résultats de l'enquête Pisa 2000. *Cahiers du Service de Pédagogie expérimentale*, **13**–**14**, 2003.

[11] Lafontaine, D., Baye, A., Demonty, I., Fagnant, A., Matoul, A. & Monseur, C., Les compétences des jeunes de 15 ans en Communauté française en lecture, en mathématiques et en sciences. Résultats de l'enquête PISA 2003. *Cahiers du Service de Pédagogie expérimentale*, (à paraître).

[12] Ministère de la Communauté française. Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques. Humanités générales et technologiques. Bruxelles : Ministère de la Communauté française, 1999.

[13] Ministère de la Communauté française. Socles de compétences. Formation mathématique. Enseignement fondamental et premier degré de

l'enseignement secondaire. Bruxelles : Ministère de la Communauté française, 1999.

[14] Ministère de la Communauté française. Évaluation externe en 3e année de l'enseignement secondaire. Mathématiques. http://www.enseignement.be/@librairie/documents/EVAL/EXT/200410_3S/, 2004.

[15] OCDÉ, Cadre d'évaluation de PISA 2003 — Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, sciences, résolution de problèmes. Paris : OCDÉ, 2003.

[16] Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E., *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands : Swets & Zeitlinger, 2000.

Cabri-Géomètre et les paraboles

JEAN-PAUL HOUBEN
Université Catholique de Louvain

Mots-clés : Cabri-Géomètre, Parabole.

Dans un article précédent on s'était interessé à l'ellipse. Dans celui-ci, c'est au tour de la parabole. Celle-ci est le lieu des points équidistants d'une droite (la directrice) et d'un point (le foyer).

Construction de la parabole

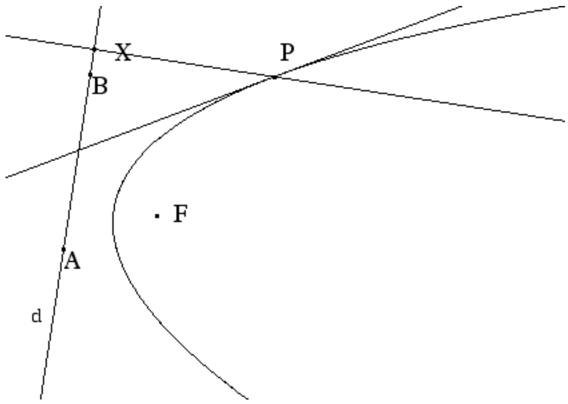
On va construire la parabole en utilisant directement la définition.

Sur la directrice d, définie par les points A et B, on prend un point variable X (1). En ce point X, on trace la perpendiculaire (2) à la directrice d. On termine en construisant la médiatrice de XF (3). La parabole est alors le lieu des points P d'intersection de la perpendiculaire et de la médiatrice (4) lorsque le point X parcourt la directrice d.

En effet, puisqu'on a une médiatrice de XF en P, $\mid PX \mid = \mid PF \mid$.

Adresse de l'auteur : Jean-Paul Houben, Rue de l'Église 78, 1301 Bierges ; courriel : `houbenjp@versateladsl.be`.

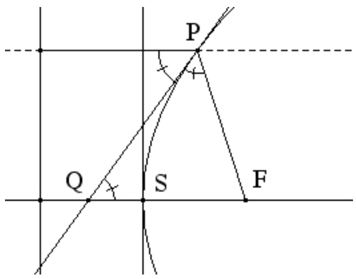
(1) **Point**/ *Point sur objet*
(2) **Construction**/ *Perpendiculaire*
(3) **Construction**/ *Médiatrice*
(4) **Construction**/ *Lieu*



Propriété de la tangente

Remarquons en passant que la médiatrice est la tangente en P à la parabole. En effet, on peut démonter que :

La tangente est bissectrice de l'angle formé par la perpendiculaire à la directrice (d) et le rayon focal (FP).



Démontrons cette propriété.

Prenons comme système d'axes l'axe de symétrie de la parabole et la tangente au sommet S.

Nous avons alors :

la parabole d'équation : $y^2 = 2px$,
la directrice d'équation $x + \frac{p}{2} = 0$,
un point de coordonnées $P(\alpha, \beta)$ de la parabole.

