

**Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française**

Secrétariat : *M.-C. Carruana*, Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (Belgique)

Tél.-Fax : 32.(0)65.37.37.29; courriel : sbpm@sbpm.be.

Site internet : <http://www.sbpm.be>

Conseil d'administration : *M. Denis-Pecheur, B. Desaedeleer, P. Dupont, M. Frémal, Ch. Gabriel-Randour, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, Chr. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ph. Skilbecq, R. Scrève, G. Troessaert, F. Troessaert-Joly, S. Trompler*

Président, Olympiades Internationales : <i>G. Troessaert</i> , Sur le Chêne 58, 6800 Libramont, Tél. 061.22.42.01	Vice-Président, Portefeuille de lecture : <i>M. Herman</i> , Rue Rafhay 95, 4630 Soumagne, Tél. 087.26.70.23
Administrateur délégué : <i>Chr. Michaux</i> , Rue Brigade Piron 290, 6061 Montignies-sur-Sambre, Tél. 065.35.47.06	Congrès, Publicité : <i>M. Denis-Pecheur</i> , Rue de la Ferme 11, 5377 Noisieux (Somme-Leuze), Tél. 086.32.37.55
Trésorier, Site internet : <i>R. Scrève</i> , Rue du Corbeau 146, 6200 Châtelet, Tél. 071.40.27.34	Secrétaire : <i>M. Frémal</i> , Rue W. Jamar 311/51, 4430 Ans, Tél. 04.263.68.17
Olympiades nationales : <i>Cl. Festraets-Hamoir</i> , Rue J.-B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles Tél. 02.673.90.44	Contact Presse : <i>N. Miewis-Seronveaux</i> , Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée Tél. 04.343.19.92
Math-Jeunes Junior : <i>A. Paternotte</i> , Rue du Moulin 78, 7300 Boussu, Tél. 065.78.50.64	Math-Jeunes Senior : <i>G. Noël</i> , Rue du 1 ^{er} Chasseur à cheval 16/14, 7000 Mons, Tél. 065.84.86.21
SBPM-Infor : <i>R. Gossez</i> , Albert I Laan 13, 1560 Hoeilaart, Tél. 02.657.98.92	

Mathématique et Pédagogie :

P. Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau, Tél. 010.84.11.99

Comité de rédaction : *J. Bair, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, Cl. Festraets, G. Haesbroeck, M. Herman, J.-P. Houben, Chr. Michaux, J. Miewis, J. Navez, G. Noël, Ph. Skilbecq, N. Vandenabeele, Chr. Van Hooste, Cl. Vilers*

Photo de couverture : *L'Octaèdre du Louvre*, Paris, 08 juillet 1999 — photo P. Dupont



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

- P. Dupont, *Éditorial* 3

Articles

- Nadège Vandenaabeele, *Quelques difficultés de géométrie rencontrées par des élèves du secondaire supérieur. Des « idées » pour y remédier.* 5
- Jean-Paul Houben, *Cabri-Géomètre et les axes d'une conique* 25
- Adrian Oldknow, *Modèles géométriques avec Cabri II Plus et Cabri 3D* 35
- Jacques Bair & Valérie Henry, *Étude épistémologique sur la méthode de Fermat pour la recherche d'extrémums* 49

Rubriques

- C. Festraets, *Problèmes* 62
- C. Festraets, *Olympiades* 65
- R. Scrève, *Le coin du trésorier* 70

NOTE

- * Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse suivante :
Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.
Courrier électronique : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- * Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- * Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- * Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles, de préférence par courrier électronique, ou encodés sur un CD-rom ou une disquette. Dans ce cas, ils utiliseront un logiciel courant ($\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, Word) ; les éventuelles figures seront annexées dans des fichiers séparés. À défaut, ils enverront des textes dactylographiés. Dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés. L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse personnelle ainsi que l'institution où il travaille et une liste de mots clés (10 maximum).
- * La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pages.
Pour les articles :
Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique & Pédagogie*, 1982, 36, 53-56.
- * Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- * MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef. Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation. Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Éditorial

P. DUPONT

De plus en plus, des collègues enseignent des mathématiques sans avoir de formation initiale dans cette discipline qui nous est chère. Qu'on le déplore ou qu'on s'en félicite, c'est un fait avec lequel, très vraisemblablement, nous allons devoir vivre durant quelques lustres.

Peut-être ces non-spécialistes ne trouvent-ils pas utile de s'inscrire dans une association de professeurs de mathématique, alors que, de notre point de vue, ils en auraient besoin plus encore que les mathématiciens brevetés comme tels. À l'une ou l'autre occasion déjà, plus d'un d'entre nous a été sollicité pour répondre à telle ou telle question, mathématique ou pédagogique.

À nous, sans doute, de faire le premier pas vers eux, pour leur expliquer en quoi le SBPMef peut leur être utile, et en particulier sa revue, votre revue !

Ne serait-il pas utile d'y ouvrir une rubrique plus spécialement tournée vers ces « néo-mathématiciens » ? J'attends avec impatience vos propositions d'articles pour l'alimenter. . . écrits déjà, pourquoi pas, en collaboration avec eux : nous sommes bien placés pour connaître la valeur pédagogique de l'exemple !

Les publications de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef : commandez-les à notre secrétariat

— Les brochures signalées par * sont de publication récente.

— Le prix « adhérent » concerne l'APMEP et la SBPMef.



N°	TITRES DES BROCHURES Prix, à droite, sans port. Port en plus : Cf. bas du tableau	Prix (€)	
		public	adh
* 168	<i>La place des maths vivantes dans l'éducation secondaire</i> , 336 pages. Des ateliers, des conférences, ...	13	9
	◇ FIN ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE OU COLLÈGE		
* 169	<i>JEUX 7</i> . 172 pages. Des aides pédagogiques par jeu	14	10
144	<i>JEUX 6</i> . Même principe.	12	8
	• <i>JEUX 7 ; 6 ; 5 (n° 119), les trois ensemble</i>	30	18
	◇ COLLÈGE		
* 166	<i>MATH À CRÉDIT</i> : Publicités et pourcentages, ...	10	6
* 165	<i>LA RÈGLE</i> (calcul algébrique) <i>DANS TOUS SES ÉTATS</i>	10	6
	◇ COLLÈGE OU LYCÉE		
151	<i>Les narrations de recherche</i>	13	9
* 253	<i>PANORAMATH 4</i> . Rallyes et autres compétitions. ...	10	6
	• <i>Ce Panoramath et les trois antérieurs, ensemble :</i>	38	23
	◇ LYCÉES		
* 171	<i>Olympiades académiques de Première 2005</i>	13	9
	• <i>Ce n° et ceux de 2004 ; 2003 ; 2002 ; 2001 ensemble</i>		34
* 156	<i>Les statistiques au lycée et un peu au-delà ...</i>	13	9
150 } 154 }	<i>Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée</i> . Deux tomes. 392 pages	21	15
	◇ CONCOURS D'ENSEIGNEMENT MATHS Agrégations, Capes et CAPLP —externes & internes, sujets & corrigés— par année. Les n ^{os} de 2005, 2004, 2003, 2002, 2001, 2000, 1999 et 1998, chacun à 8 € en moyenne, <i>ENSEMBLE</i> :		30

DEMANDEZ à l'APMEP, 26 Rue Duménil, F – 75013 Paris,
mèl : apmep@apmep.asso.fr, sa plaquette VISAGES, gratuite et franco de port, qui décrit les quelque 170 brochures proposées par l'APMEP.

PORT : Les frais de port depuis la France sont très élevés. Consultez l'APMEP pour les connaître. Si vous n'êtes pas pressé, profitez des accords entre l'APMEP et la SBPMef pour commander via le secrétariat de celle-ci.

Quelques difficultés de géométrie rencontrées par des élèves du secondaire supérieur. Des « idées » pour y remédier.

**NADÈGE VANDENABEELE
IPES Tournai, APL Leuze & HEPHO**

1. Introduction

Les études telles que PISA et autres évaluations révèlent les lacunes et difficultés des adolescents dans leur parcours scolaire. Malgré cet état des lieux, les élèves en difficulté sont toujours bien là ! Les organismes offrant des remédiations, comme les ateliers « Échec à l'échec » organisés par les Jeunesses Scientifiques, sont de plus en plus sollicités. D'une manière générale, je décris l'organisation de ces ateliers et je trace le profil des élèves qui fréquentent de tels centres de remédiation. Plus particulièrement, je pointe du doigt, développe et analyse quelques difficultés récurrentes rencontrées par des élèves du secondaire supérieur en géométrie et en trigonométrie.

Cet article reprend les grandes lignes de l'exposé présenté lors du Congrès de la SBPMef organisé à Tournai les 23, 24 et 25 août 2005.

2. « Échec à l'échec »

Quel que soit le type d'enseignement, les classes sont souvent hétérogènes. Les élèves ne sont pas tous clairvoyants, avisés ni perspicaces. Mais ce n'est pas pour autant qu'ils sont moins intelligents... il leur faut un peu plus de temps pour réfléchir, comprendre, prendre note, ... Tout ce

Adresse de l'auteur : Nadège Vandenabeele, Institut Provincial d'Enseignement Secondaire, Boulevard Léopold 92 bis, 7500 Tournai ;
courriel : nadege.vandenabeele@skynet.be.

qu'ils demandent, c'est qu'on les aide dans leurs efforts en les encourageant régulièrement, en leur montrant qu'ils sont capables s'ils le veulent. Sans quoi, l'élève sera découragé, n'aura plus envie d'écouter, d'être attentif. Et ce sont ces élèves que les ateliers « Échec à l'échec » accueillent. Ils viennent chercher des explications supplémentaires afin de pouvoir rattraper le train en marche. Ils veulent retrouver une certaine confiance en eux, une certaine motivation nécessaire pour terminer l'année scolaire avec fruit.

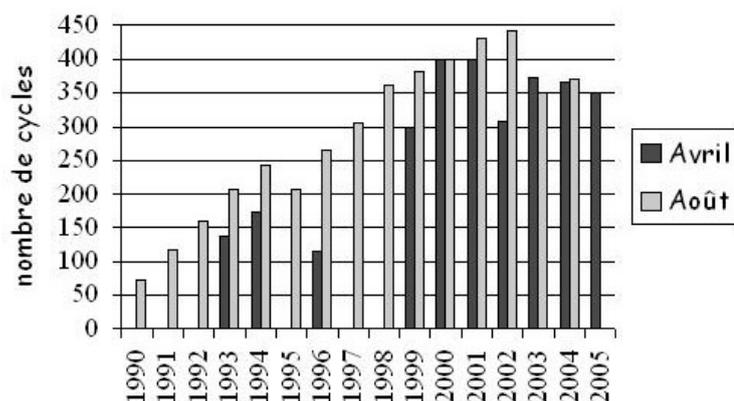
Comme vous le savez, « Échec à l'échec » est une activité des Jeunesses Scientifiques de Belgique (www.jsb.be). Ces ateliers s'organisent dans toute la Communauté française. L'objectif est de donner un coup de pouce pour préparer les examens. C'est en 1990 que ces cours ont vu le jour à Tournai. Ils sont dispensés pendant la dernière quinzaine du mois d'août. Comme vous le verrez plus loin, les élèves sollicitent de plus en plus ces cours de remédiation. C'est pourquoi, depuis 1993, la section locale de Tournai organise une semaine supplémentaire pendant les congés de printemps.

Maximum dix élèves (de la même année) se retrouvent « face » à un professeur qui réexplique, rappelle les notions importantes. Chaque élève revoit le chapitre qu'il souhaite et travaille à son propre rythme pendant que l'enseignant dynamique vérifie si les compétences sont acquises en lui proposant des exercices de difficultés croissantes. C'est un enseignement « individualisé » qui s'organise en séances de 1 h 15, soit 25 minutes de plus qu'une période normale de cours (50 min). Étonnamment, les élèves ne voient pas le temps passer ; ils sont tellement concentrés, appliqués qu'ils ne s'inquiètent pas de l'heure !

L'élève choisit la discipline qu'il souhaite revoir : français, orthographe, math (algèbre), math (géométrie & trigonométrie), néerlandais, anglais, physique, chimie, . . . Remarquons qu'algèbre et géométrie & trigonométrie sont deux cours différents et qu'un élève peut choisir au maximum quatre cours (ou cycles) différents.

Ci-dessous un graphique montrant l'évolution du nombre de cycles (toutes branches confondues) organisés à Tournai au fil des années. Nous observons une croissance importante du nombre de cycles organisés en août jusqu'en 2002. La légère diminution en 2003 s'explique par l'ouverture de nouveaux centres locaux dans un rayon de 30 km (Leuze-en-Hainaut, Péruwelz).

Ce graphique nous interpelle et nous incite à développer quelques difficultés récurrentes rencontrées en géométrie et en trigonométrie par les élèves du secondaire supérieur. Nous vous proposons de passer en revue ces pierres



d'achoppement et de montrer comment il est possible d'aider l'élève dans son apprentissage.

3. Trigonométrie

Qui dit trigonométrie... dit cercle trigonométrique. Outre le fait qu'il faille un compas pour le dessiner, il est souvent utile de rappeler ce qu'est le centre et ce que vaut le rayon. Ne sachant pas que le rayon est égal à 1, les élèves accusent déjà un retard avant d'avoir réellement commencé la trigonométrie !

Les élèves confondent la mesure des angles (sur le cercle) et la mesure des nombres trigonométriques (sur les axes). L'usage des couleurs aide l'élève à les distinguer. La principale difficulté réside dans la complexité du cercle. Il contient une mine d'informations que les élèves n'appréhendent pas toujours bien.

Voici concrètement ce que l'on rencontre.

3.1. Axes et significations

Nombreux sont les élèves qui hésitent entre l'axe des sinus et cosinus. Un moyen très simple peut les aider à ne plus les confondre :

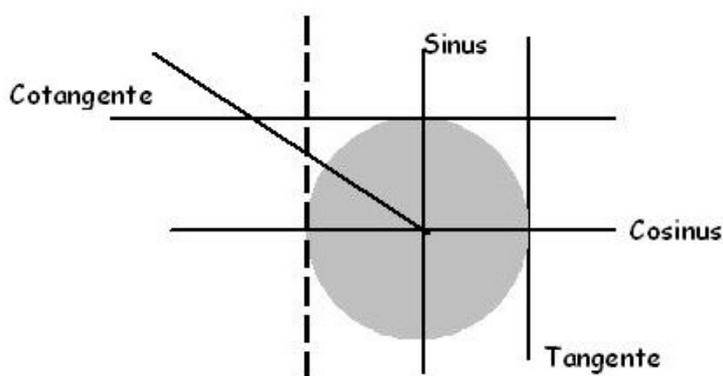
Cosinus ↔ Axe horizontal

Et donc le sinus se lit sur l'axe vertical ! Il s'agit là d'un moyen mnémotechnique qui aide considérablement les élèves. Un autre « truc » se basant sur l'ordre alphabétique est plus connu mais semble moins bien fonctionner auprès des élèves : *cosinus* est avant *sinus* comme *abscisse* est avant *ordonnée*, et *horizontal* avant *vertical*.

3.2. Détermination des nombres trigonométriques

Un angle du premier quadrant ne pose en général pas de problème. Mais dès que l'on quitte ce premier quadrant, les difficultés et erreurs surviennent.

Voici ce que nous pouvons voir sur certaines feuilles.



Pour déterminer la tangente d'un angle du deuxième quadrant, les élèves tracent un nouvel axe à gauche du cercle, sur lequel ils pourront lire la tangente ! Pour eux, les axes sont mobiles. Et la tangente d'un angle du deuxième quadrant est alors positive.

Ils sont cohérents avec eux-mêmes en procédant de la même manière pour les angles des troisième et quatrième quadrant, l'axe des cotangentes pouvant lui aussi apparaître en bas du cercle !

Cette erreur est courante... c'est pourquoi nous devons sans cesse attirer l'attention des élèves et insister davantage sur le fait que les axes sont uniques et fixés une fois pour toutes.

