Photo de couverture : Petit rhombicuboctaèdre (Cadran solaire géographique du Mont Sainte-Odile, Alsace) — photo P. Dupont

Mathématique
et
Pédagogie

Sommaire

No 155 **Janvier–Février 2006**

NOTE

* Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante :
  Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.
  Courrier électronique : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
* Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
* Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
* Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence par courrier électronique, ou encodés sur un CD-rom ou une disquette. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant (LaTeX 2_ε, Word) ; les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. À défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés.
  L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
* La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
  Pour les livres :
  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
  Pour les articles :
  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique & Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
* Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
* MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

 Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez--Doiceau.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Éditorial

G. TROESSAERT

Comme vous le savez déjà par la lecture du SBPMinfor du mois de février, une assemblée générale de notre société aura lieu **le 5 mai 2006 à 17 h 45** à l'Université libre de Bruxelles. Vous y êtes cordialement invités.

Outre les sujets habituels d'une telle réunion, cette assemblée générale devra élire un nouveau président pour la SBPMef. Les modalités d'élection peuvent être consultées sur le site de la SBPMef à l'adresse `www.sbpm.be/roi.htm`.

Quel est le rôle du président ?

Il doit présider les assemblées générales, les réunions du conseil d'administration et les réunions du bureau qui regroupe le président, le vice-président, l'administrateur délégué, le secrétaire et le trésorier.

Il est aussi le principal représentant de l'association dans ses contacts avec le monde extérieur. Le président parle au nom de l'association dans l'esprit des décisions prises par le conseil d'administration ou l'assemblée générale. Il préside des événements festifs comme la remise des prix de l'OMB ou plus académiques comme le congrès.

Le président doit aussi créer une dynamique qui permet à la société de se développer et de remplir au mieux son objet social, il est le guide et le moteur de l'association.

Si ce profil vous intéresse, je ne peux que vous encourager à vous porter candidat à la présidence.

Sinon, la SBPMef a besoin de sang neuf pour continuer à se développer et pour assumer ses nombreuses tâches. Les équipes de math-jeunes, de l'OMB ou de la commission pédagogique notamment accueilleront avec joie vos propositions de collaboration.

Pour joindre l'utile à l'agréable, l'A.G. a été programmée après une conférence du professeur Ingrid Daubechies intitulée *Correction d'erreurs et compression.* Madame Daubechies, qui est professeur à l'Université de Princeton, est connue mondialement pour sa contribution à la théorie des ondelettes. Elle est aussi réputée pour la clarté de ses exposés et ses qualités de vulgarisatrice. Ce sera certainement un bon moment mathématique.

Le concept d'ensemble : centenaire, mais toujours vert

ROLAND HINNION
Université libre de Bruxelles

Le fait que toute la mathématique puisse se développer dans un cadre ensembliste était déjà connu à la charnière des XIXe et XXe siècles ; ne restait qu'à « clarifier » le concept lui-même, c'est-à-dire à fournir une théorie formalisée (langage et axiomes) ; ce fut Frege qui proposa la version tout à fait « naturelle », où chaque propriété définit un ensemble, qui est la « collection » des objets ayant cette propriété.

Un peu plus formellement : si $P(x)$ est une propriété concernant l'« objet » x (p. ex. : $P(x)$ est la « phrase » : « x est un nombre naturel pair »), on conçoit un nouvel objet, noté $\{x \mid P(x)\}$, l'ensemble des x ayant la propriété P (dans notre exemple : l'ensemble des naturels pairs) ; avec pour « règle de fonctionnement », l'axiome :

x appartient à cet ensemble si et seulement si $P(x)$ est vraie.

Cette théorie est malheureusement contradictoire ! Afin de présenter le plus simple, mais en même temps plus redoutable paradoxe, c'est-à-dire le « paradoxe de Russell », il est intéressant de fournir une vision plus contemporaine du concept même d'ensemble. Comme décrit ci-dessus, l'intuition initiale fut celle de « collection » ; et, pour les mathématiques usuelles, cela convient parfaitement ; par contre, cela apporte de sérieuses restrictions au niveau des « situations possibles », et en particulier pour les applications à d'autres domaines (informatique p. ex.). Si les ensembles sont vus comme des collections (au sens usuel : collection de timbres p. ex.), on conçoit mal l'« auto-appartenance » (un ensemble A qui appartiendrait à A), ou des situations « cycliques » (p. ex. A appartient à B, qui appartient à C, qui appartient à A) !

Pour ne prendre qu'un exemple : considérez V = l'ensemble de tous les ensembles ! Ce problème n'a pas échappé aux pionniers, et Mirimanof (au début du XXe siècle) a donné un nom aux ensembles de ce type : « ensembles extraordinaires »...

Adresse de l'auteur : R. Hinnion, ULB, CP. 211, Bd du Triomphe, 1050 Bruxelles ; courriel : rhinnion@ulb. ac. be.

Ces ensembles « extraordinaires » se « comprennent » cependant déjà beaucoup mieux si l'on modifie légèrement le point de vue : au lieu de songer à des « collections », il suffit de considérer qu'un ensemble est une *liste* ; et que « x appartient à la liste A » signifie que x figure bien dans la liste A ; plus rien n'empêche dès lors à ce qu'une liste se mentionne elle-même ! Imaginez p. ex. une bibliothèque disposant de catalogues de livres ; un bibliothécaire consciencieux pourrait parfaitement décider d'établir le catalogue de tous les catalogues ; et donc aussi mentionner ce « super-catalogue » (appelons-le « K ») dans K ! Jusque-là donc pas de paradoxe ; mais, peut-on pour autant « fabriquer » un catalogue à partir de *n'importe quelle* propriété (ce que permet le système de Frege décrit ci-dessus) ? La réponse est *non* : il suffit de considérer la propriété $P(A) =$ « A n'est pas mentionné dans A », et de constater qu'il ne peut exister de catalogue reprenant les catalogues tels que $P(A)$ est vraie...

Face à ces problèmes, Zermelo et Fraenkel proposèrent une théorie (nommée « *ZF* ») qui abandonne l'idée que *toute* propriété définit un ensemble, et décrit (via des axiomes) les propriétés « admissibles », c'est-à-dire utilisables pour former des ensembles ; la « philosophie » sous-jacente est finalement assez « pragmatique », dans la mesure où les axiomes constituent une formulation élégante (le tout tient sur une page !) de « ce qu'il faut » pour permettre les constructions mathématiques habituelles (en gros : l'affirmation de l'existence de l'ensemble des nombres naturels ; et les « opérations » classiques (produit cartésien, réunion, intersection, ensemble des parties, etc...)) ; ce qui explique que le sujet n'est pas (plus) source d'angoisse pour le mathématicien (classique), ni (*a fortiori*) pour l'élève du secondaire : les « objets » traités là sont fort éloignés des ensembles extraordinaires décrits ci-dessus, et relèvent purement de *ZF*...

Mais la situation est différente dans d'autres domaines ; pour les philosophes, logiciens, informaticiens, linguistes, etc... les situations d'auto-référence sont la règle plutot que l'exception ; et dès lors, la version « classique » de *ZF* (excluant les ensembles extraordinaires) est beaucoup trop « rigide ». Fatalement donc sont apparues des théories ensemblistes « non-classiques » ; on peut grosso modo les diviser en deux groupes : celles qui restent proches de *ZF*, dans le sens où elles conservent le principe « *small is beautiful* », c'est-à-dire excluent les ensembles « trop grands » (symptôme : il n'y existe pas d'ensemble universel, c'est-à-dire d'ensemble de tous les ensembles) ; et les « autres », que l'on appelle désormais « *set theories with a universal set* » (appellation due à Randall Holmes, qui tente d'en établir un catalogue, probablement condamné à être perpétuellement incomplet).

Afin de montrer l'intérêt de ces théories non-classiques, nous donnerons un exemple (simplifié, rassurez-vous) lié à l'informatique.

Mais auparavant, il faut impérativement rappeler les faits déconcertants qui font que la création de *ZF* n'a pas apporté et ne peut pas apporter la réponse « définitive » à nos questions…

En effet, suite aux paradoxes de la théorie de Frege, on pouvait légitimement se demander si *ZF* était bien « cohérent », c'est-à-dire sans paradoxes ! Et on tenta donc de le démontrer, mais sans succès ; et pour cause, puisque Gödel montre dans les années 30 que, si certains types de théories (dont *ZF* ; dont d'ailleurs déjà l'arithmétique de Peano !) sont cohérentes, on ne peut pas en fournir de démonstration « absolue » ! Autrement dit : on peut bien *croire* que *ZF* ne contient pas de paradoxes, mais on ne peut le démontrer ; pire : on montrera dans les années 60 (Cohen) que, si la version de *ZF* avec axiome du choix est cohérente, celle niant l'axiome du choix l'est aussi ! On retrouve là un « choc » comparable à celui des géométries non euclidiennes, dans le sens où plusieurs « mondes » sont possibles ; et on rejoint la situation du physicien qui se retrouve avec plusieurs théories incompatibles (relativité, quantas) comme outils de description du monde physique…

Le mieux que l'on puisse dès lors faire est d'établir des « cohérences » relatives, de style : « si la théorie T_1 est cohérente, alors la théorie T_2 l'est aussi » ; et là, *ZF* garde toute son importance comme « théorie de référence » ; l'opinion largement majoritaire est en effet que *ZF* est vraiment cohérent ; elle repose sur deux « arguments » (qui ne sont en aucun cas des « preuves » !) :

1. Nous avons une image intuitive de ce que peut être l'univers de *ZF* : partez de l'ensemble vide, et itérez l'opération « ensemble des parties » ; ne vous arrêtez jamais ; aux situations limites, prenez la réunion des ensembles déjà construits. Ceci est un peu analogue à l'image intuitive que nous avons de l'ensemble des nombres naturels : partez de zéro, et itérez l'opération « plus un »…

2. Les mathématiciens ont utilisé *ZF* (comme M. Jourdain faisait de la prose) depuis des siècles, sans qu'aucun paradoxe n'apparaisse…

Bref : *ZF* est désormais le système de référence, et tout nouveau système sera jugé fiable (non-contradictoire) si l'on arrive à *démontrer* que, si *ZF* est cohérent, alors cet autre système l'est aussi. Et il reste, dans ce domaine, beaucoup de problèmes ouverts…

Voici un exemple, que nous présentons dans une version la plus simplifiée possible (afin de respecter le cadre de cet exposé) : il s'agit de considérations liées à de l'information réelle, qui est bien souvent *partielle* ; l'un des pionniers en la matière, P. Gilmore, a proposé le concept d'« ensemble partiel », que nous examinons maintenant.

Nous avons déjà signalé qu'un ensemble « classique » (appelons-le A) peut être vu comme une « liste » ; bien entendu cela est traité d'une façon extrêmement « idéaliste », « platonicienne », etc..., puisqu'on considère en effet que pour tout objet, on dispose parfaitement de l'information « x appartient à A » ou « x n'appartient pas à A », ce qui tient, pour ainsi dire, de la divine omniscience ! La mathématique fonctionnant très bien comme cela, et fournissant des modèles utiles aux autres sciences, s'accomode parfaitement de ce point de vue ; par contre, les considérations concernant l'information concrète s'en éloignent considérablement.

Comme illustration, nous aborderons les ensembles partiels via l'exemple des cartons d'invitation où l'on demande aux invités potentiels de renvoyer le carton-réponse, avec l'information :

M. / Mme ... Assistera / N'assistera pas à etc.

La collecte des cartons-réponse constituera un magnifique ensemble partiel : il s'agira de « l'ensemble des personnes qui assisteront/n'assisteront pas à etc. », et cet ensemble partiel sera constitué d'une *double* liste : la liste positive, reprenant les noms des personnes ayant répondu positivement à l'invitation (notons-la $LISTE^+$) ; et la liste négative, reprenant les noms des personnes ayant répondu négativement (notons-la $LISTE^-$). On constate déjà une profonde différence avec la situation classique, où un ensemble A est une liste simple ; et, si l'on désire comparer, on peut considérer A comme étant une $LISTE^+$, avec pour $LISTE^-$ le complémentaire classique de A ; dans ce sens, un ensemble classique est un ensemble partiel, mais de type « parfait », c'est-à-dire que $LISTE^+$ et $LISTE^-$ partitionnent l'univers considéré, alors qu'un ensemble partiel quelconque sera constitué de deux listes disjointes, mais dont la réunion ne couvre pas (nécessairement) tout l'univers considéré. Dans notre exemple des cartons-réponse, il est courant que certains ne répondent pas ; et ceux-là ne figureront ni dans $LISTE^+$, ni dans $LISTE^-$. La $LISTE^+$ s'appelle l'extension de A ; et la $LISTE^-$ s'appelle la coextension de A. Dans le cas où l'ensemble A est « classique », on ne s'occupe bien sûr que de l'extension, puisque celle-ci détermine complètement la coextension (le complémentaire usuel) ; notez que ceci n'est plus le cas pour les ensembles partiels quelconques, puisque deux tels ensembles peuvent parfaitement avoir même extension, mais différer en coextension ! Gilmore a montré, dès le début, que la théorie des ensembles partiels était cohérente relativement à *ZF* ; mais, avec un bémol, dans le sens où ce concept posait maintenant des problèmes au niveau des critères d'identification ! Précisons cela.

Les axiomes de « compréhension » ne posent pas problème ; c'est-à-dire : si *ZF* est cohérent, alors on ne peut déduire de contradiction des axiomes affirmant que, pour un ensemble partiel A de type : $\{x \mid P(x)\}$, on aura (quel que soit x) :

x figure dans $LISTE^+$
ssi
x satisfait bien P^+
(c'est-à-dire : l'information « $P(x)$ est vraie » nous est parvenue)

et

x figure dans $LISTE^-$
ssi
x satisfait P^-
(c'est-à-dire : l'information « $P(x)$ est fausse » nous est parvenue).

Mais le problème de l'identification est, quant à lui, bien réel !

Dans le cas des ensembles « classiques » (donc p. ex. dans *ZF*), l'identification se fait (comme nul ne l'ignore : cf. *Mathématique Moderne* de Papy !) sur base de l'extension, c'est-à-dire : deux ensembles sont égaux ss'ils ont même extension. Formellement, cela s'exprime par l'axiome dit « d'extensionnalité » (pour les amateurs : $A = B$ ssi pour tout x, x appartient à A ssi x appartient à B) ; autrement dit : tout ensemble est déterminé par la donnée de ses éléments, c'est-à-dire par la donnée de son extension.

Il est déjà immédiatement clair que ce principe-là est inadéquat pour les ensembles partiels, puisque (comme remarqué ci-dessus) l'extension ne détermine plus du tout la coextension ! Il semble alors « naturel » de songer à l'adaptation suivante :

Si deux ensembles partiels ont même extension, et aussi même coextension, ils sont égaux. Ce principe d'extensionnalité pour ensembles partiels ne résout, hélas, rien, au vu des deux faits suivants :

– Gilmore lui-même a remarqué d'emblée que la version « naturelle » de la compréhension (comme décrite ci-dessus) était incompatible avec l'extensionnalité dont il est question ici ! C'est-à-dire que le système obtenu en adjoignant à la compréhension l'axiome d'extensionnalité (ci-dessus) produit des paradoxes !

– L'identification des ensembles partiels sur base de leur extension/coextension n'a pas de sens du point de vue informatique ; ces ensembles partiels collectant des données partielles, il est bien imprudent de procéder à leur identification, à un moment donné, sur base du contenu des listes $+$ et $-$; le contenu de ces listes augmentant avec le temps, des différences ultérieures peuvent surgir…

Pour prendre un exemple : soit A l'ensemble (partiel) des planètes (de notre système solaire) où il y a de la vie ; et soit B l'ensemble des planètes où vivent des microbes ; il est clair qu'en 2000 ces deux ensembles partiels ont même extension et même coextension ; on ne peut cependant garantir qu'il en sera toujours ainsi !

D'où l'idée de baser les identifications sur l'*intensionnalité* ([1]) plutôt que sur l'*extensionnalité* ; c'est-à-dire sur le *sens* des ensembles en question, plutot que sur leur contenu (provisoire). Plus précisément, le critère d'identification entre $A = \{x \mid P(x)\}$ et $B = \{x \mid Q(x)\}$ sera basé sur une certaine « équivalence logique » entre P et Q ; techniquement, c'est même un peu plus complexe que ce qu'une vue naïve pourrait suggérer : le bon type de critère examinera, non pas « P ssi Q », mais bien « P^+ ssi Q^+ et P^- ssi Q^- » ; cela étant dû au fait que P^+ ne déterminant pas P^-, l'équivalence « P^+ ssi Q^+ » n'entraine plus (comme c'est le cas dans la situation classique) automatiquement « P^- ssi Q^- ».

Dans cette direction, il existe d'ores et déjà quelques résultats encourageants ; mais aussi beaucoup de problèmes ouverts…

Références

Le lecteur peut trouver plus de détails dans :

Paul GOCHET : *Logique, volume 1 : Méthodes pour l'informatique fondamentale*, chapitre 1.

Il y a là une introduction historique et philosophique, très documentée et en même temps très accessible (aussi peu de formalisme que possible), à la théorie des ensembles.

Roland HINNION : *Logic and logical philosophy*, N° 11/12, Éditeur Jerzy PERZANOWSKI, 2003, pp. 79–90 : « About the coexistence of classical sets with non-classical ones : a survey ».

Il s'agit d'un aperçu de (certaines) theories non-classiques ; pour matheux.

([1]) La 6^{e} lettre est bien un « s » !

Fonctions affines par morceaux dans la pratique

VALÉRIE HENRY
HEC-Ecole de Gestion de l'Université de Liège

Mots-clés : Fonctions affines par morceaux. Logique floue. Polygone des fréquences et ogive des fréquences cumulées. Localisation d'un entrepôt. Courbe de Lorenz. Loi de demande conjointe. Modèle de Wilson pour la gestion des stocks. Droite de budget avec taxation.

Préambule

Durant tout apprentissage des mathématiques, les fonctions linéaires, et plus généralement les fonctions affines, font l'objet d'une attention particulière de la part des enseignants et sont constamment prégnantes chez les apprenants. L'importance de ces fonctions s'explique notamment par la facilité de les introduire, aussi bien dans les registres analytique que graphique, ainsi que les potentialités qu'elles offrent pour modéliser simplement des situations concrètes multiples et variées. De nombreuses recherches de didactique sont d'ailleurs consacrées à la linéarité et à des notions connexes ; nous renvoyons le lecteur à de telles études, par exemple celles d'une équipe de recherche du Département de didactique de la K.U. Leuven sur l'illusion de la linéarité [4], ainsi que celles du CREM sur la linéarité en tant que fil conducteur pour l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte [3].

Les fonctions affines par morceaux, qui peuvent évidemment être construites à partir de fonctions affines, sont susceptibles d'être exploitées dans des cours de mathématiques, car elles restent assez élémentaires, permettent d'illustrer simplement diverses notions théoriques de base en analyse et peuvent admettre de jolies et intéressantes représentations graphiques [10]. Il est probablement moins connu qu'elles interviennent dans de nombreuses applications concrètes.

Adresse de l'auteur : V. Henry, 7 Boulevard du Rectorat, Bât. B31, 4000 Liège, courriel : V.Henry@ulg.ac.be.