On a immédiatement puisque P est un point d'une parabole (distances égales entre le foyer et la directrice) :

$$FP = \left|\alpha + \frac{p}{2}\right|.$$

D'autre part, la tangente en P a pour équation $\beta y = p(x+\alpha)$ et coupe l'axe de symétrie pris pour axe des x en Q d'abscisse $x = -\alpha$.

Ainsi $QF = QS + SF = \alpha + \frac{p}{2}$ et le triangle PQF est isocèle. Les angles en P et en Q sont égaux.

Maintenant, la perpendiculaire à la directrice est parallèle à l'axe de symétrie et donne des angles alternes internes égaux avec PQ.

Les angles en P sont égaux puisque égaux à l'angle en Q.

La propriété est donc établie et va servir à la construction de la tangente.

La macro et l'objet parabole

Mais, comme pour l'ellipse, la parabole obtenue comme un lieu ne peut pas servir pour des constructions ultérieures. Il faut en déterminer cinq points particuliers et utiliser l'outil « Conique » pour avoir un objet utilisable ([5]).

Comme il faut refaire cinq fois la même construction, il peut être utile de préparer une macro. Celle-ci devrait permettre d'obtenir un point à partir de la donnée du foyer, de la directrice et d'un point quelconque de la directrice.

Il suffit de reprendre la construction d'un point d'une parabole connaissant le foyer et la directrice.

Ensuite prendre comme éléments initiaux : le foyer F, la directrice d, un point X de la directrice d.

Avec comme élément final : P

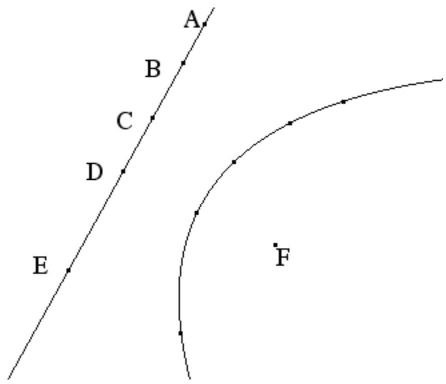
Nom de la macro : Point de la parabole.

Nom de l'enregistrement : pt_par.

Aide : Donnez le foyer, la directrice puis un point de celle-ci.

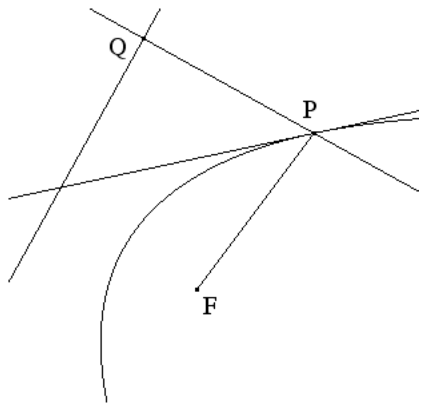
En utilisant cinq fois cette macro, nous pouvons construire la parabole avec l'outil conique.

([5]) Dans la dernière version de Cabri-Géomètre un lieu est un objet.

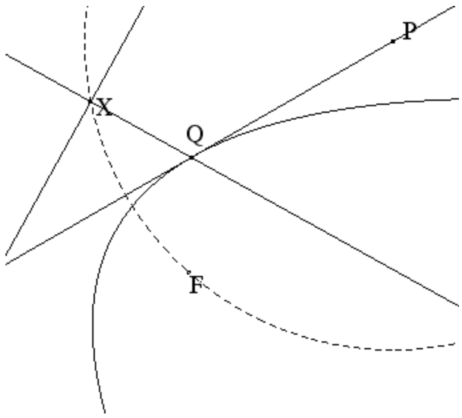


Construction d'une tangente issue du point P

Si le point P est sur la parabole, nous avons directement la tangente. C'est la bissectrice de l'angle formé par le rayon focal FP et la perpendiculaire à la directrice issue de P.