3.3. Résolution de triangles rectangles

La principale difficulté rencontrée par les élèves dans la résolution de triangles rectangles est le choix de la formule pour autant qu'ils les connaissent. Aussi, vous connaissez probablement ce moyen mnémotechnique :

SOHCAHTOA

S → sinus C → cosinus T → tangente
 O → opposé A → adjacent O → opposé
 H → hypoténuse H → hypoténuse A → adjacent

$$\sin x = \frac{\text{mesure côté opposé}}{\text{mesure hypoténuse}},$$

$$\cos x = \frac{\text{mesure côté adjacent}}{\text{mesure hypoténuse}},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\text{mesure côté opposé}}{\text{mesure côté adjacent}}.$$

3.4. Nombres trigonométriques d'angles particuliers

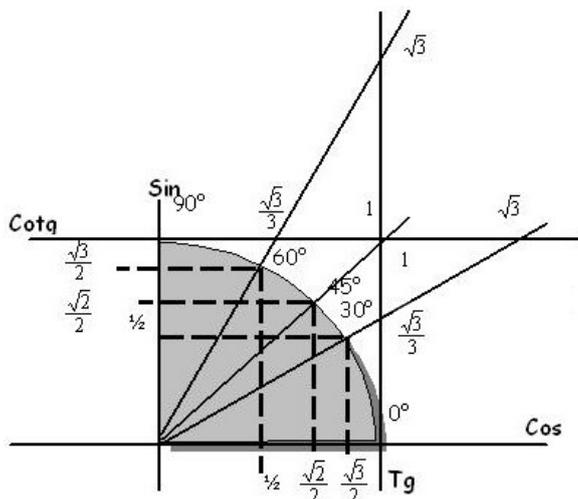
Dans tous les cours de trigonométrie, nous trouvons le tableau récapitulatif des nombres trigonométriques d'angles particuliers du premier quadrant. Voici ce tableau :

degrés	0	30	45	60	90
radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/
cotangente	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Certes l'enseignant calcule ces nombres trigonométriques avec les élèves. Mais très souvent, ces derniers s'obstinent à les retenir par cœur, étant persuadés que cela leur permettra de gagner un peu de temps lors de la résolution d'exercices. Ce qui est un leurre !

Il est possible de représenter ce tableau autrement : en utilisant le cercle trigonométrique. Ainsi, l'élève visualise les angles du premier quadrant. Il

trace concrètement les nombres trigonométriques. Les valeurs telles que les nombres trigonométriques de 0° et 90° se lisent directement sur le cercle. Les valeurs de $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ$ et $\operatorname{ctg} 45^\circ$ aussi. Douze des vingt valeurs sont simples à retrouver grâce au cercle. Concernant les valeurs moins exactes comme $\sin 60^\circ$ ou $\sin 45^\circ$, en les plaçant sur le cercle, on remarque tout de suite que $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$; de même pour $\frac{\sqrt{3}}{3} < \sqrt{3}$. Voici donc comment l'on représente ces nombres trigonométriques à l'aide du cercle.



Cette représentation aidera aussi l'élève lors de la résolution d'équations trigonométriques.

3.5. Angles associés

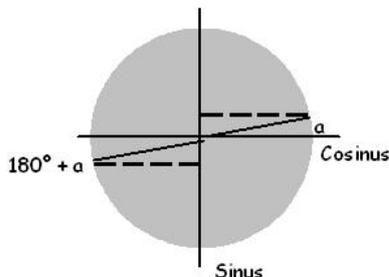
Concernant l'étude des angles associés et des 16 formules que nous pouvons en déduire, le cercle est aussi une aide précieuse. La connaissance des formules n'est pas indispensable dans la résolution des exercices. Par exemple, si nous devons simplifier l'expression suivante

$$\frac{\sin(180^\circ + a) \cdot \sin(270^\circ + a)}{\cos(-a) \cdot \sin(540^\circ - a)},$$

nous pouvons le faire sans connaître les formules.

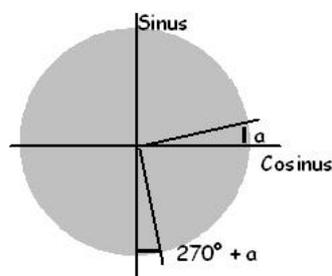
La solution va tout simplement se lire sur le cercle trigonométrique. Tout d'abord, nous représentons un angle quelconque a (assez petit pour que ce

ne soit pas un angle particulier) du premier quadrant. Ensuite, pour chaque nombre trigonométrique, nous traçons l'angle qui nous intéresse. Ainsi, à partir de l'angle a , nous traçons l'angle $180^\circ + a$. L'élève sait où se trouve 180° et en ajoutant a , il aboutit dans la troisième quadrant et non dans le deuxième (ce que nous justifions en rappelant l'orientation positive du cercle). Ensuite, nous dessinons $\sin(180^\circ + a)$ que nous comparons à $\sin a$: les distances sont les mêmes mais l'un est positif, l'autre est négatif. Par conséquent, $\sin(180^\circ + a) = -\sin a$.



Les élèves éprouvent des difficultés à utiliser le cercle et trouvent cette méthode assez longue. Ils essaient d'y échapper en utilisant les formules retenues par cœur... Cette échappatoire est la solution qu'ils privilégient, mais encore une fois cela ne porte pas ses fruits!

Ainsi, pour $\sin(270^\circ + a)$, il est plus difficile de déterminer la formule à utiliser. Tandis qu'en utilisant le cercle, nous plaçons l'angle a , puis $270^\circ + a$ (à partir de 270°) du quatrième quadrant et nous représentons son sinus que nous comparons aux nombres trigonométriques de a et en faisant attention au signe, nous obtenons assez vite que $\sin(270^\circ + a) = -\cos a$.



De même pour $\cos(-a) = \cos a$ et $\sin(540^\circ - a) = \sin a$.

D'où :

$$\frac{\sin(180^\circ + a) \cdot \sin(270^\circ + a)}{\cos(-a) \cdot \sin(540^\circ - a)} = \frac{-\sin a \cdot (-\cos a)}{\cos a \cdot \sin a} = 1.$$

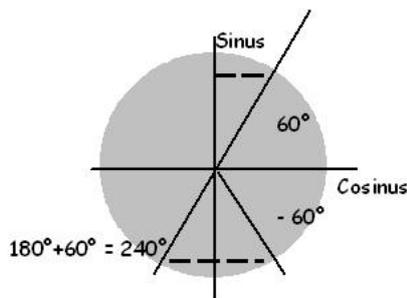
Le cercle trigonométrique est en quelque sorte le « copion » pour les exercices de trigonométrie... pourquoi ne pas l'utiliser ? ! Au fil des exercices, l'élève qui travaille sur le cercle trigonométrique comprend ce qu'il fait et obtient la bonne réponse. Il s'agit donc d'une satisfaction pour lui mais aussi pour l'enseignant qui le voit progresser.

3.6. Équations trigonométriques

Nous vous parlons plus haut des équations trigonométriques. Prenons par exemple

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(x exprimé en degrés). Il s'agit d'un sinus et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une valeur connue. L'élève sait dire que cela correspond à l'angle du premier quadrant égal à 60° (et ce grâce au cercle vu plus haut). Mais attention, ici c'est $-\frac{\sqrt{3}}{2}$... donc si nous représentons cela sur le cercle, nous avons :



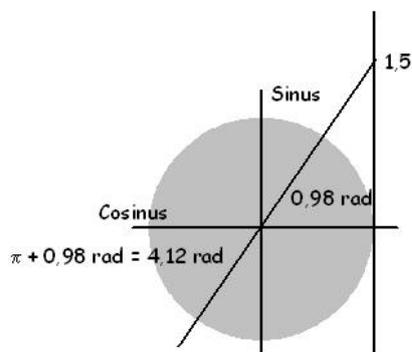
Deux angles peuvent convenir : -60° ou 240° . Ainsi, les solutions sont :

$$\begin{cases} x = 240^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -60^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

Prenons un autre exemple :

$$\text{tg}(2x) = 1,5$$

(x exprimé en radians) ; le nombre 1,5 n'est pas une valeur bien connue. Qu'à cela ne tienne, sur l'axe des tangentes, nous représentons 1,5. À nouveau, deux angles peuvent convenir. La calculatrice donne le premier : 0,98 rad ; mais que vaut le second ? Sur le cercle, nous voyons tout de suite que c'est $\pi + 0,98 = 4,12$ rad.



Donc les solutions sont :

$$\left[\begin{array}{l} 2x = 0,98 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x = 4,12 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbf{Z}), \end{array} \right.$$

soit

$$\left[\begin{array}{l} x = 0,49 + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \\ \text{ou} \\ x = 2,06 + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbf{Z}). \end{array} \right.$$

Remarque : Il n'est pas indispensable de calculer l'amplitude de l'angle du troisième quadrant puisque les solutions peuvent aussi s'écrire comme $2x = 0,98 + k \cdot \pi$, c'est-à-dire $x = 0,49 + k \cdot \pi/2$. Pour les classes « Math 6 » et plus, cela est évidemment important. Mais un élève en « Math 4 » qui résout l'équation trigonométrique comme détaillé ci-dessus obtient les mêmes réponses que l'élève de « Math 6 » : elles sont simplement exprimées autrement !

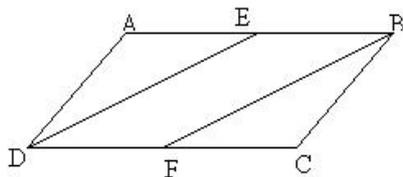
4. Calcul vectoriel

Ce chapitre n'est pas celui qui apparaît le plus difficile aux yeux de élèves. Néanmoins, ces derniers redoutent les démonstrations. Voici deux petits exemples :

4.1. Parallélogrammes

Étant donné un parallélogramme $ABCD$, soit E et F les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[CD]$. Montrer que $DEBF$ est aussi un parallélogramme.

Devant un tel exercice, l'élève doit pouvoir visualiser la situation. Aussi, il faut qu'il acquière l'habitude de réaliser un dessin en y indiquant les données et y effectuant les diverses constructions décrites dans l'énoncé. L'élève doit ensuite se convaincre de la thèse sur ce dessin. Les données étant l'hypothèse et ce qu'il faut montrer étant la thèse, il faut traduire toutes ces informations en langage mathématique (ici à l'aide de vecteurs).



Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Hypothèses : } & \vec{AB} = \vec{DC} \text{ et } \vec{AD} = \vec{BC}, \\ & \vec{EB} = \frac{1}{2}\vec{AB}, \\ & \vec{DF} = \frac{1}{2}\vec{DC}; \\ \text{Thèse : } & \vec{EB} = \vec{DF} \text{ ou } \vec{DE} = \vec{FB}. \end{aligned}$$

La démonstration consiste alors à partir d'un membre d'une égalité de la thèse pour arriver à l'autre membre en utilisant les hypothèses et éventuellement la décomposition vectorielle.

En effet, nous pouvons écrire que $\vec{EB} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{DC} = \vec{DF}$. Cqfd.

4.2. Quatre vecteurs de somme nulle

Soit $A = (2, 3)$, $B = (-4, -3)$, $C = (0, -4)$, $D = (2, -\sqrt{3})$. Calculer les coordonnées de N tel que $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$.

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées. Nous allons en présenter deux.

1. Connaissant les coordonnées des points A , B , C et D et en notant $N = (x, y)$, nous avons $\overrightarrow{NA} = (2 - x, 3 - y)$, $\overrightarrow{NB} = (-4 - x, -3 - y)$, $\overrightarrow{NC} = (-x, -4 - y)$, $\overrightarrow{ND} = (2 - x, -\sqrt{3} - y)$, et

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = (-4x, -4 - \sqrt{3} - 4y) = (0, 0),$$

d'où $x = 0$ et $y = -1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. Il s'agit de décomposer les vecteurs en faisant apparaître un seul vecteur dépendant de N (afin d'« isoler l'inconnue ») :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} &= \\ &= \overrightarrow{NA} + (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= 4\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}; \end{aligned}$$

la condition sur N se réécrit donc

$$4\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0},$$

où \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} sont connus. D'où : $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Remarquons que jusqu'à présent, nous n'avons pas eu besoin de coordonnées de points ou de vecteurs. Cette seconde méthode semble plus générale puisqu'elle peut s'appliquer au même genre d'exercice sans système de coordonnées (donc pour un exercice de construction). Mais les élèves préfèrent la première méthode qui leur semble plus algébrique.

Terminons notre exercice : $(x - 2, y - 3) = \frac{1}{4} (-8, -16 - \sqrt{3}) = (-2, -4 - \frac{\sqrt{3}}{4})$, donc $x = 0$ et $y = -1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

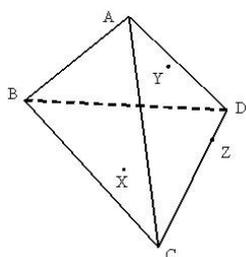
5. Géométrie dans l'espace

Voir dans l'espace, représenter un solide par un dessin en deux dimensions en distinguant le « vu » du « caché », ... sont des compétences que les élèves acquièrent avec plus ou moins de difficultés. Il n'est donc pas étonnant que les exercices de détermination de sections d'un solide par un plan posent quelques problèmes.

Comment peut-on leur faciliter la tâche ? Voici deux exemples d'exercices de sections.

5.1. Section d'un tétraèdre

L'élève qui ne lit pas correctement les données pourrait croire que X se trouve dans le plan ABC et que Y se trouve dans le plan ABD . Il risque donc de se tromper dès le début !

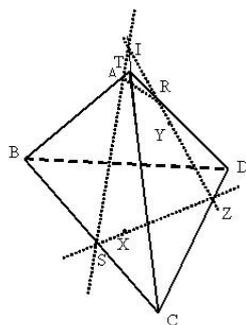


$X \in BCD,$
 $Y \in ACD,$
 $Z \in CD.$

Pour l'aider, dressons un petit tableau composé de quatre colonnes correspondant aux quatre plans dans lesquels sont contenues les faces du tétraèdre, dans lesquelles sont indiqués les points du plan sécant.

ABC	ABD	ACD	BCD
			X
		Y	
		Z	Z
	R	R	
S			S
I		I	
T	T		

Ce tableau montre à l'élève qu'il peut relier Y et Z dans ACD . La droite YZ ne coupera pas l'arête BD mais bien AD en R . Ce nouveau



point est placé dans le tableau.

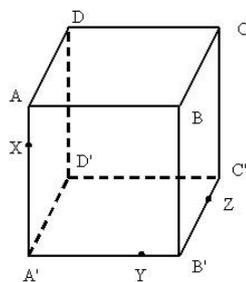
De même, nous pouvons relier XZ dans BCD qui coupe BC en S .

Un point dans un plan ne suffit pas pour continuer l'exercice. Il s'agit de rechercher un point de percée. Dans ce cas, en prolongeant par exemple YZ , nous obtenons le point I sur AC .

De sorte que SI dans ABC coupe AB en T . Il suffit enfin de relier R et T dans ABD pour terminer la section.

5.2. Section d'un cube

Nous vous proposons de déterminer la section suivante. Comme dans le cas d'une pyramide, dressons un tableau de six colonnes, chacune correspondant à un plan contenant une face du cube et de telle manière que deux plans parallèles soient dans des colonnes successives.



Difficultés de géométrie

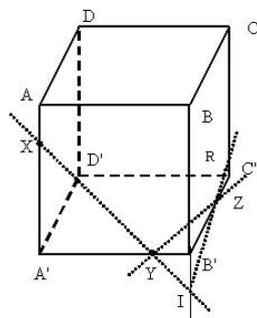
$ABCD$	$A'B'C'D'$	$ADD'A'$	$BCC'B'$	$ABB'A'$	$DCC'D'$
		X		X	
	Y			Y	
	Z		Z		

Ce tableau nous indique que nous pouvons relier Y et Z dans $A'B'C'D'$ et XY dans $ABB'A'$.