Dans cet article, nous nous proposons d'exhiber quelques situations réelles qui peuvent être décrites à partir de fonctions affines par morceaux. Ces situations sont rencontrées aussi bien dans la vie quotidienne que dans des théories mathématiques ou encore dans l'univers économique. En plus de l'intérêt intrinsèque que pourraient revêtir de tels exemples d'application, nous pensons que ces pages permettront peut-être d'illustrer concrètement quelques notions théoriques de base rencontrées dans un cours d'analyse mathématique.

1. Premiers exemples de la naissance à l'âge de raison

1.1. Courbes de température, de poids,...

Dès la naissance, le nouveau-né est confronté, même inconsciemment, aux fonctions qui nous occupent puisque le pédiatre, en portant sur un graphique l'évolution de la température ou du poids du bébé, esquisse la représentation d'une fonction affine par morceaux. Sans le savoir (en tout cas pour la plupart), il fait l'hypothèse, en reliant entre eux les points représentatifs des différentes mesures effectuées, que la température et le poids évoluent linéairement d'un relevé à l'autre.

1.2. Tarif postal

Quelques années plus tard, l'adolescent, éperdument amoureux, passe des heures à écrire à l'élue de son cœur des lettres enflammées dont la longueur parfois impressionnante le contraint à s'informer du fonctionnement des tarifs postaux sous peine de fâcher sa bien-aimée (ou ses parents) forcée de participer aux frais d'envoi de la missive. Un peu de réflexion l'amène à la représentation ci-dessous du montant à consacrer à l'affranchissement de sa lettre en fonction du poids de ses écrits. Rassuré, il peut de nouveau laisser libre cours à son inspiration fertile.

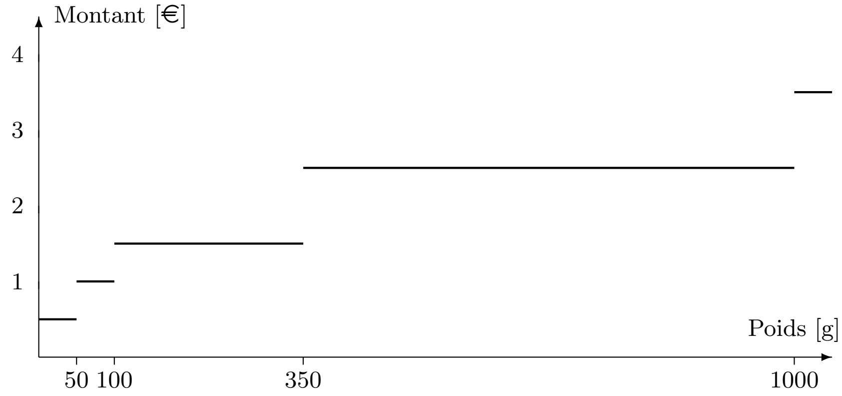


Fig. 1 – Tarif postal en fonction du poids

1.3. Prix des photocopies

Quelques jours plus tard, notre adolescent, accessoirement étudiant, se rend au centre de photocopies proche de son domicile, muni du cours de mathématiques de son précieux camarade de classe. Celui-ci, moins occupé à écrire des poèmes enflammés, a en effet pris le temps d'assister à tous les cours et, mieux encore, d'y prendre des notes claires et détaillées. À l'entrée est affiché le tarif en vigueur au magasin :

- 10 centimes/pièce pour moins de 10 photocopies ;
- 7,5 centimes/pièce à partir de 10 photopies ;
- 5 centimes/pièce à partir de 50 photocopies.

Notre ami, peu assidu au cours de mathématique mais point dépourvu de sens pratique, se livre à quelques petits calculs et se décide rapidement à faire cinquante photocopies bien que le cours de son camarade ne compte que 35 feuilles. La représentation ci-dessous ([1]) illustre pourquoi le raisonnement de cet économe lui fournit en sus d'un cours de mathématiques complet, 15 feuilles de brouillon, le tout pour 2,5 euros au lieu de 2,65 euros sans les feuilles de brouillon.

([1]) Cette figure est obtenue en traçant les points (n, p_n), où n désigne le nombre de photocopies et p_n le prix correspondant, pour $n = 0, 1, \ldots, 70$. Comme les points ainsi obtenus sont nombreux et alignés (sur chaque intervalle considéré), il est commode et fréquent [5] de les relier pour obtenir la représentation graphique d'une fonction affine par morceaux.

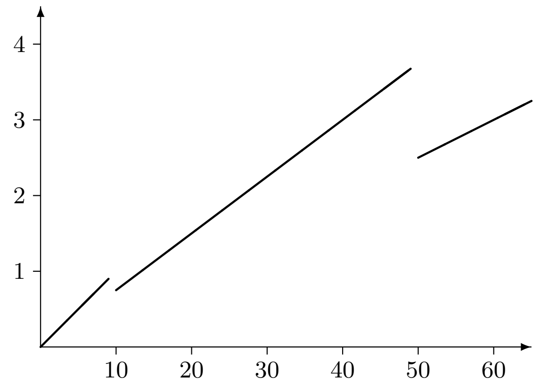


FIG. 2 – Prix des photocopies

1.4. Une séance à la piscine

Notre jeune homme prend de l'âge et entre à l'université. Il doit donc étudier durant de nombreuses heures, mais aussi ne pas oublier de se distraire. À cet effet, il se propose de se rendre à la piscine communale qui propose trois formules :

– F_1 : un abonnement de a euros, avec un accès illimité ;
– F_2 : une carte de membre de b euros, plus c euros par heure de fréquentation ;
– F_3 : d euros par heure de fréquentation.

On doit avoir

$$a > b > d > c > 0 \text{ avec } bc < (d - c)(a - b).$$

Notre « student » doit donc choisir la formule qui lui convient le mieux. Pour cela, il considère la fonction qui traduit le tarif à payer pour aller nager, lorsque celui-ci est calculé en tenant compte du temps exact passé dans la piscine ; il est ainsi en présence d'une fonction affine par morceaux, dont le graphe est le suivant :

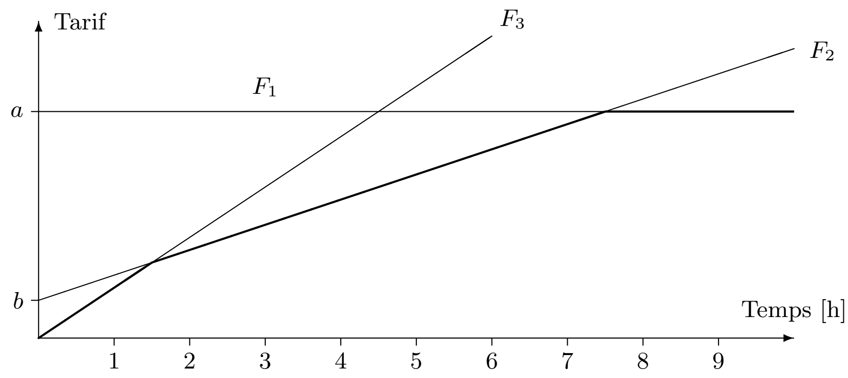


FIG. 3 – Différents tarifs à la piscine et minimisation du coût

1.5. Au supermarché

Faisons un saut dans le temps pour retrouver notre héros, marié et père de deux enfants. Époux modèle, il accompagne sa femme lors des courses hebdomadaires et toujours aussi économe, se réjouit d'apprendre que le supermarché D propose des ristournes à ses clients : il annonce 10 % de ristourne sur le total des achats si celui-ci dépasse 40 euros et 5 % de ristourne si le montant des achats est inférieur à cette somme. Il s'apprête déjà à organiser ses dépenses de manière à obtenir la meilleure ristourne lorsqu'il aperçoit que le supermarché G en face propose également des ristournes. Celui-ci affiche

- 5 % de ristourne sur la première tranche d'achat de 0 à 40 euros ;
- 10 % sur la deuxième tranche de 40 à 80 euros ;
- 15 % sur le reste du montant des achats.

Notre homme, un peu hésitant, consulte rapidement la liste des courses et comprend vite que celles-ci dépasseront allègrement le seuil des 40 euros. Toujours fidèle au principe selon lequel un dessin vaut mieux qu'un long discours, il esquisse rapidement un résumé de la situation (v. fig. 4).

Il lui reste alors à expliquer à sa femme, un peu perdue, qu'ils ont le choix entre se rendre dans leur supermarché habituel et ne pas dépasser un montant de 120 euros ou opter pour le supermarché G et, dans ce cas, obligatoirement dépenser plus de 120 euros. En bonne représentante de la gent féminine, celle-ci se dirige résolument vers le magasin d'en face.

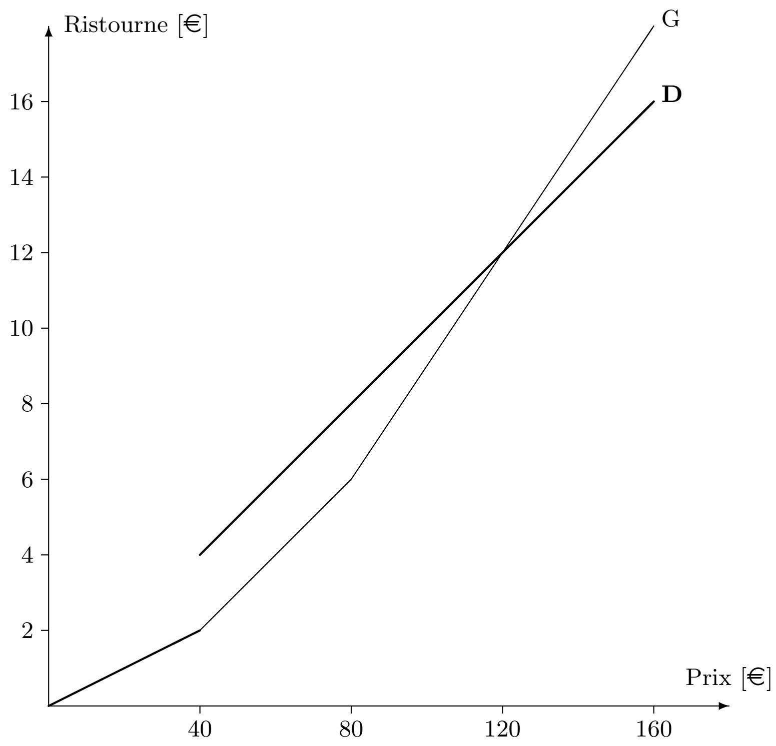


Fig. 4 – Choix d'un supermarché

2. Plus sérieusement : exemples en mathématiques et en statistiques

2.1. Logique floue

En logique classique, une proposition est une déclaration dépourvue d'ambiguïté qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux à la fois. Il s'agit d'une logique qualifiée de *bivalente* dans laquelles toute affirmation se voit attribuer une *valeur de vérité*, à savoir 1 si l'affirmation est vraie, 0 si elle est fausse. Par exemple, la proposition « 7 est un nombre premier » est vraie et sa valeur de vérité est donc égale à 1 ; par contre, l'assertion « 7 est un nombre pair » est fausse et sa valeur de vérité vaut 0. Dans ce contexte, un sous-ensemble A d'un référentiel X peut être parfaitement déterminé par sa *fonction caractéristique* : il s'agit de la fonction, notée f_A définie sur X et à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$ qui, à tout élément x de X associe la valeur 1 ou 0 selon que x appartient ou non à l'ensemble A. Par exemple, en travaillant dans le référentiel $\mathbf{N}$ des entiers naturels, l'ensemble A composé des entiers pairs contient notamment 2, mais pas 7 : on a donc $f_A(2) = 1$, tandis que $f_A(7) = 0$.

Dans cette théorie, on pourrait se demander quelle est la véracité d'une affirmation telle que « cette personne est grande ». Bien entendu, la valeur de vérité de cette assertion sera égale à 1 si et seulement si l'individu considéré fait partie du sous-ensemble des êtres humains de grande taille. Mais une réponse non ambiguë à la question posée réclame une définition plus précise pour ce dernier sous-ensemble : par exemple, on pourrait déclarer « grande » toute personne dont la taille vaut au moins 170 centimètres ; en conséquence, toute personne x du référentiel X considéré pourrait aisément être ou non rangée dans le sous-ensemble A des individus de grande taille : mathématiquement, $f_A(x) = 1$ si et seulement si la taille de x est supérieure ou égale à 170 centimètres ; la fonction caractéristique f_A admet alors la représentation graphique de la figure 5 dans laquelle les abscisses se réfèrent aux tailles (en centimètres) des individus x, tandis que les ordonnées traduisent le degré de vérité de la proposition « x est de grande taille ».

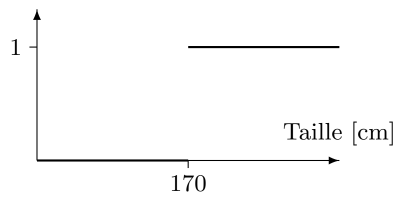


FIG. 5 – Fonction caractéristique du sous-ensemble des personnes de grande taille en logique booléenne

Ainsi, on en arrive à dire qu'une personne mesurant 1,7 m est grande, alors qu'une autre d'un mètre soixante-neuf ne l'est pas (et serait de ce fait déclarée « petite ») : un seul centimètre les séparant, il est peu réaliste de les classer dans deux catégories totalement opposées.

En fait, la logique classique, de par sa bivalence, ne paraît pas toujours bien adaptée aux raisonnements humains. Effectivement, les informations fournies sont assez souvent imprécises, c'est-à-dire incomplètes ou mal définies. Dans la vie quotidienne, des phrases ressemblant aux suivantes sont fréquemment entendues :

– Je trouve que cet enfant est très petit.
– En voiture, mon père roule assez vite.
– Ce produit est relativement onéreux.
– Le temps me paraît beau.
– Tel athlète court fort vite.
– ...

Attribuer à de telles assertions vagues et peu précises une valeur de vérité égale soit à 0, soit à 1 ne semble pas très réaliste.

Pour remédier à de tels inconvénients, Lofti Zadeh, professeur d'informatique à l'université de Berkeley en Californie, a introduit, à partir de 1965, la *logique floue* : elle permet de distinguer une infinité de valeurs de vérité comprises dans l'intervalle $[0;1]$. Désormais, la fonction caractéristique d'un sous-ensemble n'aura plus ses valeurs uniquement égales à 0 ou à 1, mais celles-ci pourront décrire tout l'intervalle $[0;1]$: de la sorte, un élément pourra être déclaré appartenir plus ou moins à un ensemble et à son complémentaire. Par exemple, la fonction caractéristique du sous-ensemble flou des personnes de grande taille pourra être représentée graphiquement comme sur la figure 6 :

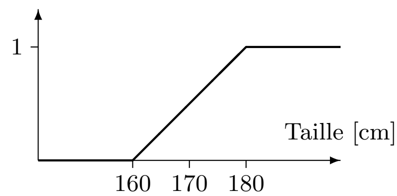


FIG. 6 – Fonction caractéristique du sous-ensemble des personnes de grande taille en logique floue

Ainsi, une personne mesurant un mètre et septante centimètres appartiendra à l'ensemble des personnes de grande taille avec un *degré de certitude* de 0,5, mais aussi à l'ensemble des personnes de petite taille avec le même degré de certitude 0,5 ; concrètement, cela voudra dire que cette personne est « à moitié » grande, mais aussi « à moitié » petite !

En guise d'illustrations, les figures ci-dessous fournissent quelques représentations graphiques classiques de fonctions d'appartenance relatives à des nombres flous. Comme ci-dessus, les abscisses indiqueront les tailles (en centimètres) de personnes, tandis que les ordonnées donneront les degrés de certitude. Le premier exemple est un nombre flou, de type *triangulaire*, qui traduit quantitativement l'affirmation vague suivante : « la taille de cette personne vaut environ 170 centimètres » ; notons qu'en logique classique, la fonction caractéristique correspondant à cette même situation serait représentée par une droite confondue avec l'axe horizontal des abscisses, sauf en l'abscisse $x = 170$ où se trouverait le point $(170, 1)$. La deuxième figure représente un *intervalle flou*, de type *trapézoïdal*, relatif à l'assertion « la taille étudiée se situe environ entre 160 et 180 centimètres ». Les troisième et quatrième représentations se réfèrent respectivement à « une grande taille » et à « une petite taille », la limite retenue dans ces cas étant toujours de 170 centimètres. Tous ces graphes sont des représentations de fonctions affines par morceaux. Une application concrète de telles notions peut être trouvée dans [8].

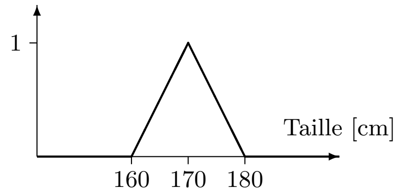


FIG. 7 – « Taille d'environ 170 centimètres »

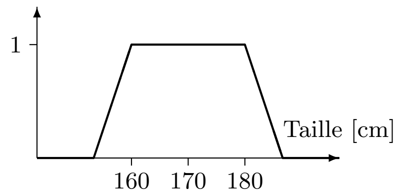


FIG. 8 – « Taille entre 160 et 180 centimètres environ »

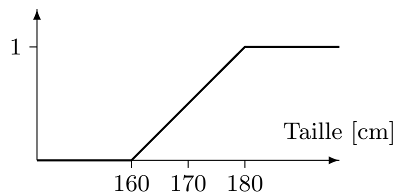


FIG. 9 – « Grande taille »

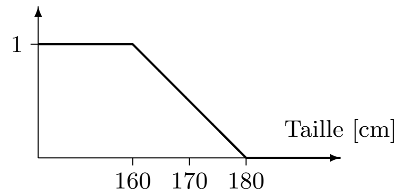


FIG. 10 – « Petite taille »

2.2. Quelques diagrammes statistiques

De nombreux diagrammes statistiques sont des représentations de fonctions affines par morceaux. Il s'agit soit de fonctions étagées dans le cas de variables discrètes (fonction de répartition, courbe cumulative des fréquences, . . .), soit, dans le cas de données groupées en classes, de courbes où les différents points significatifs sont reliés entre eux par des segments de droite sous l'hypothèse simplificatrice que les données se répartissent équitablement au sein de chacune des classes considérées (polygone des fréquences, ogive des fréquences cumulées, . . .). Les graphiques ci-dessous donnent deux exemples, un dans le cas discret et un dans le cas groupé. Les cours de statistique descriptive regorgent évidemment de tels exemples (voir, par exemple, [7]).