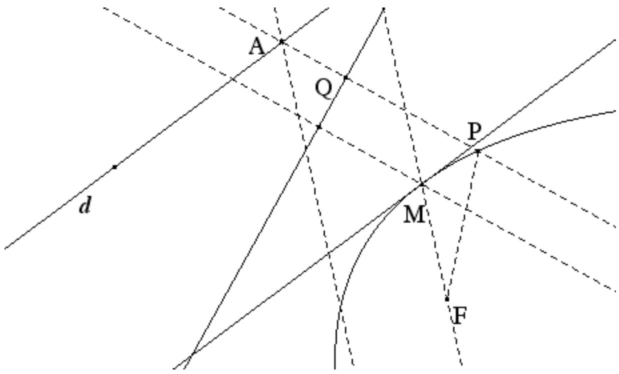
Si le point P est un point quelconque, imaginons le problème résolu. Le point P est sur la médiatrice de FX où X est le point de la directrice qui donne par construction le point de contact de la tangente avec la parabole. Traçons le cercle de centre P passant par F. Le point d'intersection de ce cercle avec la directrice donne le point X. La tangente est la médiatrice de XF.



Construction d'une tangente parallèle à une direction

Si l'on se donne une droite d et qu'il faille construire une tangente parallèle à cette droite, il faut penser que cette tangente est la bissectrice de l'angle formé par la perpendiculaire à la directrice menée par le point de contact (inconnu) et le rayon focal.

Soit la parabole déterminée par le lieu de P lorsque Q parcourt la directrice. Recherchons l'intersection A de la directrice d avec la droite PQ. L'image de la droite PQ pour la symétrie d'axe d donne la direction du rayon vecteur. Il suffit par F de tracer la parallèle à cette image pour trouver le point de contact M de la tangente recherchée.



Dans un prochain article, nous construirons l'hyperbole.

Problèmes

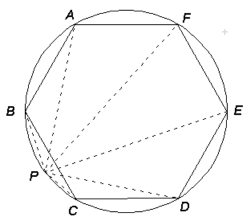
Claudine Festraets [1]

Hexagone inscrit

problème n° 307 de Mathématique et Pédagogie n° 151

Un hexagone régulier $ABCDEF$ est inscrit dans un cercle. Le point P étant situé sur le plus petit des arcs $\widehat{BC}$, démontrer que

$$|PE| + |PF| = |PA| + |PB| + |PC| + |PD|.$$



Solution de C. VILLERS de Hyon

Le quadrilatère $PAEC$ est inscrit. Donc, par le théorème de Ptolémée, $|PA| \cdot |CE| + |PC| \cdot |AE| = |AC| \cdot |PE|$. On a alors $|PA| + |PC| = |PE|$ (1) car $|CE| = |AE| = |EC|$ (triangle équilatéral).

Le quadrilatère $PBFD$ est inscrit. Donc, par le théorème de Ptolémée, $|PB| \cdot |FD| + |PD| \cdot |BF| = |PF| \cdot |BD|$. On a alors $|PB| + |PD| = |PF|$ (2) car $|FD| = |BF| = |BD|$ (triangle équilatéral).

En additionnant les égalités (1) et (2), on obtient la relation demandée.

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare, P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte (France), R. CHOULET de Avenay (France), J. FINOULST de Diepenbeek, J. OOMS de Chimay, A. PATERNOTTRE de Boussu, J. RASSE de Méan et M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles.

---

[1] Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

Factorielle et nombres premiers

problème n° 308 de Mathématique et Pédagogie n° 151

Le nombre naturel n est impair et strictement supérieur à 1. Démontrer que n et $n+2$ sont tous les deux premiers si et seulement si $(n-1)!$ n'est divisible ni par n ni par $n+2$.

Solution de P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte

Soit $n > 1$ un entier impair.

a) On va prouver que n est premier si et seulement si $(n-1)! \not\equiv 0 \pmod{n}$.