N'oublions pas le résultat suivant : *Un plan coupe deux plans parallèles suivant des droites parallèles.*

Néanmoins, la trace de YZ dans $A'B'C'D'$ ne nous permet pas de tracer une parallèle dans $ABCD$ puisque nous n'avons pas de point dans ce plan. De même pour XY dans $DCC'D'$. Nous prolongeons par exemple XY qui coupe BB' en I , de sorte que nous puissions relier Z et I dans $BCC'B'$. Notons R l'intersection de ZI et de CC' .

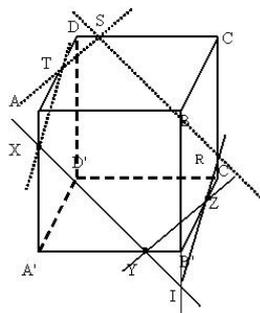
La section est donc donnée par la figure ci-contre et le tableau devient :



$ABCD$	$A'B'C'D'$	$ADD'A'$	$BCC'B'$	$ABB'A'$	$DCC'D'$
		X		X	
	Y			Y	
	Z		Z		
			I	I	
			R		R

Il ne nous est à nouveau plus possible de relier deux points dans un même plan. Mais les plans $BCC'B'$ et $ADD'A'$ sont parallèles et $X \in ADD'A'$. Nous traçons donc une parallèle à ZR passant par X dans $ADD'A'$ qui coupe AD en T . De même, passant par R , nous traçons la parallèle à XY

dans $DCC'D'$ qui coupe CD en S . Voici comment évolue le tableau. Nous obtenons alors la section $XYZRST$.



$ABCD$	$A'B'C'D'$	$ADD'A'$	$BCC'B'$	$ABB'A'$	$DCC'D'$
		X		X	
	Y			Y	
	Z		Z		
			I	I	
			R		R
S					S
T		T			

Pour l'élève, cette méthode est un repère, un fil conducteur dans la résolution de l'exercice. À tout moment, il sait dans quel plan il travaille et il sait déterminer quelles sont les arêtes qui peuvent être coupées! Ce n'est pas pour autant que la faculté de visualisation en trois dimensions ne soit pas sollicitée : il faut encore distinguer le « vu » du « caché » dans la section obtenue.

6. Géométrie analytique

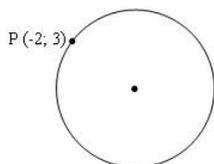
En géométrie analytique, le problème rencontré par les élèves est inquiétant. La principale question qu'ils posent est la suivante : « Comment faut-il faire ? » C'est l'analyse d'un problème qui est la pierre d'achoppement. Il faut habituer les élèves à décortiquer un problème : Quelles sont les données ? Que me demande-t-on ? Quelles sont les différentes étapes de la résolution qui me permettront de trouver la solution à partir des données ? Voilà les trois grandes questions que l'élève doit se poser et y répondre.

Voici deux problèmes de géométrie analytique qui semblent poser quelques difficultés.

6.1. Tangente à un cercle

Un cercle a pour équation $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$. Donner une équation de la tangente en son point P de coordonnées $(-2, 3)$.

1. *Quelles sont les données ?* Un cercle et un point du cercle. Faisons un petit dessin afin de visualiser la situation.



2. *Que demande-t-on ?* L'équation de la tangente au cercle en P .
3. *Étapes de résolution.* Il faut se souvenir que la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon du cercle passant par le point de contact. Aussi, nous devons déterminer :
 - Les coordonnées du centre du cercle ;
 - La pente de la droite reliant le centre du cercle au point de contact ;
 - La pente de la tangente qui est perpendiculaire au rayon ;
 - L'équation de la tangente.

Remarquons que cette troisième étape de l'analyse est très importante et c'est celle qui semble la plus difficile pour l'élève. En effet, elle demande de mettre conjointement en œuvre diverses notions mathématiques rencontrées dans différents chapitres vus dans le courant de l'année mais aussi lors des années précédentes ! C'est la mise en place de compétences et le système d'enseignement en spirale.

4. *Résolution proprement dite.*
 - Recherche du centre du cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$. Rassemblons les termes en x puis ceux en y dans le membre de gauche et les termes indépendants dans le membre de droite.

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + y^2 - 2y &= 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 3 + 1 + 1 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5.\end{aligned}$$

Il s'agit du cercle de centre $C = (-1, 1)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$.

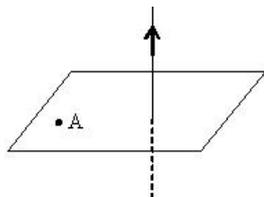
- Pente de la droite CP : $m_{CP} = \frac{3-1}{-2-(-1)} = -2$.
- Pente de la tangente, perpendiculaire à CP : $m_t \cdot m_{CP} = -1$, donc $m_t = 1/2$.
- Équation de la tangente. Il s'agit de l'équation de la droite passant par P et de coefficient angulaire $1/2$: $y - 3 = \frac{1}{2}(x + 2)$; donc la tangente a pour équation $y = \frac{1}{2}x + 4$.

6.2. Plan orthogonal à une droite

Déterminer l'équation cartésienne du plan comprenant le point A de coordonnées $(1, 2, -1)$ et orthogonal à la droite d'équations :

$$d \equiv \begin{cases} x = 8 - 2k \\ y = -3 + 5k \\ z = 1. \end{cases}$$

Nous décortiquons le problème comme nous l'avons fait ci-dessus.



1. *Données* : Une droite, un point A , un plan orthogonal à la droite et passant par ce point.
2. *Que demande-t-on ?* Une équation cartésienne du plan.
3. *Étapes de résolution*. Pour écrire l'équation cartésienne d'un plan, il y a deux possibilités : passer par les équations paramétriques ou connaître un vecteur normal au plan.

Le dessin nous est d'une grande utilité. En effet, nous voyons qu'un vecteur directeur de la droite est aussi un vecteur normal au plan. Nous utiliserons la seconde méthode.

Il faut donc nous souvenir que l'équation cartésienne d'un plan est donnée par $ax + by + cz + d = 0$ où (a, b, c) sont les composantes d'un

vecteur normal v_n , qui est le vecteur directeur de la droite. Ce vecteur v_d se lit dans les équations paramétriques de la droite.

4. *Résolution.* Comme $v_d = (-2, 5, 0) = v_n$, le plan aura pour équation $-2x + 5y + 0z + d = 0$; le terme constant d se détermine en « injectant » les coordonnées de A dans l'équation : $-2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + d = 0$, donc $d = -8$. L'équation du plan est $-2x + 5y - 8 = 0$.

Dans la plupart des notes de cours, on retrouve les critères de parallélisme et d'orthogonalité de droites et de plans. Tout comme certaines formules de trigonométrie, des élèves se contraignent à les étudier par cœur et s'y perdent alors que cela ne prend pas plus de temps de privilégier le raisonnement, la réflexion à partir d'une représentation, d'un dessin.

Chaque problème passe donc par une analyse complète : distinguer les données des inconnues et déterminer les différentes étapes de la résolution (c'est-à-dire comment, à partir des données, on peut trouver la solution).

Cette démarche permet de développer chez les élèves des compétences transversales, terminales et spécifiques :

- Traduire une information d'un langage dans un autre ;
- Observer à partir des acquis antérieurs et en fonction du but à atteindre ;
- Dégager une méthode de travail ;
- Choisir une procédure adéquate et la mener à son terme ;
- Produire un dessin, un graphique qui éclaire ou résume une situation ;
- Parmi les notions vues au cours, organiser une démarche en vue de déterminer les éléments d'une figure ;
- ...

Nous ne pouvons que vous pousser à encadrer, encourager les élèves dans la résolution d'exercices et autres applications. Ce n'est ni évident pour l'élève ni pour l'enseignant... c'est en quelque sorte un défi que les deux parties s'engagent à relever. L'élève doit se sentir soutenu dans son effort (au risque de baisser les bras) même si l'on ne peut rester derrière chacun d'eux tout le temps. Quelle sera la joie et quel sera le bonheur lorsque l'exercice sera résolu entièrement !

7. Conclusion

Dans cet article, nous avons voulu montrer qu'un élève qui a envie de réussir malgré certaines difficultés doit sans cesse être encouragé. L'ensei-

gnant est là pour le guider, le soutenir dans son effort. Il l'aide en lui proposant des moyens mnémotechniques afin de lui faciliter l'apprentissage de nouveaux concepts et d'éviter une étude par cœur dénuée de sens. La plupart des exercices de géométrie et de trigonométrie peuvent se simplifier grâce à une représentation graphique. En trigonométrie, le cercle est un outil précieux que très peu d'élèves maîtrisent. En géométrie, représenter, dessiner, schématiser un énoncé en y indiquant les données et inconnues permet de visualiser le problème qui devient alors plus concret. Les élèves se sentent alors capables et ont envie d'essayer de le résoudre... ils sont motivés!

Encourager continuellement les élèves, les accompagner dans leur apprentissage, les écouter, ... sont autant de qualités que les élèves ressentent davantage dans les cours de remédiation tels que les ateliers « Échec à l'échec » des Jeunesses Scientifiques. Ce climat de confiance est propice à l'apprentissage et au développement de compétences chez les élèves.

place réservée à la publicité

Cabri-Géomètre et les axes d'une conique

JEAN-PAUL HOUBEN

Université catholique de Louvain

Nous allons traiter aujourd'hui d'un problème concernant les diamètres conjugués et les axes de symétrie de l'ellipse. Les résultats obtenus seront utilisés dans un prochain article.

Si une conique est déterminée à partir de cinq points et que nous en connaissons deux diamètres conjugués, comment construire les axes de symétrie? Par la suite, lorsque les axes de symétrie sont déterminés, il y a moyen de trouver la position des foyers et revenir à une conique déterminée par ses foyers et son grand axe.

Un diamètre d'une ellipse est par définition le lieu des milieux de cordes parallèles. Construisons un diamètre dans une conique.

Soit une ellipse déterminée par les cinq points ⁽¹⁾ A, B, C, D et E ⁽²⁾ et menons par un de ces points, le point E par exemple, une droite parallèle ⁽³⁾ à une corde, AC dans notre exemple, et recherchons le point d'intersection de cette droite avec la conique ⁽⁴⁾. Nous avons dès lors deux cordes parallèles dans cette conique. Les milieux de ces cordes déterminent une droite qui coupe la conique en M et N . La droite MN est un diamètre de la conique et les directions de MN et AC sont dites conjuguées (Fig. 1).

Si nous prenons le milieu de la corde MN et le milieu d'une corde parallèle à MN , nous pouvons construire un autre diamètre PQ dit conjugué au premier (Fig. 2).

Venons-en maintenant à notre proposition sur les axes.

Si MN et PQ sont deux diamètres conjugués d'une ellipse, Chasles propose la construction suivante pour obtenir les axes de symétrie de l'ellipse :

Adresse de l'auteur : Jean-Paul Houben, Rue de l'Église 78, 1301 Bierges; courriel : houbenjp@versatelads1.be.

⁽¹⁾ **Courbe** / *Conique*

⁽²⁾ **Droite** / *Segment*

⁽³⁾ **Construction** / *Parallèle*

⁽⁴⁾ **Point** / *Deux objets*

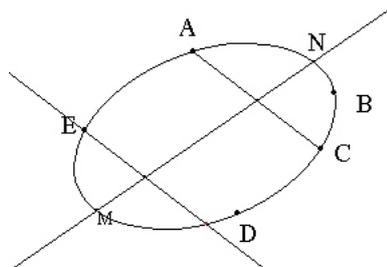


FIG. 1

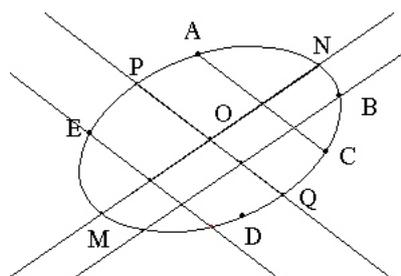


FIG. 2

1. Par l'extrémité M d'un des diamètres, construire la perpendiculaire à l'autre diamètre, ici PQ .
2. Sur cette perpendiculaire, reporter à partir de M deux segments MS et MT égaux à l'autre demi-diamètre OP .
3. Construire les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle SOT ⁽⁵⁾. Ce sont les directions des axes principaux.
4. Les grandeurs des axes sont la demi-somme et la demi-différence de OS et OT .

Les points 1 à 3 de la construction conduisent à la Fig. 3 :

Reste à démontrer que nous avons bien les demi-axes de l'ellipse.

Proposition.

Deux diamètres conjugués déterminent sur toute tangente, à partir du point de contact, des segments dont le produit des mesures algébriques est constant et égal à l'opposé du carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

⁽⁵⁾ Nous construirons une seule bissectrice puis sa perpendiculaire.

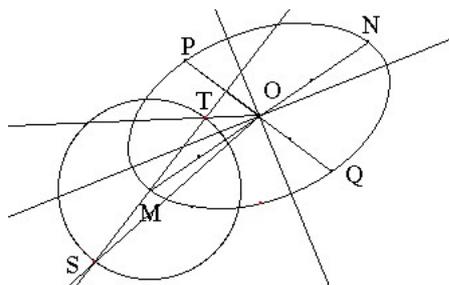


FIG. 3

Soit une ellipse avec ses deux diamètres conjugués de direction OP et OQ .

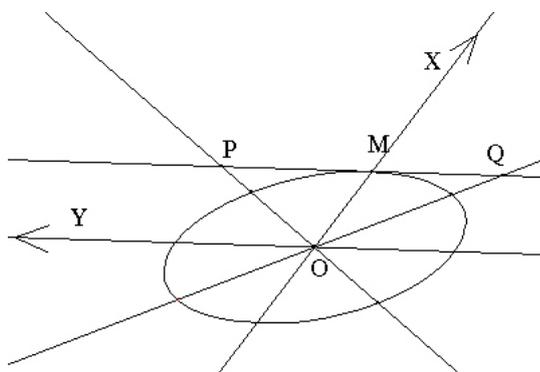


FIG. 4

Soit un point quelconque M de l'ellipse et la tangente en ce point. Prenons comme système d'axes les diamètres conjugués déterminés par OM et la parallèle à la tangente en M . L'équation de l'ellipse est alors :

$$b'^2 x^2 + a'^2 y^2 = a' b'^2$$

L'équation de la tangente est $x = a'$. Deux diamètres quelconques ont pour équations :

$$y = mx \quad \text{et} \quad y = m'x,$$

avec comme condition :

$$mm' = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

Les diamètres OQ et OP coupent la tangente en $P = (a', ma')$ et $Q = (a', m'a')$. On a donc :

$$\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = ma' \cdot m'a' = mm'a'^2 = -\frac{b'^2}{a'^2}a'^2 = -b'^2,$$

ce qui établit la proposition.

Revenons maintenant à notre problème concernant les axes de symétrie et supposons-le résolu. Soit OM et ON deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse et OA et OB les deux axes de symétrie à construire. Traçons en M la tangente à la conique. C'est d'ailleurs une parallèle à ON . Cette tangente rencontre les axes en P et Q (Fig. 5). En vertu de la proposition précédente :

$$\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = -\overline{ON} \cdot \overline{ON'}.$$

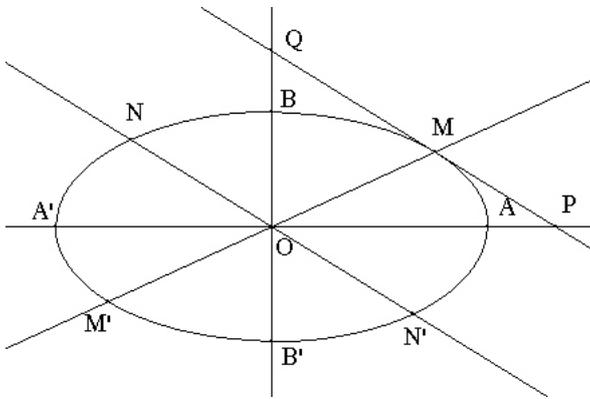


FIG. 5

Construisons (Fig. 6) le cercle de diamètre PQ passant par O . Dans ce cercle, $\overline{MP} \cdot \overline{MQ}$ représente la puissance du point M par rapport au cercle.