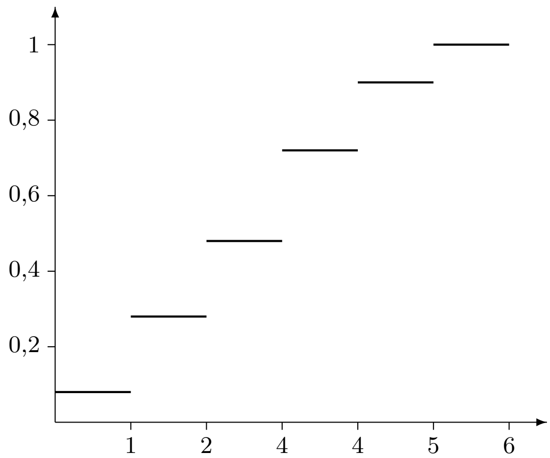


FIG. 11 – Courbe cumulative des fréquences

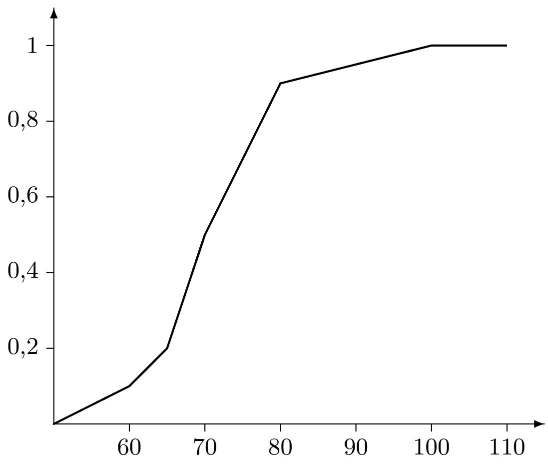


FIG. 12 – Ogive des fréquences cumulées

2.3. Courbe de Lorenz

Il s'avère parfois intéressant d'étudier la « concentration » de certaines grandeurs pour lesquelles on dispose de données statistiques. En guise d'exemple, comparons les concentrations des passagers dans les 10 plus gros aéroports mondiaux et canadiens, pour lesquels les données sont les suivantes :

Dix plus gros aéroports mondiaux

Aéroports	Nbre de passagers	% cum aéroports	% cum passagers
Chicago	69 153 528	10	14
Atlanta	62 885 282	20	27
Los Angeles	57 974 559	30	39
Dallas	57 335 669	40	50
Londres	55 722 752	50	61
Tokyo	46 598 715	60	70
San Francisco	38 560 085	70	78
Francfort	38 097 201	80	86
Séoul	34 441 726	90	93
Miami	33 504 579	100	100

Dix plus gros aéroports canadiens

Aéroports	Nbre de passagers	% cum aéroports	% cum passagers
Toronto	22 669 189	10	36
Vancouver	13 090 057	20	57
Montréal	8 533 798	30	70
Calgary	6 662 242	40	81
Edmonton	2 896 578	50	86
Winnipeg	2 830 044	60	90
Ottawa	2 763 420	70	94
Halifax	2 462 256	80	98
Victoria	879 367	90	99
Québec	640 304	100	100

Portons ces observations sur un graphique où les abscisses se réfèrent aux fréquences cumulées des passagers, tandis que les ordonnées indiquent les fréquences cumulées des aéroports. En reliant entre eux deux points consécutifs ainsi construits par un segment de droite, on obtient la représentation graphique d'une fonction affine par morceaux, qui porte le nom de « courbe de concentration » ou encore de « courbe de Lorenz ».

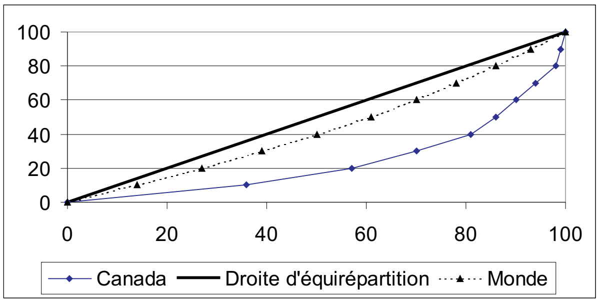


FIG. 13 – Courbes de Lorenz pour les dix plus gros aéroports mondiaux et canadiens

On remarque sur cette figure que la répartition des nombres de passagers paraît plus équitable pour les aéroports du monde entier que pour le seul Canada ; dans le second cas, une plus grande part des passagers se retrouve seulement dans quelques aéroports : graphiquement, la représentation graphique correspondante est plus éloignée de la droite d'équirépartition matérialisée par le segment de droite joignant l'origine du plan au point $(100, 100)$. Cette observation peut être quantifiée par le calcul de l'indice de Gini correspondant [6].

3. Spécialisons-nous : exemples en économie

3.1. Localisation d'un entrepôt

On considère le problème de localisation d'un entrepôt devant servir à ravitailler des magasins situés au bord d'une autoroute. Pour fixer les idées, considérons, par exemple, quatre magasins A, B, C et D situés le long d'une route, la distance entre A et B étant de 15 kilomètres, celle entre B et C de 25 kilomètres et celle entre C et D de 10 kilomètres. Ces boutiques doivent être ravitaillées à partir d'un entrepôt E : sur une période de temps bien précise, A (resp. B ; C ; D) doit être alimenté 40 (resp. 20 ; 10 ; 30) fois. Où l'entrepôt E doit-il être idéalement placé sur cette route ?

Les données de ce problème, dont la résolution est détaillée dans [2], peuvent être résumées par une série statistique

$$S = \{(0, 40), (15, 20), (40, 10), (50, 30)\}$$

où, pour tout couple (x_i, n_i), le premier élément x_i représente la distance en kilomètres de l'endroit E au point A, tandis que le second élément n_i désigne le nombre de fois que le magasin en question doit être alimenté à partir de E. La question posée consiste à trouver un seul nombre x représentatif de la série S : concrètement, ce nombre x exprimera une « distance minimale » du magasin A à l'entrepôt E. En adoptant la fonction définie par

$$f(x) = 40x + 20|x - 15| + 10|x - 40| + 30|x - 50|$$

dont le minimum (sur l'intervalle $[0, 50]$), est assuré par la médiane $\tilde{x}$ de la série S, on minimise le coût global de tous les transports de l'entrepôt aux divers magasins (en supposant constant le coût de transport par kilomètre). La représentation graphique de la fonction f est illustrée ci-dessous.

3.2. Modèle de Wilson pour la gestion de stock

Un modèle élémentaire en gestion des stocks est dû à Wilson ; il suppose que :

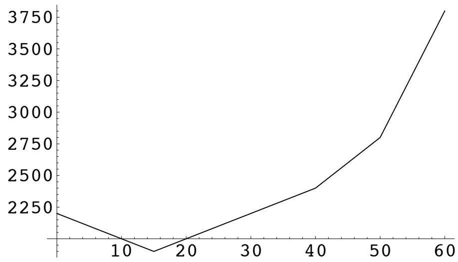


FIG. 14 – Minimisation du coût global du transport

– la demande du marché est constante ;
– le stock est réapprovisionné de n unités tous les T jours ;
– il n'y a pas de pénurie ;
– les réapprovisionnements se font de manière instantanée.

Sous ces hypothèses, le niveau du stock peut être représenté par le graphe d'une fonction affine par morceaux qui peut se présenter comme suit :

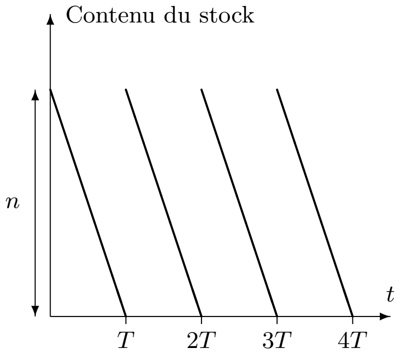


FIG. 15 – Niveau du stock dans le modèle de Wilson

Concrètement se pose alors le problème de trouver le stock qui minimise le côût total de stockage [1].

3.3. Loi de demande conjointe

Une notion économique de base est la courbe de demande d'un consommateur pour un bien : elle rend compte de la valeur que le consommateur attribue à chacune des unités de cet article. Pour les biens ordinaires (voir, par exemple, dans [9]), le prix p décroît lorsque la quantité achetée x augmente ; très souvent, cette dépendance est supposée affine, de sorte que, pour un même individu et un bien normal, la courbe de demande se présente, par exemple, comme suit (2) :

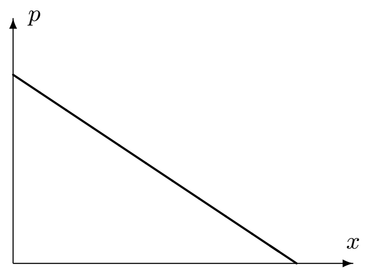


FIG. 16 – Courbe de demande pour un individu

Un économiste, cependant, ne s'intéresse pas seulement à la courbe de demande d'un seul individu, mais bien à la courbe de demande du marché, c'est-à-dire à celle relative à l'ensemble des consommateurs considérés. Cette courbe s'obtient évidemment en ajoutant entre elles les demandes individuelles pour tout niveau de prix du bien en question. Or, les individus n'achètent pas nécessairement à n'importe quel prix, de sorte que, même si les courbes de demande individuelles sont des segments de droite (évidemment contenus dans le premier quadrant du plan), la demande du marché peut se présenter sous la forme d'une fonction affine par morceaux ainsi qu'en atteste cet exemple, détaillé dans [11], relatif à deux individus pour lesquels les lois de demande sont données par :

$$x_1 = 20 - p \text{ et } x_2 = 10 - 2p.$$

(2) Notons que les économistes ont pour habitude de représenter la quantité en abscisses et le prix en ordonnées

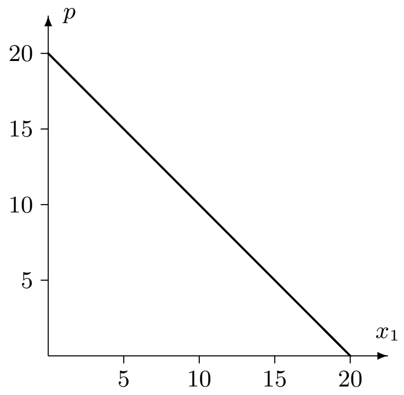


Fig. 17 – Loi de demande définie par $x_1 = 20 - p$

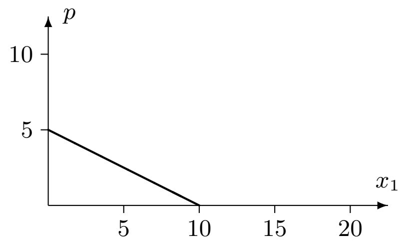


Fig. 18 – Loi de demande définie par $x_2 = 10 - 2p$

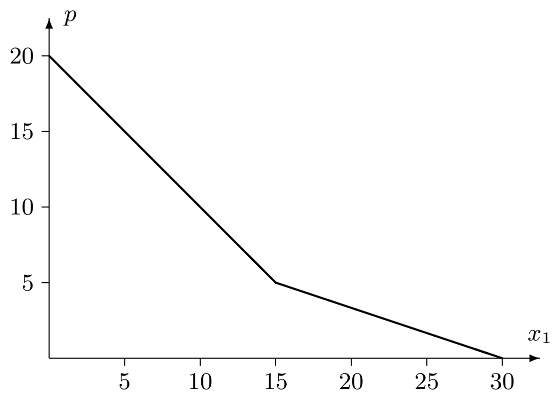


Fig. 19 – $x_1 + x_2$

3.4. Droite de budget avec taxation

En économie, on considère régulièrement le cas particulier de deux biens X_1 et X_2 en supposant que l'on distingue le bien X_1 de tous les autres agrégés dans X_2. Si l'on note p_1, p_2 les prix unitaires des deux articles et x_1, x_2 les quantités achetées correspondantes, la droite de budget a pour équation

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = b,$$

où b désigne le budget total dont dispose le consommateur. Supposons que le législateur impose une taxe t sur les unités du bien X_1 consommées en plus de x_1^* ; dans ce cas, la courbe de budget n'est plus une droite, mais le graphe d'une fonction affine par morceaux, avec les deux pentes respectivement égales à $-p_1/p_2$, c'est-à-dire l'opposé du rapport des deux prix initiaux, et à $-(p_1+t)/p_2$:

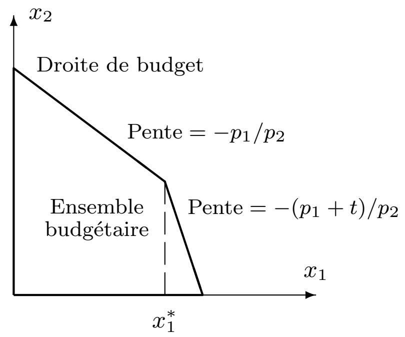


FIG. 20 – Droite de budget avec taxation

Conclusion

Notre objectif dans cette note était de montrer que des fonctions affines par morceaux peuvent être introduites de bien des manières, interviennent dans la modélisation mathématique de situations variées et nombreuses, et peuvent fournir des exemples concrets permettant d'illustrer des notions théoriques d'un cours élémentaire d'analyse mathématique, par exemple, les notions de discontinuité, de points anguleux, d'extrema en des points de non dérivabilité, ...

Dans des travaux ultérieurs, nous comptons montrer que les fonctions affines par morceaux admettent de très nombreuses applications, parfois un peu plus spécialisées et sophistiquées, dans l'univers de la finance. Nous nous préparons également à construire, en nous appuyant sur nos recherches antérieures, une typologique relative aux applications des fonctions affines par morceaux.

Bibliographie

[1] Bair J., *Mathématiques générales à l'usage des sciences économiques, de gestion et AES*, Bruxelles, De Boeck Université, 1993, 425 pages.

[2] Bair J., Haesbroeck G., Modélisation : passage d'un problème réel à un problème mathématique, *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, 1998, 418, 583–590.

[3] Rouche N. (coordinateur), *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur*, publication du CREM, Nivelles, 2002.

[4] De Bock D., L'illusion de la linéarité, *Mathématique et Pédagogie*, 1999, 121, 30–45.

[5] Ertryckx-Frederickx M., Bouckaert C., Le prix des photocopies, *Mathématique et Pédagogie*, 1994, 95, 41-51.

[6] Haesbroeck G., Un indicateur dans l'étude de la répartition des revenus : l'indice de Gini, *Mathématique et Pédagogie*, 1995, 104, 31–42.

[7] Haesbroeck G., Henry V., *Pratique de la statistique descriptive. Résolution et interprétation de problèmes*, Bruxelles et Liège, coédition Haute École Ferrer et Céfal, 2004, 260 pages.

[8] Henry V., Application des barycentres en logique floue, *Mathématique et Pédagogie*, 2002, 139, 35–42.

[9] Jurion B., *Économie politique*, Bruxelles, De Boeck Université, 1996, 512 pages.

[10] Plane H., Graphiques et ensembles plaisants et délectables, *Plot*, 2004, 8, 10–13.

[11] Varian H. R., *Introduction à la microéconomie*, Bruxelles, De Boeck Université, 1992, 697 pages.

Cabri-Géomètre et les hyperboles

JEAN-PAUL HOUBEN
Université Catholique de Louvain

Mots-clés : Cabri-Géomètre, Hyperbole.

Après un article sur l'ellipse et un sur la parabole, voici celui sur l'hyperbole. On peut presque reprendre la démarche sur l'ellipse et l'adapter à l'hyperbole puisque celle-ci est le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes, les foyers (F et F'), est constante. Si P est un point de l'hyperbole on a : $|PF - PF'| = 2a$

On va donc, comme pour l'ellipse, utiliser cette définition pour construire l'hyperbole par points.

Première construction de l'hyperbole

Prenons sur une droite d un segment $[A, B]$ (1) déterminé par deux points A et B de d et dont la longueur représente la constante de la définition : $d(A, B) = 2a$.

Sur cette droite prenons un point P (2) extérieur au segment $[A, B]$ et définissons les segments $[P, A]$ (3) et $[P, B]$. Plaçons les foyer F et F' dans le plan et construisons avec l'instruction compas (4) les cercles de centre F et F' et ayant pour rayon les segments [P, A] et [P, B]. Recherchons l'intersection de ces deux cercles (5) : X et Y.

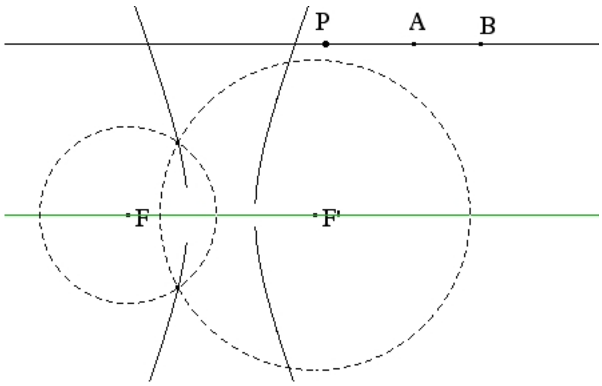
Comme le point P est extérieur au segment $[A, B]$ et que :

$$|d(P, A) - d(P, B)| = 2a$$

nous obtenons l'hyperbole comme le lieu des points X (6) et Y lorsque P parcourt la droite d :

Adresse de l'auteur : Jean-Paul Houben, Rue de l'Église 78, 1301 Bierges ; courriel : `houbenjp@versateladsl.be`.

(1) **Ligne**/ *Droite*, puis **Point** / *Point sur objet*, enfin **Ligne**/ *Segment*
(2) **Point** / *Point sur objet*
(3) **Ligne** / *Segment*
(4) **Construction** / *Compas*
(5) **Point** / *Point sur deux objets*
(6) **Construction** / *Lieu*



Seconde construction de l'hyperbole

Comme pour l'ellipse, le lieu s'obtient en deux parties. Mais nous pouvons aussi construire l'hyperbole en une seule fois. En l'un des foyers F pris comme centre traçons un cercle ([7]) de rayon $2a = d(A, B)$ et plaçons-y un point quelconque P ([8]).

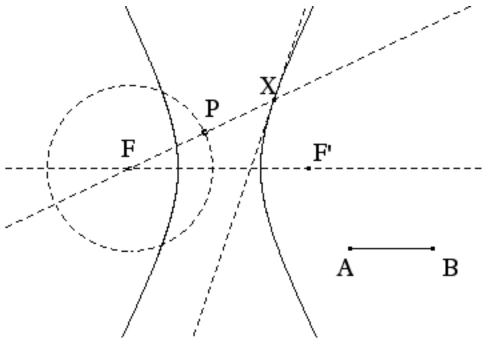
Traçons la droite passant par F ([9]) et P ainsi que la médiatrice de PF' ([10]). L'intersection de ces deux dernières droites donne un point X ([11]) de l'hyperbole. En effet, puisque X est un point de la médiatrice, $d(X, P) =$ $= d(X, F')$, et donc :

$$d(X, F) - d(X, F') = d(X, P) + d(P, F) - d(X, F') = d(P, F) = 2a.$$

En recherchant le lieu du point X lorsque P parcourt le cercle, nous avons notre hyperbole en un seul tracé.

Faites maintenant un essai : si vous augmentez la valeur de $2a$, en déplaçant le point A ou le point B, vous transformez l'hyperbole en une ellipse.

([7]) **Construction** / *Compas*
([8]) **Point** / *Point sur objet*
([9]) **Ligne** / *Droite*
([10]) **Construction** / *Médiatrice*
([11]) **Point** / *Point sur deux objets*



Construction de tangentes à l'hyperbole

En regardant la figure précédente, la médiatrice de $[F', P]$ est aussi hauteur et bissectrice dans le triangle isocèle PXF'. Cette droite est aussi la tangente à l'hyperbole au point X. ([12])

Si donc il faut construire la tangente en un point X d'une hyperbole, il suffit de construire la bissectrice de l'angle formé par les deux rayons focaux XF et XF'.

Lorsque le point X, où doit passer la tangente, n'est pas un point de l'hyperbole, il est cependant un point d'une médiatrice d'un segment passant par F'. Construisons donc le cercle de centre X ([13]) et passant par le foyer F'. Ce cercle rencontre le cercle de rayon $2a$ de centre F en deux points P_1 et P_2. Les tangentes sont les médiatrices de $F'P_1$ et $F'P_2$.