- Si n est premier, alors puisque n n'apparaît pas dans 1, 2, ..., $n-1$, cela assure que $(n-1)! \not\equiv 0 \pmod{n}$.
- Si n est composé, disons $n = ab$, avec $1 < a \leqslant b \leqslant n-1$, alors puisque n est impair, on a même $a \geqslant 3$ et donc $n = ab \geqslant 2b$, ce qui assure que $2b \leqslant n-1$.
  Par suite, les nombres a et $2b$ sont deux facteurs distincts dans le produit $1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) = (n-1)!$ et que $(n-1)!$ est divisible par $2ab$, c'est-à-dire par n.

b) On prouve maintenant que $n+2$ est premier si et seulement si $(n-1)! \not\equiv 0 \pmod{n+2}$.

- Si $n+2$ est premier, alors, comme ci-dessus, on déduit que $(n-1)! \not\equiv 0 \pmod{n+2}$.
- Si $n+2$ est composé, disons $n+2 = ab$ avec $1 < a \leqslant b \leqslant n-1$. Alors puisque $n+2$ est impair, on a même a, $b \geqslant 3$ et dans ces conditions, $n-1 = ab-3 \geqslant 3b-3 \geqslant 2b$. Et on conclut comme ci-dessus.

Finalement, de a) et b), on déduit que les nombres n et $n+2$ sont tous les deux premiers si et seulement si $(n-1)!$ n'est divisible ni par n, ni par $n+2$.

Ont envoyé de bonnes solutions J. ANSEEUW de Roeselare, R. CHOULET de Avenay et J. OOMS de Chimay. Certains lecteurs se sont approchés de la solution précédente, mais ne se sont pas aperçu que n et $n+2$ pouvaient très bien être des carrés parfaits.

Inégalités

problème n° 309 de Mathématique et Pédagogie n° 151

a, b et c sont des réels tels que $-1 \leqslant ax^2 + bx + c \leqslant 1$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Démontrer que $-4 \leqslant 2ax + b \leqslant 4$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Solution de P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $|f(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in [-1; 1]$, et on veut prouver que $|f'(x)| \leqslant 4$ pour tout $x \in [-1; 1]$.
On a $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$ et $f(-1) = a - b + c$.
Par suite $2a = f(1) + f(-1) - 2f(0)$ et $b = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)$.
Ainsi, pour tout $x \in [-1; 1]$,

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &= |(f(1) + f(-1) - 2f(0))x + \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)| \\
&= |f(1)(x + \frac{1}{2}) + f(-1)(x - \frac{1}{2}) - 2xf(0)| \\
&\leqslant |f(1)||x + \frac{1}{2}| + |f(-1)||x - \frac{1}{2}| + 2|x||f(0)| \\
&\leqslant |x + \frac{1}{2}| + |x - \frac{1}{2}| + 2|x| = S(x)
\end{aligned}$$

Or

- si $x \in [-1; -\frac{1}{2}]$, alors $S(x) = -4x$ et donc $2 \leqslant S(x) \leqslant 4$;
- si $x \in [-\frac{1}{2}; 0]$, alors $S(x) = -2x + 1$ et donc $1 \leqslant S(x) \leqslant 2$;
- si $x \in [0; \frac{1}{2}]$, alors $S(x) = 2x + 1$ et donc $1 \leqslant S(x) \leqslant 2$;
- si $x \in [\frac{1}{2}; 1]$, alors $S(x) = 4x$ et donc $2 \leqslant S(x) \leqslant 4$.

Par conséquent, on a bien $S(x) \leqslant 4$ pour tout $x \in [-1; 1]$, ce qui assure la conclusion demandée.

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare, J. FINOULST de Diepenbeek, J. OOMS de Chimay et J. RASSE de Méan.

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir pour le 15 mars 2 006 au plus tard. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier LaTeX ou à défaut au format doc ou txt.

316. Jeu d'échec

Sur un échiquier 7×7, on choisit k des centres des 49 cases de telle sorte que 4 des k points choisis ne soient jamais les sommets d'un rectangle de côtés parallèles aux bords de l'échiquier. Quelle est la plus grande valeur de k pour laquelle ceci est possible ?

317. Système

Dans $\mathbb{C}$, résoudre le système $\begin{cases} x = y + z \\ x = y^3 = z^3. \end{cases}$

318. Base b

Soient X et Y deux nombres entiers écrits en base b. Les chiffres de Y sont une permutation de ceux de X. Démontrer que $X - Y$ est divisible par $b - 1$.