Si maintenant, on trace en M la perpendiculaire à la tangente et donc une perpendiculaire à l'autre diamètre conjugué, on obtient sur cette perpendiculaire deux segments égaux dont le produit donne aussi la puissance du point M :

$$\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MS} \cdot \overline{MT}.$$

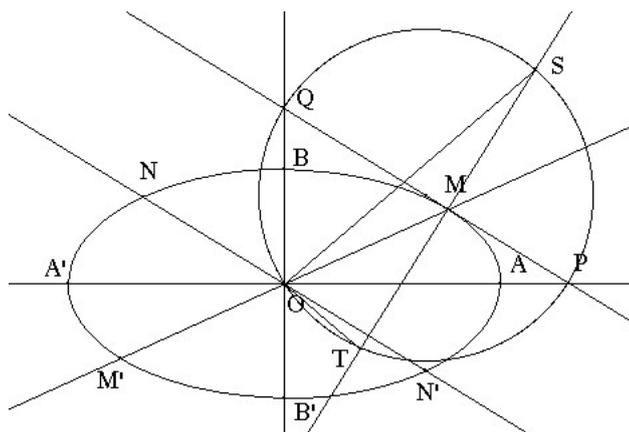


FIG. 6

Comme les arcs PS et PT sont égaux, la droite OP est bissectrice de l'angle \widehat{SOT} .

L'axe OP est bissectrice de \widehat{SOT} , l'autre qui lui est perpendiculaire est la bissectrice extérieure.

À partir de cette construction nous pouvons élaborer une macro ⁽⁶⁾ définie comme suit :

- Éléments initiaux : les deux diamètres conjugués MN et PQ ;
- Éléments finaux : les droites qui donnent les directions des axes de symétrie de l'ellipse ;
- Avec comme **Aide** le texte : *Étant donné les deux segments qui déterminent deux diamètres conjugués, la macro construit les axes de symétrie.*

Après avoir utilisé cette macro, on recherche les points d'intersection de chacun des axes avec la conique pour obtenir les sommets A , A' , B et B' de l'ellipse. La détermination des foyers est immédiate : on trace le cercle ayant pour centre le point B , extrémité du petit axe, et pour rayon la moitié du grand axe. Les foyers F et F' sont les intersections de ce cercle avec le grand axe ⁽⁷⁾.

⁽⁶⁾ Nommée par exemple **axes.mac**.

⁽⁷⁾ Voir page 33 du numéro 144 de MP : *Cabri-Géomètre et les ellipses*

Nous pouvons maintenant traiter l'ellipse en utilisant ses éléments focaux. Par exemple, la construction des tangentes comme il a été fait dans l'article sur les ellipses.

Nous pouvons aussi résoudre le problème suivant :

Inscrire une ellipse dans un parallélogramme.

Nous connaissons déjà quatre points de l'ellipse : les milieux des côtés du parallélogramme. Il nous en faut un cinquième. Ce sera par exemple l'une des extrémités d'un des axes de symétrie. Mais il nous faut encore établir le quatrième point de la construction de Chasles :

Les grandeurs des axes sont la demi-somme et la demi-différence de OS et OT. (Revoir la Fig. 3.)

Propositions d'Appolonius.

La somme des carrés des deux demi-axes est égale à la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques.

Le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués a la même aire que le rectangle construit sur les axes.

L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes $2a$ et $2b$ est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

si elle est rapportée à deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, elle sera :

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Il faut dès lors démontrer :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 \\ 4ab = 4a'b' \sin \theta, \end{cases}$$

si θ est l'angle des diamètres conjugués.

Comme nous nous trouvons avec un changement d'axes, nous allons employer deux des invariants ⁽⁸⁾ des coniques :

$$\frac{B^2 - AC}{\sin^2 \theta} \quad \text{et} \quad \frac{A + C - 2B \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

⁽⁸⁾ Une conique a pour équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ dans un système d'axes d'angle θ . Après une translation, rotation ou homothétie, l'équation devient $A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$ dans un système d'axes d'angle θ' . Alors les expressions suivantes restent constantes :

qui s'écrivent pour les équations de l'ellipse en système rectangulaire :

$$-\frac{1}{a^2b^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

puis pour les équations en axes quelconques d'angle θ :

$$-\frac{1}{a'^2b'^2 \sin^2 \theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} \right).$$

On a donc les deux égalités :

$$a^2b^2 = a'^2b'^2 \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{a'^2 + b'^2}{a'^2b'^2 \sin^2 \theta}$$

La première provient de l'égalité des dénominateurs du premier invariant et la seconde relation du second invariant après avoir réduit au même dénominateur.

Comme la première nous donne l'égalité des dénominateurs de la seconde relation, on a l'égalité des numérateurs :

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

ce qui établit les deux relations de la proposition d'Apollonius.

C'est cette proposition qui donne la grandeur $|OA| = a$ et $|OB| = b$ des demi-axes.

Appollonius donnait :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2, \\ 4ab = 4a'b' \sin \theta. \end{cases}$$

On va donc pouvoir calculer a et b . En additionnant et en soustrayant le double produit ab à la première relation, on obtient, en prenant les racines carrées :

$$a + b = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin \theta}$$

$$\frac{B^2 - AC}{\sin^2 \theta}, \quad \frac{A + C - 2B \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Ce sont les **invariants des coniques**. Le premier permet la classification des coniques et le dernier renseigne sur la dégénérescence. On peut trouver les démonstrations de ces invariances dans les anciens manuels de géométrie analytique plane. (Par exemple : G. Lupsin et R. Graas, pp. 111–115.)

et

$$a - b = \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin \theta}$$

Considérons maintenant les triangles SOM et TOM , où : $|OM| = a'$ et $|ON| = |MS| = |MT| = b'$ (revoir la Fig. 6).

De plus l'angle θ des diamètres conjugués se retrouve en M . C'est en fait l'angle alterne-interne \widehat{QMO} avec les parallèles NN' et PQ .

On a donc :

$$\widehat{OMS} = 90^\circ + \theta \quad \text{et} \quad \widehat{OMT} = 90^\circ - \theta,$$

ce qui donne pour leurs cosinus : $\cos \widehat{OMS} = -\sin \theta$ et $\cos \widehat{OMT} = \sin \theta$.

Dès lors :

$$a + b = \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \widehat{OMS}} = |OS|$$

et

$$a - b = \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \widehat{OMT}} = |OT|.$$

Enfin,

$$a = \frac{|OS| + |OT|}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{|OS| - |OT|}{2}.$$

Ceci termine la démonstration permettant la construction de l'ellipse inscrite à un parallélogramme.

Pour utiliser cette construction, préparons une macro qui construit les deux axes de symétrie en grandeur à partir de deux diamètres conjugués.

Reprenons la Fig. 3 qui donne les axes de symétrie. Dans celle-ci, prolongeons SO où nous allons construire la demi-somme et la demi-différence de $|OS|$ et $|OT|$. Pour cela, traçons le cercle de centre O passant par T . Ce cercle rencontre la droite SO en deux points. Ces deux points déterminent avec le point S deux segments qui sont la somme et la différence de $|OS|$ et $|OT|$. En prenant le milieu de ces segments, on détermine à partir de S deux nouveaux segments qui sont les grandeurs a et b des demi-axes. On termine en construisant avec le compas les deux cercles de centre O avec comme rayons les deux segments de longueur a et b . Ce qui donne la construction de la Fig. 7.

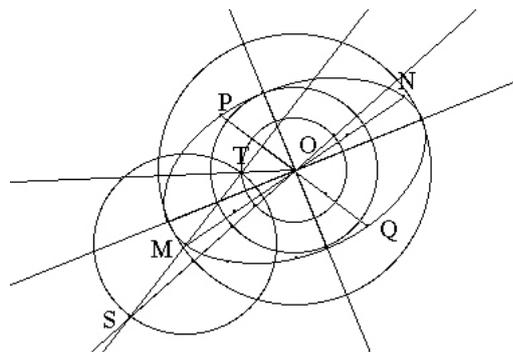


FIG. 7

Nous pouvons maintenant définir notre macro ⁽⁹⁾ avec comme éléments initiaux les deux diamètres conjugués MN et PQ et comme éléments finaux les axes de symétrie en grandeur.

Avec cette macro nous avons directement la solution de notre problème de l'ellipse inscrite à un parallélogramme.

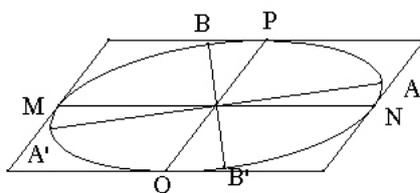


FIG. 8

Les milieux M , N , P et Q des côtés du parallélogramme déterminent les diamètres conjugués MN et PQ . La macro nous donne directement les quatre sommets A , B , A' et B' . On termine en construisant la conique passant par cinq de ces huit points.

Dans un prochain article nous construirons une conique comme intersection d'un cône avec un plan. Ce plan variable va nous permettre de découvrir les coniques. Nous aurons cependant besoin de résultats vus antérieurement.

⁽⁹⁾ Qui aura par exemple pour nom : **Axe-Sommets.mac**.

place réservée à la publicité

Modèles géométriques avec Cabri II Plus et Cabri 3D

ADRIAN OLDKNOW
The Mathematical Association

Introduction

L'exposé concerne les moyens d'amener le monde réel dans la classe de mathématiques, grâce à des photos et vidéos numériques (fichiers jpg et avi). Par l'utilisation de logiciels tel que *Cabri II Plus*, ces images peuvent former les bases de modèles géométriques et algébriques. Un problème particulier en mathématique a été d'obtenir des images réalistes d'objets tridimensionnels pouvant être manipulés. L'exposé montre aussi diverses utilisations de *Cabri 3D*, aussi bien pour explorer la géométrie de l'espace que pour modéliser des objets matériels du monde physique. Je suis très content d'avoir accepté l'invitation gracieuse de la SBPMef à participer à son Congrès.

En anglais, nous avons l'expression « une image vaut mille mots ». Donc le texte sera bref, mais illustré de beaucoup d'images ! De nos jours, les images sont très faciles à obtenir, que ce soit avec un appareil photographique numérique, ou un scanner, ou sur les pages de l'Internet. J'ai l'habitude de publier des textes, des fichiers et des images sur mon site Internet — et c'est là que vous pouvez trouver beaucoup de ressources pour compléter ce texte.

1. *Cabri II Plus*

Pour commencer nous allons explorer une méthode graphique pour trouver les racines carrées, attribuée à Descartes. Si vous voulez trouver la racine carrée de 9, vous tracez un segment AB , et le prolongez jusque C , où $BC = 1$. La perpendiculaire à AC élevée en B coupe le cercle de diamètre

Adresse de l'auteur : Adrian Oldknow, University of Chichester, Bognor Regis, W.Sussex PO21 1HR, Royaume-Uni ; courriel : a.oldknow@compuserve.com.

AC en D et E . La distance BD est la racine, 3. Eh bien, c'est facile à construire avec Cabri en utilisant les axes (Fig. 1).

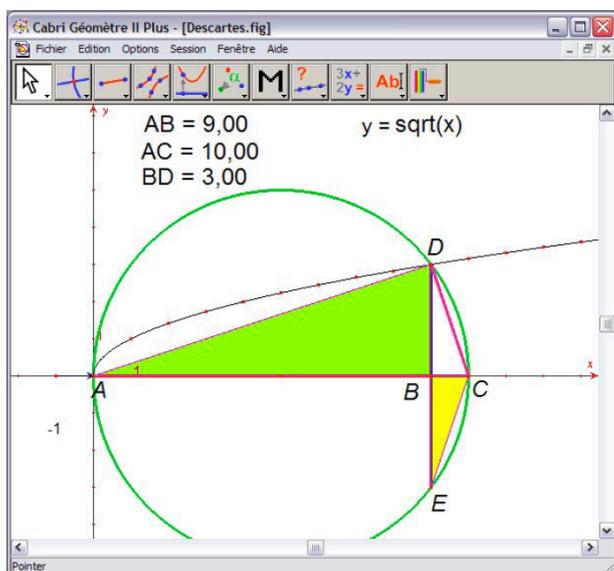


FIG. 1

On peut voir que le lieu des points D correspondant à C est une courbe. Laquelle? Ce n'est pas difficile : la fonction est $y = \sqrt{x}$. Mais pourquoi? Quelle est la relation entre les triangles ABD et CBE ? Pourquoi les angles en A et en E sont-ils égaux? Cela résulte du résultat bien connu sur les angles inscrits. Bien — nous avons la preuve que $BD/AB = BC/BE$ — mais quelle est l'utilité de cet élégant théorème? La méthode de Descartes est un cas particulier de deux cordes sécantes d'un cercle. Une autre application est une preuve que le monde n'est pas plat! Dans les années 1838, 1870, 1901 et 1904, quelques citoyens britanniques ont fait des essais pour établir si oui ou non le monde est plat, en utilisant un canal du Norfolk, le Bedford Level (Fig. 2 & 3). Ce canal possède un tronçon parfaitement rectiligne de 10 km. En 1870, le docteur Alfred Russel Wallace a aligné trois petits chalands, séparés par des distances de 2 milles. À l'aide d'un théodolite, il a trouvé que le chaland du milieu était 32 pouces plus haut que le plus éloigné. De cette manière, il a estimé le diamètre du monde à 7920 milles (Fig. 4).

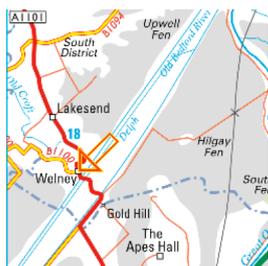


FIG. 2



FIG. 3

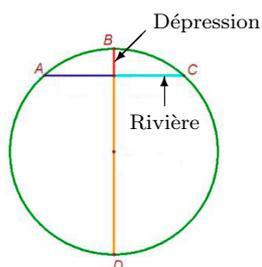


FIG. 4



FIG. 5

La même méthode est utilisée par le sphéromètre pour calculer le rayon d'une calotte sphérique, par exemple une lentille (Fig. 5).

À la conférence *CabriWorld 2004* à Rome, j'ai fait un séminaire sur *Cabri II Plus* avec les images et vous pouvez trouver l'article et les fichiers sur mon site Internet. Les exemples qui suivent en sont repris. Une idée simple est d'estimer l'aire d'une feuille avec un polygone (Fig. 6). On peut faire un étude sur les relations entre la longueur et l'aire de feuilles d'arbres d'espèces différentes.

En introduisant des axes, nous pouvons tracer des graphes de fonctions qui approchent les images, comme l'eau projetée par une fontaine. Les images suivantes (Fig. 7 & 8) montrent une exploration sur les courbes du deuxième degré.