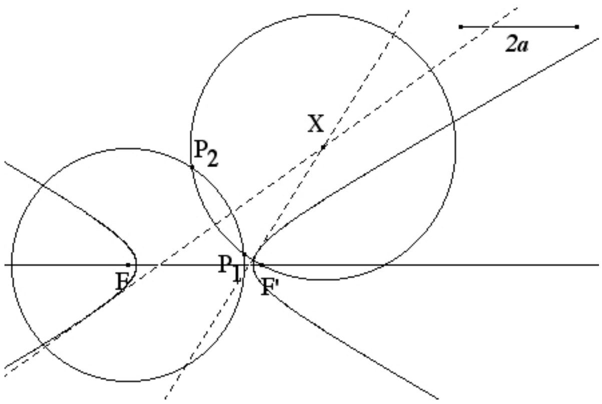
Troisième construction de l'hyperbole

Nous pouvons aussi construire l'hyperbole en choisissant cinq points particuliers et en terminant par la construction d'une conique passant par ces cinq points ([14]).

Comme il nous faut refaire cinq fois la même construction, nous pouvons passer par une macro.

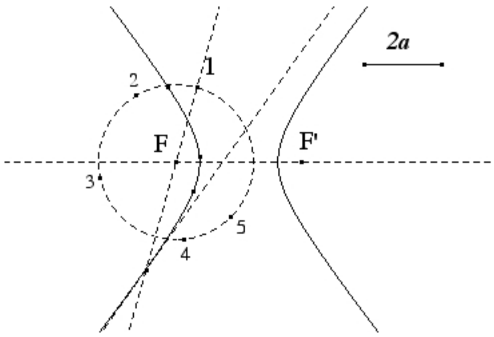
Eléments initiaux : les foyers F et F' et un point P du cercle de centre F et de rayon $2a$.

([12]) On trouvera une démonstration de cette proposition en fin d'article.
([13]) **Courbe** / *Cercle*
([14]) **Courbe** / *Conique*



Construction du rayon focal FP et de la médiatrice de $[P, F']$.

Elément final : le point d'intersection des deux droites que nous avons construites.



Asymptotes de l'hyperbole

Nous pouvons maintenant partir de cette courbe dont tous les points sont utilisables pour faire des constructions relatives à l'hyperbole. Par exemple la construction des asymptotes.

Pour une hyperbole rapportée à ses axes de symétrie, l'équation $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ donne les coordonnées des sommets : $(a, 0)$, $(-a, 0)$ et des foyers $(c, 0)$, $(-c, 0)$, où c est déterminé par $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Donc, connaissant un sommet et un foyer, il y a moyen de déterminer b. Il suffit de construire le rectangle des axes passant par $(a, 0)$, $(-a, 0)$ et $(0, b)$, $(0, -b)$. Les asymptotes seront les diagonales de ce rectangle.

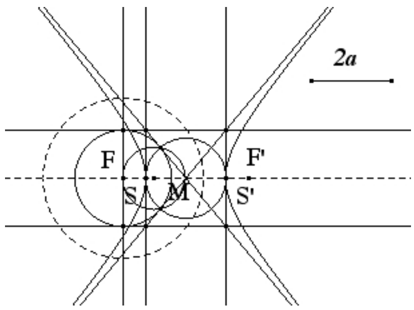
On a directement $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ et donc b est un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle où c est l'hypoténuse et a l'autre côté. Si M est le milieu de S, S', on trace le demi-cercle de diamètre FM, puis le cercle de centre M passant par S. Ces deux cercles donnent une intersection. La distance de ce point d'intersection au foyer donne la valeur de b que l'on reporte sur une verticale passant par F. On achève ensuite le tracé du rectangle des axes par des parallèles. Les diagonales de ce rectangle sont les asymptotes de l'hyperbole.

On peut d'ailleurs envisager une macro pour construire ces asymptotes.

Eléments initiaux : les foyers F et F' et les sommets S et S'

Construction : Les sommets on été trouvés au préalable en traçant l'axe passant par les foyers.

Eléments finaux : les asymptotes.



Démonstration de la propriété de la tangente :

La tangente en un point d'une hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons focaux en ce point.

La démonstration que nous allons faire peut être adaptée à l'ellipse.

La tangente en M à l'hyperbole rencontre l'axe focal en N. Cette tangente est bissectrice de l'angle $\widehat{F'MF}$ si le point N détermine sur le côté FF'

des segments proportionnels aux côtés de l'angle en M. Soit :

$$\frac{|MF'|}{|MF|} = \frac{|TF'|}{|TF|}$$

Calculons tous les éléments de cette relation.

Les distances focales

Sachant que l'hyperbole a pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a \sec \alpha \\ y = b \operatorname{tg} \alpha, \end{cases}$$

on peut calculer, en utilisant la relation $a^2 + b^2 = c^2$, la distance d'un point $M(\mu, \nu)$ au foyer$F$:

$$\begin{aligned}
|MF| &= \sqrt{(\frac{a}{\cos \alpha} - c)^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \\
&= \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \frac{2ac}{\cos \alpha} + c^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \\
&= \sqrt{a^2 - \frac{2ac}{\cos \alpha} + c^2 + c^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \\
&= \sqrt{a^2 - \frac{2ac}{\cos \alpha} + \frac{c^2}{\cos^2 \alpha}} \\
&= \pm \left(\frac{c}{\cos \alpha} - a \right) \\
&= \pm \left(\frac{c}{a} \frac{a}{\cos \alpha} - a \right) \\
&= \pm \left(\frac{c}{a} \mu - a \right).
\end{aligned}$$

Pour l'ellipse, on a avec $a^2 - b^2 = c^2$: $|MF| = \left(\frac{c}{a} \mu + a \right)$.

On calcule de même :

$$|MF'| = \pm \left(\frac{c}{a} \mu + a \right)$$

Nous avons donc en appliquant le résultat précédent :

$$|MF| = \left(\frac{c}{a}\mu - a\right) = \frac{c\mu - a^2}{a}$$
$$|MF'| = \left(\frac{c}{a}\mu + a\right) = \frac{c\mu + a^2}{a}.$$

Les distances de N aux foyers F et F'

Comme la tangente en $M(\mu, \nu)$ à l'hyperbole a pour équation :

$$b^2 x\mu - a^2 y\nu - a^2 b^2 = 0$$

le point d'intersection N avec l'axe focal a pour abscisse :

$$x = \frac{a^2}{\mu}.$$

On a donc :

$$|TF'| = |TO| + |OF'| = \frac{a^2}{\mu} + c = \frac{c\mu + a^2}{\mu}$$
$$|TF| = |OF| - |OT| = c - \frac{a^2}{\mu} = \frac{c\mu - a^2}{\mu}.$$

La proposition est établie suite aux simplifications des dénominateurs.

Nous avons fait le tour des coniques construites comme lieu.

Nous pouvons maintenant penser à construire les coniques comme sections d'un cône par un plan.

Bibliographie

Micheline Denis

Amid D. Aczel,
Fermat's Last Theorem —
Unlocking the secret of an ancient mathematical problem,
Dell Publishing, New York, 1996, 147 pp.,
ISBN 0-385-31946.

Aczel est un mathématicien diplômé de l'Université de Californie à Berkeley. Enseignant, il a aussi écrit de nombreux articles dans diverses publications scientifiques et plusieurs livres. Celui dont il s'agit ici est écrit en anglais (américain) et est d'une lecture facile. Il retrace le cheminement de la mathématique depuis les temps reculés jusqu'au moment de le démonstration par Andrew Wiles, aidé par Robert Taylor, du dernier théorème de Fermat.

Le parcours nous mène à la rencontre de Pythagore, Archimède, Diophante, Fibonacci, Tartaglia, Bernoulli, Euler (topologie), Gauss (correspondance avec Sophie Germain), Dirichlet, Fourier, Kummer, Abel, Poincaré, Cantor, Bourbaki (Weil, Dieudonné, ...), Taniyama, Shimura, et bien d'autres dont les recherches et découvertes, au cours des siècles, ont conduit aux connaissances actuelles en mathématique.

Les chapitres du livre sont découpés en paragraphes ; chacun de ceux-ci constitue un petit sujet qui est intéressant indépendamment des autres. La lecture d'un de ces petits textes permettrait de beaux échanges, en interdisciplinarité, avec le cours d'anglais, au niveau des dernières classes des humanités.

Pour les futurs professeurs de mathématique, cet ouvrage pourrait être un moyen de survoler rapidement et de manière diagonale l'histoire de la mathématique et de la recherche dans le domaine particulier de l'étude des nombres.

Mathématique et Pédagogie n° 155, 37–41, 2006 37

Comment gérer l'hétérogénéité des classes ?

MARTINE MACHTELINGS
Inspectrice de mathématiques DI

Pour apporter des éléments de réponse à cette question capitale, Claudine Plourdeau ([1]) et son groupe ont repensé autrement les tâches de l'enseignant en ne réduisant pas sa mission à la transmission de connaissances. Elle a présenté sa façon de faire lors du congrès national de l'APMEP à Caen ([2]).

Partant du principe que « l'élève nul n'existe pas » ([3]) et en se fixant pour objectif principal de faire en sorte que tous les élèves apprennent, Claudine Plourdeau s'est efforcée de trouver des moyens pour « permettre à chaque élève d'aimer les maths ou de faire des maths ». Elle a choisi de diversifier les tâches des élèves, de les mettre en situation d'action, d'échanges et de débats, de partir de leurs productions pour les amener à passer de « leur savoir » au savoir savant.

La résolution de problèmes est ainsi devenue le fil conducteur de son enseignement et son travail a consisté à :

- Élaborer des situations d'apprentissage différenciées ou diversifiées et enrichies par les apports de la didactique des mathématiques sur lesquels travaille son groupe de L'IREM de Basse-Normandie grâce aux travaux de Guy Brousseau à Bordeau et Régine Douady à Paris VII.
- Analyser les réponses des élèves, erronées ou non, pour mieux comprendre les procédures mises en œuvre et essayer de préciser les démarches mentales.
- Essayer de définir les opérations mentales mises en jeu en résolution de problème et les solliciter à travers les activités proposées aux élèves.

Adresse de l'auteur : M. Machtelings ? ? ?, courriel : `martinemachtelings@hotmail.com`.

([1]) Claudine Plourdeau est professeur de mathématiques au collège Albert-Camus, Torigni-sur-Vire. Elle est formatrice associée en charge de la formation continue à l'IUFM de Basse-Normandie et animatrice de l'IREM de Basse-Normandie dans le groupe « Didactique » depuis 1985.

([2]) Atelier Adm19 : « Plutôt mathématicien... que mathématirien... »

([3]) Plutôt que de dire : « des enfants en difficultés », Claudine Plourdeau préfère dire : « des enfants qui rencontrent des difficultés » et mieux encore : « des enfants qui rencontrent des difficultés face à certaines tâches ».

Ces différentes tâches qu'elle s'est données l'ont amenée à repérer, dans les productions d'élèves, à quels niveaux s'opèrent les dysfonctionnements. Tout son travail est basé sur la pédagogie de l'obstacle : « Dans une démarche d'enseignement-apprentissage, il paraît indispensable de repérer des obstacles qui deviendront des objectifs d'enseignement pour permettre à l'élève le progrès intellectuel attendu. » Cette pédagogie consommant beaucoup de temps, il est nécessaire de valoriser les efforts des élèves. À cette fin, une grille d'évaluation formatrice est utilisée pour évaluer non seulement le résultat mais aussi toutes les étapes à franchir pour l'obtenir. Il est aussi nécessaire de développer chez l'élève un comportement de recherche.

Aujourd'hui, Claudine Plourdeau décrit certains travaux de recherche et propose aux enseignants des outils de réflexion et d'analyse. Il ne s'agit en aucun cas de protocoles complets à expérimenter dans les classes et ceux qui souhaitent les utiliser doivent se les approprier.

Trois postulats :

- Apprendre n'est pas facile.
- Parler et écrire pour apprendre, c'est apprendre à parler et à écrire (phrase pouvant être lue dans les deux sens).
- Il est normal de se tromper pour apprendre.

Des suggestions :

... pour apprendre ... et motiver ...

- Proposer des situations riches et complexes
  - Pour lesquelles l'élève fait des essais-erreurs ;
  - Qui consomment du temps (de 5 à 7 heures) pour que chaque élève puisse produire, construire (demander une plage de deux périodes consécutives) ;
  - Pour lesquelles « travail mérite salaire » (évaluation).
- Étaler les apprentissages dans le temps :
  - Jamais un chapitre entier à la fois ;
  - Des contrôles régulateurs et devoirs à coefficients différents ;
  - « Math à la carte » (que l'on note à la fin du cahier de recherche). Hors chapitre, hors progression, on saisit l'opportunité du jour : par exemple, 5 élèves n'ont pas fait le devoir, quel pourcentage ?
- Utiliser différents types d'écrits mathématiques.
  Les **anecdotes** ou les **mémoires de classe** sont des écrits qui relatent de manière détaillée des moments vécus par les élèves dans leur classe. Ils sont élaborés en groupe et participent à construire chez l'élève une

mémoire d'apprentissage : chacun peut à tout moment relire toutes les étapes de l'apprentissage. Les **fiches-outils** ou les **analyses de tâche** régulent le fonctionnement cognitif de l'élève. Elles constituent des outils évolutifs et adaptatifs afin d'en évaluer l'efficacité et qui prennent en compte l'hétérogénéité des élèves.
Pour que les élèves différencient la nature des écrits, ceux-ci sont entourés :

- De bulles quand il s'agit de productions ou de réflexions d'élèves qui peuvent être soit des objets de débats ou d'analyse, soit des indications sur les méthodes à appliquer ;
- De cadres quand il s'agit de savoir construit ou utilisé.

Pour aider les élèves à sélectionner les informations, différentes couleurs sont aussi utilisées.

Les différents écrits mathématiques

1. **Les mémoires de classe**
   Ce sont des traces écrites racontant, dans le langage des élèves, tous les échanges survenus dans le groupe-classe pendant la phase bilan d'une situation d'apprentissage ou de résolution de problèmes à travers lesquels les élèves construisent leur savoir par débat, preuve ou réfutation. Dans cette démarche, l'erreur est constitutive de la connaissance dans un apprentissage de type constructiviste et ces écrits renseignent alors sur l'état de connaissance des élèves.
2. **Les anecdotes de classe**
   Une anecdote de classe est un écrit court et circonstancié qui souligne un événement significatif : un dysfonctionnement, une représentation erronée ou non… et qui devient objet de débat, de validation ou de réfutation. Elle est notée nominativement à l'intérieur d'une bulle dans le cahier de recherche que possèdent les élèves.
   Exemple : … à l'occasion d'activités sur les différentes écritures d'un nombre (en 6^{e})
   Arthur : « Les quotients des divisions par 3 ont toujours une écriture décimale illimitée »
   Réaction de Simon : « C'est faux car 6/3=2 ou 3/3=1 ».
   Le deuxième élève donne deux exemples qui montrent que la conjecture énoncée par le premier est fausse. En réalité, un seul exemple suffirait.
   C'est là une opportunité pour définir ce qu'on appelle un

On construit le « Si »

Énoncé	Figure associée	Écriture mathématique
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont . . .		
Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont . . .		
Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est alors . . .		

La conjecture donne le « Alors »

Si . . . $\longrightarrow$ Figure

. . . alors $\longleftarrow$ Figure

Fig. 1 – Exemple de « Fiche-outil »

« contrexemple » et construire ainsi progressivement dès la 6$^{\text{e}}$ des outils d'apprentissage à la démonstration.

3. **L'analyse de tâche**

Elle a pour fonction de faire prendre conscience aux élèves de leurs processus mentaux, en explicitant ou/et en travaillant :

- L'identification de la tâche ;
- Les savoirs concernés ;
- Les étapes de calcul ;
- Leurs démarches.

Elle est propre à chaque élève et est évolutive : elle est nécessaire tout le temps où le savoir n'est pas maîtrisé. Elle permet de passer d'un apprentissage implicite à un apprentissage explicite et permet aussi à l'élève de prendre conscience de toutes ses démarches mentales. Lors d'activités d'apprentissage, l'élève écrit dans une marge réservée à droite toutes les règles ou procédures à utiliser : il est ainsi amené à d'abord contrôler qu'elles sont adaptées aux conditions de l'exercice et ensuite les appliquer correctement. Écrire les actions à effectuer de façon systématique participe à les rendre de plus en plus automatiques pour finir par le devenir entièrement. Alors quand l'élève n'a plus besoin de réfléchir, la performance est construite, la tâche est devenue routinière et ne nécessite plus de prise de décision consciente.

4. **Les « fiches-méthode » ou « fiches-outil »**
   On y explicite des méthodes d'apprentissage pour amener l'élève à prendre conscience de ses fonctionnements intellectuels. Elaborées à partir des obstacles (pôles de dysfonctionnement des élèves) pour les franchir, elles programment et régulent la réflexion de l'élève, prévoient la planification et l'organisation du travail de l'élève par l'élève. Dans le cadre d'une réflexion et d'un travail mené sur la démonstration, plusieurs outils ont été créés et pratiqués ; ils ont permis à un certain nombre d'élèves de bien progresser.
   Exemple : Pour apprendre à formuler et à formaliser un énoncé. (V. fig. 1.)

- Construire l'autonomie.
  « On ne les prendra pas par la main pour aller au lycée ! » Ne pas oublier un outil essentiel de régulation de l'apprentissage : l'évaluation. (Voir fiche en annexe)
- Penser à l'importance de la configuration de la salle.
  Dans le local de Claudine Plourdeau, son bureau se trouve à l'arrière avec deux grandes tables à côté (elle invite des élèves « dérangeants » à venir y travailler en le présentant comme moyen d'éviter les tentations plutôt que comme punition).

Le 13e RMT, première édition en Communauté française de Belgique

PHILIPPE SKILBECQ
Responsable de l'organisation du RMT pour la SBPMef

Le Rallye Mathématique Transalpin est un concours de mathématiques, créé en Suisse il y a 13 ans (1) et destiné aux élèves des quatre dernières années de l'enseignement fondamental et aux trois premières années de l'enseignement secondaire. En Communauté française, le RMT est organisé depuis 2004 uniquement pour les élèves de 3e, 4e, 5e et 6e primaires.

Pour cette première édition, 148 classes se sont inscrites au RMT en Communauté française, toutes provinces et tous réseaux confondus. L'analyse des fichiers d'inscription par rapport aux catégories montre une forte représentation de la catégorie 6 —6e année primaire— avec près de la moitié des effectifs (Fig. 1). Peut-être cela traduit-il une *croyance* selon laquelle les

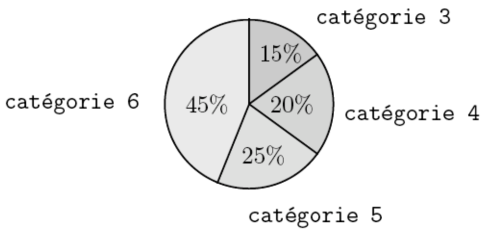


FIG. 1 – Répartition entre les quatre catégories

« problèmes de math c'est surtout pour les grands ». Cependant si l'on se

Adresse de l'auteur : Ph. Skilbecq, Rue de la Chapelle 36, 6542 Sars-la-Buissière ; courriel : phskilbecq@cfwb.be

(1) Pour plus de renseignements sur l'historique du Rallye Mathématique Transalpin, nous invitons le lecteur à visiter le site Internet du Rallye Mathématique Transalpin en Communauté française, `http ://www.enseignement.be/rallyemathsbpm`

réfère aux documents officiels que sont les *Socles de compétences*, aucune distinction d'âge n'est faite quant à l'usage des problèmes dans les situations d'apprentissage. Mais sans doute, faudrait-il aussi s'entendre sur le terme « problème ». Dans l'article *Confrontations mathématiques, quels apports pour les maîtres ?*, Fr. Jaquet rencontre quelque peu cette problématique. Nous y reviendrons également dans un prochain article.