Olympiades

Claudine Festraets [1]

La 46e Olympiade Internationale de Mathématique a eu lieu en juillet à Mérida (Mexique). François Gonze, élève de 5e année à l'Institut de la Providence à Wavre y a remporté une médaille de bronze. La Belgique se place à la 40e place sur 91 pays participants. Le meilleur résultat a été obtenu par la Chine (235/242) qui devance les Etats-Unis (213) et la Russie (212). Voici les énoncés des six problèmes proposés.

Premier jour (temps accordé : 4 heures et demie)

1. Six points sont choisis sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC : A_1, A_2 sur BC, B_1, B_2 sur CA et C_1, C_2 sur AB. Ces points sont les sommets d'un hexagone convexe $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ dont les côtés sont égaux. Montrer que les droites A_1B_2, B_1C_2 et C_1A_2 sont concourantes.
2. Soient a_1, a_2, ... une suite d'entiers ayant une infinité de termes strictement positifs et une infinité de termes strictement négatifs. On suppose que, pour chaque entier strictement positif n, les nombres a_1, a_2, ..., a_n ont n restes, deux à deux différents, après division par n. Montrer que chaque entier figure exactement une fois dans la suite.
3. Soit x, y et z des réels positifs tels que $xyz \geqslant 1$. Montrer que
$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0$$

Deuxième jour (temps accordé : 4 heures et demie)

4. On considère la suite a_1, a_2, ... définie par
$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \ (n = 1, 2, \dots)$$
Trouver tous les entiers strictement positifs qui sont premiers avec chaque terme de la suite.
5. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les côtés BC et AD sont égaux et non parallèles. Deux points E et F, respectivement intérieurs aux côtés BC et AD, vérifient $BE = DF$. Les droites AC et BD se coupent en P, les droites BD et EF se coupent en Q, les droites EF et AC se coupent en R. On considère tous les triangles PQR lorsque E et F varient. Montrer que les cercles circonscrits à ces triangles ont un point commun autre que P.

[1] Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

6. Dans un concours mathématique, 6 problèmes ont été proposés aux concurrents. Toute paire de problèmes a été résolue par strictement plus de deux cinquièmes des concurrents. Personne n'a résolu les six problèmes. Montrer qu'au moins deux concurrents ont résolu, chacun, exactement 5 problèmes.

Voici maintenant les solutions des quatre problèmes posés en Mini lors de la trentième Olympiade Mathématique Belge. Ces solutions ont été choisies parmi les meilleures proposées par les participants à la finale.

1. Déterminer tous les nombres premiers de quatre chiffres distincts ayant les trois propriétés suivantes :

(a) le nombre formé des deux premiers chiffres et le nombre formé des deux derniers chiffres sont premiers ;

(b) la somme des deux premiers chiffres vaut 10 et la somme des deux derniers chiffres vaut 10 ;

(c) le chiffre des unités et le chiffre des dizaines sont premiers.

Solution de Nicolas Radu, élève de 2e année à l'Athénée Ch. Rogier à Liège

Les nombres de deux chiffres dont la somme des chiffres est 10 sont 91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28 et 19.

Parmi ces nombres, ceux qui sont premiers sont 73, 37 et 19 (82, 64, 46 et 28 sont divisibles par 2, 55 est divisible par 5, 91 est divisible par 7, donc ils ne sont pas premiers).

Le nombre formé par les deux derniers chiffres peut être 73 ou 37 car le chiffre des dizaines et celui des unités doivent être premiers (dans 19, le 9 n'est pas premier).

Puisque le nombre à 4 chiffres doit avoir ses chiffres distincts, le nombre formé par ses deux premiers chiffres ne peut être ni 37, ni 73, donc il doit être 19.

Les nombres respectant les trois propriétés demandées sont donc 1 937 et 1 973. Mais seul le nombre 1 973 est premier (1 937 est divisible par 13). Il y a seul le nombre 1 973 qui respecte toutes les conditions de l'énoncé.