Les clips vidéo sont aussi une source d'images. Sur mon site Internet (p. 3), vous pouvez trouver l'article *Mathematics from still and video images*. Doyle V. Davis a créé le logiciel *VidShell* (visitez sa page Internet ⁽¹⁾) où

⁽¹⁾ <http://webphysics.nhctc.edu/vidshell/vidshell.html>

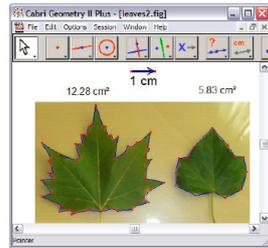


FIG. 6

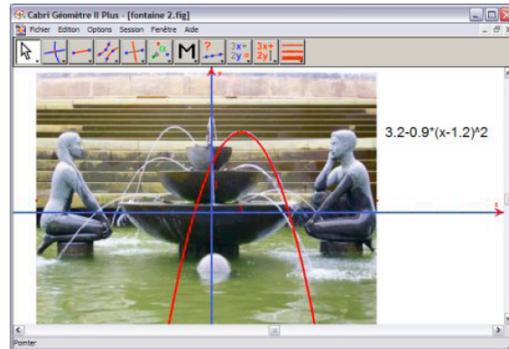


FIG. 7

FIG. 8

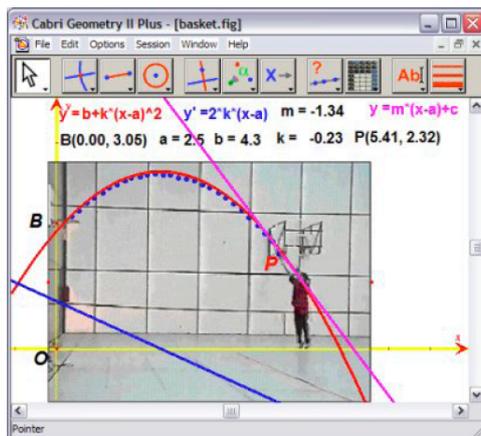


FIG. 9

vous pourrez l'obtenir gratuitement). Avec l'aide de *VidShell*, on peut superposer des points sur les vues extraites d'un document avi. Cela permet de modéliser les activités sportives comme le basket (Fig. 9).

Une autre source d'idées est fournie par les mécanismes. Les Anglais aiment leurs pelouses, et de temps en temps on a besoin d'un arroseur, comme le mien (Fig. 10).



FIG. 10

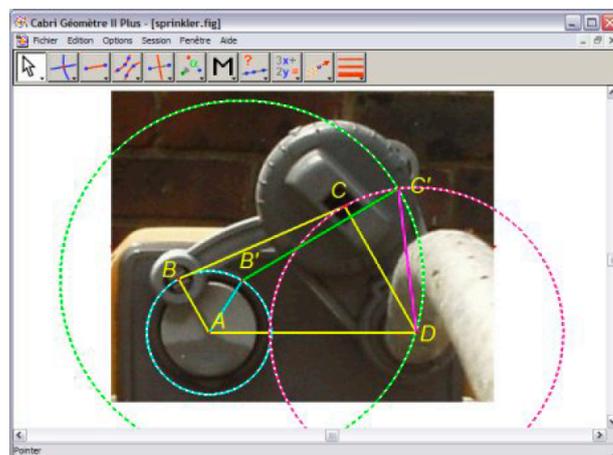


FIG. 11

La système est un application d'un mécanisme articulé à quatre barres, $ABCD$, qui transforme le mouvement circulaire d'une turbine en mouvement oscillant de la rampe d'arrosage. Il est facile de construire un tel mécanisme et de faire l'animation du point B' (Fig. 11).

Un tel système est utilisé pour les essuie-glaces d'une voiture. J'ai montré un clip vidéo des essuie-glaces (avant et arrière) de mon Opel Zafira. Nous pouvons aussi en faire la modélisation géométrique avec Cabri. Une bonne idée est d'animer le point S (Fig. 12).

La direction d'une auto est une autre application de la géométrie élémentaire. En tournant le volant, on bouge les roues avant mais pas du même angle. La roue intérieure va tracer un cercle d'un rayon moindre que la roue extérieure. Les roues seront tangentes à chaque cercle. Connaissant les dimensions de votre voiture favorite, vous pouvez partir à la recherche de la relation idéale entre les deux angles (Fig. 14).

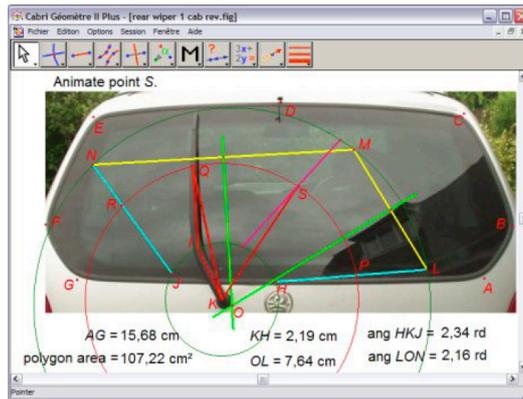


FIG. 12



FIG. 13

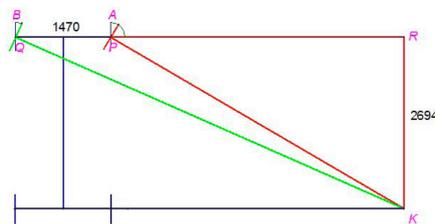


FIG. 14

Pouvez-vous réaliser ce modèle avec *Cabri* ? Le point A peut parcourir un quart de cercle. Il va déterminer le centre K du virage. De cette manière, vous pouvez déterminer le point B . Pouvez-vous trouver une expression $B = f(A)$ pour la relation entre les deux angles ?

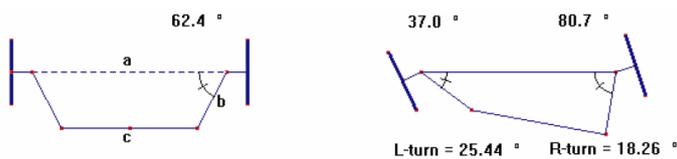


FIG. 15

La base géométrique du mécanisme de direction est un trapèze isocèle (Fig. 15). Le système s'appelle en anglais « Ackermann steering », d'après le nom d'un libraire britannique du XVIII^e siècle qui a acheté les droits à George Lenkensperger (ou Langensperger), de Munich, en 1818. Pouvez-vous suggérer des valeurs pour les longueurs des segments a , b et c pour ma voiture ?

La construction des autos est maintenant une source d'applications de la géométrie avec le système « CAD-CAM » lancé par Paul Bézier chez Renault. Les fondements géométriques de ce système sont les *courbes de Bézier*, construites par homothéties successives : A' (resp. B' , C' , ...) est l'image de B (resp. C , D , ...) par l'homothétie de centre A (resp. B , C , ...) et de rapport t ; ensuite, A'' (resp. B'' , C'' , ...) est l'image de B' (resp. C' , D' , ...) par l'homothétie de centre A' (resp. B' , C' , ...) et de rapport t ; &c. La Fig. 16 montre des courbes de Bézier de degrés un à quatre.

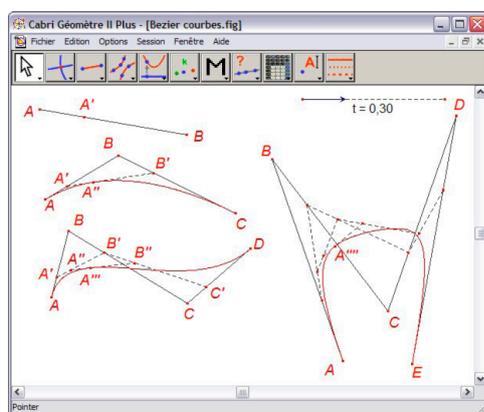


FIG. 16

On peut faire des dessins de vases en utilisant peut-être six « points de contrôle » (Fig. 17). Une autre source d'exemples est fournie par les structures comme les ponts, les bâtiments, les églises. . . La ville de Cambridge est pleine de ponts sur la rivière Cam. On peut les modéliser avec des cercles, des courbes du deuxième degré. . . (Fig. 18).

Il est toujours intéressant de trouver des exemples dans votre localité. Un plan est très utile pour développer le sens de l'orientation chez les élèves (Fig. 19).

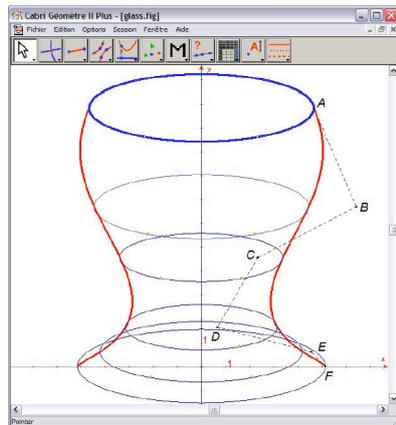


FIG. 17

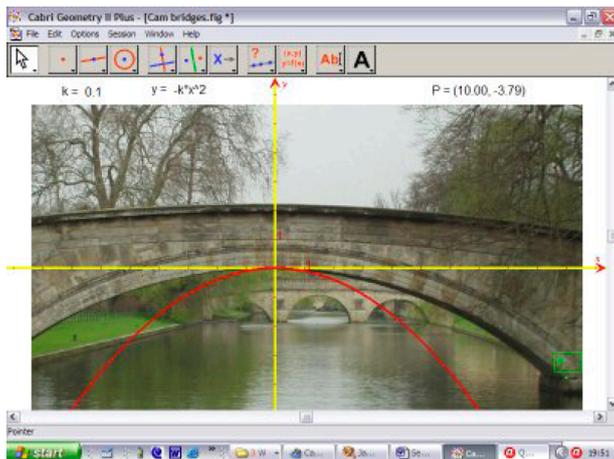


FIG. 18

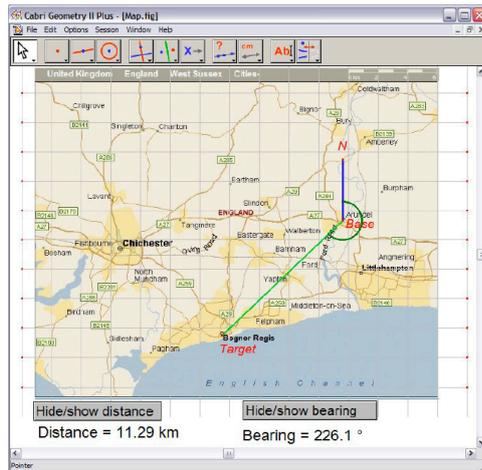


FIG. 19

Le lendemain du Congrès, j'ai trouvé un site Internet avec un plan de la cathédrale de Tournai, et un autre avec ses dimensions. Ainsi, on peut aussi faire une modélisation géométrique avec Cabri (Fig. 20). On a dessiné

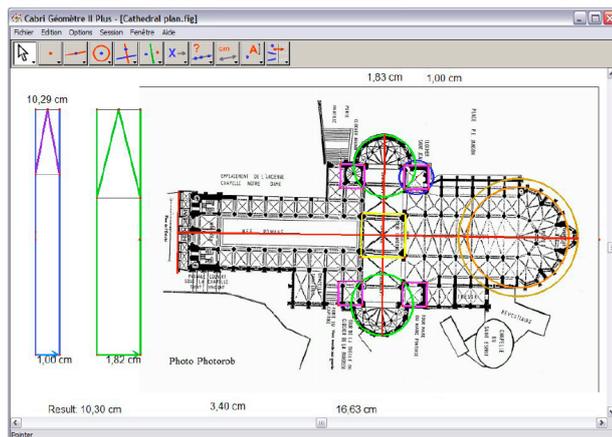


FIG. 20

les tours à la même échelle. Passons maintenant à *Cabri 3D*.

2. Cabri 3D

On commence par la construction de la cathédrale en trois dimensions.

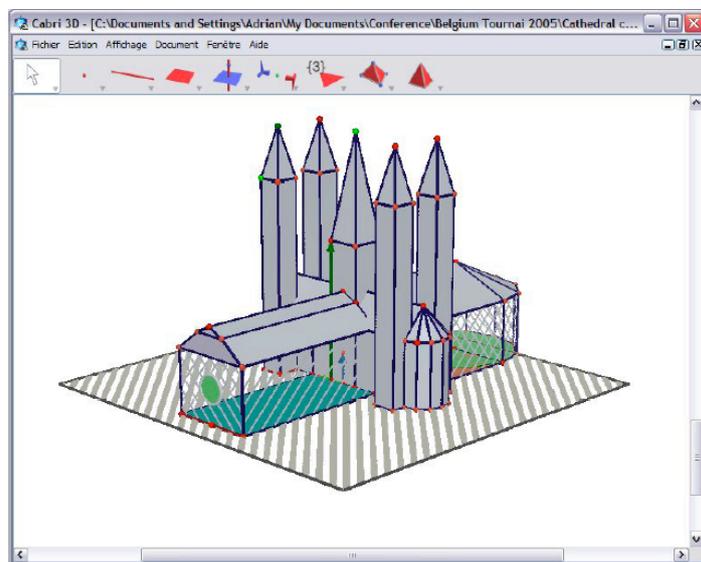


FIG. 21

La cathédrale réelle est de forme beaucoup plus compliquée! Mais en utilisant les polygones, les prismes, les pyramides, . . . , nous pouvons nous en faire une bonne idée — et même avec les murs transparents.

Pour illustrer les techniques, on commencera avec une construction un peu plus simple : l'Atomium de Bruxelles (Fig. 22). On a bien 9 sphères de même dimension. L'une est au milieu d'un cube, et les autres sont à ses sommets. Pour commencer, on dessinera un cube, et un point qui peut traverser une de ses arêtes, pour définir la première sphère. Toutes les autres seront des translatsés de cette sphère.

On commence avec deux points A , P dans le plan de base. Le cube est un solide avec une face carrée dans ce plan, avec P comme centre et A comme sommet (Fig. 23). Un objet (le cube par exemple) étant sélectionné, on peut utiliser un « clic droit » pour choisir sa forme, sa couleur, son style de surface, &c. Pour le style j'ai choisi « vide » pour obtenir un cube



FIG. 22

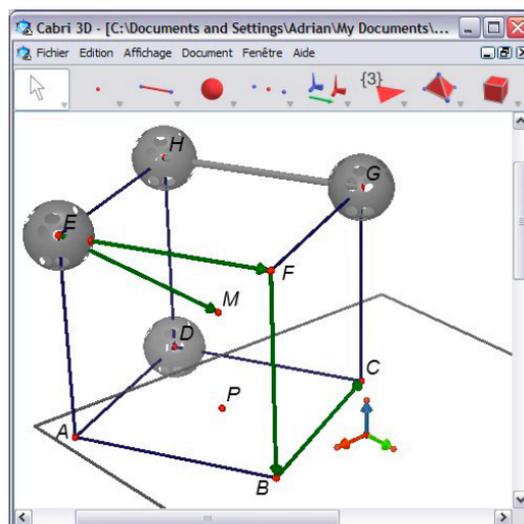


FIG. 23

transparent. Pour l'arête HG j'ai construit un segment et après, j'ai changé la couleur et le rayon. Pour la sphère de centre H , j'ai construit le vecteur \vec{BC} puis la translattée de la sphère de centre E par ce vecteur.

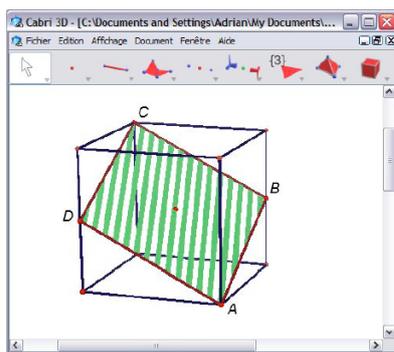


FIG. 24

Avec la même base nous pouvons faire une exploration sur les plans de symétrie d'un cube. Les points B et D sont les milieux de deux arêtes opposées (Fig. 24). Le polygone $ABCD$ est plan, avec les cotés égaux. Est-ce

un carré ? Est-ce un plan de symétrie pour le cube ? Vous pouvez construire le symétrique d'un autre sommet dans le miroir $ABCD$ pour tester une de ces hypothèses. Vous pouvez construire le cercle (ou la sphère !) sur BD comme diamètre pour tester l'autre. Bonne chance !

Peut-être sera-t-il plus génial d'illustrer les mécanismes, comme le système d'Ackermann (Fig. 25), en trois dimensions ?