Les objectifs essentiels du RMT sont au nombre de deux. D'abord, proposer un concours de mathématiques où les élèves résolvent des problèmes en groupe, en prenant en charge l'entièreté de la résolution. Ensuite, utiliser les résultats de ce concours à des fins de recherche en didactique des mathématiques et proposer aux enseignants l'ensemble des constats, recherches, exploitations, ... Ce sont là deux objectifs ambitieux au service des enseignants et des élèves.

L'organisation de ce concours est prévue en quatre étapes. La première, de novembre à décembre, consiste à réaliser une épreuve d'essai dans sa classe afin de déterminer, avec les élèves, de la participation au Rallye Mathématique Transalpin. C'est aussi pour le maître le moment de se mettre en recul et d'observer ses élèves en situation de résolution de problèmes en groupe, d'observer leur capacité à former des groupes, à prendre en charge un énoncé, à discuter des procédures de résolution, à les argumenter, à discuter et argumenter la ou les solutions, à se mettre d'accord sur une notation et une justification ou une explication, ... Ces observations serviront lorsque la classe entière analysera les problèmes et leur résolution, tant au niveau proprement mathématique qu'au niveau des comportements de groupe. Cette épreuve d'essai possède donc un double objectif, déterminer la participation au RMT et s'entraîner à cette façon de résoudre des problèmes.

Ensuite, viennent les deux épreuves qualificatives, l'une en janvier, l'autre en mars. Elles s'organisent en classe, durant une période de **50 minutes**, sous la surveillance d'un adulte **autre que l'enseignant**. Ces deux dernières conditions sont essentielles dans l'organisation du Rallye Mathématique Transalpin.

Enfin, l'épreuve finale a rassemblé en mai, cette année à Nivelles, les quatre meilleures classes —résultats cumulés aux épreuves qualificatives— de chaque catégorie, soit 16 classes.

1. La finale du samedi 7 mai 2005

Seize classes étaient donc réunies à Nivelles pour disputer la finale de la première saison du Rallye Mathématique Transalpin en Communauté française de Belgique. Le tableau ci-dessous présente les finalistes (sans ordre particulier) et les quatre classes gagnantes.

Catégorie 3	Catégorie 4	Catégorie 5	Catégorie 6
Gagnants			
Institut Notre-Dame de Bonne Espérance, Braine-le-Comte M. Philippe Delabie	École primaire Sainte Véronique, Liège M. Claude Thonon	École primaire Sainte Véronique, Liège M. Nicolas Schmitz	École communale de Grand Manil, Gembloux M. Luc Ronsmans
Finalistes			
Institut Notre-Dame de Bonne Espérance, Braine-le-Comte	École communale du Jardin botanique 1, Liège	École communale du Jardin botanique 1, Liège	Sacré-Cœur de Lindhout, Bruxelles
Institut Notre-Dame de Bonne Espérance, Braine-le-Comte	École libre, Meux	École Saint Jean Baptiste, Huppaye	École communale, Thiméon
Athénée royal Verdi, Verviers	École Saint Jean Baptiste, Huppaye	École communale, Hyon	Institut Notre-Dame, Marche-en-F.

TAB. 1 – Résultats par catégories

2. Des comportements d'élèves lors de la finale

Lors de la finale à Nivelles, des étudiants de la section « instituteurs » de la HE P.-H. Spaak de Nivelles et de la ENCBW de Louvain-la-Neuve accompagnaient les classes finalistes dans leur local respectif. Ces étudiants étaient ainsi chargés de veiller au bon déroulement de la finale. Ils avaient aussi pour tâche d'observer les élèves à partir d'une grille d'observation structurée en trois parties :

– La prise de connaissance des problèmes et la formation des groupes ;
– La résolution des problèmes ;
– La rédaction des solutions et des explications, justifications ou vérifications.

L'objet de ces observations était de connaître davantage le comportement des élèves en situation de résolution de problèmes en groupe. La récolte des données relatives à ces observations et leur analyse montrent que les élèves de 2 classes seulement lisent les problèmes avant de former les groupes et de se répartir les problèmes (Fig. 2). Nous pouvons nous en étonner car il est raisonnable de penser que pour se répartir les problèmes, il faut les lire au préalable.

Nous nous sommes donc intéressés à la manière avec laquelle les groupes avaient été constitués. La poursuite de l'analyse met en évidence que pour 11 classes sur les 16, les groupes ont été formés à l'avance par l'enseignant (Fig. 3).

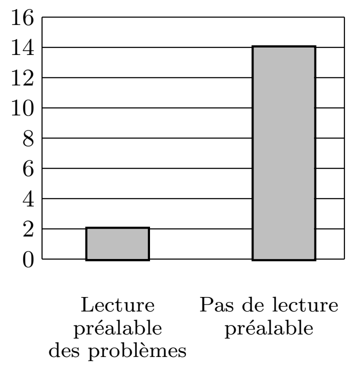


Fig. 2 – Lecture des problèmes avant formation des groupes

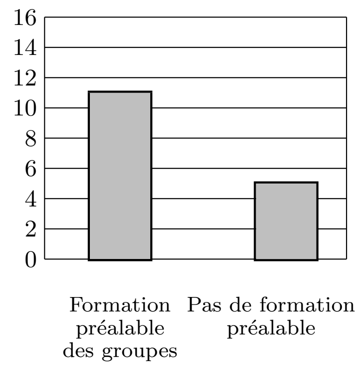


Fig. 3 – Formation des groupes

Ces résultats montrent que les enseignants ont pris en charge la formation des groupes plutôt que de donner aux élèves les outils (connaissances et compétences) nécessaires à ce difficile exercice. Peut-être est-ce dû à la formation —ou l'information— des enseignants par rapport au travail de groupe. Peut-être aussi faut-il tenir compte du contexte « compétitif » de la finale. Il est tout à fait légitime de participer à un concours avec l'envie de gagner. Il faut cependant replacer ce concours dans le contexte éducatif de l'école. Le concours peut être considéré comme un moyen complémentaire à tous ceux déjà à la disposition des enseignants pour rencontrer différents apprentissages, notamment ceux liés à l'aspect collaboratif. En effet, le « concept » Rallye Mathématique Transalpin peut être analysé à partir de deux situations distinctes. D'abord, la plus évidente sans doute, la situation de concours dans laquelle il faut être le plus performant. Ensuite, la situation d'enseignement-apprentissage durant laquelle, dégagés de toute pression, enseignants et élèves complètent leur formation à propos de tel ou tel domaine envisagé par le Rallye Mathématique Transalpin, reprennent l'un ou l'autre problème plus complexe et tentent de le résoudre en groupe classe. . .

Pour revenir au constat cité ci-dessus et concernant la formation des groupes, loin de nous l'idée de blâmer les enseignants qui ont formé les groupes au préalable. Dans un contexte de compétition, il faut agir pour gagner : c'est le propre d'un concours, pour autant que l'on respecte les règles. Et dans ce cas précis, les règles sont claires : l'entière organisation de la résolution des problèmes doit être laissée aux élèves. L'enseignant ne peut donc intervenir dans l'organisation des groupes. Nous reviendrons dans un prochain article sur ce point du règlement et les conséquences qu'il peut avoir sur le travail en classe.

3. Quels problèmes en 2004 – 2005 ?

Pour bien comprendre ce qu'est le Rallye Mathématique Transalpin, nous nous sommes également intéressés aux problèmes proposés au cours de cette première session. Nous avons ainsi réalisé un premier classement des problèmes à partir d'une typologie basée sur les domaines : arithmétique, géométrie, logique, mesure, raisonnement, combinatoire.

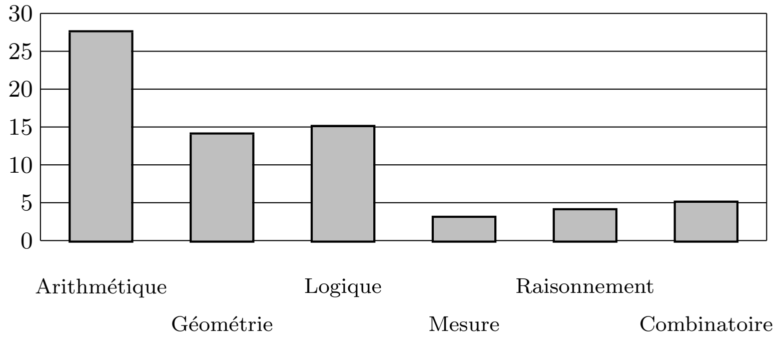


FIG. 4 – Analyse typologique selon les domaines

Un constat s'impose d'emblée : les problèmes d'arithmétique représentent une large part des problèmes proposés au Rallye Mathématique Transalpin (près de 50 %). Il faut cependant être conscient que pour certains problèmes l'arithmétique ne constitue pas la difficulté majeure. L'analyse *a priori* du problème des *deux rectangles* ci-dessous, extrait de l'épreuve finale de 2005, catégories 4, 5 et 6, illustre ce propos.

Les deux rectangles (Cat. 4, 5 et 6)

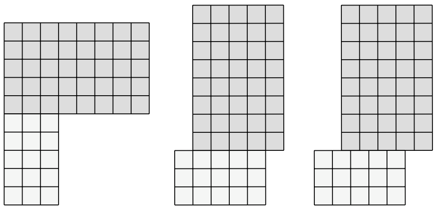
On découpe deux rectangles dans une feuille de papier quadrillé, en suivant les lignes du quadrillage. Les dimensions du premier rectangle sont 5 et 8, celles du second sont 5 et 3 (unité : le côté d'un carré du quadrillage).

On place ces deux rectangles l'un contre l'autre, sans les superposer, de façon à ce qu'ils se touchent par un ou plusieurs côtés entiers de carreaux. (Un carreau d'un rectangle ne peut en toucher qu'un seul de l'autre rectangle, par un côté entier.) On peut obtenir ainsi de nombreuses figures.

Exemples : *Les figures 5 (A) et 5 (B) sont correctes. La figure 5 (C) est incorrecte car certains carreaux d'un rectangle touchent deux carreaux de l'autre rectangle.*

Les figures obtenues n'ont pas toutes le même périmètre. Par exemple, le périmètre de A mesure 36 unités, celui de B en mesure 34.

Quel est le plus petit périmètre que peut avoir une figure obtenue en assemblant ces deux rectangles en respectant les règles d'assemblage ? Et quel est le plus grand périmètre qu'on peut *obtenir ? Expliquez comment vous avez trouvé et montrez vos solutions.*



A *B* *C*

Fig. 5 – Les deux rectangles

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

Géométrie : rectangles, polygones et périmètres

Arithmétique : additions

L'arithmétique est toutefois une activité importante de l'activité mathématique, comme le souligne D. Perrin, « [...], l'un des éléments importants, pour l'élève comme pour le mathématicien, est la capacité de mener des calculs. Cet aspect technique est fondamental (et parfois sous-estimé) car il conditionne la progression [...] C'est un peu la même situation que pour un musicien : la virtuosité n'est pas un but, mais elle est un atout précieux » ([2]).

D'autres typologies pourraient être envisagées dans les mois à venir pour classer les problèmes du RMT, comme celle basée sur les démarches nécessaires à la résolution des problèmes, ou celle basée sur les démarches de validation des réponses. Ce long travail a été initié dans plusieurs sections de l'Association du Rallye Mathématique Transalpin.

([2]) Ermel, [1999], *Vrai ? Faux ?... On en débat !*, Paris : INRP. — D. Perrin est professeur de mathématiques à l'IUFM de Versailles.

4. Conclusion

Cette première édition du Rallye Mathématique Transalpin en Communauté française de Belgique peut être considérée comme un succès pour les mathématiques. Aux dires des enseignants participant à la finale, ce fut une belle aventure.

Mais le Rallye Mathématique Transalpin est aussi une grande communauté de recherche sur l'enseignement des mathématiques avec cette caractéristique qu'elle englobe plusieurs pays européens.

Participer au Rallye Mathématique Transalpin avec sa classe c'est participer à cette communauté de recherche.

Confrontations mathématiques, quels apports pour les maîtres ?

FRANÇOIS JAQUET
Coordinateur international de l'ARMT

Résumé : L'examen des copies rendues par les groupes d'élèves résolvant des problèmes dans le cadre du Rallye Mathématique Transalpin (RMT) permet d'identifier leurs différentes stratégies de résolution. Cet article décrit les procédures relevées pour deux problèmes du 13e RMT : « Les pots » et « Les trois coffres ». Il met en évidence, pour chacune d'elles, les savoirs effectivement mis en œuvre par les élèves, tels qu'ils apparaissent à la lecture de leurs explications. Les différentes catégories de stratégies conduisent à des interrogations et à des suggestions de développement pour les maîtres qui aimeraient en savoir plus sur les potentialités de ces problèmes dans le cadre de leur enseignement : pour exploiter l'intérêt suscité par leur résolution en compétition, pour l'évaluation des représentations et des compétences de leurs élèves, pour de nouvelles activités d'apprentissage destinées à leur classe entière.

1. Introduction

1.1. Le cadre général

Les concours de mathématiques se développent un peu partout dans le monde dans le cadre des structures scolaires ou en marge de celles-ci. Sous des modalités très diverses, ils proposent, en général, des problèmes à résoudre. Leurs organisateurs sont bien souvent des professeurs de mathématiques, dont l'objectif est de faire partager leur intérêt pour la discipline à leurs élèves ou à un public plus large. Certains concours attirent les « forts en maths » et se limitent à établir un palmarès fondé sur les « bonnes réponses » obtenues. D'autres, de plus en plus nombreux, ont des visées pédagogiques : engagement des maîtres, initiation à de nouvelles

Adresse de l'auteur : Fr. Jaquet, Revue « Math-École », Institut de Mathématiques, 11, Rue Émile-Argand, CH - 2007 Neuchâtel, Suisse ; courriel : fr.jaquet@wanadoo.fr
François Jaquet est également un ancien collaborateur de l'Institut Romand de Recherche et Documentation Pédagogique (IRDP) et rédacteur de la revue Math-École.

pratiques ... Le Rallye Mathématique Transalpin s'inscrit dans cette tendance, affiche explicitement des objectifs en vue de la formation des maîtres et, à cet effet, analyse de manière détaillée ses problèmes et les stratégies des groupes d'élèves qui les résolvent.

Le Rallye Mathématique Transalpin demande aux élèves, non seulement la (les) réponse(s) aux problèmes proposés, mais aussi, des explications sur la manière dont ils ont procédé pour y arriver par des injonctions du genre « expliquez comment vous avez trouvé », « indiquez les détails de vos calculs »...

Les informations apportées sur les « feuilles-réponses » ou « copies » des groupes d'élèves sont certes fragmentaires ou difficiles à interpréter, mais le RMT les considère comme essentielles :

– pour en savoir plus sur les procédures ou stratégies de résolution, du point de vue du maître,
– pour inciter à l'explicitation et à un retour sur les parcours de résolution empruntés par les élèves.

Les maîtres sont associés à toutes les étapes du rallye, dans la mesure de leurs disponibilités ils peuvent ainsi :

– observer des élèves (les leurs lors de l'épreuve d'essai et ceux d'autres classes lors des autres épreuves) en activité de résolution de problème ;
– évaluer les productions de leurs propres élèves et leurs capacités d'organisation, de discuter des solutions et de les exploiter ultérieurement en classe ;
– introduire des éléments de renouvellement dans leur enseignement par des échanges avec d'autres collègues et par l'apport de problèmes stimulants ;
– s'engager dans l'équipe des animateurs et participer ainsi à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.

1.2. Les problèmes du RMT

Le Rallye Mathématique Transalpin propose des situations pour lesquelles on ne dispose pas d'une solution immédiate et qui conduisent à inventer une stratégie, à essayer, à vérifier, à justifier sa solution. Cette définition se rapproche de celle du « problème ouvert », qu'on s'approprie rapidement, où l'on trouve des défis, du plaisir à chercher, des aspects ludiques. Elle se distingue de celle de la « situation-problème » destinée à construire une nouvelle connaissance ou à en reconstruire une après s'être trouvé dans une situation conflictuelle où le niveau antérieur de la connaissance s'est révélé inadéquat. Si certains problèmes peuvent effectivement provoquer un conflit cognitif, il manque cependant le temps nécessaire au développement de toutes les phases de recherche, dès le moment où le maître intervient (puisque les règles du concours excluent sa présence pour toute la durée de l'épreuve). Elle est différente de celle du « problème d'application » destiné à renforcer et assimiler des connaissances ou en étendre le champ d'application, qu'on situe généralement en fin de séquence d'apprentissage d'une notion.

Il faut relever que tout problème participe au renforcement des savoirs qu'il mobilise ; ceux du Rallye Mathématique Transalpin cherchent à éviter les effets de « répétition » et « d'exercice » par le choix de contextes les plus originaux possible. Une des conséquences de la définition du problème du RMT, comme de toute compétition, est qu'il doit être inédit (dès qu'on en a trouvé la solution, ce n'est plus un problème), riche et stimulant pour les élèves. Du fait de son étendue géographique, le Rallye Mathématique Transalpin doit créer des problèmes qui conviennent à des systèmes éducatifs différents par leurs programmes et leurs contextes scolaires : tous les pays ne présentent pas les mêmes notions au même degré de la scolarité ; il faut éliminer tous les problèmes ressemblant à ceux des manuels de toutes les régions où se déroulent les épreuves ... ; les contextes des sujets doivent être neutres culturellement, les énoncés doivent pouvoir être traduits dans plusieurs langues ...

Une autre condition, imposée cette fois-ci par les buts que le Rallye Mathématique Transalpin a choisis, envers les maîtres et la formation, est que ses problèmes devraient être exploitables en classe, après le concours. L'évolution s'est faite sur une longue durée, et la question « Qu'est-ce qu'un bon problème, pour le RMT ? » n'a été posée explicitement qu'après 12 ans d'existence, ce qui atteste de l'importance d'une réflexion permanente sur les buts de cette confrontation.

1.3. Les critères de choix d'un problème du RMT

La réponse à la question précédente n'est pas évidente, mais les critères de choix d'un problème se dégagent peu à peu et paraissent aussi pertinents pour la formation. Actuellement, le Rallye Mathématique Transalpin examine les propositions de sujets selon les trois critères suivants.