2. Un journal organise un sondage auprès de ses abonnés. Il détermine le sexe, l'état civil et la profession de 1 000 lecteurs et obtient les résultats suivants : 312 hommes, 470 personnes mariées, 525 étudiants ou étudiantes, 42 étudiants de sexe masculin, 147 étudiants ou étudiantes mariés, 86 hommes mariés et 25 étudiants de sexe masculin mariés. Mon copain affirme qu'il doit y avoir une erreur dans ces résultats. A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

Solution de Xiaoyu Lei, élève de 1$^{\text{re}}$ année à l'Athénée Léonie de Waha à Liège

Il y a en tout 1 000 lecteurs dont 312 sont des hommes. Alors il y a $1\,000 - 312 = 688$ femmes.
Je sais aussi qu'il y a 470 personnes mariées et 86 hommes mariés, donc $470 - 86 = 384$ femmes sont mariées.
On dit aussi qu'il y a 525 étudiant(e)s et que 42 d'entre eux sont des étudiants de sexe masculin, donc $525 - 42 = 483$ étudiantes.
Dans les étudiants, seuls 25 étudiants de sexe masculin sont mariés et il y a 147 étudiant(e)s marié(e)s, donc $147 - 25 = 122$ étudiantes mariées.
688 femmes - 483 étudiantes = 205 femmes qui ne sont pas étudiantes.
Seules 122 étudiantes sont mariées, même si toutes les autres femmes (qui ne sont pas étudiantes) sont toutes mariées, la somme donne $122 + 205 = 327$ femmes mariées et n'atteint pas 384 femmes mariées.
Donc le copain a raison, il y a bien une erreur dans les résultats.

3. Une fraction est telle que, multipliée par 5, elle reste plus petite que 1, tandis que, multipliée par 6, elle dépasse 1. Les deux termes de cette fraction sont des nombres naturels et le numérateur est un nombre de deux chiffres différents.

(a) Montrez qu'il existe plusieurs fractions satisfaisant ces conditions et donnez un exemple d'une telle fraction.

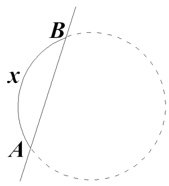
(b) Parmi ces fractions, quelle est celle qui a le plus petit dénominateur ?

(c) Parmi ces fractions, quelle est celle qui a le plus grand dénominateur ?

Solution de Félix Thiry, élève de 2$^{\text{e}}$ année à l'Athénée Vauban à Charleroi

x est un nombre naturel de deux chiffres différents, y est un nombre naturel : $\frac{x}{y} \cdot 5 < 1$ et $\frac{x}{y} \cdot 6 > 1$.
(a) $\frac{22}{113} \cdot 5 = \frac{110}{115} < 1$ et $\frac{22}{113} \cdot 6 = \frac{132}{115} > 1$; $\frac{14}{76} \cdot 5 = \frac{70}{76} < 1$ et $\frac{14}{76} \cdot 6 = \frac{84}{76} > 1$.
(b) $\frac{10}{51}$ car le plus petit numérateur possible est 10 (le plus petit nombre de deux chiffres différents), le dénominateur doit être strictement plus grand que le numérateur multiplié par 5, donc le plus petit dénominateur est obtenu en ajoutant 1 au plus petit numérateur multiplié par 5.
(c) $\frac{98}{587}$ car le plus grand numérateur possible est 98 (le plus grand nombre naturel de deux chiffres différents), le dénominateur doit être strictement plus petit que le numérateur multiplié par 6, donc le plus grand dénominateur est obtenu en soustrayant 1 au plus grand numérateur possible multiplié par 6.

4. Un cercle de rayon 5 est partagé en quatre arcs de même longueur par les points A, B, C, D. Appelons x, y, z, t les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$.



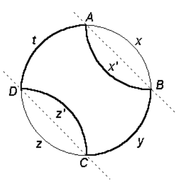
Soit x' l'arc symétrique de x par rapport à la droite AB, y' l'arc symétrique de y par rapport à la droite BC, z' l'arc symétrique de z par rapport à la droite CD, t' l'arc symétrique de t par rapport à la droite DA.

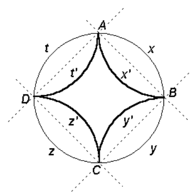
(a) Que vaut l'aire de la figure limitée par $x'yz't$?