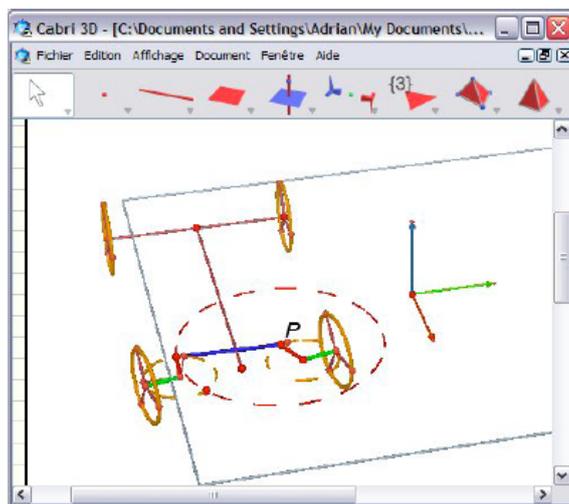


FIG. 25

Pour finir nous explorerons les polyèdres qui servent à construire les tours du modèle virtuel de la cathédrale de Tournai (Fig. 26).

Les points P, A, Q, C, R sont dans le plan de base. On a construit un carré avec A, P et un dodécagone avec Q, C . Les points A' et C' sont pris sur les perpendiculaires au plan de base en A et en C . Les vecteurs AA' et CC' sont utilisés avec les polygones pour construire les prismes. Le translaté du carré est la base d'une pyramide de sommet B , sur la perpendiculaire élevée en P . Le segment DE et le point Q sont utilisés pour définir un plan qui va couper le prisme dodécaédrique. Le point R est utilisée à définir le demi-espace pour le solide qui reste. Est-ce que vous pouvez faire le « chapeau » au-dessus ?

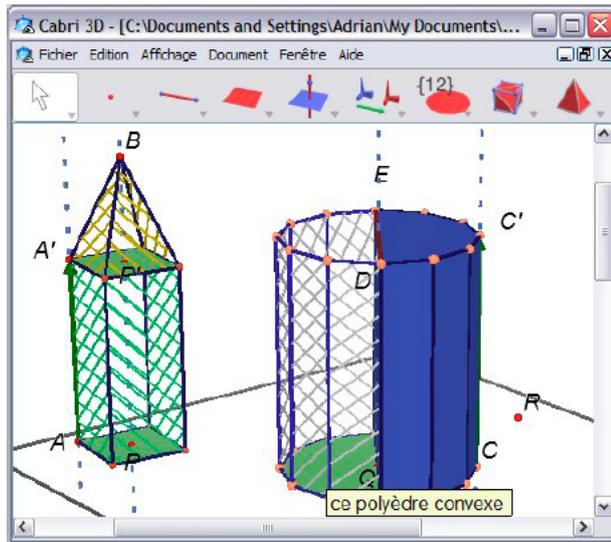


FIG. 26

Conclusion

J'espère que vous êtes convaincus que les images numériques, avec le pouvoir des outils de l'écurie Cabri, peut donner plus d'intérêt et plus de réalité dans nos classes de mathématiques.

Références

CLARK-JEAVONS, A., *Exciting ICT in Maths*, Network Educational Press, 2005, ISBN185539-191-0.

http://www.networkpress.co.uk/ICT_Maths.html

JOHNSTON-WILDER, S. & PIMM, D., *Teaching Secondary Mathematics with ICT*, Open University Press, 2005, ISBN 0-335-21381-2.

<http://mcgrawhill.co.uk/html/0335213812.html>.

OLDKNOW, A. & TAYLOR, R., *Teaching Mathematics using ICT*, 2nd edition, Continuum, ISBN 0-8264-7059-9

<http://www.continuumbooks.com/Books/detail.aspx?ReturnURL=/Search/default.aspx&CountryID=2&ImprintID=2&BookID=121087>

(ou contacter Chartwell-Yorke, 114 High Street, Belmont, Bolton, Lancashire, BL7 8AL, England,

Tél : (+44) (0)1204 811001, fax : (+44) (0)1204 811008,

Courriel : info@chartwellyorke.com, <http://www.chartwellyorke.com>).

Le logiciel récent le plus important est *Cabri 3D*. Vous pouvez télécharger la version d'essai gratuite à l'adresse suivante :

<http://www.cabri.com/web/nsite/html/software.html>.

Vous pouvez trouver d'autres fichiers utiles sur mon site web :

<http://www.adrianoldknow.org.uk>.

Étude épistémologique sur la méthode de Fermat pour la recherche d'extrémums

JACQUES BAIR & VALÉRIE HENRY
Université de Liège

Introduction

De très nombreux problèmes, qu'ils soient internes aux mathématiques ou relatifs à des situations concrètes de la vie courante ou encore dans d'autres sciences, se traduisent formellement par la recherche d'extrémums d'une fonction (à une ou à plusieurs variables, soumises ou non à des contraintes). Il est dès lors naturel de retrouver la théorie des extrémums à toutes les étapes de l'histoire des mathématiques.

Ce travail sera centré sur la célèbre *Méthode du maximum et du minimum* présentée dans les *Œuvres de Fermat* publiées par les soins de Tannery et Henry [1891–1922]. Nous ne remonterons guère en amont de cette théorie, et ne nous attarderons pas non plus sur ses applications, par exemple à la recherche de la tangente à une courbe. Nous nous contenterons d'analyser les raisonnements originaux fournis par Fermat ; nous les présenterons à l'aide d'un exemple concret emprunté à Fermat lui-même, les situerons quelque peu dans leur contexte historique, puis en donnerons des interprétations plus contemporaines aussi bien en termes d'analyse classique que dans le contexte de l'analyse non standard qui se révélera assez fidèle à la démarche fermatienne.

En guise de conclusion, nous émettrons quelques réflexions relatives à l'évolution de ce chapitre important de l'analyse mathématique.

Dans cette note, nous utiliserons de préférence les notations originales des auteurs cités ; toutefois, nous adopterons généralement des notations plus modernes pour notre analyse et nos interprétations des méthodes anciennes.

Adresses des auteurs : Jacques Bair, Valérie Henry, Université de Liège, Bd du Rectorat 7, 4000 Liège ; courriel : J.Bair@ulg.ac.be, V.Henry@ulg.ac.be.

1. Du temps de Fermat

1.1. Énoncé du problème

Pour illustrer sa théorie, Fermat traite un exemple concret inspiré par l'œuvre de Pappus dans laquelle se trouve ce résultat (repris de *La Collection mathématique* traduite par P. Vereecke [18, p. 522]) :

« **Proposition 13.** - Si l'on a une droite AB , et si on la coupe en deux parties égales au point Γ , ce point Γ est celui qui, parmi tous les points qu'on prendra, découpe le plus grand rectangle compris sous les droites $A\Gamma$, ΓB . »

Fermat formula, avec d'autres notations mais en termes très clairs, la question étudiée, avant de juger lui-même sa méthode :

« Soit à partager la droite AC (fig. 91) en E , de sorte que $AE \times EC$ soit maximum. (...) Il est impossible de donner une méthode plus générale. (...) Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles ; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrions traiter ailleurs. » [6, Tome III, pp. 121–123].

Nous allons porter notre attention sur les raisonnements fournis par Fermat lui-même pour résoudre ce problème, avant d'analyser ces arguments anciens à la lumière de connaissances actuelles en analyse mathématique.

Selon des historiens, dont Mahoney [14, pp. 144–145], Fermat a publié sa méthode en plusieurs épisodes, avec des justifications diverses, en l'illustrant par plusieurs exemples concrets et en l'appliquant notamment à la recherche des tangentes à une courbe. Nous nous bornerons ici à résoudre le problème énoncé ci-dessus à l'aide des deux méthodes différentes mises en évidence en 1929 par Wieleitner [21] et qui peuvent se révéler équivalentes d'un point de vue algorithmique [20, p. 47].

1.2. Première résolution par Fermat

L'historien Montucla [16, Tome II, p. 138] affirme que « la méthode de *maximis et minimis* de Fermat est fondée sur ce principe déjà aperçu par Kepler dans sa *Stereometria dolorium*, savoir que lorsqu'une grandeur,

par exemple l'ordonnée d'une courbe, est parvenue à son *maximum* ou son *minimum*, dans une situation infiniment voisine, son accroissement ou sa diminution est nulle ». Cette influence par Kepler est confirmée par C. Henry qui précise : « la méthode de Fermat, pour les recherches des maxima et des minima, repose sur un principe, non démontré, de Kepler : l'accroissement $F(x + e) - F(x)$ d'une fonction de la variable x est infiniment petit par rapport à e . Pour trouver les valeurs de x correspondant aux maxima et aux minima de $F(x)$, Fermat égale à zéro l'accroissement $F(x + e) - F(x)$. » [6, p. 143].

Voici la formulation de cette première méthode, qui sera notée par la suite \mathcal{M}_1 , présentée Fermat :

« Posons $AC = b$; soit a un des segments, l'autre sera $b - a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b , le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$;

Il doit être <i>adégalé</i> au précédent :	$ba - a^2$;
Supprimant tous les termes communs :	$be \sim 2ae + e^2$;
Divisant tous les termes :	$b \sim 2a + e$;
Supprimez e :	$b = 2a$.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b . » [6, Tome III, pp. 121–123].

1.3. Deuxième résolution par Fermat

Le premier exposé de \mathcal{M}_1 , réalisé aux alentours de 1629, présentait « un algorithme, une procédure mécanique dénuée de toute justification ou fondement théorique. » [14, p. 144]. Il n'est dès lors pas étonnant de constater que cette méthode fut contestée par certains savants de l'époque comme en attestent de nombreuses lettres échangées à ce propos entre Descartes, Fermat, Mersenne et Roberval, qui se trouvent notamment rassemblées dans l'annexe 7 de la brochure intitulée *des problèmes d'extrémums chez Fermat à la notion de dérivée* et publiée par l'Irem de Toulouse [12, pp. 80–88].

Cela incita probablement Fermat à essayer de justifier sa méthode. Dans cette optique, il proposa une explication basée à la fois sur méthode de la

syncrise de Viète ⁽¹⁾ et sur le fait que « maxima et minima sont en effet uniques et singuliers, comme le dit Pappus et comme le savaient déjà les anciens » [6, Tome III, p. 131].

Voici le raisonnement de Fermat (1640-1642), auquel on se référera ultérieurement comme étant la méthode \mathcal{M}_2 .

« Le point satisfaisant à cette question est évidemment le milieu de la droite donnée, et le produit maximum est égal à $b^2/4$; aucune autre division de cette droite ne donnera un produit égal à $b^2/4$.

Mais si l'on propose de partager la même droite b en sorte que le produit des segments soit égal à z'' (cette aire étant d'ailleurs à supposer plus petite que $b^2/4$), on aura deux points satisfaisant à la question, et ils se trouveront situés de part et d'autre du point correspondant au produit maximum.

Soit en effet a un des segments de la droite b , on aura $ba - a^2 = z''$, équation ambiguë, puisque pour la droite a on peut prendre chacune des deux racines. Soit donc l'équation corrélatrice $be - e^2 = z''$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$, il viendra

$$b = a + e ;$$

les longueurs a et e seront d'ailleurs inégales. Si, au lieu de l'aire z'' , on en prend une autre plus grande, quoique toujours inférieure à $b^2/4$, les droites a et e différeront moins entre elles que les précédentes, les points de division se rapprochant davantage du point constitutif du produit maximum. Plus le produit des segments augmentera, plus au contraire diminuera la différence entre a et e , jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait pour la division correspondant au produit maximum; dans ce cas, il n'y a qu'une solution unique et singulière, les deux quantités a et e devenant égales. » [6, Tome III, pp. 131-136].

Il est à noter que cette idée algébrique de considérer une racine double d'une équation était à la mode à l'aube du dix-septième siècle; elle fut notamment exploitée par Descartes pour déterminer une tangente à une courbe (voir, par exemple [9, Chapitre 11, pp. 171-205] ou [10]).

⁽¹⁾ La *syncrise* de Viète était une méthode consistant à exprimer le coefficient B de l'équation $B^n A^p - A^{n+p} = Z''$ en fonction de racines de l'équation. Si A et E sont deux de ces racines, alors $B^n A^p - B^n E^p = A^{n+p} - E^{n+p}$, d'où l'on peut tirer l'inconnue B .

Par ailleurs, d'après certains historiens emmenés par Strømholm [20, p. 64], cette méthode \mathcal{M}_2 aurait pu être énoncée avant la méthode \mathcal{M}_1 , notamment parce qu'elle se révèle moins novatrice que cette dernière et qu'elle repose sur des théories plus anciennes.

1.4. Point de vue de Huygens

Quelle que soit la chronologie des deux méthodes \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 , il semble que la théorie de Fermat sur les extrémums n'était pas encore bien comprise au milieu du dix-septième siècle. C'est ce qui poussa Huygens à présenter, à l'Académie des Sciences et près de trente ans après Fermat (soit précisément en 1667) une communication exposant sa démonstration de la règle des maxima et des minima. Il y décrit différentes étapes à suivre pour trouver des extrémums, à savoir, d'après un résumé de Noël et Trompler [17, pp. 110–111] :

- Égaler deux expressions qui ne coïncident pas ;
- Supprimer les termes semblables figurant dans les deux membres ;
- Diviser par une quantité « infiniment petite » e ;
- Supprimer les termes qui contiennent encore e , puisqu'ils représentent des quantités infiniment petites pas rapport à ceux qui ne renferment pas e ».

Cette présentation algorithmique de la théorie fermatienne, dans laquelle était employée pour la toute première fois les mots *infiniment petit* [17, pp. 110], ne réglait toutefois pas les deux principaux problèmes, de nature ontologique, soulevés par les deux résolutions pré-citées :

- Que représente e , qui n'est d'ailleurs pas le même dans \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 ? Est-ce un nombre non nul par lequel on peut diviser les deux membres d'une équation, ou est-ce zéro comme il est admis en fin de raisonnement ?
- Que signifie précisément le signe \sim d'adégalité ?

La section qui va suivre tente d'apporter des réponses, en langage moderne, à ces deux questions.

2. Analyse épistémologique

2.1. Interprétations en termes de limites

L'explication moderne généralement émise à propos de la méthode \mathcal{M}_1 consiste à y voir l'application du concept de dérivée que Lagrange définira comme étant « l'expression obtenue en faisant $e = 0$ dans l'expression du quotient différentiel $\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$ » [1, p. 90]. Ainsi, cette méthode de Fermat se ramène à chercher un point qui annule la dérivée de l'objectif étudié; ce résultat est connu de nos jours sous le nom de *Théorème de Fermat*. Dans cette optique, le symbole e utilisé dans \mathcal{M}_1 désigne donc une variable *tendant vers 0*, ce qui est d'ailleurs conforme à l'idée d'évanouissement exprimée dans \mathcal{M}_2 . La transformation du dernier signe d'adégalité en une égalité se justifie alors par un passage à la limite.

Il convient toutefois d'être conscient que le raisonnement de Fermat n'est qu'un prélude à cette présentation contemporaine, puisque, notamment

- La notation fonctionnelle désormais classique $f(x)$ n'aurait été introduite qu'au dix-huitième siècle par Euler [1, p. 90];
- L'emploi explicite de la dérivée dans la recherche d'extrémums est dû à Leibniz en 1684 [15, p. 766];
- Une définition claire de la notion d'extrémant apparaît chez Cauchy en 1821 [15, p. 766].

Quant à la méthode \mathcal{M}_2 , elle revient géométriquement à considérer l'intersection entre des droites horizontales et la parabole qui représente la fonction étudiée : une horizontale d'ordonnée inférieure à $b^2/4$ rencontre la courbe en deux points d'intersection d'abscisses notées a et e . Au fur et à mesure que l'ordonnée de la sécante horizontale grandit et s'approche de la valeur optimale $b^2/4$, la différence entre les deux nombres a et e diminue, « jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait » [6, Tome III, p. 149]. Ainsi, Fermat était-il déjà conscient du fait que la tangente au point donnant le maximum cherché est la limite de sécantes horizontales [2] et est dès lors aussi parallèle à l'axe des abscisses.