- Le contenu mathématique.
  Il faut s'assurer que le problème « n'oublie » pas les mathématiques. Il y a effectivement de nombreux jeux, divertissements, casse-tête, défis très plaisants qui, bien que qualifiés de « mathématiques », n'ont pas de contenus disciplinaires que nous sommes capables d'identifier.
- La tâche de résolution.
  Un problème qui mobilise des savoirs mathématiques reconnus du point de vue adulte, peut parfois être résolu par des élèves par des voies détournées. C'est l'analyse de la tâche de résolution, en fonction du niveau de développement de l'élève, qui permet d'éviter l'écueil *a priori*.
- Le contexte.
  Il faut éviter que la décontextualisation constitue la tâche la plus importante du problème.

2. Changement de contexte et mise en évidence des contenus

2.1. Présentation d'un exemple

L'exemple présenté ici est un problème dont il a fallu modifier le contexte pour « ne pas noyer le poisson », pour s'apercevoir que les savoirs mathématiques mobilisés ne sont pas prioritairement d'ordre arithmétique mais combinatoire. Voici l'énoncé dans sa première version, soumis à l'examen des différentes commissions d'examen sur le long parcours de lecture et d'analyse a priori d'un problème du Rallye Mathématique Transalpin.

> <u>*La pêche à la ligne*</u> (Cat. 3, 4)
>
> *Mario se rend à la fête avec son petit frère Gino, où une pêche à la ligne spéciale est organisée. On pêche des poissons en plastique qui portent chacun un numéro. Ils sont dans un grand bocal rempli d'eau. Il y a exactement 9 poissons, ils portent les numéros : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.*
>
> *Pour gagner un lot, il faut pêcher un ou plusieurs poissons, de façon que le total des numéros inscrits sur les poissons pêchés soit exactement égal à l'âge de celui qui pêche. Quand on joue,*

on ne remet pas dans l'eau le poisson que l'on vient de pêcher. Gino a 9 ans. Il gagne en pêchant les poissons 2, 6, 1. Il aurait aussi pu gagner en pêchant par exemple les poissons 4, 5. Mario a 15 ans.

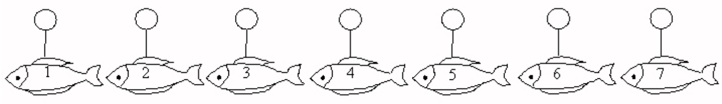
Indiquer toutes les façons possibles de gagner pour Mario.

Expliquez comment vous avez trouvé.

La première version ayant paru un peu difficile, en voici une deuxième :

<u>*La pêche a la ligne*</u> (Cat. 3, 4)

À une fête d'anniversaire, un des jeux organisés est une « Pêche à la ligne » spéciale. Dans une bassine pleine d'eau, flottent 7 poissons en plastique avec un anneau sur le dos, comme ceux dessinés ci-dessous :



Sous le ventre de chaque poisson est inscrit un nombre de 1 à 7 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chaque enfant peut pêcher deux ou plusieurs poissons, sans les remettre dans la bassine. Il gagne si la somme des nombres inscrits sous les poissons pêchés est égale à son âge. Jean a 9 ans et a gagné un prix en pêchant les poissons avec les nombres 2, 6 et 1. S'il avait pêché les poissons avec les nombres 3 et 7, il n'aurait rien gagné. Mario a 11 ans.

Expliquez toutes les possibilités qui permettent à Mario de gagner un prix à la « Pêche à la ligne ».

Expliquez comment vous avez trouvé.

De nombreuses ambiguïtés sont apparues en deuxième lecture.

- La « pêche à la ligne » est un jeu où le numéro des poissons est caché (où la pêche se fait à l'aveugle ou encore au hasard) ; les numéros « sous le ventre » ne sont donc pas visibles pour le pêcheur qui pêche de dessus et le dessin de face ne permet pas de les voir.
- L'énoncé parle de deux poissons ou plus, ce qui signifie qu'un joueur de moins 8 ans serait désavantagé en cas de tirage de 7 au premier poisson.
- La question demande « quelles sont les possibilités ... » C'est une nouvelle ambiguïté, révélatrice. L'analyse de la tâche laisse penser qu'une possibilité comme 7+3+1 est la même que 1+3+7. Or, la situation est

fondamentalement différente dans le déroulement du jeu. Si le joueur (de 11 ans) tire *7* au premier coup, il risque de perdre au deuxième en tirant *5* ou *6*, tandis que s'il tire *1* au premier coup et même *3* au deuxième coup, il sait qu'il peut encore jouer son 3^{e} coup sans aucune crainte). Donc, les permutations des termes correspondent à des situations de jeu différentes. Il a donc fallu trouver un contexte plus simple, pour éviter tous les implicites d'un jeu de kermesse artificiel, empêchant des élèves travaillant seuls « d'entrer » dans le problème sans les relances habituelles du maître.

<u>*Les pots*</u> (Cat. 3, 4)

Devant l'arrosoir, qui contient exactement 11 litres d'eau, il y a sept pots vides : de 1 litre, 2 litres, 3 litres, 4 litres, 5 litres, 6 litres et 7 litres.

Mario doit choisir quelques pots dans lesquels il versera toute l'eau de son arrosoir. Les pots choisis devront être entièrement pleins, mais il ne faut pas qu'ils débordent !

Quels pots Mario peut-il choisir ?

Par exemple, si Mario choisit les pots 3, 4 et 6, il n'aura pas assez d'eau pour les remplir tous. S'il choisit les pots 6 et 2, il n'arrivera pas à vider entièrement son arrosoir. S'il choisit les pots 3, 6 et 2, c'est possible, il pourra vider l'arrosoir et remplir entièrement les pots.

Mais il y a encore d'autres possibilités.

Indiquez-les toutes et expliquez comment vous les avez trouvées.

Le nouveau contexte des « pots » évite les écueils précédents. Il n'y a plus de « jeu », ni de joueurs, ni de poissons à remettre seulement en fin de partie ou entre les parties hypothétiques. Le hasard n'intervient plus et c'est peut-être une perte, mais, de toute manière, comme on n'en tire pas profit ... Les solutions peuvent se trouver sans savoir ce qu'est la « somme » et sans écritures mathématiques. Le fond du problème mathématique subsiste : c'est-à-dire l'inventaire, qui demande une organisation, comme le relève l'analyse *a priori*.

Quelques résultats

Les critères d'attribution des points qui figurent dans l'analyse *a priori* du problème vont de 4 points pour une réussite avec explications à 0 point en cas d'incompréhension du problème ou d'échec total, selon le barème suivant :

4 - Sept possibilités sont données (ou six si on ne répète pas celle de l'exemple de l'énoncé) (7 et 4 ; 7, 3 et 1 ; 6 et 5 ; 6, 4 et 1 ; 6, 3 et 2 ; 5, 4 et 2, 5, 3, 2 et1) avec explication ou organisation de l'inventaire.
3 - Les sept (ou six) possibilités sont énoncées sans explication, sans organisation du comptage, éventuellement avec une ou deux répétitions (sommes utilisant les mêmes termes mais dans un autre ordre (comme 7, 3, 1 et 3, 1 7), ou sommes utilisant deux fois le même terme (comme 7, 2, 2 et 5, 3, 3).
2 - 4 ou 5 possibilités différentes de l'exemple, avec ou sans explications (des répétitions pouvant figurer).
1 - 2 ou 3 possibilités différentes de l'exemple, avec ou sans explications (des répétitions pouvant figurer).
0 - Toute autre réponse et/ou incompréhension du problème.

Selon ces critères, voici les moyennes obtenues par 350 classes de catégories 3, 4, 5, de 7 sections [1] (de A à G) du RMT.

Catégories	A	B	C	D	E	F	G	Moy. arithm.
3^e^	3,2	2,2	2,3	2,4	3,2	2,6	2,2	2,5
4^e^	3,0	2,5	2,8	3,1	3,7	3,0	2,6	2,9
5^e^	3,3	2,7	2,8	2,8	3,6	3,0	3,0	3,0
Moy. arithm.	3,1	2,5	2,7	2,8	3,6	2,9	2,6	2,9

Quelques commentaires à leur propos.

– Le problème est considéré comme « bien réussi » pour le RMT, avec des moyennes nettement supérieures à 2.
– On ne relève aucun « 0 point » sur l'ensemble des copies examinées dans ces sections.
– Les variations d'une section à l'autre ne sont vraisemblablement pas dues entièrement au niveau de connaissances ou de compétences des

[1] Les sections sont ici identifiées anonymement, ce qui permet une étude statistique en toute indépendance d'esprit.

élèves, ni aux programmes nationaux. Il faut plutôt y voir des interprétations différentes des barèmes par les jurys locaux qui ont attribué les points. En particulier pour ce cas, que signifie « l'explication ou l'organisation de l'inventaire » demandée pour l'attribution des 4 points ?

2.2. Les justifications des élèves

Voici quelques exemples d'explications, tirés des copies de la section de Belgique, de catégorie 4 :

- *On a choisi ces possibilités parce qu'elles font toutes 11.*
- $7\ell + 4\ell = 11\ell$. *On a fait 7 pour arriver à 11 et on a trouvé 4.*
  $6\ell + 5\ell = 11\ell$. *On a fait 6 pour arriver à 11 et on a trouvé 5.*
  $6\ell + 4\ell + 1\ell = 11\ell$. *On a fait 6 pour arriver à 11 et on a trouvé 4 et 1...*
- $5 + 7 = 12 + 3 = 15 - 3 - 2 = 11 - 6 = 5 + 4 = 9 + 4 = 1$.
- *On fait tous les calculs possibles qui font 11 litres.*
- *On a d'abord bien lu le problème, puis on a chacun cherché et marqué les réponses dans son cahier de brouillon. Puis on s'est montré les réponses pour voir si on avait les mêmes mais il en manquait une à mon ami (*$5 + 3 + 2 + 1$*). Voilà ce qu'on a trouvé :* $6\ell + 4\ell + 1\ell = 11\ell$ ... (suivent les 6 autres possibilités.)
- *Il y a 7 possibilités.*
  1 ℓ, 2 ℓ, 3 ℓ, 5 ℓ.
  1 ℓ, 3 ℓ, 7 ℓ.
  1 ℓ, 4 ℓ, 6 ℓ.
  2 ℓ, 4 ℓ, 5 ℓ.
  2 ℓ, 3 ℓ, 6 ℓ.
  4 ℓ, 7 ℓ.
  5 ℓ, 6 ℓ.
- *On a additionné pour trouver 11, puis on a inversé les chiffres !*
  Exemples :
  74, 47
  65, 56
  641, 614, 416, 461, 164, 146, ...
  5123, 5132, 5231, 5213, 5312, 5321,1235, ...
  Réponse : 52 possibilités.

2.3. Intérêt pour l'enseignement

Il faut relever qu'aucune faute de calcul n'a été relevée parmi les copies analysées, ce qui tend à dire que les compétences en calcul sont suffisantes et que, par conséquent, l'intérêt du problème n'est pas du domaine de l'arithmétique, mais de la combinatoire. Il y a cependant beaucoup d'inventaires incomplets (2 points) ou mal organisés. L'oubli le plus fréquent est la solution en quatre termes (5 ; 3 ; 2 ; 1). Lorsque la réponse est complète, elle est rarement accompagnée d'une liste organisée des solutions et encore plus rarement de considérations sur le fait qu'il n'y a pas d'autres possibilités. Le problème ne fait intervenir que des connaissances très élémentaires sur l'addition, mais il exige une démarche scientifique pour l'élaboration de l'inventaire des possibilités. Est-ce un objectif des « programmes » officiels ? C'en est un, assurément, de la discipline des mathématiques et de son enseignement. « Les pots » dans la version examinée ici, n'est donc pas un problème d'application des opérations arithmétiques élémentaires, mais plutôt une situation au cours de laquelle les élèves ont l'occasion de conduire un inventaire organisé, de vérifier les solutions trouvées et de se convaincre qu'il n'y en a pas d'autres par une argumentation rigoureuse. On imagine aisément qu'on peut modifier les données de l'énoncé, augmenter ou diminuer les nombres en jeu et, surtout, exploiter le problème lors de débats collectifs où les élèves explicitent leurs stratégies pour arriver à l'exhaustivité de leurs inventaires.

3. Analyse de la tâche et savoirs mathématiques

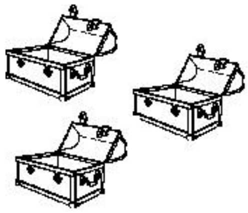
Il est important, mais aussi difficile, d'analyser la tâche de résolution d'un problème, *a priori* et *a posteriori*, pour déterminer quels sont les savoirs mathématiques auxquels les élèves font appel pour sa résolution. Dans ce deuxième exemple, le problème a été accepté, selon les critères de choix du RMT, mais avec un développement sensible de son analyse *a priori*, avec de nombreux doutes sur son niveau de difficulté qui l'ont fait monter des catégories 3 à 5 aux catégories 5 et 6 et, finalement, avec une belle surprise lors de l'analyse des résultats.

3.1. Le problème

<u>*Les trois coffres*</u> (Cat. 5, 6)

Le contenu de chacun de ces trois coffres a la même valeur que 30 pièces d'or.

Dans chaque coffre, il n'y a que des lingots.
Dans le premier coffre, il y a 4 petits lingots et 1 lingot moyen.
Dans le second coffre, il y a 2 petits lingots et 2 lingots moyens.
Dans le troisième coffre, il y a 1 lingot moyen et 1 grand lingot.



Combien de pièces d'or vaut un petit lingot ?
Combien de pièces d'or vaut un lingot moyen ?
Combien de pièces d'or vaut un grand lingot ?
Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

3.2. L'analyse de la tâche

Les différents groupes qui ont examiné le premier projet ont constaté que le problème, d'un point de vue mathématique, présente un système de trois équations du premier degré à trois inconnues : $4p+m = 2p+2m = m+g = 30$ (où m, n et p sont exprimés en nombre de pièces d'or) et qu'il paraissait trop ambitieux de le proposer à des élèves de 8 à 11 ans comme prévu initialement.

Les « domaines de connaissances » proposés étaient l'arithmétique (échanges, équivalences) et la logique. Les différentes consultations y ont ajouté la proportionnalité. Dans le premier projet de l'analyse *a priori*, « l'analyse de la tâche » était formulée ainsi : « Comprendre que 1 lingot moyen vaut 2 petits et qu'un grand vaut 2 moyens ou 4 petits. Comprendre que 6 petits lingots valent 30 pièces d'or et donc qu'un petit lingot vaut 5 pièces d'or (30 : 6 = 5). Trouver la valeur d'un lingot moyen ($10 = 2 \times 5$) et d'un grand lingot ($20 = 4\times 5$) ». Cette analyse s'est sensiblement développée et affinée par l'apport des contributions des différents lecteurs, elle a aussi bénéficié d'une expérience des années précédentes. Il a fallu envisager la résolution « experte » pour faire apparaître les opérations en jeu dans la résolution, par exemple, des équations : $4p+1m = 2p+2m = 1m+1g = 30$.

Des résultats antérieurs ont aussi renforcé ce besoin de développer l'analyse. Un problème du 6[e] RMT ([2]) : « Les pots de confiture » de structure tout à fait analogue (mais avec des plus grands nombres de pots/lingots et des rapports de 3 —au lieu de 2— entre les masses/valeurs des grands, moyens et petits) s'était révélé difficile, en catégories 6, 7 et 8. Finalement, le texte de cette analyse de la tâche a passé de quelques lignes à plus d'une vingtaine, et il se révélera encore bien lacunaire lors de l'examen des copies reçues :

– *Se rendre compte que, si chaque valeur de coffre est de 30 (pièces d'or), les coffres sont équivalents entre eux, bien qu'ils ne contiennent que des lingots différents soit en nombre soit en grandeur.*
  Tirer, de l'équivalence entre les contenus des deux premiers coffres : $4p + 1m = 2p + 2m$ *(p désigne la valeur d'un petit lingot, m désigne la valeur d'un lingot moyen) une équivalence plus simple en retirant* $2p$ *dans chaque coffre :* $2p + 1m = 2m$*, puis une dernière équivalence encore plus simple, en retirant 1 m de chaque coffre, pour arriver à l'équivalence :* $2p = 1m$*.*
  De la même manière, tirer de l'équivalence entre les contenus du premier et du troisième coffre : $4p + 1m = 1m + 1g$ *(g désigne la valeur d'un grand lingot) l'équivalence plus simple :* $4p = 1g$*. On peut donc par substitution, entre les relations* $2p = 1m$ *et* $4p = 1g$*, obtenir la relation* $1g = 2m$*.*

– *À l'aide des relations précédentes, voir que les contenus de chacun des coffres peuvent s'exprimer, après substitution, avec une seule sorte de lingots ; par exemple des petits lingots :*
  – *Le contenu du premier coffre est de* $4p + 1m = 4p + 2p = 6p$ *;*
  – *Le contenu du deuxième coffre est de* $2p + 2m = 2p + 2 \times 2p = 2p + 4p = 6p$ *;*
  – *Le contenu du troisième coffre est de* $1m + 1g = 2p + 4p = 6p$*.*
  Ceci permet de passer à la « mesure » de chaque lingot en pièces d'or.
  – *Comprendre que 6 petits lingots valent 30 pièces d'or et donc qu'un petit lingot vaut 5 pièces d'or (*$30 : 6 = 5$*) ;*

([2]) Crociani. C., Doretti. L., Salomone. L. Un problème et son analyse didactique : Les pots de confiture. In Le Rallye mathématique transalpin, quels profits pour la didactique. Actes des rencontre de Brigue 1997/1998. Ed. responsables L. Grugnetti et F. Jaquet. Università. di Parma, IRDP Neuchâtel, 1999.

– *Trouver la valeur d'un lingot moyen (*$10 = 2 \times 5$*) et d'un grand lingot (*$20 = 4 \times 5$*) :* m *= 10 pièces d'or et* g *= 20 pièces d'or.*
- *Ou : procéder par essais, au hasard ou organisés. Par exemple, à partir du contenu du troisième coffre, postuler que* $m = 12$ *et* $g = 18$*, ce qui conduira à une contradiction en vérifiant ces valeurs de* m *et* g *pour les contenus des deux autres coffres. Puis, ce qui peut paraître naturel, essayer les valeurs* $m = 10$ *et* $g = 20$*, qui permet de trouver* $p = 5$ *par observation du contenu du deuxième coffre et enfin de vérifier ces valeurs pour le contenu du premier coffre.*
- *Ou : travailler avec des représentations graphiques des lingots et des équivalences, plus faciles pour appliquer les règles d'équivalence (par exemple sous forme de balance à équilibrer).*

3.3. Les procédures observées

Sur la base d'une centaine de copies des sections de Cagliari et de Belgique, voici les procédures de résolution identifiées pour ce problème des « Trois coffres » :

A. Le lingot moyen vaut le double du petit comme premier argument.

La clé du problème, pour cette catégorie de procédures, réside dans la découverte du rapport « 2 » entre les valeurs du lingot moyen et du petit et/ou entre celle du grand et du moyen. A partir de ce rapport, on peut passer à la division par 6 et/ou par 3 explicite – comme dans la catégorie précédente – ou implicite. Mais l'interrogation reste la même. Comment les élèves ont-ils trouvé ce rapport ? Il n'y a aucune référence explicite à la réduction logique de la relation entre les deux premiers coffres et la relation $2p = m$:

$4p + 1m = 30$ et $2p + 2m = 30$;
par comparaison, $4p + 1m = 2p + 2m$;
puis, par soustraction de $2p$ et m, on tire $2p = m$.