(b) Que vaut l'aire de la figure limitée par $x'y'z't'$?

Solution de Antoine Ledent, élève de 2^e^ année à l'Athénée Thil Lorrain à Verviers

Soit a l'aire de la figure délimitée par x et AB.
Soit a' l'aire de la figure délimitée par x' et AB.
Soit b l'aire de la figure délimitée par y et BC.
Soit b' l'aire de la figure délimitée par y' et BC.
Soit c l'aire de la figure délimitée par z et CD.
Soit c' l'aire de la figure délimitée par z' et CD.
Soit d l'aire de la figure délimitée par t et DA.
Soit d' l'aire de la figure délimitée par t' et DA.





$$\begin{cases} s_{AB}(x) = x' \\ s_{AB}(A) = A \\ s_{AB}(B) = B \end{cases}$$

d'où le symétrique par rapport à AB de la figure d'aire a est la figure d'aire a'. Or dans une symétrie orthogonale, l'image d'une figure est une figure de même aire, donc $a = a'$. De même, $b = b'$, $c = c'$ et $d = d'$.
Si A, B, C, D sont sur un même cercle et que les arcs x, y, z et t sont de

même longueur, alors $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$, d'où $a = b = c = d = a' = b' = c' = d'$.
(a) L'aire de la figure $x'yz't$ vaut $AIRE(ABCD) - 2a + 2a = AIRE(ABCD)$.
$ABCD$ est un losange, A et C sont diamétralement opposés, de même B et D. Les deux diagonales du losange sont isométriques et leur longueur vaut le double du rayon du cercle, donc 10.
Par la formule de l'aire du losange, $AIRE(ABCD) = \frac{1}{2}10^2 = 50$.
L'aire de $x'yz't$ vaut donc 50.
(b) $AIRE(x'y'z't') = AIRE(ABCD) - 4a$; cherchons la valeur de a.
Le cercle est composé du losange $ABCD$ et de 4 figures dont l'aire vaut a.
Aire du cercle : $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$.
Aire du losange : 50.
Donc $4a = 25\pi - 50$ et $AIRE(x'y'z't') = 50 - (25\pi - 50) = 100 - 25\pi$.

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2006)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :
– Cotisation ordinaire : 24 €
– Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 €
– Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 €
– Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.
Europe : 65 € (non `PRIOR`), 72 € (`PRIOR`)
Autres pays : 70 € (non `PRIOR`), 79 € (`PRIOR`)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 30 €.
Europe : 50 € (non `PRIOR`), 54 € (`PRIOR`).
Autres pays : 53 € (non `PRIOR`), 58 € (`PRIOR`).
Anciens numéros :
Avant 2005 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.
Année5 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 1,80 €, Europe : 4,50 €, Autres pays : 6 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).
• Abonnements groupés à <u>une</u> des revues : (3 numéros)
Belgique : 4 €.
• Abonnements groupés <u>aux deux</u> revues : (6 numéros)
Belgique : 8 €.

Abonnements individuels.

• Abonnements à une des revues : (3 numéros)
Belgique : 6 €. Europe ([1]) : 18 € (non PRIOR), 20 € (PRIOR).
Autres pays : 19 € (non PRIOR), 22 € (PRIOR).
• Abonnements aux deux revues : (6 numéros)
Belgique : 12 €. Europe : 24 € (non PRIOR), 26 € (PRIOR).
Autres pays : 25 € (non PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2002–2003 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.
Année 2003–2004 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 44 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.
Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents »..

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.
Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 BIC BPOTBEB1
ou CCP LILLE : IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n° 7 à n° 11 et n° 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 7 (Vers les infiniment petits)			
Simone Trompler et Guy Noël	6 €		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Dossier 9 (Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Jacques Bair, Mathématique et Sport	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12 €	9,50 €	T2
G. Robert, CD-Rom, logiciels mathématiques	5 €	/	T1
Recueils de questions des OMB Tome 5	6 €		voir ci-dessous

Frais d'expédition en non PRIOR

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	6,50 €	10 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions en PRIOR, consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.