2.2. La notion d'infiniment petit

Comme nous l'avons déjà signalé, plusieurs interprétations des travaux de Fermat se basent sur la notion d'infiniment petit. Ces références impli-

cites à la notion de nombre infinitésimal ⁽²⁾ montrent, une nouvelle fois, à quel point l'œuvre de Fermat était profonde et novatrice, puisque le concept d'infiniment petit ne fut véritablement introduit de façon pragmatique que dans les travaux de Leibniz et ses successeurs sur les fondements de l'analyse mathématique.

Toutefois, dès le début du dix-neuvième siècle, les mathématiciens abandonnèrent, progressivement et définitivement, l'exploitation des nombres infinitésimaux, car ceux-ci soulevaient des objections de nature ontologique et entraînaient des contradictions de type logique [3].

Récemment, le logicien A. Robinson [19] remit à l'honneur les nombres infiniment petits ; il en prouva l'existence dans le contexte des nombres hyperréels. Il est désormais acquis, de manière incontestable, que l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels peut être étendu en un ensemble ${}^*\mathbb{R}$ de nombres hyperréels qui forme un corps algébrique totalement ordonné dont celui des réels est un sous-corps et au sein duquel existent des nombres hyperréels et non réels de trois ordres de grandeur :

- Des nombres infiniment petits, c'est-à-dire des nombres non nuls dont la valeur absolue est inférieure à tout nombre réel positif ;
- Des nombres infiniment grands (ou non limités), c'est-à-dire des nombres hyperréels dont la valeur absolue est supérieure à tout nombre réel positif ;
- Des nombres appréciables, c'est-à-dire des nombres hyperréels compris entre deux réels non nuls.

De plus, tout hyperréel limité x , c'est-à-dire infiniment petit ou appréciable, se voit associer un et un seul réel, appelé la partie standard de x et noté $\text{st}(x)$; les règles régissant le passage à la partie standard sont classiques et naturelles. L'analyse infinitésimale peut être avantageusement et aisément développée dans ce contexte, ainsi qu'en attestent différents travaux récents [8], [9], dont l'ouvrage de Keisler [13] qui peut servir de référence.

Interprétons dès lors la méthode de Fermat dans le contexte des nombres hyperréels.

Recherchons, pour fixer les idées, le maximum d'une fonction f en la variable réelle a : pour l'exemple traité plus haut, $f(a) = ab - a^2$. Considérons

⁽²⁾ Dans la suite de cette note, les termes *infinitésimal* et *infiniment petit* sont synonymes.

un nombre hyperréel et non réel ε infiniment petit. Admettons que $f(a)$ est le maximum (supposé strict ⁽³⁾) cherché. On doit dès lors avoir

$$f(a + \varepsilon) < f(a),$$

d'où l'on déduit respectivement, selon le signe de ε

$$\frac{f(a + \varepsilon)}{\varepsilon} < \frac{f(a)}{\varepsilon} \text{ si } \varepsilon > 0,$$

mais

$$\frac{f(a + \varepsilon)}{\varepsilon} > \frac{f(a)}{\varepsilon} \text{ si } \varepsilon < 0.$$

Un passage par la partie standard livre

$$\text{st} \left(\frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right) \leq 0 \text{ si } \varepsilon > 0,$$

$$\text{st} \left(\frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right) \geq 0 \text{ si } \varepsilon < 0,$$

d'où la conclusion résultant de la définition du nombre dérivé en analyse non standard [8], [13], ...

$$\text{st} \left(\frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right) = f'(a) = 0.$$

De manière certes anachronique, on peut penser que ce raisonnement est fidèle à la pensée de Fermat. En effet, dans deux lettres adressées à Mersenne, le Toulousain signale que sa méthode « tire son principal fondement de ce que $A + E$ fait la même chose que $A - E$ » et que « si $A + E$ donne moins que A , $A - E$ doit aussi donner moins que A » [6, pp. 152 et 254]. En d'autres termes et avec d'autres notations, Fermat considère deux abscisses situées l'une à gauche et l'autre à droite de la solution cherchée, ce qui correspond bien aux deux cas envisagés ci-dessus en fonction du signe de l'infiniment petit ε .

Dans une lettre datant de 1643 et adressée à Brûlart de Saint-Martin [6, pp. 120–125] ⁽⁴⁾ de ce qu'il appelle la « question » en $A + E$ et en $A - E$,

⁽³⁾ Le cas des inégalités larges se traite semblablement.

⁽⁴⁾ L'emploi systématique des séries débute avec Newton en 1669, tandis qu'une définition précise n'en est donnée qu'en 1821 par Cauchy [Mawhin 1997, p. 795]. Toutefois, cette théorie peut être appliquée ici puisque Fermat ne considérait que des fonctions de type polynomial.

et que nous pourrions écrire avec des notations modernes sous la forme

$$f(A \pm E) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\pm 1)^n \frac{f^{(n)}(A)}{n!} E^n.$$

Pour obtenir un maximum en A , il faut que $f(A \pm E)$ reste toujours inférieur à $f(A)$, ce qui impose la nullité de la dérivée première de f en A , le caractère maximal de l'objectif résultant alors de la négativité de la dérivée deuxième. Effectivement, du développement en série ci-dessus, on peut déduire que

$$f(A \pm E) - f(A) = (\pm 1)f'(A)E + \frac{1}{2}f''(A)E^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(A)}{n!} (\pm E)^n,$$

et si E désigne un infiniment petit, les termes contenant E^2, E^3, \dots sont négligeables vis-à-vis du terme en E , de même que les termes en E^3, E^4, \dots sont négligeables par rapport à celui en E^2 , ce qui permet de conclure.

2.3. La notion d'adégalité

La méthode de Fermat repose fondamentalement sur la notion d'*adégalité*, symbolisée par le signe \sim . Il s'agit, en reprenant les termes de l'auteur, de « cette sorte de comparaison *adaequalitatem* comme Diophante l'appelle, car le mot grec $\pi\alpha\rho\iota\sigma\sigma\eta\zeta$ dont il se sert, peut être ainsi traduit *Touchant la même méthode* » [6, Supplément, p. 74] ou encore d'une « comparaison feinte » [6, Tome III, p. 127] dans la mesure où les deux nombres comparés sont « comme s'ils étaient égaux, quoi qu'en fait ils ne le soient point » [6, Tome III, p. 126]. La traduction anglaise de ce mot latin *adaequalitas* est souvent *approximate equality* [20, p. 51], termes auxquels certains préfèrent *pseudo-equality* (par exemple, [4, p. 156]; [5, p. 123]).

La dernière ligne du raisonnement formulé par la méthode \mathcal{M}_1 , à savoir

$$\text{« Supprimez } e : b = 2a \text{ »,}$$

s'explique très aisément en analyse non standard. En effet, les nombres hyperréels $2a + e$ et b sont infiniment proches l'un de l'autre si e désigne un infiniment petit ; leurs parties réellement observables, c'est-à-dire leurs parties standard, égales respectivement aux réels $2a$ et b , sont donc égales. La transformation du signe \sim d'adégalité en celui $=$ d'égalité correspond

donc à un « retour naturel » de l'ensemble ${}^*\mathbb{R}$ des hyperréels à celui \mathbb{R} des réels grâce à un passage par la partie standard. Ce retour dans \mathbb{R} se traduit par la disparition de l'infiniment petit e et, intuitivement, s'explique par l'évanouissement de e évoqué dans \mathcal{M}_2 ; cette idée a été souvent exploitée par les analystes des dix-septième et dix-huitième siècles.

Par contre, l'interprétation du signe \sim n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît à première vue. De fait, on pourrait a priori penser à traduire le signe \sim par « est infiniment proche de ». Cela s'applique bien pour le premier usage du symbole, à savoir

$$be \sim 2ae + e^2.$$

Toutefois, cela ne permet pas de justifier la suite du raisonnement, soit

$$b \sim 2a + e ;$$

en effet, si deux nombres hyperréels sont infiniment proches l'un de l'autre, il n'en va pas nécessairement de même pour leur quotient par un même infiniment petit ; ainsi, si ε désigne un infiniment petit positif, ε est infiniment proche de ε^2 , alors que 1 n'est évidemment pas infiniment proche de ε .

Si, dans l'exemple de la méthode \mathcal{M}_1 , l'on regarde les deux lignes dans lesquelles intervient le signe \sim , on pourrait penser à traduire ce symbole « est de même ordre de grandeur que ». De fait, be et $2ae + e^2$ sont tous deux des infiniment petits, tandis que b et $2a + e$ sont tous les deux appréciables. Cette tentative ne permet toutefois guère d'expliquer l'égalité ultime $b = 2a$; effectivement, on peut exhiber des infiniment petits, tels que ε et $2\varepsilon + \varepsilon^2$ par exemple, qui ont donc même ordre de grandeur, dont les quotients par ε sont également de même ordre de grandeur, mais dont les parties standard sont deux réels distincts.

Une explication rigoureuse du raisonnement de Fermat peut être donnée en « juxtaposant » en quelque sorte les deux relations « être infiniment proche de » et « être de même ordre de grandeur que » au sein de l'ensemble des hyperréels. De façon plus précise, on peut utilement faire appel à la notion suivante : pour deux hyperréels x et y arbitraires et un hyperréel ε infiniment petit positif quelconque, on a $x \sim y$ si et seulement si la différence $x - y$ est telle que le quotient $\frac{x-y}{\varepsilon}$ est appréciable.

Avec cette définition, reprenons le raisonnement de Fermat pour résoudre l'exemple. On a bien, pour $e = \varepsilon$ infinitésimal, $be \sim 2ae + e^2$ puisque

$$\frac{be - 2ae - e^2}{e} = b - 2a - e \text{ est appréciable.}$$

De plus, la relation $b \sim 2a + e$ signifie que

$$\frac{b - 2a - e}{e} = \frac{b - 2a}{e} - 1 \text{ est appréciable,}$$

ce qui ne peut se produire que lorsque les deux réels b et $2a$ coïncident, d'où la conclusion $b = 2a$.

Conclusion

L'analyse épistémologique qui précède montre que la théorie des extrémums de Fermat préfigure assurément les développements de l'analyse mathématique, de ses débuts au dix-septième siècle avec ses fondateurs Newton et Leibniz, jusqu'à ses développements récents avec l'avènement de l'analyse non standard.

En effet, la méthode de Fermat a été développée avant la naissance des notions fondamentales de l'analyse mathématique, c'est-à-dire avant l'apparition pragmatique des infiniment petits, et avant même l'introduction de la notion générale de fonction et, bien sûr, de celle de dérivée. Il est ainsi confirmé que les concepts mathématiques sont souvent utilisés concrètement avant d'être rigoureusement définis ; comme le signale [7, p. 195], ceci est le cas pour le concept de dérivée qui

- Est en premier lieu utilisé par exemple par Fermat ;
- Ensuite découvert essentiellement par Newton et Leibniz ;
- Puis exploré et développé en particulier par Lagrange ;
- Et enfin seulement défini grâce au concept de limite notamment par Cauchy.

Au surplus, les raisonnements récents de l'analyse non standard peuvent également se retrouver indirectement dans l'œuvre analysée.

Cet épisode de l'histoire des mathématiques montre également une certaine évolution dans la rigueur des raisonnements. La méthode \mathcal{M}_1 a d'abord été décrite de manière technique, avant d'être justifiée, parfois d'ailleurs de façon peu convaincante. De plus, les méthodes développées deviennent de plus en plus générales, mais aussi plus sophistiquées et abstraites. Ainsi, Fermat ne considérait que des fonctions de type polynomial, alors que sa méthode concerne aujourd'hui n'importe quelle fonction dérivable. Par ailleurs, la notion de limite développée depuis le dix-neuvième

siècle s'écarte de l'intuition présente chez les savants des dix-septième et dix-huitième siècles. La naissance de l'analyse non standard a remis à l'honneur, et cette fois avec toute la rigueur souhaitée, l'importance des infiniment petits dans les problèmes locaux étudiés en analyse mathématique. Mais le prix à payer pour un retour aux idées intuitives de Fermat tout en se conformant aux exigences contemporaines de rigueur est une sophistication de l'outil mathématique : la démonstration rigoureuse de l'existence d'infiniment petits reste assez abstraite puisqu'elle utilise des procédés techniques de logique mathématique, plus particulièrement de la théorie des modèles. Il est toutefois possible, dans une introduction à l'analyse mathématique, d'exploiter les infiniment petits sans recourir à des techniques évoluées de la logique.

Ainsi, il est désormais possible d'interpréter aisément le raisonnement de Fermat à l'aide de concepts très récents de l'analyse tout en conservant les intuitions initiales du savant français.

Bibliographie

- [1] AHA, *Vers l'infini pas à pas : approche heuristique de l'analyse. Guide méthodologique*, Bruxelles : De Boeck - Wesmael, 1999.
- [2] ANTIBI, A., BAIR, J., HENRY, V., Limites de courbes : théorie et applications en analyse, *Mathématique et Pédagogie*, **147**, 2004, pp. 65–87.
- [3] BAIR, J., HENRY, V., De l'analyse classique à l'analyse non standard, *Les cahiers de la mathématique appliquée*, **1**, Bruxelles : F. Ferrer et Liège : Céfal, 2003, pp. 51–74.
- [4] BOYER, C. B., *History of the Calculus*, New York, 1959.
- [5] EDWARDS, C. H., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, 1979.
- [6] FERMAT, P. DE, *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de P. TANNERIE et C. HENRY, Paris : Gauthier-Villars, Tome I : 1891, Tome II : 1894, Tome III : 1896, Tome IV : 1912, Supplément : 1922.
- [7] GRABINER, J., The changing concept of change : the derivation from Fermat to Weierstrass, *Mathematics Magazine*, 1983, pp. 195–206.
- [8] HENRY, V., Les hyperréels en analyse, *Mathématique et Pédagogie*, **141**, 2003, pp. 47-58.

- [9] HENRY, V., *Questions de didactique soulevées par un enseignement de l'analyse non standard à de futurs économistes*, thèse doctorale, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2004.
- [10] HENRY, V., Tangentes aux coniques : Méthodes passées, présentes et à venir, *Mathématique et Pédagogie*, **152**, 2005, pp. 41–75.
- [11] HUYGENS, C., *Œuvres complètes*, La Haye : Martinus Nijhoff, Tome 20, 1940.
- [12] IREM-MAPPEN TOULOUSE, *Des problèmes d'extrema chez Fermat à la notion de dérivée*, 1989.
- [13] KEISLER, H.J., *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, 1976.
- [14] MAHONEY, M. S., *The Mathematical Career of Pierre Fermat 1601–65*, Princeton University Press, 1973.
- [15] MAWHIN, J., *Analyse — Fondements, techniques, évolution*, Bruxelles : De Boeck Université, 1997.
- [16] MONTUCLA, J. E., *Histoire des mathématiques*, Paris : Agasse, Paris, 1799–1807. Rééd. Blanchard.
- [17] NOËL, G., TROMPLER, S., *Vers les infiniment petits*, brochure éditée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, 2003.
- [18] PAPPUS D'ALEXANDRIE, *La Collection mathématique*, Traduite avec une introduction et des notes par P. VEREECKE, deux tomes. Nouveau tirage. Paris : Blanchard, 1982.
- [19] ROBINSON, A., *Non Standard Analysis*, Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **64**, 1961, pp. 432–440.
- [20] STRØMHOLM, P., Fermat's Methods of Maxima and Minima and of Tangents. A Reconstruction, *Archive for History of Exact Sciences*, Springer-Verlag, **5-1**, 1968, pp. 47–69.
- [21] WIELEITNER H., Bemerkungen zu Fermats Methode der Aufsuchung von Extremwerten und der Bestimmung von Kurventangenten, *Jahresber. dtsh. Math. Vereinig*, **38**, 1929, pp. 24–35.

Problèmes

Claudine Festraets ⁽¹⁾

Inégalités

problème n° 313 de Mathématique et Pédagogie n° 153

x, y et z sont des réels tels que $x + y + z = 5$ et $xy + yz + zx = 3$. Démontrer que $-1 \leq z \leq \frac{13}{3}$.