On ne peut donc pas savoir si ce raisonnement a été conduit implicitement ou si, plus probablement, les élèves sont partis d'une « impression ».

Voici quelques exemples de cette procédure A.

A1. *[...]Abbiamo dedotto queste risposte perché, secondo noi, 2 lingotti piccoli valgono 1 lingotto medio, due lingotti medi valgono uno grande* [...] — [...] Nous avons déduit cette réponse parce que, selon nous, 2 petits lingots valent 1 moyen, 2 moyens valent un grand [...], avec réponses justes et dessins de trois coffres contenant les lingots représentés par des boules de tailles différentes.

(Référence : CA 620)

A2. *4 lingotti piccoli = 2 medi o i grande*
1 lingotto medio = 2 piccoli
1 lingotto grande = 2 medi o 4 piccoli
30 pezzi d'oro = 6 lingotti piccoli
30 pezzi d'oro = 3 lingotti medi
30 pezzi d'oro = 1 lingotto grande e uno medio
Quindi 30 : 6 = 5 *che sarebbe il valore di un lingotto piccolo* 30 : 3 = 10 *che sarebbe il valore di un lingotto medio* 30 : 1,5 = 20 *che sarebbe il valore di un lingotto grande*— Donc 30 : 6 = 5 serait la valeur d'un petit lingot 30 : 3 = 10 serait la valeur d'un lingot moyen 30 : 1,5 = 20 serait la valeur d'un grand lingot.

(Référence : CA 613)

A3. *On sait que 2 moyens = 1 grand, 2 petits = 1 moyen, 4 petits = 1 grand*
par déduction on a trouvé que 1 grand = 20 pièces
1 moyen = 10
1 petit = 5
Réponse : 1 petit lingot est égal à 5 pièces, 1 moyen = 10 pièces, 1 grand = 20 pièces. (Référence : BE 62)

A4. *2 petits lingots = 1 lingot moyen.*
Donc 2 petits lingots + 2 lingots moyens = 3 lingots moyens
30 pièces : 3 lingots = 10 pièces = 1 lingot moyen
5 pièces = 1 petit lingot
20 pièces = 1 grand lingot. (Référence : BE 63)

B. La valeur du petit lingot est 5 et/ou la valeur du moyen est 10 et/ou celle du grand est 20, *a priori*.

Dans la majorité des copies de cette catégorie de procédures, il n'y a aucune justification de la manière dont la valeur 5 a été attribuée au petit lingot (ainsi que 10 et 20 pour les deux autres). Les explications décrivent la manière de calculer la valeur des autres lingots en partant de celles qui paraissent fixées *a priori* ou vérifient que la somme des lingots d'un coffre correspond à 30 pièces d'or. Voir les exemples suivants.

B1. *Solution pour calculer le petit lingot :*
$4 \times 5 = 20$, *20 il faut ajouter 10, et il reste 2 petits lingots*

$6 \times 5 = 30$ *pièces d'or* $=$ *5 pièces dans un petit lingot [...]*
(Référence : BE 65)

B2. *Petit lingot 5 pièces d'or, moyen 10 [...], grand 20 [...]*
1er coffre : $(4 \times 5) + (1 \times 10) = 30$
2e coffre $(2 \times 5) + (2 \times 10) = 30$
3e coffre $(1 \times 10) + (1 \times 20) = 30$ (Référence : BE 66)

C. Estimations ou hypothèses sur la valeur des lingots.

Cette catégorie de procédures se distingue de la précédente par une référence à des hypothèses ou des suppositions sur la valeur des lingots, confirmées ensuite par le calcul des contenus des coffres.

C1. *Dans le premier coffre : si un petit lingot vaut 5 pièces d'or. On fait* $4 \times 5 = 20 + 10$ *(le lingot moyen)* $= 30$ *pièces d'or.*
Dans le deuxième coffre : 10 *(les 2 petits lingots)* +20 *(les 2 lingots moyens)*
Dans le troisième coffre : 10 *(le lingot moyen)* + 20 *(le grand lingot)* = 30 *pièces d'or.* (Référence : BE 68)

C2. Les trois réponses suivies des explications, puis, raisonnement :
on a estimé qu'un petit lingot valait 5 pièces d'or. Dans le premier coffre il y a 4 petits lingots ($4 \times 5 = 20$*) donc il nous reste un lingot moyen (10 pièces d'or). Notre estimation est donc juste.*
(Référence : BE 66)

C3. Réponse juste puis explication :
nous avons mis des nombres au hasard et cela fonctionnait
(Référence : BE 67)

C4. Réponse juste puis :
on sait imaginer qu'un petit lingot vaut 5 pièces d'or pour un moyen on a fait le double ça fait donc 10 pièces d'or et encore le double ce qui fait 20 pièces d'or et à la fin c'était bien ça. (Référence : BE 53)

C5. *Nous avons commencé par prendre 30 car dans chaque coffre il y a 30 p. d'or. Puis on a divisé 30 par 3, comme il y a 3 coffres ce qui nous a fait 10.* $30 : 3 = 10$.
Après nous avons essayé de trouver un nombre plus petit que 10 et nous avons divisé $10 : 2 = 5$. *5 était le plus petit. Alors on a multiplié* $10 \times 2 = 20$ *et ce nombre était bien le plus grand.*
Les résultats obtenus : [...] (les trois réponses correctes)
(Référence : BE 54)

D. Procédures esquissant une recherche organisée de la valeur des lingots.

Après les présupposés sur la valeur de 5 pièces pour les petits lingots (A. par un rapport a priori du simple au double, B. par une conviction préalable), puis après la prise de conscience que le choix de 5 n'était qu'une hypothèse (C), voici des procédures où les élèves se rendent compte qu'il est nécessaire d'organiser une recherche pour connaître la valeur du petit lingot et où ils le mentionnent dans leurs copies. Mais l'engagement dans une recherche n'en garantit pas la rigueur et, dans cette catégorie de procédures, il y a des démarches lacunaires, d'autres hasardeuses ou maladroites qu'il est évidemment difficile de juger sur la seule base des feuilles rendues par les élèves. On peut toutefois percevoir certains éléments pertinents pour évaluer la « qualité » des explications fournies.

D1. Réponse correcte puis :

pour le premier coffre, on s'est dit que c'est l'un des plus petits diviseurs dans la table de 30.
Donc 4 petits lingots = 20 pièces d'or et 1 lingot moyen = 10 pièces.
$20 + 10 = 30$ *pièces d'or.*
Pour le second coffre [...] (Référence : BE 69)

Remarque : si la recherche de la valeur du petit lingot et du moyen est bien une préoccupation de ce groupe d'élèves, l'argument n'a aucune validité.

D2. *[...] On a remarqué que le grand lingot devait être plus grand que la moitié. La moitié = 15, donc 20.*
Ensuite le moyen et le grand devaient faire 30 mis ensemble donc $30 - 20 = 10$.
Ensuite on a vu que 1 lingot moyen + quatre petits valent 30. Alors $30 - 10 = 20$ *puis* $20 : 4 = 5$. (Référence : BE 610)

Même remarque que précédemment sur la validité de l'argument.

D3. *Nous commençons d'abord par calculer le 3*^{e} *coffre : 1 lingot moyen et 1 grand lingot =* $25 + 5 = 30$ *pièces d'or. Ça marche parce que 25 pièces pour le grand lingot. Pour le lingot moyen ça va parce que c'est plus petit que le grand mais pour le petit lingot ça ne va pas parce que on ne peut pas mettre 1 pièce d'or dans le petit lingot ou 2 pièces parce que aussi non avec 1 pièce d'or dans le petit lingot parce qu'il nous faut 29 autres pièces d'or donc ça ne va pas car 29 n'est pas divisible par 25 et 5. Donc nous avons trouvé que*

le moyen lingot vaut 10 pièces et que le grand en vaut 20. [...]
(Référence : BE 55)

Remarque : ici encore il y a de nettes lacunes dans l'argumentation initiale.

D4. *Nous avons fait des hypothèses pour le premier coffre : nous avons fini par trouver que si un petit lingot valait* 5 *pièces d'or, et qu'il y en avait* 4 *:* $4 \times 5 = 20$ *pièces, nous en avons déduit qu'un moyen en valait* 10. *Nous avons regardé avec les autres si ça concordait : pour le deuxième,* $2 \times 5 + 2 \times 10 = 30$ *et pour le troisième nous savions que le moyen valait* 10, *le grand valait* 20. (Référence : BE 611)
Remarque : la démarche est correcte mais on aimerait en savoir plus sur « nous avons fait des hypothèses » et « nous avons fini par trouver », ainsi que « regardé pour savoir si ça concordait ».

D5. *Nous avons commencé en essayant*
1 petit lingot = 1 pièce d'or
1er coffre : $1 \times 4 = 4$ *[...] le lingot moyen vaut* 26 *pièces d'or*
2e coffre : $1 \times 2 = 2$, 2 *pièces* $+2$ *lingots,* $26 + 26 + 2 = 54$ *ça ne correspond pas*
1 petit lingot = 2 pièces d'or
1er coffre : $2 \times 4 = 8$ *[...] le lingot moyen vaut* 22 *pièces d'or*
2e coffre : $2 \times 2 = 4$, 4 *pièces* $+2$ *lingots,* $22 + 22 + 2 = 42$ *ça ne correspond pas puis nous avons essayé :*
1 petit lingot = 5 pièces d'or
1er coffre : $5 \times 4 = 20$ *[...] le lingot moyen vaut* 10 *pièces d'or*
2e coffre : $5 \times 4 = 20$, 10 *pièces* $+2$ *lingots,* $10 + 10 + 10 = 30$
3e coffre : $1 \times 10 = 10$, *si pour remplir un coffre il faut* 30 *pièces un grand lingot vaut* 20 *pièces.* 10 *pièces* $+20$ *pièces* $= 30$ *pièces.*
Suit la réponse correcte pour les trois lingots. (Référence : BE 57)
Remarque : mis à part quelques erreurs dans la deuxième hypothèse pour le 2e coffre, la procédure suit une démarche rigoureuse.

3.4. Intérêts et apports pour l'enseignement

Le problème des « Trois coffres » et l'analyse des procédures mises en œuvre par les élèves met en lumière :

- la richesse des stratégies de résolution qui peuvent apparaître à propos d'un problème « inédit » ;

- la difficulté à juger des procédures apparues et l'intérêt d'en examiner un grand nombre pour en percevoir les démarches qui les fondent et les représentations sous-jacentes ;
- les insuffisances d'un examen des seules « réponses » et la nécessité de faire formuler par les élèves leurs procédures de résolution, même si ces formulations sont lacunaires ou difficiles à rédiger par les élèves ;
- la nécessité d'une analyse *a priori* précisant les savoirs mathématiques en jeu et la tâche de résolution pour être en mesure d'évaluer avec finesse le degré de disponibilité des connaissances de l'élève et la qualité de ses démarches.

Pour le maître, il s'agit alors de savoir que faire de ces résultats pour une utilisation en classe. Le plus évident est de faire résoudre ce problème à toute la classe, dans des conditions analogues à celles du RMT et, dans un second temps, de s'entretenir avec les groupes d'élèves pour aller au-delà de ce qui est écrit sur les copies. Un débat collectif devrait permettre de voir apparaître les différentes procédures et représentations conduisant à la solution. Pour mettre à l'épreuve les procédures, on peut donner une nouvelle version du problème en jouant sur les « variables didactiques ». Par exemple en modifiant seulement le contenu du premier coffre par l'adjonction d'un petit lingot : « 5 petits lingots et 1 moyen » (au lieu de 4 petits et 1 moyen) et en augmentant la valeur des trois coffres de 30 à 48. Une modification de ce genre suffit pour transformer entièrement la tâche de résolution et pour faire intervenir les savoirs mathématiques sur les équivalences, dont la majorité des élèves se sont passés dans la version d'origine.

4. Conclusions

Les deux exemples étudiés ici ne sont pas exceptionnels. Un grand nombre de problèmes du RMT apportent des éléments intéressants pour les maîtres, pour les formateurs et les chercheurs, dès le moment où l'on examine en détail les protocoles de résolution des élèves à qui on a demandé d'expliquer comment ils ont procédé.

Ces analyses *a posteriori* confirment parfois les prévisions de l'analyse *a priori* de la tâche, mais elles apportent toujours des compléments d'information sur la manière dont les élèves perçoivent la situation et comment ils l'affrontent.

Dans d'autres cas, ces analyses apportent des surprises de taille : obstacles inattendus, représentations dominantes non adéquates, procédures détournées permettant d'obtenir la solution par des voies non prévues.

Dans un cas comme dans l'autre, les résultats peuvent conduire directement à des exploitations ou à des investigations complémentaires par la reprise des problèmes pour la classe entière, à la création de nouveaux problèmes par le jeu des variables didactiques ou de contexte.

Erratum

Suite à une mystérieuse erreur, la figure 4 de l'article d'I. Demonty & A. Fagnant, *Évaluation de la culture mathématique dans PISA 2003 — Un regard neuf sur les compétences des élèves de 15 ans*, paru dans notre numéro 154, n'est pas ce qu'elle aurait dû être. Nos lecteurs voudront bien nous en excuser.

Voici le diagramme correct.

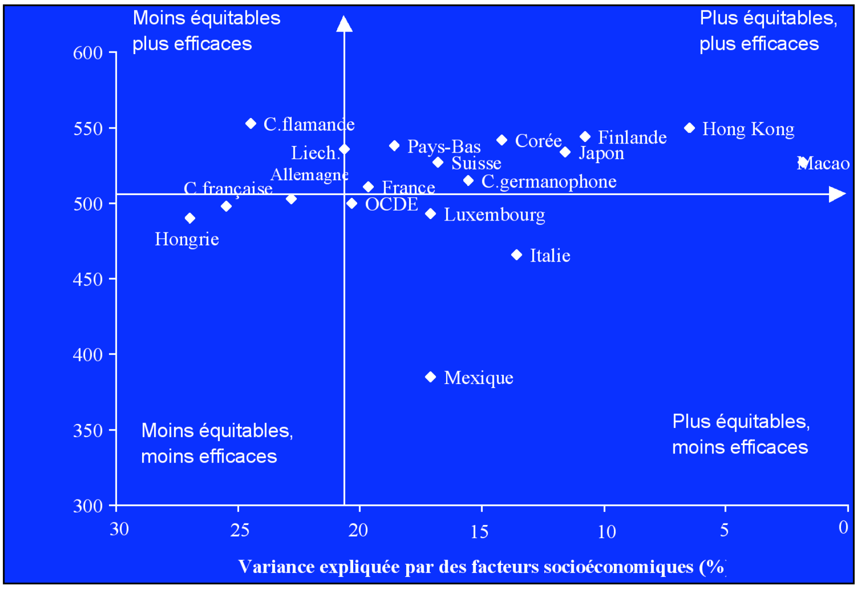


FIG. 4 – Lien entre efficacité et équité

Problèmes

Claudine Festraets [1]

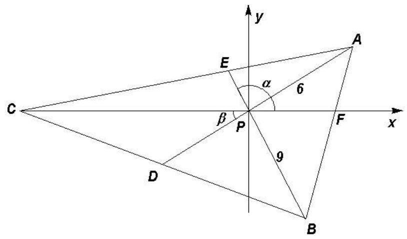
Aire du triangle

problème n° 310 de Mathématique et Pédagogie n° 152

Le point P est intérieur au triangle ABC. Les droites AP, BP et CP coupent les côtés $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ respectivement en D, E et F. Sachant que $|AP| = 6$, $|BP| = 9$, $|PD| = 6$ et $|CF| = 20$, trouver l'aire du triangle ABC.

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek

Prenons la droite CF comme axe des x dans un système othonormé d'origine P. L'aire du triangle ABC est la somme des aires des triangles ACF et BCF de base commune $|CF|$.



Exprimons la colinéarité des points :

1. $A(6\cos\beta, 6\sin\beta)$, $F(a, 0)$ et $B(-9\cos\alpha, -9\sin\alpha)$:

$$\begin{vmatrix} 6\cos\beta & 6\sin\beta & 1 \\ a & 0 & 1 \\ -9\cos\alpha & -9\sin\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne $(2\sin\beta + 3\sin\alpha)a = 18\sin(\alpha-\beta)$; (1)

2. $A(6\cos\beta, 6\sin\beta)$, $C(a-20, 0)$ et $E(3\cos\alpha, 3\sin\alpha)$:

$$\begin{vmatrix} 6\cos\beta & 6\sin\beta & 1 \\ a-20 & 0 & 1 \\ 3\cos\alpha & 3\sin\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne $(2\sin\beta - \sin\alpha)(20-a) = 6\sin(\alpha-\beta)$; (2)

[1] Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

3. $C(a-20,0)$, $D(-6\cos\beta, -6\sin\beta)$ et $B(-9\cos\alpha, -9\sin\alpha)$:

$$\begin{vmatrix} a-20 & 0 & 1 \\ -6\cos\beta & -6\sin\beta & 1 \\ -9\cos\alpha & -9\sin\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne $(3\sin\alpha - 2\sin\beta)(20-a) = 18\sin(\alpha-\beta)$ (3)

De (1) − (3), on obtient $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{20}{30-3a}$. (4)

De(1) − 3 × (2), on obtient $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{4}{3}$. (5)

L'égalité des seconds membres de (4) et (5) donne l'équation du second degré $a^2 - 25a + 100 = 0$ et comme P est intérieur au triangle ABC, la seule racine qui convient est $a = 5$.
En posant dans (3) $a = 5$, on obtient la relation

$$15\sin\alpha - 10\sin\beta = 6\sin\alpha\cos\beta - 6\sin\beta\cos\alpha$$

homogène en $\sin\alpha$, $\sin\beta$, on peut donc y remplacer $\sin\alpha$ et $\sin\beta$ respectivement par 4 et 3, en vertu de (5). D'où $4\cos\beta - 3\cos\alpha = 5$.
Dans l'identité $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$, substituons $\cos\beta = \dfrac{5+3\cos\alpha}{4}$ et $\sin\beta = \dfrac{3\sin\alpha}{4}$. Après simplification, on obtient $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$, $\sin\beta = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$. Dès lors,

$$\text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(ACF) + \text{Aire}(CBF) = \frac{1}{2}20\left(6\cdot\frac{3}{5} + 9\cdot\frac{4}{5}\right) = 108.$$

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare, de P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte et de P. LE GALL de Metz. Un lecteur m'a envoyé une solution qui aurait été correcte s'il ne s'était trompé dans les données de l'énoncé.

Limite

problème n° 311 de Mathématique et Pédagogie n° 152

Soient a_n et b_n des entiers positifs satisfaisant la relation

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})^n$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n$ existe et déterminer cette limite.

Solution de J. ANSEEUW de Roeselare

$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (a_n + b_n\sqrt{2})(2+\sqrt{2})$, d'où

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n. \end{cases}$$

Nous pouvons alors écrire

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2a_n + 2b_n}{a_n + 2b_n} = 1 + \frac{a_n}{a_n + 2b_n} < 2,$$

donc la suite $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \ldots$est bornée supérieurement. Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = k \ (\in \mathbb{R})$

De là,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + 2b_n}{a_n + 2b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\dfrac{a_n}{b_n} + 2}{\dfrac{a_n}{b_n} + 2},$$

d'où $k = \dfrac{2k+2}{k+2}$, ce qui donne $k^2 = 2$ et $k = \sqrt{2}$. On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

Bonnes solutions de N. BERCKMANS de Louvain-la-Neuve, de P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, de J. FINOULST de Diepenbeek, de P. LE GALL de Metz, de J. OOMS de Chimay et de A. PATERNOTTRE de Boussu.