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek

L'identité $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ permet de remplacer le système formé par les deux équations données par le système

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 19. \end{cases}$$

Remplacer dans la seconde équation y par $5 - x - z$ donne une équation du second degré en x :

$$x^2 + (z - 5)x + z^2 - 5z + 3 = 0.$$

Comme x, y, z sont des réels, le discriminant Δ est nécessairement positif. $\Delta = -3z^2 + 10z - 13 > 0$, d'où $-1 \leq z \leq \frac{13}{3}$.

Remarquons que éliminer x ou z donne des résultats analogues.

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare, P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, R. CHOULET de Avenay, K. CHRILAA de Bruxelles, A. LAFORT de Nivelles, P. LE GALL de Metz, A. PATERNOTTRE de Boussu, J. OOMS de Chimay, M. MAESEN de Eupen et J. RASSE de Méan.

Système

problème n° 314 de Mathématique et Pédagogie n° 153

Quel est le plus grand entier n pour lequel il existe un réel x satisfaisant le système d'inéquations $k < x^k < k + 1$, pour $k = 1, 2, 3, \dots, n$?

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

Solution de A. LAFORT de Nivelles

Le système donné peut s'écrire

$$\sqrt[k]{k} < x < \sqrt[k]{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

qui implique

$$\max_k \sqrt[k]{k} < x < \min_k \sqrt[k]{k+1}.$$

Or $\max_k \sqrt[k]{k} = \sqrt[3]{3}$ car $\sqrt[x]{x}$ croît entre 0 et e et décroît ensuite, et $\min_k \sqrt[k]{k+1} = \sqrt[n]{n+1}$ car $\sqrt[x]{x+1}$ décroît de façon monotone entre 0 et $+\infty$.

La condition est donc $\sqrt[3]{3} < \sqrt[n]{n+1}$, elle est satisfaite pour $n < 5$.

La solution est $n = 4$, pour laquelle convient, par exemple, le réel $x = 1,49$.

Bonnes solutions de R. CHOLET de Avenay, J. FINOULST de Diepenbeek, P. LE GALL de Metz, J. OOMS de Chimay et J. G. SEGERS de Liège.

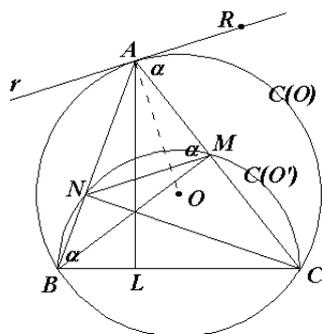
Perpendiculaires

problème n° 315 de Mathématique et Pédagogie n° 153

Dans le triangle ABC , soient L , M et N les pieds des perpendiculaires abaissées de A , B , C respectivement sur les côtés opposés. Démontrer que les perpendiculaires abaissées de A , B , C sur MN , LN , LM respectivement sont concourantes.

Solution de J. ANSEEUW de Roeselare

Construisons le cercle $C(O)$, de centre O , circonscrit au triangle ABC et le cercle $C(O')$ de centre O' milieu de $[BC]$.



Le quadrilatère $BNMC$ est inscrit dans le cercle $C(O')$ car $CN \perp AB$ et $BM \perp AC$.

Construisons aussi la tangente r au cercle $C(O)$ au point A et soit R un point de cette tangente.

Dans le cercle $C(O)$, $\widehat{ABC} = \widehat{RAC} = \alpha$, car ces cercles interceptent le même arc \widehat{BC} .

Dans le quadrilatère inscrit $BNMC$, on a $\widehat{NBC} + \widehat{NMA} = 180^\circ$, d'où $\widehat{NBC} = \widehat{NMA} = \alpha$ et donc $r \parallel NM$. La perpendiculaire de A sur MN est aussi perpendiculaire à r et passe donc par O .

De même pour les perpendiculaires abaissées sur LN et LM .

Les trois perpendiculaires concourent au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC .

A. BOGAERTS de Linkebeek, P. BORNSZTEIN de Maisons-Laffitte, R. CHOULET de Avenay, J. FINOULST de Diepenbeek, K. CHRILAA de Bruxelles, A. LAFORT de Nivelles, P. LE GALL de Metz, M. MAESEN de Eupen, J.OOMS de Chimay, A. PATERNOTTRE de Boussu et J. RASSE de Méan ont tous envoyé d'excellentes solutions .

* *

*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir pour le 1^{er} septembre 2006 au plus tard. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier \LaTeX ou à défaut au format doc ou txt.

322. Parallélogramme

Construire à la règle et au compas le parallélogramme dont sont connus les longueurs d et D des diagonales ainsi qu'un angle. (*Proposé par A. LAFORT de Nivelles*)

323. Trapèze

Construire à la règle et au compas le trapèze rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires et de longueurs données d et D . En calculer le périmètre et l'aire en fonction de d et D . (*Proposé par A. LAFORT de Nivelles*)

324. Entre 10 et 99

Déterminer tous les nombres n de deux chiffres (en base 10) multiples de 4 et tels que toute puissance entière de n se termine par n .

Olympiades

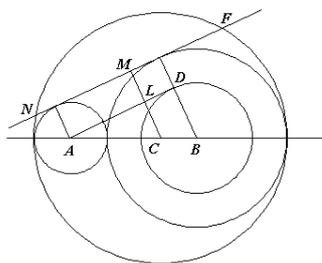
Claudine Festraets ⁽¹⁾

Voici des solutions aux problèmes 8, 13 et 14 du test AIME 2005. Ces trois problèmes n'avaient été résolus par aucun des élèves ayant participé à ce test en Belgique. Certaines de ces solutions m'ont été envoyées par plusieurs lecteurs. J'ai choisi celles qui me paraissent le plus directes car les élèves ne disposent que de trois heures pour répondre à 15 questions et chacune doit avoir une solution assez courte. De plus, j'ai raccourci certaines solutions.

8. Les cercles C_1 et C_2 sont tangents extérieurement et sont tous deux tangents intérieurement au cercle C_3 . Les rayons de C_1 et C_2 sont respectivement 4 et 10 et les centres des trois cercles sont colinéaires. Une corde de C_3 est aussi une tangente extérieure commune de C_1 et C_2 . Etant donné que la longueur de la corde est $m\sqrt{n}/p$, où m, n et p sont des entiers positifs, m et p sont premiers entre eux et n n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier, déterminez $m + n + p$.

Solution de J. RASSE de Méan

Soient A, B et C les centres respectifs des cercles C_1, C_2 et C_3 . Je construis le cercle intermédiaire de centre B et de rayon 6 qui permet de construire la tangente NF commune à C_1 et C_2 . Cette tangente est parallèle à la tangente AD au nouveau cercle.



Les triangles ALC et ADB sont semblables : $\frac{AC}{AB} = \frac{LC}{DB}$, $\frac{10}{14} = \frac{LC}{6}$, donc $LC = \frac{30}{7}$ et $CM = 4 + LC = \frac{58}{7}$.

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

CM est la médiatrice de $[NF]$, donc $NM = MF$.

$$NM^2 = CN^2 - CM^2 = 14^2 - \left(\frac{58}{7}\right)^2 = 196 - \frac{3364}{49} = \frac{6240}{49}, \text{ d'où } NM = \frac{4\sqrt{390}}{7} \text{ et } NF = \frac{8\sqrt{390}}{7}. \text{ On a alors } m + n + p = 8 + 390 + 7 = 405.$$

13. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers qui satisfait à $P(17) = 10$ et $P(24) = 17$. Étant donné que l'équation $P(n) = n + 3$ a deux solutions entières distinctes n_1 et n_2 , trouvez le produit $n_1 \cdot n_2$.

Solution de A. LAFORT de Nivelles

$P(17) = 10 = 17 - 7$ et $P(24) = 17 = 24 - 7$ permettent d'écrire

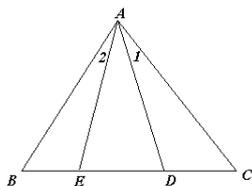
$$P(x) = (x - 7) + (x - 17)(x - 24)Q(x)$$

$P(n) = n + 3$ donne donc $n - 7 + (n - 17)(n - 24)Q(n) = n + 3$ ou encore $(n - 17)(n - 24)Q(n) = -10$.

$n - 17$ et $n - 24$ doivent donc être des diviseurs de -10 , tous les éléments de la relation précédente étant des entiers, seules deux valeurs y satisfont : $n_1 = 19$ et $n_2 = 22$. D'où $n_1 \cdot n_2 = 19 \cdot 22 = 418$.

14. Dans le triangle ABC , $AB = 13$, $BC = 15$ et $CA = 14$. Le point D est sur le segment \overline{BC} , avec $CD = 6$. Le point E est sur le segment \overline{BC} de sorte que les angles $\sphericalangle BAE$ et $\sphericalangle CAD$ aient même mesure. Étant donné que $BE = p/q$, où p et q sont des entiers positifs premiers entre eux, trouvez q .

Solution de A. LAFORT de Nivelles et de J. RASSE de Méan



Dans le triangle ABC , $\cos C = \frac{15^2 + 14^2 - 13^2}{2 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{3}{5}$ et donc $\sin C = \frac{4}{5}$;

$$\cos B = \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65} \text{ et donc } \sin B = \frac{56}{65}.$$

Dans le triangle ACD , $AD^2 = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{656}{5}$, $\sin A_1 = \frac{CD \sin C}{AD} = \frac{6}{\sqrt{205}}$ et donc $\cos A_1 = \frac{13}{\sqrt{205}}$.

Dans le triangle AEB , $BE = \frac{13 \cdot \sin A_2}{\sin E}$; or $\sin E = \sin(A_2 + B) =$

$$= \sin A_2 \cdot \cos B + \cos A_2 \cdot \sin B = \frac{926}{65\sqrt{205}}, \text{ donc } BE = 13 \cdot \frac{6}{\sqrt{205}} \cdot \frac{65\sqrt{205}}{926} = \frac{13 \cdot 3 \cdot 65}{463}.$$

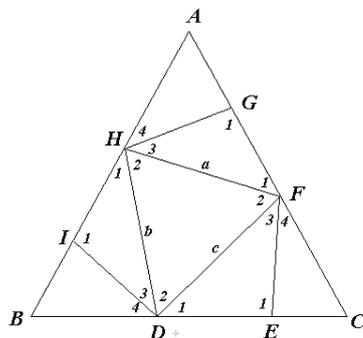
Cette fraction est irréductible, $q = 463$.

* *
* *

Vous trouverez ci-dessous les solutions des trois premiers problèmes de l'Olympiade Mathématique Internationale 2005.

1. Six points sont choisis sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC : A_1, A_2 sur BC , B_1, B_2 sur CA et C_1, C_2 sur AB . Ces points sont les sommets d'un hexagone convexe $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ dont les côtés sont égaux. Montrer que les droites A_1B_2 , B_1C_2 et C_1A_2 sont concourantes.

Solution



Si le triangle DFH est équilatéral, alors DG est axe de symétrie de $DFGH$, donc perpendiculaire à HF . De même, FI est perpendiculaire à DH et EH est perpendiculaire à DF . DG, FI, EH sont les trois hauteurs du triangle DFH et donc sont concourantes.

Il suffit de démontrer que DFH est un triangle équilatéral.

Supposons $a \leq b \leq c$.

On a alors $D_2 \leq F_2 \leq H_2$ dans le triangle DFH et $G_1 \leq I_1 \leq E_1$ dans les triangles isocèles FGH, HID, DEF .

Ce qui entraîne :

- d'une part, $60^\circ + H_4 \leq 60^\circ + D_4 \leq 60^\circ + F_4$, donc $H_4 \leq D_4 \leq F_4$;
(1)
- d'autre part, $H_3 = F_1 \geq H_1 = D_3 \geq D_1 = F_3$.

En additionnant les trois inégalités

$$\begin{cases} F_1 \geq D_3 \\ F_2 \geq D_2 \\ F_3 = D_1, \end{cases}$$

on obtient $F_1 + F_2 + F_3 = 180^\circ - F_4 \geq D_3 + D_2 + D_1 = 180^\circ - D_4$,
d'où $D_4 \geq F_4$ (2)

De (1) et (2), on a $D_4 = F_4$. De même, $H_4 = F_4$.

D'où $a = b = c$ et le triangle DFH est bien équilatéral.

2. Soient a_1, a_2, \dots une suite d'entiers ayant une infinité de termes strictement positifs et une infinité de termes strictement négatifs. On suppose que, pour chaque entier strictement positif n , les nombres a_1, a_2, \dots, a_n ont n restes, deux à deux différents, après division par n . Montrer que chaque entier figure exactement une fois dans la suite.

Solution de F. GONZE, élève de 5^e année à l'Institut de la Providence à Wavre

Vu que l'on doit obtenir n restes différents avec n termes, cela implique que tous les termes doivent être différents, car sinon ils auraient le même reste.

Pour un n fixé, la différence entre le plus grand et le plus petit des a_i , avec $i \leq n$, doit être strictement inférieure à n . En effet, dans le cas contraire, si leur différence est égale à $n + k$ avec $k > 0$, il suffira de considérer la suite allant jusqu'au $(n + k)^e$ terme pour arriver à une contradiction avec l'énoncé.

Or, si la différence entre le plus grand et le plus petit des n nombres entiers est inférieure à n , et que ces n nombres sont distincts, cela implique que, une fois ordonnés, ces nombres sont consécutifs.

Donc, si l'on choisit un n tels que a_1, a_2, \dots, a_n comporte un certain nombre positif et un certain nombre négatif, tous les entiers compris entre ces deux nombres seront aussi dans la suite et vu qu'il y a une infinité de positifs et une infinité de négatifs dans la suite, alors tous les entiers sont dans la suite.

3. Soit x, y et z des réels positifs tels que $xyz \geq 1$. Montrer que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

Solution

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \frac{x^5 + y^2 + z^2 - x^2 - y^2 - z^2}{x^5 + y^2 + z^2} = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2}.$$

Il faut alors démontrer que

$$S = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq 3.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition $xyz \geq 1$, il vient :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geq (x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y^2 + z^2)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

d'où $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{yz + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$, ce qui donne

$$S \leq 2 + \frac{yz + zx + xy}{x^2 + y^2 + z^2} \leq 3,$$

car $x^2 + y^2 + z^2 \geq yz + zx + xy$.

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2006)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :

- Cotisation ordinaire : 24 €
- Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 €
- Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 €
- Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 65 € (non PRIOR), 72 € (PRIOR)

Autres pays : 70 € (non PRIOR), 79 € (PRIOR)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 30 €.

Europe : 50 € (non PRIOR), 54 € (PRIOR).

Autres pays : 53 € (non PRIOR), 58 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2005 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.

Année 5 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,80 €, Europe : 4,50 €, Autres pays : 6 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

- Abonnements groupés à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 4 €.

- Abonnements groupés aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 8 €.

Abonnements individuels.

- Abonnements à une des revues : (3 numéros)

Belgique : 6 €. Europe ⁽¹⁾ : 18 € (non PRIOR), 20 € (PRIOR).
Autres pays : 19 € (non PRIOR), 22 € (PRIOR).

- Abonnements aux deux revues : (6 numéros)

Belgique : 12 €. Europe : 24 € (non PRIOR), 26 € (PRIOR).
Autres pays : 25 € (non PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2002–2003 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.

Année 2003–2004 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 44 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :

CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429

BIC BPOTBEB1

ou CCP LILLE : IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683

BIC PSSTFRPPLIL

Le coin du trésorier

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n° 7 à n° 11 et n° 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 7 (Vers les infinement petits)			
Simone Trompler et Guy Noël	6 €		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Dossier 9 (Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Jacques Bair , Mathématique et Sport	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12 €	9,50 €	T2
G. Robert , CD-Rom, logiciels mathématiques	5 €	/	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €		v. ci-dessous

Frais d'expédition (non prior)

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	6,50 €	10 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions *prior* :
consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe »,
voir les tarifs postaux.

Pour tout problème,
consulter le secrétariat.