Polyglottes

problème n° 312 de Mathématique et Pédagogie n° 152

Une compagnie internationale possède 70 employés. Si X et Y sont deux quelconques d'entre eux, il y a une langue parlée par X et non parlée par Y et une autre langue parlée par Y et non par X. Quel est le nombre minimum de langues parlées par les employés ?

Solution de P.BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte

On note $e_1, e_2, \ldots, e_{70}$ les employés.

Si l'on attribue une langue différente à chacun des employés, on a la situation désirée. Cela assure que le minimum cherché existe bien. Appelons-le m.

Soit $L_1, L_2, \ldots, L_m$ les langues correspondant à une telle situation minimale. À chaque employé e_i, on peut donc associer la partie E_i de $\{1, 2, \ldots, m\}$ correspondant à l'ensemble des j pour lesquels e_i parle la langue L_j.
Les conditions de l'énoncé signifient alors exactement que les E_i forment une antichaîne, c'est-à-dire qu'il n'existe pas $i \neq j$ tels que $E_i \subset E_j$.
Or le théorème de Sperner affirme que le nombre de parties d'un ensemble à m éléments formant une antichaîne ne dépasse pas $C_m^{\left[\frac{m}{2}\right]}$. Il faut donc $C_m^{\left[\frac{m}{2}\right]} \geqslant 70$. Cela entraîne immédiatement que $m \geqslant 8$. Or, on a exactement $C_8^4 = 70$, et réciproquement, il est facile de vérifier qu'en numérotant arbitrairement les parties à 4 éléments de $\{1, 2, \ldots, 8\}$ et en les identifiant aux ensembles E_i par cette numérotation, on détermine ainsi une répartition adéquate des 8 langues.
Par conséquent $m \leqslant 8$, et donc $m = 8$.

Bonne solution de P. LE GALL de Metz et de J. OOMS de Chimay, mais un peu moins détaillée en ce qui concerne cette dernière.

* *

*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir pour le 1er mai 2006 au plus tard. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier LaTeX ou à défaut au format doc ou txt.

319. Triangle rectangle

Le triangle ABC est rectangle en A et tel que $|AB| = 6$ et $|AC| = 8$. Les points P et Q appartiennent respectivement à $[AB]$ et $[AC]$ et $|AP| = |AQ| = 2$. Les droites CP et BQ se coupent en R, les droites AR et PQ recontrent respectivement BC en S et T. Que vaut $|ST|$?

320. Second degré

Démontrer que si les coefficients a, b, c de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont tous trois impairs, cette équation n'admet pas de racine rationnelle.

321. Carré parfait

Quels sont tous les nombres premiers p tels que la somme des diviseurs entiers positifs de p^4 soit un carré parfait.

Olympiades

Claudine Festraets [1]

Voici les solutions des problèmes posés au finales MIDI et MAXI de l'Olympiade Mathématique Belge de 2005. La plupart de ces solutions sont telles qu'elles ont été rédigées par les élèves. Toutefois certaines n'ont été trouvées complètement par aucun élève ; il s'agit alors d'une solution « officielle ».

MIDI FINALE 2005

1. Quelles sont toutes les listes d'entiers naturels consécutifs dont la somme vaut 2005 ?

Solution de Hoan-Phung BUI, élève de 3e année à l'Athénée Robert Catteau à Bruxelles
Nous devons rechercher toutes les listes de naturels consécutifs dont la somme vaut 2005. ce qui revient à chercher tous les $y \in \mathbb{N}_0$ tels que $x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+y-1) + (x+y) = 2005$ avec $x \in \mathbb{N}$
Cette équation est succesivement équivalente à

$$x(y+1) + 1 + 2 + \cdots + (y-1) + y = 2005$$

$$x(y+1) + \frac{y(y+1)}{2} = 2005$$

$$\frac{2x(y+1) + y(y+1)}{2} = 2005$$

$$(y+1)(2x+y) = 4010,$$

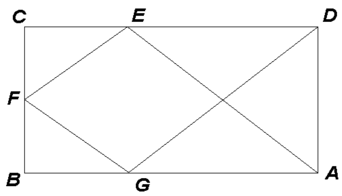
d'où 4 010 est un multiple de $y+1$.
Étant donné que $\operatorname{div} 4010 = \{1, 2, 5, 10, 401, 802, 2005, 4010\}$, alors $y \in$ $\in \{0, 1, 4, 400, 801, 2004, 4009\}$.
Nous pouvons exclure $y = 0$, car si c'était le cas, nous n'obtiendrions pas une suite de nombres, mais un seul nombre.
Si $y = 1$, alors $x = 1\,002$, si $y = 4$, alors $x = 399$ et si $y = 9$, alors $x = 196$, mais si $y \geqslant 400$, alors x est négatif.

[1] Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

Les seules solutions sont

$$\begin{aligned}2005 &= 1002 + 1003\\ &= 399 + 400 + 401 + 402 + 403\\ &= 196 + 197 + 198 + 199 + 200 + 201 + 202 + 203 + 204 + 205.\end{aligned}$$

2. Dans un billard rectangulaire $ABCD$, une bille est lancée à partir du coin A ; elle rebondit selon les lois de la réflexion sur le côté CD, puis sur le côté BC, puis sur le côté BA et termine sa course dans le coin D. Quelle est la longueur du trajet du centre de la bille sachant que le diamètre de la bille est 6 cm et que les dimensions du billard sont $|AD| = |BC| = 156$ cm et $|AB| = |CD| = 306$ cm ?
Solution de Pierre-Alain JACQMAIN, élève de 3e année à l'Institut Ste Julie-St Laurent à Marche-en-Famenne
Comme le rayon de la bille est de 3 cm, le centre de la bille circule dans un rectangle de 150 cm sur 300 cm (car on retire 2×3 cm à chaque côté). C'est ce rectangle que nous désignerons par $ABCD$ pour faciliter les notations sur le dessin ci-dessous.



Nommons E, F et G les points où le centre de la bille rencontre les côtés DC, CB et BA.
$\widehat{DAE} + \widehat{AED} = 90^\circ$ car ce sont les angles aigus d'un triangle rectangle ;
$\widehat{CFE} + \widehat{CEF} = 90^\circ$ car ce sont les angles aigus d'un triangle rectangle ;
$\widehat{AED} = \widehat{CEF}$ par la loi de la réflexion ;
$\widehat{CFE} = \widehat{BFG}$ par la loi de la réflexion ;
donc $\widehat{DAE} = \widehat{CFE} = \widehat{BFG}$.
Nous pouvons faire le même raisonnement pour $\widehat{AED} = \widehat{CEF} = \widehat{FGB} = \widehat{AGD}$.
Les triangles AED, FCE, BFG et AGD sont donc semblables. De plus les triangles AED et AGD sont isométriques car ils ont en commun le côté $[AD]$ et de même pour les triangles BGF et FCE car $|GB| = |EC|$ (car $|DE| = |AG|$).

D'où $|BF| = |FC| = 75$ cm et le rapport de similitude entre les triangles ADE et FCE vaut 2. Dès lors $|DE| = |AD| = 200$ cm et $|CE| = |BG| = 100$ cm.
$|AE|^2 = |DG|^2 = 150^2 + 200^2 = 50^2(3^2 + 4^2) = 50^2 \cdot 5^2 = 250^2$, donc $|AE| = |DG| = 250$ cm.
$|EF|^2 = |FG|^2 = 75^2 + 100^2 = 25^2(3^2 + 4^2) = 25^2 \cdot 5^2 = 125^2$, donc $|EF| = |FG| = 125$ cm.
Le trajet parcouru par le centre de la bille est de (250+125+125+250) cm = 750 cm.

3. La finale d'une compétition mathématique comporte quatre problèmes. Pour chacun des problèmes les notes possibles sont 0, 1, 2, 3 et 4 points. Après la compétition, le jury constate que pour n'importe quelle paire de participants, ces deux participants n'ont pas eu le même nombre de points sur plus d'un problème. Quel est le nombre maximal de participants ?
Solutions de Jonathan FRISCH, élève de 4e année à l'Athénée Royal Adolphe Sax à Dinant (1re partie) et de Hoan-Phung BUI (2e partie)
1) Remarquons qu'il y a au plus 25 participants.
En effet, supposons qu'il y ait 5 partipants ayant obtenu la note 0 à la première question. Pour obéir à la règle, ils devraient avoir des points différents 0, 1, 2, 3, 4, 5 à la deuxième question. Si un sixième participant avait aussi obtenu 0 à la première question, alors il y aurait d'office ce participant et un des cinq précédents qui auraient les mêmes points aux deux premières questions.
Comme il y a cinq sortes de points à distribuer, il y a au plus $5 \times 5 = 25$ participants.
2) Voici un exemple montrant que le nombre maximal est 25. Dans ce tableau, la première ligne indique les numéros des 25 participants et chaque colonne les notes obtenues pour les quatre questions.

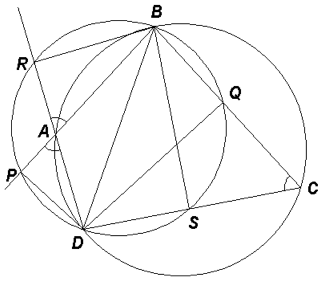
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	1	2	3	4	0	3	4	0	1	2	2	3	4	0	1	4	0	1	2	3
0	1	2	3	4	2	3	4	0	1	1	2	3	4	0	4	0	1	2	3	3	4	0	1	2

4. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe n'ayant aucun angle droit et dont les quatre sommets appartiennent à un même cercle. Désignons par P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées de D respectivement sur AB et BC. Désignons par R et S les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement de B sur AD et CD. Le quadrilatère convexe formé par les quatre points P, Q, R, S

(a) est-il nécessairement un trapèze ?

(b) a-t-il nécessairement deux côtés égaux ?

Solution



$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$,
$\widehat{BAD} + \widehat{PAD} = 180^\circ$,
d'où $\widehat{PAD} = \widehat{BCD}$ et de là, les triangles rectangles APD, ARB, CQD et CSB sont semblables.
Le segment $[BD]$ est l'hypoténuse commune aux quatre triangles rectangles PRD, BQD, BRD, BSD, c'est donc le diamètre d'un cercle passant par P, Q, R, S.
Dans ce cercle, les angles inscrits égaux $\widehat{SDQ}$ et $\widehat{RBP}$ interceptent des arcs égaux, donc les cordes $[SQ]$ et $[PR]$ ont même longueur.
De plus, puisque $\widehat{SQ} = \widehat{PR}$, on a $\widehat{SRQ} = \widehat{SPQ} = \widehat{RSP} = \widehat{RQP}$, d'où $PS \mathbin{//} RQ$.
Et les quatre points P, Q, R, S déterminent bien un trapèze isocèle.

MAXI FINALE 2005

1. Dans l'expression

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^2 = \\ &\qquad = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 + \\ &\qquad\quad + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_1x_n + 2x_2x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n,\end{aligned}$$

les nombres réels non nuls x_1, x_2, x_3, …, x_n ne sont pas tous positifs. Existe-t-il des valeurs de ces nombres réels qui rendent le nombre de doubles produits positifs égal au nombre de doubles produits négatifs

(a) si $n = 4$?

(b) si $n = 2005$?

Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que le nombre de doubles produits positifs soit égal au nombre de doubles produits négatifs.

Solution de François GONZE, élève de 5^e^année à l'Institut de la Providence à Wavre

Les carrés n'étant pas des doubles produits, il existe, pour toute valeur de n, $\frac{(n-1)n}{2}$ doubles produits (il faut diviser par 2 car $(n-1)n$ serait le nombre de produits simples, chacun en double).

Soit a le nombre de x_i positifs et b le nombre de x_i négatifs ($a, b \in \mathbb{N}$), on a $a + b = n$.

Parmi les doubles produits, seront négatifs ceux qui sont le produit d'un négatif et d'un positif, et seront positifs ceux qui sont le produit de deux négatifs ou de deux positifs. Pour que le nombre de doubles produits positifs soit égal au nombre de doubles produits négatifs, il faut et il suffit que

$$\frac{a^2 - a}{2} + \frac{b^2 - b}{2} = ab$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} a^2 - a + b^2 - b - 2ab = 0 &\Leftrightarrow (a-b)^2 - (a+b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 = n \end{aligned}$$

Il faut et il suffit donc que n soit un carré parfait.

a) Pour $n = 4$, si un des termes est positif et si les trois autres sont négatifs (ou inversément), on a $3 + 1 = 4$ et $(3-1)^2 = 4$.

b) Pour $n = 2005$, c'est impossible car 2005 n'est pas un carré parfait.

2. Dans l'espace de dimension 3, existe-t-il deux points P et Q à coordonnées rationnelles tels que $|PQ| = \sqrt{7}$?

   Solution

   Soit $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; on a $a^2 + b^2 + c^2 = 7$.

   Si a, b, c sont rationnels, alors on peut écrire $a = \frac{x}{t}$, $b = \frac{y}{t}$, $c = \frac{z}{t}$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ et $\text{pgcd}(x, y, z, t) = 1$.

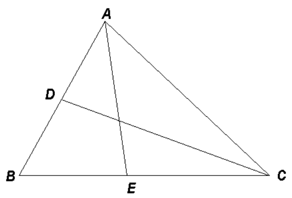
   D'où $x^2 + y^2 + z^2 = 7t^2$ ou encore $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 8t^2$.

   Or, le carré d'un entier k divisé par 8 donne un reste égal à 0 ou 4 si k est pair, égal à 1 si k est impair. Donc, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ n'est un multiple de 8 que si x, y, z et t sont tous pairs, ce qui est exclu par

hypothèse.
Les coordonnées de P et de Q ne peuvent donc être rationnelles.

3. Dans le triangle ABC, les droites AE et CD sont les bissectrices intérieures des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ respectivement ; E appartient à BC et D appartient à AB. Pour quelles amplitudes de l'angle $\widehat{ABC}$ a-t-on certainement
   (a) $|AD| + |EC| = |AC|$?
   (b) $|AD| + |EC| > |AC|$?
   (c) $|AD| + |EC| < |AC|$?

   Solution de David FRENAY, élève de 6eannée au collège Ste Marie à Mouscron
   Posons $a = |BC|$, $b = |AC|$ et $c = |AB|$, $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$.



On sait par le théorème des bissectrices que $\dfrac{|AD|}{c - |AD|} = \dfrac{|AD|}{|BD|} = \dfrac{a}{b}$. D'où $|AD| = \dfrac{bc}{a+b}$. De la même façon, $|EC| = \dfrac{ab}{b+c}$. Considérons $x = |AD| + |EC| - |AC|$; cela est égal à $b\left(\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{c}{a+b} - 1\right)$ et son signe est celui de

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} - 1 &= \frac{a^2 + ab + bc + c^2 - ab - b^2 - ac - bc}{(a+b)(b+c)} \\
&= \frac{(a^2 + c^2 - b^2) - ac}{(a+b)(b+c)} \\
&= \frac{2ac\cos\widehat{ABC} - ac}{(a+b)(b+c)}
\end{aligned}$$

Donc, on a :
a) $x = 0 \Leftrightarrow 2\cos\widehat{ABC} = 1 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$
b) $x > 0 \Leftrightarrow 2\cos\widehat{ABC} > 1 \Leftrightarrow \widehat{ABC} \in \left]\, 0\,;\frac{\pi}{3} \right[$
c) $x < 0 \Leftrightarrow 2\cos\widehat{ABC} < 1 \Leftrightarrow \widehat{ABC} \in \left]\, \frac{\pi}{3}\,;\pi \right[$.
Ceci considère toutes les amplitudes possibles pour $\widehat{ABC}$.

4. La suite infinie

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 0, \quad 9, \quad 6, \quad 9, \quad 4, \quad 8, \quad 7, \quad \ldots$$

ne comprend que des nombres appartenant à l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ et est construite de la manière suivante : après le quatrième nombre, chaque nouveau nombre est formé du chiffre des unités de la somme des quatre nombres précédents.

(a) Les nombres 2, 0, 0, 5 apparaissent-ils de manière consécutive dans cette suite ?

(b) Les nombres 1, 2, 3, 4 apparaissent-ils une deuxième fois de manière consécutive dans cette suite ?

Solution de Alexis Gottcheiner, élève de 5[e]année au Lycée Emile Jacqmain à Bruxelles

a) Les termes de cette suite nous donnent, modulo 2,

$$\underbrace{1, 0, 1, 0, 0}, \underbrace{1, 0, 1, 0, 0}, \ldots$$

Or, modulo 2, 2, 0, 0, 5 conduit à 0, 0, 0, 1. Comme il n'y a pas trois nombres consécutifs congrus à 0 modulo 2 dans la suite, 2, 0, 0, 5 ne peut y appartenir.

b) Il n'existe pas une infinité de quadruples appartenant à $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Donc un quadruple a, b, c, d réapparait nécessairement une deuxième fois dans la suite. Alors il donne forcément la même somme et la suite est donc périodique.

Mais la suite peut aussi être poursuivie à gauche : ..., 1, 2, 8, 1, 2, 3, 4, donc elle est périodique à droite et à gauche et 1, 2, 3, 4 apparaîtront une deuxième fois.

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2006)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :
– Cotisation ordinaire : 24 €
– Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 €
– Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 €
– Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.
Europe : 65 € (non `PRIOR`), 72 € (`PRIOR`)
Autres pays : 70 € (non `PRIOR`), 79 € (`PRIOR`)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 30 €.
Europe : 50 € (non `PRIOR`), 54 € (`PRIOR`).
Autres pays : 53 € (non `PRIOR`), 58 € (`PRIOR`).
Anciens numéros :
Avant 2005 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.
Année5 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 1,80 €, Europe : 4,50 €, Autres pays : 6 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).
• Abonnements groupés à <u>une</u> des revues : (3 numéros)
Belgique : 4 €.
• Abonnements groupés <u>aux deux</u> revues : (6 numéros)
Belgique : 8 €.

Abonnements individuels.

• Abonnements à <u>une</u> des revues : (3 numéros)

Belgique : 6 €. Europe ([1]) : 18 € (non PRIOR), 20 € (PRIOR).
Autres pays : 19 € (non PRIOR), 22 € (PRIOR).

• Abonnements <u>aux deux</u> revues : (6 numéros)

Belgique : 12 €. Europe : 24 € (non PRIOR), 26 € (PRIOR).
Autres pays : 25 € (non PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2002–2003 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.
Année 2003–2004 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 44 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.
Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.
Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 BIC BPOTBEB1
ou CCP LILLE : IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n° 7 à n° 11 et n° 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 7 (Vers les infiniment petits)			
Simone Trompler et Guy Noël	6 €		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Dossier 9 (Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Jacques Bair, Mathématique et Sport	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, …	12 €	9,50 €	T2
G. Robert, CD-Rom, logiciels mathématiques	5 €	/	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €		v. ci-dessous

Frais d'expédition (non *prior*)

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	6,50 €	10 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions *prior* : consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.